

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТРАЖЕННОГО УЛЬТРАЗВУКОВОГО ПОЛЯ В СОСТАВНЫХ ОБРАЗЦАХ

© 2024 г. Е.В. Глушков^{1,*}, Н.В. Глушкова^{1,**}, А.А. Татаркин^{1,***}, О.А. Ермоленко^{1,****}

¹Кубанский государственный университет, Россия 350040 Краснодар, ул. Ставропольская, 149

E-mail: *evg@math.kubsu.ru; **nvg@math.kubsu.ru;

tiamatory@gmail.com; *o.ermolenko.a@gmail.com

Поступила в редакцию 22.08.2024; после доработки 21.09.2024

Принята к публикации 24.09.2024

Ультразвуковой неразрушающий контроль предполагает исследование закономерностей распространения, отражения и преломления упругих волн, возбуждаемых контактными или бесконтактными пьезопреобразователями в inspected объекте. Использование для этих целей конечно-элементного моделирования обычно требует больших вычислительных затрат и дополнительной постпроцессорной обработки результатов для выделения отдельных составляющих волнового поля из суммарного решения. При зондировании соединений однородных материалов, например, лопаток турбин, изготавливаемых из жаростойких монокристаллических сплавов, граница соединения мало контрастна и отраженные сигналы сравнительно слабы. Это создает дополнительные трудности для выделения их из суммарного волнового поля и корректной интерпретации приносимой ими информации. Для решения этой проблемы в настоящей работе строятся явные асимптотические представления для отраженных и прошедших волн в двухслойном упругом полупространстве с поверхностным источником, которые позволяют проводить быстрый параметрический анализ. Они могут быть использованы для анализа данных ультразвукового зондирования, например, для оценки состояния зоны соединения или определения взаимной ориентации главных осей кристаллов.

Ключевые слова: ультразвуковой контроль, соединения монокристаллических сплавов, отражение и преломление на внутренней границе, интегральные и асимптотические представления волнового поля.

MODELING OF REFLECTED ULTRASONIC FIELDS IN COMPOSED SAMPLES

© 2024 E.V. Glushkov^{1,*}, N.V. Glushkova^{1,**}, A.A. Tatarkin^{1,***}, O.A. Ermolenko^{1,****}

¹Institute for Mathematics, Mechanics and Informatics, Kuban State University,

Russia 350040 Krasnodar, Stavropolskaya str., 149

E-mail: *evg@math.kubsu.ru; **nvg@math.kubsu.ru; ***tiamatory@gmail.com;

****o.ermolenko.a@gmail.com

Ultrasonic nondestructive testing involves the study of propagation, reflection and refraction patterns of elastic waves excited by contact or non-contact piezoelectric transducers in the inspected object. The finite element modeling usually requires high computational costs and additional postprocessing to select individual waves from the total solution. When probing joints of homogeneous materials, such as turbine blades made of heat-resistant monocrystalline alloys, the joint boundary is low-contrast, and the reflected signals are relatively weak. This causes additional difficulties for their separation from the total wave field and correct interpretation of the information they bring. To solve this problem, explicit asymptotic representations for reflected and transmitted waves in a two-layer elastic half-space with a surface source are proposed in the present work, which allow fast parametric analysis. They can be used to analyze ultrasonic probing data, for example, to estimate the state of the junction zone or to determine the mutual orientation of the crystals' principal axes.

Keywords: ultrasonic inspection, single-crystal alloy joints, reflection and refraction at the interface, integral and asymptotic wave field representations.

DOI: 10.31857/S0130308224110014

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в различных областях промышленности, например, при производстве лопаток аэрокосмических и судовых турбинных двигателей, используются детали из высокоэффективных сплавов (никелевые суперсплавы [1, 2]), которые отливаются в виде монокристаллов и обладают отличными прочностными свойствами, сохраняющимися и при повышенных температурах. Для выявления скрытых внутренних дефектов и предотвращения внезапного разрушения деталей, которое приводит к выходу из строя или даже потере двигателя, проводится регулярная диагностика изделий, в том числе и методами ультразвукового (УЗ) неразрушающего контроля [3, 4]. Анализ изменения амплитудно-частотных характеристик отраженных и прошедших УЗ сигналов, проводимый на основе адекватного компьютерного

моделирования протекающих волновых процессов, позволяет получать информацию не только о наличии внутренних дефектов, но и об изменениях механических свойств материала и прочности соединения. Аналогичные проблемы выделения конкретных отраженных волн из сигналов суммарного волнового поля, регистрируемых на поверхности, возникают при дефектоскопии внутренних трещин и других объектов с плоскими границами [5, 6], а также в сейсмологии и сейсморазведке [7].

Законы распространения, отражения и преломления волн, падающих на границу раздела упругих сред, хорошо известны [8], однако количественная оценка их амплитудно-частотных характеристик с учетом параметров источника остается сложной задачей. Полное волновое поле, возбуждаемое заданным источником (УЗ преобразователем), можно рассчитать с помощью конечно-элементного моделирования (МКЭ), которое, как правило, требует больших вычислительных затрат и без дополнительной постобработки не позволяет выделить отдельные бегущие или объемные волны из суммарного численного решения. Явные интегральные и асимптотические представления для волн различного типа, возбуждаемых заданным источником, удастся получить в рамках полуаналитического интегрального подхода, базирующегося на представлении решения через матрицу Грина рассматриваемой слоистой структуры [9—12]. Асимптотические представления для возбуждаемых источником бегущих волн получают как вклад вычетов в полюсах фурье-символа матрицы Грина, а объемных волн — методом перевала и стационарной фазы.

Настоящая работа посвящена построению асимптотики отраженных упругих волн в двухслойном полупространстве с поверхностным источником колебаний, исходя из интегрального представления решения через фурье-символы матрицы Грина рассматриваемой слоистой структуры и поверхностной нагрузки, моделирующей воздействие зондирующего УЗ преобразователя. Для верификации полученных асимптотических представлений проводится сопоставление с результатами численного интегрирования и конечно-элементного моделирования.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания $\mathbf{u}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ двухслойного упругого полупространства (гармонический множитель $e^{-i\omega t}$ далее опущен). В декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$ верхний слой занимает объем $-\infty < x, y < +\infty, -h \leq z \leq 0$, а нижнее полупространство — $-\infty < x, y < +\infty, z \leq -h$ (рис. 1а). В общем случае анизотропного материала комплексная амплитуда вектора перемещений $\mathbf{u} = (u, v, w) = (u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет уравнениям движения:

$$C_{ijkl}u_{i,jk} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

в которых упругие модули C_{ijkl} и плотность ρ постоянны в пределах каждого слоя.

