

ISSN 0044-4669

Том 63, Номер 10

Октябрь 2023



# ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

[www.sciencejournals.ru](http://www.sciencejournals.ru)



---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 63, номер 10, 2023 год

---

---

## ЮБИЛЕЙ

К семидесятилетию Игоря Борисовича Петрова 1589

---

## ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Сеточно-характеристический численный метод на нерегулярной расчетной сетке с расширением шаблона интерполяции

*А. В. Васюков, И. Е. Смирнов* 1591

Граничные и контактные условия повышенного порядка аппроксимации для сеточно-характеристических схем в задачах акустики

*А. В. Шевченко, В. И. Голубев* 1600

Stability Analysis of Several Time Discrete Schemes for Allen–Cahn and Cahn–Hilliard Equations

*Qiaoling He, Junping Yan, Abudurexiti Abuduwaili* 1614

---

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Coordinated Control of Multiple Surface Unmanned Vehicle Clusters under the Influence of Wind Field and Tides

*Yanshan Liu, Zhiqing Dang, Zhaopeng Dai, Xinran Hao, Yan Cui, Hongwei Gao* 1615

---

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

A Novel Uniform Numerical Approach to Solve Singularly Perturbed Volterra Integrodifferential Equation

*M. Sakira, E. Cimen* 1616

Динамика цепочек из большого числа осцилляторов с односторонней и двусторонней запаздывающими связями

*С. А. Кащенко* 1617

---

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Определение спектра собственных чисел и собственных функций для уравнения колебаний Бернулли–Эйлера с переменными коэффициентами методом Пеано

*Д. Д. Захаров, И. С. Никитин* 1637

Существование решения начально-краевой задачи Лэмба в случае предельного значения коэффициента Пуассона

*А. В. Кравцов* 1648

---

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Численное и аналитическое исследование ударно-волновых процессов в упругопластических средах

*Л. Ван, И. С. Меньшов, А. А. Серёжкин* 1660

Уточненные схемы расчета динамики упруговязкопластических сред

*В. И. Голубев, И. С. Никитин* 1674

Исследование сеточной сходимости сеточно-характеристического метода на химерных сетках в задаче ультразвукового неразрушающего контроля рельсового полотна <i>А. А. Кожемяченко, А. В. Фаворская</i>	1687
Моделирование распространения динамических возмущений, в пористых средах сеточно-характеристическим методом с явным выделением неоднородностей <i>И. А. Митьковец, Н. И. Хохлов</i>	1706
Построение и исследование близости решений в $L_2$ двух краевых задач для модели переноса многокомпонентных взвесей в прибрежных системах <i>В. В. Сидорякина, А. И. Сухинов</i>	1721

---

## ИНФОРМАТИКА

Моделирование эпидемий: нейросеть на основе данных и SIR-модели <i>О. И. Криворотько, Н. Ю. Зятков, С. И. Кабанихин</i>	1733
Математическая модель динамики человеческого капитала <i>Н. В. Трусов, А. А. Шананин</i>	1747

---

---

---

---

ЮБИЛЕЙ

---

---

УДК 51(092)

*Этот номер подготовлен в связи с 70-летием со дня рождения профессора И.Б.Петрова и состоит в основном из статей его учеников, сотрудников и коллег.*

## К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ ИГОРЯ БОРИСОВИЧА ПЕТРОВА

DOI: 10.31857/S0044466923100186, EDN: DVYVRI



8 февраля 2023 г. исполнилось 70 лет члену-корреспонденту РАН, доктору физико-математических наук, профессору, заслуженному профессору Московского физико-технического института Игорю Борисовичу Петрову.

Свой жизненный путь И.Б. Петров начал в Ялте, где он родился в семье офицера Советской армии. С самого детства И.Б. Петров проявлял интерес к математике и техническим наукам. После окончания школы он поступил на факультет аэрофизики и космических исследований МФТИ. Чем связал свою научную деятельность с Московским физико-техническим институтом. На третьем курсе, волею случая, он познакомился со своим будущим научным руководителем, тогда молодым кандидатом наук, впоследствии академиком РАН, Александром Сергеевичем Холодовым. Их научное сотрудничество было чрезвычайно плодотворным и длительным, вплоть до кончины А.С. Холодова. Сразу после окончания института И.Б. Петров был распределен на кафедру вычислительной математики МФТИ, где защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а позднее стал и молодым доктором наук.

Научные интересы Игоря Борисовича связаны, в первую очередь, с компьютерными методами решения динамических систем уравнений в частных производных и численным моделированием процессов, происходящих в деформируемых средах при их динамическом нагружении. Обладая незаурядным талантом организатора, удачно сочетавшимся с пытливым умом исследователя, им были организованы исследования в области решения геофизических задач и задач сейсморазведки, задачи сейсмостойкости наземных сооружений, астероидной опасности, безопасности железных дорог, а также задач биологии и медицины. На текущий момент И.Б. Петров широко известен во всем мире как один из ведущих специалистов в области компьютерного моделирования и вычислительной математики.

Выдающиеся лидерские качества и умение налаживать контакт с людьми позволили И.Б. Петрову быстро создать научную группу. Из нее уже выросли более 50 кандидатов наук и более пяти докторов. По поручению академика РАН О.М. Белоцерковского им на Физтехе была создана новая институтская кафедра информатики. Благодаря организаторскому таланту ему удалось за полгода создать мощный коллектив преподавателей новой кафедры, состоящий из его учеников.

В свой юбилей Игорь Борисович Петров полон сил и энергии, его научные идеи и энтузиазм заражают молодых коллег и стимулируют на научную работу и новые открытия. Редколлегия и коллеги от всей души поздравляют его с юбилеем и желают ему здоровья и счастья, дальнейшей активной научной и образовательной деятельности, а также успешной реализации всех творческих планов.

## ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

Посвящается 70-летию Игоря Борисовича Петрова

### СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ РАСЧЕТНОЙ СЕТКЕ С РАСШИРЕНИЕМ ШАБЛОНА ИНТЕРПОЛЯЦИИ<sup>1)</sup>

© 2023 г. А. В. Васюков<sup>1,\*</sup>, И. Е. Смирнов<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

\*e-mail: a.vasyukov@phystech.edu

\*\*e-mail: smirnov.ie@phystech.edu

Поступила в редакцию 21.03.2023 г.  
Переработанный вариант 27.05.2023 г.  
Принята к публикации 26.06.2023 г.

В работе предложен сеточно-характеристический численный метод для решения многомерного уравнения переноса на неструктурированной расчетной сетке с порядком выше первого без использования вспомогательных точек на ребрах и гранях. Отсутствие вспомогательных точек на ребрах и гранях позволяет упростить топологию расчетной сетки при ее движении, что актуально при решении динамических задач механики деформируемого твердого тела. Для повышения порядка аппроксимации в работе используется аналог расширения сеточно-го шаблона, реализованный для неструктурированной сетки. В работе приведены результаты тестирования предложенной численной схемы для непрерывно дифференцируемых, непрерывных, разрывных решений. Библ. 14. Фиг. 7. Табл. 5.

**Ключевые слова:** сеточно-характеристический метод, неструктурированная сетка, уравнение переноса, динамическая задача, механика деформируемого твердого тела.

DOI: 10.31857/S0044466923100174, EDN: DUZLCK

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается вариант сеточно-характеристического численного метода для решения многомерного уравнения переноса на неструктурированной расчетной сетке с порядком выше первого без использования вспомогательных точек на ребрах и гранях ячеек сетки.

Потребность в реализации такой вариации метода возникает при численном решении многих динамических задач механики деформируемого твердого тела. Сеточно-характеристический численный метод ранее многократно успешно применялся для задач динамической прочности сложных инженерных объектов [1], гетерогенных материалов [2], а также для биомедицинских задач [3]. Однако повышение порядка метода на неструктурированной расчетной сетке все еще остается открытой областью для исследования.

Определяющая система уравнений в частных производных, описывающая динамические процессы в деформируемом твердом теле в трехмерном случае, имеет следующий характерный вид [4]:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + A_x \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + A_y \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + A_z \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

здесь  $\mathbf{w}$  – вектор неизвестных,  $A_x, A_y, A_z$  – постоянные матрицы. Точный вид  $\mathbf{w}, A_i$  зависит от конкретной задачи, в том числе от используемых реологических моделей.

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта 22-11-00142).

Известно [5], [6], что для многих практически значимых постановок существует аналитическое разложение матриц в следующем виде:

$$A_i = \Omega_i^{-1} \cdot \Lambda_i \cdot \Omega_i.$$

Для решения многомерной системы уравнений можно использовать расщепление по направлениям [7], [8]. Точный вид схемы расщепления, использованной в данной работе, приведен ниже при описании численного метода. Но для любой схемы расщепления для пространственной производной по одному из направлений возникает соотношение:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \Omega^{-1} \cdot \Lambda_x \cdot \Omega \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0,$$

откуда следует

$$\Omega \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \Lambda_x \cdot \Omega \cdot \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0.$$

После введения обозначения  $\mathbf{u} = \Omega \cdot \mathbf{w}$ , исходная система распадается на независимые уравнения вида:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_{i_x} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0.$$

В силу изложенного в рамках данной работы не рассматривается точный вид  $\mathbf{w}$ ,  $A_i$ , а численно решается уравнение переноса, которое лежит в основе полной численной схемы для многомерных динамических задач механики деформируемого твердого тела.

При практической реализации численных схем частым их желательным свойством является обеспечение разумно высокого порядка аппроксимации без необходимости использования большого сеточного шаблона. Одним из традиционных подходов к этой задаче является использование компактных продолженных схем [9]. Для сеточно-характеристического метода на структурированных расчетных сетках данный подход также применим [10], [11]. Однако для неструктурированной расчетной сетки такой подход на данный момент не реализован.

При выполнении расчетов для инженерных объектов сложной формы область интегрирования описывается, как правило, именно с использованием неструктурированной расчетной сетки, в двухмерном случае — из треугольников, в трехмерном — из тетраэдров [12]. Таким образом, требуется численно решать уравнения переноса на данной сетке с высоким порядком аппроксимации.

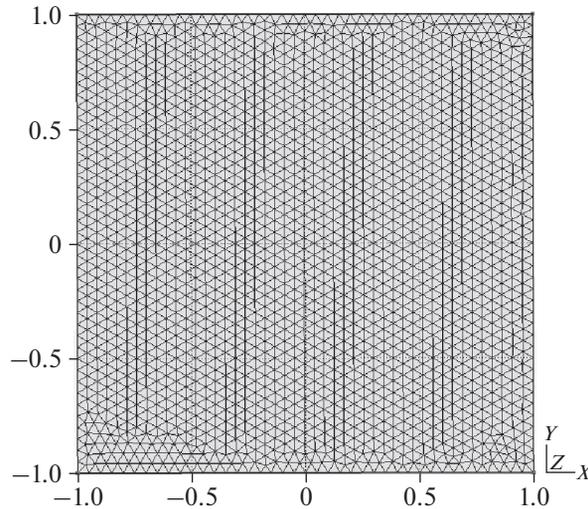
Очевидным образом на треугольниках и тетраэдрах можно обеспечить интерполяцию с первым порядком для значений в произвольной точке по значениям в вершинах. Традиционным способом повышения порядка является введение дополнительных точек на ребрах и гранях элементов сетки [13], [14]. Этот подход хорошо показал себя в решении многих задач. Однако он также содержит и некоторые недостатки. Так, при расчетах задач прочности возникает необходимость описывать значительные деформации объекта, что требует перемещения узлов расчетной сетки. В этом случае использование вспомогательных расчетных узлов, которые жестко зафиксированы на ребрах и гранях, приводит к значительным сложностям. Либо расчет перемещений данных узлов де-факто не выполняется, а их движение интерполируется по узлам в вершинах. Либо при движении узлов на ребрах и гранях существенно нарушается исходная топология элементов расчетной сетки, что резко усложняет построение численной схемы для нее.

В силу этого в данной работе ставится задача исследовать для уравнения переноса на неструктурированной расчетной сетке возможность построения варианта сеточно-характеристического численного метода с порядком выше первого без использования вспомогательных точек на ребрах и гранях.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Рассматривается численное решение двумерного уравнения переноса на двумерных нерегулярных расчетных сетках. Решаемое уравнение для функции  $u(x, y, t)$  в квадрате  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  с периодическими граничными условиями имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u_t + \lambda_x u_x + \lambda_y u_y &= 0, \\ u(x, y, t)|_{t=0} &= F(x, y), \end{aligned}$$



Фиг. 1. Пример расчетной сетки.

$$u(a \cdot T_x + x, b \cdot T_y + y, t) = u(x, y, t), \tag{2}$$

$$T_x = T_y = 2; \quad a, b \in Z,$$

$$x \in [-1, 1], \quad y \in [-1, 1].$$

Здесь  $F(x, y)$  – функция начальных условий;  $T_x, T_y$  – период функции  $u(x, y, t)$ ;  $\lambda_x, \lambda_y$  – скорости по соответствующим направлениям.

Для дискретизации уравнения по времени используется равномерная сетка по времени с шагом  $\tau$ , такая что  $T = N \cdot \tau$ . Здесь число  $N$  – количество слоев по времени. На каждом слое по времени используется неравномерная сетка из треугольников, построенная при помощи алгоритма Делоне, пример расчетной сетки показан на фиг. 1.

При численном решении задача расщепляется по пространственным переменным на два независимых уравнения, решаемых последовательно на каждой временной итерации:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

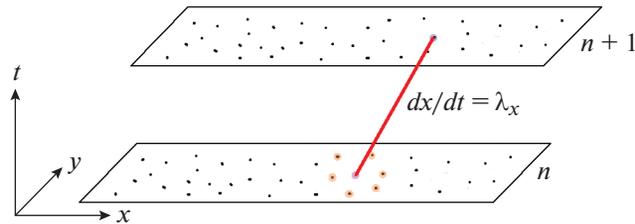
К значениям на текущем временном слое применяется оператор, соответствующий пространственной производной вдоль оси  $OX$ , затем к результату применяется оператор, соответствующий пространственной производной вдоль оси  $OY$ . Результат применения второго оператора является значением на новом временном слое. Данная схема имеет второй порядок аппроксимации.

Для решения каждого из получившихся одномерных уравнений переноса используется сеточно-характеристический метод. Рассмотрим метод на примере уравнения для  $x$  координаты относительно  $u(x, y, t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

В рамках данного метода дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль характеристики:

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_x.$$



Фиг. 2. Перенос значения вдоль характеристики.

Тогда верно следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{dw}{dt} = 0,$$

т.е. вдоль характеристики  $dx/dt = \lambda_x$  решение не зависит от времени:

$$u(x, y, t)|_{dx/dt=\lambda_x} = u(x, y).$$

Таким образом, для нахождения значения функции в момент времени  $t^{n+1}$  из заданной точки опускается характеристика (прямая, задаваемая уравнением  $x = \lambda_x \cdot t$ ) на предыдущий слой по времени  $t^n$ . В точке пересечения  $(x_0, y_0, t^n)$  этой прямой с плоскостью  $t = t^n = \tau \cdot n = \text{const}$  аппроксимируется значение функции, с использованием известных значений в точках на данном слое по времени. Далее это значение переносится в точку  $(x_0 + \lambda_x \cdot \tau, y_0, t^{n+1})$ . Данный подход проиллюстрирован на фиг. 2.

Таким образом, ключевым вопросом для обеспечения высокого порядка аппроксимации численного метода в целом является аппроксимация значения функции на предыдущем слое по времени в некоторой произвольной точке расчетной области.

Для решения данной задачи возможно применить различные подходы. В рамках данной работы используется построение интерполяционного полинома по  $k$  ближайшим точкам, что является некоторым аналогом классического расширения шаблона на структурированной сетке.

Для получения схемы второго порядка необходимо определить коэффициенты интерполяционного полинома

$$P(x, y) = \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot y^2 + \gamma \cdot xy + \delta \cdot x + \epsilon \cdot y + \zeta.$$

Данный полином второго порядка требует 6 коэффициентов. Для их определения находятся 6 известных точек, ближайших к требуемой, и по значениям в них строится система уравнений:

$$\begin{aligned} P(x_1, y_1) &= u_1, & P(x_2, y_2) &= u_2, & P(x_3, y_3) &= u_3, \\ P(x_4, y_4) &= u_4, & P(x_5, y_5) &= u_5, & P(x_6, y_6) &= u_6. \end{aligned}$$

Здесь  $x_i, y_i$  – координаты выбранных ближайших точек,  $u_i$  – значения функции в них. Из решения данной системы находятся необходимые коэффициенты полинома  $P$ , после чего определяется значение функции в требуемой точке.

Для рассматриваемой модельной задачи (2) существует аналитическое решение:

$$u_{\text{analytic}}(x, y, t) = F(x - \lambda_x \cdot t, y - \lambda_y \cdot t).$$

Численное решение связано с точным аналитическим решением следующим образом:

$$u_{\text{numeric}} = u_{\text{analytic}} + R(h).$$

Здесь  $R(h)$  – невязка, функция от мелкости пространственной сетки  $h$ .

Предполагается, что

$$R(h) = h^p + o(h^p).$$

Таким образом, порядок аппроксимации  $p$  может быть определен следующим образом:

$$r = |u_{\text{numeric}} - u_{\text{analytic}}| = h^p + o(h^p) \rightarrow \ln r / \ln h \simeq p.$$

**Таблица 1.** Порядок аппроксимации для начальных условий (3)

$e$	$h_{\text{dots}}$	$h_{\text{scale}}$
$e_1$	1.914	1.864
$e_2$	2.687	2.610
$e_3$	3.581	3.479

С учетом того, что сетка неструктурированная, понятие ее мелкости может быть трактовано разным образом. В данной работе в качестве  $h$  используются:

- обратный характерный масштаб сетки  $h_{\text{scale}} = 1/\text{scale}$ , где  $\text{scale}$  – наибольший линейный размер ячейки;

- обратный корень количества точек сетки  $h_{\text{dots}} = 1/\sqrt{\text{dots number}}$ .

Для определения  $r$  предполагается, что значения в точках на каждом слое по времени можно занумеровать, после чего используются следующие нормы:

- $e_1 = e_\infty = \max(|u_{\text{numeric}}[i] - u_{\text{analytic}}[i]|)$ ,

- $e_2 = \sum_{i=0}^N |u_{\text{numeric}}[i] - u_{\text{analytic}}[i]| / N$ ,

- $e_3 = \sqrt{\sum_{i=0}^N (u_{\text{numeric}}[i] - u_{\text{analytic}}[i])^2 / N}$ .

Для определения фактического порядка сходимости решения строилось аналитическое решение в узлах сетки, затем вычислялись численные значения в этих же узлах. После этого рассчитывался вектор ошибки (невязки). По результатам расчета норм векторов ошибок на нескольких сетках с известными величинами шага по пространству  $h$  с помощью метода наименьших квадратов строится прямая в координатах  $(\ln r, \ln h)$ , по ее наклону определяется порядок аппроксимации  $p$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для тестирования предложенного подхода была выполнена серия численных экспериментов для различных начальных условий. Рассмотрены непрерывно дифференцируемые, непрерывные, разрывные решения.

Во всех экспериментах расчетная область представляла собой квадрат  $[-1,1] \times [-1,1]$  с периодическими граничными условиями. Количество слоев по времени  $N = 51$ , безразмерное время расчета  $T = 1$ , постоянный шаг по времени  $\tau = T/(N - 1) = 0.02$ . Скорости распространения возмущений по осям  $OX$  и  $OY$  соответственно равны:  $\lambda_x = -2, \lambda_y = 5$ .

#### 3.1. Гладкое решение

Начальное условие было задано в виде:

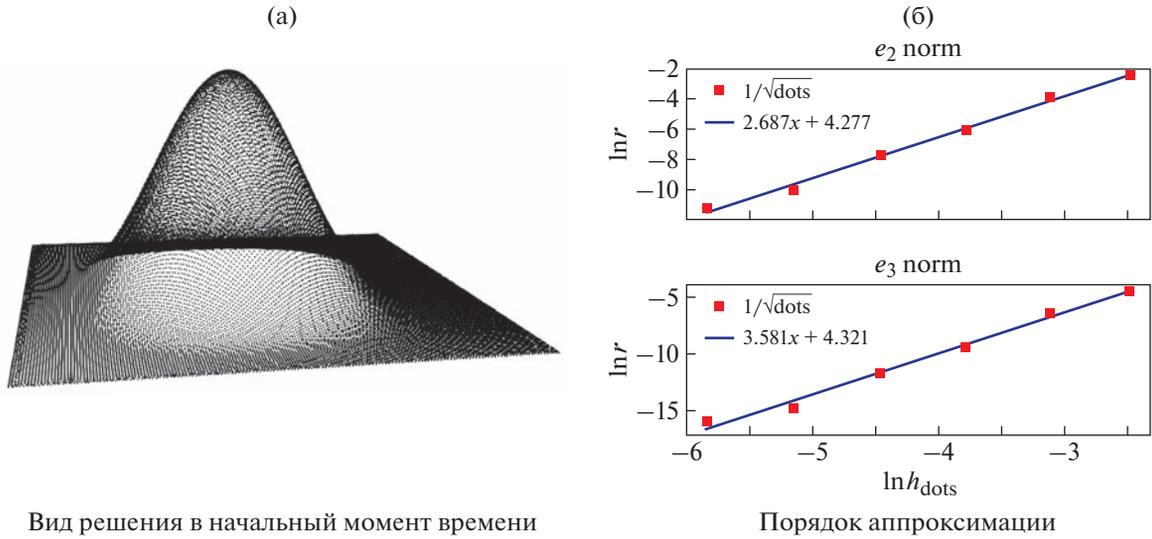
$$F(x, y) = \cos^4(x \cdot \pi/2) \cdot \cos^4(y \cdot \pi/2). \tag{3}$$

На фиг. 3 приведены результаты: слева показан общий вид решения, справа – график определения фактического порядка сходимости. Количественные значения для порядка аппроксимации представлены в табл. 1. Приведены результаты всех вычисляемых норм. В первом столбце в качестве шага по пространству используется  $h_{\text{dots}}$ , во втором  $h_{\text{scale}}$ .

#### 3.2. Быстро спадающая экспонента

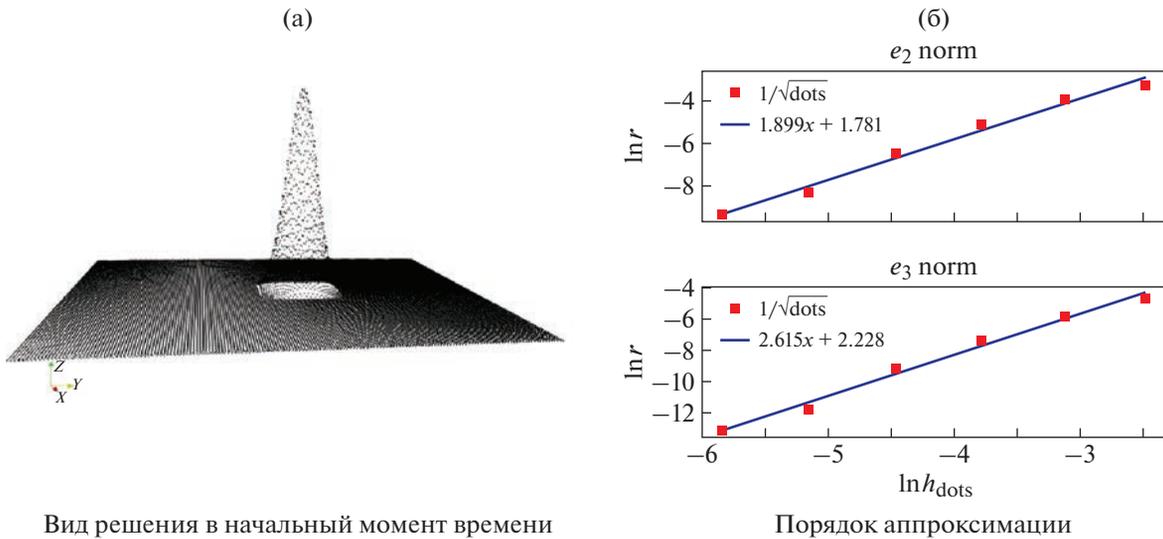
Начальное условие было задано в виде:

$$F(x, y) = \begin{cases} \exp(-84 \cdot (x^2 + y^2)), & (x, y) \in [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2], \\ 0, & (x, y) \notin [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2]. \end{cases} \tag{4}$$



Вид решения в начальный момент времени

Фиг. 3. Результаты для начальных условий (3).



Вид решения в начальный момент времени

Фиг. 4. Результаты для начальных условий (4).

На фиг. 4 приведены результаты: слева показан общий вид решения, справа – график определения фактического порядка сходимости. Количественные значения для порядка аппроксимации представлены в табл. 2.

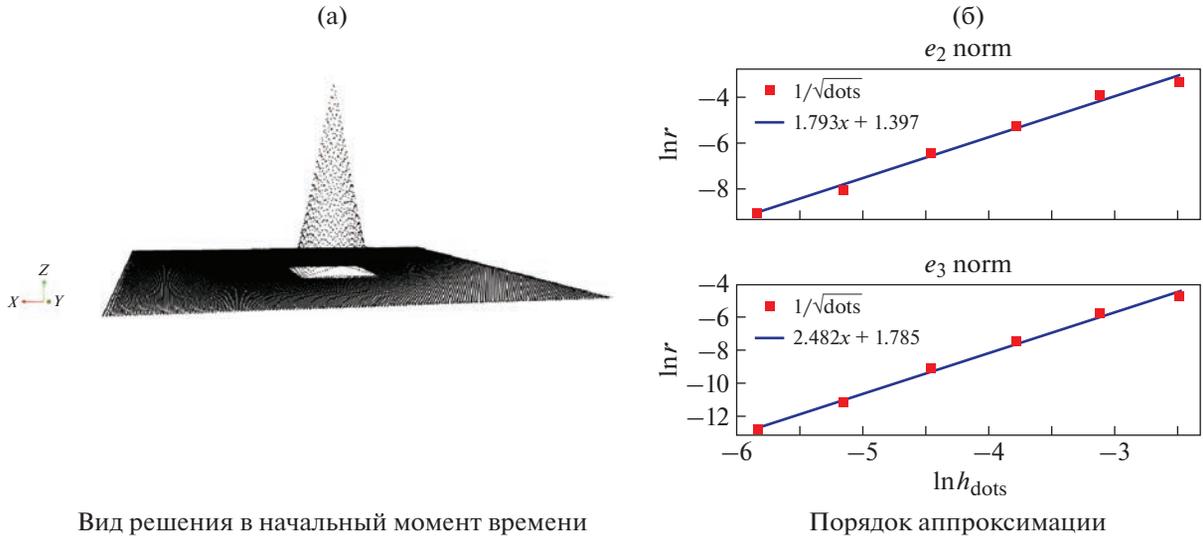
3.3. Конус

Начальное условие было задано в виде:

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - 5 \cdot |x|) \cdot (1 - 5 \cdot |y|), & (x, y) \in [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2], \\ 0, & (x, y) \notin [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2]. \end{cases} \quad (5)$$

Таблица 2. Порядок аппроксимации для начальных условий (4)

$e$	$h_{dots}$	$h_{scale}$
$e_1$	1.242	1.203
$e_2$	1.899	1.842
$e_3$	2.615	2.537



Вид решения в начальный момент времени

Порядок аппроксимации

Фиг. 5. Результаты для начальных условий (5).

На фиг. 5 приведены результаты: слева показан общий вид решения, справа – график определения фактического порядка сходимости. Количественные значения для порядка аппроксимации представлены в табл. 3.

### 3.4. Корень

Начальное условие было задано в виде:

$$F(x, y) = \begin{cases} \sqrt{(1 - 25 \cdot x^2) \cdot (1 - 25 \cdot y^2)}, & (x, y) \in [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2], \\ 0, & (x, y) \notin [-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2]. \end{cases} \quad (6)$$

На фиг. 6 приведены результаты: слева показан общий вид решения, справа – график определения фактического порядка сходимости. Количественные значения для порядка аппроксимации представлены в табл. 4.

### 3.5. Ступенька

Начальное условие было задано в виде:

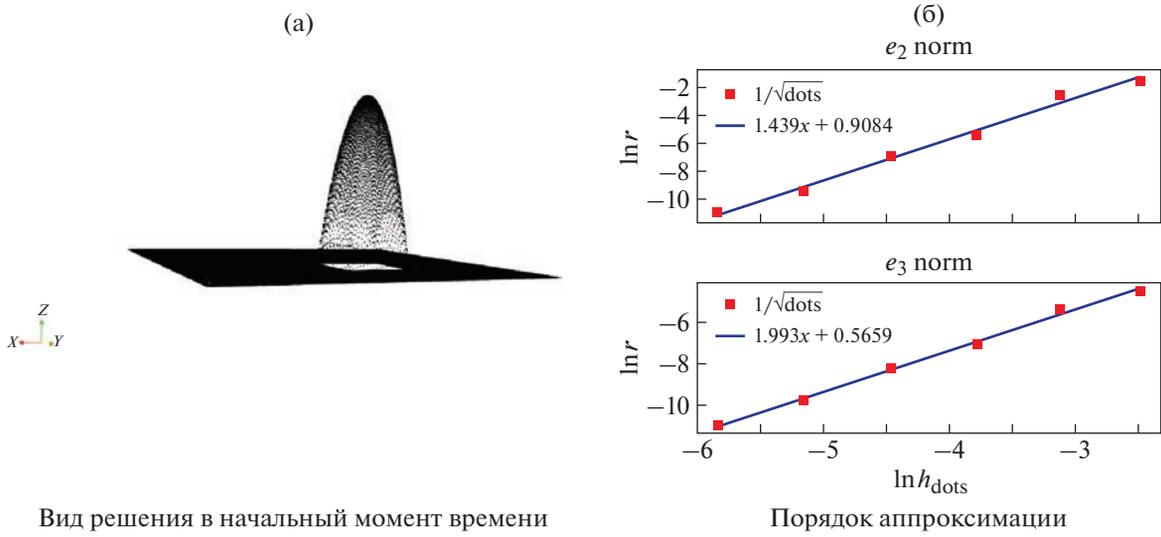
$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & \max(|x|, |y|) \leq 0.5, \\ 0, & \max(|x|, |y|) > 0.5. \end{cases} \quad (7)$$

Таблица 3. Порядок аппроксимации для начальных условий (5)

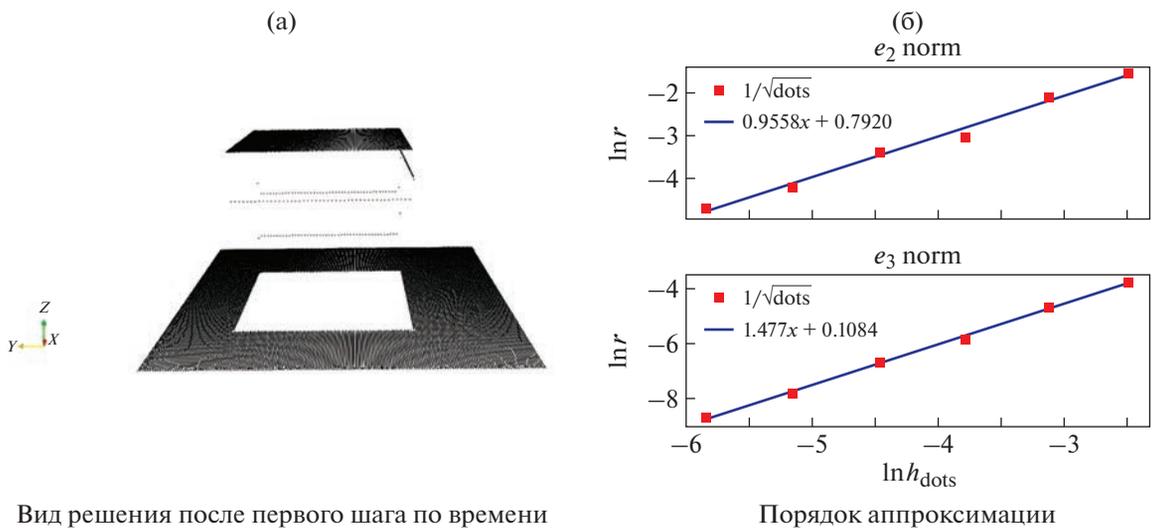
$e$	$h_{dots}$	$h_{scale}$
$e_1$	0.888	0.861
$e_2$	1.793	1.739
$e_3$	2.482	2.408

Таблица 4. Порядок аппроксимации для начальных условий (6)

$e$	$h_{dots}$	$h_{scale}$
$e_1$	0.500	0.487
$e_2$	1.439	1.397
$e_3$	1.993	1.935



Фиг. 6. Результаты для начальных условий (6).



