

УДК 541.126

## ВОЗДЕЙСТВИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА НА ФОРМИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПРОЦЕССА. 2. СУЩЕСТВУЮЩИЕ СЦЕНАРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ И РАЗВИТИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

© 2023 г. И. В. Лебедь\*

*Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия*

*\*E-mail: lebed-ivl@yandex.ru*

Поступила в редакцию 30.08.2022;  
после доработки 06.10.2022;  
принята в печать 20.10.2022

Представлены некоторые характерные особенности трех сценариев возникновения и развития турбулентности: сценария Ландау–Хопфа, сценария перехода к турбулентности на странном аттракторе и сценария, которому следуют решения уравнений многомоментной гидродинамики, дополненные стохастическими составляющими. Анализ представленных характерных особенностей позволил сделать заключение о возможности использования этих сценариев для интерпретации турбулентности. Показано, что только третий сценарий удовлетворительно интерпретирует данные эксперимента. Сценарий Ландау–Хопфа ведет потерявшую устойчивость систему в некорректном направлении. Сценарий перехода к турбулентности на странном аттракторе корректно воспроизводит только начальную стадию эволюции жидкого слоя в эксперименте Бенара, а именно теплопередачу в покоящемся слое и конвективные валы. Анализ поведения решений модели Лоренца не оставляет надежд на способность этого сценария к интерпретации турбулентности.

*Ключевые слова:* турбулентность, странный аттрактор, многомоментная гидродинамика.

**DOI:** 10.31857/S0207401X23120063, **EDN:** JTFTBI

Турбулентность оказывает сильное влияние на окружающую действительность. Это предопределяет актуальность проблемы корректного воспроизведения турбулентных процессов, протекающих в окружающей среде, на промышленных и экспериментальных установках. Влияние турбулентности необходимо учитывать при разработке химических технологий. Она также оказывает сильное воздействие на режим горения [1]. В настоящее время существует несколько подходов к интерпретации турбулентности. Полуэмпирический детерминистический подход к расчету турбулентности (RANS — Reynolds Averaged Navier-Stokes) сформирован около 150 лет назад. Однако этот подход и его современная модификация (LES — Large Eddy Simulation) используются вплоть до настоящего времени [2]. Уравнения RANS и LES следуют непосредственно из уравнений Навье–Стокса. Прямое численное интегрирование уравнений Навье–Стокса является более точным способом моделирования наблюдаемых явлений. Расчеты показали, что поведение решений уравнений Навье–Стокса строго следует сценарию Ландау–Хопфа.

Понятие странного аттрактора возникло во второй половине прошлого столетия. Странные аттракторы появляются в нелинейных системах, содержащих три уравнения и более. Изучение математических свойств странных аттракторов и их различных модификаций продолжается вплоть до настоящего времени [3, 4]. Поведение решений системы уравнений Лоренца является ярким примером странного аттрактора в гидродинамике. Исследуя это поведение, Рюэль и Такенс [5] обнаружили более короткий путь перехода к хаосу по сравнению со сценарием Ландау–Хопфа. Сценарий перехода к хаосу на странном аттракторе ставится в соответствие наблюдаемой турбулентности.

В основе развиваемого автором подхода к интерпретации турбулентности лежат детерминистические уравнения многомоментной гидродинамики [6]. В работах [7–9] эти уравнения дополнены стохастическими составляющими. Статистические характеристики стохастических составляющих коррелируют с характеристиками неупорядоченных возмущений, появляющихся в среде за счет внешнего воздействия. Сценарий возникновения и развития турбулентности, которому следует по-

ведение решений уравнений многомоментной гидродинамики, дополненные стохастическими составляющими, качественно отличается от классического сценария Ландау–Хопфа.

В настоящей работе проводится сравнение характерных особенностей различных сценариев перехода к турбулентности. Анализируются возможности использования этих сценариев для интерпретации турбулентности. В разд. 1 обсуждаются характерные особенности классического сценария Ландау–Хопфа. Раздел 2 посвящен некоторым характерным особенностям сценария перехода к турбулентности на странном аттракторе, которые ранее оставались без внимания. В разд. 3 проводится сравнение результатов расчетов, выполненных в рамках существующих подходов, с данными эксперимента.

## 1. КЛАССИЧЕСКИЙ СЦЕНАРИЙ ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Классический сценарий перехода к турбулентности проявляется очень отчетливо в простейшей задаче гидродинамики – задаче обтекания твердой сферы. Численное интегрирование уравнений Навье–Стокса в задаче обтекания твердой сферы выполнено различными численными методами. Тем не менее результаты всех численных экспериментов абсолютно идентичны. В результате численного интегрирования уравнений Навье–Стокса появляются два стационарных устойчивых решения:  $U_0^{NS}(x)$  и  $U_1^{NS}(x)$ , и устойчивый предельный цикл –  $U_2^{NS}(t, x)$ . Решение  $U_0^{NS}(x)$  состоит из осесимметричной тороидальной зоны закручивания в ближнем следе за сферой. Решение  $U_1^{NS}(x)$  состоит из двух слабо несимметричных половин в ближнем следе. Решение центрального типа,  $U_2^{NS}(t, x)$ , характеризуется периодической реструктуризацией ближнего неосесимметричного следа. Помимо решений  $U_0^{NS}(x)$ ,  $U_1^{NS}(x)$  и  $U_2^{NS}(t, x)$ , уравнения Навье–Стокса обладают многопериодическим, т.е. по-существу хаотическим, решением  $U_3^{NS}(t, x)$  [10].

