МЕХАНИКА МАШИН

534.26

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЖИДКОСТИ

О. И. Косарев

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
e-mail: kosarevoi@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.03.2022 г.
После доработки 20.11.2022 г.
Принята к публикации 20.12.2022 г.

На основе решения волнового уравнения в цилиндрических координатах получена точная формула звукового давления поля, излученного колеблющейся цилиндрической оболочкой, погруженной в жидкость.

Ключевые слова: точное решение, излучение, звуковое давление, импеданс, цилиндрическая оболочка, волновое уравнение, волновое число

DOI: 10.31857/S0235711923020050, **EDN:** COFQNE

Постановка задачи. Статья посвящена решению задачи излучения колеблющейся упругой цилиндрической оболочки, прогруженной в жидкость.

Звуковое поле, излучаемое оболочкой, характеризуется импедансом излучения, связывающим звуковое давление звуковой волны с ее колебательной скоростью (перемещением). Исследования импедансов излучения цилиндрических оболочек начались давно [1]. Им посвящено большое количество публикаций [1–18]. Но эти исследования не закончились получением приемлемого точного решения. В данном случае под точным решением понимаем решение, которое является аналитическим, законченным, доказательно обоснованным. Проблемы, связанные с излучением цилиндрических оболочек в жидкости, имеют важное теоретическое и прикладное значение в гидроакустике и являются актуальными.

По мнению авторов [2] данная задача, являющаяся классической для математической физики, имеет простое решение лишь для бесконечных круглых цилиндров. В работе [3] отмечалось, что точное выражение для импеданса излучения конечного цилиндра является сложной функцией, ее нельзя представить простым аналитическим выражением.

Анализ работ, посвященных решению данной задачи, показал, что решения, изложенные в них, существенно различаются и не имеют единой теоретической основы. Причины различий обусловлены разнотипностью оболочек (конечные, ограниченные, бесконечные), излучением оболочек в ближнем и дальнем поле, определением осевого волнового числа излучаемого звукового поля. Конечной цилиндрической оболочкой (цилиндром) будем называть оболочку со свободными граничными концевыми условиями. Оболочку, ограниченную другими концевыми условиями (Навье или др.), будем называть ограниченной.

Аналитический обзор. Приведем результаты аналитического обзора основных наиболее известных работ. С целью упрощения формул в большинстве из них опустим интегрирование и суммирование гармоник по окружному углу φ. Учет распределения давления по углу φ не влияет на обсуждаемые результаты и может быть осуществлен известными приемами.

Формула Скучика. В работе [4] приведена наиболее известная формула импеданса излучения колеблющегося цилиндра

$$\frac{p}{w} = Z_1 = \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)}\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}{\sqrt{k^2 - k_z^2}\, H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}. \tag{1}$$

Формула (1) приведена без вывода. Не указаны ни способ определения параметра k_z, ни тип оболочки. Вместо вывода дана ссылка на формулу для бесконечной оболочки, где $k_z = 2\pi m/\lambda$ [1]. Эта ссылка дает основания считать, что формула (1) тоже для бесконечной оболочки [3, 6, 8].

Формула Янгера. В работе [1] приведена формула звукового поля, излученного бесконечной оболочкой, на поверхности которой задано перемещение

$$w(\varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{nm} \cos\left(\frac{2\pi m}{\lambda} z\right)\cos n\varphi, \tag{2}$$

где λ – длина бегущей волны деформации на оболочки; n, m – окружные и продольные гармоники. Параметр $2\pi m/\lambda$ (2) назовем волновым числом волны деформации оболочки (деформационным волновым числом). Излучаемое звуковое давление

$$p = -i\rho\omega\sum_{n-0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \alpha'_{nm} Z_2 \cos\left(\frac{2\pi m}{\lambda} z\right)\cos n\varphi, \tag{3}$$

$$Z_2 = \frac{H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2}\right)}{\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2}\, H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2 - (2\pi m/\lambda)^2}\right)}. \tag{4}$$

Примечательно, что формула (3) приведена тоже без вывода со ссылкой на [7], где вообще нет формул, похожих на (3) и (4), и рассмотрена только плоская задача $k_z = 0$.