Фиг. 7. Результаты для начальных условий (7).

На фиг. 7 приведены результаты: слева показан общий вид решения, справа – график определения фактического порядка сходимости. Количественные значения для порядка аппроксимации представлены в табл. 5.

Таблица 5. Порядок аппроксимации для начальных условий (7)

$e$	$h_{dots}$	$h_{scale}$
$e_1$	-0.003	-0.002
$e_2$	0.956	0.929
$e_3$	1.477	1.435

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложена версия сеточно-характеристического численного метода для уравнения  $\partial_t u + \lambda_x \partial_x u + \lambda_y \partial_y u = 0$  на нерегулярной расчетной сетке. Новизна подхода заключается в том, что для повышения порядка аппроксимации используется аналог расширения сеточного шаблона, реализованный в данном случае для неструктурированной сетки. Предложенная схема обеспечивает порядок аппроксимации выше первого без использования вспомогательных точек на ребрах и гранях элементов сетки.

Для непрерывных и непрерывно дифференцируемых начальных условий получен фактический порядок аппроксимации выше 2, для разрывных решений – выше 1.4. Построенная в данной работе численная схема может быть использована при решении динамических многомерных задач прочности в сложных областях интегрирования при наличии конечных деформаций.

В рамках данной работы не рассматривалась скорость работы предложенной численной схемы с учетом возможных особенностей ее программной реализации для CPU или GPU. Подобное рассмотрение с учетом возможных алгоритмических оптимизаций всех этапов расчета может являться темой отдельного исследования. Также следует отметить, что с точки зрения общей логики предложенного метода возможно дальнейшее повышение порядка за счет использования большего количества соседних точек и полиномов более высокого порядка. Также логичным продолжением данной тематики могут быть реализация и тестирование аналогичного подхода для сеток из тетраэдров.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемышева К.А., Васюков А.В., Голубев В.И., Петров И.Б. Численное моделирование воздействия сейсмической активности на подводный композитный трубопровод // Матем. моделирование. 2019. Т. 31. № 1. С. 103–113.
2. Беклемышева К.А., Петров И.Б. Моделирование разрушения гибридных композитов под действием низкоскоростного удара // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 11. С. 27–43.
3. Беклемышева К.А., Васюков А.В., Петров И.Б. Численное моделирование динамических процессов в биомеханике сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 8. С. 1380–1390.
4. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы: учебное пособие для бакалавриата и магистратуры. М.: Издательство Юрайт, 2019. 313 с.
5. Челноков Ф.Б. Явное представление сеточно-характеристических схем для уравнений упругости в двумерном и трехмерном пространствах // Матем. моделирование. 2006. Т. 18. № 6. С. 96–108.
6. Челноков Ф.Б. Численное моделирование деформационных процессов в средах со сложной структурой. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МФТИ, 2005.
7. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Издательство МФТИ, 1994. 528 с.
8. Петров И.Б., Холодов А.С. Численное исследование некоторых динамических задач механики деформируемого твердого тела сеточно-характеристическим методом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 5. С. 722–739.
9. Рогов Б. В., Михайловская М. Н. Монотонные бикомпактные схемы для линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. 2011. Т. 23. № 6. С. 98–110.
10. Голубев В.И., Петров И.Б., Хохлов Н.И. Компактные сеточно-характеристические схемы повышенного порядка точности для трехмерного линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. 2016. Т. 28. № 2. С. 123–132.
11. Khokhlov N.I., Petrov I.B. On one class of high-order compact grid-characteristic schemes for linear advection // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2016. Т. 31. № 6. С. 355–368.
12. Васюков А.В., Петров И.Б. Использование сеточно-характеристического метода на неструктурированных сетках из тетраэдров с большими топологическими неоднородностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 62–72.
13. Агапов П.И., Челноков Ф.Б. Сравнительный анализ разностных схем для численного решения двумерных задач механики деформируемого твердого тела // Моделирование и обработка информации. М.: МФТИ. 2003. С. 19–27.
14. Петров И.Б., Фаворская А.В. Библиотека по интерполяции высоких порядков на неструктурированных треугольных и тетраэдральных сетках // Информационные технологии. 2011. № 9. С. 30–32.

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ  
МЕТОДЫ

УДК 519.633.6

Посвящается 70-летию Игоря Борисовича Петрова

ГРАНИЧНЫЕ И КОНТАКТНЫЕ УСЛОВИЯ ПОВЫШЕННОГО  
ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ СЕТОЧНО-  
ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ СХЕМ В ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ<sup>1)</sup>

© 2023 г. А. В. Шевченко<sup>1,2</sup>, В. И. Голубев<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup> 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ (НИУ), Россия

<sup>2</sup> 123056 Москва, ул. 2-я Брестская, 19/18, ИАП РАН, Россия

\*e-mail: w.golubev@mail.ru, golubev.vi@mipt.ru

Поступила в редакцию 22.02.2023 г.  
Переработанный вариант 02.03.2023 г.  
Принята к публикации 26.06.2023 г.

При описании процесса распространения сейсмических волн в геологических средах используются линейные гиперболические системы уравнений. Они соответствуют акустической, изотропной и анизотропной линейно-упругой, пористой флюидонасыщенной моделям. Для их численного решения успешно применяются сеточно-характеристические схемы, учитывающие распространение разрывов решения вдоль характеристик. Важным свойством используемых на практике схем является повышенный порядок аппроксимации, позволяющий четко разрешать волновые фронты отдельных сигналов. При этом значительное внимание исследователей было уделено его достижению во внутренних точках расчетной области. В настоящей работе исследуется вопрос аппроксимации схемы вплоть до границы области включительно. Предложен подход, позволяющий с высокой точностью обеспечивать постановку произвольных линейных граничных и контактных условий. Все рассмотрение проведено для случая одномерной системы уравнений акустики с постоянными коэффициентами. Библ. 26. Фиг. 2. Табл. 3.

**Ключевые слова:** сеточно-характеристический метод, граничные условия, контактные условия, уравнения акустики.

**DOI:** 10.31857/S0044466923100137, **EDN:** MRVVKW

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование является важным практическим инструментом в ряде научных и прикладных областей: изготовление новых материалов, авиапромышленность, оптимизация дорожного трафика и др. Одним из возможных подходов является формулирование определяющей системы уравнений в полных или частных производных, возможно высшего порядка, описывающей поведение рассматриваемой системы. Для ее численного решения в дальнейшем могут быть применены различные численные методы: конечно-разностные схемы [1], конечно-объемные или спектральные методы [2], сеточно-характеристические схемы [3]. Практически важными свойствами расчетных схем являются аппроксимация и устойчивость. Усилия различных исследователей направлены на построение схем повышенного порядка аппроксимации. Например, хорошего результата удалось добиться использованием схем MUSCL [4] для линейных задач [5, 6]. В работе [7] продемонстрирована возможность их адаптации на нелинейные задачи с использованием корректной реконструкции потоков [8]. В работе [9] представлены граничные условия третьего порядка точности для нелинейных законов сохранения в одномерной постановке. Для обеспечения монотонности схемы возможно применение лимитеров [10] или процедуры гибридизации решения [11].

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 19-71-10060), <https://rscf.ru/project/19-71-10060/>.

Применительно к задачам сейсмической разведки, актуальным является использование схем повышенного порядка аппроксимации. Они позволяют с высокой точностью рассчитывать процесс распространения волн на расстояния, значительно превышающие их длину. Реальные геологические среды имеют сложную структуру, например, субгоризонтальную слоистость, обусловленную спецификой процесса осадконакопления. Для их описания могут использоваться методы сквозного счета, либо явное выделение контактных границ с покрытием всей области набором расчетных сеток. В последнем случае значимым является наличие повышенного порядка расчетной схемы не только во внутренних точках области, но и на границе. Во-первых, при использовании структурных расчетных сеток возникают ситуации, вынуждающие введение искусственной контактной границы (материалы в обеих сетках обладают одинаковыми параметрами) [12, 13]. Во-вторых, при прохождении множества контактных границ снижение порядка схемы даже в одной контактной точке может значительно изменить фронты проходящих и отраженных волн. Данная ситуация встречается при расчете процессов в тонкослоистых геологических массивах.

В настоящей работе рассматривается вопрос задания граничных и контактных условий в рамках сеточно-характеристического подхода, обеспечивающих сохранение повышенного порядка аппроксимации вплоть до границы включительно. Данное исследование является продолжением работ авторов по сеточно-характеристическим методам. В частности, вопрос сохранения порядка при построении многомерных схем рассмотрен в работах [14, 15], а для задач с кусочно-постоянными коэффициентами – в работе [16]. Используемое в работе акустическое приближение часто применяется на практике в задачах сейсмической разведки ввиду меньшей вычислительной сложности задачи. Таким образом, рассматриваемая в работе проблема обладает прикладной значимостью.

## 2. ОСНОВЫ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА

В данном разделе представлено достаточно краткое описание основ сеточно-характеристического метода. Для более подробного описания можно порекомендовать следующие работы научной группы Петрова Игоря Борисовича (МФТИ): [17–20].

Сеточно-характеристический численный метод используется для решения линейных гиперболических систем уравнений в частных производных. Примерами таких уравнений являются: уравнение переноса, уравнения акустики, уравнения линейной упругости в изотропном и анизотропном случаях. В полной трехмерной постановке данные системы уравнений могут быть записаны в каноническом виде:

$$\mathbf{q}_t + A_1 \mathbf{q}_x + A_2 \mathbf{q}_y + A_3 \mathbf{q}_z = \mathbf{f}(x, y, z, t), \quad (1)$$

где компонентами вектора  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, y, z, t)$  являются все неизвестные функции координат и времени,  $\mathbf{f}$  задает известную правую часть. Матрицы  $A_1, A_2, A_3$  определяются параметрами среды и допускают переход к базису из собственных векторов:  $A_i = \Omega_i^{-1} \Lambda_i \Omega_i$ , что следует из гиперболичности системы уравнений. Далее будем полагать, что компоненты матриц  $A_i$  не зависят от координат и времени.

Для решения многомерной системы уравнений применяется подход координатного расщепления (расщепление по направлениям, операторное расщепление, *operator splitting*). На каждом шаге по времени последовательно решаются несколько одномерных систем уравнений вида  $\mathbf{q}_t + A_i \mathbf{q}_{x_i} = \mathbf{0}$  и  $\mathbf{q}_t = \mathbf{f}$ . Простейшим алгоритмом для схемы расщепления является следующий

### Алгоритм

**Шаг 1.** Найти  $\mathbf{q}^{n+1/4}$ , сделав шаг по времени  $dt$  для одномерной системы уравнений  $\mathbf{q}_t + A_1 \mathbf{q}_x = \mathbf{0}$ .

**Шаг 2.** Найти  $\mathbf{q}^{n+2/4}$ , сделав шаг по времени  $dt$  для одномерной системы уравнений  $\mathbf{q}_t + A_2 \mathbf{q}_y = \mathbf{0}$  с начальными значениями  $\mathbf{q}^{n+1/4}$  после шага 1.

**Шаг 3.** Найти  $\mathbf{q}^{n+3/4}$ , сделав шаг по времени  $dt$  для одномерной системы уравнений  $\mathbf{q}_t + A_3 \mathbf{q}_z = \mathbf{0}$  с начальными значениями  $\mathbf{q}^{n+2/4}$  после шага 2.

**Шаг 4.** Найти  $\mathbf{q}^{n+1}$ , сделав шаг по времени  $dt$  для системы уравнений  $\mathbf{q}_t = \mathbf{f}(x, y, z, t)$  с начальными значениями  $\mathbf{q}^{n+3/4}$  после шага 3.

Отметим, что порядок аппроксимации итоговой многомерной схемы получится не выше первого. Более подробный анализ различных схем расщепления повышенного порядка представлен в работах [14, 15].

Таким образом, базовым элементом сеточно-характеристического метода является численное решение одномерной системы уравнений вида

$$\mathbf{q}_t + A\mathbf{q}_x = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Дифференциальная задача рассматривается в ограниченной области  $x \in [a, b]$ ,  $t \in [0, T]$ . Следовательно, для полной постановки задачи должны быть заданы начальные условия  $\mathbf{q}|_{t=0}$  и достаточное число граничных условий.

Для решения задачи во внутренних точках используется разложение матрицы  $A = \Omega^{-1}\Lambda\Omega$ . Столбцы матрицы  $\Omega^{-1}$  являются собственными векторами матрицы  $A$ , строки матрицы  $\Omega$  являются левыми собственными векторами (“собственными строками”)  $A$ ,  $\Omega\Omega^{-1} = I$  – единичная матрица. Матрица  $\Lambda$  является диагональной, причем на диагонали стоят собственные значения  $A$ . Подстановка  $A = \Omega^{-1}\Lambda\Omega$  и введение новых переменных – вектора инвариантов Римана  $\mathbf{w} = \Omega\mathbf{q}$  – приводят (в предположении постоянства  $A$ ) к системе уравнений  $\mathbf{w}_t + \Lambda\mathbf{w}_x = \mathbf{0}$ . Она является набором независимых уравнений переноса, так как матрица  $\Lambda$  диагональная. Для каждого уравнения переноса выполняется характеристическое свойство  $w_i(x, t + \tau) = w_i(x - \lambda_i \cdot \tau, t)$ . Это позволяет находить значения  $\mathbf{w}^{n+1}$  с помощью полиномиальной интерполяции на текущем слое по времени  $\mathbf{q}^n|_{t=t^n}$ . Таким образом, на каждом шаге по времени  $t^n$  для каждого узла расчетной сетки  $x_m$  выполняем следующее:

- 1) вычисляем  $\mathbf{w}^n = \Omega\mathbf{q}^n$ ;
- 2) вычисляем  $\mathbf{w}^{n+1}$  с помощью интерполяции  $w_i(x_m, t^{n+1}) = w_i(x - \lambda_i \cdot \tau, t) \approx P(x - \lambda_i \cdot \tau)$ , где  $P(x)$  – интерполяционный полином;
- 3) возвращаемся к исходным неизвестным  $\mathbf{q}^{n+1} = \Omega^{-1}\mathbf{w}^{n+1}$ .

Построенный для узла сетки  $x_m$  интерполяционный полином  $P(x)$  в общем виде определяется на некотором шаблоне  $\{x_k\}$ ,  $k \in m - M, m + M$ ,  $M \in \mathbb{N}$ . При этом использование многочленов более высокой степени для полиномиальной интерполяции, построенных на более широких шаблонах (с увеличенным  $M$ ), повышает порядок аппроксимации итоговой расчетной схемы. Условие устойчивости соответствует выполнению условия Куранта:  $dt < \frac{h}{\max_i \lambda_i}$ .

Заметим, что для численной реализации зависимости коэффициентов многочлена от известных в узлах значений функции могут быть посчитаны аналитически. Для расчета достаточно хранить один слой узлов по времени и порядка  $M$  дополнительных значений в точках шаблона.

Однако в граничных узлах  $x_0, x_N$  и в приграничных узлах  $x_1, x_{N-1}, x_2, x_{N-2}, \dots$  описанная выше процедура не определена. Далее будут рассмотрены вопросы реализации схемы в этих точках по заданным граничным условиям.

### 3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ

В данной работе рассматривалась задача распространения волн в акустической среде, которую можно описать системой вида

$$\begin{aligned} \rho\mathbf{v}_t &= -\nabla p + \mathbf{F}, \\ p_t &= -\rho c^2 \nabla \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь неизвестными функциями координат и времени являются вектор скорости частиц среды  $\mathbf{v}$  и скалярное давление  $p$ . Вектор  $\mathbf{F}$  определяет внешнее воздействие на среду, а плотность  $\rho$  и ско-

рость распространения акустических волн  $c$  являются параметрами среды. Далее дополнительно используется обозначение  $Z = \rho c$  для акустического импеданса.

Система уравнений акустики в одномерном однородном случае принимает вид

$$\begin{aligned} \rho v_t &= -p_x, \\ p_t &= -\rho c^2 v_x. \end{aligned} \quad (4)$$

Переход к инвариантам Римана  $\mathbf{w} = (w^- \ w^+)^T$  определяется соотношениями

$$w^- = (v - p/Z)/2, \quad w^+ = (v + p/Z)/2. \quad (5)$$

Обратный переход к исходным неизвестным осуществляется по формулам

$$v = w^+ + w^-, \quad p = Z(w^+ - w^-). \quad (6)$$

#### 4. РЕАЛИЗАЦИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Как было отмечено выше, задача (2) рассматривается в ограниченной области  $(x, t) \in [a, b] \times [0, T]$ . Следовательно, для корректности задачи должны быть заданы начальные и граничные условия. Чтобы дифференциальная задача была корректной по Адамару, для системы уравнений акустики граничные условия должны быть заданы на обеих границах  $x = a$  и  $x = b$ .

Неотражающие (поглощающие) граничные условия необходимы для описания бесконечной области с помощью ограниченной расчетной сетки. При этом волны, падающие на границу области изнутри, не должны породить отражения от введенных границ.

Также могут быть поставлены линейные граничные условия с явно заданной правой частью, записываемые в виде  $G_a \mathbf{q}|_{x=a} = \mathbf{g}_a(t)$ ,  $G_b \mathbf{q}|_{x=b} = \mathbf{g}_b(t)$ , где  $G_a, G_b$  – прямоугольные матрицы. В этом случае можно показать, что число условий, равное числу компонент вектора  $\mathbf{g}$ , должно быть равно числу выходящих из области характеристик. Таким образом, для уравнений акустики необходимо задать одно условие на каждой границе, для уравнений упругости – два условия. Например, широко используется условие “свободной границы”. Для акустической среды оно имеет вид  $p|_{x=X} = 0$  [21], для упругой среды вид  $\sum_j (\sigma_{ij} n_j)|_{x=X} = \mathbf{0}$  [22]. Здесь  $X$  означает левую границу  $x = a$  или правую границу  $x = b$ ,  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали,  $\sigma$  – тензор напряжений.

Существует множество подходов к заданию в расчетном алгоритме граничных условий. Например, можно использовать следующие:

- 1) предзаполнение ghost-узлов;
- 2) модификацию численной схемы в узлах вблизи границы;
- 3) специальные корректировки после шага схемы во внутренних точках.

Первый подход предполагает, что расчетная сетка продлевается несколькими искусственно добавленными узлами, называемыми ghost-узлами. Значения функции в этих узлах заполняются специальным образом, после чего формулы расчетной схемы для внутренних точек могут применяться для всех точек, включая граничные. Преимуществом данного подхода является упрощение основного цикла расчета по узлам сетки, а недостатком – необходимость трудоемкого вывода корректных формул для заполнения ghost-узлов.

Второй подход предполагает явное изменение формул схемы вблизи границы. Это позволяет избежать введения дополнительных узлов ценой некоторого усложнения основного цикла расчетной схемы. Примером является использование гибридных схем: вблизи границы можно использовать схему меньшего порядка аппроксимации, построенную на меньшем пространственном шаблоне.

Третий подход предполагает, что после основного расчетного цикла (возможно, с подсчетом предварительного значения на границе) выполняется специальная корректировка, после которой заданное граничное условие будет выполнено.

Отметим, что эти подходы не являются взаимоисключающими и могут использоваться совместно.

Для задания поглощающих граничных условий могут использоваться подходы выше или изменение уравнений/коэффициентов в приграничной области. Например, широко распростра-

нено добавление области с затуханием или perfectly matched layer (PML) [23]. В данной работе рассматриваются только способы без введения приграничной области.

#### 4.1. Понижение порядка аппроксимации

Задание неотражающих граничных условий в сеточно-характеристическом методе возможно при помощи обнуления значений, переносимых на характеристиках, которые выходят из расчетной области. Это может быть реализовано в рамках подхода № 1 со следующим правилом заполнения ghost-узлов. Значения в ghost-узлах заполняются значением функции в граничном узле на текущем шаге по времени  $\mathbf{q}_m^n$ . Такое заполнение приближает интерполируемую величину  $w^*$  ее значением в узле  $w_m$ , благодаря чему “добавка”  $w^* - w_m \approx 0$ . После этого численная схема применяется ко всем узлам от 0 до  $N$ , а дополнительные корректировки не используются. Недостаток данного подхода кроется в том, что при использовании широкого шаблона для интерполяции в формулу расчета  $w^*$  входят как ghost-узлы, так и значения внутри области, вследствие чего  $w^* - w_m \neq 0$ .

Задание линейных граничных условий возможно с помощью следующей процедуры:

- 1) заполнить ghost-узлы для неотражающей границы;
- 2) выполнить шаг схемы по времени во всех точках;
- 3) применить специальные корректировки в граничных узлах.

Формулы для корректировок в граничных узлах выводятся в предположении, что перед их применением в узлах хранятся значения, посчитанные только по внутренним характеристикам, обозначаемые  $\mathbf{q}^{\text{in}}$ . В этом случае формула корректировки может быть записана следующим образом [24]:

$$\mathbf{q}^{n+1} = \mathbf{q}^{\text{in}} + \Omega^{\text{out}} [G \cdot \Omega^{\text{out}}]^{-1} \cdot (\mathbf{g} - G\mathbf{q}^{\text{in}}). \quad (7)$$

В этой формуле прямоугольная матрица  $\Omega^{\text{out}}$  состоит из тех столбцов матрицы  $\Omega^{-1}$ , которые соответствуют выходящим из расчетной области характеристикам.

Существование обратной матрицы  $[G \cdot \Omega^{\text{out}}]^{-1}$  необходимо и достаточно для корректности заданных граничных условий. Матрицы в формулах корректировки могут быть предвычислены аналитически. Для их применения возможно использование безматричных операций, что обуславливает высокую эффективность этой процедуры.

Данная формула корректировки не вносит в алгоритм дополнительной численной ошибки. Следовательно, точность метода определяется точностью схемы и точностью задания вектора  $\mathbf{q}^{\text{in}}$ . При этом одномерная схема может иметь высокий порядок во внутренних узлах, но при интерполяции значений в ghost-узлах вносится существенная ошибка. Результаты тестовых расчетов, подтверждающие данные утверждения, приведены в соответствующей главе.

Для повышения общего (включая граничные точки) порядка схемы можно выбрать один из двух путей:

- 1) вывести формулы заполнения ghost-узлов, не требующие дополнительных последующих корректировок;
- 2) модифицировать способ задания не отражающих граничных условий, чтобы избежать полиномиальной интерполяции разрывной функции.

В данной работе был выбран первый путь. Соответствующая теория представлена в следующем подразделе, а результаты проведенных численных экспериментов — далее в соответствующем разделе.

#### 4.2. Сохранение порядка аппроксимации

Рассмотрим процедуру задания линейных граничных условий на примере уравнения акустики и границы с заданным давлением  $P(t)$ . При этом “свободная граница” ( $p \equiv 0$ ) является частным случаем рассматриваемых граничных условий. Возможно провести аналогичные построения для задания нормальной к границе компоненты скорости  $V(t)$ .

Мы хотим добиться выполнения граничного условия с помощью продолжения функции на каждом шаге по времени за пределы рассматриваемой области таким образом, чтобы продол-

женная функция удовлетворяла исходным уравнениям и начальным и граничным условиям. В этом случае один шаг численной схемы во всех точках для задачи с начальными условиями даст решение, сужение которого на исходную расчетную область будет совпадать с решением исходной начально-краевой задачи.

В программной реализации продолжение функции означает заполнение значений ghost-узлов перед каждым шагом схемы таким образом, чтобы после шага схемы значения внутри области и на границе были корректными. Будем называть формулы этого заполнения филлером. Отметим, что используемые в сеточно-характеристическом методе схемы (например, схема 3-го порядка аппроксимации) предполагают гладкость решения. Следовательно, для сохранения порядка точности при работе схемы во всех точках области филлер должен сохранять гладкость на границе.

Без ограничения общности рассмотрим правую границу. Точка  $x_m$  лежит на границе, точки  $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots$  – внутри расчетной области, точки  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots$  – вне расчетной области, т.е. задают ghost-узлы.

На самой границе согласно (6)  $p_m = Z(w^+ - w^-) = P(t) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} w_m^+(t) &= w_m^-(t) + P(t)/Z, \\ w_m^-(t) &= w_m^+(t) - P(t)/Z. \end{aligned} \tag{8}$$

Рассмотрим  $(m+k)$  узел в предположении, что расчетная область была продолжена до него. С одной стороны, по формуле (5) имеем

$$w_{m+k}^- = (v_{m+k} - p_{m+k}/Z)/2.$$

С другой стороны, получаем

$$\begin{aligned} w_{m+k}^{-(n)} &\equiv w^-(x_m + kh, t^{(n)}) = w^-(x_m, t^{(n)} + kh/c) = \\ &\stackrel{(8)}{=} w^+(x_m, t^{(n)} + kh/c) - P(t^{(n)} + kh/c)/Z = w^+(x_m - kh, t^{(n)}) - P(t^{(n)} + kh/c)/Z \equiv \\ &\equiv w_{m-k}^{+(n)} - P(t^{(n)} + kh/c)/Z = (v_{m-k} + p_{m-k}/Z)/2 - P(t^{(n)} + kh/c)/Z. \end{aligned} \tag{9}$$

В формуле выше использовались: перенос значений вдоль характеристик, связь исходных функций и инвариантов Римана, заданное давление на границе  $P(t)$  при  $t \geq t^{(n)}$ . Из двух предыдущих цепочек равенств получаем

$$(v_{m+k} - p_{m+k}/Z)/2 = (v_{m-k} + p_{m-k}/Z)/2 - P(t^{(n)} + kh/c)/Z. \tag{10}$$

Аналогичные формулы можно выписать для  $P(t)$ ,  $t \leq t^{(n)}$ :

$$\begin{aligned} w_{m+k}^+ &= (v_{m+k} + p_{m+k}/Z)/2, \\ w_{m+k}^{+(n)} &\equiv w^+(x_m + kh, t^{(n)}) = w^+(x_m, t^{(n)} - kh/c) = \\ &\stackrel{(8)}{=} w^-(x_m, t^{(n)} - kh/c) + P(t^{(n)} - kh/c)/Z = w^-(x_m - kh, t^{(n)}) + P(t^{(n)} - kh/c)/Z \equiv \\ &\equiv w_{m-k}^{-(n)} + P(t^{(n)} - kh/c)/Z = (v_{m-k} - p_{m-k}/Z)/2 + P(t^{(n)} - kh/c)/Z, \end{aligned} \tag{11}$$

$$(v_{m+k} + p_{m+k}/Z)/2 = (v_{m-k} - p_{m-k}/Z)/2 + P(t^{(n)} - kh/c)/Z. \tag{12}$$

Полученные уравнения (10) и (12) задают следующую систему линейных уравнений на неизвестные в ghost-узлах  $v_{m+k}, p_{m+k}$ :

$$\begin{aligned} (v_{m+k} + p_{m+k}/Z)/2 &= (v_{m-k} - p_{m-k}/Z)/2 + P(t^{(n)} - kh/c)/Z, \\ (v_{m+k} - p_{m+k}/Z)/2 &= (v_{m-k} + p_{m-k}/Z)/2 - P(t^{(n)} + kh/c)/Z. \end{aligned}$$

Из этой системы находим

$$\begin{aligned} p_{m+k} &= -p_{m-k} + P(t^{(n)} + kh/c) + P(t^{(n)} - kh/c), \\ v_{m+k} &= v_{m-k} - [P(t^{(n)} + kh/c) - P(t^{(n)} - kh/c)]/Z. \end{aligned} \tag{13}$$

Эти формулы верны и для правой границы  $k > 0$ , и для левой границы  $k < 0$  (т.е.  $x_{m+k}$  всегда выходит за границу).

Можно сделать важное наблюдение, связанное с гладкостью рассматриваемых функций. Для корректного задания граничных условий достаточно задания значений только на характеристиках определенного знака. Например, значения на отрицательной характеристике для уравнения акустики. Следовательно, существует бесконечное множество способов продолжить функцию на ghost-узлы так, чтобы аналитическое решение задавало требуемое условие на границе. Однако существует единственный способ гладкого продолжения такой функции, удовлетворяющей исходным уравнениям. Формулы (13) задают именно это гладкое продолжение.

Эти формулы можно сравнить с другими известными формулами для филлера, представленными, например, в работе [25]. Для заданного давления  $p_m = P(t)$  в работе [25] предлагаются заполнения вида

$$p_{m+k} = 2P(t^n) - p_{m-k}, \quad v_{m+k} = v_{m-k}, \quad (14)$$

которые отличаются от выведенных нами формул (13). Можно заметить, что формулы (14) задают разрыв в производной  $v_x$ . Метод конечных объемов успешно преодолевает эту проблему при явном вычислении потоков, но конечно-разностный и сеточно-характеристический методы в этом случае имеют лишь первый порядок аппроксимации. В то же время для “свободной границы” ( $P(t) \equiv 0$ ) приведенные формулы (13) вырождаются в хорошо известные соотношения

$$p_{m+k} = -p_{m-k}, \quad v_{m+k} = v_{m-k}.$$

В этом случае разрыва производной  $v_x$  в точке  $x_m$  не происходит, так как  $p$  и  $v$  удовлетворяют уравнениям акустики и в граничной точке  $p_m \equiv 0 \Rightarrow p_t(x_m, t) = 0 \Rightarrow v_x(x_m, t) = (cZ)^{-1} p_t(x_m, t) \equiv 0$ .

Проведенные нами численные эксперименты подтверждают теоретические оценки уменьшения ошибки схемы. Их результаты представлены в соответствующих разделах ниже. Вычислительная эффективность предложенного подхода аналогична широко используемому подходу, описанному выше.

Несмотря на то, что в данной работе рассматривались только уравнения акустики, обобщение на другие одномерные системы линейных гиперболических уравнений, по всей видимости, возможно. Должны быть рассмотрены инварианты Римана для всех характеристик, выходящих из расчетной области. В акустике это один инвариант:  $w^-$  для правой границы,  $w^+$  для левой. Для каждого из них будет использовано соответствующее собственное значение. Аналоги формул (5), (6) и (8) сохраняют линейность. Они могут быть записаны в виде матриц, тогда как для уравнений акустики каждая из формул задается одним линейным уравнением. Полученные системы не вырождены и могут быть разрешены аналитически, приводя к формулам продления вида (13). Данная задача представляется интересной в плане дальнейшего развития выбранного направления исследований.

## 5. РЕАЛИЗАЦИЯ КОНТАКТНЫХ УСЛОВИЙ

Для решения некоторых прикладных задач представляется целесообразным использовать несколько расчетных сеток и задавать корректные контактные условия между ними, обеспечивая выполнение физических контактных условий на каждом шаге по времени. Такой подход позволяет следующее:

- 1) описывать модели, в различных областях которых параметры среды имеют различные значения;
- 2) описывать области сложной геометрической формы, используя комбинации структурных сеток;
- 3) описывать динамическое поведение сред с различной реологией, находящихся в контакте.

Здесь и далее нижними индексами  $a$  и  $b$  будем обозначать величины, относящиеся к контактирующим средам. Линейные контактные условия записываются следующим образом в виде:

$$C \begin{bmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_b \end{bmatrix} = \mathbf{c},$$

где  $C$  – прямоугольная матрица размерами  $R \times (n_a + n_b)$ ,  $n_a$  – размер вектора  $\mathbf{q}_a$ ,  $n_b$  – размер вектора  $\mathbf{q}_b$ ,  $R$  – суммарное число выходящих характеристик для обеих сеток. Записанные в таком виде контактные условия могут быть реализованы с использованием рассмотренных ранее граничных условий.

Для контакта двух акустических сред необходимо задать два условия, так как в каждой среде одна характеристика выходит за границу области. Классическими условиями непроникновения являются равенство давлений и нормальных компонент скорости. В одномерном случае эти условия в точке  $x_m$  на границе можно записать в виде

$$\begin{aligned} p_a(t) &= p_b(t), \\ v_a(t) &= v_b(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Для задания контактных условий (15) с помощью корректора граничных условий (см. п. 4.1, (7)) необходимо знать  $P(t^{n+1})$ , зависимость которого от  $\mathbf{q}_a^{\text{in}}$ ,  $\mathbf{q}_b^{\text{in}}$  может быть выражена аналитически.

Для задания контактных условий (15) с помощью предлагаемого подхода филлеров (см. п. 4.2, (13)) необходимо знать

$$P_a^k = p(t^n + kh_a/c_a), \quad P_b^k = p(t^n + kh_b/c_b).$$

В формуле выше  $k$  определяет ghost-узел, в обозначениях разд. 2  $k = M$  – полуширина шаблона. Для сеточно-характеристических схем 3-го и 4-го порядков точности мы использовали  $M = 2$ . Таким образом,  $k \in \{1, 2, -1, -2\}$ .

Пусть среда  $a$  слева, среда  $b$  справа. Найдем  $P_a^k$ ,  $k > 0$ .