Расчет подтверждает, что переход к турбулентности протекает в строгом соответствии с классическим сценарием Ландау–Хопфа [11]. После достижения некоторого критического значения числа Рейнольдса,  $Re^*$ , основное решение  $U_0^{NS}(x)$ , потеряв устойчивость, бифурцирует к решению  $U_1^{NS}(x)$ . Неустойчивый переход  $U_{0,1}^{NS}(t, x, Re^*)$  от решения  $U_0^{NS}(x)$  к решению  $U_1^{NS}(x)$  является регулярной бифуркацией [12]. Решение  $U_1^{NS}(x)$  после потери устойчивости при  $Re^{**} > Re^*$  бифурцирует к пре-

дельному циклу  $U_2^{NS}(t, x)$ . Неустойчивый переход  $U_{1,2}^{NS}(t, x, Re^{**})$  от решения  $U_1^{NS}(x)$  к решению  $U_2^{NS}(t, x)$  является бифуркацией Хопфа [12]. После достижения некоторого критического значения числа Рейнольдса  $Re^{***} > Re^{**}$  предельный цикл  $U_2^{NS}(t, x)$  теряет устойчивость и замещается детерминистическим решением  $U_3^{NS}(t, x)$ . Линейный анализ показывает, что насыщение решения  $U_3^{NS}(t, x)$  является результатом серии из 22 бифуркаций Хопфа [12]. Первая из 22 бифуркаций наступает после достижения  $Re^{***}$ . Заключительная 22-я бифуркация наступает после достижения  $Re^{****} > Re^{***}$ . Переход  $U_{2,3}^{NS}(t, x, Re^{***}, Re^{****})$  от предельного цикла  $U_2^{NS}(t, x)$  к многопериодическому, т.е. по-существу хаотическому, решению  $U_3^{NS}(t, x)$  имеет крайне незначительную протяженность на шкале числа  $Re$ :  $\Delta Re^{***} = Re^{****} - Re^{***} \leq 50$  [12, 13]. Каждая из 22 бифуркаций Хопфа имеет собственную частоту гармонических колебаний около нового устойчивого положения. В результате в соответствии со сценарием Ландау–Хопфа после достижения  $Re^{***}$  система 22 раза теряет устойчивость и каждый раз находит новое устойчивое положение, около которого совершает многопериодическое движение. Детерминистический хаос, наступающий после достижения  $Re^{****}$ , отождествляется с турбулентностью [13].

Неустойчивые решения  $U_{0,1}^{NS}(t, x, Re^*)$ ,  $U_{1,2}^{NS}(t, x, Re^{**})$  и каждый из 22 неустойчивых переходов, составляющих переход  $U_{2,3}^{NS}(t, x, Re^{***}, Re^{****})$  существуют в течение коротких промежутков времени  $\Delta t_{i,j} \sim Re a / U_0$ , где  $a$  – радиус сферы,  $U_0$  – скорость набегающего потока [14]. То есть в каждый момент времени  $t$  при каждом значении числа  $Re$  система находится в устойчивом положении, согласно решениям уравнений Навье–Стокса. Исключения составляют короткие промежутки времени:  $\Delta t_{0,1}$  при  $Re = Re^*$ ,  $\Delta t_{1,2}$  при  $Re = Re^{**}$  и  $\Delta t_{2,3}^i$ ,  $i = 1, \dots, 22$ , для каждой бифуркации из серии, стартующей при  $Re = Re^{***}$  и завершающейся при  $Re = Re^{****}$ . В эти промежутки времени течение испытывает реструктуризацию, завершающуюся насыщением нового устойчивого состояния. Достигнув нового устойчивого состояния при каждом фиксированном критическом значении  $Re$ , система остается устойчивой в ходе дальнейшей эволюции при этом критическом значении  $Re$ . Таким образом, согласно сценарию Ландау–Хопфа не существует достаточно продолжительных по времени неустойчивых решений.

## 2. СТРАННЫЙ АТТРАКТОР В ГИДРОДИНАМИКЕ

Поведение решений системы уравнений Лоренца, описывающей эксперимент Бенара, следует сценарию перехода к турбулентности на странном аттракторе. В эксперименте Бенара жидкий слой в гравитационном поле подогревается снизу. При низкой разнице  $\Delta T$  температур между нижней и верхней поверхностями слоя жидкость находится в стационарном состоянии. При увеличении  $\Delta T$  в жидком слое возникают конвективные валы. Дальнейшее увеличение  $\Delta T$  сопровождается переходом к хаотическому движению жидкости в слое [15].

Система уравнений Лоренца, корни этой системы и собственные значения матриц устойчивости корней представлены в *Приложении*. Собственные числа  $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}$  и  $\lambda_3^{(1)} < 0$  матрицы устойчивости стационарного решения  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$  представлены выражениями (П.4). В диапазоне  $0 < r < 1$  собственные числа реальны и имеют отрицательные значения. То есть в диапазоне  $0 < r < 1$  решение  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$  устойчиво. После достижения  $r = 1$  решение  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$  оканчивается на грани устойчивости:  $\lambda_1^{(1)} = 0$ ,  $\lambda_2^{(1)} < 0$  и  $\lambda_3^{(1)} < 0$ . В соответствии с (П.3) малые возмущения  $\delta C_1(\hat{t}) = (\delta X_1(\hat{t}); \delta Y_1(\hat{t}); \delta Z_1(\hat{t}))$ , которые затухали в диапазоне  $0 < r < 1$ , начинают нарастать при  $r > 1$ .