Формула Шендерова. Формула звукового давления поля, излученного конечной цилиндрической оболочкой с произвольно распределенным по длине оболочки колебательным перемещением $w(z)$, предложена в [5]

$$p^*(r, z) = \frac{\rho\omega^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(\gamma) H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - \gamma^2}\right) e^{i\gamma z}}{\sqrt{k^2 - \gamma^2}\, H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2 - \gamma^2}\right)}\, d\gamma. \tag{5}$$

Формула Музыченко–Рыбака. Импеданс излучения ограниченной цилиндрической оболочки приведен в [8]. В этой работе колебательная скорость цилиндрической оболочки задана в виде

$$V(\xi) = V_0 e^{iq\xi}, \tag{6}$$

где $q = 2\pi m/L$ – деформационное волновое число, определяющее форму колебаний оболочки; L – длина оболочки; ξ – осевая координата. Скорость с использованием δ-функции представлена в виде

$$V = \frac{V_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\gamma(z-\xi)} d\gamma. \tag{7}$$

Без вывода и ссылки, с формулировкой обоснования “как известно”, поле акустического давления записано в виде

$$p = \frac{V_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_1\, e^{i(z-\xi)\gamma} d\gamma, \tag{8}$$

где в качестве Z_1 взята формула (1), названная импедансом бесконечной цилиндрической области. Импеданс ограниченной оболочки получен в виде

$$\begin{gathered} Z_3 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} Z_1 \frac{\sin^2[(q-\gamma)(L/2)]}{(q-\gamma)^2(L/2)} d\gamma, \\ Z_3 = \frac{2}{\pi L}\int\limits_{-\infty}^{\infty} i\rho\omega a \frac{H_n^{(1)}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)}{a\sqrt{k^2-\gamma^2}\, H_n^{(1)'}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)} \frac{\sin^2[(q-\gamma)L/2]}{(q-\gamma)^2} d\gamma. \end{gathered} \tag{9}$$

Если принять во внимание, что последняя дробь в выражении (9) представляет собой δ-функцию, то из (9) применительно к перемещению $w(x)$ можно импеданс Z_3 получить в виде

$$Z_3 = \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2-(2\pi m/L)^2}\right)}{\sqrt{k^2-(2\pi m/L)^2}\, H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2-(2\pi m/L)^2}\right)}. \tag{10}$$

Авторы [8], указали, что при стремлении длины оболочки L к бесконечности импеданс ограниченной оболочки стремится к импедансу бесконечной оболочки, что согласно (1) и (3) является ошибочным утверждением, поскольку при $L \to \infty$ параметр $2\pi m/L \to 0$.

Формула Лямшева. В работе [9], посвященной дифракции звука на ограниченной цилиндрической оболочке получена формула звукового давления, содержащая часть, относящуюся к полю, излученному цилиндрической оболочкой. Формула получена методом функции Грина. Часть дифрагированного поля, относящаяся к звуковому давлению в излученной волне, вызванной колебаниями оболочки, имеет вид

$$p = -\frac{i\rho\omega}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{L} \frac{\varepsilon_n w(z) H_n^{(1)}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right) e^{i\gamma z}}{\sqrt{k^2-\gamma^2}\, H_n\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)} dz\, d\gamma, \tag{11}$$

где параметр γ не раскрыт.

Формула Скенка [10]. В работе [10] звуковое давление получено в виде

$$p_s = \frac{\omega^2\rho_0 a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} B_n(\gamma) \frac{H_n\left(a\sqrt{k^2-\chi^2}\right)}{a\sqrt{k^2-\chi^2}\, H_n'\left(a\sqrt{k^2-\chi^2}\right)} e^{-i\chi z} d\chi, \tag{12}$$

где χ – искомый корень дисперсионного уравнения бесконечной цилиндрической оболочки.

Формула Авербуха. В работе [2] при расчете излучения конечной цилиндрической оболочки в дальнем поле автор высказал утверждение, что преобразование Фурье звукового давления p^* и преобразование Фурье перемещения оболочки w^* связаны зависимостью

$$p^* = \frac{H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - (\xi)^2}\right) w^*}{\sqrt{k^2 - (\xi)^2}\, H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2 - (\xi)^2}\right)}, \tag{13}$$

где $\xi = 2\pi/\lambda = -k\cos\theta$, θ – сферическая координата точки наблюдения.