Из контактных условий (15)

$$v_a(t^n + kh_a/c_a) = v_b(t^n + kh_b/c_b).$$

Из связи исходных функций и инвариантов Римана (6)

$$w_a^+(x_m, t^n + kh_a/c_a) + w_a^-(x_m, t^n + kh_a/c_a) = w_b^+(x_m, t^n + kh_b/c_b) + w_b^-(x_m, t^n + kh_b/c_b).$$

Из формул (8) для  $P_a^k = p_a(t^n + kh_a/c_a) = p_b(t^n + kh_b/c_b)$  (знаем  $w_a^+$ ,  $w_b^-$ ; не знаем  $w_a^-$ ,  $w_b^+$ )

$$2w_a^+(x_m, t^n + kh_a/c_a) - P_a^k/Z_a = 2w_b^-(x_m, t^n + kh_b/c_b) + P_a^k/Z_b.$$

Из постоянства значений инвариантов на характеристиках

$$2w_a^+(x_m - kh_a, t^n) - P_a^k/Z_a = 2w_b^-\left(x_m + k \frac{c_b}{c_a} h_a, t^n\right) + P_a^k/Z_b.$$

Отсюда получаем итоговую формулу при  $k > 0$ :

$$P_a^k = \frac{2Z_a Z_b}{Z_a + Z_b} \left[ w_{a,m-k}^{+(n)} - w_b^{-(n)} \left( x_m + k \frac{c_b}{c_a} h_a \right) \right], \quad k > 0. \tag{16}$$

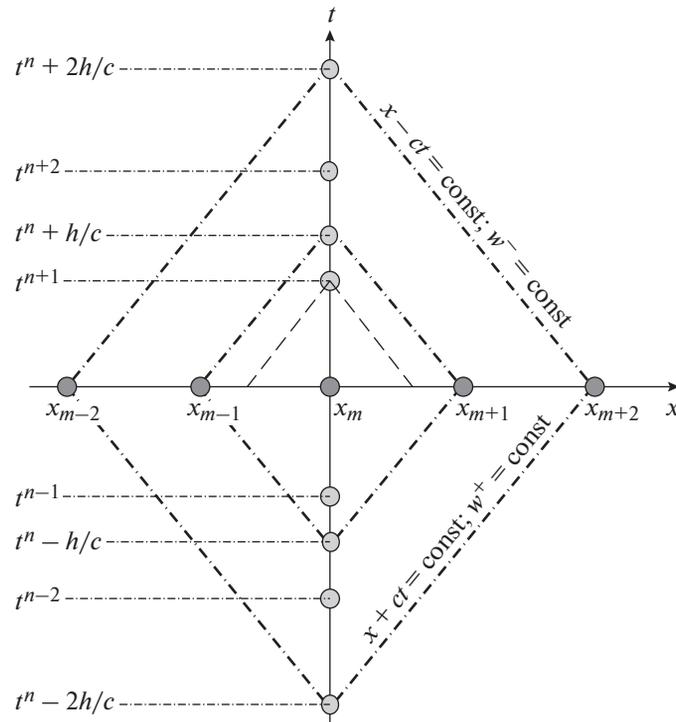
Аналогично, при  $k < 0$  получим

$$P_a^k = \frac{2Z_a Z_b}{Z_a + Z_b} \left[ w_b^{+(n)} \left( x_m + |k| \frac{c_b}{c_a} h_a \right) - w_{a,m-|k|}^{-(n)} \right], \quad k < 0. \tag{17}$$

Для материала  $b$  формулы принимают вид

$$P_b^k = \frac{2Z_a Z_b}{Z_a + Z_b} \left[ w_a^{+(n)} \left( x_m - k \frac{c_a}{c_b} h_b \right) - w_{b,m+k}^{-(n)} \right], \quad k > 0, \tag{18}$$

$$P_b^k = \frac{2Z_a Z_b}{Z_a + Z_b} \left[ w_{b,m+|k|}^{+(n)} - w_a^{-(n)} \left( x_m - |k| \frac{c_a}{c_b} h_b \right) \right], \quad k < 0. \tag{19}$$



Фиг. 1. Схематическое изображение шаблона.

В правых частях формул выше используются значения вида  $w_i^{\pm(n)} \left( x_m - k \frac{c_a}{c_b} h_b \right)$ . Данные точки, в общем случае, не попадают в узлы расчетной сетки. Для их определения мы предлагаем использовать полиномиальную интерполяцию.

Таким образом, зная значения функций на текущем шаге по времени в обеих сетках, мы можем посчитать значения  $P_i^k$ . Затем они должны быть подставлены в филлеры (13) для заполнения ghost-узлов — своих для каждой сетки. После этого выполнение шага схемы во всех точках в обеих сетках обеспечит автоматическое выполнение контактных условий между двумя средами.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Предложенные в работе способы задания граничных и контактных условий были реализованы в программном коде. Результаты эмпирической оценки полученного порядка сходимости вычислительного алгоритма представлены в настоящем разделе.

Авторами проведена серия расчетов с уменьшающимися в два раза шагом сетки  $h$  и шагом по времени  $dt$ . Таким образом, число Куранта оставалось постоянным. Для каждого расчета была посчитана ошибка метода как норма разности численного и аналитического решений в финальный момент времени. Использовались интегральная норма  $\|f\|_{L_1} = \sum_i |f_i| \cdot h$  и более строгая норма  $\|f\|_{L_\infty} = \max_i |f_i|$ . Для каждой последовательной пары расчетов эмпирическая оценка порядка сходимости схемы была рассчитана как логарифм отношения ошибок  $\mathcal{P} = \log_2(E_{2h}/E_h)$ , где  $E_h$  — ошибка метода при шаге сетки  $h$ .

### 6.1. Тестирование граничных условий

Рассматривалась акустическая задача (3) в одномерной постановке в области  $x \in [0, 1000]$  м,  $t \in [0, T]$ ,  $T = 0.5$  с. Параметры среды задавались следующими:  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c = 1500$  м/с. Были заданы нулевые начальные условия  $\mathbf{q}|_{t=0} = \mathbf{0}$ . На левой границе было задано давление

**Таблица 1.** Результаты численного исследования сходимости для задачи с граничными условиями. Расчет с использованием граничных корректоров (7)

Шаг сетки $h$	Ошибка по норме $L_1$	Ошибка по норме $L_\infty$	Порядок $\mathcal{P}_1$	Порядок $\mathcal{P}_\infty$
10.0000	132.2322	0.4012	—	—
5.00000	69.892	0.2112	0.9199	0.9257
2.50000	34.2352	0.0991	1.0297	1.0911
1.25000	16.8945	0.0468	1.0189	1.0824
0.62500	8.4230	0.0230	1.0042	1.0238
0.31250	4.2091	0.0115	1.0008	1.0059
0.15625	2.1043	0.0057	1.0001	1.0015

**Таблица 2.** Результаты численного исследования сходимости для задачи с граничными условиями. Расчет с использованием формул (14), предложенных LeVeque [25]

Шаг сетки $h$	Ошибка по норме $L_1$	Ошибка по норме $L_\infty$	Порядок $\mathcal{P}_1$	Порядок $\mathcal{P}_\infty$
10.0000	162.0691	0.4381	—	—
5.00000	92.5387	0.2573	0.8085	0.7678
2.50000	46.6821	0.1312	0.9872	0.9722
1.25000	23.2507	0.0640	1.0056	1.0358
0.62500	11.6126	0.0317	1.0016	1.0133
0.31250	5.8050	0.0158	1.0003	1.0037
0.15625	2.9024	0.0079	1.0000	1.0009

**Таблица 3.** Результаты численного исследования сходимости для задачи с граничными условиями. Предложенный в работе подход

Шаг сетки $h$	Ошибка по норме $L_1$	Ошибка по норме $L_\infty$	Порядок $\mathcal{P}_1$	Порядок $\mathcal{P}_\infty$
10.0000	93.4185	0.3694	—	—
5.00000	32.2373	0.1400	1.5350	1.4001
2.50000	5.9058	0.0285	2.4485	2.2939
1.25000	0.7904	0.0039	2.9014	2.8877
0.62500	0.0997	0.0005	2.9873	2.9842
0.31250	0.0125	0.0001	2.9991	2.9979
0.15625	0.0016	0.0000	3.0002	2.9998

$p(x, t)|_{x=0} = P(t)$ , где  $P(t) = \sin^4(\omega t)$  при  $t > 0$  и  $P(t) = 0$  при  $t \leq 0$ ,  $\omega = 2\pi f$ ,  $f = 10$  Гц. Заданное таким образом давление на левой границе порождает волны, распространяющиеся от границы вправо. На правой границе области задавалось условие  $p = 0$ , но за расчетное время  $T = 0.5$  с волна не достигала правой границы. Аналитическое решение задачи может быть записано в виде

$$p(x, t) = \begin{cases} 0, & x - ct > 0, \\ \sin^4\left(\frac{\omega}{c}(x - ct)\right), & x - ct \leq 0. \end{cases}$$

Для решения отдельных уравнений переноса использовалась сеточно-характеристическая схема 3-го порядка аппроксимации. В табл. 1–3 приведены результаты численного исследования порядка сходимости схемы.

**Таблица 4.** Результаты численного исследования сходимости для задачи с контактом двух сеток. Использован контакт на основе граничных корректоров (7)

Шаг сетки $h$	Ошибка по норме $L_1$	Ошибка по норме $L_\infty$	Порядок $\mathcal{P}_1$	Порядок $\mathcal{P}_\infty$
10.0000	6.92e+07	8.81e+05	—	—
5.00000	3.36e+07	5.35e+05	1.0414	0.7201
2.50000	1.14e+07	2.03e+05	1.5671	1.3991
1.25000	2.18e+06	4.21e+04	2.3802	2.2684
0.62500	5.77e+05	1.16e+04	1.9189	1.8564
0.31250	2.53e+05	4.66e+03	1.1911	1.3191
0.15625	1.24e+05	2.22e+03	1.0247	1.0729

**Таблица 5.** Результаты численного исследования сходимости для задачи с контактом двух сеток. Использован предложенный в работе подход для постановки контактных условий

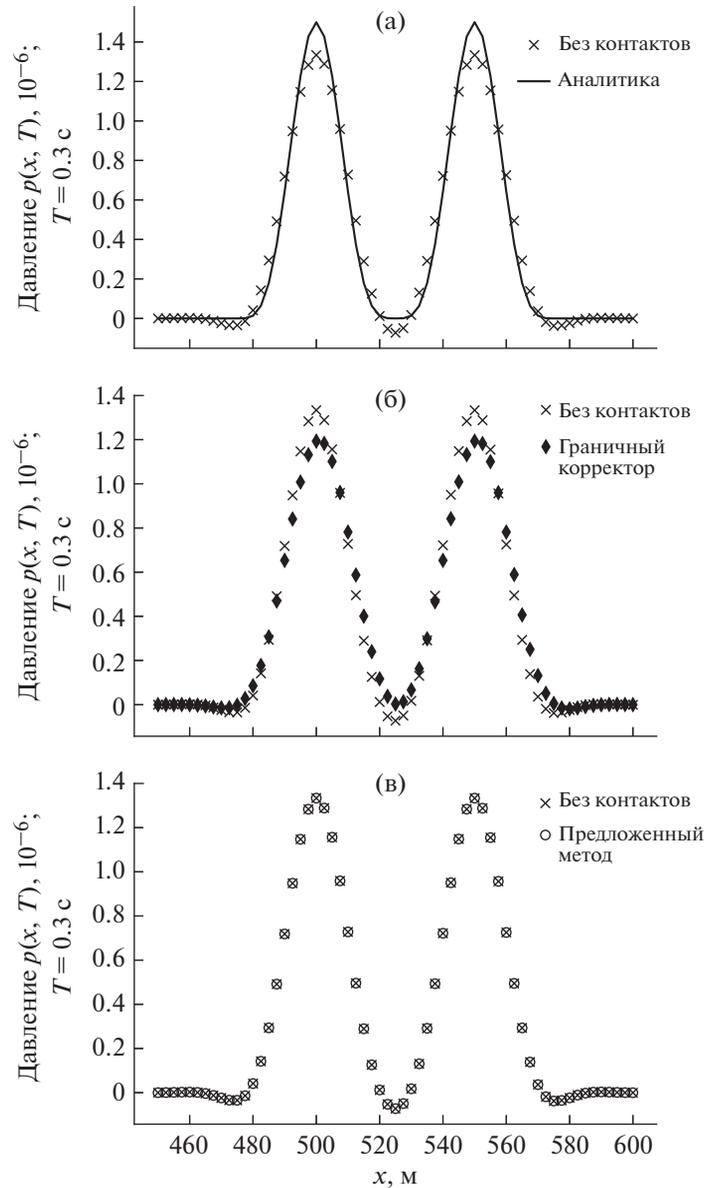
Шаг сетки $h$	Ошибка по норме $L_1$	Ошибка по норме $L_\infty$	Порядок $\mathcal{P}_1$	Порядок $\mathcal{P}_\infty$
10.0000	6.59e+07	7.63e+05	—	—
5.00000	2.63e+07	3.74e+05	1.3273	1.0287
2.50000	7.07e+06	9.93e+04	1.8930	1.9124
1.25000	1.08e+06	1.51e+04	2.7143	2.7221
0.62500	1.39e+05	1.94e+03	2.9500	2.9594
0.31250	1.75e+04	2.43e+02	2.9929	2.9907
0.15625	2.19e+03	3.05e+01	2.9989	2.9978

Условия “свободной границы” являются частным случаем условия заданного давления  $P(t)$  при  $P(t) \equiv 0$ . Результаты тестирования порядка схемы на задаче о плоской волне, падающей на “свободную границу”, показали аналогичные результаты. Таким образом, предложенный в работе подход приводит к уменьшению ошибки метода и повышению порядка сходимости схемы.

### 6.2. Тестирование контактных условий

Рассматривалась задача контакта двух сред, обозначаемых нижними индексами  $a$  и  $b$ . Параметры сред задавались следующими:  $\rho_a = \rho_b = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $c_a = 1500$  м/с,  $c_b = 2000$  м/с. Размеры областей, описывающих среды  $a$  и  $b$ , были равны 300 и 400 м соответственно. В среде  $a$ , находящейся слева, начальные условия задавались в виде плоской волны давления с формой импульса  $\sin^4(2\pi fx)$ ,  $f = 0.01$  м<sup>-1</sup>. Была задана единичная амплитуда скорости; соответственно, амплитуда давления определялась значением импеданса  $Z_a = c_a \rho_a = 1.5 \times 10^6$ . Данная волна движется вправо, достигает границы раздела сред и разделяется на прошедшую волну, продолжающую движение вправо в среде  $b$ , и отраженную волну, движущуюся обратно в среде  $a$ . Коэффициенты отражения  $R_{\text{reflection}} = \frac{Z_b - Z_a}{Z_b + Z_a}$  и прохождения  $R_{\text{transmitted}} = \frac{2Z_b}{Z_a + Z_b}$  определяют амплитуды данных волн. Для данной задачи известно аналитическое решение. Физическое время расчета было равно  $T = 0.2$  с. Для решения отдельных уравнений переноса использовалась сеточно-характеристическая схема 3-го порядка аппроксимации.

В табл. 4 представлены результаты, полученные при использовании схемы с граничными корректорами. В табл. 5 – для предложенного в работе подхода. При этом использовалась полиномиальная интерполяция по четырем точкам. Результаты демонстрируют уменьшение ошибки метода и повышение порядка сходимости предложенной схемы по обеим нормам.



**Фиг. 2.** Сравнение аналитического решения с численными, полученными различными способами: без выделения контактов (а), с выделением контактов при помощи корректоров (7) (б), с выделением контактов при помощи заполнения ghost-узлов (16) (в).

### 6.3. Расчет с использованием множества сеток с одинаковыми параметрами

Иногда возникает необходимость описывать расчетную область несколькими расчетными сетками, даже если параметры среды в каждой из подобластей-сеток являются одинаковыми. Мы провели тестовый расчет такой задачи в одномерном случае. Начальные условия задают плоскую волну с формой импульса  $\sin^4(2\pi fx)$ ,  $f = 0.01 \text{ м}^{-1}$ , и единичной амплитудой скорости (амплитуда давления равна  $c \cdot \rho$ ,  $c = 1500 \text{ м/с}$ ,  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ). Размер расчетной области был равен 600 м. Аналитическое решение в момент времени  $T = 0.3 \text{ с}$  представлено на фиг. 2. Видно, что численное решение сеточно-характеристической схемой третьего порядка аппроксимации с использованием одной расчетной сетки с шагом  $h = 2.5 \text{ м}$  несколько отличается от аналитического решения. Это объясняется наличием у схемы численной вязкости. Во втором расчете область была покрыта десятью сетками с одинаковыми параметрами  $c$ ,  $\rho$ ; при этом в расчете явно выделялись все контакты между сетками. На фиг. 2 приведены результаты, полученные схемой с гранич-

ными корректорами (7) и новым предложенным в работе способом. Видно, что первый подход приводит к заметной потере волной амплитуды. При этом решение по новой предложенной схеме визуально неотлично от решения, полученного с использованием одной единой сетки.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены вопросы постановки граничных и контактных условий при численном решении динамических задачах деформируемых твердых тел. Рассмотрено семейство сеточно-характеристических методов на структурных расчетных сетках, которые успешно применяются для решения систем линейных гиперболических уравнений. Использование сеточно-характеристических схем повышенного порядка аппроксимации позволяет построить расчетный алгоритм с порядком сходимости выше первого для внутренних точек расчетной области, в том числе и для многомерных задач. Однако важной задачей является сохранение повышенного порядка и на границах области. В работе предложена процедура заполнения ghost-узлов, обеспечивающая достижение данного свойства. На примере одномерной акустической задачи подтверждены снижение ошибки метода и повышение порядка сходимости предложенных схем для задач с заданным условием на границе и с наличием явно выделенной контактной границы. Описанный в работе подход представляется возможным расширить на общий класс линейных гиперболических систем уравнений. Важным вопросом является исследование возможности его обобщения на многомерный случай с использованием метода расщепления по пространственным направлениям. Развиваемые в настоящей работе сеточно-характеристические методы могут быть полезны при решении практических прямых и обратных задач сейсмической разведки [26].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhou H., Liu Y., Wang J. Elastic Wave Modeling With High-Order Temporal and Spatial Accuracies by a Selectively Modified and Linearly Optimized Staggered-Grid Finite-Difference Scheme // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 2022. V. 60. P. 1–22.
2. Reinarz A., Charrier D.E., Bader M., Bovard L., Dumbser M., Duru K., Fambri F., Gabriel A.-A., Gallard J.-M., Koppel S., Krenz L., Rannabauer L., Rezzolla L., Samfass P., Tavelli M., Weinzierl T. ExaHyPE: An engine for parallel dynamically adaptive simulations of wave problems // Computer Physics Communications. 2020. V. 254.
3. Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы: учебное пособие для вузов. М: Юрайт, 2023.
4. Yang H.Q., Harris R.E. Development of Vertex-Centered High-Order Schemes and Implementation in FUN3D // AIAA Journal. 2016. V. 54. I. 12. P. 1–19.
5. Van Leer B., Nishikawa H. Towards the ultimate understanding of MUSCL: Pitfalls in achieving third-order accuracy // J. Comput. Phys. 2021. V. 446. P. 110640.
6. Nishikawa H. On False Accuracy Verification of UMUSCL Scheme // Communications in Comput. Physics. 2021. V. 30. I. 4. P. 1037–1060.
7. Padway E., Nishikawa H. Resolving Confusions over Third-Order Accuracy of Unstructured MUSCL // AIAA Journal. 2022. V. 60. I. 3. P. 1415–1439.
8. Nishikawa H. Economically high-order unstructured-grid methods: Clarification and efficient FSR schemes // Intern. Journal for Numerical Methods in Fluids. 2021. V. 93. I. 11. P. 3187–3214.
9. Nishikawa H., Van Leer B. Towards High-Order Boundary Procedures for Finite-Volume and Finite-Difference Schemes // AIAA SCITECH 2023 Forum.
10. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 12. С. 124–128.
11. Guseva E.K., Golubev V.I., Petrov I.B. Linear, Quasi-Monotonic and Hybrid Grid-Characteristic Schemes for Hyperbolic Equations // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44. I. 1. P. 296–312.
12. Golubev V.I., Muratov M.V., Guseva E.K., Konov D.S., Petrov I.B. Thermodynamic and Mechanical Problems of Ice Formations: Numerical Simulation Results // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. V. 43 I. 4.
13. Guseva E.K., Beklemysheva K.A., Golubev V.I., Epifanov V.P., Petrov I.B. Investigation of Ice Rheology Based on Computer Simulation of Low-Speed Impact // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. 2022. P. 176–184.
14. Petrov I.B., Golubev V.I., Shevchenko A.V. Higher-Order Grid-Characteristic Schemes for the Acoustic System // 2021 Ivannikov Memorial Workshop (IVMEM). 2021. P. 61–65.
15. Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B. Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting // Computer Research and Modeling. 2022. V. 14. I. 4. P. 899–910.

16. Golubev V.I., Shevchenko A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B., Malovichko M.S. Compact Grid-Characteristic Scheme for the Acoustic System with the Piece-Wise Constant Coefficients // International Journal of Applied Mechanics. 2022. V. 14. I. 2. P. 2250002.
17. Petrov I.B., Kholodov A.S. Numerical study of some dynamic problems of the mechanics of a deformable rigid body by the mesh-characteristic method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1984. V. 24. I. 3. P. 61–73.
18. Петров И.Б., Тормасов А.Г., Холодов А.С. Об использовании гибридизированных сеточно-характеристических схем для численного решения трехмерных задач динамики деформируемого твердого тела // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. № 8. С. 1237–1244.
19. Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., Petrov I.B. Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method // Geophysical Prospecting. 2018. V. 66. I. 8. P. 1485–1502.
20. Khokhlov N.I., Favorskaya A.V., Stetsyuk V.O., Mitskovets I.A. Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones // J. of Comp. Physics. 2021. V. 446. P. 110637.
21. Исакович М.А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
22. Sofronov I., Zaitsev N., Dovgilovich L. Multi-block finite-difference method for 3D elastodynamic simulations in anisotropic subhorizontally layered media // Geophysical Prospecting. 2015. V. 63. P. 1142–1160.
23. Komatitsch D., Tromp J. A perfectly matched layer absorbing boundary condition for the second-order seismic wave equation // Geophysical Journal International. 2003. V. 154. I. 1. P. 146–153.
24. Челноков Ф.Б. Численное моделирование деформационных динамических процессов в средах со сложной структурой: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т), 2005.
25. LeVeque R.J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2002.
26. Golubev V.I., Nikitin I.S., Vasyukov A.V., Nikitin A.D. Fractured inclusion localization and characterization based on deep convolutional neural networks // Procedia Structural Integrity. 2023. V. 43. P. 29–34.

---

---

**ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ  
МЕТОДЫ**

---

---

УДК 519.63

**STABILITY ANALYSIS OF SEVERAL TIME DISCRETE SCHEMES  
FOR ALLEN–CAHN AND CAHN–HILLIARD EQUATIONS<sup>1)</sup>**

© 2023 г. Qiaoling He<sup>1,\*</sup>, Junping Yan<sup>1</sup>, Abudurexiti Abuduwaili<sup>2</sup>

<sup>1</sup> College of Science, Shihezi University, Xinjiang 832000, China

<sup>2</sup> College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Xinjiang 830046, China

\*e-mail: 106509285@qq.com, 1148346604@qq.com

Поступила в редакцию 23.05.2023 г.

Переработанный вариант 23.05.2023 г.

Принята к публикации 26.06.2023 г.

**Анализ устойчивости разностных схем для уравнений Аллена–Кана и Кана–Хиллиарда.** В работе исследуется устойчивость нескольких дискретных по времени разностных схем для уравнений Аллена–Кана и Кана–Хиллиарда и дается оценка погрешности решения для уравнения Кана–Хиллиарда. Для этого используются метод конечных элементов по пространству и результаты по аппроксимации сильно эллиптических операторов. Численная реализация предложенного метода решения подтверждена высокой скоростью сходимости рассмотренных разностных схем.

**Ключевые слова:** уравнение Аллена–Кана, уравнение Кана–Хиллиарда, метод конечных элементов, оценка погрешности.

**DOI:** 10.31857/S0044466923100058, **EDN:** FQIPWE

---

<sup>1)</sup> Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

---

---

ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ

---

---

УДК 519.95

**COORDINATED CONTROL OF MULTIPLE SURFACE  
UNMANNED VEHICLE CLUSTERS UNDER THE INFLUENCE  
OF WIND FIELD AND TIDES<sup>1)</sup>**

© 2023 г. **Yanshan Liu<sup>1</sup>, Zhiqing Dang<sup>1</sup>, Zhaopeng Dai<sup>1,\*</sup>, Xinran Hao<sup>1</sup>, Yan Cui<sup>1</sup>, Hongwei Gao<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> 266071 School of Mathematics and statistics, Qingdao University, Qingdao, Shandong, China

\*e-mail: dzpeng@amss.ac.cn

Поступила в редакцию 23.03.2023 г.  
Переработанный вариант 23.03.2023 г.  
Принята к публикации 29.05.2023 г.

**Координированное управление несколькими наземными кластерами беспилотных летательных аппаратов под воздействием поля ветра и приливов.** В работе исследуется проблема координированного управления в кластере несколькими наземными беспилотными летательными аппаратами при воздействии на них переменных возмущений, таких как поле ветра и приливы. Обратная связь с объектами здесь реализована на основе контроллеров состояния. Предлагаемое решение задачи основано на использовании гамильтониана системы. При этом каждый кластер располагается внутри некоторого эллипсоидального виртуального контейнера в течение всего процесса движения, а траектория этого эллипсоида используется в качестве внешнего ограничения состояния для кластера. Этот подход позволяет получить необходимое динамическое уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана для всей системы, а также построить оптимальное управление и траектории каждого кластера. Результаты численного моделирования этой задачи подтверждают высокую эффективность предложенного подхода.

**Ключевые слова:** уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана, оптимальное управление, численное моделирование.

**DOI:** 10.31857/S0044466923100101, **EDN:** FPDRJY

---

<sup>1)</sup> Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

---

---

**ОБЫКНОВЕННЫЕ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

---

---

УДК 519.642

**A NOVEL UNIFORM NUMERICAL APPROACH TO SOLVE SINGULARLY  
PERTURBED VOLTERRA INTEGRODIFFERENTIAL EQUATION<sup>1)</sup>**

© 2023 г. М. Cakira<sup>1</sup>, E. Cimen<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> Department of Mathematics, Van Yuzuncu Yil University, Van, Turkey

\*e-mail: cimenerkan@hotmail.com

Поступила в редакцию 01.02.2023 г.

Переработанный вариант 06.06.2023 г.

Принята к публикации 26.06.2023 г.

**Новый подход к численному решению сингулярно-возмущенного интегродифференциального уравнения Вольтерра.** В работе рассматривается задача Коши для сингулярно-возмущенного интегродифференциального уравнения Вольтерра второго порядка. Решение строится с использованием конечно-разностной схемы, основанной на методе интегральных тождеств с учетом интерполяционных квадратур, и оценкой погрешности в интегральной форме. Анализ погрешности метода показывает его равномерную сходимость первого порядка по параметру возмущения в дискретной норме  $C$ . Представленные численные эксперименты подтверждают полученные теоретические оценки.

**Ключевые слова:** конечно-разностная схема, сингулярное возмущение, равномерная сходимость, интегродифференциальное уравнение Вольтерра.

**DOI:** 10.31857/S0044466923100022, **EDN:** EAEXMX

---

<sup>1)</sup> Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

**ОБЫКНОВЕННЫЕ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 517.93

**ДИНАМИКА ЦЕПОЧЕК ИЗ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ОСЦИЛЛЯТОРОВ  
С ОДНОСТОРОННЕЙ И ДВУСТОРОННЕЙ  
ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ<sup>1)</sup>**

© 2023 г. С. А. Кащенко<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> 150003 Ярославль, ул. Советская, 14, Региональный научно-образовательный математический центр при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова, Россия

\*e-mail: [kasch@uniyar.ac.ru](mailto:kasch@uniyar.ac.ru)

Поступила в редакцию 22.04.2023 г.  
Переработанный вариант 18.05.2023 г.  
Принята к публикации 29.05.2023 г.

Рассматриваются цепочки уравнений Ван дер Поля с большим запаздыванием в связях. Предполагается, что количество элементов цепочек тоже является достаточно большим. Естественным образом удается перейти к уравнению Ван дер Поля с интегральным по пространственной переменной слагаемым и периодическими краевыми условиями. Основное внимание уделено изучению локальной динамике цепочек с односторонними и с двусторонними типами связей. Условие достаточно больших значений параметра запаздывания позволило в явном виде определить параметры для реализации критических в задаче об устойчивости нулевого состояния равновесия случаев. Показано, что в рассматриваемых задачах имеет место бесконечномерный критический случай. Хорошо известные методы инвариантных интегральных многообразий и методы нормальных форм в этих задачах оказываются неприменимыми. На основе предложенного автором метода бесконечной нормализации – метода квазинормальных форм – показано, что главные члены асимптотики исходной системы определяются с помощью решений (нелокальных) квазинормальных форм – специальных нелинейных краевых задач параболического типа. В качестве основных результатов для рассматриваемых цепочек построены соответствующие квазинормальные формы. Библиография: 44.

**Ключевые слова:** цепочки с односторонними и двусторонними связями, бифуркации, устойчивость, квазинормальные формы, запаздывание, динамика.

**DOI:** 10.31857/S0044466923090107, **EDN:** MMEENN

**ВВЕДЕНИЕ**

Рассмотрим цепочку связанных между собой осцилляторов. В качестве базовой модели осцилляторов используем уравнение второго порядка

$$\ddot{u} + a\dot{u} + u + f(u, \dot{u}) = 0, \tag{1}$$

где  $f(u, \dot{u})$  – кубическая нелинейность

$$f(u, \dot{u}) = b_1 u^3 + b_2 u^2 \dot{u} + b_3 u \dot{u}^2 + b_4 \dot{u}^3. \tag{2}$$

Пусть цепочку из  $N$  связанных одинаковых осцилляторов вида (1) описывает система уравнений

$$\ddot{u}_j + a\dot{u}_j + u_j = \sum_{k=1}^N a_{kj} u_k(t - T) \quad (j = 1, \dots, N), \tag{3}$$

где  $a_{kj}$  – коэффициенты связей,  $T > 0$  – время запаздывания. Будем предполагать, что коэффициенты связей каждого элемента одинаковы для всех  $j$ , т.е.  $a_{kj} = a_{k-j}$  и цепочка является кольцевой: элемент с номером  $j \pm N$  отождествляется с элементом с номером  $j$ . Систему (3) удобно интерпретировать как цепочку осцилляторов, расположенных на некоторой окружности в точках с угловыми координатами  $x_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ;  $x_{N+1} = x_1$ ;  $x_0 = x_N$ ;  $x_k = 2\pi N^{-1}k$ ) и  $u_k(t) = u(t, x_k)$ .

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 21-71-30011), <https://rscf.ru/project/21-71-30011/>.

Цепочки вида (3) являются важными объектами для исследований. Им уделяется особое внимание. Такие цепочки возникают при моделировании многих прикладных задач в радиофизике [1–8], лазерной физике [9–13], математической экологии [14, 15], теории нейронных сетей [16–21], оптике [3, 8, 22, 23], биофизике [24] и др. Релаксационные колебания в связанных цепочках с финитной нелинейностью и запаздыванием для небольшого количества элементов изучались в [25, 26].

Аналитическими методами изучались, в основном, динамические свойства цепочек с небольшим количеством элементов. Здесь будем предполагать, что значение  $N$  достаточно велико. Отсюда следует, что параметр  $\varepsilon = 2\pi N^{-1}$  является достаточно малым

$$0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4)$$

Тогда представляется естественным от дискретной зависимости от  $x_k$  перейти к изучению  $u(t, x)$  с непрерывным аргументом  $x \in (-\infty, \infty)$  и условием  $2\pi$ -периодичности по  $x$ .

В этом случае система (3) трансформируется в краевую задачу вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + u + f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = d \int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t - T, x + s) ds, \quad (5)$$

$$u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (6)$$

Функция  $\Phi(s)$  описывает связи между элементами. Сведение цепочки с большим количеством элементов в краевой задаче вида (5), (6) использовалось в [17, 27].