Собственные числа матрицы устойчивости стационарных решений  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$  являются корнями уравнения (П.5). В диапазоне  $1 < r < r_1$  собственные значения  $\lambda_1^{(k)}$ ,  $\lambda_2^{(k)}$  и  $\lambda_3^{(k)}$ ,  $k = 2, 3$ , реальны и являются величинами отрицательными. То есть в диапазоне  $1 < r < r_1$  стационарные решения устойчивы.

Решения  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$ ,  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$  являются решениями уравнений Навье–Стокса, т.е. эволюция этих решений должна следовать сценарию Ландау–Хопфа. Поведение во времени решения  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$  действительно следует этому сценарию. После потери устойчивости при  $r > 1$  решение  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$  бифуркует к решению  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  либо к  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ . Таким образом, рост возмущений  $\delta C_1(\hat{t}) = (\delta X_1(\hat{t}); \delta Y_1(\hat{t}); \delta Z_1(\hat{t}))$ , искажающий стационарное решение  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$ , насыщает либо решение  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$ , либо  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ .

Достижение  $r = r_1$  сопровождается появлением комплексных собственных значений. В диапа-

зоне  $r_1 < r < r_c$  реальная часть собственных чисел  $\lambda_1^{(k)}$  и  $\lambda_2^{(k)}$ ,  $k = 2, 3$ , имеет отрицательное значение; реальное собственное значение  $\lambda_3^{(k)}$  также остается величиной отрицательной:  $\lambda_1^{(k)} = \lambda^{r(k)} + i\lambda^{i(k)}$ ,  $\lambda_2^{(k)} = \lambda^{r(k)} - i\lambda^{i(k)}$ ,  $\lambda^{r(k)} < 0$ ,  $\lambda_3^{(k)} < 0$ . Изменение параметра  $r$  от  $r_1$  до  $r_c$  сопровождается увеличением как действительной части комплексных собственных значений  $\lambda^{r(k)}$ , так и мнимой части  $\lambda^{i(k)}$ ;  $\lambda^{r(2)} = \lambda^{r(3)}$ ,  $\lambda^{i(2)} = \lambda^{i(3)}$ . Решения  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$  начинают зависеть от времени. В соответствии с (П.3) предельные циклы  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$  остаются устойчивыми в диапазоне  $r_1 < r < r_c$ . В диапазоне  $1 < r < r_1$  переход от устойчивого решения  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$  к устойчивому решению  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  либо  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$  является регулярной бифуркацией. В диапазоне  $r_1 < r < r_c$  переход от устойчивого решения  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$  к устойчивому решению  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  либо  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$  является бифуркацией Хопфа.

Стационарное решение  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$  ставится в соответствие наблюдаемой стационарной теплопередаче в покоящемся жидком слое. Стационарные решения  $C_k = (X_k; Y_k; Z_k)$ ,  $k = 2, 3$ , ставятся в соответствие стационарным конвективным валам. Нестационарные устойчивые предельные циклы  $C_k = (X_k; Y_k; Z_k)$  описывают движение жидкости в конвективных валах, возникающих в эксперименте Бенара [15].

При достижении  $r = r_c$  реальная часть собственных значений исчезает ( $\lambda^{r(k)} = 0$ ,  $k = 2, 3$ ), тогда нестационарные решения  $C_k = (X_k; Y_k; Z_k)$  оказываются на грани устойчивости. При  $r > r_c$  решения  $C_k = (X_k; Y_k; Z_k)$  одновременно теряют устойчивость:  $\lambda^{r(k)} > 0$ ,  $\lambda^{i(k)} \neq 0$ ,  $\lambda_3^{(k)} < 0$ . Тогда в соответствии с (П.3) слабые возмущения

$$\delta C_k(\hat{t}) = (\delta X_k(\hat{t}); \delta Y_k(\hat{t}); \delta Z_k(\hat{t})),$$

затухавшие при  $r_1 < r < r_c$ , начинают нарастать при  $r > r_c$ . В соответствии с (П.5)  $r_c = \sigma(a + b + 3)/(a - b - 1)$ .

Согласно сценарию Ландау–Хопфа изображающая точка в пространстве  $XYZ$  должна попытаться отыскать новое устойчивое решение. Она должна совершать гармоническое колебательное движение с частотой  $\lambda^{i(k)} \neq 0$ ,  $k = 2, 3$ , около найденного решения. Однако уравнения модели Лоренца (П.1) не оставляют изображающей точке ни

малейших шансов проявить поведение, соответствующее сценарию Ландау–Хопфа.

Уравнения модели Лоренца не имеют других решений, кроме  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$ ,  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ , и, следовательно, — других частот, помимо  $\lambda^{i(k)}$ . Поэтому изображающая точка, покидая потерявшее устойчивость нестационарное решение  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$ , устремляется в единственно возможном для нее направлении, а именно в направлении решения  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ . Других направлений изображающая точка “не видит”. Достигнув нестационарного неустойчивого решения  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ , изображающая точка вынуждена также покинуть его, устремляясь на поиск новых устойчивых решений. Таким образом, она курсирует в ограниченной области фазового пространства  $XYZ$ , окружающего нестационарные неустойчивые решения  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ .

Решения, в направлении которых изображающая точка могла бы начать движение после того, как решения  $C_k = (X_k; Y_k; Z_k)$ ,  $k = 2, 3$ , теряют свою устойчивость, отсутствуют. Таким образом, изображающая точка обречена “метаться” внутри ограниченной области пространства  $XYZ$  между решениями  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ .

Ограниченная область фазового пространства  $XYZ$  получила название странного аттрактора. Сделав один или несколько оборотов вокруг точки  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$ , изображающая точка начинает движение в направлении единственной доступной точки  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ . Достигнув точки  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ , изображающая точка делает произвольное число оборотов вокруг нее. Таким образом, изображающая точка совершает блуждающее движение. Ни одна из траекторий изображающей точки не может выйти за пределы ограниченной области пространства  $XYZ$ , т.е. не может дать картину течения, качественно отличающуюся от картин, даваемых другими траекториями. Две различные частоты характеризуют движение изображающей точки по траектории:  $\lambda^{i(k)}$  и  $\lambda^{j(k)}$ ,  $k = 2, 3$ . Частота  $\lambda^{i(k)}$  соответствует периодическому движению изображающей точки около каждого из решений  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ . Частота  $\lambda^{j(k)}$  соответствует движению между  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ .

Траектории изображающей точки очень чувствительны к изменению начальных условий. Две изначально близкие траектории экспоненциально быстро расходятся в ограниченной области пространства  $XYZ$ . Они совершают разное число

оборотов вокруг точек  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ . Такое поведение траекторий изображающей точки способствует возникновению хаоса на странном аттракторе после достижения  $r = r_c$ . Хаотическая картина ставится в соответствие наблюдаемой турбулентности в жидком слое.

Поведение решений уравнений Навье–Стокса следует сценарию Ландау–Хопфа. Сценарий перехода к турбулентности на странном аттракторе не является свойством решений уравнений Навье–Стокса. Этот сценарий появляется в результате искажения сценария Ландау–Хопфа за счет обрезания. Действительно, уравнения модели Лоренца учитывают только низшие члены фурье-разложения скорости и температуры. В силу обрезания разложения Фурье система уравнений (П.1) имеет только три решения:  $C_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$ ,  $C_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $C_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ . Это обрезание устраняет все без исключения другие решения уравнений Навье–Стокса. В соответствии со сценарием Ландау–Хопфа при потере устойчивости решения  $C_k = (X_k; Y_k; Z_k)$ ,  $k = 2, 3$ , изображающая точка должна попытаться отыскать новые устойчивые решения в фазовом пространстве  $XYZ$ . Однако эти попытки обречены на неудачу. Изображающая точка “мечется” в замкнутой области пространства  $XYZ$ , ограниченной решениями  $C_k = (X_k; Y_k; Z_k)$ . Отсутствие других решений уравнений Навье–Стокса закрывает для изображающей точки все другие направления движения в фазовом пространстве  $XYZ$ . Таким образом, искажение сценария Ландау–Хопфа за счет обрезания вносит значительные качественные изменения в поведение решений уравнений модели Лоренца (П.1).

Модель Лоренца следует непосредственно из уравнений Навье–Стокса, корректность которых при этом подразумевается. Сценарий Ландау–Хопфа является свойством решений уравнений Навье–Стокса. Обрезание этих уравнений кардинально искажает сценарий Ландау–Хопфа, ограничивая область фазового пространства, доступного для изображающей точки, т.е. создавая странный аттрактор. Сценарий перехода к турбулентности на странном аттракторе не является свойством решений уравнений Навье–Стокса. Увеличение числа членов фурье-разложения увеличивает число решений приближенной системы уравнений Навье–Стокса. Для изображающей точки открываются новые направления движения в многомерном фазовом пространстве. Странный аттрактор исчезает. Поведение решений приближенной системы уравнений Навье–Стокса перестает соответствовать сценарию перехода к турбулентности на странном аттракторе.

Как и всякое обрезание полного разложения, обрезание, приводящее к системе (П.1), должно иметь ограниченную область применимости. Действительно, решения уравнений модели Лоренца воспроизводят только начальную стадию эволюции жидкого слоя в эксперименте Бенара: теплопередачу в покоящемся жидком слое и конвективные валы. Однако значительные расхождения возникают при интерпретации турбулентности, регистрируемой в жидком слое, в терминах сценария перехода к турбулентности на странном аттракторе. В частности, этот сценарий не может корректно воспроизвести спектр мощности одной из компонент скорости [15].

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ

В эксперименте регистрируются три устойчивых состояния среды при обтекании твердой сферы:  $U_0^{exp}(x)$ ,  $U_1^{exp}(x)$  и  $U_2^{exp}(t, x)$ . Каждое из трех состояний, потеряв устойчивость, начинает развиваться в собственном, отличном от других направлении. В частности, основное состояние  $U_0^{exp}(x)$  после потери устойчивости при  $Re = Re_0^*$  последовательно проходит через неустойчивый пульсационный режим  $V_0^{exp}(t, x)$  и два неустойчивых режима периодического вихревого испускания,  $W_0^{exp}(t, x)$  и  $Q_0^{exp}(t, x)$  [10].