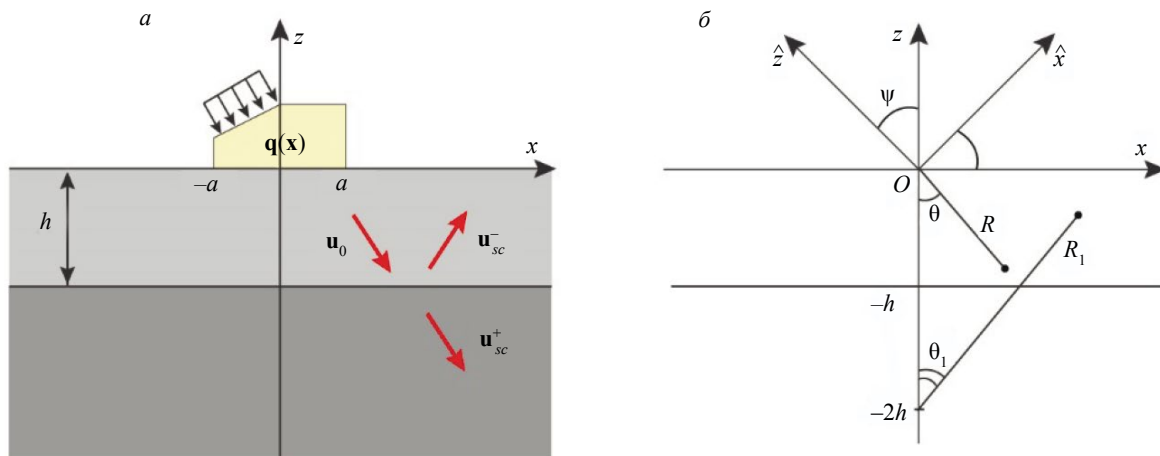


Рис. 1. Геометрия задачи (а); полярные координаты (R, θ) для асимптотики поля источника $\mathbf{u}_0$ и (R_1, θ_1) для отраженного поля $\mathbf{u}_{sc}^+$; угол ψ определяет ориентацию главных осей анизотропии $(\hat{x}, \hat{z})$ (б).

На границе контакта упругого слоя с полупространством $z = -h$ выполняются условия непрерывности перемещений $\mathbf{u}$ и напряжений $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z)$:

$$[\mathbf{u}] = 0, [\boldsymbol{\tau}] = 0 \text{ при } z = -h \quad (2)$$

(квадратными скобками обозначен скачок соответствующей вектор-функции в рассматриваемой точке z : $[f(z)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(z - \varepsilon) - f(z + \varepsilon))$). Действие УЗ преобразователя (источник колебаний) моделируется нагрузкой $\mathbf{q}$, приложенной к свободной поверхности $z = 0$ в ограниченной области Ω :

$$\boldsymbol{\tau}|_{z=0} = \mathbf{q}(x, y), \mathbf{q}(x, y) \equiv 0 \text{ при } x, y \notin \Omega. \quad (3)$$

Замыкают постановку задачи (1)–(3) условия излучения на бесконечность, вытекающие из принципа предельного поглощения [13].

Применение преобразования Фурье F_{xy} к уравнениям (1) и граничным условиям (2), (3) по горизонтальным координатам x и y позволяет получить интегральное представление решения в виде обратного преобразования Фурье от произведения фурье-символов матрицы Грина двухслойного полупространства K и заданной нагрузки $\mathbf{Q} = F_{xy}[\mathbf{q}]$ [9]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = F_{xy}^{-1}[\mathbf{U}] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\boldsymbol{\alpha}, z) \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (4)$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ — параметры преобразования Фурье; $\mathbf{U} = F_{xy}[\mathbf{u}] = K\mathbf{Q}$ — фурье-символ вектора смещений. Алгоритм построения матрицы K в общем случае многослойного упругого полупространства с произвольной анизотропией слоев описан в работах [11, 12]. Контуры интегрирования Γ_1, Γ_2 идут вдоль вещественной оси, отклоняясь от нее в комплексную плоскость α_1 или α_2 при обходе вещественных полюсов элементов матрицы K ; направление обхода определяется принципом предельного поглощения.

В силу геометрии задачи волновое поле $\mathbf{u}$, возбуждаемое заданной нагрузкой $\mathbf{q}$, можно представить в виде:

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{sc}^-, & -h \leq z \leq 0 \\ \mathbf{u}_{sc}^+, & z \leq -h \end{cases}, \quad (5)$$

где $\mathbf{u}_0$ — поле источника, падающее на границу раздела сред $z = -h$; $\mathbf{u}_{sc}^-$ — поле отраженных волн в верхнем слое; $\mathbf{u}_{sc}^+$ — волны, прошедшие через границу в нижнее полупространство (см. рис. 1а). Поле $\mathbf{u}_0$ описывается решениями задач (1), (3) для однородного упругого полупространства ($h = \infty$) со свойствами верхнего слоя. Его интегральное представление имеет тот же вид (4), но уже с матрицей Грина рассматриваемого однородного полупространства K_0 .

При наличии суммарного решения $\mathbf{u}$ и поля источника $\mathbf{u}_0$ рассеянное поле в верхнем слое можно получить как их разность: $\mathbf{u}_{sc}^- = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$. Оно является результатом реверберации исходного поля $\mathbf{u}_0$, т.е. содержит все переотражения от границ $z = 0$ и $z = -h$: $\mathbf{u}_{sc}^- = \mathbf{u}_1^- + \mathbf{u}_2^- + \mathbf{u}_3^- + \dots$ (рис. 2а).

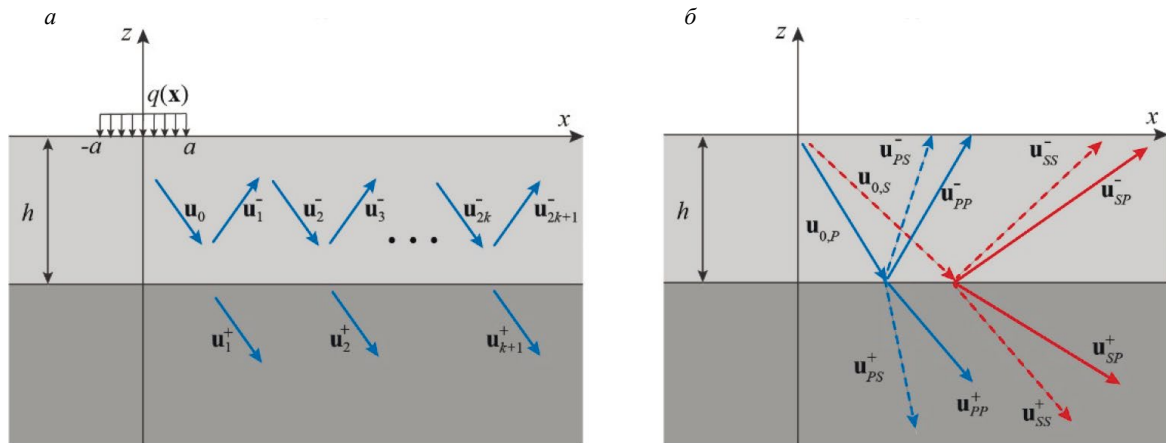


Рис. 2. Реверберация поля источника в верхнем слое (а); возникновение отраженных и прошедших объемных волн PP , PS , SP и SS при падении P и S -составляющих поля источника $\mathbf{u}_0$ на границу раздела сред (б).

Известно, что в однородном изотропном полупространстве поверхностная нагрузка возбуждает две сферические объемные волны (продольную и поперечную или P и S -волны) и поверхностную волну Рэлея. Амплитуда последней убывает с глубиной экспоненциально, поэтому при толщине слоя больше нескольких длин волны она практически не взаимодействует с границей раздела сред, а отражение вверх и прохождение сигнала в нижнее полупространство происходит при падении на границу P и S -составляющих поля источника $\mathbf{u}_0$. Причем, в соответствии с законами преломления и отражения волн на границе раздела упругих сред [8], падение каждой из них также порождает по две объемные P и S -волны в каждом слое. Таким образом, на поверхности могут быть зарегистрированы сигналы, приносимые отраженными волнами PP , PS (результат отражения $\mathbf{u}_{0,P}$) и SP , SS (отражение $\mathbf{u}_{0,S}$) (рис. 2б).