Подробно остановимся на описании основных объектов настоящей работы – цепочках с односторонними и двусторонними связями. В дискретной форме записи они имеют соответственно представления

$$\ddot{u}_n(t) + a\dot{u}_n(t) + u_n(t) + f(u_n(t), \dot{u}_n(t)) = \alpha u_{n+1}(t - T) \quad (7)$$

и

$$\ddot{u}_n(t) + a\dot{u}_n(t) + u_n(t) + f(u_n(t), \dot{u}_n(t)) = \frac{1}{2} \alpha (u_{n+1}(t - T) + u_{n-1}(t - T)). \quad (8)$$

Рассмотрим задачи с непрерывной по  $x$  переменной  $u(t, x)$ , обобщающие уравнения (7), (8). Остановимся на определении функции  $\Phi(s)$  для каждого из двух видов цепочек.

Введем в рассмотрение гауссовы функции  $F_{\pm}(s, \varepsilon)$ :

$$F_{\pm}(s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(s \mp \varepsilon)^2}{2\varepsilon^2 \sigma^2}\right) \quad (\sigma > 0). \quad (9)$$

Отметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(s, \varepsilon) ds = 1.$$

Значения  $F_{\pm}(s, \varepsilon)$  сосредоточены в окрестностях точек  $\mp \varepsilon$  соответственно.

Интегральное выражение в правой части (5) удобно в каждой из рассматриваемых двух задач представить в виде:

$$\int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t - T, x + s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} F_+(s, \varepsilon) u(t - T, x + s) ds, \quad (10)$$

$$\int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t - T, x + s) ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (F_+(s, \varepsilon) + F_-(s, \varepsilon)) u(t - T, x + s) ds. \quad (11)$$

Такого типа функции  $F_{\pm}(s, \varepsilon)$  использовались в [28]. Похожие, но несколько менее удобные в техническом плане выражения для  $F_{\pm}(s, \varepsilon)$ , в которых  $F_{\pm}(s) = \text{const} \times \exp(-\sigma^2 |s|)$ , приведены в работе [29].

Формы записей (10) и (11) предпочтительнее по трем причинам. Во-первых, для каждой фиксированной непрерывной и  $2\pi$ -периодической функции  $u(x)$  имеют место предельные равенства

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(s, \varepsilon) u(x+s) ds = u(x \pm \varepsilon), \quad (12)$$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (F_{+}(s, \varepsilon) + F_{-}(s, \varepsilon)) u(x+s) ds = \frac{1}{2} (u(x+\varepsilon) + u(x-\varepsilon)), \quad (13)$$

которые оправдывают названия “односторонняя” и “двусторонняя” связи.

Во-вторых, параметр  $\sigma$  в формулах для  $F_{\pm}(s, \varepsilon)$  имеет четкий смысл. Он определяет множество элементов цепочки, которые существенным образом влияют на каждый конкретный элемент. Это влияние тем слабее, чем дальше элементы находятся друг от друга.

В-третьих, формы записи (10) и (11) удобны с чисто технической точки зрения, поскольку имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_{\pm}(s, \varepsilon) \exp(iks) ds = \exp(\pm i k \varepsilon) \exp\left(-\frac{\sigma^2 \varepsilon^2 k^2}{2}\right),$$

которое ниже будет часто использоваться.

Еще одно важное предположение касается параметра запаздывания  $T$ . Будем предполагать, что этот параметр является достаточно большим: для некоторого  $c > 0$  выполнено условие

$$T = c\varepsilon^{-1}. \quad (14)$$

Это открывает путь к использованию специальных асимптотических методов [13–15, 30, 31].

В (5) удобно произвести нормировку времени  $t \rightarrow Tt$ . В результате приходим к сингулярно возмущенному уравнению

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t} + u + f\left(u, \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}\right) = d \int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t-c, x+s) ds \quad (15)$$

с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t, x). \quad (16)$$

Отметим, что получающееся при  $\varepsilon = 0$  уравнение не дает информации о поведении решений краевой задачи (15), (16).

При изучении решений из малой окрестности нулевого состояния равновесия важную роль играет линеаризованное уравнение

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varepsilon a \frac{\partial u}{\partial t} + u = d \int_0^{2\pi} \Phi(s) u(t-c, x+s) ds. \quad (17)$$

Его характеристическое уравнение получаем путем подстановки в (17) решений Эйлера  $\exp(ikx + \lambda t)$ :

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + \varepsilon a \lambda + 1 = dg(z) \exp\left(-\frac{1}{2} \sigma^2 z^2 - c\lambda\right), \quad z = \varepsilon k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (18)$$

а для функции  $g(z)$  имеем равенства:

$$g(z) = \exp(iz), \quad \text{в случае (10),} \quad (19)$$

$$g(z) = \cos z, \quad \text{в случае (11).} \quad (20)$$

В том случае, когда все корни (18) имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , нулевое решение (17), (16), а значит, и в (15), (16) асимптотически устойчиво и все решения с достаточно малыми (не зависимо от  $\varepsilon$ ) начальными условиями стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Если же найдется корень в (18) с положительной и отделенной от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вещественной частью, то нулевое решение в (17), (16) и в (15), (16) неустойчиво и задача о динамике становится нелокальной. Здесь будем рассматривать критические случаи для каждой

из функций (10), (11), когда у (18) нет корней с положительной и отделенной от нуля вещественной частью, но есть корни, которые стремятся к мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Будет показано, что во всех рассмотренных ниже ситуациях критические случаи имеют бесконечную размерность, т.е. бесконечно много корней (18) стремится к мнимой оси при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Известные методы исследования локальной динамики в критических случаях, основанные на использовании инвариантных интегральных многообразий и нормальных форм [32–34], здесь оказываются неприменимы. Будут использованы специальные методы, разработанные в [14, 30, 31, 35–38]. В качестве основных результатов будут построены нелинейные краевые задачи – аналоги нормальных форм – квазинормальные формы (КНФ). Их локальная динамика описывает поведение всех решений из окрестности состояния равновесия исходной краевой задачи (15), (16). Будут выявлены сходства и отличия динамических свойств для каждого типа связей.

В следующих разделах будут последовательно изучены задачи с обоими типами функции  $\Phi(s)$  (10), (11). Особо выделим роль параметра  $\sigma$ , фигурирующего в (9). При достаточно малых его значениях существенно усложняются критические случаи и КНФ, а значит, и динамика исходной задачи. В силу равенств (12) и (13) этот случай имеет особое значение.

Отметим, что в цепочках без запаздывания подобного типа задачи исследовались в [39]. При отсутствии большого запаздывания, с одной стороны, позволяет в явном виде получить явные выражения для критических случаев [21, 27, 40–42] и выявить тенденции изменения динамических свойств при увеличении  $T$ . С другой стороны, возрастает размерность критических случаев и еще более усложняются соответствующие КНФ.

Центральное место при исследовании краевой задачи (15), (16) для каждой из приведенных функций  $g(z)$  занимает линейный анализ. Этому посвящен следующий раздел.

## 1. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим вопрос о корнях характеристического уравнения (18) с функциями  $g(z)$  (19) и (20). Напомним, что критические случаи в задачах об устойчивости в (17), (16) реализуются, когда в уравнении (18) при некотором  $k$  есть корень с нулевой или достаточно близкой к нулю вещественной частью. В связи с этим для некоторого вещественного значения  $\omega$  положим в (18)  $\lambda = i\omega\varepsilon^{-1}$ . В результате получим уравнение

$$1 - \omega^2 + ia\omega = dg(z)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2 - i\omega\varepsilon^{-1}\right), \quad z = \varepsilon k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (21)$$

Через  $p(\omega)$  обозначим модуль левой части (21)

$$p(\omega) = [(1 - \omega^2)^2 + a^2\omega^2]^{1/2}$$

и пусть

$$p_0 = \min_{-\infty < \omega < \infty} p(\omega) = p(\omega_0).$$

Здесь

$$\omega_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } a^2 \geq 2, \\ \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2, \end{cases} \quad p_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } a^2 \geq 2, \\ \frac{a^2}{2}(4 - a^2)^{1/2}, & \text{если } a^2 < 2. \end{cases}$$

Отметим, что  $p_0 = 0$  при  $a = 0$ . Положим  $P(\omega) = 1 - \omega^2 + ia\omega$  и пусть  $P(\omega) = p(\omega)\exp(i\Omega(\omega))$ . При  $\omega = 0$  имеем  $\Omega(0) = 0$ ,  $\Omega'(0) = a$ ,  $p'(0) = 0$ .

Существенную роль при исследовании корней (18) играет параметр  $\sigma$ . Отдельно рассмотрим два принципиально различных случая. Первый из них реализуется, когда

$$\sigma > 0 \quad (22)$$

и  $\sigma$  не зависит от малых параметров.

Второй случай существенно сложнее. Он выделяется условием достаточной малости этого параметра, т.е. предполагаем, что для некоторого фиксированного  $\sigma_1 > 0$  выполнено условие

$$\sigma = \varepsilon\sigma_1. \quad (23)$$

Еще раз отметим, что в силу предельных равенств (12) и (13) этот случай особо интересен.

*1.1. Результаты линейного анализа в случае фиксированного значения  $\sigma$*

Пусть выполнено условие (22). При фиксированном  $z$  и при условии

$$\left| dg(z) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right) \right| < p_0$$

уравнение (21) вещественных корней не имеет. Положим

$$\gamma(z) = \left| g(z) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 z^2\right) \right|$$

и пусть

$$\gamma_0 = \max_{-\infty < z < \infty} \gamma(z) = \gamma(z_0). \quad (24)$$

Из условия (22) вытекает, что  $z_0 = 0$  и  $\gamma_0 = 1$ . При условии  $|d|\gamma_0 < p_0$  и при достаточно малых  $\varepsilon$  все корни уравнения (18) имеют отрицательные и отделенные от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вещественные части. При  $|d|\gamma_0 > p_0$  найдется такое  $z_0$ , что уравнение (18) имеет корень с положительной и отделенной от нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вещественной частью.

Значение параметра  $d_0$ , который выделяет критический в задаче об устойчивости (17), (16) случай, определяется равенством

$$d_0 = p_0 \quad \text{при} \quad d_0 > 0 \quad \text{и} \quad d_0 = -p_0 \quad \text{при} \quad d_0 < 0.$$

В связи с этим ниже предполагаем, что для произвольного фиксированного значения  $d_1$  параметр  $d$  определяем равенством

$$d = d_0 + \varepsilon^2 d_1. \quad (25)$$

При этом условии рассмотрим вопрос об асимптотике всех тех корней характеристического уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Сразу отметим, что таких корней оказывается бесконечно много, поэтому критический случай имеет бесконечную размерность.

Введем обозначения. Через  $\theta_\omega = \theta_\omega(\varepsilon) \in [0, 2\pi)$  будем обозначать такое выражение, которое дополняет до целого кратного  $2\pi c^{-1}$  величину  $\omega_0 \varepsilon^{-1}$ . При  $\omega_0 = 0$  считаем, что  $\theta_\omega = 0$ . Через  $\theta_z = \theta_z(\varepsilon) \in [0, 1)$  подобным образом ниже будем обозначать такое выражение, которое дополняет до целого значение  $z_0 \varepsilon^{-1}$ . При  $z_0 = 0$  считаем, что  $\theta_z = 0$ .

Сформулируем утверждения об асимптотике корней (18) в случаях (19), (20).

**Лемма 1.1.** Пусть

$$a^2 > 2, \quad d_0 = p_0. \quad (26)$$

Тогда  $\omega_0 = 0$  и для корней  $\lambda_{kn}(\varepsilon) (k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  выполнены асимптотические равенства

$$\lambda_{kn}(\varepsilon) = 2\pi i c^{-1} n + \varepsilon \lambda_{1kn} + \varepsilon^2 \lambda_{2kn} + \dots, \quad (27)$$

где в случае (19)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= c^{-1} i (k - a c^{-1} 2\pi n), \\ \lambda_{2kn} &= c^{-3} \left( 1 - \frac{1}{2} a^2 \right) (2\pi n)^2 + i c^{-2} a (k - c^{-1} a 2\pi n) + c^{-1} d_1 - c^{-1} \sigma^2 k^2, \end{aligned}$$

а в случае (20)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= c^{-2} i a 2\pi n, \\ \lambda_{2kn} &= c^{-3} \left( 1 - \frac{1}{2} a^2 \right) (2\pi n)^2 + i c^{-3} a 2\pi n + c^{-1} d_1 - c^{-1} \left( \frac{1}{2} + \sigma^2 \right) k^2. \end{aligned}$$

В случае, когда  $a^2 > 2$  и  $d_0 = -p_0 = -1$  в предыдущих формулах выражение  $2\pi n$  меняется на  $i\pi(2n+1)$ . В этом случае удобно все предыдущие формулы переписать, акцентируя внимание на то, что, в отличие от приведенных в лемме 1.1 равенств, присутствует уже нечетно кратная  $\pi$  величина  $\pi(2n+1)$ :

$$\lambda_{kn}(\varepsilon) = \pi i c^{-1}(2n+1) + \varepsilon \lambda_{1kn} + \varepsilon^2 \lambda_{2kn} + \dots,$$

где в случае (19)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= c^{-1}i(k - ac^{-1}\pi(2n+1)), \\ \lambda_{2kn} &= c^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(\pi(2n+1))^2 + ic^{-2}a(k - c^{-1}a\pi(2n+1)) + c^{-1}d_1 - c^{-1}\sigma^2 k^2, \end{aligned}$$

а в случае (20)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= c^{-2}ia\pi(2n+1), \\ \lambda_{2kn} &= c^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)(\pi(2n+1))^2 + ic^{-3}a\pi(2n+1) + c^{-1}d_1 - c^{-1}\left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right)k^2. \end{aligned}$$

**Лемма 1.2.** Пусть

$$0 < a^2 < 2. \quad (28)$$

Тогда  $\omega_0 > 0$  и для корней  $\lambda_{kn}(\varepsilon)(k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , выполнены асимптотические равенства

$$\lambda_{kn}(\varepsilon) = i \frac{\omega_0}{\varepsilon} + \lambda_{0n} + \varepsilon \lambda_{1kn} + \varepsilon^2 \lambda_{2kn} + \dots, \quad (29)$$

где

$$\lambda_{0n} = ic^{-1}[2\pi n + \theta_0 - \Omega_0], \quad \kappa = p_0 \exp(i\Omega_0),$$

в случае (19)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= c^{-1}(k + \kappa^{-1}(2\omega_0 - ia))\lambda_{0n}, \\ \lambda_{2kn} &= c^{-1}\left[\left(\kappa^{-1} - \frac{1}{2}(-2\omega_0 + ia)^2 \kappa^{-2}\right)\lambda_{0n}^2 + d_1 p_0^{-1} - \sigma^2 k^2 - \right. \\ &\quad \left. - (c\kappa)^{-1}2i\omega_0(ik + \kappa^{-1}(2\omega_0 - ia))\lambda_{0n} - i\kappa^{-1}a\lambda_{0n}\right]. \end{aligned} \quad (30)$$

В случае (20)

$$\begin{aligned} \lambda_{1kn} &= ic^{-1}\kappa^{-1}(2\omega_0 - ia)\lambda_{0n}, \\ \lambda_{2kn} &= c^{-1}\left[\left(\kappa^{-1} - \frac{1}{2}(-2\omega_0 + ia)^2 \kappa^{-2}\right)\lambda_{0n}^2 + d_1 p_0^{-1} - \right. \\ &\quad \left. - \sigma^2 + \frac{1}{2}k^2 - (c\kappa)^{-1}2i\omega_0 \kappa^{-1}(2\omega_0 - ia)\lambda_{0n} - i\kappa^{-1}a\lambda_{0n}\right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Отметим, что выполняются условия

$$\operatorname{Re}\left(\kappa^{-1} - \frac{1}{2}(-2\omega_0 + ia)^2 \kappa^{-2}\right) < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_{1kn} = 0. \quad (32)$$

Выполнение первого из условий (32) очевидно. Подробнее остановимся на обосновании второго равенства в (32). Достаточно доказать, что чисто мнимым является выражение

$$(2\omega_0 - ia)\kappa^{-1}.$$

В этом случае  $P(\omega) = p(\omega) \exp(i\Omega(\omega))$  и  $P'(\omega) = (p'(\omega) + i\Omega'(\omega)p(\omega)) \exp(i\Omega(\omega))$ , а значит,

$$P'(\omega) = i\Omega'(\omega_0)p_0 \exp(i\Omega_0) = -2\omega_0 + ia.$$

Отсюда заключаем, что  $(-2\omega_0 + ia)\kappa^{-1} = i\Omega'(\omega_0) = 2ia^{-1}$ .

Корни  $\lambda_{kn}(\varepsilon)$  характеристического уравнения (18) позволяют определить решения линейной краевой задачи (17), (16)

$$u_{kn}(t, x, \varepsilon) = \exp(ikx + \lambda_{kn}(\varepsilon)t),$$

а значит, и формальную совокупность решений

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} (\xi_{kn} u_{kn}(t, x, \varepsilon) + \bar{\xi}_{kn} \bar{u}_{kn}(t, x, \varepsilon)), \quad (33)$$

где  $\xi_{kn}$  — произвольные комплексные постоянные. В каждом из рассмотренных ниже случаев соответствующие выражения вида (33) будут преобразованы так, чтобы в удобной форме можно было исследовать асимптотику решений нелинейной краевой задачи (15), (16).

### 1.2. Случай малых значений $\sigma$

Ниже будут рассмотрены важные вопросы о динамических свойствах краевой задачи (15), (16) при малых значениях  $\sigma$ . Будем предполагать, что для некоторого фиксированного значения  $\sigma_1$  выполнено равенство

$$\sigma = \varepsilon \sigma_1.$$

Интерес к этому случаю обусловлен тем, что, во-первых, как было показано выше при малых  $\sigma$  соответствующие интегральные выражения в краевой задаче (15), (16) близки к записи в виде конечной разности по пространственной переменной.

Во-вторых, из (18) следует, что величина  $\exp(-\sigma^2 z^2/2)$  в правой части (18) является малой, а значит, критические случаи определяются периодической функцией  $g(z)$ . Тем самым критические значения  $z_0$  в (24) находятся заведомо не единственным образом. Таких значений, очевидно, бесконечно много. Это говорит о том, что квазинормальная форма становится существенно сложнее, а динамические свойства интереснее и разнообразнее.

## 2. ЦЕПОЧКИ С ОДНОСТОРОННЕЙ СВЯЗЬЮ

Отдельно рассмотрим случаи, когда  $a^2 > 2$ ,  $a^2 < 2$ ,  $d_0 > 0$  и  $d_0 < 0$ .

### 2.1. Случай $a^2 > 2$ и $d_0 > 0$

Рассмотрим краевую задачу (15), (16) в предположении, что выполнено условие (22) и равенство

$$g(z) = \exp(iz). \quad (34)$$

Пусть сначала верны неравенства  $a^2 > 2$  и  $d_0 > 0$ . Тогда получаем, что для фигурирующих в (26), (27) величин выполнены равенства

$$\gamma_0 = p_0 = d_0 = 1, \quad d = 1 + \varepsilon^2 d_1, \quad z_0 = 0 \quad (\theta_z = 0). \quad (35)$$

Рассмотрим формальное выражение (33), которое имеет вид

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn} \exp[ikx + i(2\pi n c^{-1} + \varepsilon k - \varepsilon a)t + (\lambda_{2kn} + O(\varepsilon))\varepsilon^2 t].$$

Положим в нем

$$x_1 = (1 - \varepsilon c^{-3} a)t, \quad x_2 = x + \varepsilon c^{-2} t, \quad \tau = \varepsilon^2 t$$

и  $\xi_{kn}(\tau) = \xi_{kn} \exp[(\lambda_{2kn} + O(\varepsilon))\tau]$ . В результате получаем, что

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}(\tau) \exp(ikx_2 + 2\pi i c^{-1} n x_1) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2),$$

т.е.  $\xi_{kn}(\tau)$  – коэффициенты Фурье  $c$ -периодической по  $x_1$  и  $2\pi$ -периодической по  $x_2$  функции  $\xi(\tau, x_1, x_2)$ .

Решение нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем в виде формального ряда

$$u(t, x) = \varepsilon \xi(\tau, x_1, x_2) + \varepsilon^3 u_3(\tau, x_1, x_2) + \dots, \quad (36)$$

где  $\xi(\tau, x_1, x_2)$  – неизвестные функции, зависимость от  $x_1$  –  $c$ -периодическая, а от  $x_2$  –  $2\pi$ -периодическая. Подставим (36) в (15) и будем собирать коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ .

При первой степени  $\varepsilon$  получаем верное равенство, а собирая коэффициенты при  $\varepsilon^3$ , приходим к уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} c^{-1} (a^2 - 2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + \sigma^2 c^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} - a^2 c^{-2} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} - ac^{-2} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + c^{-1} d_1 - c^{-1} b_1 \xi^3, \quad (37)$$

для которого выполнены краевые условия

$$\xi(\tau, x_1 + c, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2 + 2\pi). \quad (38)$$

Сформулируем итоговый результат.

**Теорема 2.1.** Пусть выполнены равенства (34),  $d_0 = 1$ , неравенства (22) и  $a^2 > 2$ . Пусть  $\xi(\tau, x_1, x_2)$  – ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x_1 \in [0, c]$ ,  $x_2 \in [0, 2\pi]$  решение краевой задачи (37), (38). Тогда функция  $u(t, x) = \varepsilon \xi(\tau, x_1, x_2)$  удовлетворяет краевой задаче (15), (16) с точностью до  $o(\varepsilon^3)$ .

## 2.2. Случай $a^2 > 2$ и $d_0 < 0$

В данном разделе  $d_0 = -1$ , а все остальные величины те же, что и в предыдущем разделе. Повторяя приведенные выше построения, получаем формулу для тех решений линейной краевой задачи (17), (16), которые базируются на “критических” решениях Эйлера:

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}(\tau) \exp[ikx + i(\pi(2n+1)c^{-1} + \varepsilon k - \varepsilon a\pi(2n+1)c^{-1})t] \equiv \xi(\tau, x_1, x_2),$$

где  $\xi_{kn}(\tau)$  – коэффициенты Фурье  $c$ -антипериодической по  $x_1$  и  $2\pi$ -периодической по  $x_2$  функции  $\xi(\tau, x_1, x_2)$ .

Решения нелинейной краевой задачи (15), (16) опять ищем в виде (36). В итоге для  $\xi(\tau, x_1, x_2)$  получаем уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2} c^{-1} (a^2 - 2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + \sigma^2 c^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} - a^2 c^{-2} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} - ac^{-2} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + c^{-1} d_1 - c^{-1} b_1 \xi^3 \quad (39)$$

с краевыми условиями

$$\xi(\tau, x_1, x_2 + 2\pi) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2) \equiv -\xi(\tau, x_1 + c, x_2). \quad (40)$$

Сформулируем результат.

**Теорема 2.2.** Пусть выполнены равенства (34),  $d_0 = -1$  и неравенства (22) и  $a^2 > 2$ . Пусть  $\xi(\tau, x_1, x_2)$  – ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x_1 \in [0, c]$ ,  $x_2 \in [0, 2\pi]$  решение краевой задачи (39), (40). Тогда функция  $u(t, x) = \varepsilon \xi(\tau, x_1, x_2)$  удовлетворяет краевой задаче (15), (16) с точностью до  $o(\varepsilon^3)$ .

Таким образом, показано, что при сформулированных в теоремах 1 и 2 условиях краевые задачи (37), (38) и (39), (40) являются квазинормальными формами для краевой задачи (15), (16). Их нелокальные решения определяют поведение решений (15), (16) в малой окрестности состояния равновесия. Отметим, что динамика краевой задачи (37), (38) тривиальна: все ее решения при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к одному из трех стационаров – либо к нулю, либо к значениям  $\pm(-d_1 b_1^{-1})^{1/2}$ . Решения краевой задачи (39), (40) менее тривиальны. В ней могут быть, например, устойчивые неоднородные состояния равновесия.

## 2.3. Асимптотика быстро осциллирующих решений

При условии  $0 < a^2 < 2$  динамические свойства сложнее. Главная часть корней характеристического уравнения (18) близка к  $i\omega_0\varepsilon^{-1}$ , т.е. является достаточно большой. В связи с этим колебания с такими частотами естественно назвать быстро осциллирующими.

Из результатов разд. 1 получаем соотношения:

$$\omega_0 = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}, \quad p_0 = \frac{a^2}{2}(4 - a^2)^{1/2}, \quad z_0 = 0, \quad \theta_z = 0, \quad \gamma_0 = 1.$$

Достаточно ограничиться случаем, когда коэффициент  $d$  положителен. Поэтому  $d_0 = p_0$ .

Согласно лемме 2 в рассматриваемом случае (35) для корней  $\lambda_{kn}(\varepsilon)$  выполнены равенства (29). Корням  $\lambda_{kn}(\varepsilon)$  отвечают решения Эйлера линейной задачи (17), (16)

$$u_{kn}(t, x, \varepsilon) = \exp(ikx + \lambda_{kn}(\varepsilon)t).$$

Учитывая равенства (29), функцию  $u_{kn}(t, x, \varepsilon)$  можно записать в виде

$$u_{kn}(t, x, \varepsilon) = E(t_1) \exp(2\pi inc^{-1}x_1 + ikx_2) \exp((\lambda_{2kn} + O(\varepsilon)\tau),$$

где  $E(t_1) = \exp(it_1)$ ,

$$t_1 = [\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_\omega - \Omega_0c^{-1} - R_0c^{-1}(\theta_\omega - \Omega_0c^{-1})(2i\omega_0 + a)]t, \quad (41)$$

$$x_1 = (1 - \varepsilon c^{-1}R_0)t, \quad x_2 = x + \varepsilon c^{-1}t, \quad \tau = \varepsilon^2t, \quad (42)$$

$$R_0 = p_0^{-1} \exp(i\Omega_0)(2i\omega_0 + a). \quad (43)$$

Выше было показано, что значение  $R_0$  вещественно ( $\text{Im}R_0 = 0$ ). Отсюда получаем, что

$$\sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn} u_{kn}(t, x, \varepsilon) = E(t_1) \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}(\tau) \exp(2\pi inc^{-1}x_1 + ikx_2) = E(t_1) \xi(\tau, x_1, x_2).$$

Здесь  $\xi_{kn}$  — произвольные комплексные постоянные, а  $\xi_{kn}(\tau) = \xi_{kn} \exp((\lambda_{2kn} + O(\varepsilon)\tau)$ . Функции  $\xi_{kn}(\tau)$  являются коэффициентами Фурье  $c$ -периодической по  $x_1$  и  $2\pi$ -периодической по  $x_2$  функции  $\xi(\tau, x_1, x_2)$ . Решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем в виде формального ряда

$$u(t, x) = \varepsilon(\xi(\tau, x_1, x_2)E(t_1) + \bar{c}c) + \varepsilon^3 u_3(t, \tau, x_1, x_2) + \dots, \quad (44)$$

в котором зависимости от  $t_1, x_1, x_2$  — периодические. Здесь и ниже через  $\bar{c}c$  обозначаем величину, комплексно сопряженную к предыдущему слагаемому.

Введем обозначения. Положим

$$L_0(\xi) \equiv A \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + B \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + C \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + D \xi + \sigma^2 c^{-1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2},$$

где

$$A = c^{-1} \left[ \frac{1}{2} (-2\omega_0 + ia)^2 \kappa^{-2} - \kappa^{-1} \right],$$

$$B = -[2c^{-1}A(\theta_\omega - \Omega_0) + (c\kappa)^{-1}2i\omega_0\kappa^{-1}(2\omega_0 - ia) + i\kappa^{-1}a],$$

$$C = -2i(c\kappa)^{-1}\omega_0,$$

$$D = -Ac^{-2}(\theta_\omega - \Omega_0)^2 + d_1(cp_0)^{-1} - i\kappa^{-1}(2c^{-1}\omega_0 + a),$$

$$L_1(u) \equiv \omega_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + a_0 \omega \frac{\partial u}{\partial t_1} + u - p_0 u(t_1 - c(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_\omega - \Omega_0c^{-1}), \tau, x_1, x_2),$$

$$\beta_1 = b_1 + i\omega_0 b_2 - \omega_0^2 b_3 - i\omega_0^3 b_4,$$

$$\beta_2 = b_1 + 3i\omega_0 b_2 - 9\omega_0^2 b_3 - 27i\omega_0^3 b_4.$$

Просто проверяется, что  $\text{Re}A > 0$ . Подставим (44) в (15). Совершая затем стандартные действия, получаем соотношение

$$L_1(u_3) = E(t_1) \left[ -\frac{\partial \xi}{\partial \tau} + L_0(\xi) + 3c^{-1} \beta_1 \xi |\xi|^2 \right] + \bar{c}c + c^{-1} \beta_2 E^3(t_1) \xi^3 + \bar{c}c. \tag{45}$$

Для разрешимости (45) в указанном классе функций необходимо, чтобы первое (и второе – сопряженное к нему) слагаемое обратилось в нуль, т.е. чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = L_0(\xi) + 3c^{-1} \beta_1 \xi |\xi|^2. \tag{46}$$

Напомним, что функция  $\xi(\tau, x_1, x_2)$  удовлетворяет краевым условиям

$$\xi(\tau, x_1 + c, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2) \equiv \xi(\tau, x_1, x_2 + 2\pi). \tag{47}$$

При выполнении равенства (46) получаем, что  $u_3 = u_{30}$  и

$$u_{30} = \beta_2 [-3\omega_0^2 + i\omega_0 a + 1 - p_0 \exp(-3i\Omega_0)]^{-1} E^3(t_1) + \bar{c}c.$$

Введем еще одно обозначение. Через  $\varepsilon_n(\theta_0)$  будем обозначать такую последовательность  $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\theta_0)$ , для которой выполнены условия

$$\varepsilon_n(\theta_0) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{и} \quad \theta(\varepsilon_n(\theta_0)) = \theta_0.$$

Сформулируем итоговый результат.

**Теорема 2.3.** Пусть  $0 < a^2 < 2$  и  $d_0 = p_0$ . Фиксируем произвольно  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$  и пусть  $\xi(\tau, x_1, x_2)$  – ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x_1 \in [0, c]$ ,  $x_2 \in [0, 2\pi]$  решение краевой задачи (46), (47). Тогда при  $\varepsilon = \varepsilon_n(\theta_0)$  функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x_1, x_2)E(t_1) + \bar{c}c) + \varepsilon^3 u_{30}(t_1, \tau, x_1, x_2)$$

удовлетворяет при условиях (41)–(43) и при  $\theta = \theta_0$  краевой задаче (15), (16) с точностью до  $o(\varepsilon^3)$ .

На основании этой теоремы заключаем, что при сформулированных условиях краевая задача (46), (47) играет роль квазинормальной формы для исходной краевой задачи (15), (16). Отметим, что динамические свойства этой краевой задачи с комплексными коэффициентами существенно сложнее (см., например, [43]) чем у краевых задач (37), (38) и (39), (40) с вещественными коэффициентами. В частности, в (46), (47) могут наблюдаться такие структуры, как ведущие центры, спиральные волны и др.

#### 2.4. Построение квазинормальной формы при малых значениях параметра $\sigma$

Здесь предполагаем, что для параметра  $\sigma$  выполнено условие (23). Функция  $\gamma(z)$  с точностью до  $O(\varepsilon^2)$  имеет вид  $\gamma(z) = |\exp(iz)| \equiv 1$ , поэтому  $\gamma_0 = 1$ , а значение  $z_0$  – произвольно. В этом состоит основное отличие от условий разделов 2.2 и 2.3.

Ограничимся рассмотрением наиболее важного случая, когда  $0 < a^2 < 2$ . Для величин  $\omega_0$  и  $p_0$  верны формулы из разд. 1.

Сформулируем результат об асимптотике корней характеристического уравнения (18) в случае (23), (28) и (35).