Решения  $U_0^{NS}(x)$ ,  $U_1^{NS}(x)$  и  $U_2^{NS}(t, x)$  удовлетворительно воспроизводят устойчивые течения  $U_0^{exp}(x)$ ,  $U_1^{exp}(x)$  и  $U_2^{exp}(t, x)$ . Однако расчет не в состоянии воспроизвести ни одного из неустойчивых регулярных режимов, наблюдаемых на трех направлениях развития неустойчивости. На основном направлении, в частности, расчет не в состоянии воспроизвести ни один из неустойчивых режимов —  $V_0^{exp}(t, x)$ ,  $W_0^{exp}(t, x)$  или  $Q_0^{exp}(t, x)$ . То есть решения уравнений Навье—Стокса ведут развитие основного состояния  $U_0^{NS}(x)$  в направлении, несовместимом с экспериментом. Решения уравнений Навье—Стокса строго следуют сценарию Ландау—Хопфа. Последний не допускает существования достаточно продолжительных по времени неустойчивых решений. Таким образом, сценарий Ландау—Хопфа не пригоден для интерпретации эксперимента после достижения первого критического значения числа Рейнольдса [10].

В соответствии со сценарием Ландау—Хопфа, после достижения третьего критического значения числа Рейнольдса,  $Re^{***}$ , предельный цикл  $U_2^{NS}(t, x)$  теряет устойчивость, и многопериодическое, т.е. по-существу хаотическое, решение  $U_3^{NS}(t, x)$  замещает предельный цикл. Однако сценарий перехода к турбулентности Ландау—Хопфа

противоречит эксперименту. Во-первых, не существует экспериментов, в которых турбулентный режим непосредственно замещает какое-либо из устойчивых состояний среды:  $U_0^{exp}(x)$ ,  $U_1^{exp}(x)$  или  $U_2^{exp}(t, x)$ . Развитие каждого из этих состояний неизбежно проходит через регулярный режим вихревого испускания. В эксперименте регистрируются шесть различных режимов вихревого испускания на трех направлениях развития турбулентности. Испускаются вихревые кольца и вихревые петли. Вихревые структуры движутся по прямолинейным, волнообразным и спиральным траекториям в дальнем следе за сферой. Однако, независимо от регистрируемого направления, периодическое вихревое испускание является обязательным, ярко выраженным, достаточно продолжительным по  $Re$  режимом развития турбулентности [10].

Наблюдение за турбулентными процессами позволило оценить ключевое влияние интенсивности возмущений набегающего потока, характеризующей коэффициентом турбулентности  $\bar{K}_d$ , на возникновение и развитие турбулентности. Самые ранние экспериментальные исследования турбулентности указывают на эту зависимость [16]. Данные экспериментов указывают на то, что продолжительность регулярного режима обтекания на шкале чисел  $Re$  крайне сильно зависит от коэффициента турбулентности  $\bar{K}_d$ . Низкие значения коэффициента  $\bar{K}_d$  способны задержать возникновение турбулентности даже при сколь угодно высоких значениях числа Рейнольдса  $Re$ . В эксперименте регистрируется строго регулярная картина вихревого испускания во всем исследуемом диапазоне значений  $Re$  ( $Re \leq 30000$ ) при движении твердой сферы в среде, находящейся в состоянии статистического равновесия [17]. Однако путем решений уравнений классической гидродинамики не удалось подтвердить наблюдаемого воздействия коэффициента  $\bar{K}_d$  на переход ламинарного движения в турбулентное в задаче обтекания сферы. В соответствии с расчетом, при увеличении  $Re$  детерминистические решения уравнений классической гидродинамики последовательно замещают друг друга, начиная с решения Стокса, и вплоть до многопериодического, т.е. по-существу хаотического решения. Эта последовательность и критические значения числа Рейнольдса вообще не зависят (или зависят крайне слабо) от интенсивности малых возмущений набегающего потока, характеризующей коэффициентом  $\bar{K}_d \ll 1$ . В соответствии с расчетом насыщение многопериодического решения имеет место даже при отсутствии неупорядоченных возмущений в набегающем потоке ( $\bar{K}_d = 0$ ). Появление малых неупорядоченных возмущений в набегаю-

щем потоке не оказывает существенного воздействия на процесс возникновения и развития турбулентности [12, 13].

Существует третье значительное расхождение, на которое следует обратить внимание. А именно, в соответствии с экспериментом нарастание возникающей в среде хаотичности обладает значительной протяженностью на шкале чисел  $Re$ . После возникновения первых элементов нерегулярности хаотичность увеличивается по мере роста  $Re$ , искажая регулярную зону закручивания и регулярную вихревую дорожку. Регулярная структура зоны закручивания и вихревой дорожки становится менее отчетливой постепенно. Нарастание хаотичности, завершающееся ярко выраженной турбулентностью, осуществляется в пределах широкого диапазона значений числа Рейнольдса  $\Delta Re^{***}$  (в эксперименте [18]  $\Delta Re^{***} > 1000$ ). Напротив, результаты линейного анализа [12] показывают, что замещение регулярной картины течения хаотической протекает очень быстро на шкале чисел  $Re$ , а именно в пределах  $\Delta Re^{***} \sim 50$ . Таким образом, результаты расчета не подтверждают представление эксперимента о достаточно продолжительном нарастании хаотичности.

