
МЕХАНИКА МАШИН

УДК 621.01

О СТРУКТУРНЫХ ГРАФАХ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

© 2023 г. М. Д. Ковалёв

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия**e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru*

Поступила в редакцию 24.08.2022 г.

После доработки 10.10.2022 г.

Принята к публикации 20.10.2022 г.

На примере плоских механизмов с вращательными парами проводится сравнение двух типов графов, которыми описывают их строение. Графы **G** первого типа, сопоставляющиеся шарнирно-рычажным механизмам, состоят из вершин, отвечающих шарнирам механизма, и из ребер, отвечающих его рычагам. Вершины графов **Г** второго типа отвечают звеньям механизма, а ребра — кинематическим парам. Оказывается, что при отсутствии совмещенных шарниров, графы **G** и **Г** равноценны для описания структуры механизмов. При наличии совмещенных шарниров граф **Г** и получаемый его модификацией в теории механизмов граф **Г'** в отличие от графа **G** не дают полной информации о структуре механизма.

Ключевые слова: математическая модель, структура механизмов, шарнирный механизм, структурный граф механизма

DOI: 10.31857/S023571192301008X, **EDN:** ASFXPT

Широко известно, что так называемые структурные формулы теории механизмов не всегда дают верный результат. Это относится и к простейшей и исторически первой из них, формуле Чебышева, выражающей число степеней свободы (степень подвижности) плоского шарнирно-рычажного механизма через число его звеньев и число вращательных пар. Причиной этого является сложность геометрической природы механизмов. Степень подвижности определяется не только числом кинематических пар и звеньев, но и порядком их соединения, т.е. строением механизма. Подходящий язык для описания строения механизмов доставляет математическая теория графов. Она все больше начинает применяться при изучении структуры механизмов [1–3]. С ее использованием автор [4, 5] предложил формализацию основных понятий теории механизмов на основе кинематической модели плоских шарнирно-рычажных устройств. Эта формализация позволяет дать критерий применимости к типичным¹ устройствам данной структуры формул для числа степеней подвижности. В ней строение шарнирно-рычажного механизма задается графом **G**, вершины которого отвечают шарнирам, а ребра отвечают звеньям, в качестве которых выступают несущие на своих концах шарниры прямолинейные стержни.

В теории же механизмов [1, 2] в качестве структурного графа принято брать граф **Г**, вершины которого отвечают звеньям, а ребра — кинематическим парам. В статье будет выяснено, равносильны ли описания строения плоских шарнирно-рычажных устройств графами **G** и **Г**. А также приведен критерий применимости структурной

¹ С математической точки зрения нетипичные устройства такого строения образуют множество неполной размерности в множестве всех устройств этого строения.

формулы к типичным плоским шарнирно-рычажным устройствам, строение которых задано графом $\mathbf{G}$.

Кинематическая модель шарнирно-рычажных механизмов и граф $\mathbf{G}$. Мы рассматриваем плоские шарнирно-рычажные устройства, составленные из прямолинейных абсолютно твердых стержней (рычагов), соединенных на своих концах шарнирами. Каждый рычаг несет по шарниру на своих концах, внутри рычагов шарниров нет². Если в шарнире соединены лишь два рычага, то этому шарниру отвечает обычная вращательная пара, допускающая произвольное проворачивание в плоскости одного из рычагов относительно другого. Мы называем такой шарнир 1-шарниром. Если в шарнире соединены $k > 2$ рычагов, то это так называемый совмещенный или сложный шарнир с одним общим центром вращения для всех k рычагов. Его мы называем $(k - 1)$ -шарниром. В этом шарнире каждый из k рычагов допускает проворачивание, независимо от остальных рычагов. Если же конец рычага не соединен ни с каким другим рычагом, то в нем нет кинематической пары, но мы считаем его шарниром, и называем 0-шарниром. В теории механизмов принято рассматривать закрепленные в стойке конструкции. Мы будем проводить закрепление устройства в плоскости также допускающими полное проворачивание шарнирами, которые назовем закрепленными, и на рисунках будем обозначать крестиками в отличие от кружочков, отвечающих незакрепленным (свободным) шарнирам. В закрепленном шарнире имеется хотя бы одна кинематическая пара, и он не может быть 0-шарниром.