Для получения первого отражения $\mathbf{u}_1^-$ достаточно рассмотреть задачу о падении заданного поля $\mathbf{u}_0$ на границу раздела составного пространства, состоящего из полупространств $z \geq -h$ и $z \leq -h$ со свойствами верхнего и нижнего материала. Рассеянное поле $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^+$ удовлетворяет тем же уравнениям (1), а из граничных условий остается только условие непрерывности (2), которое при подстановке суммарного решения $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1$ принимает вид:

$$[\mathbf{u}_1] = -\mathbf{u}_0, [\tau_1] = -\tau_0 \text{ при } z = -h. \quad (6)$$

Пусть L — фурье-символ матрицы Грина составного пространства. Ее столбцами также являются векторы смещений, но в отличие от столбцов матрицы K они вызваны не сосредоточенными поверхностными нагрузками, приложенными вдоль координатных осей, а точечными скачками смещений на границе соединения. Фурье-символ $\mathbf{U}_1$ первого слагаемого рассеянного поля выражается через поле источника в виде $\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\alpha}, z) = L(\boldsymbol{\alpha}, z)\mathbf{U}_0(\boldsymbol{\alpha}, -h)$. Общая схема и алгоритм построения L аналогичны алгоритмам построения матрицы K .

Учитывая соотношение $\mathbf{U}_0 = K_0\mathbf{Q}$, фурье-символ $\mathbf{U}_1$ также может быть выражен через моделирующую источник нагрузку $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{U}_1(\boldsymbol{\alpha}, z) = M_1(\boldsymbol{\alpha}, z)\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}), \quad (7)$$

где $M_1(\boldsymbol{\alpha}, z) = L(\boldsymbol{\alpha}, z)K_0(\boldsymbol{\alpha}, -h)$ — матрица Грина для первого отражения от внутренней границы (при $z \geq -h$) и прохождения через нее (при $z \leq -h$). Соответственно, для полей $\mathbf{u}_1^+$ также справедливо представление (4), но с матрицей M_1 вместо K . Это представление является исходным для вывода асимптотики первого отражения от внутренней границы методом стационарной фазы аналогично тому, как ранее была выведена асимптотика поля источника и прошедших волн в нижнем изотропном [10] и анизотропном [14] полупространстве.

Предварительно рассмотрим результаты двумерного конечно-элементного моделирования, полученные с помощью пакета COMSOL Multiphysics 6.2, позволяющие оценить влияние мало-контрастной внутренней границы на формирование суммарного поля $\mathbf{u}$ и отраженного $\mathbf{u}_{sc}^-$.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для определенности численные примеры здесь и ниже приводятся для параметров, задающих упругие свойства соединений сплава никеля CMSX-4 [1,2], обладающего кубической анизотропией. Материал верхнего слоя и нижнего полупространства отличаются только ориентацией главных осей, что делает границу мало-контрастной.

Таблица 1

Упругие модули C_{pq} , ГПа

Материал	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}
M1	235	142	142	235	142	235	131	131	131
M2	319,5	142	57,5	235	142	319,5	131	46,5	131

Примеры приводятся для двух вариантов материала:

- 1) главные оси совпадают с осями координат (материал M1; $\psi = 0$);
- 2) оси повернуты в плоскости (x, z) на 45° (материал M2, $\psi = \pi/4$) (см. рис. 1б).

В обоих случаях плотность $\rho = 8720 \text{ кг/м}^3$; упругие модули даны в табл. 1 в матричных обозначениях Фойгта: $C_{pq} = C_{ijkl}$, где $p = i$ при $i = j$ и $p = 9 - i - j$ при $i \neq j$, аналогично $q = k = l$ и $q = 9 - k - l$ при $k \neq l$.

В расчетах использовалась нагрузка $\mathbf{q} = q_0(0, 0, e^{ik_p x \cos \theta_0})$, моделирующая действие наклонного УЗ-преобразователя со скошенной под некоторым углом гранью пьезокристалла, к которой прикладывается управляющий электрический сигнал (см. рис. 1а); касательные компоненты $\mathbf{q}$ отсутствуют из-за тонкого слоя смазки в области контакта; $k_p = \omega/c_p$ — волновое число объемных Р-волн в верхнем слое; θ_0 — угол наклона плоского фронта после преломления в области контакта пьезокристалла с поверхностью образца (ожидаемая направленность излучения). Нагрузка распределена в полосовой области $|x| \leq a$ полуширины $a = 2 \text{ мм}$; толщина верхнего слоя $h = 5 \text{ мм}$; диапазон частот от 1 до 10 МГц. Для рассматриваемых материалов такая нагрузка не дает антиплоской компоненты смещений в сечении (x, z) ($u_z = 0$). Поэтому расчеты проводятся в упрощенной плоской постановке: $\mathbf{u} = (u, w)$, позволяющей тем не менее анализировать особенности формирования отраженных и прошедших волн в рассматриваемых соединениях. В этой постановке работают только упругие коэффициенты, связанные с осями x и z , а именно C_{11} , C_{13} , C_{33} и C_{55} .

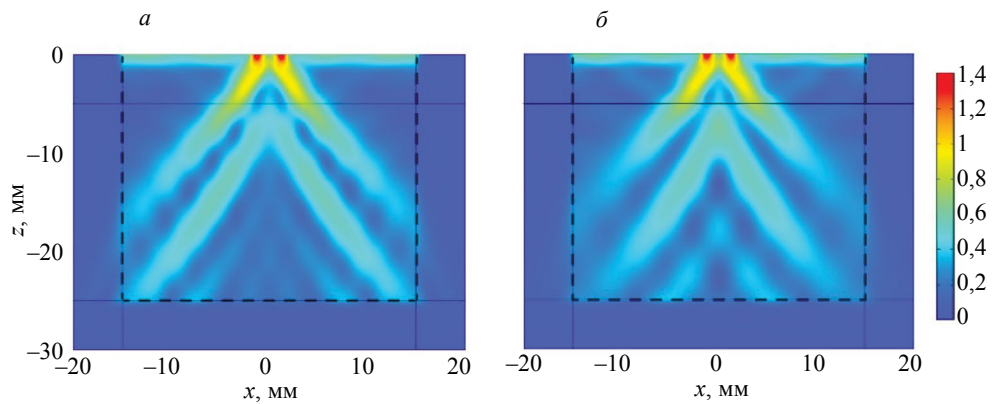


Рис. 3. Волновое поле вертикального источника ($\theta_0 = 0$) в однородной полуплоскости $M1$ ($\psi_1 = \psi_2 = 0$) (а) и в двухслойной $M1/M2$ ($\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pi/4$) (б); частота $f = 1 \text{ МГц}$.

На рис. 3 дается пример сопоставления пространственного распределения амплитуды суммарного волнового поля $|\mathbf{u}| = \sqrt{|u|^2 + |w|^2}$ в однородной полуплоскости из материала $M1$ и в двухслойной $M1/M2$, иллюстрирующий слабое влияние изменения взаимной ориентации осей анизотропии. Наличие отраженного поля здесь визуально почти неразлично. Тем не менее его вклад удастся выделить, рассмотрев график амплитуды разности вертикальных компонент смещения на поверхности (см., например, рис. 4 для двухслойных образцов $M1/M2$ и $M2/M1$). Рис. 5 иллюстрирует изменение поля в этих средах с ростом частоты до 10 МГц.