Три существенных различия между расчетом и экспериментом позволяют сделать следующий вывод. Многопериодическое, т.е. по-существу хаотическое, решение уравнений Навье–Стокса,  $U_3^{NS}(t, \mathbf{x})$ , непригодно для интерпретации турбулентности, регистрируемой экспериментально. Потеряв направление развития неустойчивости, детерминистические решения уравнений классической гидродинамики “скатываются” в детерминистический хаос. Корреляция между наблюдаемой турбулентностью и детерминистическим хаосом крайне мало вероятна. Возможная синхронизация собственных частот бифуркаций Хопфа [15] не опровергает представленного вывода.

Некорректное направление развития турбулентности является доминирующим фактором, предопределившим неудачу в интерпретации турбулентности в рамках классической гидродинамики. Движение в некорректном направлении по шкале чисел  $Re$  не позволило воспроизвести в расчете ни наблюдаемого воздействия интенсивности неупорядоченных возмущений в набегающем потоке, ни наблюдаемого достаточно продолжительного нарастания хаотичности на этой шкале. Некорректность направления развития турбулентности проявляется прежде всего в отсутствии вихревого испускания при продвижении по шкале  $Re$ .

Сценарий перехода к турбулентности на странном аттракторе является свойством решений модели Лоренца, но не решений исходных уравнений Навье–Стокса. На первой стадии, т.е.

при малых значениях числа Рэлея, эволюция решений модели Лоренца строго следует сценарию Ландау–Хопфа. Переход от теплопередачи в покоящемся жидком слое к конвективным валам осуществляется либо за счет регулярной бифуркации, либо за счет бифуркации Хопфа. Однако обрезание уравнений Навье–Стокса приводит в дальнейшем к кардинальному изменению сценария Ландау–Хопфа. По мере увеличения числа Рэлея решения, соответствующие конвективным валам, теряют устойчивость. В соответствии со сценарием Ландау–Хопфа изображающая точка “устремляется” на поиск новых решений модели Лоренца. Однако этот поиск не дает новых решений. Изображающая точка обречена “метаться” между двумя решениями, которые соответствуют конвективным валам. Метания изображающей точки в фазовом пространстве создают странный аттрактор.

Таким образом, сценарий перехода к турбулентности на странном аттракторе появляется в результате кардинального искажения сценария Ландау–Хопфа. Увеличение числа членов фурье-разложения увеличивает число решений приближенной системы уравнений Навье–Стокса. Это увеличение приводит к исчезновению странного аттрактора. Как и всякое приближение, решения модели Лоренца имеют ограниченную область применения. Хаотическое движение изображающей точки на странном аттракторе не приводит к удовлетворительному воспроизведению турбулентности в эксперименте Бенара [15].

В соответствии со сценарием перехода к турбулентности Ландау–Хопфа хаотическое состояние достигается в результате бесконечной последовательности бифуркаций Хопфа. Каждая из бифуркаций имеет собственную частоту гармонических колебаний около нового устойчивого положения. Накопление собственных частот способствует приближению к непрерывному спектру мощности, регистрируемому экспериментально [15]. Вообще говоря, постановка каких-либо физических представлений в соответствие этому сценарию не выдерживает критики. Корректность сценария Ландау–Хопфа базируется исключительно на корректности уравнений Навье–Стокса. Погрешность, допущенная при выводе уравнений Навье–Стокса, ограничивает область их применимости [6, Гл. 3]. В результате сценарий Ландау–Хопфа становится непригодным для интерпретации турбулентности. Аналогично корректность сценария перехода к турбулентности на странном аттракторе базируется исключительно на решениях модели Лоренца. Постановка каких-либо физических представлений в соответствие поведению изображающей точки на странном аттракторе также не выдерживает критики. Происхождение модели Лоренца не оставляет надежд на

ее способность к интерпретации турбулентности. Отдельные совпадения носят случайный характер.

В отличие от сценария Ландау–Хопфа, сценарий, которому следуют детерминистические решения уравнений многомоментной гидродинамики, дополненные стохастическими составляющими, удовлетворительно воспроизводят процессы возникновения и развития турбулентности. Ключевое отличие уравнений многомоментной гидродинамики от уравнений классической гидродинамики заключается в следующем. Уравнения Навье–Стокса выстроены на трех низших главных гидродинамических величинах. Гипотеза молекулярного хаоса Больцмана не позволяет учесть высшие главные гидродинамические величины при построении уравнений классической гидродинамики. Уравнения многомоментной гидродинамики могут быть выстроены на любом наперед заданном количестве главных гидродинамических величин. В работе [6, гл. 5] уравнения многомоментной гидродинамики выстроены на семи низших главных гидродинамических величинах, образующих измеряемые моменты.

Стационарная часть  $\hat{C}_i^{(0)}$  решения  $\hat{C}_i^{(0)}(t) = \hat{C}_i^{(0)} + \delta \hat{C}_i^{(0)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, 20$ , нелинейной системы 20-го порядка [19] удовлетворительно согласуется с основным решением уравнений Навье–Стокса  $U_0^{exp}(\mathbf{x})$ . Однако после достижения критического значения числа Рейнольдса,  $Re_0^*$ , поведение решения  $\hat{C}_i^{(0)}(t)$  уравнений многомоментной гидродинамики качественно отличается от поведения решений уравнений Навье–Стокса. При  $Re > Re_0^*$  неустойчивое решение  $\hat{C}_i^{(0)}(t)$  начинает периодически пульсировать. Решение  $\hat{C}_i^{(0)}(t)$  ставится в соответствие наблюдаемым периодическим пульсациям зоны закручивания  $V_0^{exp}(t, \mathbf{x})$ . Помимо решения  $\hat{C}_i^{(0)}(t)$  уравнений многомоментной гидродинамики находят еще два других решения, которые ставятся в соответствие неустойчивым режимам периодического вихревого испускания:  $W_0^{exp}(t, \mathbf{x})$  и  $Q_0^{exp}(t, \mathbf{x})$  [20].