Нашему шарнирно-рычажному устройству естественно сопоставить граф³ $\mathbf{G}$, вершины которого отвечают шарнирам, а ребра, понимаемые как соединяющие пары вершин отрезки прямых, отвечают рычагам. Граф $\mathbf{G}$ мы считаем связным⁴ без петель и кратных ребер. Более того, при наличии закрепленных шарниров, порожденный⁵ свободными шарнирами подграф графа $\mathbf{G}$ также считаем связным. Это условие налагается, чтобы не считать одним механизмом кинематически не связанные между собой устройства. И, естественно, в $\mathbf{G}$ нет ребер, соединяющих вершины, отвечающие закрепленным шарнирам.

После задания в плоскости положений закрепленных шарниров исследование кинематики шарнирно-рычажных устройств с заданным графом $\mathbf{G}$ сводится к исследованию множества решений системы квадратичных уравнений. А именно, уравнений, накладывающих условия на расстояния между шарнирами

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = d_{ij},$$

где (x_i, y_i) — координаты i -го шарнира p_i ; d_{ij} — квадрат длины рычага, несущего на концах шарниры p_i и p_j . Число уравнений равно числу рычагов в конструкции. Конфигурационное пространство механизма есть компонента связности положительной размерности множества решений этой системы. Компонентам связности нулевой размерности, т.е. состоящим из одной точки, отвечают шарнирные фермы.

В нашей идеализированной модели допускается пересечение различных рычагов и совпадение положений различных несмежных, т.е. не принадлежащих одному рычагу, шарниров.

² Если мы хотим поместить шарнир внутри рычага, то придется его закрепить там двумя рычагами, исходящими из концевых шарниров этого рычага.

³ Его мы считаем абстрактным графом, т.е. совокупностью вершин и их неупорядоченных пар, называемых ребрами.

⁴ Связность означает возможность перейти из любой вершины графа в любую другую его вершину по ребрам графа.

⁵ То есть, состоящий из отвечающих свободным шарнирам вершин, и ребер, соединяющих эти вершины между собой.

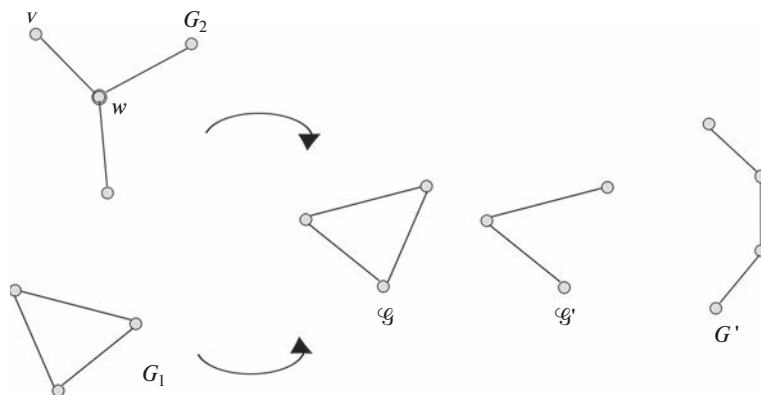


Рис. 1. Связь между графами и их реберными графами.

Сравнение графов G и $\mathcal{G}$. Граф $\mathcal{G}$ для нашего шарнирно-рычажного устройства мы получим, сопоставив каждому рычагу и стойке по вершине, а каждому k -шарниру при $k > 0$ ребро, соединяющее вершины, отвечающие соединенным этим шарниром звеньям (либо двум рычагам, либо рычагу и стойке в случае закрепленного шарнира). 0-шарнирам ничего не сопоставляется.

Возникает вопрос: равносильно ли описание структуры шарнирно-рычажной конструкции с помощью графа $\mathcal{G}$ ее описанию графом G . На самом деле, нет, как показывает пример рис. 1. Для незакрепленных шарнирно-рычажных конструкций, для которых графом G являются полный⁶ граф $G_1 = K_3$ и полный двудольный⁷ граф $G_2 = K_{1,3}$, граф $\mathcal{G}$ один и тот же, а именно K_3 . Эти конструкции существенно различны: одна из них ферма, а другая — механизм с двумя степенями подвижности⁸. Итак, в этом случае по графу $\mathcal{G}$ строение конструкции однозначно не восстанавливается. Граф G несет все сведения о нем.

Однако если откинуть этот случай, то описания становятся равносильными.