Результаты МКЭ расчетов на рис. 3—5 даны в относительных единицах: амплитуды смещений отнесены к осредненному в области контакта вертикальным смещениям $\tilde{w} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a w(x, 0) dx$,

вызванным нормальной нагрузкой $\mathbf{q} = q_0(0, 0, 1)$ в однородной полуплоскости $M1$ на рассматриваемой частоте f . Это позволяет проследить относительное изменение амплитуды в зависимости от вида среды. Излучение на бесконечность учитывается в пакете COMSOL введением поглощающих слоев (Perfect Match Layers — PML). На рис. 3—5 их границы показаны штриховыми линиями ($x = \pm 15 \text{ мм}$, $z = -25 \text{ мм}$).

Пики графиков амплитуды $|w_{sc}^-(x, 0)|$, появившиеся на рис. 4 справа от начала координат, указывают на наличие отраженных волн, но не дают, однако, более детальной информации о том, из чего складывается поле $\mathbf{u}_{sc}^-(x, z)$, выделенное из суммарного МКЭ-решения. Каков, например, отдельно вклад продольных и поперечных объемных волн в поле первого отражения $\mathbf{u}_1^-$, насколько сильны помехи, вносимые в $\mathbf{u}_{sc}^-(x, z)$ поверхностными волнами рэлеевского типа, и т.п. Такой более детальный анализ позволяют провести асимптотические представления для различных составляющих поля $\mathbf{u}_1^-$, полученные ниже из интегрального представления вида (4), но для символа Фурье (7) и решения в плоской постановке.

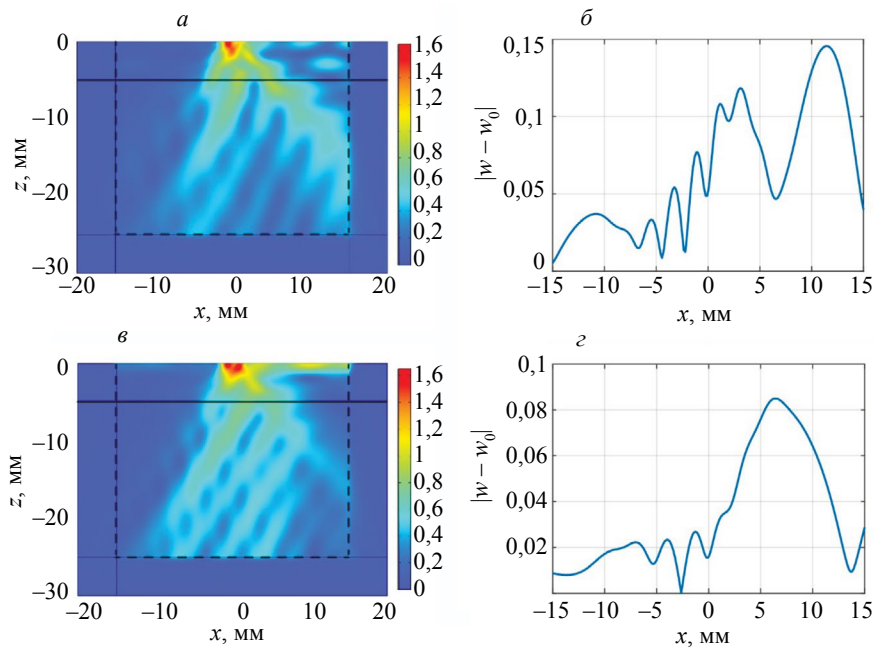


Рис. 4. Поле наклонного источника ($\theta_0 = \pi/4$, слева) и амплитуда вертикальной компоненты перемещений отраженного поля $|w_{sc}^-| = |w - w_0|$ на поверхности $z = 0$ (справа) в средах $M1/M2$ (вверху) и $M2/M1$ (внизу); частота $f = 1$ МГц.

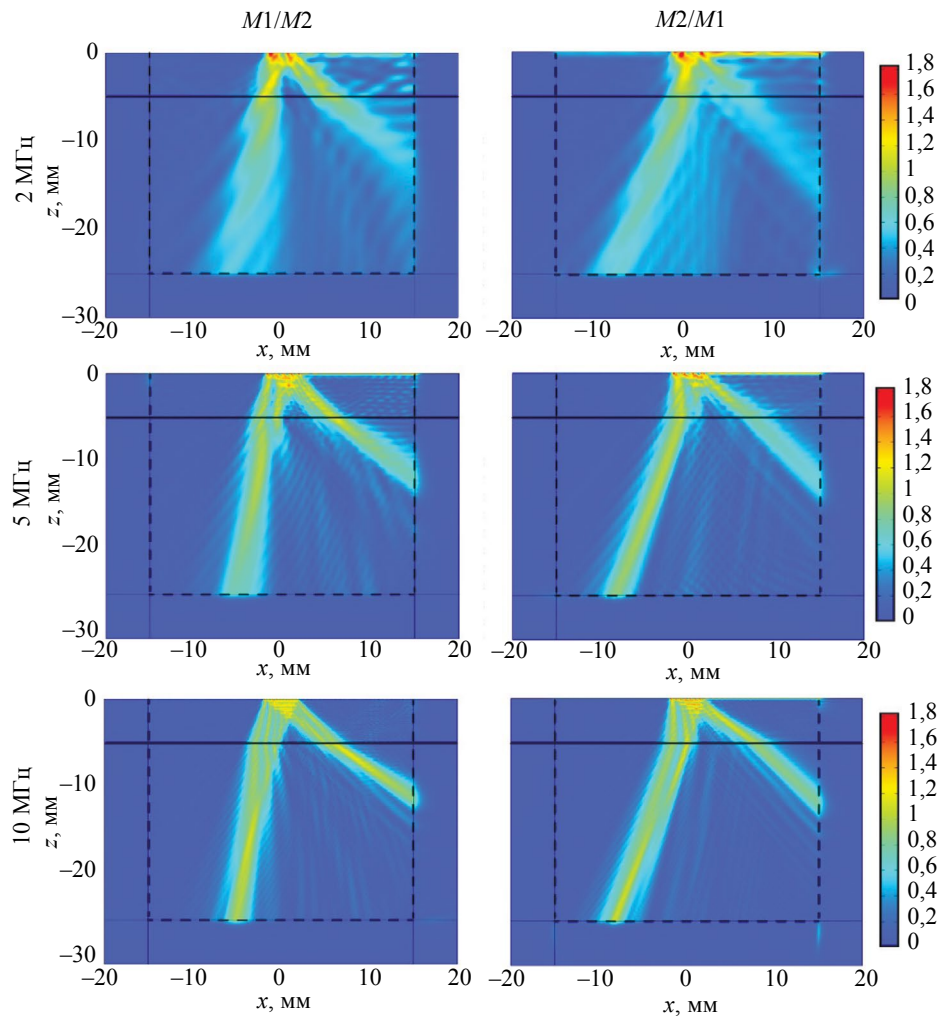


Рис. 5. Изменение поля смещений $|u|$ наклонного источника ($\theta_0 = \pi/4$ как на рис. 4) в полуплоскости $M1/M2$ (слева) и $M2/M1$ (справа) на частотах $f = 2, 5$ и 10 МГц.

АСИМПТОТИКА ОТРАЖЕННОГО ПОЛЯ

Для наглядности общая схема вывода асимптотики отраженных волн дается для частного случая изотропных материалов, когда элементы матриц Грина K_0 и L в представлении (7) записываются в явном виде. Ее обобщение на случай произвольно-анизотропных упругих сред обсуждается ниже в заключительных замечаниях.