Формулу (13) можно представит в виде $p^* = Z_2 w^*$, где Z_2 импеданс излучения бесконечной оболочки (4) [1, 2], в котором проведена замена $2\pi/\lambda = -k\cos\theta$. Происхождение формулы (13) не обосновано, она ошибочная, т.к. Z_2 только часть импеданса. Основное замечание заключается в отсутствии обоснования замены $2\pi/\lambda = -k\cos\theta$. Вероятно, по этим причинам формула (13) не применялась другими авторами [3, 6, 10, 13].

Из проведенного обзора следует, что существует множество решений, различающихся по форме и содержанию и не имеющих общей теоретической основы. При наличии сходных элементов (функций Ганкеля) решения имеют принципиальные отличия. В (5) входят две экспоненты $\exp(i\gamma z)$ и $\exp(-i\gamma z)$, а в (11) одна. Формулы (5) и (11) похожи, но принципиально отличаются от (1) и (10). Одинаковые по сути выражения волновых чисел $k_z = 2\pi m/\lambda$ и $q = 2\pi m/L$ используются в импедансах бесконечной (4) и ограниченной (10) оболочек, хотя их авторы считают, что импедансы ограниченной и бесконечной оболочек различны. Многообразие и недостаточная обоснованность некоторых формул требуют проведения дальнейших исследований.

Цель исследований – получить точное решение задачи излучения колеблющейся цилиндрической оболочки в жидкости, показать ошибочность и необоснованность ряда известных решений [3, 4, 8–13].

Теоретические исследования. Выведем формулу звукового давления поля, излучаемого цилиндрической оболочкой в жидкости, и докажем ошибочность ряда известных решений.

Рассматривается излучение боковой поверхности цилиндрической оболочки радиуса a и длины L, помещенной в цилиндрическую систему координат r, z, φ. Продольная ось оболочки совмещена с осью z. Как и в большинстве предыдущих работ, излучение торцевых крышек и экранов не учитывается, оно должно быть рассмотрено отдельно.

Необходимость вывода формулы (1) обусловлена тем, что: 1) вывод ни в работе [4] и в других публикациях не обнаружен; 2) параметр k_z должен быть конкретизирован; 3) вывод используется ниже для анализа ошибочных решений.

Волновое уравнение в цилиндрической системе координат r, z, φ, описывающее излученное звуковое поле, имеет вид [4]

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2\Psi}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}\right) + \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 T}{T\partial t^2}. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) записывается в виде $\Phi = R(r)Z(z)\Psi(\varphi)T(t)$.

Решение относительно давления p звукового поля можно представить в упрощенном виде [5]

$$p(r, z) = A_n H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - k_z^2}\right) e^{ik_z z}, \tag{15}$$

где A_n – искомый коэффициент; $H_n^{(2)}(rk_r)$ – функция Ганкеля второго рода. Упрощение заключается в том, что в (15) опущено суммирование по окружным гармоникам $\exp(in\varphi)$ и опущена зависимость параметров от времени $\exp(i\omega t)$. Коэффициент A_n определяется из граничного условия на поверхности оболочки

$$w(z) = \frac{1}{\omega^2\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=a}, \tag{16}$$

где $w(z)$ – радиальное колебательное перемещение оболочки; ρ – плотность жидкости; $\omega = 2\pi f$ – угловая частота; a – радиус оболочки. Из (15) с учетом (16) получим

$$\sqrt{k^2 - k_z^2}\,A_n H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)e^{ik_z z} = \rho\omega^2 w(z),$$

$$A_n = \frac{\rho\omega^2 w(z)}{e^{ik_z z}\sqrt{k^2 - k_z^2}\,H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}.$$

Подставив A_n в (15) получим формулу (1) в виде

$$p(r, z) = \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}{\sqrt{k^2 - k_z^2}\,H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2 - k_z^2}\right)}. \tag{17}$$

Далее в формуле (17) определим параметр k_z, являющийся главным объектом исследований. Решение уравнения (14) получают, исходя из условия [4]

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 T}{T\partial t^2} = -k^2, \quad \left(\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}\right) = -k_z^2,$$

$$\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2\Psi}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right) = -k_r^2,$$