Фиксируем произвольно значение  $z$  и рассмотрим все те целые  $K$ , для которых  $K = \{z\varepsilon^{-1} + \theta_z + k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . Просто проверяется то, что для каждого  $z$  характеристическое уравнение (18) имеет корни  $\lambda_{zkn}(\varepsilon) (k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  с асимптотикой

$$\lambda_{zkn}(\varepsilon) = i\omega_0 \varepsilon^{-1} + ic^{-1} R_{zn} + \varepsilon \lambda_{1zkn} + \varepsilon^2 \lambda_{2zkn} + \dots, \tag{48}$$

где

$$\begin{aligned} R_{zn} &= z + 2\pi n + \theta_\omega - \Omega_0, \\ \lambda_{1zkn} &= (i(\theta_z + k) + iR_0 R_{zn})c^{-1}, \\ R_0 &= (2\omega_0 - ia)(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1} = -2a^{-1}, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\lambda_{2zkn} = \frac{1}{2}(c\lambda_{1zkn} - i(\theta_z + k))^2 + d_1 c^{-1} p_0^{-1} + c^{-1}(-c^{-2} R_{zn}^2 + (2i\omega_0 + a)\lambda_{1zkn})(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}.$$

Обратим внимание, что в формулах (48), (49) значение  $z$  – любое вещественное. Фиксируем произвольно  $\Delta > 0$  и  $z^0$ . Рассмотрим множество чисел

$$z_m = \left\{ z^0 + \frac{2\pi}{\Delta} m; m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

В предыдущих разделах со значением  $z_0$  была связана совокупность целых чисел  $K_{z_0} = \{z_0 \varepsilon^{-1} + \theta_z + k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . Здесь аналогично определим совокупности целых чисел  $K_{z_m}$ , которые связаны со значениями  $z_m$  следующими соотношениями:

$$K_{z_m} = \{z^0 \varepsilon^{-1} + \theta_{z^0} + z_m \varepsilon^{-1} + \theta_{z_m} + k; k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Заметим, что использование для разных  $z_m$  различных значений  $\theta_{z_m}$  неудобно. Поэтому введем такое значение  $\theta_\Delta = \theta_\Delta(\varepsilon) \in [0, 1)$ , которое дополняет до целого величину  $2\pi(\Delta\varepsilon^{-1})$ . Тогда в качестве  $\theta_{z_m}$  можно взять  $m\theta_\Delta$ . Здесь уже не требуем, чтобы эта величина лежала в полуинтервале  $[0, 1)$ .

В (48), (49) предполагаем, что значения  $z$  пробегает всю совокупность значений для всех  $m$  множества  $K_{z_m}$ .

Подставим соответствующие значения  $z$  в (48), (49). Тогда получим асимптотическое представление для некоторой совокупности  $\lambda_{mkn}(\varepsilon)$  корней уравнения (18), зависящих от произвольного параметра  $\Delta$

$$\lambda_{mkn}(\varepsilon) = i\omega_0 \varepsilon^{-1} + ic^{-1} R_{mn} + \varepsilon \lambda_{1mkn} + \varepsilon^2 \lambda_{2mkn} + \dots, \quad (50)$$

где

$$R_{mn} = z^0 + 2\pi\Delta^{-1}m + 2\pi n + \theta_\omega - \Omega_0,$$

$$c\lambda_{1mkn} = i(\theta_{z^0} + m\theta_\Delta + k) + iR_0 R_{mn},$$

$$c\lambda_{2mkn} = \frac{1}{2}(c\lambda_{1mkn} - i(\theta_{z^0} + m\theta_\Delta + k))^2 + d_1 p_0^{-1} + ((2i\omega_0 + a)\lambda_{1mkn} - c^{-2} R_{mn}^2)(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}.$$

Каждому корню (50) отвечает решение Эйлера краевой задачи (17), (16)

$$u_{mkn}(t, x, \varepsilon) = \exp[i(z^0 \varepsilon^{-1} + \theta_{z^0} + 2\pi m(\Delta\varepsilon)^{-1} + m\theta_\Delta + k)x + \lambda_{mkn}(\varepsilon)t].$$

Формальное выражение для произвольной линейной комбинации таких решений

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{mkn} \exp[i(z^0 \varepsilon^{-1} + \theta_{z^0} + 2\pi m(\Delta\varepsilon)^{-1} + m\theta_\Delta + k)x + \lambda_{mkn}(\varepsilon)t]$$

можно записать в виде

$$u(t, x) = E(t, x) \sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{mkn}(\tau) \exp[i2\pi n x_1 + i k x_2 + i m x_3],$$

где

$$\tau = \varepsilon^2 t, \quad x_1 = (1 + \varepsilon c^{-1} R_0)t, \quad x_2 = x + \varepsilon c^{-1} t,$$

$$x_3 = (2\pi(\Delta\varepsilon)^{-1} + \theta_\Delta)(x + \varepsilon(1 + \varepsilon c^{-1} R_0)2\pi\Delta^{-1}t),$$

$$\xi_{mkn}(\tau) = \exp((\lambda_{2mkn} + O(\varepsilon))\tau),$$

$$E(t, x) = \exp[i(\omega_0 \varepsilon^{-1} + (\theta_\omega - \Omega_0 c^{-1} + \theta_{z^0})(1 + \varepsilon c^{-1} R_0))t + i(z^0 \varepsilon^{-1} + \theta_{z^0})x].$$

Отсюда получаем, что

$$u(t, x) = E(t, x)\xi(\tau, x_1, x_2, x_3),$$

а  $\xi_{mkn}(\tau)$  – коэффициенты Фурье функции  $\xi(\tau, x_1, x_2, x_3)$ .

Решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем тогда в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x_1, x_2, x_3)E(t, x) + \bar{c}c) + \varepsilon^3(E^3(t, x)u_{31}(\tau, x_1, x_2, x_3) + \bar{c}c) + \dots, \tag{51}$$

где  $\xi(\tau, x_1, x_2, x_3)$  – неизвестные амплитуды, зависимость от  $t, x_1, x_2$  и  $x_3$  в (51) – периодическая. Подставим (51) в (15). Совершая стандартные действия, находим выражение для  $u_{31}$  и уравнение относительно  $\xi(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)$ ,  $\tilde{x}_2 = x_2 - R_0\tau$ :

$$\begin{aligned} u_{31} &= [1 - 9\omega_0^2 + 3ia\omega_0 - p_0 \exp(-3i(\Omega_0 + \theta_{z^0}))]^{-1}[-b_1 - 3i\omega_0 + 9\omega_0^2 + 27\omega_0^3]\xi^3, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \tau} &= (A_0(a) + iA_1(a))\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + (A_0(a) + iA_1(a) + \sigma^2)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_3^2} + 2(A_0(a) + iA_1(a))\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial x_3} + \\ &+ 2i\left(A_0(a) + iA_1(a) + \frac{1}{2}R_0\right)\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + [2i(A_0(a) + iA_1(a)) - \sigma^2 z^0 - \Delta R_0 \theta_{\Delta} \pi^{-1} + R_0]\frac{\partial \xi}{\partial x_3} + \\ &+ [-(A_0(a) + iA_1(a))(z^0 + \theta_{\omega} - \Omega_0)^2 - \sigma^2 z_0^2 + iR_0(\theta_{\omega} - \Omega_0 + z^0) - iR_0 \theta_{z^0}]\xi + b_0 \xi |\xi|^2. \end{aligned} \tag{52}$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_0(a) &= \left(2\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\right)^{-1} \left[\left(a^2\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\right)^{-1} - 1\right], \\ A_1(a) &= \left(a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right)\right)^{-1} \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

а через  $\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)$  обозначена функция

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3) &= \xi(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3) \exp(-iR_0 c^{-1} \theta_{z^0} \tau), \\ b_0 &= 3b_1 - ib_2 \omega_0 - b_3 \omega_0^2 + 3i\omega_0^3 b_4. \end{aligned}$$

Относительно аргументов  $x_1, \tilde{x}_2$  и  $x_3$  выполнены условия периодичности ( $\tilde{x} = x - R_0\tau$ )

$$\tilde{\xi}(\tau, x_1 + c, \tilde{x}_2, x_3) \equiv \tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3), \tag{53}$$

$$\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2 + 2\pi, x_3) \equiv \tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3), \tag{54}$$

$$\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3 + \Delta) \equiv \tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3). \tag{55}$$

Отметим, что переход от аргумента  $x_2$  к аргументу  $\tilde{x}_2$  и от функции  $\xi$  к функции  $\tilde{\xi}$  позволил исключить из (52) выражения  $-R_0 \partial \xi / \partial x_2$  и  $iR_0 \theta_{z^0} \xi$  соответственно.

Для того, чтобы сформулировать итоговый результат, введем обозначения. Фиксируем произвольно  $\theta_0 \in [0, 2\pi c^{-1})$  и пусть последовательность  $\varepsilon_s = \varepsilon_s(\theta_0)$  определяется из условия  $\varepsilon_s(\theta_0) = \theta_0, s = 1, 2, \dots$ . Обозначим через  $\Gamma(\theta_0)$  все предельные точки из промежутка  $[0, 1]$  последовательности  $\theta_{\Delta}(\varepsilon_s(\theta_0))$ . Через  $\theta_{\Delta}^0$  обозначим произвольный элемент из  $\Gamma(\theta_0)$  и пусть последовательность  $\varepsilon_{s_{\Gamma}}$  такова, что

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \theta_{\Delta}(s_{\Gamma}) = \theta_{\Delta}^0.$$

Заметим, что возможна ситуация, когда множество  $\Gamma$  совпадает с отрезком  $[0, 1]$ , а возможен случай, когда это множество состоит из одного элемента.

**Теорема 2.4.** Пусть выполнены условия (23), (28), (34). Фиксируем произвольно значение  $\Delta$  и  $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ , и  $\theta_{\Delta}^0 \in \Gamma$ . Пусть  $\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3)$  – ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty, x_1 \in [0, 2\pi], \tilde{x}_2 \in [0, c], x_3 \in [0, \Delta]$  решение краевой задачи (52), (53)–(55). Тогда функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\tilde{\xi}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3) \exp(-ic^{-1} R_0 \theta_{z^0} \tau) E(t, x) + \bar{c}c) + \varepsilon^3(u_{31}(\tau, x_1, \tilde{x}_2, x_3) E^3(t, x) + \bar{c}c)$$

при  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $x_1 = (1 + \varepsilon c^{-1} R_0)t$ ,  $\tilde{x}_2 = x + \varepsilon c^{-1} t$ ,  $x_3 = (2\pi(\Delta\varepsilon)^{-1} + \theta_\Delta)(x + \varepsilon(1 + \varepsilon c^{-1} R_0)2\pi\Delta^{-1}t)$ , удовлетворяет на последовательности  $\varepsilon = \varepsilon_{\sigma^r}$  краевой задаче (15), (16) с точностью до  $o(\varepsilon_{\sigma^r}^3)$ .

Таким образом, краевая задача (52), (53)–(55) является квазинормальной формой для исходной краевой задачи (15), (16). Отметим, что в явном виде зависимость от аргумента  $\tilde{x}_2$  в (52) не присутствует. Относительно аргументов  $x_1$  и  $x_3$  выполнены условия параболичности, поскольку  $A_0(a) > 0$  при  $0 < a^2 < 2$  ( $A_0(\sqrt{2}) = 0$ ). Решения краевой задачи в двумерной пространственной области могут быть существенно сложнее. Поэтому приходим к выводу о том, что уменьшение параметра  $\sigma$  в (9) влечет за собой усложнение динамики. Кроме этого, присутствие в (52) двух параметров  $\theta_\omega(\varepsilon)$  и  $\theta_\Delta(\varepsilon)$  говорит о повышенной чувствительности динамических свойств даже при малых изменениях параметра  $\varepsilon$  (см., например, [44]).

И еще одно важное наблюдение. В краевой задаче параметр  $\Delta$ , определяющий период по аргументу  $x_3$ , является произвольным. При всех его значениях квазинормальная форма (52), (53)–(55) определяет главные асимптотики решений исходной задачи (15), (16). Поэтому можно говорить о мультистабильности в рассматриваемой ситуации.

### 3. ЦЕПОЧКИ С ДВУСТОРОННЕЙ СВЯЗЬЮ

В этом разделе предполагаем, что основной вклад во взаимодействие элементов цепочки определяется, согласно (8), связью с ближайшими соседними элементами слева и справа. В терминах функции  $F(s, \varepsilon)$  тогда имеем

$$F(s, \varepsilon) = \frac{1}{2}(F_+(s, \varepsilon) + F_-(s, \varepsilon)).$$

В характеристическом уравнении (18) имеем равенство

$$g(z) = \cos z. \quad (56)$$

Рассмотрим отдельно случай, когда параметр  $\sigma$  в (18) фиксирован и выполнено условие (22). Случай, когда параметр  $\sigma$  является асимптотически малым, исследуется в п. 3.3.

#### 3.1. Случай $a^2 > 2$

Пусть выполнено неравенство  $a^2 > 2$ . В этой ситуации имеем  $z_0 = 0$  и  $\gamma(z_0) = \gamma_0 = 1$ . Критический в задаче об устойчивости случай определяется соотношениями

$$d_0 = p_0 \quad \text{при} \quad d_0 > 0 \quad \text{и} \quad d_0 = -p_0 \quad \text{при} \quad d_0 < 0.$$

Достаточно ограничиться рассмотрением одного из этих случаев. Ниже считаем, что  $d_0 > 0$ , а значит,

$$d_0 = p_0 = 1.$$

Пусть, как и ранее, для параметра  $d$  в (18) выполнено равенство (25). Асимптотика корней (18) приведена в лемме 1.1.

Совокупность решений, отвечающих  $\lambda_{kn}^+(\varepsilon)$  и  $\lambda_{kn}^-(\varepsilon)$ , можно представить в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^+ \exp(2\pi c^{-1} n i x_1 + i k x_2 + (\lambda_{2kn}^+ + O(\varepsilon))\tau) = \xi^+(\tau, x_1, x_2),$$

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k, n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^- \exp(\pi(2n+1)c^{-1} i x_1 + i k x_2 + (\lambda_{2kn}^- + O(\varepsilon))\tau) = \xi^-(\tau, x_1, x_2).$$

Здесь  $\tau = \varepsilon^2 t$ ,  $x_1 = (1 - \varepsilon c^{-1} a)t$ ,  $x_2 = x$ . Тогда решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \xi^+(\tau, x_1, x_2) + \varepsilon^3 u_3(\tau, x_1, x_2) + \dots$$

или соответственно

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \xi^-(\tau, x_1, x_2) + \varepsilon^3 u_3(\tau, x_1, x_2) + \dots$$

Подставляя это выражение в (15) и собирая коэффициенты при  $\varepsilon^3$ , приходим к уравнению относительно  $\xi^+$  или  $\xi^-$ :

$$c \frac{\partial \xi^+}{\partial \tau} = \left( \frac{a^2}{2} - 1 \right) \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x_1^2} + \left( \frac{1}{2} + \sigma^2 \right) \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x_2^2} - c^{-2} a^2 \frac{\partial \xi^+}{\partial x_1} + d_1 \xi - b_1 (\xi^+)^3, \quad (57)$$

$$c \frac{\partial \xi^-}{\partial \tau} = \left( \frac{a^2}{2} - 1 \right) \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x_1^2} + \left( \frac{1}{2} + \sigma^2 \right) \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x_2^2} - c^{-2} a^2 \frac{\partial \xi^-}{\partial x_1} + d_1 \xi - b_1 (\xi^-)^3 \quad (58)$$

с краевыми условиями

$$\xi^+(\tau, x_1 + c, x_2) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x_2) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x_2 + 2\pi), \quad (59)$$

$$-\xi^-(\tau, x_1 + c, x_2) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x_2) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x_2 + 2\pi). \quad (60)$$

В итоге получаем следующее утверждение.

**Теорема 3.1.** Пусть  $a^2 > 2$  и выполнено условие (22). Пусть  $\xi^+(\tau, x_1, x_2)$  ( $\xi^-(\tau, x_1, x_2)$ ) – ограниченные при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x_1 \in [0, c]$ ,  $x_2 \in [0, 2\pi]$  решения краевой задачи (57), (59) ((58), (60)). Тогда функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon (\xi^+(\tau, x_1, x_2) + \xi^-(\tau, x_1, x_2))$$

удовлетворяет краевой задаче (15), (16) с точностью до  $o(\varepsilon^3)$ .

Таким образом, при условиях (22) и  $a^2 > 2$  краевая задача (57)–(60) является квазинормальной формой для (15), (16).

### 3.2. Квазинормальная форма в случае $0 < a^2 < 2$

Пусть

$$0 < a^2 < 2. \quad (61)$$

Сначала отметим, что из условия (22) следует

$$z_0 = 0.$$

Напомним, что

$$\omega_0 = \left( 1 - \frac{a^2}{2} \right)^{1/2}, \quad p_0 = \frac{a^2}{2} \left( 4 - \frac{a^2}{2} \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad d_0 = p_0.$$

Важную роль в процессе применения алгоритма построения квазинормальной формы играет асимптотическое поведение корней характеристического уравнения (18), которое приведено в лемме 2.

**Лемма 3.1.** Пусть выполнены условия (22), (56), (61) и  $d_0 = p_0$  ( $d_0 = -p_0$ ). Тогда для тех корней  $\lambda_{kn}^+(\varepsilon)$  и  $\bar{\lambda}_{kn}^+(\varepsilon)$  ( $\lambda_{kn}^-(\varepsilon)$ ,  $\bar{\lambda}_{kn}^-(\varepsilon)$ )  $k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , выполнены асимптотические равенства

$$\lambda_{kn}^+(\varepsilon) = i \frac{\Omega_0}{\varepsilon} + \theta_\omega - c^{-1} \Omega_0 + 2\pi n c^{-1} + \varepsilon \lambda_{1kn}^+ + \varepsilon^2 \lambda_{2kn}^+ + \dots,$$

$$\lambda_{kn}^-(\varepsilon) = i \frac{\Omega_0}{\varepsilon} + \theta_\omega - c^{-1} \Omega_0 + \pi(2n+1)c^{-1} + \varepsilon \lambda_{1kn}^- + \varepsilon^2 \lambda_{2kn}^- + \dots,$$

где

$$\lambda_{1kn}^+ = -i R_0 c^{-1} (2\pi n c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1} \Omega_0), \quad \lambda_{1kn}^- = -i R_0 c^{-1} (\pi(2n+1)c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1} \Omega_0),$$

$$R_0 = (p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}(2i\omega_0 + a) = \frac{2}{a},$$

$$\lambda_{2kn}^+ = -\Delta(2\pi n c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)^2 - ic^{-2}\left(\frac{2}{a}\right)^2 (2\pi n c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) - \left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right)c^{-1}k^2 + c^{-1}\frac{d_1}{p_0},$$

$$\lambda_{2kn}^- = -\Delta(\pi(2n + 1)c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)^2 - ic^{-2}\left(\frac{2}{a}\right)^2 (\pi(2n + 1)c^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) - \left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right)c^{-1}k^2 + c^{-1}\frac{d_1}{p_0},$$

$$\Delta = 4[a^2(4 - a^2)]^{-1}(2 - a^2) + 4i[a(4 - a^2)]^{-1}\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}.$$

Совокупность решений линейной краевой задачи (17), (16) в рассматриваемом случае, отвечающих корням  $\lambda_{kn}^+(\epsilon)$  ( $\lambda_{kn}^-(\epsilon)$ ), можно представить в виде

$$u(t, x, \epsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^+ \exp(ikx + \lambda_{kn}^+(\epsilon)t) = E(t) \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^+(\tau) \exp(ikx + 2\pi n i c^{-1} x_1) = E(t) \xi_{kn}^+(\tau, x_1, x),$$

$$(u(t, x, \epsilon) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^- \exp(ikx + \lambda_{kn}^-(\epsilon)t) =$$

$$= E(t) \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \xi_{kn}^-(\tau) \exp(ikx + \pi(2n + 1)c^{-1}ix_1) = E(t) \xi_{kn}^-(\tau, x_1, x)),$$

где

$$E(t) = \exp\left[i\left(\frac{\omega_0}{\epsilon} + (\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)(1 - \epsilon c^{-1}R_0)\right)t\right], \quad x_1 = (1 - \epsilon c^{-1}R_0)t,$$

$$\xi_{kn}^\pm(\tau) = \xi_{kn}^\pm \exp((\lambda_{kn}^\pm + O(\epsilon))\tau), \quad \tau = \epsilon^2 t.$$

Тогда решения нелинейной краевой задачи (15), (16) ищем соответственно в виде

$$u(t, x, \epsilon) = \epsilon[E(t)\xi^+(\tau, x_1, x) + \bar{c}c] + \epsilon^3[E(t)u_{31}^+(\tau, x_1, x) + \bar{c}c + E^3(t)u_{32}^+(\tau, x_1, x) + \bar{c}c] + \dots, \tag{62}$$

$$u(t, x, \epsilon) = \epsilon[E(t)\xi^-(\tau, x_1, x) + \bar{c}c] + \epsilon^3[E(t)u_{31}^-(\tau, x_1, x) + \bar{c}c + E^3(t)u_{32}^-(\tau, x_1, x) + \bar{c}c] + \dots \tag{63}$$

Здесь вещественные комплексные функции  $\xi^\pm(\tau, x_1, x)$  являются  $2\pi$ -периодическими по  $x$ , а по  $x_1$  функция  $\xi^+(\tau, x_1, x)$   $c$ -периодическая, а функция  $\xi^-(\tau, x_1, x)$   $c$ -антипериодическая:

$$\xi^+(\tau, x_1 + c, x) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x + 2\pi),$$

$$-\xi^-(\tau, x_1 + c, x) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x + 2\pi).$$

Подставляя (62) в (15) и совершая стандартные действия, получаем уравнения для  $u_{31}^\pm$  и  $u_{32}^\pm$ . Функции  $u_{32}^\pm$  просто определяются:

$$u_{32}^\pm = -(1 - 9\omega_0^2 + 3i\omega_0 a)^{-1}(b_1 + 3i\omega_0 b_2 - 9\omega_0^2 b_3 - 27i\omega_0^3 b_4)(\xi^\pm)^3.$$

Условие разрешимости уравнения относительно  $u_{31}^\pm$  заключается в выполнении равенства

$$cp_0 \frac{\partial \xi^\pm}{\partial \tau} = \Delta \frac{\partial^2 \xi^\pm}{\partial x_1^2} + i \left[ 2(\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) + ic^{-2}\left(\frac{2}{a}\right)^2 \right] \frac{\partial \xi^\pm}{\partial x_1} + \left(\frac{1}{2} + \sigma^2\right) \frac{\partial^2 \xi^\pm}{\partial x^2} +$$

$$+ \left[ \frac{d_1}{p_0} - (\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0)^2 - i\left(\frac{2}{a}\right)^2 (\theta_\omega - c^{-1}\Omega_0) \right] \xi^\pm + 3\beta_1 \xi^\pm |\xi^\pm|^2, \tag{64}$$

$$\beta_1 = (b_1 + i\omega_0 b_2 - \omega_0^2 b_3 - i\omega_0^3 b_4)$$

и выполнено соответственно условие

$$\begin{aligned} \xi^+(\tau, x_1 + c, x) &\equiv \xi^+(\tau, x_1, x) \equiv \xi^+(\tau, x_1, x + 2\pi), \\ -\xi^-(\tau, x_1 + c, x) &\equiv \xi^-(\tau, x_1, x) \equiv \xi^-(\tau, x_1, x + 2\pi). \end{aligned} \tag{65}$$

Сформулируем итоговый результат.

**Теорема 3.2.** Пусть выполнены условия (22), (56) и (61). Пусть  $\theta_\omega^0 \in [0, 2\pi)$  – произвольно фиксировано и  $\varepsilon_n(\theta_\omega^0)$  такая последовательность, что  $\varepsilon_n(\theta_\omega^0) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и  $\theta_\omega(\varepsilon_n(\theta_\omega^0)) = \theta_\omega^0$ . Пусть  $\xi(\tau, x_1, x)$  – ограниченное при  $\tau \rightarrow \infty, x_1 \in [0, c], x \in [0, 2\pi]$  решение краевой задачи (64), (65) при  $\theta_\omega = \theta_\omega^0$ . Тогда при  $\varepsilon = \varepsilon_n(\theta_\omega^0), \tau = \varepsilon^2 t, x_1 = (1 - \varepsilon c^{-1} R_0)t$  функция

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(\xi(\tau, x_1, x)E(t) + \bar{c}c) + \varepsilon^3(u_{32}(\tau, x_1, x)E^3(t) + \bar{c}c)$$

удовлетворяет краевой задаче (15), (16) с точностью до  $o(\varepsilon^3)$ .

### 3.3. Квазинормальная форма для малых значений параметра $\sigma$

Предположим, что параметр  $\sigma$  является достаточно малым, т.е. выполнено равенство (23)

$$\sigma = \varepsilon\sigma_1.$$

Для функции  $g(z)$  в этом случае имеем равенство

$$g(z) = \cos z \exp(-\varepsilon^2 \sigma_1^2 z^2).$$

Наибольшее значение  $|g(z)|$  равно 1, а все величины  $z_m$ , на которых это значение достигается с точностью до  $O(\varepsilon^2)$ , определяются неоднозначно:

$$z_m = \pi m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Через  $\theta_\pi(\varepsilon) \in [0, 1)$  обозначим такое выражение, которое дополняет до целого величину  $\pi\varepsilon^{-1}$ .

Рассмотрим решения Эйлера  $u_{mkn}(t, x, \varepsilon)$  линейной краевой задачи (17), (16), у которых моды принимают значения  $(\pi\varepsilon^{-1} + \theta_\pi)m + k; m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ :

$$u_{mkn}(t, x, \varepsilon) = \exp[i((\pi\varepsilon^{-1} + \theta_\pi)m + k)x + \lambda_{mkn}(\varepsilon)t].$$

Здесь  $\lambda_{mkn}(\varepsilon)$  – все те корни характеристического уравнения (18), вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Сформулируем результат об асимптотике корней  $\lambda_{mkn}(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая, когда  $d_0 > 0$  и выполнены неравенства  $0 < a^2 < 2$ . Напомним, что в этой ситуации

$$d_0 = p_0, \quad p_0 = \frac{a^2}{2}(4 - a^2)^{1/2}, \quad \omega_0 = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^{1/2}.$$

**Лемма 3.2.** Пусть выполнены условия (23), (56) и (61) и  $d_0 = p_0$ . Тогда уравнение (18) имеет совокупность корней  $\lambda_{mkn}^\pm(\varepsilon), \bar{\lambda}_{mkn}^\pm(\varepsilon)$ , вещественные части которых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и выполнены асимптотические равенства

$$\lambda_{mkn}^\pm(\varepsilon) = i[\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_\omega - c^{-1}\Omega_0 + 2\pi nc^{-1}] + \varepsilon\lambda_{1mkn}^\pm + \varepsilon^2\lambda_{2mkn}^\pm + \dots,$$

где

$$\lambda_{1mkn}^\pm = -\frac{2i}{a}c^{-1}K, \quad K = \theta_\omega - \Omega_0c^{-1} + 2\pi nc^{-1},$$

$$\begin{aligned} \lambda_{2mkn}^+ &= \frac{1}{2}(\lambda_{1mkn}^+)^2 - c^{-1}(2i\omega_0 + a)(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}\lambda_{1mkn}^+ + (p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}c^{-1}K^2 + \\ &+ d_1p_0^{-1}c^{-1} - \sigma_1^2(2\pi m)^2c^{-1} - \frac{1}{2}(2\pi m\theta_\pi + k)^2c^{-1}, \end{aligned}$$

$$\lambda_{2mkn}^- = \frac{1}{2}(\lambda_{1mkn}^-)^2 - c^{-1}(2i\omega_0 + a)(p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}\lambda_{1mkn}^- + (p_0 \exp(i\Omega_0))^{-1}c^{-1}K^2 + \\ + d_1 p_0^{-1} c^{-1} - \sigma_1^2 (\pi(2m-1))^2 c^{-1} - \frac{1}{2}(\pi(2m-1)\theta_\pi + k)^2 c^{-1}.$$

Совокупность решений  $u_{mkn}(\varepsilon)$  линейной краевой задачи (17), (16), отвечающих корням  $\lambda_{mkn}^\pm(\varepsilon)$ , можно записать в виде

$$u_{mkn}(t, x, \varepsilon) = \sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty} \left( \xi_{mkn}^+ \exp\left(i\left[2\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \theta_\pi\right)m + k\right]x + \left[i\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + 4\pi n c^{-1} - \frac{2\varepsilon}{a}(\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + 4\pi n c^{-1}) + \varepsilon^2(\lambda_{2mkn}^+ + O(\varepsilon))\right)t\right]\right) + \xi_{mkn}^- \exp\left(i\left[\left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \theta_\pi\right)(2m-1) + k\right]x + \left[i\left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + \pi(2n+1)c^{-1} - \frac{2\varepsilon}{a}(\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0 + \pi(2n+1)c^{-1}) + \varepsilon^2(\lambda_{2mkn}^- + O(\varepsilon))\right)t\right]\right) \right) = E(t, \varepsilon) \sum_{m,k,n=-\infty}^{\infty} \left( \xi_{mkn}^+(\tau) \exp(ikx + 2inc^{-1}x_1 + 2imx_2) + \xi_{mkn}^-(\tau) \exp(ikx + i(2n+1)c^{-1}x_1 + i(2m-1)x_2) \right) = E(t, \varepsilon)(\xi^+(\tau, x, x_1, x_2) + \xi^-(\tau, x, x_1, x_2)).$$

Здесь

$$E(t, \varepsilon) = \exp\left(i\left[\frac{\omega_0}{\varepsilon} + (\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2ac}\right)\right]t\right), \quad \tau = \varepsilon^2 t, \\ x_1 = \left(1 - \frac{2\varepsilon}{ac}\right)t, \quad x_2 = \left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \theta_\pi\right)x - \frac{2\varepsilon}{ac}t, \\ \xi_{mkn}^\pm(\tau, x, x_1, x_2) = \xi_{mkn}^\pm \exp(\lambda_{2mkn}^\pm + O(\varepsilon))\tau.$$

Обратим внимание, что для функций  $\xi^\pm(\tau, x, x_1, x_2)$  выполнены условия

$$\xi^\pm(\tau, x + 2\pi, x_1, x_2) = \xi^\pm(\tau, x, x_1, x_2), \quad (66)$$

$$\xi^+(\tau, x, x_1 + 2\pi, x_2) \equiv \xi^+(\tau, x, x_1, x_2) \equiv \xi^+(\tau, x, x_1, x_2 + 2\pi), \quad (67)$$

$$-\xi^-(\tau, x, x_1 + \pi, x_2) \equiv \xi^-(\tau, x, x_1, x_2) \equiv -\xi^-(\tau, x, x_1, x_2 + \pi). \quad (68)$$

Решение нелинейной краевой задачи в рассматриваемом случае ищем в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(E(t, \varepsilon)(\xi^+(\tau, x, x_1, x_2) + \xi^-(\tau, x, x_1, x_2)) + \bar{c}c) + \varepsilon^3 u_3(t, x, x_1, x_2, \tau) + \dots, \quad (69)$$

где зависимость от  $t, x, x_1$  и  $x_2$  – периодическая. Подставляя (8) в (15) и производя стандартные действия, получаем уравнение для определения  $u_3$ . Условие разрешимости этого уравнения в указанном классе функций состоит в выполнении равенств

$$cp_0 \frac{\partial \xi^+}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x^2} + \frac{\Delta}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x_1^2} + \left[ \frac{\Delta}{4\pi^2} + \sigma_1^2 + \theta_\pi^2 \right] \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x_2^2} + \\ + 2 \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x \partial x_2} + \frac{\Delta}{2\pi^2} \frac{\partial^2 \xi^+}{\partial x_1 \partial x_2} + i \left[ 2(\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0) + i \left(\frac{2}{ac}\right)^2 \right] \frac{\partial \xi^+}{\partial x_1} + \\ + \left[ \frac{d_0}{p_0} - (\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0)^2 - i \left(\frac{2}{ac}\right)^2 (\theta_{\omega_0} - c^{-1}\Omega_0) \right] \xi^+ + 3\beta_1 \left[ (\xi^+)^2 \bar{\xi}^+ + 2\xi^+ |\xi^-|^2 + \bar{\xi}^+ (\xi^-)^2 \right], \quad (70)$$

$$\begin{aligned}
cp_0 \frac{\partial \xi^-}{\partial \tau} = & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x^2} + \frac{\Delta}{4\pi^2} \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x_1^2} + \left[ \frac{\Delta}{4\pi^2} + \sigma_1^2 + \theta_\pi^2 \right] \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x \partial x_2} + \frac{\Delta}{2\pi^2} \frac{\partial^2 \xi^-}{\partial x_1 \partial x_2} + \\
& + i \left[ 2(\theta_\omega - c^{-1} \Omega_0) + i \left( \frac{2}{ac} \right)^2 \right] \frac{\partial \xi^-}{\partial x_1} + \left[ \frac{d_0}{p_0} - (\theta_\omega - c^{-1} \Omega_0)^2 - i \left( \frac{2}{ac} \right)^2 (\theta_\omega - c^{-1} \Omega_0) \right] \xi^- + \\
& + 3\beta_1 \left[ \bar{\xi}^- (\xi^-)^2 + 2\xi^- |\xi^+|^2 + \bar{\xi}^- (\xi^+)^2 \right].
\end{aligned} \tag{71}$$

При выполнении соотношений (66)–(71) функция  $u_3$  просто находится в явном виде. Из-за громоздкости соответствующую формулу не приводим. Сформулируем итоговое утверждение.