Для выбора упругих параметров изотропной модели, аппроксимирующей волновые свойства рассмотренных выше соединений материала с кубической анизотропией, первоначально определяются фазовые и групповые скорости c_n и v_n распространяющихся в нем плоских волн $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = A \mathbf{p} e^{i\kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x})}$; $\kappa = \omega/c$ — волновое число; c — фазовая скорость; $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к фронту волны; $\mathbf{p}$ — вектор поляризации колебаний; A — амплитудный множитель. Фазовые скорости c_n вычисляются как корни характеристического уравнения Кристоффеля, а групповые v_n — используя восходящее к работам Меркулова [15] представление для компонент вектора групповой скорости $v_n = (v_{n,1}, v_{n,2}, v_{n,3})$ через найденные c_n и компоненты векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{n}$: $v_{n,j} = C_{ijkl} p_i p_k n_l / (c_n \rho)$ [2, 16].

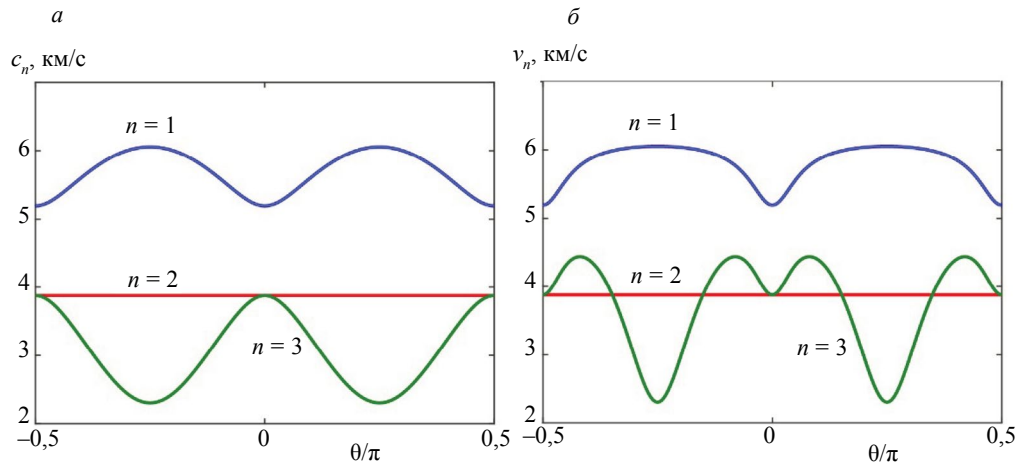


Рис. 6. Зависимость фазовых (а) и групповых (б) скоростей плоских волн от направления распространения θ в материале $M1$.

Для материала $M1$ зависимость скорости волн с нормалью к фронту $\mathbf{n} = (\sin \theta, 0, -\cos \theta)$, лежащей в плоскости (x, z) , от угла θ , задающего отклонение от направления строго вниз ($\theta = 0$), приведены на рис. 6. Векторы поляризации $\mathbf{p}_n$ первой и третьей волны лежат в той же плоскости (x, z) , это квазипродольная волна qP ($n = 1$) и квазипоперечная волна qS ($n = 3$). У второй волны вектор поляризации ортогонален к плоскости (x, z) , это горизонтально-поляризованная (антиплоская) волна SH . Она не возбуждается рассматриваемой нагрузкой, поэтому здесь распространяются только два типа объемных волн, как в изотропной среде. Их скорости в направлениях $\theta = 0$ и $\theta = \pi/4$ выбраны в качестве скоростей c_P и c_S объемных волн P и S в изотропных материалах $ИМ1$ и $ИМ2$, свойства которых используются далее в численных примерах (табл. 2). Отметим, что для этих направлений волновые свойства наиболее контрастны, а групповая и фазовая скорости совпадают между собой. Причем в направлении $\theta = 0$ (материал $ИМ1$) соотношение $c_S^2/c_P^2 = 0,558 > 0,5$, т.е. это ауксетик с отрицательным коэффициентом Пуассона $\nu = -0,131$ [17,18].

Объемные волны, возбуждаемые поверхностной нагрузкой в дальней от источника зоне $R/\lambda \gg 1$ (λ — длина волны), описываются вкладом стационарных точек фазовой функции в асимптотику осциллирующих интегралов (4) [10, 14]. По Теореме 2.1 [19] вклад внутренней невырожденной стационарной точки $\mathbf{a}_0$ фазовой функции $S(\mathbf{a})$ в m -кратный осциллирующий интеграл имеет вид:

$$\int_D \mathbf{U}(\mathbf{a}) e^{iRS(\mathbf{a})} d\mathbf{a} = \left(\frac{2\pi}{R |\det S''_0|} \right)^{m/2} \mathbf{U}(\mathbf{a}_0) e^{i(RS_0 + \text{sgn } \pi/4)} [1 + O(R^{-1})], \quad R \gg 1, \quad (8)$$

где D — ограниченная область в m -мерном пространстве $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$; $\mathbf{a}_0 \in D$ — корень фазового уравнения $\nabla S(\mathbf{a}) = 0$; $S_0 = S(\mathbf{a}_0)$ — значение фазовой функции в стационарной точке,

Параметры изотропных материалов ИМ1 и ИМ2, аппроксимирующие волновые свойства материалов М1 и М2

Материал	c_p , км/с	c_s , км/с	ρ , 10^3 кг/м ³	$\lambda+2\mu$, ГПа	μ , ГПа	ν
ИМ1	5,191	3,876	8,72	235	131	-0,131
ИМ2	6,053	2,309	8,72	319,5	46,5	0,415

$S''_0 = S''(\alpha_0)$ — матрица вторых производных (матрица Якоби); $\text{sgn} = \nu_+ - \nu_-$ — разность между числом положительных и отрицательных собственных чисел матрицы S''_0 .

В интегральных представлениях вида (4) для полей $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_1$ фазовые функции $S(\alpha)$ выделяются, учитывая экспоненциальную зависимость их фурье-символов от z . В изотропном случае:

$$K_0(\alpha, z) = K_{0,1}(\alpha)e^{\sigma_1 z} + K_{0,2}(\alpha)e^{\sigma_2 z}, \quad L(\alpha, z) = \begin{cases} L_1(\alpha)e^{-\sigma_1(z+h)} + L_2(\alpha)e^{-\sigma_2(z+h)}, & z > -h \\ \tilde{L}_1(\alpha)e^{\tilde{\sigma}_1(z+h)} + \tilde{L}_2(\alpha)e^{\tilde{\sigma}_2(z+h)}, & z < -h \end{cases} \quad (9)$$

где $\sigma_n = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_n^2}$, $\kappa_n = \omega/c_n$ — волновые числа объемных волн в верхнем полупространстве $z > -h$ ($c_1 = c_p$, $c_2 = c_s$); волной сверху обозначены аналогичные величины для нижнего полупространства $z < -h$. Входящие в (9) матрицы несложно получить в явном виде, подставляя общее решение $\mathbf{U}_0 = t_1 \mathbf{m}_1 e^{\sigma_1 z} + t_2 \mathbf{m}_2 e^{\sigma_2 z}$ в преобразованные по Фурье граничные условия (3), а аналогичное представление для $\mathbf{U}_1$ — в условия (6) на границе $z = -h$.