где k, k_z, k_r – произвольные постоянные числа, которые согласно волновому уравнению (14) находятся в соотношении

$$k_r^2 + k_z^2 = k^2. \tag{18}$$

Выясним физический смысл этих чисел и определим их математические выражения, исходя из решений уравнений (14) и (18). Приняв решения уравнения (14) в виде $T = \exp(i\omega t)$ и $Z = \exp(ik_z z)$, получим: $k = \omega/c$ – волновое число звуковой волны в жидкости, k_z – волновое число звуковой волны, распространяющегося в направлении координатной оси z. Если k, k_z – волновые числа, значит k_r тоже волновое число волны, распространяющейся в направлении оси r. Следовательно, цилиндрическая волна в системе координат r, z распространяется вдоль оси r с волновым числом k_r, а вдоль оси z с волновым числом k_z. Цилиндрическая волна движется одновременно в радиальном и в осевом направлениях соответственно с волновыми числами k_r и k_z. Результирующее движение волны с волновым числом k происходит наклонно к оси z под углом θ. Волновые числа k, k_z, k_r связаны между собой уравнением (18), из решения которого следует, что искомые волновые числа определяются выражениями

$$k_r = k\sin\theta, \quad k_z = k\cos\theta, \tag{19}$$

где θ – угол между вектором волнового числа k и осью z, отсчитываемый от оси z.

Подставив k_z (19) в (17), получим формулу в окончательном виде

$$p(r,z) = \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)}(rk\sin\theta)}{k\sin\theta\, H_n^{(2)'}(ak\sin\theta)}\, w(z). \qquad (20)$$

Может показаться, что отличие формул (20) и (1) малозначительное. На самом деле это отличие имеет важный принципиальный характер. Формула (1) не доведена до конца ни в части физического объяснения волнового числа k_z, ни в части его аналитического определения. Из-за неопределенности k_z формула (1) не пригодна для практического использования. Неоднозначность понимания автором [4] числа k_z подтверждается тем, что он, ссылаясь на формулу (3), допускал возможность $k_z = 2\pi/\lambda$. Более того, он допускал возможность $k^2 - k_z^2 < 0$, т.е. $k_z > k$, и в этом случае предлагал переходить на функцию Макдональда.

Не расшифрованное значение k_z в формуле (1) вынуждало разных авторов по своему усмотрению представлять k_z. Например, они представляли k_z: через длину волны деформаций бесконечной оболочки $k_z = 2\pi/\lambda$ (4) [1, 2], или форму колебаний ограниченной оболочки $k_z = 2\pi m/L$ (10) [8], или в комплексной форме $k_z = k\sin(\alpha_1 + i\alpha_2)$ [5]. Многие авторы проводили интегрирование по dk_z при изменении k_z в пределах $(-\infty, \infty)$ (5),(11) [5, 6, 9], хотя в таких пределах число k_z не существует. Ни в одной из работ, включая [1—13], в формуле импеданса излучения цилиндрической оболочки (1) параметр k_z не был обоснованно представлен как $k_z = k\cos\theta$.

В формуле (20) отсутствуют признаки типа оболочек (конечных или бесконечных). Важно понимать, что в формуле (20) параметры k, r, θ и, следовательно, $k_z = k\cos\theta$ не вычисляются, а задаются, исходя из физических условий решаемой задачи. Эти параметры характеризуют звуковое поле безотносительно к конкретному источнику излучения. Величина r может быть задана в пределах ближнего поля, начиная от $r = a$. В ряде случаев угол θ известен. Например, в случае пульсирующей оболочки угол $\theta = 90°$ и $k_z = 0$. В случае распространения волны вдоль оси z угол $\theta = 0°$ и $k_z = k$ [4, 5].

Из полученного решения следует, что поскольку волновое уравнение и его решение не зависят от типа оболочки, то формула (20) инвариантна к типу оболочки и характеризует только свойства излучаемой звуковой волны, создаваемой перемещением $w(z)$ оболочки.

Перемещение $w(z)$ в формуле (20) можно определить из решения уравнений вынужденных колебаний оболочки, либо представить рядом Фурье или интегралом Фурье.