В задаче обтекания сферы граничные условия не зависят от времени, т.е. задача стационарна. Тем не менее после достижения первого критического значения числа Рейнольдса  $Re_0^*$  решения уравнений многомоментной гидродинамики начинают зависеть от времени. Таким образом, потерявшая устойчивость система остается неустойчивой в процессе эволюции. По мере роста  $Re$  одно неустойчивое решение сменяется другим решением, тоже неустойчивым. Процесс перехода между неустойчивыми решениями регулируется критерием эволюции [20, 21]. В соответствии с

этим критерием потерявшая устойчивость открытая система с независящими от времени граничными условиями выбирает такое направление эволюции, которое обеспечивает наиболее быстрое удаление ее состояния от состояния статистического равновесия. Однако рост  $Re$  не сопровождается нарушением регулярности неустойчивых решений уравнений многомоментной гидродинамики. На картинах течения, представленных этими решениями, не проявляется ни малейших признаков хаотичности [20].

Таким образом, регулярные решения детерминистических уравнений многомоментной гидродинамики непригодны для воспроизведения турбулентных картин течения. Дополнение этих уравнений стохастическими составляющими, ответственными за неупорядоченные возмущения, позволяет воспроизвести турбулентные картины течения в следе за сферой. Неустойчивые когерентные структуры (зона закручивания и вихревые дорожки) формируют регулярную составляющую турбулентности. Хаотической (пульсационной) составляющей турбулентности являются неупорядоченные возмущения, возникшие в течении перед сферой за счет внешнего воздействия. Хаотические искажения накладываются на регулярную составляющую, постепенно скрывая ее. Регулярное неустойчивое движение когерентных структур само по себе не создает турбулентную картину течения. Она возникает в результате искажения нестационарных когерентных структур непомерно возросшими неупорядоченными возмущениями [7–9]. Последние несут полную ответственность за возникновение и развитие турбулентности. Постоянно существующие в реальной физической системе спонтанные флуктуации не в состоянии исказить ламинарную картину течения, потерявшего устойчивость [21, 22].

Численное интегрирование уравнений многомоментной гидродинамики, дополненных стохастическими составляющими, позволило обнаружить сильное взаимное влияние коэффициента турбулентности  $\bar{K}_d$  и числа  $Re$  на возникновение и развитие турбулентности. Из рис. 2б и 3б из работы [23] следует, что относительно высокие значения  $Re$  не позволяют инициировать турбулентность при достаточно низких значениях  $\bar{K}_d$ . Напротив, относительно низкие значения  $Re$  не являются препятствием для возникновения турбулентности при достаточно высоких значениях  $\bar{K}_d$  (см. рис. 2а и 3а из [23]).

Сценарий Ландау–Хопфа, которому следуют детерминистические решения уравнений классической гидродинамики, не подтверждает наблюдаемого влияния коэффициента  $\bar{K}_d$  на переход от регулярного движения к хаотическому в задаче обтекания сферы. В соответствии со сценарием

Ландау–Хопфа процесс перехода от регулярного движения к хаотическому вообще не зависит или зависит пренебрежимо мало от  $\bar{K}_d$  [12, 13]. В отличие от решений уравнений многомоментной гидродинамики, решения уравнений Навье–Стокса устойчивы в каждый момент времени  $t$  при каждом значении числа  $Re$ . Исключение составляют короткие промежутки времени  $\Delta t_{i,j} \sim Re a/U_0$  при критических значениях числа Рейнольдса. В течение этих промежутков времени состояние, потерявшее устойчивость, бифурцирует к новому устойчивому состоянию. Достигнув нового устойчивого состояния, система остается устойчивой в ходе дальнейшей эволюции при фиксированном критическом значении  $Re$ . Вообще говоря, система в состоянии накопить неупорядоченные возмущения в течение промежутка времени  $\Delta t_{i,j}$ . Однако дальнейшая эволюция устойчивой системы при этом критическом значении  $Re$  неминуемо ведет к затуханию накопленных возмущений. То есть решения уравнений классической гидродинамики не могут привести к турбулентной картине течения за счет роста малых неупорядоченных возмущений, возникающих в среде в результате внешнего воздействия. Затуханием малых возмущений объясняется отсутствие влияния коэффициента турбулентности  $\bar{K}_d$  на изменение в картинах течения при росте значения  $Re$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Последовательность преобразований уравнений Навье–Стокса для жидкого слоя в гравитационном поле с подогревом приводит к системе уравнений Лоренца [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \hat{t}} &= -\sigma X + \sigma Y, & \frac{\partial Y}{\partial \hat{t}} &= -XZ + rX - Y, \\ \frac{\partial Z}{\partial \hat{t}} &= XY - bZ. \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

В уравнении (П.1)  $\sigma = \nu/\alpha$  – число Прандтля,  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости,  $\alpha$  – коэффициент температуропроводности,  $r = R/R_c$ ,  $R = gah^3\Delta T/\nu\alpha$  – число Рэлея,  $R_c = \pi^4(1+a^2)^3/a^2$  – критическое значение  $R$ ,  $g$  – гравитационная постоянная,  $h$  – расстояние между пластинами, параметр  $a$  задает характерный продольный размер,  $b = 4/(1+a^2)$ ,  $\hat{t} = \pi^2 \times (1+a^2)\alpha t/h^2$ . Система уравнений Лоренца получена путем разложения распределений температуры и скорости в ряд Фурье с сохранением трех младших членов фурье-представления:  $X = X(\hat{t})$ ,  $Y = Y(\hat{t})$ ,  $Z = Z(\hat{t})$ .