В плоском случае интегралы однократные ($m = 1$, $\alpha = \alpha_1 = \alpha$), а областью D в формуле (8) являются отрезки $D_n: |\alpha| < \kappa_n$, на которых радикалы σ_n принимают чисто мнимые значения: $\sigma_n = -i\hat{\sigma}_n$, где $\hat{\sigma}_n = \sqrt{\kappa_n^2 - \alpha^2} \geq 0$. Для $\mathbf{u}_0$ фазовые функции получаются при объединении показателей осциллирующих экспонент $e^{-i\hat{\sigma}_n z}$ и $e^{-i\alpha x}$:

$$S_n(\alpha) = -(\hat{\sigma}_n z + \alpha x) / R = \hat{\sigma}_n \cos \theta - \alpha \sin \theta. \quad (10)$$

Здесь $R = \sqrt{x^2 + z^2}$ и θ — радиус и угол полярных координат $x = R \sin \theta$, $z = -R \cos \theta$ (см. рис. 1б). Каждая из функций S_n имеет по одной стационарной точке $\alpha_{0,n} = -\kappa_n \sin \theta$, которые дают следующий вклад в асимптотику поля источника:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{n=1}^2 \mathbf{a}_n(\theta) e^{i\kappa_n R} / \sqrt{\kappa_n R} [1 + O((\kappa_n R)^{-1})], \quad \kappa_n R \gg 1, \quad |\theta| < \pi/2; \quad (11)$$

$$\mathbf{a}_n = i |\cos \theta| K_{0,n}(\alpha_{0,n}) Q(\alpha_{0,n}) \kappa_n.$$

С учетом гармонического множителя $e^{-i\omega t}$ каждое из слагаемых (11) описывает волны $e^{i(\kappa_n R - \omega t)}$, круговой фронт которых распространяется от источника со скоростью объемных P или S -волн: $R = c_n t + \text{const}$.

В соответствии со структурой (9) матриц K_0 и L , матрица M_1 в представлении (7) для отраженных волн $\mathbf{u}_1^-$ может быть представлена в виде четырех слагаемых:

$$M_1 = \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 M_{mn}(\alpha) e^{-\sigma_m h} e^{-\sigma_n(z+h)}, \quad M_{mn} = L_n K_{0,m}. \quad (12)$$

Соответственно здесь появляются четыре фазовые функции S_{mn} :

$$S_{mn}(\alpha) = [\hat{\sigma}_n(z+h) + (\hat{\sigma}_m - \hat{\sigma}_n)h - \alpha x] / R_1 = \hat{\sigma}_n \cos \theta_1 + \alpha \sin \theta_1 + (\hat{\sigma}_m - \hat{\sigma}_n)b, \quad (13)$$

в которых $R_1 = \sqrt{x^2 + (z+2h)^2}$ и θ_1 — радиус и угол полярных координат $x = -R_1 \sin \theta_1$, $z + 2h = R_1 \cos \theta_1$ с центром в точке $(0, -2h)$ (см. рис. 1б); $b = h/R_1 \leq 1/2$. Таким образом, $\mathbf{u}_1^- = \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{12} + \mathbf{u}_{21} + \mathbf{u}_{22}$, где

$$\mathbf{u}_{mn}(R_1, \theta_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} M_{mn}(\alpha) Q(\alpha) e^{iR_1 S_{mn}(\alpha, \theta_1)} d\alpha. \quad (14)$$

Слагаемые с индексами $mn = 11, 12, 21$ и 22 содержат отраженные объемные волны PP , PS , SP и SS (см. рис. 2б), которые описываются вкладом стационарных точек α_{mn} функций S_{mn} в асимптотику вида (8):

$$\mathbf{u}_{mn} = \mathbf{a}_{mn}^-(\theta_1) e^{i\kappa_{mn}R_1} / \sqrt{\kappa_{mn}R_1} [1 + O((\kappa_{mn}R_1)^{-1})], \quad \kappa_{mn}R_1 \gg 1, \quad |\theta_1| < \pi/2; \quad (15)$$

$$\mathbf{a}_{mn}^- = \frac{|\cos \theta_1|}{\sqrt{2\pi i}} M_{mn}(\alpha_{mn}) \mathbf{Q}(\alpha_{mn}) \kappa_{mn}, \quad \kappa_{mn} = S_{mn}(\alpha_{mn}).$$

При $m = n$ функции S_{mn} сводятся к виду (10) с $\theta = -\theta_1$, поэтому для отраженных PP и SS -волн стационарные точки также находятся в явном виде: $\alpha_{mn} = \kappa_n \sin \theta_1$, а при $m \neq n$ корни уравнения $\partial S_{mn} / \partial \alpha = 0$ определяются численно. Причем они зависят не только от θ_1 , но и от параметра b , который стремится к нулю при $R_1 \rightarrow \infty$, т.е. стационарные точки α_{mn} стремятся к тем же значениям $\kappa_n \sin \theta_1$, как и для PP и SS -волн.

В качестве примера на рис. 7 приводятся диаграммы направленности для каждой из четырех составляющих отраженного поля $\mathbf{u}_1^-$, т.е. зависимость нормированных амплитудных множителей $|\mathbf{a}_{mn}^-|$ в представлении (15) от θ_1 ; $R_1/\lambda_p = 20$, где $\lambda_p = 2\pi/\kappa_p$ — длина P -волн в верхней полуплоскости; источник — вертикальная сосредоточенная нагрузка. Для верификации сплошными линиями даны также результаты численного интегрирования представлений (14). С ростом R_1/λ_p их значения сближаются, при этом затраты на численное интегрирование быстро растут, а для асимптотик — остаются несущественными при любых R_1/λ_p .