Формула (20) определяет физический смысл и величину k_z, устраняет недосказанность и неопределенность формулы (1). Формула (20) является новой, обоснованной, правильной. Она универсальна и пригодна для решения всех задач гидроакустики любых цилиндрических оболочек. Формула нужна для решения многих задач: дисперсионных уравнений, дифракции и излучения в дальнем поле. Ее можно считать элементом теоретической основы гидроакустики цилиндрических оболочек.

Доказательство ошибочности формулы Шендерова (5) и ей подобных. Проследим вывод формулы (5) в [5]. При выводе используем свои обозначения, принятые с учетом временной функции $e^{i\omega t}$, заменой скорости v на перемещение $w = v/i\omega$ и обозначения $\gamma = k_z$. Основные этапы вывода [5] следующие. Решение уравнения Гельмгольца в виде

$$p^*(r,z) = \int_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2-\gamma^2}\right) e^{i\gamma z}\, d\gamma. \qquad (21)$$

Для определения коэффициента A_n использовано граничное условие

$$\left.\frac{\partial p^*}{\partial r}\right|_{r=a} = \rho\omega^2 w(z). \tag{22}$$

Из уравнения (21) и граничного условия (22) получено уравнение для определения коэффициента A_n

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_n\sqrt{k^2-\gamma^2}H_n^{(2)}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)e^{i\gamma z}d\gamma = \rho\omega^2 w(z). \tag{23}$$

С целью решения уравнения (23) относительно коэффициента A_n перемещение $w(z)$ представлено в виде интеграла Фурье относительно параметров γ и z

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} B(\gamma)e^{i\gamma z}d\gamma, \\ B(\gamma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} w(z)e^{-i\gamma z}dz. \end{aligned} \tag{24}$$

В результате подстановки перемещения $w(z)$ (24) в уравнение (23) получено уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_n\sqrt{k^2-\gamma^2}H_n^{(2)}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)e^{i\gamma z}d\gamma = \frac{\rho\omega^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} B_n(\gamma)e^{i\gamma z}d\gamma, \tag{25}$$

из решения (25) найден коэффициент A_n

$$A_n = \frac{\rho\omega^2 B_n(\gamma)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{k^2-\gamma^2}H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)}. \tag{26}$$

В результате подстановки A_n (26) в (21) получена формула (5).

Ошибка Шендерова. В [5] решение уравнения Гельмгольца взято в виде интегралов обеих частей равенства (15)

$$p^*(r,z) = \int_{-\infty}^{\infty} p\,d\gamma = \int_{-\infty}^{\infty} A_n H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)e^{i\gamma z}d\gamma. \tag{27}$$

Тем самым давление p заменено на интеграл давления p^* (21), но интеграл давления p^* использован как давление p в граничном условии

$$\left.\frac{\partial p^*}{\partial r}\right|_{r=a} = \rho\omega^2 w(z). \tag{28}$$

В работе [5] перемещение $w(z)$ представлено спектральным разложением в виде интеграла Фурье относительно параметров γ и z. Реальные перемещения $w(z)$ состоят из составляющих вида $w(z) = \exp[iqz]$, где, например, $q = 2\pi m/L$. Тогда перемещение $w(z) = \exp[iqz]$ можно представить интегралом Фурье относительно параметров q и z

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} B(q)e^{iqz}dq, \\ B(q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} w(z)e^{-iqz}dz. \end{aligned} \tag{29}$$

Для определения коэффициента A_n подставим перемещение $w(z)$ (29) в уравнение (27)

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_n\sqrt{k^2-\gamma^2}H_n^{(2)}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)e^{i\gamma z}d\gamma = \frac{\rho\omega^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} B_n(q)e^{iqz}dq. \tag{30}$$

В этом случае определить коэффициент A_n из уравнения (30) невозможно. По этой причине в [5] в функции перемещения $w(z)$ без обоснования принято $q = \gamma$ и в результате этого получена формула (5). Принятие равенства $2\pi m/L = \gamma$ является ошибкой. Оно означает установление связи между длиной оболочки L и звуковым волновым числом γ. Волновое уравнение и его решение в левой части уравнения (30), в которые входит γ, не могут зависеть от длины оболочки.

Параметр q связан с вибрацией оболочки, определяется формой (модой) колебаний оболочки. Параметр γ-осевое волновое число звуковой волны в жидкости, определяется скоростью звука в жидкости. Взаимная замена этих параметров не имеет физического смысла, потому что они физически не однородны, у них разная физическая природа (хотя размерность одинаковая).