**Теорема 3.3.** Пусть выполнены условия (23), (56), (61) и  $d_0 = p_0$ . Фиксируем произвольно значения  $\theta_\omega^0$  и  $\theta_\pi^0$ . Пусть последовательность  $\varepsilon_r \rightarrow 0$  такова, что  $\theta_\omega(\varepsilon_r) \rightarrow \theta_\omega^0$  и  $\theta_\pi(\varepsilon_r) \rightarrow \theta_\pi^0$ . Пусть  $\xi^\pm(\tau, x, x_1, x_2)$  – ограниченные при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $x_1 \in [0, 2\pi]$ ,  $x_2 \in [0, 2\pi]$  решения краевой задачи (66)–(71) для  $\theta_\omega = \theta_\omega^0$ ,  $\theta_\pi = \theta_\pi^0$ . Тогда при  $\varepsilon = \varepsilon_r$  функция

$$\begin{aligned}
u(t, x, \varepsilon) = & \varepsilon((\xi^+(\tau, x, x_1, x_2) + \xi^-(\tau, x, x_1, x_2))E(t, \varepsilon) + \bar{c}c) + \varepsilon^3 u_3, \\
\tau = \varepsilon^2 t, \quad & x_1 = \left(1 - \frac{2\varepsilon}{ac}\right)t, \quad x_2 = \left(\frac{\pi}{\varepsilon} + \theta_\pi^0\right)x - \frac{2\varepsilon}{ac}t,
\end{aligned}$$

удовлетворяет краевой задаче (15), (16) с точностью до  $o(\varepsilon^3)$ .

Это утверждение говорит о том, что краевая задача (66)–(71) является квазинормальной формой для исходной краевой задачи в рассматриваемом случае.

Отметим, что эта квазинормальная форма является системой параболического типа.

## ВЫВОДЫ

Рассмотрен вопрос о локальной динамике интегродифференциального уравнения Ван дер Поля, возникающего в задаче о поведении решений цепочек с односторонними и двусторонними запаздывающими связями. Большое запаздывание позволило эффективно находить параметры для реализации критических случаев и исследовать эти случаи. Показано, что исходная задача при этом сводится к квазинормальной форме – нелинейной краевой задаче Гинзбурга–Ландау параболического типа. Более того, установлено, что квазинормальная форма содержит не одну, а две независимые пространственные переменные [43]. Это говорит о богатой динамике изучаемых процессов. Кроме этого показано, что полученные квазинормальные формы в наиболее интересной области параметров обладают большой чувствительностью к изменениям малого параметра задачи – к величине, обратной большому запаздыванию. Это следует из того, что в квазинормальной форме присутствуют быстро меняющиеся функции типа  $\theta(\varepsilon)$ . При  $\varepsilon \rightarrow 0$  может происходить процесс прямых и обратных бифуркаций [44].

Важную роль играет параметр  $\sigma$ , фигурирующий в функциях  $F_\pm(s, \varepsilon)$ . При уменьшении этого параметра может наблюдаться существенное усложнение динамики, поскольку соответствующие квазинормальные формы содержат уже не две, а три пространственные переменные. В случае  $a^2 > 2$  структура решений проще по сравнению со случаем  $0 < a^2 < 2$ . В последнем случае квазинормальные формы являются комплексными, а колебания их решений – быстро осциллирующими по пространственной и временной переменным.

Важно подчеркнуть, что по решениям (нелокальным) квазинормальные формы определяют главные члены асимптотики решений исходного уравнения.

Отличия квазинормальных форм для односторонних и двусторонних связей существенные. Различается не только формульная часть, но и динамические свойства решений. Особенно ярко это проявляется в случае  $\sigma \ll 1$ . При односторонних связях квазинормальные формы представляют собой однопараметрическое семейство параболических краевых задач с двумя пространственными переменными. В случае двусторонних связей показано, что квазинормальной формой являются система 1 или 2 параболических уравнений с тремя пространственными переменными. Во многих случаях решения содержат быстро осциллирующие не только по времени, но и по пространственной переменной составляющие.

Выбор уравнения с кубической нелинейностью в качестве базового не принципиален. Отсутствие квадратичных нелинейных слагаемых удобно, поскольку немного упрощается формульная часть. Отметим, что отношение двух больших параметров  $N$  и  $T$  определяется величиной  $c$ :  $N/T = 2\pi/c$ . Параметр  $c$  входит во все квазинормальные формы, поэтому во многом определяет их динамику.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuznetsov A.P., Kuznetsov S.P., Sataev I.R., Turukina L.V.* About Landau–Hopf scenario in a system of coupled self-oscillators // *Physics Letters A*. 2013. V. 377. № 45–48. P. 3291–3295.
2. *Osipov G.V., Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators // *Physical Review E*. 1997. V. 55. № 3. P. 2353–22361.
3. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, 2001. P. 411. (Cambridge Nonlinear Science Series; 12).
4. *Dodla R., Sen A., Johnston G.L.* Phase-locked patterns and amplitude death in a ring of delay-coupled limit cycle oscillators // *Physical Review E*. 2004/07/13. American Physical Society, 2004. V. 69. № 5. P. 12.
5. *Williams C.R.S., Sorrentino F., Murphy T.E., Roy R.* Synchronization states and multistability in a ring of periodic oscillators: Experimentally variable coupling delays // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2013. V. 23. № 4. P. 43117.
6. *Rao R., Lin Z., Ai X., Wu J.* Synchronization of Epidemic Systems with Neumann Boundary Value under Delayed Impulse // *Mathematics*, 2022. V. 10. P. 2064.  
<https://doi.org/10.3390/math10122064>
7. *Van Der Sande G. et al.* Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators // *Physical Review E*. 2008/07/23. APS, 2008. V. 77. № 5. P. 55202.
8. *Клиньшов В.В., Некоркин В.И.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями // *Успехи физических наук*. 2013. Т. 183. № 12. С. 1323–1336.
9. *Heinrich G., Ludwig M., Qian J., Kubala B., Marquardt F.* Collective dynamics in optomechanical arrays // *Phys. Rev. Lett.*, 2011. V. 107. № 4, 043603, 4 pp.
10. *Zhang M., Wiederhecker G.S., Manipatruni S., Barnard A., McEuen P., Lipson M.* Synchronization of micromechanical oscillators using light // *Phys. Rev. Lett.*, 2012. V. 109. № 23, 233906, 5 pp.
11. *Lee T.E., Sadehpour H.R.* Quantum synchronization of quantum van der Pol oscillators with trapped ions // *Phys. Rev. Lett.*, 2013. V. 111. № 23, 234101, 5 pp.
12. *Yanchuk S., Wolfrum M.* Instabilities of stationary states in lasers with longdelay optical feedback // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2012. V. 9. № 2. P. 519–535.
13. *Grigorieva E.V., Haken H., Kashchenko S.A.* Complexity near equilibrium in model of lasers with delayed optoelectronic feedback // *Proceedings: 1998 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA'98, Crans-Montana, Switzerland, Sept. 14–17, 1998)*. NOLTA Society. 1998. P. 495–498.
14. *Kashchenko S.A.* Quasinormal Forms for Chains of Coupled Logistic Equations with Delay // *Mathematics*. 2022. V. 10. № 15. P. 2648.
15. *Кащенко С.А.* Динамика цепочки логистических уравнений с запаздыванием и с антидиффузионной связью // *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2022. Т. 502. № 1. С. 23–27.
16. *Thompson J.M.T., Stewart H.B.* Nonlinear Dynamics and Chaos. 2nd ed. Wiley, 2002. P. 464.
17. *Kashchenko S.A.* Dynamics of advectively coupled Van der Pol equations chain // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2021. V. 31. № 3. P. 033147.
18. *Kanter I., Zigzag M., Englert A., Geissler F., Kinzel W.* Synchronization of unidirectional time delay chaotic networks and the greatest common divisor // *Europhysics Letters*. 2011. V. 93. № 6. P. 60003.
19. *Rosin D.P., Rontani D., Gauthier D.J., Schöll E.* Control of synchronization patterns in neural-like Boolean networks // *Physical Review Letters*. American Physical Society, 2013. V. 110. № 10. P. 104102.
20. *Yanchuk S., Perlikowski P., Popovych O.V., Tass P.A.* Variability of spatiotemporal patterns in non-homogeneous rings of spiking neurons // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011. V. 21. № P. 47511.
21. *Klinshov V., Nekorkin V.* Synchronization in networks of pulse oscillators with time-delay coupling // *Cybernetics and Physics*. 2012. V. 1. № 2. P. 106–112.
22. *Stankovski T., Pereira T., McClintock P.V.E., Stefanovska A.* Coupling functions: Universal insights into dynamical interaction mechanisms // *Rev. Mod. Phys.* 2017. V. 89. № P. 045001.
23. *Klinshov V., Shchapin D., Yanchuk S. et al.* Embedding the dynamics of a single delay system into a feed-forward ring // *Physical Review E*. 2017. V. 96. № P. 042217.

24. *Караваяев А.С., Ишбулатов Ю.М., Киселев А.Р., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Миронов С.А., Шварц В.А., Гриднев В.И., Безручко Б.П.* Модель сердечно-сосудистой системы человека с автономным контуром регуляции среднего артериального давления // Физиология человека. 2017. Т. 43. № 1. С. 70–80.
25. *Kashchenko A.A.* Dependence of the dynamics of a model of coupled oscillators on the number of oscillators // Doklady Mathematics. Moscow : Pleiades Publishing, 2021. V. 104. № 3. P. 355–359.
26. *Kashchenko A.A.* Relaxation modes of a system of diffusion coupled oscillators with delay // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2021. V. 93. P. 105488.
27. *Kashchenko S.A.* Corporate Dynamics in Chains of Coupled Logistic Equations with Delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. V. 61. № 7. P. 1063–1074.
28. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Dynamics of the Kuramoto equation with spatially distributed control // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. May. V. 34. P. 123–129.
29. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2002. V. 5. № P. 380–385.
30. *Kashchenko S.A.* Application of the normalization method to the study of the dynamics of a differential-difference equation with a small factor multiplying the derivative // Differentsialnye Uravneniya. 1989. V. 25. № 8. P. 1448–1451.
31. *Kashchenko S.A.* Van der Pol Equation with a Large Feedback Delay // Mathematics. 2023. V. 11. № 6. P. 1301.
32. *Hale J.K.* Theory of Functional Differential Equations, 2nd ed.; New York: Springer, 1977.
33. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations; Wiley: New York, NY, USA, 1965.
34. *Marsden J.E., McCracken M.F.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. New York : Springer, 1976. 421 p. (Applied Mathematical Sciences; 19).
35. *Kashchenko S.A.* On quasinormal forms for parabolic equations with small diffusion // Soviet Mathematics. Doklady. 1988. V. 37. № 2. P. 510–513.
36. *Kashchenko S.A.* Normalization in the systems with small diffusion // International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering. 1996. V. 6. № 6. P. 1093–1109.
37. *Kashchenko S.A.* The Ginzburg–Landau equation as a normal form for a second-order difference-differential equation with a large delay // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1998. V. 38. № 3. P. 443–451.
38. *Григорьева Е.В., Кащенко С.А.* Локальная динамика модели цепочки лазеров с оптоэлектронной запаздывающей однонаправленной связью // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30. № 2. С. 189–207.
39. *Kashchenko S.A.* Infinite Turing Bifurcations in Chains of Van der Pol Systems // Mathematics. 2022. V. 10. № 20. P. 3769.
40. *Kashchenko S.A.* Bifurcations in spatially distributed chains of twodimensional systems of equations // Russian Mathematical Surveys. 2020. V. 76. № 6. P. 1153–1155.
41. *Kashchenko S.A.* Comparative dynamics of chains of coupled van der Pol equations and coupled systems of van der Pol equations // Theoretical and Mathematical Physics. 2021. V. 207. № 2. P. 640–654.
42. *Клиньшов В.В.* Коллективная динамика сетей активных элементов с импульсными связями: Обзор // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2020. Т. 28. № 5. С. 465–490.
43. *Akhromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskii G.G., Samarskii A.A.* Nonstationary structures and diffusion chaos. Moscow : Nauka, 1992. 544 p.
44. *Kashchenko I.S., Kashchenko S.A.* Infinite Process of Forward and Backward Bifurcations in the Logistic Equation with Two Delays // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2019. V. 22. № P. 407–412.

УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 519.634

Посвящается 70-летию Игоря Борисовича Петрова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ  
И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ  
БЕРНУЛЛИ–ЭЙЛЕРА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ  
МЕТОДОМ ПЕАНО<sup>1)</sup>

© 2023 г. Д. Д. Захаров<sup>1,\*</sup>, И. С. Никитин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 123056 Москва, 2-я Брестская ул., 19/18, Институт автоматизации проектирования РАН, Россия

\*e-mail: dmitrii.zakharov@gmail.com

Поступила в редакцию 27.05.2023 г.  
Переработанный вариант 27.05.2023 г.  
Принята к публикации 26.06.2023 г.

Рассматривается задача определения собственных частот и форм поперечных колебаний для уравнения Бернулли–Эйлера с переменными коэффициентами. Такого рода задачи возникают как для усложненной геометрии колеблющегося тела, так и в случае функционально-градиентных материалов или накопления повреждаемости в классическом упругом материале. С использованием метода разложения в ряды Пеано построены решения краевых задач. При широких предположениях показана равномерная сходимость рядов Пеано и получены оценки остаточных членов. Приведены примеры численной реализации предложенной процедуры для изгибных колебаний стержня с определенными параметрами переменного поперечного сечения (геометрической неоднородности) и распределения модуля упругости (физической неоднородности). Численные примеры ориентированы на оценку геометрических и упругих свойств образцов при экспериментальном исследовании усталостной прочности сплавов при высокочастотных циклических испытаниях, основанных на общем принципе точечного резонансного нагружения. Предложенный метод решения задач о резонансных колебаниях для уравнения Бернулли–Эйлера может быть использован при проектировании новых перспективных схем циклических испытаний и математическом моделировании процессов усталостного разрушения при высокочастотных резонансных вибрациях. Библ. 30. Фиг. 8.

**Ключевые слова:** поперечные колебания, уравнение Бернулли–Эйлера, переменное сечение, функционально-градиентный материал, ряды Пеано, спектр частот, собственные формы, высокочастотные циклические испытания.

DOI: 10.31857/S0044466923100198, EDN: MSUBZP

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача определения собственных частот и собственных форм поперечных колебаний для уравнения Бернулли–Эйлера с переменными коэффициентами исследовалась многими авторами (см. [1–10]). Аналогичные по постановке задачи решались для случая резонансных продольных (см. [11–15]) и крутильных колебаний (см. [16, 17]) неоднородных стержней переменного сечения.

Основные приложения этих исследований связаны с определением поправок к собственным частотам и формам колебаний, обусловленных дефектами поверхности или наличием внутренних дефектов (трещин) (см. [1–7, 11–13, 16]), а также с решением обратных задач идентификации дефектов по измеренным значениям собственных частот колебаний различного типа (см. [8–10, 14, 15, 17]).

<sup>1)</sup> Работа выполнена в рамках Госзадания ИАП РАН.

В настоящее время сформировалась еще одна область приложений, связанная с проведением экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотном циклическом нагружении образцов на растяжение—сжатие, кручение или трехточечный изгиб (см. [18]). Пьезоэлектрические установки для проведения высокочастотных низкоамплитудных испытаний вплоть до разрушения образцов обладают общим принципом резонансного нагружения с частотой порядка 20 кГц. Этот неклассический режим усталостного разрушения с числом циклов нагружения более  $10^8$  называется сверхмногоциклового усталостью (СВМУ).

Для проектирования геометрии (размеров и форм) экспериментальных образцов, которые представляют собой стержни различного переменного сечения для циклических нагружений разного типа, необходимы решения соответствующих задач на собственные значения и формы колебаний. Кроме того, необходимо моделировать процесс развития микродефектов в образцах с ростом числа циклов нагружения. Континуальное описание этого процесса связано с введением распределенной функции повреждаемости и падением эффективных модулей упругости материала по мере ее роста до критических значений (см. [19]). В рамках такой модели циклической повреждаемости необходимо иметь эффективный метод расчета собственных частот и собственных форм колебаний образцов с заданной переменной формой поперечного сечения и одновременно физически неоднородных по модулям упругости с весьма широким диапазоном изменения параметров такой неоднородности.

Ранее в [11] подобная задача определения собственных частот и форм для случая продольных и крутильных колебаний решалась с использованием теории возмущений (см. [20]). Однако введение малого параметра для описания диапазонов изменения геометрии образца или его упругих свойств, а также связанное с этим предположение о достаточной плавности этих изменений, не всегда оправдано при исследовании процессов циклической повреждаемости, где возможны или даже ожидаемы достаточно резкие перепады эффективных модулей упругости в зонах с развитыми повреждениями экспериментальных образцов.

Поэтому для решения поставленной задачи определения собственных частот и собственных форм поперечных колебаний для уравнения Бернулли—Эйлера с переменными коэффициентами был выбран метод разложения в ряд Пеано (см. [21–24]), который не накладывает вышеупомянутых ограничений на свойства коэффициентов уравнения и допускает оценку погрешности решения за счет остаточных членов ряда.

Кроме того, применение данного подхода не ограничивается задачами о накоплении повреждаемости и деградации модуля упругости, а также может быть использовано для широкого класса функционально-градиентных материалов (см. [25]).

Метод может использоваться как для определения резонансных частот, так и форм колебаний при достаточно большом числе итераций (см., например, [25]). Современные пакеты компьютерной алгебры (Maple, Matematika) позволяют эффективно выполнять необходимые итерации интегрирования.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение поперечных колебаний Бернулли—Эйлера 4-го порядка общего вида (см. [26]):

$$\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left( E(X) J(X) \frac{\partial^2 w}{\partial X^2} \right) + P(X) S(X) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(X, t).$$

Уравнение описывает поперечные смещения  $w(X, t)$  при (изгибных) колебаниях стержня переменного сечения площади  $S(X)$  с неоднородным распределением плотности  $P(X)$ , приведенного момента инерции сечения  $J(X)$  и модуля Юнга  $E(X)$ . Предполагается, что поперечные сечения имеют центры симметрии, расположенные на общей горизонтальной оси стержня, вдоль которой отсчитывается длина. Стержень предполагается относительно тонким, т.е. отношение максимальной толщины к характерному поперечному размеру (длине волны) есть малый параметр порядка  $\sim 10^{-2}$  или менее.

Будем исследовать стационарные гармонические колебания с круговой частотой  $\omega$ :

$$w(X, t) = v(X) \exp(i\omega t).$$

Также будем рассматривать случай однородного уравнения (свободные колебания), для которого  $F(X,t) = 0$ .

Уравнение решается в диапазоне  $-L \leq X \leq L$ .

Граничные условия на свободных краях при  $X = \pm L$  имеют вид

$$M(X) \equiv E(X)J(X)\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} = 0,$$

$$Q(X) \equiv \frac{\partial}{\partial X}\left(E(X)J(X)\frac{\partial^2 w}{\partial X^2}\right) = 0,$$

где  $M(X)$  есть изгибающий момент,  $Q(X)$  – поперечное усилие в сечении стержня.

Введем безразмерные независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $u(x)$  и переменные коэффициенты уравнений:

$$v(X) = Lu(x), \quad x = X/L,$$

$$e(x) = E(X)/E_*, \quad j(x) = J(X)/J_*, \quad \rho(x) = P(X)/P_*, \quad s(x) = S(X)/S_*.$$

Тогда безразмерное уравнение колебаний для  $u(x)$  при  $-1 \leq x \leq 1$  примет вид

$$(\hat{c}^{-1}(x)u'')'' - \hat{i}(x)k^4u = 0, \quad (\dots)' \equiv \frac{d}{dx}(\dots),$$

где  $\hat{c}(x)$  – податливость:  $\hat{c}^{-1}(x) = e(x)j(x)$ ,  $\hat{i}(x)$  – инертность:  $\hat{i}(x) = \rho(x)s(x)$ , и частотный параметр  $k = \sqrt[4]{\omega^2 L^4 \frac{P_* S_*}{E_* J_*}}$ .

Исходное уравнение колебаний можно записать в виде системы уравнений 1-го порядка

$$u' = \phi,$$

$$\phi' = \hat{c}(x)m,$$

$$m' = q,$$

$$q' = \hat{i}(x)k^4u$$

или в матричном виде

$$Z' = A(x) \times Z, \quad Z = [u \ \phi \ m \ q]^T,$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{c}(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + k^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{i}(x) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Граничные условия при  $x = \pm 1$  примут вид  $m \equiv \hat{c}^{-1}u'' = 0, q \equiv m' = 0$ .

### 3. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ

#### 3.1. Представление в виде ряда Пеано

Проинтегрируем систему уравнений (1) на некотором отрезке  $[x_0, x]$ :

$$Z(x) = \int_{x_0}^x A(x_1) \times Z(x_1) dx_1 + Z_0, \quad Z_0 \equiv Z(x_0),$$

и будем искать решение системы в виде ряда Пеано [21–23], т.е.

$$Z(x) = \{A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + \dots\} \times Z_0 = \tilde{A}(x) \times Z_0, \tag{2}$$

где  $\tilde{A}(x) = A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + \dots$ ,  $A_0(x) = I$  есть единичная матрица и

$$A_n(x) = \int_{x_0}^x A(x_1) \times A_{n-1}(x_1) dx_1.$$

Полагая, например,  $x_0 = -1$  и  $x = 1$ , получаем

$$Z_1 = \tilde{A} \times Z_0, \quad Z_1 = [u \ \phi \ 0 \ 0]^T \Big|_{x=1}, \quad Z_0 = [u \ \phi \ 0 \ 0]^T \Big|_{x=-1}. \quad (3)$$

В таком виде матричное равенство (3) по сути становится аналогичным введению матриц-пропагаторов для краевых задач, широко используемых для расчета собственных чисел (частот и волновых чисел) в задачах распространения волн в слоистых упругих средах, пластинах и других структурах, в том числе, в теоретической сейсмологии (см. [27–30]).

Из соотношений (3) следует уравнение для собственных чисел  $k$ :

$$f(k) \equiv \det \begin{bmatrix} \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{42} \end{bmatrix} \Big|_{x=1} = 0. \quad (4)$$

Если система уравнений (1) допускает симметричное решение (четную функцию)  $u(x)$ , то это означает, что для симметричных функций  $\hat{c}(x)$  в начале координат будут выполнены следующие равенства (в силу нечетности функций  $\phi(x)$  и  $q(x)$ ):

$$\begin{aligned} Z_0 &= [u \ 0 \ m \ 0]^T \Big|_{x=0} \quad \text{при} \quad x_0 = 0, \\ Z_1 &= [u \ \phi \ 0 \ 0]^T \Big|_{x=1} \quad \text{при} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Тогда уравнение для собственных чисел  $k$  можно принять в виде

$$f_S(k) \equiv \det \begin{bmatrix} \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{33} \\ \tilde{a}_{41} & \tilde{a}_{43} \end{bmatrix} \Big|_{x=1} = 0, \quad (5)$$

рассматривая далее собственные функции только на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  с указанными выше краевыми условиями.

Аналогично для антисимметричного решения (нечетной функции)  $u(x)$  нечетной функцией также будет и  $m(x)$ , поэтому для краевой задачи на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  имеем

$$\begin{aligned} Z_0 &= [0 \ \phi \ 0 \ q]^T \Big|_{x=0} \quad \text{при} \quad x_0 = 0, \\ Z_1 &= [u \ \phi \ 0 \ 0]^T \Big|_{x=1} \quad \text{при} \quad x = 1. \end{aligned}$$

Уравнение для собственных чисел  $k$  можно принять в виде

$$f_A(k) \equiv \det \begin{bmatrix} \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{34} \\ \tilde{a}_{42} & \tilde{a}_{43} \end{bmatrix} \Big|_{x=1} = 0. \quad (6)$$

Поскольку при этом

$$Z_1 = \tilde{A}(1) \times Z_0,$$

то строки 3, 4 зададут линейные однородные уравнения с вырожденной матрицей и ненулевыми неизвестными краевыми значениями либо  $u_0, m_0$  (для четного решения):

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{31}(1) & \tilde{a}_{33}(1) \\ \tilde{a}_{41}(1) & \tilde{a}_{43}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ m_0 \end{bmatrix} = 0, \quad Z_0 = [u \ 0 \ m \ 0]^T \Big|_{x=0},$$

либо  $\phi_0, q_0$  (для нечетного решения):

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{32}(1) & \tilde{a}_{34}(1) \\ \tilde{a}_{42}(1) & \tilde{a}_{43}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_0 \\ q_0 \end{bmatrix} = 0, \quad Z_0 = [0 \ \phi \ 0 \ q]^T \Big|_{x=0}.$$

Откуда следуют соотношения для коэффициентов

$$m_0 = -\frac{\tilde{a}_{31}(1)}{\tilde{a}_{33}(1)}u_0 \quad (\text{четное решение}), \quad q_0 = -\frac{\tilde{a}_{32}(1)}{\tilde{a}_{34}(1)}\varphi_0 \quad (\text{нечетное решение}).$$

Соответственно, из уравнения (1) получаем далее выражения для четных собственных функций:

$$u(x) = \tilde{a}_{11}(x)u_0 + \tilde{a}_{13}(x)m_0 = u_0 \left( \tilde{a}_{11}(x) - \tilde{a}_{13}(x) \frac{\tilde{a}_{31}(1)}{\tilde{a}_{33}(1)} \right),$$

и для нечетных собственных функций:

$$u(x) = \tilde{a}_{12}(x)\varphi_0 + \tilde{a}_{14}(x)q_0 = \varphi_0 \left( \tilde{a}_{12}(x) - \tilde{a}_{14}(x) \frac{\tilde{a}_{32}(1)}{\tilde{a}_{34}(1)} \right).$$

### 3.2. Сходимость полученных рядов

Пусть элементы матрицы  $p \times p$  равномерно ограничены:

$$A(x) = [a_{lm}(x)], \quad |a_{lm}(x)| \leq C_0.$$

Тогда для элементов матрицы в ряду Пеано вида (2)  $A_n(x) = [a_{lm}^{(n)}(x)]$  получаем оценку

$$|a_{lm}^{(n)}(x)| \leq \frac{|pC_0x|^n}{n!p}.$$

Для остаточных сумм ряда (поэлементно) имеем

$$\sum_{n=N}^{+\infty} |a_{lm}^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{p} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{|pC_0x|^n}{n!} < \frac{1}{p} \frac{|pC_0x|^N}{N!} \exp(|pC_0x|) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow +\infty,$$

т.е. на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ ,  $p = 4$  ряд (2) будет равномерно сходящимся, причем достаточно быстро с погрешностью  $\epsilon_N$  для остаточной суммы, но выше, чем

$$\epsilon_N < \frac{1}{p} \frac{|pC_0|^N}{N!} \exp(|pC_0|). \tag{7}$$

Разумеется, оценка (7) введена со значительным “избытком”, что типично для получаемых матрицантов (см. [22, 23]). Некоторые уточнения оценок исследованы в [24]. В частности, если выбираются

$$P_* = \max(P), \quad S_* = \max(S), \quad E_* = \min(E), \quad J_* = \min(J),$$

то в диапазоне  $0 \leq K \leq K_*$ ,  $K \equiv k^4$

$$|\hat{c}(x)|, |\hat{i}(x)| \leq 1, \quad |a_{lm}(x)| \leq K$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{+\infty} |a_{lm}^{(n)}(x)| &\leq \frac{1}{p} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{|pKx|^n}{n!} = \frac{1}{p} \frac{|pKx|^N}{N!} \Sigma_N(|pKx|), \\ \Sigma_N(|pKx|) &= 1 + \frac{|pKx|}{N+1} + \frac{|pKx|^2}{(N+1)(N+2)} + \frac{|pKx|^3}{(N+1)(N+2)(N+3)} + \dots \end{aligned}$$

с оценкой

$$\epsilon_N < \frac{1}{4} \frac{(4K_*)^N}{N!} \Sigma_N(4K_*). \tag{8}$$

Оценку (8) тоже можно далее уточнить по каждому элементу матрицы. Например, для четной функции  $u(x)$  можно показать, что для элемента  $\tilde{a}_{11}(x)$  выполняется следующая равномерная оценка остаточной суммы ряда, начинающейся со степени  $x^n$ ,  $n \geq 4N$ :

$$\varepsilon < \frac{K_*^N}{(4N)!} + \frac{K_*^{N+1}}{(4N+4)!} + \frac{K_*^{N+2}}{(4N+8)!} + \dots,$$

а для элемента  $\tilde{a}_{13}(x)$

$$\varepsilon < \frac{K_*^N}{(4N+1)!} + \frac{K_*^{N+1}}{(4N+5)!} + \frac{K_*^{N+2}}{(4N+9)!} + \dots,$$

что для определения числа членов ряда при требуемой точности решения в заданном диапазоне достаточно.

#### 4. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

##### 4.1. Частоты и формы собственных колебаний при постоянных коэффициентах

Рассмотрим случай постоянных коэффициентов уравнения  $\hat{c}(x) = \hat{i}(x) = 1$ .

Решение принимает простой вид

$$u(x) = B_1 \operatorname{ch}(kx) + B_2 \cos(kx) + D_1 \operatorname{sh}(kx) + D_2 \sin(kx).$$

Для четного решения  $D_1, D_2 = 0$  получаем следующие собственные функции:

$$u(x) = B_1 \left( \operatorname{ch}(kx) + \frac{\operatorname{ch} k}{\cos k} \cos(kx) \right),$$

где  $k$  есть решение уравнения  $\operatorname{tg} k = -\operatorname{th} k \left( \frac{k}{\pi} \approx \frac{3}{4} + l, l \rightarrow +\infty \right)$ .

Для нечетного решения  $B_1, B_2 = 0$  и

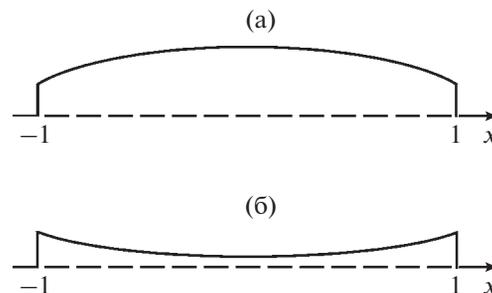
$$u(x) = D_1 \left( \operatorname{sh}(kx) + \frac{\operatorname{sh} k}{\sin k} \sin(kx) \right),$$

где  $k$  есть решение уравнения  $\operatorname{tg} k = \operatorname{th} k \left( \frac{k}{\pi} \approx \frac{1}{4} + l, l \rightarrow +\infty \right)$ .

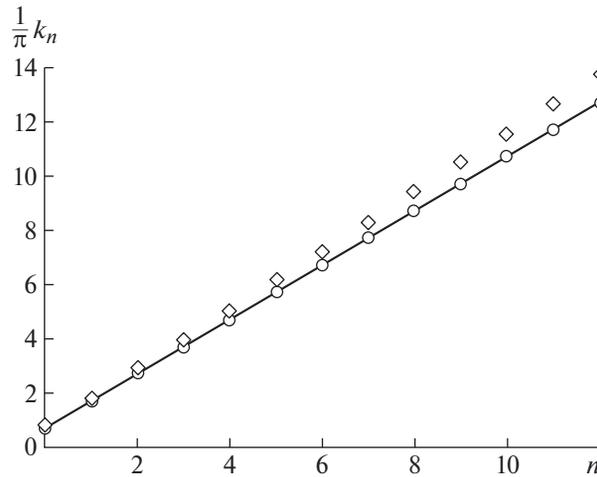
##### 4.2. Примеры расчетов с переменным модулем Юнга

Рассмотрим профили изменения модуля Юнга или поперечного сечения стержня (симметричные относительно оси абсцисс), показанные на фиг. 1а, б.

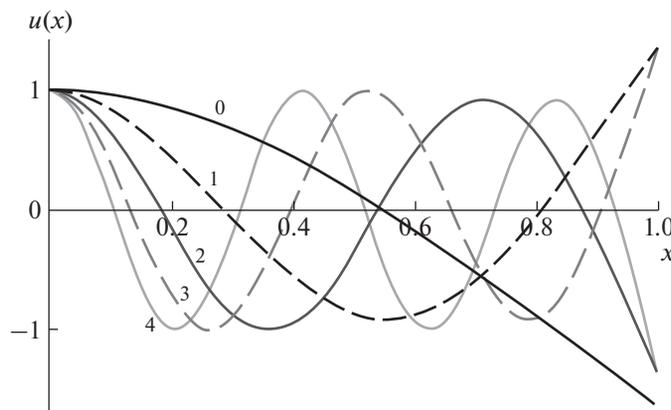
Сначала рассмотрим распределение модуля Юнга, задаваемого для определенности следующей формулой:  $e(x) = 1 + \delta x^2$ ,  $\delta = \pm 0.25$ .



Фиг. 1. Профили изменения модуля Юнга: (а) – выпуклый, (б) – вогнутый.