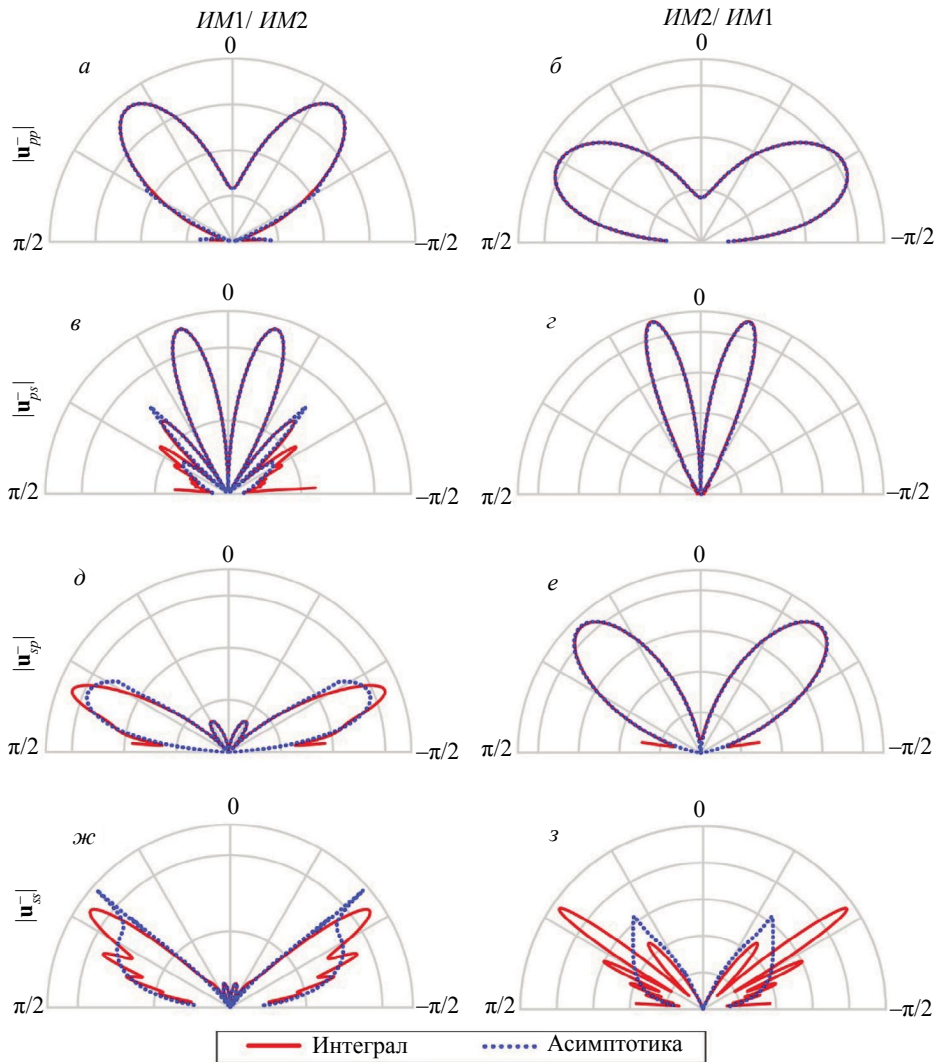


Рис. 7. Диаграммы направленности составляющих отраженного поля $\mathbf{u}_1^-$ в средах $IM1/IM2$ и $IM2/IM1$ на расстоянии $R_1 = 20\lambda_p$ (значения нормированы на максимум).

На рис. 8 приводятся аналогичные диаграммы направленности для составляющих прошедшего поля $\mathbf{u}_1^+$, интегральные представления и асимптотика которых выражаются через матрицы $\tilde{M}_{mn} = \tilde{L}_n K_{0,m}$. Отметим, что численное интегрирование в представлениях вида (14) ведется по всей оси α (точнее по контуру Γ), а не только по отрезку $D_n: |\alpha| < \kappa_n$, дающему объемные волны. Поэтому в соответствующих диаграммах учитывается вклад не только отраженных или прошедших объемных волн, но и всех других волн, возникающих при взаимодействии поля $\mathbf{u}_0$ с границей раздела материалов. Таких, например, как головные волны, возникающие при падении на границу под углом больше критического [20, 21], бегущие волны Стоунли, просачивающиеся моды и др. Как правило, их вклад несущественен, так как их амплитуда быстро убывает при удалении от границы, но в некоторых случаях он становится заметным. Так, например, отличия в диаграммах на рис. 8в и 8ж объясняются трансформацией прошедшей волны в головную для углов, больше критического, когда стационарная точка выходит за границы отрезка D_n и асимптотика (15) перестает работать.

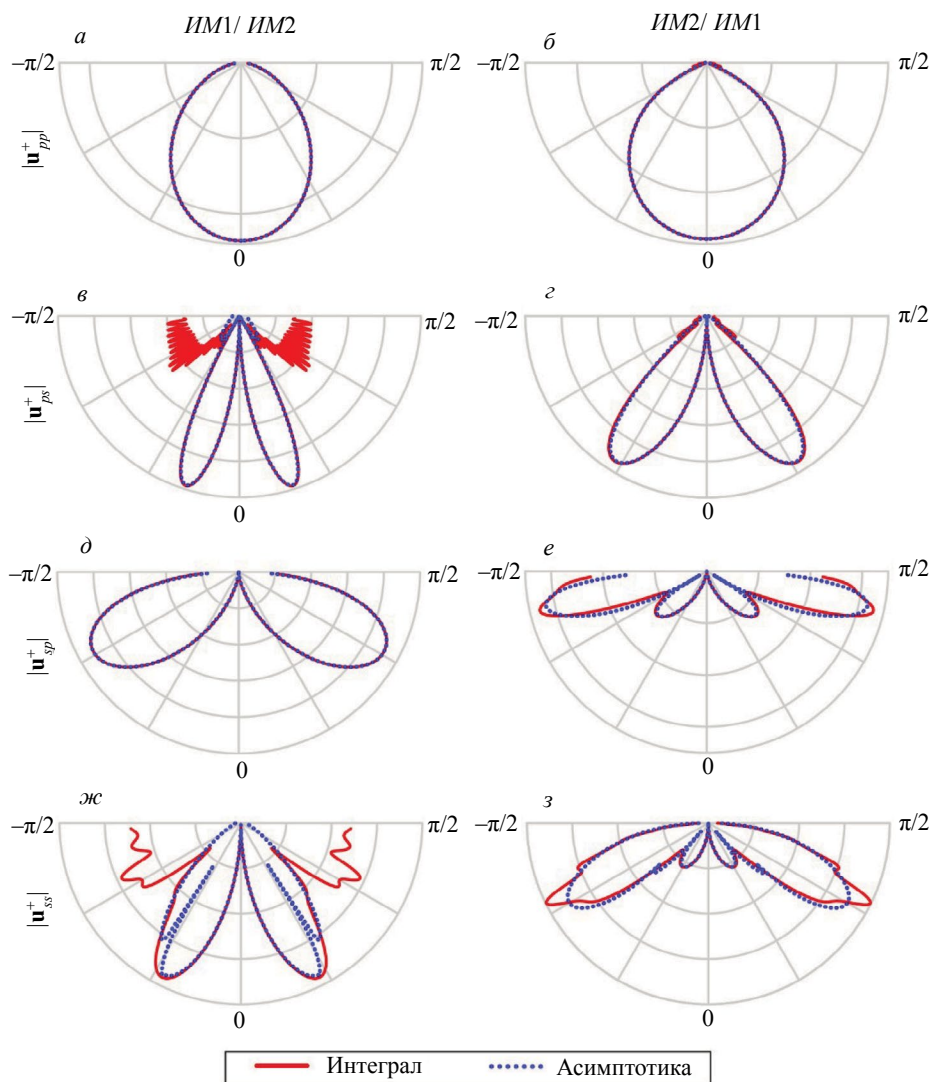


Рис. 8. Диаграммы направленности составляющих прошедшего поля $\mathbf{u}_1^+$ в средах $ИМ1/ИМ2$ и $ИМ2/ИМ1$ на расстоянии $R = 20\lambda_p$ (значения нормированы на максимум).

В большинстве остальных примеров, приведенных на рис. 7 и 8 для расстояния $R_1 = 20\lambda_p$, вклад одной точки α_{mn} в асимптотику (15) дает практически такие же диаграммы, как и интегрирование (14) по всей оси α . А там, где отличия заметны (например, для отраженных волн SS , рис. 7ж, з), численный анализ показывает, что они нивелируются с ростом R_1 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для составных образцов с большим отношением толщины верхнего слоя к длине рэлеевской волны, исключаяющим ее заметное влияние на отраженное поле, возникающее при взаимодействии поля поверхностного источника с внутренней границей соединения, получены асимптотические представления для отраженных и прошедших объемных волн (PP , PS , SP и SS), возникающих при работе УЗ преобразователя на внешней поверхности образца. Верификация полученных асимптотических представлений проводится путем сопоставления с результатами численного интегрирования.

Асимптотика строится в плоской постановке, исходя из интегрального представления решения через фурье-символы матриц Грина составного упругого изотропного пространства и заданной нагрузки, моделирующей воздействие УЗ преобразователя. Она позволяет проводить малозатратный физически наглядный параметрический анализ амплитудно-частотных характеристик и диаграмм направленности каждой из возникающих волн, в то время как их выделение из массива экспериментальных данных или из данных о суммарном волновом поле, полученных с помощью прямых численных методов (например, МКЭ), требует сложной постпроцессорной обработки, точность которой существенно падает в случае малоконтрастных границ соединения материалов с близкими свойствами.