Формула (5) принципиально отличается от формулы (20). Главное отличие в том, что в (5) функции Ганкеля находятся под знаком несобственного интеграла. Формула (5) является следствием двух ошибочных действий: 1) граничное условие для интеграла давления p^* записано неверно; 2) параметр q приравнен к волновому числу звуковой волны в жидкости γ. Отсюда следует вывод, что формула (5) является ошибочной и пользоваться ею не рекомендуется. Формула (5) и подобные ошибочные формулы использовались многими авторами [6, 8, 11—13].

По поводу формулы (11) отметим, что провести ее анализ не представляется возможным из-за отсутствия в [9] вывода функции Грина. Формулы (5), (8), (11) имеют общий признак, в них функции Ганкеля входят в подынтегральную функцию несобственного интеграла с пределами интегрирования $(-\infty, \infty)$.

Ошибка Янгера и Музыченко—Рыбака. Покажем, что формулы (4) и (10) можно получить из формулы (5). Зададим перемещение в виде

$$w(z) = w_0 e^{iqz}. \tag{31}$$

Подставим перемещение (31) в выражение (5)

$$p(z) = \frac{\rho\omega^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w_0 e^{iqz}e^{-i\gamma z}\frac{H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)e^{i\gamma z}}{\sqrt{k^2-\gamma^2}H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)}d\gamma dz.$$

Согласно определению δ-функции запишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(q-\gamma)z}dz = 2\pi\delta(q-\gamma).$$

Подставим δ-функцию в интеграл

$$p_s = \frac{\rho\omega^2}{2\pi}w_0\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)e^{i\gamma z}}{\sqrt{k^2-\gamma^2}H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)}2\pi\delta(q-\gamma)d\gamma.$$

Согласно основному свойству δ-функции получим импеданс

$$\frac{p(z)}{w(z)} = \rho\omega^2\frac{H_n^{(2)}\left(a\sqrt{k^2-q^2}\right)}{\left(\sqrt{k^2-q^2}\right)H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2-q^2}\right)}. \tag{32}$$

Из формулы (32) получаются известные решения: формула (3) для бесконечной оболочки при $q = 2\pi m/\lambda$ и формула (10) для ограниченной оболочки при $q = \pi m/L$. Получается, что формула (32) пригодна для бесконечной и для ограниченной оболочек. Поскольку формула (5) ошибочная, то и формулы (3), (10), (12) полученные из нее, тоже ошибочные. Ошибочность формулы (10) предопределена ее выводом из формулы (8). Указать причину ошибки в выводе формулы (3) не представляется возможным, поскольку вывод ее отсутствует.

Исправление формулы Шендерова. Формулу (5) можно исправить, даже исходя из интеграла давления p^* (21) и не прибегая к интегралу Фурье. Для этого надо вместо (22) использовать правильное граничное условие

$$\frac{\partial p^*}{\partial n} = \rho\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} w(z)d\gamma. \tag{33}$$

Определим коэффициент A_n из уравнения (21) и граничного условия (33)

$$\int_{-\infty}^{\infty} A_n\sqrt{k^2-\gamma^2}H_n^{(2)}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)e^{i\gamma z}d\gamma = \rho\omega^2\int_{-\infty}^{\infty} w(z)d\gamma,$$

$$A_n = \frac{\rho\omega^2 w(z)}{e^{i\gamma z}\sqrt{k^2-\gamma^2}H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)}.$$

Подставим этот коэффициент A_n в (21)

$$p^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\omega^2 H_n^{(2)}\left(r\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)}{\sqrt{k^2-\gamma^2}H_n^{(2)'}\left(a\sqrt{k^2-\gamma^2}\right)}w(z)d\gamma. \tag{34}$$

Если в (34) от интеграла давления p^* вернуться к давлению p, т.е. убрать интегрирование слева и справа равенства, то, в конечном счете, получим (20).