Рассмотрим отвечающий незакрепленной шарнирно-рычажной конструкции граф $G(V, E) = G$. Для него граф $\mathcal{G}$ называют реберным⁹ или смежностным по отношению к графу G . Известна следующая теорема [6].

Теорема. Пусть G и G_1 — связные графы, у которых реберные графы изоморфны¹⁰. Графы G и G_1 изоморфны всегда, кроме случая, когда один из них K_3 , а другой $K_{1,3}$.

⁶ Полным называют граф, содержащий все возможные ребра между данными вершинами.

⁷ Полным двудольным $K_{n,m}$ называют граф, вершины которого разделены на две доли: одна из n вершин, другая из m вершин, и каждая вершина одной доли соединена ребром с каждой вершиной другой доли.

⁸ Если закрепить один из рычагов конструкции в плоскости, то размерность ее конфигурационного пространства будет равна двум.

⁹ Реберный граф для графа G в теории графов обычно обозначают как $L(G)$. Чтобы его получить, каждому ребру графа G сопоставляют вершину графа $L(G)$, и если два ребра в G имеют общую вершину, или, как говорят, смежны в этой вершине, то вводят в граф $L(G)$ ребро между вершинами, отвечающими смежным ребрам.

¹⁰ Изоморфные означает одинаково устроенные. Подробнее: графы имеют одно и то же число вершин, и их вершины можно занумеровать так, чтобы получились одинаковые списки ребер.

Из этой теоремы непосредственно вытекают следующие утверждения.

Утверждение 1. Если в графе G связной незакрепленной шарнирно-рычажной конструкции более четырех вершин, то он восстанавливается по графу $\mathcal{G}$ с точностью до переобозначения вершин.

Утверждение 2. При отсутствии совмещенных шарниров описание структуры незакрепленной шарнирно-рычажной конструкции графом $\mathcal{G}$ равносильно ее описанию графом G .

Отметим, что в теории механизмов в случае наличия в устройстве совмещенных шарниров ему принято [1, 7] сопоставлять не граф $\mathcal{G}$, а модифицированный граф $\mathcal{G}'$. Граф $\mathcal{G}'$ получается из графа $\mathcal{G}$ удалением некоторых ребер. А именно, если $\mathcal{G}$ содержит s -шарнир ($s > 1$), то из полного подграфа K_{s+1} , отвечающего в $\mathcal{G}$ этому шарниру, выкидывают часть ребер, чтобы получить включающее все вершины дерево¹¹. Это можно сделать многими способами. В случае 2-шарнира (рис. 1) из подграфа K_3 выкидывается одно из ребер. Однако такое действие ведет к потере информации о строении конструкции. Действительно, по полученному графу $\mathcal{G}'$ невозможно восстановить граф G нашей конструкции. Граф $\mathcal{G}'$ (рис. 1) является реберным для графа G' не-изоморфного ни графу G_1 , ни графу G_2 . Если взять в качестве G граф $K_{1,4}$, то для него реберный граф $\mathcal{G}$ есть полный граф K_4 , а в качестве графа $\mathcal{G}'$ можно выбрать, например, граф $K_{1,3}$, который, как легко понять, не является реберным графом ни для какого графа. Итак, в приведенных примерах по графу $\mathcal{G}'$ граф G не восстанавливается. Из этого следует вывод о том, что граф $\mathcal{G}$ несет больше информации о строении шарнирно-рычажной конструкции, чем граф $\mathcal{G}'$.

О структурных формулах. Аналогом структурной формулы Чебышева для закрепленных устройств в нашей модели является формула

$$W = 2m - r, \quad (1)$$

где W — число степеней свободы; m — число свободных шарниров; r — число рычагов. В ней учитываются все свободные шарниры, в том числе и 0-шарниры. Смысл ее прозрачен: из числа степеней свободы всех незакрепленных шарниров вычитается число условий на их положения, налагаемых рычагами. Эти условия считаются независимыми. В отличие от формулы Чебышева эта формула справедлива и при наличии совмещенных шарниров.

Возможно такое строение механизма, что эта формула будет нарушаться в типичном случае, как это имеет место для механизма на рис. 2.

Хотя наша структурная формула дает нулевое число степеней свободы, типичное устройство такого строения есть механизм — шарнирный четырехзвенник с избыточной связью в шатунном звене. В этом случае независимо от выбора длин рычагов, налагаемые ими условия зависимы.