Фиг. 2. Распределение собственных чисел для вогнутого профиля модуля Юнга.



Фиг. 3. Первые пять собственных функций (мод колебаний) для вогнутого профиля модуля Юнга.

Графики собственных чисел и собственных функций для симметричного решения и вогнутого профиля модуля Юнга (случай  $\delta = 0.25$ ) показаны на фиг. 2, 3.

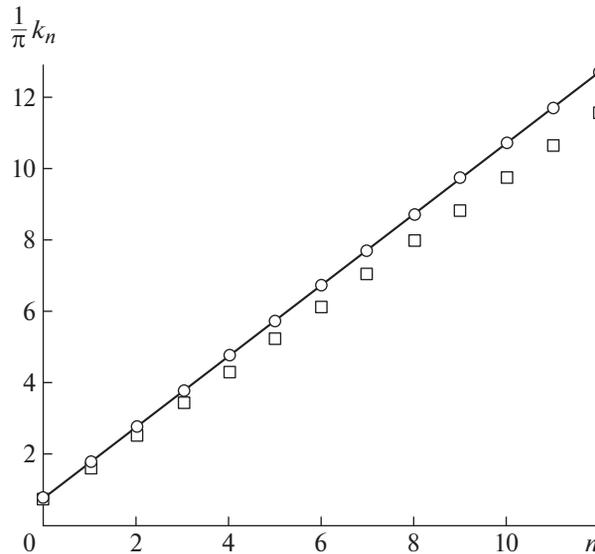
Представлены значения  $(1/\pi)k_n$ , где  $n$  есть номер появления собственного числа по возрастанию (показаны ромбами). Поскольку первое значение обнаруживается в интервале  $[0, \pi]$ , отсчет начинается с  $n = 0$ . Кружками показаны собственные числа для случая постоянных параметров в уравнениях, сплошной линией – асимптотика этих собственных чисел. Нормировка проводилась по значению на крае (что отвечает  $e(x) = 1$ ). С ростом номера наблюдается значительное превышение величин  $k_n$  по сравнению с результатами для невозмущенной задачи.

Графики собственных чисел для симметричного решения и выпуклого профиля модуля Юнга (случай  $\delta = -0.25$ ) показаны на фиг. 4.

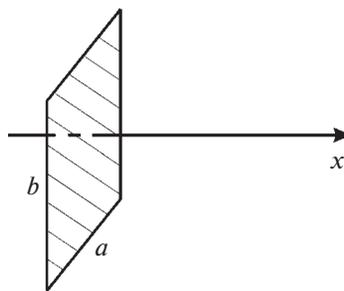
Приведены аналогичные значения  $(1/\pi)k_n$  (показаны квадратами) с тем же принципом нумерации по  $n$ . Графики поведения мод качественно не отличается от предыдущего случая и для краткости опущены.

#### 4.3. Примеры расчетов с переменным поперечным сечением

Геометрическая неоднородность моделируется следующим образом. Для стержня с прямоугольным поперечным сечением со сторонами  $a, b$  по горизонтали и вертикали соответственно (фиг. 5) полагаем  $a = 2h_1$  и  $b = 2h_2(1 + \delta x^2)$ ,  $h_1, h_2 = \text{const}$ .



Фиг. 4. Распределение собственных чисел для выпуклого профиля модуля Юнга.



Фиг. 5. Прямоугольное сечение стержня.

Тогда изменение переменных физических параметров описывается следующими формулами:  
 $P = \text{const}, E = \text{const},$

$$S = ab = S_* (1 + \delta x^2), \quad J = ab \frac{a^2 + b^2}{12} = J_* (1 + \delta x^2) (1 + 2\gamma \delta x^2 + \gamma \delta^2 x^4), \quad \gamma = \frac{h_2^2}{h_1^2 + h_2^2},$$

т.е. безразмерные переменные коэффициенты в системе уравнений (1) принимают вид

$$\hat{i}(x) = 1 + \delta x^2, \quad \hat{c}(x) = \frac{1}{(1 + \delta x^2) (1 + 2\gamma \delta x^2 + \gamma \delta^2 x^4)}.$$

Рассмотрим ситуацию, аналогичную показанному выше геометрическому профилю (фиг. 1а, б), полагая для определенности  $h_2/h_1 = 2$ .

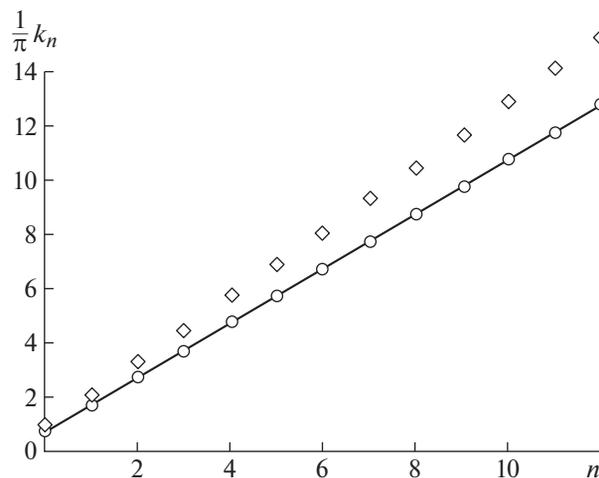
Результаты также нормируются и сравниваются с задачей для невозмущенного профиля  $b = 2h_2 = \text{const}$ .

Рассмотрим случай  $\delta = 0.25$  (вогнутый геометрический профиль). Первые собственные числа представлены на фиг. 6. Видно, что с ростом номера они существенно превышают значения, полученные для невозмущенного профиля.

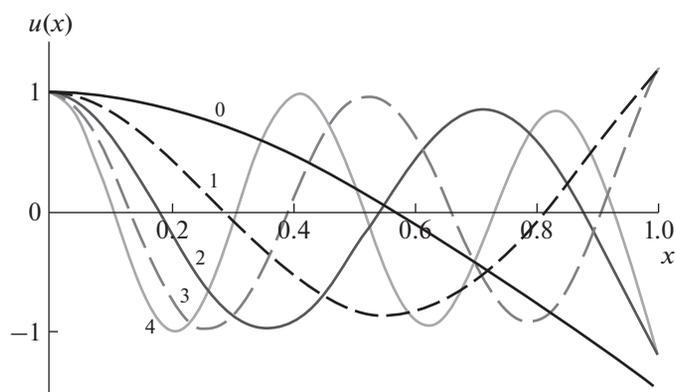
Для сравнения также приведем графики нескольких первых мод (фиг. 7). Видно, что различие форм колебаний по сравнению с предыдущими случаями незначительное.

Далее рассмотрим случай  $\delta = -0.25$  (выпуклый геометрический профиль).

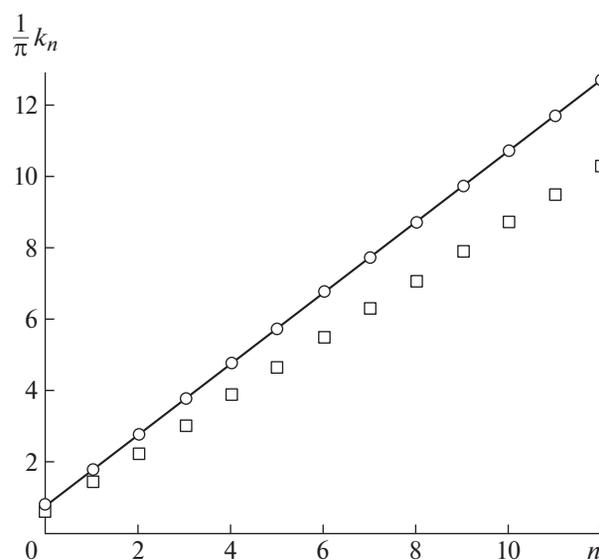
Графики для собственных значений представлены на фиг. 8.



Фиг. 6. Распределение собственных чисел для вогнутого геометрического профиля.



Фиг. 7. Первые пять собственных функций (мод колебаний) для вогнутого геометрического профиля.



Фиг. 8. Распределение собственных чисел для выпуклого геометрического профиля.

Поведение мод качественно не отличается от случая  $\delta = 0.25$  и также опущено.

Судя по результатам расчетов, геометрическая изменяемость профиля стержня (фиг. 1а,б) по длине (изменение размера поперечного сечения вдоль стержня) оказывает более существенное влияние на собственные значения, чем аналогичное изменение профиля модуля упругости (модуля Юнга). Эффекты повышения или понижения значений собственных чисел по сравнению со значениями для невозмущенного профиля связаны с увеличением или уменьшением податливости стержня на изгиб и вполне согласуются с физическими соображениями.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием метода разложения в ряды Пеано построено решение задачи определения собственных частот и форм собственных поперечных колебаний для уравнения Бернулли–Эйлера с переменными коэффициентами. Показана равномерная сходимость решения, представленного в виде ряда Пеано, и получены оценки остаточных членов. Приведены примеры численной реализации предложенной процедуры для изгибных колебаний стержня с определенными параметрами переменного поперечного сечения (геометрической неоднородности) и распределения модуля упругости (физической неоднородности). Численные примеры ориентированы на оценку геометрических и упругих свойств образцов для проведения экспериментальных исследований усталостной прочности металлических сплавов при высокочастотных циклических испытаниях. Предложенный метод решения задач о резонансных поперечных колебаниях для уравнения Бернулли–Эйлера поможет проводить проектирование новых перспективных схем циклических испытаний и математическое моделирование процессов усталостного разрушения при высокочастотных резонансных вибрациях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gudmundson P.* Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes // *J. Mech. Phys. Solids.* 1982. V. 30. № 5. P. 339–353.
2. *Dimarogonas A.D.* Vibration of cracked structures: a state of the art review // *Engineer. Fracture Mech.* 1996. V. 55. № 5. P. 831–857.
3. *Shifrin E., Ruotolo R.* Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks // *J. Sound Vibrat.* 1999. V. 222. № 3. P. 409–423.
4. *Yuen M.* A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever // *J. Sound Vibrat.* 1985. V. 103. № 3. P. 301–310.
5. *Ostachowicz W., Krawczuk M.* Analysis of the effects of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam // *J. Sound Vibrat.* 1991. V. 150. № 2. P. 191–201.
6. *Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р.* Точные решения уравнения, описывающего поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и их применение // *Вестн. Башкирского ун-та. Матем. и механ.* 2019. Т. 24. № 4. С. 774–779.
7. *Гусев Б.В., Саурин В.В.* О свободных изгибных колебаниях бетонных балок переменного поперечного сечения // *Промышленное и гражданское строительство.* 2019. № 8. С. 93–98.
8. *Лебедев И.М., Шифрин Е.И.* Идентификация поперечных трещин в стержне по собственным частотам поперечных колебаний // *Механ. твердого тела.* 2020. № 4. С. 50–70.
9. *Ватульян А.О., Осипов А.В.* Об одном подходе при определении параметров дефекта в балке // *Дефектоскопия.* 2014. № 11. С. 37–47.
10. *Ильгамов М.А., Хакимов А.Г.* Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // *Дефектоскопия.* 2009. № 6. С. 83–89.
11. *Никитин И.С., Бурого Н.Г., Никитин А.Д.* Собственные частоты и формы продольных и крутильных колебаний стержней переменного поперечного сечения // *Прикладн. матем. и механ.* 2023. № 2. С. 327–336.
12. *Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В.* Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения // *Механ. твердого тела.* 2017. № 6. С. 136–144.
13. *Ruotolo R., Surace C.* Natural frequencies of a bar with multiple cracks // *J. Sound Vibrat.* 2004. V. 272. № 1. P. 301–316.
14. *Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В.* Идентификация дефектов поперечного сечения стержня по собственным частотам и особенностям формы продольных колебаний // *Механ. твердого тела.* 2019. № 6. С. 98–107.

15. *Ватульян А.О., Бочарова О.В.* О реконструкции плотности и модуля Юнга для неоднородного стержня // *Акустич. журнал.* 2009. Т. 55. № 3. С. 275–282.
16. *Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р.* Крутильные колебания стержня непостоянного сечения // *Вестн. УГАТУ. Машиностр. и машиноведение.* 2022. Т. 26. № 1. С. 22–30.
17. *Хакимов А.Г.* О собственных колебаниях вала с моделью искусственного дефекта // *Дефектоскопия.* 2010. № 6. С. 93–98.
18. *Bathias C., Paris P.C.* Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. NY. Marcel Dekker, 2005. 328 p.
19. *Никитин И.С., Бураго Н.Г., Журавлев А.Б., Никитин А.Д.* Мультирежимная модель развития усталостных повреждений // *Прикладн. матем. и мех.* 2020. Т. 84. № 5. С. 687–698.
20. *Найфе А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
21. *Peano G.* Integration par series des equations differentielles lineaires // *Math. Ann.* 1888. V. 32. P. 450–456.
22. *Улитин В.В.* Ряд Пеано и матрицанты при решении прикладных задач. СПб.: Изд-во “Парк Ком”, 2012. 164 с.
23. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
24. *Vaake M., Schlagel U.* The Peano-Baker Series // *Proceed. Steklov Inst. Math.* 2011. V. 275. P. 155–159.
25. *Захаров Д.Д.* Точные уравнения и нахождение частот среза при свободных колебаниях пластин из функционально-градиентных материалов // *Механика композиционных материалов.* 2022. Т. 54. № 5. С. 927–942.
26. *Graff K.F.* Wave motion in elastic solids. NY.: Dover Publ., 1975. 682 p.
27. *Thomson W.T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid medium // *J. Appl. Phys.* 1950. V. 21. P. 89–93.
28. *Haskel N.A.* The dispersion of surface waves on multilayered media // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1953. V. 43. P. 17–34.
29. *Knopoff A.L.* A matrix method for elastic wave problem // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1964. V. 54. № 1. P. 431–438.
30. *Schwab F., Knopoff A.L.* Surface waves in multilayered inelastic media // *Bull. Seismol. Soc. Am.* 1971. V. 61. № 4. P. 893–912.

**УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 519.634

**СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ЛАМБА В СЛУЧАЕ ПРЕДЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ  
КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА**

© 2023 г. А. В. Кравцов<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т, Россия

\*e-mail: avkravtsov@rambler.ru

Поступила в редакцию 14.04.2023 г.  
Переработанный вариант 14.04.2023 г.  
Принята к публикации 26.06.2023 г.

Рассматривается начально-краевая задача Лэмба для упругого полупространства в случае, когда коэффициент Пуассона принимает предельное значение  $1/2$ . Доказывается существование классического решения для осевой симметрии в виде повторного несобственного интеграла. Библ. 6.

**Ключевые слова:** упругая среда, уравнения Ламэ, коэффициент Пуассона, интеграл Фурье–Бесселя, интеграл Меллина, оценки интегралов.

**DOI:** 10.31857/S0044466923100083, **EDN:** LIPUJQ

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМАЛЬНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ**

В упругой среде, занимающей полупространство, малые относительные перемещения описываются уравнениями Ламэ

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений,  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\rho_0$  соответственно параметры Ламэ и плотность упругой среды.

Пусть к свободной поверхности  $S$  упругой среды приложена нагрузка  $\mathbf{n}\tilde{p}$ , где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к  $S$ ,  $\tilde{p}$  – заданная функция точки поверхности и времени. В соответствии с [1], граничные условия на свободной поверхности зададим в виде

$$2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho_0 g(\mathbf{u}, \mathbf{n}) + \mu[\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{u}] = \mathbf{n}\tilde{p},$$

где  $g$  – ускорение свободного падения (вектор  $\mathbf{n}$  противоположен вектору силы тяжести).

Параметры Ламэ выражаются через коэффициент Пуассона  $\nu$  и модуль Юнга  $E$  следующим образом:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Далее будем считать, что  $\nu \rightarrow \frac{1}{2} - 0$ , а  $E \rightarrow +0$ , но так, что отношение  $\frac{E}{1-2\nu} \rightarrow k > 0$ . Поэтому  $\lambda \rightarrow \frac{k}{3}$ ,  $\mu \rightarrow +0$ , что означает отсутствие в упругой среде волн сдвига. Для отличного от нуля параметра Ламэ мы сохраним прежнее обозначение  $\lambda$ . Тогда уравнения для перемещений и граничные условия на свободной поверхности примут вид

$$\lambda \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} + \rho_0 g(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = \tilde{p}.$$

Представим вектор перемещений в виде  $\mathbf{u} = \text{grad } \varphi$ . Введем цилиндрическую систему координат  $r, \theta, z$ , для которой поверхность  $S$  совпадает с плоскостью  $z = 0$  и орт оси  $z$  сонаправлен с вектором  $\mathbf{n}$ .

Пусть функция  $\tilde{p}$  имеет вид  $\tilde{p}(r, t) = p_0 f(r) e^{-\alpha t} \sin \omega t$ , где  $f(r)$  – заданная непрерывная функция, допускающая разложение в интеграл Фурье–Бесселя, а  $p_0, \alpha, \omega$  – заданные положительные постоянные величины. Заметим, что формальное интегральное представление решения начально-краевой задачи Лэмба в случае предельного значения коэффициента Пуассона представлено в [2]. Там же получена асимптотическая оценка решения при больших значениях полярного радиуса. Задача об установившихся колебаниях упругого полупространства в случае предельного значения коэффициента Пуассона рассматривалась в [3], где было доказано существование классического решения при  $r > 0, z \leq 0$  и получены асимптотические формулы для компонент вектора перемещений при достаточно больших  $r$ . Формальное интегральное представление решения задачи Лэмба в случае распределенной гармонической нагрузки для произвольного  $\nu$  из интервала  $(0, 1/2)$  представлено в [4], где было проведено сравнение аналитического и численного решений. В [5] начально-краевая задача Лэмба для полупространства решалась методом конечных элементов.

Для функции  $\varphi$  в безразмерных переменных, для которых сохранены прежние обозначения, получим задачу (см. [2])

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta \varphi, \quad (r, z, t) \in \Omega: \quad r > 0, \quad z < 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right|_{z=0} + \beta \left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{p_0}{\rho_0 a^2} f(r) e^{-\gamma t} \sin t, \quad r > 0, \quad t \geq 0,$$

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow +\infty, \quad t \geq 0, \quad |\varphi| \leq C, \quad (r, z, t) \in \Omega': \quad r > 0, \quad z \leq 0, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad r > 0, \quad z \leq 0, \quad a = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_0}}, \quad \beta = \frac{g}{\omega a}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\omega}.$$

Кроме того, считаем, что функция  $f(r)$  имеет вид

$$f(r) = \frac{l^3}{(r^2 + l^2)^{3/2}}, \quad l > 0.$$

Формальное, не зависящее от  $\theta$ , классическое решение задачи (1), (2) в виде интеграла Фурье–Бесселя следующее (см. [2]):

$$\varphi(r, z, t) = \int_0^{+\infty} J_0(xr) \Phi(x, z, t) x dx, \quad (r, z, t) \in \Omega', \tag{3}$$

где  $J_0(u)$  – функция Бесселя нулевого порядка, а  $\Phi(x, z, t)$  – образ Фурье–Бесселя функции  $\varphi(r, z, t)$ , который при  $x > 0$  имеет вид интеграла Меллина

$$\Phi(x, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{A e^{pt - lx + z\sqrt{p^2 + x^2}} dp}{[(p + \gamma)^2 + 1] (p^2 + \beta\sqrt{p^2 + x^2})}, \quad A = \frac{p_0 l^2}{\rho_0 a^2}. \tag{4}$$

Здесь  $b$  – любое положительное число,  $p = \xi + i\eta$ , а  $\sqrt{p^2 + x^2}$  означает аналитическую в области  $p \notin (-i\infty, -ix] \cup [ix, +i\infty)$  функцию такую, что  $\sqrt{\xi^2 + x^2} > 0 \quad \forall x > 0$ .

В [2] было показано, что для интеграла Меллина имеет место представление

$$\Phi(x, z, t) = 2\pi i \sum_{n=1}^4 \text{res}[F(p, x, z, t), p_n] - I_{1l}(x, z, t) - I_{1r}(x, z, t) - I_{2l}(x, z, t) - I_{2r}(x, z, t), \tag{5}$$

где  $\text{res}[F(p, x, z, t), p_n]$  – вычеты в полюсах  $p_n$  его подынтегральной функции  $F(p, x, z, t)$  (множитель  $\frac{1}{2\pi i}$  включается в подынтегральную функцию), а  $I_{1l}(x, z, t), \dots, I_{2r}(x, z, t)$  – интегралы от  $F(p, x, z, t)$  по берегам разрезом  $\Gamma_1: [ix, +i\infty), \Gamma_2: (-i\infty, -ix]$ :

$$p_k(x) = \pm i\sigma(x), \quad \sigma(x) = \sqrt{\sqrt{\frac{\beta^4}{4} + \beta^2 x^2} - \frac{\beta^2}{2}}, \quad k = 1, 2, \quad p_m = -\gamma \pm i, \quad m = 3, 4,$$

$$\text{res}[F(p, x, z, t), p_k] = \mp \frac{B e^{\pm i\sigma(x)t - lx + z\sqrt{x^2 - \sigma^2(x)}} \sqrt{x^2 - \sigma^2(x)}}{\sigma(x) \{[\pm i\sigma(x) + \gamma]^2 + 1\} (2\sqrt{x^2 - \sigma^2(x)} + \beta)}, \quad B = \frac{A}{2\pi},$$

(верхний знак соответствует  $k = 1$ , нижний  $k = 2$ ),

$$\text{res}[F(p, x, z, t), p_m] = \mp \frac{B e^{(-\gamma \pm i)t - lx + zy(p_m, x)}}{2 [(-\gamma \pm i)^2 + \beta y(p_m, x)]}, \quad y(p_m, x) = \left[ (x^2 + \gamma^2 - 1)^2 + 4\gamma^2 \right]^{1/4} e^{i\psi_m(x)},$$

$$\psi_m(x) = \begin{cases} \mp \frac{\pi}{2} \pm \frac{1}{2} \left( \text{arctg} \frac{\gamma}{1-x} + \text{arctg} \frac{\gamma}{1+x} \right), & 0 < x < 1, \\ \mp \frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{\gamma}{2}, & x = 1, \\ \pm \frac{1}{2} \left( \text{arctg} \frac{\gamma}{x+1} - \text{arctg} \frac{\gamma}{x-1} \right), & x > 1 \end{cases}$$

(верхний знак соответствует  $m = 3$ , нижний  $m = 4$ ),

$$I_{1l}(x, z, t) = - \int_x^{+\infty} \frac{B e^{i\eta t - lx - iz\sqrt{\eta^2 - x^2}} d\eta}{[(i\eta + \gamma)^2 + 1] (\eta^2 + i\beta\sqrt{\eta^2 - x^2})},$$

$$I_{1r}(x, z, t) = - \int_x^{+\infty} \frac{B e^{i\eta t - lx + iz\sqrt{\eta^2 - x^2}} d\eta}{[(i\eta + \gamma)^2 + 1] (-\eta^2 + i\beta\sqrt{\eta^2 - x^2})},$$

$$I_{2l}(x, z, t) = \int_x^{+\infty} \frac{B e^{-i\eta t - lx + iz\sqrt{\eta^2 - x^2}} d\eta}{[(-i\eta + \gamma)^2 + 1] (-\eta^2 + i\beta\sqrt{\eta^2 - x^2})},$$

$$I_{2r}(x, z, t) = \int_x^{+\infty} \frac{B e^{-i\eta t - lx - iz\sqrt{\eta^2 - x^2}} d\eta}{[(-i\eta + \gamma)^2 + 1] (\eta^2 + i\beta\sqrt{\eta^2 - x^2})}$$

(индексы  $1l, 1r$  соответствуют левому и правому берегам разреза  $\Gamma_1$ , а индексы  $2l, 2r$  – левому и правому берегам разреза  $\Gamma_2$ ).

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ

Докажем, что функция  $\varphi(r, z, t)$  является решением задачи (1), (2). Сначала убедимся, что эта функция удовлетворяет уравнению (1) в области  $\Omega$ .

В [2] было показано, что функция  $x\Phi(x, z, t)$  под знаком интеграла в (3) непрерывна на множестве  $G'$ :  $x \geq 0, z \leq 0, t \geq 0$ . Докажем, что данная функция имеет на  $G'$  непрерывные частные производные по  $z$  и  $t$  до второго порядка включительно.

Рассмотрим интеграл  $I_{1l}(x, z, t)$ . Для любого  $x > 0$  сделаем замену  $s = \eta - x$ . Получим

$$I_{1l}(x, z, t) = - \int_0^{+\infty} \frac{B e^{i(s+x)t - lx - iz\sqrt{s(s+2x)}} ds}{\{[i(s+x) + \gamma]^2 + 1\} [i\beta\sqrt{s(s+2x)} - (s+x)^2]} := \int_0^{+\infty} f_0(s, x, z, t) ds.$$

На множестве  $H: s \geq 0, x > 0, z \leq 0, t \geq 0$  функция  $f_0(s, x, z, t)$  имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^k f_0}{\partial z^k} = (-i)^k [s(s+2x)]^{k/2} f_0, \quad \frac{\partial^k f_0}{\partial t^k} = [i(s+x)]^k f_0, \quad k = 1, 2.$$

Рассмотрим интегралы

$$I_z^k(x, z, t) := \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k f_0}{\partial z^k} ds, \quad I_t^k(x, z, t) := \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k f_0}{\partial t^k} ds, \quad k = 1, 2.$$

При фиксированных  $x, z, t$ , принадлежащих множеству  $G: x > 0, z \leq 0, t \geq 0$ , они сходятся абсолютно по признаку сравнения:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left| \frac{\partial^k f_0}{\partial z^k} \right| s^2 = \lim_{s \rightarrow +\infty} \left| \frac{\partial^k f_0}{\partial t^k} \right| s^2 = 0.$$

Докажем, что эти интегралы сходятся равномерно на  $G$ . Представим  $I_z^k$  в виде

$$I_z^k = \int_0^1 + \int_1^{s_0} + \int_{s_0}^{+\infty} := I_{1z}^k + I_{2z}^k + I_{3z}^k,$$

где  $s_0$  – любое число, большее  $\sqrt{\gamma^2 + 1}$ . Интегралы  $I_{1z}^k, I_{2z}^k$  – собственные. Для подынтегральных функций интегралов  $I_{3z}^k$  при всех  $s \geq s_0, x > 0, z \leq 0, t \geq 0$  имеем

$$\left| \frac{\partial^k f_0}{\partial z^k} \right| < \frac{[s(s+2x)]^{k/2} B e^{-lx}}{[s^2 - 1 - \gamma^2](s+x)^2} < \frac{B e^{-lx} s^{-1+k/2} s + 2x}{s^2 - 1 - \gamma^2} < \frac{2B e^{-lx} s^{-1+k/2}}{s^2 - 1 - \gamma^2} < \frac{2Bs^{-1+k/2}}{s^2 - 1 - \gamma^2}. \quad (6)$$

Поэтому  $I_{3z}^k$  сходятся равномерно на  $G$  по признаку Вейерштрасса. Тогда интеграл  $I_{1z}(x, z, t)$  имеет на  $G$  непрерывную частную производную по  $z$  до второго порядка включительно, причем

$$\frac{\partial^k}{\partial z^k} \int_0^{+\infty} f_0(s, x, z, t) ds = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k f_0}{\partial z^k}(s, x, z, t) ds, \quad k = 1, 2. \quad (7)$$

Представим  $I_t^k$  в виде

$$I_t^k = \int_0^1 + \int_1^{s_0} + \int_{s_0}^{+\infty} := I_{1t}^k + I_{2t}^k + I_{3t}^k.$$

Интегралы  $I_{1t}^k, I_{2t}^k$  – собственные. Для подынтегральных функций интегралов  $I_{3t}^k$  при всех  $s \geq s_0, x > 0, z \leq 0, t \geq 0$  имеем

$$\left| \frac{\partial^k f_0}{\partial t^k} \right| < \frac{B e^{-lx}}{[s^2 - 1 - \gamma^2](s+x)^{2-k}} < \frac{B e^{-lx}}{[s^2 - 1 - \gamma^2]s^{2-k}} < \frac{B}{[s^2 - 1 - \gamma^2]s^{2-k}}. \quad (8)$$

Поэтому  $I_{3t}^k$  сходятся равномерно на  $G$  по признаку Вейерштрасса. Тогда интеграл  $I_{1t}(x, z, t)$  имеет на  $G$  непрерывную частную производную по  $t$  до второго порядка включительно, причем

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_0^{+\infty} f_0(s, x, z, t) ds = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k f_0}{\partial t^k}(s, x, z, t) ds, \quad k = 1, 2. \quad (9)$$

Точно так же доказывается, что и остальные интегралы  $I_{1r}, I_{2l}, I_{2r}$  имеют на  $G$  непрерывные частные производные по  $z, t$  до второго порядка включительно и дифференцирование можно проводить под знаками интегралов.

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что функция  $f_0(s, x, z, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2} - x^2 f_0 = \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2}, \quad (s, x, z, t) \in H.$$

Откуда, в силу (7), (9), следует, что и интеграл  $I_{1l}(x, z, t)$  удовлетворяет этому уравнению

$$\frac{\partial^2 I_{1l}}{\partial z^2} - x^2 I_{1l} = \frac{\partial^2 I_{1l}}{\partial t^2}, \quad (x, z, t) \in G.$$

Аналогичным образом доказывается, что интегралы  $I_{1r}, I_{2l}, I_{2r}$  удовлетворяют на  $G$  тому же уравнению.

Функции  $F_n(x, z, t) := \text{res}[F(p, x, z, t), p_n]$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ , имеют на  $G$  непрерывные частные производные по  $z$  и  $t$  до второго порядка включительно. Поэтому, в силу доказанного выше, этими свойствами обладает и  $\Phi(x, z, t)$ . Кроме того, имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial z^2} - x^2 F_n = \frac{\partial^2 F_n}{\partial t^2}, \quad (x, z, t) \in G.$$

Откуда, также в силу доказанного выше, следует, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - x^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad (x, z, t) \in G. \quad (10)$$

Получим оценки частных производных по  $z, t$  первого и второго порядков от всех функций в правой части (5), умноженных на  $x$ . Рассмотрим, например, произведения  $x \frac{\partial^k I_{1l}}{\partial z^k}$ , которые, в силу (7), равны  $x I_z^k$ ,  $k = 1, 2$ .