Аналогичные асимптотические представления можно получить и в пространственном случае, а также обобщить их на случай соединения анизотропных материалов, опираясь на хорошо отработанные методы построения пространственного поля источника в изотропных средах [10] и недавно полученные асимптотики для полупространства с произвольной анизотропией упругих свойств [14].

Работа выполняется в рамках проекта РНФ № 24-11-00140.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reed R.C.* The superalloys: fundamentals and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
2. *Lane C.* Wave Propagation in Anisotropic Media / In: The Development of a 2D Ultrasonic Array Inspection for Single Crystal Turbine Blades. Springer Theses. Cham: Springer, 2014.
3. *Giurgiutiu V.* Structural health monitoring with piezoelectric wafer active sensors. UK, Oxford: Elsevier Academic Press, 2014. P. 1024.
4. *Пьянков В.А., Пьянков И.Н.* Акустические методы контроля лопаток газотурбинных двигателей // В мире неразрушающего контроля. 2019. Т. 22. № 1 (83). С. 36—44.
5. *Ермолов И.Н.* Теория и практика ультразвукового контроля. М.: Машиностроение, 1981. 240 с.
6. *Данилов В. Н.* К расчету характеристик эхосигналов поперечных и продольных волн от отражателей с плоскими поверхностями // Дефектоскопия. 2010. № 1. С. 34—55.
7. *Гурвич И.И., Номоконов В.П.* Сейсморазведка. Справочник геофизика. М.: Недра, 1981. 464 с.
8. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342 с.
9. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории для неклассических областей. М.: Наука, 1978. 319 с.
10. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В.* Анализ волновых полей, возбуждаемых в упругом стратифицированном полупространстве поверхностными источниками // Акуст. журн. 1986. Т. 32. Вып. 3. С. 366—371.
11. *Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Кривonos А.С.* Возбуждение и распространение упругих волн в многослойных анизотропных композитах // Прикл. математика и механика. 2010. № 74. С. 297—305.
12. *Glushkov E., Glushkova N., Eremin A.* Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 129 (5). P. 2923—2934.
13. *Свешников А.Г.* Принцип предельного поглощения для волновода // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80. № 3. С. 345—347.
14. *Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kiselev O.N.* Body wave asymptotics for an anisotropic elastic half-space with a surface source / 2023 Days on Diffraction (DD), St.Petersburg, Russian Federation. 2023. P. 78—82.
15. *Меркулов Л.Г., Яковлев Л.А.* Особенности распространения и отражения ультразвуковых лучей в кристаллах // Акуст. журн. 1962. Т. 8. № 1. С. 99—106.
16. *Auld B.A.* Acoustic fields and waves in solids. New York: Wiley, 1973. 423 p.
17. *Гольдштейн Р.В., Городцов В.А., Лисовенко Д.С., Волков М.А.* Отрицательный коэффициент Пуассона для кубических кристаллов и нано/микротрубок // Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16. № 6. С. 13—31.
18. *Демин А.И., Волков М.А., Городцов В.А., Лисовенко Д.С.* Ауксетики среди двухслойных композитов из кристаллов с кубической симметрией. Аналитический и численный анализ // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. Вып. №1. С. 166—180.
19. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

20. Бреховских Л.М., Годин О.А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 411 с.
21. Разыграев Н.П. Физика, терминология и технология в ультразвуковой дефектоскопии головными волнами // Дефектоскопия. 2020. № 9. С. 3—19.

REFERENCES

1. Reed R.C. The superalloys: fundamentals and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
2. Lane C. Wave Propagation in Anisotropic Media / In: The Development of a 2D Ultrasonic Array Inspection for Single Crystal Turbine Blades. Springer Theses. Cham: Springer, 2014.
3. Giurgiutiu V. Structural health monitoring with piezoelectric wafer active sensors. UK, Oxford: Elsevier Academic Press, 2014. P. 1024.
4. Pyankov V.A., Pyankov I.N. Akusticheskiye metody kontrolya lopatok gazoturbinnnykh dvigateley (Acoustic inspection methods of turbine blades of gas-turbine engines) // V mire nerazrushayushchego kontrolya. 2019. V. 22. No 1. (83). P. 36—44.
5. Ermolov I.N. Teoriya i praktika ul'trazvukovogo kontrolya (Theory and practice of ultrasonic testing). Moscow: Mashinostroyeniye, 1981. 240 p.
6. Danilov V.N. On the calculation of characteristics of echo signals of transverse and longitudinal waves from reflectors with flat surfaces // Defektoskopiya. 2010. No. 1. P. 26—41.
7. Gurchikov I.I., Nomokonov V.P. Seysmorazvedka. Spravochnik geofizika (Seismic exploration. Geophysics handbook). Moscow: Nedra, 1981. 464 p.
8. Brekhovskikh L.M. Waves in Layered Media. 2nd Edition. New York: Academic Press, 1980.
9. Vorovich I.I., Babeshko V.A. Dinamicheskiye smeshannyye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey (Dynamic Mixed Problems on Theory of Elasticity for Non-Classical Fields). Moscow: Nauka, 1979. 320 p.
10. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V. Analysis of wave fields generated in a stratified elastic half-space by surface sources // Sov. Phys. Acoust. (USA). 1986. V. 32. No. 3. P. 223—226.
11. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Krivonos A.S. The excitation and propagation of elastic waves in multilayered anisotropic composites // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2010. No. 74. P. 297—305.
12. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // J. Acoust. Soc. Am. 2011. V. 129 (5). P. 2923—2934.
13. Sveshnikov A.G. Printsip predel'nogo pogloshcheniya dlya volnovoda (The limit absorption principle for a waveguide) // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1951. V. 80. No. 3. P. 345—347.
14. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Kiselev O.N. Body wave asymptotics for an anisotropic elastic half-space with a surface source / 2023 Days on Diffraction (DD), St. Petersburg, Russian Federation. 2023. P. 78—82.
15. Merkulov L.G., Yakovlev L.A. Some features of propagation and reflection of ultrasound in monocrystals // Sov. Phys. Acoust. (USA). 1962. V. 8. No. 1. P. 99—106.
16. Auld B.A. Acoustic fields and waves in solids. New York: Wiley, 1973. 423 p.
17. Goldstein R.V., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S., Volkov M.A. Negative poisson's ratio for cubic crystals and nano/microtubes // Physical Mesomechanics. 2014. V. 17. No. 2. P. 97—115.
18. Demin A.I., Volkov M.A., Gorodtsov V.A., Lisovenko D.S. Auxetics among two-layered composites made of cubic crystals. analytical and numerical analysis // Mechanics of Solids. 2023. V. 58. No. 1. P. 140—152.
19. Fedoryuk M.V. Metod perevala (The saddle-point method). Moscow: Nauka, 1977. 368 p.
20. Brekhovskikh L.M., Godin O.A. Akustika sloistyykh sred (Acoustics of layered media). Moscow: Nauka, 1989. 411 p.
21. Razygraev N.P. Fizika, terminologiya i tekhnologiya v ul'trazvukovoy defektoskopii golovnymi volnami (Physics, terminology and technology in ultrasonic testing with head waves) // Defektoskopiya. 2020. No. 9. P. 3—19.