В комбинаторной теории жесткости [8, 9] найдены условия, необходимые и достаточные для независимости накладываемых рычагами условий в плоском случае. Опишем их. Для произвольного подграфа графа G с m вершинами, отвечающими свободным шарнирам, n вершинами, отвечающими закрепленным шарнирам, и e ребрами (отвечающими рычагам конструкции) должны выполняться условия: 1) при $n = 0$, $e \leq 2m - 3$; 2) при $n = 1$, $e \leq 2m - 1$; 3) при $n \geq 2$, $e \leq 2m$. Эти условия необходимы и достаточны для справедливости подсчета числа степеней свободы типичных шарнир-

¹¹ Деревом называют не содержащий циклов связный граф.

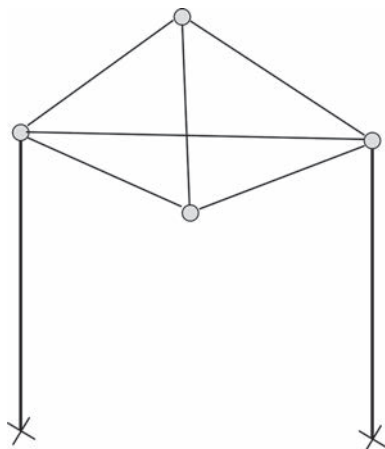


Рис. 2. Пример нарушения структурной формулы в типичном случае.

но-рычажных устройств по формуле (1). Отметим, что первое из них не выполняется для полного подграфа K_4 , ребра которого нарисованы тонкими линиями на рис. 2.

Закключение. Строеение механизмов может быть весьма сложным. Это сказывается уже при исследовании плоских механизмов с вращательными парами, структуре которых посвящены недавние работы [10, 11], выполненные в рамках традиционных понятий. Однако для анализа структуры даже шарнирно-рычажных устройств недостаточно оставаться в рамках традиционных понятий теории механизмов, таких как звенья, кинематические пары и кинематические цепи. Структуру механизмов естественно описывать графами. Одному механизму можно сопоставлять различные графы. Хотя описание графом $\mathcal{G}$ носит общий, не зависящий от типа кинематических пар, характер, но в случае плоских шарнирно-рычажных механизмов предпочтительнее использовать граф $\mathbf{G}$. Особенно это заметно при изучении механизмов с совмещенными шарнирами. Использование графа $\mathbf{G}$ позволяет на современном уровне решить вопрос о применимости аналога структурной формулы Чебышева к типичным плоским шарнирно-рычажным механизмам.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пейсах Э.Е., Нестеров В.А.* Системы проектирования плоских рычажных механизмов. М.: Машиностроение, 1988. 232 с.
2. *Диденко Е.В.* Разработка и анализ плоских многоконтурных механизмов на основе теории графов: Дис. ... канд. техн. наук, М.: ИМАШ РАН, 2019.
3. *Ding H., Hou F., Kecskemethy A., Huang Z.* Synthesis of a complete set of contracted graphs for planar non-fractionated simple-jointed kinematic chains with all possible dofs // *Mechanism and Machine Theory*. 2011. V. 46 (11). P. 1588.
4. *Ковалёв М.Д.* Геометрическая теория шарнирных устройств // *Известия РАН Серия математическая*. 1994. Т. 58. № 1. С. 45.

-
5. Ковалёв М.Д. Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестник МГТУ, Серия Машиностроение. 2001. № 4. С. 33.
 6. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973.
 7. Rooney J., Wilson R.J. The mobility of a graph / Ed. by Koh K.M., Yap H.P. et al. // Conference proceedings. Graph Theory Singapore 1983. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984. V. 1073. P. 135.
 8. Graver J., Servatius B., Servatius H. Combinatorial Rigidity. American Mathematical Society, Providence, 1993. 172 p.
 9. Handbook of Geometric Constraint Systems Principles / Ed. by M. Sitharam, A.St. John, J. Sidman. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2018. 577 p.
 10. Пожбелко В.И., Куц Е.Н. Целочисленный структурный синтез многоконтурных рычажных механизмов со сложными шарнирами для разных областей машиностроения // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2021. № 6. С. 23.
 11. Дворников Л.Т. О принципиальных некорректностях в исследованиях проф. Пожбелко В.И. по структуре механизмов // Теория механизмов и машин. 2016. № 3 (31). Т. 14. С. 145.