Заключение. Получено точное решение задачи излучения колеблющейся цилиндрической оболочкой, погруженной в жидкости. Формула звукового давления излученного поля получена на основе решения волнового уравнения. В числе основных результатов отметим следующие результаты: **1.** Определено осевое волновое число звукового поля, излученного цилиндрической оболочкой равное $k_z = k\cos\theta$. **2.** Импеданс звукового поля, излученного цилиндрической оболочкой, инвариантен по отношению к типу оболочки (конечная или бесконечная), т.е. он применим к любой цилиндрической оболочке. **3.** Физически обусловленной связи между осевым звуковым волновым числом k_z и волновыми числами деформации $q = 2\pi m/L$ и $q = 2\pi/\lambda$ нет. Функционально они не взаимозаменяемые. **4.** Формула Шендерова (5) и аналогичные ей формулы, в которых функции Ганкеля находятся под знаком несобственного интеграла от дифференциала $f(\gamma)d\gamma$, а $\gamma = q$ – ошибочные. Формулы, выведенные из формулы Шендерова (5), также ошибочные. **5.** Полученная формула давления звукового поля, излучаемого цилиндрическими оболочками в жидкости (20), универсальна и пригодна для решения всех задач гидроакустики цилиндрических оболочек. Решение поставленной задачи можно считать законченным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Miguel C. Junger.* The physical interpretation of the expression for an outgoing wave in cylindrical coordinates // J. Acoust. Soc. Amer. 1953. № 1. P. 40.
2. *Авербух А.З., Вейцман Р.И., Генкин М.Д.* Колебания элементов конструкций в жидкости. М.: Наука, 1987. 158 с.

3. *Музыченко В.В.* Дифракция звука на упругих оболочках. М.: Наука, 1993. 336 с.
4. *Скучик Е.* Основы акустики. Т. 2. М.: Мир, 1976. 542 с.
5. *Шендеров Е.Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 349 с.
6. *Романов В.Н., Иванов В.С.* Излучение звука элементами судовых конструкций. СПб.: Судостроение, 1993. С. 128.
7. *Морз Ф.* Колебания и звук. М.-Л.: Гос. издат. технико-теоретической литературы, 1949. 497 с.
8. *Музыченко В.В., Рыбак С.А.* Импеданс излучения ограниченной цилиндрической оболочки // Акустический журнал. 1990. № 5. С. 898.
9. *Лямшев Л.М.* Дифракция звука на тонкой ограниченной упругой цилиндрической оболочке // Доклады АН СССР. 1957. Т. 115. № 2. С. 271.
10. *Скенк Г.А., Бентхайн Дж.В.* Эффективное вычисление и визуализация дисперсионных кривых для тонкой цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость // Акустический журнал. 1995. № 5. С. 828.
11. *Бернблит М.В.* Значения модальной эффективности акустического излучения и коэффициентов присоединения масс для ограниченной цилиндрической оболочки в жестком экране // Акустический журнал. 1977. Вып. 4. С. 528.
12. *Гринченко И.Т., Вовк И.В.* Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. Киев: Наук. думка, 1986. 240 с.
13. *Косарев О.И., Тарханов Г.В., Остапишин Н.М., Бедный И.А., Себякина А.Н.* Колебания конечной свободной цилиндрической оболочки в жидкости. Колебания и волны в механических системах // Материалы международной научной конференции / Под ред. акад. Р.Ф. Ганиева. М.: Изд-во “Институт компьютерных исследований”. 2012. С. 65.
14. *Wang X., Xu E., Jiang C., Wu W.* Vibro-acoustic behavior of double-walled cylindrical shells with general boundary conditions // Ocean engineering. 2019. Т. 192. С. 106529.
15. *Li X., Ding Q.* Sound radiation of beam with a wedge-shaped edge embedding acoustic black hole feature // J. of sound and vibration. 2019. Т. 439. С. 287.
16. *Wang X., Wu W., Lin H., Zhu Y.* Vibro-acoustic modeling of immersed cylindrical shells with variable thickness // Int. J. of Naval Architecture and Ocean Engineering. 2020. Т. 12. С. 343.
17. *Hasheminejad S.M., Cheraghin M., Jamalpoor A.* Active damping of sound transmission through an electrorheological fluid actuated sandwich cylindrical shell // J. of Sandwich Structures and Materials. 2020. Т. 22. № 3. С. 833.
18. *Deng J., Zheng L.* Noise reduction via three types of acoustic back holes // Mechanical Systems and Signal Processing. 2022. Т. 165. С. 108323.