Уравнения модели Лоренца (П.1) имеют три стационарных решения  $\mathbf{C}_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$ ,  $\mathbf{C}_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $\mathbf{C}_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$ , где

$$X_1 = Y_1 = Z_1 = 0,$$

$$X_2 = [b(r-1)]^{1/2}, \quad Y_2 = [b(r-1)]^{1/2}, \quad Z_2 = r-1, \quad (\text{П.2})$$

$$X_3 = -[b(r-1)]^{1/2}, \quad Y_3 = -[b(r-1)]^{1/2}, \quad Z_3 = r-1.$$

Других стационарных решений система (П.1) не имеет. Для проверки решений  $\mathbf{C}_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$ ,  $\mathbf{C}_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $\mathbf{C}_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$  на устойчивость система уравнений (П.1) линеаризуется по отношению к малым возмущениям  $\delta \mathbf{C}_k(\hat{t}) = (\delta X_k(\hat{t}); \delta Y_k(\hat{t}); \delta Z_k(\hat{t}))$  решения  $\mathbf{C}_k = (X_k; Y_k; Z_k)$ ,  $k = 1-3$ . Решения линеаризованных уравнений (П.1) ищутся в виде

$$\delta \mathbf{C}_k(\hat{t}) = \delta \mathbf{C}_k^{(0)} \exp(\lambda^{(k)} \hat{t}), \quad k = 1-3. \quad (\text{П.3})$$

Матрица устойчивости стационарного решения  $\mathbf{C}_1 = (X_1; Y_1; Z_1)$  имеет три собственных значения:

$$\lambda_1^{(1)} = -\frac{\sigma+1}{2} + [(\sigma+1)^2 + 4(r-1)\sigma]^{1/2},$$

$$\lambda_2^{(1)} = -\frac{\sigma+1}{2} - [(\sigma+1)^2 + 4(r-1)\sigma]^{1/2}, \quad (\text{П.4})$$

$$\lambda_3^{(1)} = -b.$$

Собственные числа матрицы устойчивости стационарных решений  $\mathbf{C}_2 = (X_2; Y_2; Z_2)$  и  $\mathbf{C}_3 = (X_3; Y_3; Z_3)$  являются корнями уравнения

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0. \quad (\text{П.5})$$

Здесь  $\lambda = \lambda_l^{(k)}$ ,  $k = 2, 3$ ,  $l = 1, \dots, 3$ , являются собственными числами матрицы устойчивости;  $\lambda_l^{(2)} = \lambda_l^{(3)}$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бетев А.С., Киверин А.Д., Медведев С.П., Яковенко И.С. // Хим. физика. 2020. Т. 39. № 12. С. 17.
2. Sagaut P. Large Eddy Simulation for Incompressible Flows. N.Y.: Springer, 2006.
3. Chekroun M.D., Simonnet E., Ghil M. // Physica D. 2011. V. 240. P. 1685.
4. Carvalho J., Rodrigues A.A. // Physica D. 2022. V. 434. № 133268.
5. Ruelle D., Takens F. // Commun. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167.
6. Lebed I.V. The foundations of multimoment hydrodynamics. Pt. 1. N.Y.: Nova Sci. Publ., 2018.
7. Kiselev A.Ph., Lebed I.V. // Chaos Solitons Fractals. 2021. V. 142. № 110491.

8. Киселев А.Ф., Лебедь И.В. // Хим. физика. 2021. Т. 40. № 1. С. 79.
9. Киселев А.Ф., Лебедь И.В. // Хим. физика. 2021. Т. 40. № 6. С. 80
10. Лебедь И.В., Уманский С.Я. // Хим. физика. 2007. Т. 26. № 1. С. 65.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
12. Natarajan R., Acrivos A. // J. Fluid Mech. 1993. V. 254. P. 323.
13. Tomboulides A.G., Orszag S.A. // Ibid. 2000. V. 416. P. 45.
14. Hannemann K., Oertel Jr.H. // Ibid. 1989. V. 199: P. 55.
15. Schuster H.G. Deterministic chaos. Weinheim: Physik Verlag, 1984.
16. Никурадзе Г. // Проблемы турбулентности / Под ред. Великанова М.А., Шейковского Н.Т. Л.—М.: ОНТИ, 1936. С. 75—150.
17. Chomaz J.M., Bonneton P., Hopfinger E.J. // J. Fluid Mech. 1993. V. 234. P.1.
18. Sakamoto H., Haniu H. // Ibid. 1995. V. 287. P. 151.
19. Лебедь И.В. // Хим. физика. 1997. Т. 16. № 7. С. 72.
20. Лебедь И.В. // Хим. физика. 2014. Т. 33. № 4. С. 1.
21. Лебедь И.В. // Хим. физика. 2022. Т. 41. № 1. С. 77.
22. Лебедь И.В. // Хим. физика. 2022. Т. 41. № 4. С. 81.
23. Лебедь И.В. // Хим. физика. 2023. Т. 42. № 9.