Пусть  $0 < s \leq 1$ ,  $0 < x \leq \delta$ ,  $z \leq 0$ ,  $t \geq 0$ , а  $\delta$  — любое число из интервала  $(0, \sqrt{\gamma^2 + 1} - 1)$ . Тогда

$$\left| \frac{\partial^k f_0}{\partial z^k} \right| < \frac{B(2\delta + 1)^{k/2}}{\gamma^2 + 1 - (\delta + 1)^2 \beta \sqrt{2sx}} e^{-lx}.$$

Поэтому, в силу сходимости интеграла  $\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s}}$ , будем иметь

$$x |I_{1z}^k| \leq C_1 \sqrt{x} e^{-lx}.$$

Пусть  $0 \leq s \leq 1$ ,  $x > \delta$ ,  $z \leq 0$ ,  $t \geq 0$ . Тогда

$$\left| \frac{\partial^k f_0}{\partial z^k} \right| < \frac{[s(s + 2x)]^{k/2}}{2\gamma(s + x)^3} B e^{-lx} < \frac{B e^{-lx}}{2\gamma \delta^{3-k/2}} \left( \frac{s + 2x}{s + x} \right)^{k/2} \leq \frac{2^{-1+k/2}}{\gamma \delta^{3-k/2}} B e^{-lx}, \quad x |I_{1z}^k| < C_2 x e^{-lx}.$$

Следовательно,

$$x |I_{1z}^k| < C_3 (\sqrt{x} + x) e^{-lx}, \quad (x, z, t) \in G.$$

Пусть  $1 \leq s \leq s_0$ ,  $x > 0$ ,  $z \leq 0$ ,  $t \geq 0$ . Тогда

$$\left| \frac{\partial^k f_0}{\partial z^k} \right| < \frac{[s(s + 2x)]^{k/2}}{2\gamma(s + x)^3} B e^{-lx} < \frac{B e^{-lx}}{2\gamma s^{3-k}} \left( \frac{s + 2x}{s + x} \right)^{k/2} \leq 2^{-1+k/2} \frac{B e^{-lx}}{\gamma}.$$

Поэтому

$$x |I_{2z}^k| < C_4 x e^{-lx}, \quad (x, z, t) \in G.$$

Из (6) следует, что

$$x |I_{3z}^k| < C_5 x e^{-lx}, \quad (x, z, t) \in G.$$

Из указанных выше оценок и равенства (7) получаем

$$x \left| \frac{\partial^k I_{1l}}{\partial z^k} \right| < C_6 (\sqrt{x} + x) e^{-lx}, \quad (x, z, t) \in G, \quad k = 1, 2.$$

Пусть  $0 < s \leq 1$ ,  $0 < x \leq \delta$ ,  $z \leq 0$ ,  $t \geq 0$ , где  $\delta$  имеет тот же смысл, что и ранее. Тогда

$$\left| \frac{\partial^k f_0}{\partial t^k} \right| < \frac{B(\delta + 1)^k}{\gamma^2 + 1 - (\delta + 1)^2 \beta \sqrt{2sx}} e^{-lx}, \quad x |I_{1l}^k| \leq C_7 \sqrt{x} e^{-lx}.$$

Пусть  $0 \leq s \leq 1$ ,  $x > \delta$ ,  $z \leq 0$ ,  $t \geq 0$ . Тогда

$$\left| \frac{\partial^k f_0}{\partial t^k} \right| < \frac{B e^{-lx}}{2\gamma(s+x)^{3-k}} \leq \frac{B e^{-lx}}{2\gamma \delta^{3-k}}, \quad x |I_{1l}^k| < C_8 x e^{-lx}.$$

Следовательно,

$$x |I_{1l}^k| < C_9 (\sqrt{x} + x) e^{-lx}, \quad (x, z, t) \in G.$$

Пусть  $1 \leq s \leq s_0$ ,  $x > 0$ ,  $z \leq 0$ ,  $t \geq 0$ . Тогда

$$\left| \frac{\partial^k f_0}{\partial t^k} \right| < \frac{B e^{-lx}}{2\gamma(s+x)^{3-k}} < \frac{B e^{-lx}}{2\gamma}.$$

Поэтому

$$x |I_{2l}^k| < C_{10} x e^{-lx}, \quad (x, z, t) \in G.$$

Из (8) следует, что

$$x |I_{3l}^k| < C_{11} x e^{-lx}, \quad (x, z, t) \in G.$$

Из указанных выше оценок и равенства (9) получаем

$$x \left| \frac{\partial^k I_{1l}}{\partial t^k} \right| < C_{12} (\sqrt{x} + x) e^{-lx}, \quad (x, z, t) \in G, \quad k = 1, 2.$$

В [2] были получены оценки

$$|F_k| \leq C_{13} e^{-lx}, \quad k = 1, 2, \quad x |F_m| \leq C_{14} \sqrt{x} e^{-lx}, \quad m = 3, 4, \quad (x, z, t) \in G',$$

где  $C_{13}$ ,  $C_{14}$  не зависят от  $x$ ,  $z$ ,  $t$ . Поэтому на множестве  $G$  справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^j F_k}{\partial z^j} \right| &< C_{13} [x^2 + \sigma^2(x)]^{j/2} e^{-lx}, \quad \left| \frac{\partial^j F_k}{\partial t^j} \right| < C_{13} [\sigma(x)]^{j/2} e^{-lx}, \quad j = 1, 2, \\ x \left| \frac{\partial^j F_m}{\partial z^j} \right| &< C_{14} \sqrt{x} [(x^2 + \gamma^2 - 1)^2 + 4\gamma^2]^{j/4} e^{-lx}, \quad x \left| \frac{\partial^j F_m}{\partial t^j} \right| < C_{15} \sqrt{x} e^{-lx}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Окончательно всюду на указанном множестве получаем оценки

$$x \left| \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k} \right| < C_{16} \left\{ \sqrt{x} \left( 1 + [(x^2 + \gamma^2 - 1)^2 + 4\gamma^2]^{k/4} \right) + x \left( 1 + [x^2 + \sigma^2(x)]^{k/2} \right) \right\} e^{-lx}, \quad (11)$$

$$x \left| \frac{\partial^k \Phi}{\partial t^k} \right| \leq C_{17} \left\{ \sqrt{x} + x \left( 1 + [\sigma(x)]^{k/2} \right) \right\} e^{-lx}, \quad k = 1, 2. \quad (12)$$

Отсюда следует, что  $x \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k} \rightarrow 0$ ,  $x \frac{\partial^k \Phi}{\partial t^k} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +0$  равномерно относительно  $z \leq 0$ ,  $t \geq 0$ .

Поэтому  $x \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}$ ,  $x \frac{\partial^k \Phi}{\partial t^k}$  можно доопределить до непрерывных на множестве  $G'$  и равных нулю в

точках  $(0, z, t)$  функций. За этими функциями мы сохраним прежние обозначения. Заметим, что равенство (10), умноженное на  $x$ , будет справедливым на  $G'$ .

Поскольку  $|J_0(xr)| \leq 1 \forall x \geq 0, \forall r \geq 0$ , то из (11), (12) следует, что интегралы

$$\int_0^{+\infty} J_0(xr) \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}(x, z, t) x dx, \quad \int_0^{+\infty} J_0(xr) \frac{\partial^k \Phi}{\partial t^k}(x, z, t) x dx, \quad k = 1, 2, \quad (13)$$

сходятся равномерно по переменным  $r > 0, z \leq 0, t \geq 0$  по признаку Вейерштрасса. Кроме того, подынтегральные функции в (13) непрерывны на множестве  $X'$ :  $x \geq 0, r > 0, z \leq 0, t \geq 0$ . Поэтому решение  $\varphi(r, z, t)$  имеет на множестве  $\Omega'$  непрерывные частные производные по  $z$  и  $t$  до второго порядка включительно, причем

$$\frac{\partial^k \varphi}{\partial z^k} = \int_0^{+\infty} J_0(xr) \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}(x, z, t) x dx, \quad \frac{\partial^k \varphi}{\partial t^k} = \int_0^{+\infty} J_0(xr) \frac{\partial^k \Phi}{\partial t^k}(x, z, t) x dx, \quad k = 1, 2.$$

Подынтегральная функция в (3) имеет на  $X'$  непрерывную частную производную по  $r$  до второго порядка включительно. Воспользуемся соотношениями (см. [6])

$$J_0'(u) = -J_1(u), \quad J_1'(u) = J_0(u) - \frac{J_1(u)}{u},$$

где  $J_1(u)$  – функция Бесселя первого порядка. Тогда

$$\int_0^{+\infty} J_0'(xr) \Phi(x, z, t) x^2 dx = - \int_0^{+\infty} J_1(xr) \Phi(x, z, t) x^2 dx, \quad (14)$$

$$\int_0^{+\infty} J_0''(xr) \Phi(x, z, t) x^3 dx = - \int_0^{+\infty} J_0'(xr) \Phi(x, z, t) x^3 dx + \frac{1}{r} \int_0^{+\infty} J_1(xr) \Phi(x, z, t) x^2 dx. \quad (15)$$

В силу оценки (см. [2])

$$x |\Phi(x, z, t)| \leq C_{18} (\sqrt{x} + x) e^{-kx}, \quad (x, z, t) \in G',$$

где  $C_{18}$  не зависит от  $x, z, t$ , а также в силу неравенств

$$|J_k(xr)| \leq 1, \quad x \geq 0, \quad r \geq 0, \quad k = 0, 1, \quad \frac{|J_1(xr)|}{r} < \frac{1}{r_0}, \quad x \geq 0, \quad r \geq r_0,$$

интеграл в левой части (14) сходится равномерно на множестве  $\Omega'$  по признаку Вейерштрасса, а интеграл в левой части (15) – равномерно на множестве  $r \geq r_0, z \leq 0, t \geq 0$  по тому же признаку, где  $r_0$  – любое положительное число. Тогда решение  $\varphi(r, z, t)$  будет иметь на  $\Omega'$  непрерывную частную производную по  $r$  до второго порядка включительно, а в области  $\Omega$  будет иметь место равенство

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_0^{+\infty} J_0(xr) \Phi(x, z, t) x dx + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{+\infty} J_0(xr) \Phi(x, z, t) x dx = \\ & = \int_0^{+\infty} J_0''(xr) \Phi(x, z, t) x^3 dx + \frac{1}{r} \int_0^{+\infty} J_0'(xr) \Phi(x, z, t) x^2 dx = - \int_0^{+\infty} J_0(xr) \Phi(x, z, t) x^3 dx. \end{aligned}$$

Мы воспользовались соотношениями (14), (15). Поэтому

$$\Delta \varphi = \int_0^{+\infty} J_0(xr) \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}(x, z, t) - x^2 \Phi(x, z, t) \right\} x dx = \int_0^{+\infty} J_0(xr) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(x, z, t) x dx = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2},$$

т.е. функция  $\varphi(r, z, t)$  удовлетворяет уравнению (1).

Покажем, что граничное условие при  $z = 0$  также удовлетворяется. В интеграле  $I_{1r}$  сделаем замену  $s = \eta - x$ . Обозначим после этого подынтегральную функцию указанного интеграла через  $g_0(s, x, z, t)$ . Для  $f_0$  и  $g_0$  имеем

$$\left. \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \beta \left. \frac{\partial f_0}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{B e^{i(s+x)t-lx}}{[i(s+x) + \gamma]^2 + 1}, \quad \left. \frac{\partial^2 g_0}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \beta \left. \frac{\partial g_0}{\partial z} \right|_{z=0} = -\frac{B e^{i(s+x)t-lx}}{[i(s+x) + \gamma]^2 + 1}.$$

Поэтому

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} (I_{1l} + I_{1r}) \right|_{z=0} + \beta \left. \frac{\partial}{\partial z} (I_{1l} + I_{1r}) \right|_{z=0} = 0, \quad x > 0, \quad t \geq 0.$$

Точно также можно показать, что для тех же  $x, t$  справедливо равенство

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} (I_{2l} + I_{2r}) \right|_{z=0} + \beta \left. \frac{\partial}{\partial z} (I_{2l} + I_{2r}) \right|_{z=0} = 0.$$

Такому же однородному граничному условию удовлетворяет каждая функция  $F_k$ ,  $k = 1, 2$ . В самом деле,  $\sigma^2(x) - \beta \sqrt{x^2 - \sigma^2(x)} = 0 \quad \forall x > 0$ . Поэтому при  $x > 0, t \geq 0$  имеем

$$\left. \frac{\partial^2 F_k}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \beta \left. \frac{\partial F_k}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{B e^{\pm i\sigma(x)t-lx} \sqrt{x^2 - \sigma^2(x)}}{\sigma(x) \{ [\pm i\sigma(x) + \gamma]^2 + 1 \} (2\sqrt{x^2 - \sigma^2(x)} + \beta)} \{ \pm \sigma^2(x) \mp \beta \sqrt{x^2 - \sigma^2(x)} \} = 0.$$

Но для функций  $F_m(x, z, t)$ ,  $m = 3, 4$  получим

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} (F_3 + F_4) \right|_{z=0} + \beta \left. \frac{\partial}{\partial z} (F_3 + F_4) \right|_{z=0} = -iB e^{-\eta t-lx} \sin t, \quad x > 0, \quad t \geq 0.$$

Принимая во внимание (5), будем иметь граничное условие для функции  $\Phi(x, z, t)$ :

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \beta \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = A e^{-\eta t-lx} \sin t, \quad x > 0, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, в силу доказанного выше, окончательно получаем

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \beta \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = A e^{-\eta t} \sin t \int_0^{+\infty} J_0(xr) e^{-lx} x dx = \frac{p_0}{\rho_0 a^2} f(r) e^{-\eta t} \sin t, \quad r > 0, \quad t \geq 0,$$

т.е. граничное условие при  $z = 0$  удовлетворяется. При этом мы воспользовались равенством (см. [6])

$$\int_0^{+\infty} J_0(xr) e^{-lx} x dx = \frac{l}{(r^2 + l^2)^{3/2}}.$$

Докажем, что  $\varphi(r, z, t) \rightarrow 0$  при  $\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow +0$  и любом фиксированном  $t \geq 0$ . В [2] была получена оценка

$$|\varphi(r, z, t)| < \frac{\tilde{C}}{\sqrt{r}}, \quad r \gg 1, \quad (16)$$

где  $\tilde{C}$  не зависит от  $z \leq 0, t \geq 0$ . Откуда следует, что  $\varphi(r, z, t) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow +\infty$  равномерно относительно  $z$  и  $t$  из указанных промежутков. Покажем, что  $\varphi(r, z, t) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$  равномерно от-

носителем  $r > 0$  и любом фиксированном  $t \geq 0$ . При любых  $x > 0, z < -1, t \geq 0$  рассмотрим произведение  $xI_{II}(x, z, t)$  и сделаем замену  $u = \sqrt{\eta^2 - x^2}$ . Получим

$$xI_{II}(x, z, t) = - \int_0^{+\infty} \frac{Bx e^{i\sqrt{u^2+x^2}-lx+i|z|u} u du}{\left[ \left( i\sqrt{u^2+x^2} + \gamma \right)^2 + 1 \right] \left[ u^2 + x^2 + i\beta u \right] \sqrt{u^2+x^2}} := \int_0^{+\infty} h(u, x, t) e^{i|z|u} du =$$

$$= \int_0^{u_0(z)} + \int_{u_0(z)}^{+\infty} := I_1 + I_2, \quad u_0(z) = \frac{1}{|z|^{1/4}}.$$

Пусть  $0 < u \leq u_0(z), 0 < x \leq \delta_1, t \geq 0$ , а  $\delta_1$  – любое число из интервала  $(0, \gamma)$ . Тогда для  $h$  и  $I_1$  имеем оценки

$$|h| < \frac{B e^{-lx}}{\beta \left[ \gamma^2 + 1 - u_0^2(z) - \delta_1^2 \right]} < \frac{B e^{-lx}}{\beta (\gamma^2 - \delta_1^2)}, \quad |I_1| \leq \frac{C_{19} e^{-lx}}{|z|^{1/4}}.$$

Пусть  $0 \leq u \leq u_0(z), x > \delta_1, t \geq 0$ . Тогда для  $h$  и  $I_1$  имеем оценки

$$|h| < \frac{Bx e^{-lx} u}{2\gamma (u^2 + \delta_1^2)^2} \leq \frac{Bx e^{-lx}}{2\gamma} \max_{u \in [0,1]} \frac{u}{(u^2 + \delta_1^2)^2}, \quad |I_1| < \frac{C_{20}}{|z|^{1/4}} x e^{-lx}.$$

Поэтому при всех  $x > 0, z < -1, t \geq 0$  получаем

$$|I_1| < \frac{C_{21} e^{-lx}}{|z|^{1/4}} (x + 1).$$

Заметим, что функция  $h$  имеет непрерывную частную производную по  $u$  на полупрямой  $[u_0(z), +\infty)$  при любых фиксированных  $x > 0, t \geq 0$ . Для оценки  $I_2$  выполним интегрирование по частям:

$$I_2 = \frac{i}{|z|} e^{i|z|^{3/4}} h\{u_0(z), x, t\} - \frac{i}{|z|} \int_{u_0(z)}^{+\infty} e^{i|z|u} \frac{\partial h}{\partial u}(u, x, t) du,$$

где подстановка на  $+\infty$  равна нулю и

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{h}{u} \left\{ 1 + \frac{itu^2}{\sqrt{u^2+x^2}} - \frac{u^2}{u^2+x^2} - \frac{2u^2(i\gamma - \sqrt{u^2+x^2})}{\sqrt{u^2+x^2} \left[ \left( i\sqrt{u^2+x^2} + \gamma \right)^2 + 1 \right]} - \frac{u(2u+i\beta)}{u^2+x^2+i\beta u} \right\} := \frac{h}{u} \left( 1 + \sum_{k=1}^4 h_k \right).$$

Так как при  $u \geq u_0(z), x > 0, t \geq 0$  справедливо неравенство

$$\frac{|h|}{u} < \frac{Bx e^{-lx}}{2\beta\gamma u^3}, \quad |h_1| \leq tu, \quad |h_2| < 1, \quad |h_3| < \frac{u\sqrt{u^2+x^2+\gamma^2}}{\gamma\sqrt{u^2+x^2}} < 1 + \frac{u}{\gamma}, \quad |h_4| < \frac{\sqrt{4u^2+\beta^2}}{u^4} < 2 + \frac{\beta}{u},$$

то при тех же  $u, x, t$  справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial h}{\partial u} \right| < \left\{ \frac{\gamma t + 1}{2\beta\gamma^2 u^2} + \frac{5}{2\beta\gamma u^3} + \frac{1}{2\gamma u^4} \right\} Bx e^{-lx}.$$

Учитывая, что при  $x > 0, t \geq 0$  справедливо неравенство

$$|h\{u_0(z), x, t\}| < \frac{Bx e^{-lx}}{2\beta\gamma} |z|^{1/2},$$

для  $I_2$  при всех  $x > 0$ ,  $z < -1$ ,  $t \geq 0$  получаем оценку

$$|I_2| < \left\{ \frac{C_{22}(t)}{|z|^{3/4}} + \frac{C_{23}}{|z|^{1/2}} + \frac{C_{24}}{|z|^{1/4}} \right\} x e^{-tx} < \frac{C_{25}(t)}{|z|^{1/4}} x e^{-tx}, \quad C_{25}(t) > 0.$$

Следовательно,

$$x|I_{II}| < \frac{C_{26}(t)}{|z|^{1/4}} (x+1)e^{-tx}, \quad x > 0, \quad z < -1, \quad t \geq 0. \quad (17)$$

В [2] было показано, что  $xI_{II}|_{x=0} = 0 \forall z \leq 0, \forall t \geq 0$ . Поэтому неравенство (17) справедливо  $\forall x \geq 0$ . Аналогичные неравенства имеют место для произведений  $xI_{2l}, xI_{1r}, xI_{2r}$ . Тогда получим

$$\left| \int_0^{+\infty} J_0(xr) \{I_{II}(x, z, t) + \dots + I_{2r}(x, z, t)\} x dx \right| < \frac{C_{27}(t)}{|z|^{1/4}} \int_0^{+\infty} (x+1)e^{-tx} dx < \frac{C_{28}(t)}{|z|^{1/4}}, \quad C_{28}(t) > 0.$$

Рассуждая как в [2], для функций  $F_k$ ,  $k = 1, 2$ , получаем неравенства

$$|F_k| \leq C_{29} e^{-|z|\sqrt{x^2 - \sigma^2(x)}}, \quad (x, z, t) \in G',$$

где  $\sigma(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \sigma(x) = 0$ . Поэтому при любом  $z < 0$  имеем

$$\left| \int_0^{+\infty} J_0(xr) F_k(x, z, t) x dx \right| \leq C_{29} \int_0^{+\infty} x e^{-|z|\sqrt{x^2 - \sigma^2(x)}} dx = \frac{C_{29}}{2} \int_0^{+\infty} e^{-|z|\lambda(s)} ds = \frac{C_{29}}{2} \left( \int_0^{s_1} + \int_{s_1}^{+\infty} \right) := \frac{C_{29}}{2} (I_3 + I_4),$$

где  $s = x^2$ ,  $\lambda(s) = \sqrt{s - \sqrt{\frac{\beta^4}{4} + \beta^2 s} + \frac{\beta^2}{2}}$ , а  $s_1$  будет выбрано ниже. Заметим, что интеграл  $\int_0^{+\infty} e^{-|z|\lambda(s)} ds$  сходится по признаку сравнения:  $\lim_{s \rightarrow +\infty} s^2 e^{-|z|\lambda(s)} = 0$ .

Получим оценки для  $I_3$  и  $I_4$ . Функция  $\lambda(s)$  непрерывно дифференцируема на  $(0, +\infty)$ , причем  $\lambda'(s) > 0$  всюду на этом промежутке, т.е.  $\lambda(s)$  возрастает. Положим  $\lambda'(0) = \lim_{s \rightarrow +0} \lambda'(s) = \frac{1}{\beta}$ . Выберем  $s_1$  таким, чтобы  $\lambda'(s) > \frac{1}{2\beta} \forall s \in [0, s_1]$ . Тогда для указанных  $s$  по формуле конечных приращений Лагранжа будем иметь

$$\lambda(s) - \frac{s}{2\beta} = \left\{ \lambda'(\tilde{s}) - \frac{1}{2\beta} \right\} s, \quad \tilde{s} \in (0, s),$$

т.е.  $\lambda(s) \geq \frac{s}{2\beta} \forall s \in [0, s_1]$  и для  $I_3$  получаем

$$I_3 \leq \int_0^{s_1} e^{-\frac{|z|s}{2\beta}} ds = \frac{2\beta}{|z|} \left( 1 - e^{-\frac{|z|s_1}{2\beta}} \right).$$

Пусть  $z < -1$ . Для  $I_4$  имеем

$$I_4 = \int_{s_1}^{+\infty} e^{-|z|\lambda(s)} e^{-\lambda(s)} ds \leq C_{30} e^{-|z|\lambda(s_1)}, \quad C_{30} = e^{\lambda(s_1)} \int_{s_1}^{+\infty} e^{-\lambda(s)} ds > 0.$$

Рассуждая как в [2], для функций  $F_m$ ,  $m = 3, 4$ , получаем неравенства

$$x|F_m| \leq C_{31} \sqrt{x} e^{-|z|\sqrt{\gamma^2 + 1} \cos \psi_m(x) - tx}, \quad (x, z, t) \in G',$$

где  $\psi_m(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \psi_m(x) = \mp \frac{\pi}{2} \pm \arctg \gamma$ . Функции  $\psi_m(x)$  непрерывно дифференцируемы на  $(0, +\infty)$ , причем  $\{\cos \psi_m(x)\}' > 0$  всюду на этом промежутке, т.е.  $\cos \psi_m(x)$  возрастают. Поэтому при  $z < 0$  имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} J_0(xr) F_m(x, z, t) x dx \right| &\leq C_{31} \int_0^{+\infty} e^{-|z|\sqrt{\gamma^2+1} \cos \psi_m(x) - lx} \sqrt{x} dx \leq \\ &\leq C_{31} e^{-|z|\tilde{\gamma}} \int_0^{+\infty} e^{-lx} \sqrt{x} dx = C_{32} e^{-|z|\tilde{\gamma}}, \quad \tilde{\gamma} = \sqrt{\gamma^2+1} \sin(\arctg \gamma) > 0. \end{aligned}$$

Окончательно при  $z < -1$  будем иметь

$$|\varphi(r, z, t)| < \frac{C_{28}(t)}{|z|^{1/4}} + C_{32} e^{-|z|\tilde{\gamma}} + C_{33} e^{-|z|\lambda(s_1)} + \frac{C_{34}}{|z|} \left( 1 - e^{-\frac{|z|s_1}{2\beta}} \right),$$

где  $0 < C_{28}(t) < a't + b' \forall t \geq 0$  и фиксированных  $a' > 0, b' > 0$ , не зависящих от  $r, z$ . Откуда следует, что  $\varphi(r, z, t) \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow -\infty$  равномерно относительно  $r > 0$  и любом фиксированном  $t \geq 0$ . Вместе с (16) это означает, что  $\varphi(r, z, t) \rightarrow 0$  при  $\sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow +\infty$  и любом фиксированном  $t \geq 0$ .

Ограниченность  $\varphi(r, z, t)$  на множестве  $\Omega'$  была установлена в [2]. Докажем, наконец, что начальные условия также удовлетворяются.

Положим в (4)  $t = 0$ . Получим

$$\Phi(x, z, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{A e^{-lx+z\sqrt{p^2+x^2}} dp}{[(p+\gamma)^2+1](p^2+\beta\sqrt{p^2+x^2})} := \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F_0(p, x, z) dp.$$

Рассмотрим замкнутую кривую  $\Gamma_R$ , состоящую из отрезка  $L_R: [b-iR, b+iR]$  и дуги окружности  $C_R: |p| = R, \text{Re } p \geq b (R > b)$ . Так как функция  $F_0$  является аналитической в правой полуплоскости  $\text{Re } p > 0$ , то по теореме Коши

$$\int_{\Gamma_R} F_0 dp = \int_{L_R} F_0 dp + \int_{C_R} F_0 dp = 0. \tag{18}$$

При всех  $p \in C_R$  для достаточно больших  $R$ , всех  $z \leq 0$  и любого фиксированного  $x > 0$  справедлива оценка (см. [2])

$$|F_0(p, x, z)| \leq \frac{A}{2\pi [(R-\gamma)^2-1] (R^2-\beta\sqrt{R^2+x^2})}. \tag{19}$$

Поэтому

$$\left| \int_{C_R} F_0 dp \right| \leq \int_{C_R} |F_0| dl < \frac{AR}{2[(R-\gamma)^2-1] (R^2-\beta\sqrt{R^2+x^2})} \rightarrow +0, \quad R \rightarrow +\infty.$$

Переходя в (18) к пределу при  $R \rightarrow +\infty$ , в силу сходимости интеграла (4), получаем

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F_0(p, x, z) dp = 0 \quad \forall x > 0, \quad \forall z \leq 0.$$

Откуда следует, что  $\varphi(r, z, 0) = 0$  при всех  $r > 0, z \leq 0$ .

Ранее мы получили равенство

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(r, z, t) = \int_0^{+\infty} J_0(xr) \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, z, t) x dx, \quad (r, z, t) \in \Omega'.$$

В силу доказанного выше имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 2\pi i \sum_{n=1}^4 p_n F_n - \frac{\partial I_{1l}}{\partial t} - \frac{\partial I_{1r}}{\partial t} - \frac{\partial I_{2l}}{\partial t} - \frac{\partial I_{2r}}{\partial t}, \quad (x, z, t) \in G,$$

где частные производные от интегралов справа равны интегралам от частных производных подинтегральных функций. Поэтому

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, z, t) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(p, x, z, t) p dp. \quad (20)$$

Полагая в (20)  $t = 0$ , получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, z, 0) = \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F_0(p, x, z) p dp.$$

С помощью теоремы Коши для функции  $F_0(p, x, z)p$  и кривой  $\Gamma_R$ , а также оценки (19) убеждаемся, что последний интеграл равен нулю при всех  $x > 0$ ,  $z \leq 0$ , т.е.  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(r, z, 0) = 0$  при всех  $z \leq 0$ ,  $r > 0$ .

Таким образом, доказана

**Теорема.** Задача (1), (2) имеет классическое решение, представимое в виде интеграла (3).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bromwich T.J.I.A. On the influence of gravity on elastic waves and, in particular, on the vibrations of an elastic Globe // Proc. London Math. Soc. 1898. V. 30. P. 98–120.
2. Ильясов Х.Х., Кравцов А.В., Кравцов Ал.В., Кузнецов С.В. Интегральное представление решения нестационарной задачи Лэмба в случае предельного значения коэффициента Пуассона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 3. С. 478–487.
3. Ильясов Х.Х., Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Аналитическое решение задачи Лэмба в случае предельного значения коэффициента Пуассона // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 597–610.
4. Ильясов Х.Х., Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Внешняя пространственная задача Лэмба. Распределенная по поверхности гармоническая нагрузка // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2016. № 1. С. 50–56.
5. Кравцов А.В., Кузнецов С.В., Секерж-Зенькович С.Я. Конечноэлементные модели в задаче Лэмба // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2011. № 6. С. 160–169.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, 1963.

## ЧИСЛЕННОЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ<sup>1)</sup>

© 2023 г. Л. Ван<sup>1,3,\*</sup>, И. С. Меньшов<sup>1,2,3,\*\*</sup>, А. А. Серёжкин<sup>2,3,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

<sup>2</sup> 127030 Москва, Суцьевская ул., 22,  
Всероссийский научно-исследовательский институт автоматизации им. Н.Л. Духова (ВНИИА), Россия

<sup>3</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия

\*e-mail: wanglujie@mail.ru

\*\*e-mail: imen57@mail.ru

\*\*\*e-mail: aaserezhkin@gmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2023 г.  
Переработанный вариант 16.06.2023 г.

Принята к публикации 26.06.2023 г.

Рассматривается модель Уилкинса для упругопластической среды. Проводится теоретический анализ разрывных решений в предположении одномерной одноосной деформации. В этом приближении материальные уравнения для девиатора тензора напряжений интегрируются точно, и остается только консервативная система законов сохранения, что позволяет найти класс точных автомодельных решений модели. Для решения расширенной неконсервативной системы уравнений разрабатывается численный метод Годуновского типа с использованием приближенного римановского солвера, построенного на основе интегрирования уравнений по фазовому пути. Предлагается специальный выбор пути, который сводит двухволновое HLL решение задачи Римана к линейным уравнениям. Приводится сравнение численных и точных аналитических решений на ряде задач с различными режимами ударно-волновых процессов. Библ. 19. Фиг. 6. Табл. 4.

**Ключевые слова:** упруго-пластическая среда, модель Уилкинса, консервативная по пути схема Годунова.

**DOI:** 10.31857/S0044466923100162, **EDN:** FOZVKE

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существуют два основных подхода к описанию упругопластических свойств твердых тел при конечных деформациях (Finite strain elastoplasticity). Первый подход приводит к так называемым в литературе гипопругим моделям, которые являются обобщением стандартных упругих моделей малых деформаций на область конечных деформаций. Наиболее известной из этих моделей считается модель Уилкинса (см. [1]) с критерием пластичности по Мизесу. В качестве параметров среды рассматриваются параметры плотности, скорости, энергии и компонент девиатора тензора напряжений. Упругое и пластическое состояние материала разделяется в фазовом пространстве компонент тензора напряжений поверхностью текучести, определяемой модулем девиатора тензора напряжений. При достижении в процессе деформации поверхности текучести, в материале происходят необратимые пластические деформации. Тензор напряжения в режиме пластического течения эволюционирует таким образом, что его модуль находится на поверхности текучести.

Второе направление связано с развитием гиперупругих моделей упругопластических деформаций. Основы этих моделей были заложены в работах Годунова, Роменского и Пешкова (см. [2, 3]). Эти модели (далее ГРП) строятся на общих принципах рациональной механики и термоди-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 23-11-00218).

намики и являются физически более обоснованными, чем гипопругие модели. В частности, гиперупругая модель ГРП является термодинамически согласованной, в то время как модель Уилкинса удовлетворяет второму закону термодинамики только при определенных предположениях (см. [4]). Кроме того, гиперупругие модели описываются системой уравнений в форме законов сохранения, в то время как уравнения гипопругой модели являются неконсервативными из-за дополнительных материальных соотношений на компоненты девиатора тензора напряжений.

Тем не менее, несмотря на указанные недостатки, гипопругие модели достаточно широко используются в численных исследованиях упругопластических процессов в твердых материалах при интенсивных нагрузках (см. [5, 6]). Это обусловливается простотой модели, понятной природой определяющих параметров и, в конечном итоге, способностью воспроизводить необходимые лабораторные данные и данные инженерных приложений, которые в основном имеют форму соотношений изменения напряжения в зависимости от изменения деформации (см. [7]). Модель ГРП более сложна в реализации и требует специальной калибровки ряда модельных параметров и постановки адекватных граничных условий при решении практических задач (см. [8]).

Из-за неконсервативного вида определяющей системы уравнений модели Уилкинса решение задач с сильными разрывами неоднозначно, поскольку классические соотношения Ренкина–Гюгонно для законов сохранения неприменимы к неконсервативным системам. В настоящее время эта проблема решается с помощью численных методов, основанных на консервативных вдоль пути в фазовом пространстве схемах (path-conservative schemes) (см. [9–11]). При разработке этих схем используется теория Dal Maso, LeFloch, and Murat (DLM) (см. [12]) слабых решений неконсервативных гиперболических систем уравнений. Разрывные решения в этой теории описываются с помощью интегрирования определяющих уравнений вдоль специально выбранной непрерывной параметризуемой кривой (пути) в фазовом пространстве. В практических приложениях используют, как правило, простейший выбор – прямолинейный отрезок, соединяющий две точки фазового пространства (см. [13, 14]). При реализации такого подхода это приводит к нелинейной системе уравнений и, как следствие, проблемам, связанным с выбором начальных данных и сходимостью итерационного процесса. Нетривиальный выбор пути в фазовом пространстве на основе физических принципов, позволяющий получить полную волновую структуру решения, точно соответствующего аналитическому решению в случае консервативной системы (physics informed path choice), предложен в [15].

В настоящей работе предлагается эффективный численный метод для решения системы определяющих уравнений гипопругой модели Уилкинса. Метод относится к классу проекционных методов гоуновского типа. С этой целью используется приближенное двухволновое решение задачи Римана типа HLL. Слабая форма решения на разрыве строится по консервативной вдоль фазового пути схеме в соответствии с теорией DLM. Предлагается специальная форма пути в фазовом пространстве для уравнений модели Уилкинса, которая сводит двухволновое HLL решение задачи Римана к линейным уравнениям.

Статья структурирована следующим образом. В разд. 2 мы кратко описываем математическую модель Уилкинса упругопластической деформации, критерий текучести и уравнения состояния. В разд. 3 представлены точные аналитические решения с сильными и слабыми разрывами для приближения одномерной одноосной деформации, которые используются для верификации предложенных дискретных моделей. В разд. 4 с использованием схемы консервативного пути обобщается классический метод HLL для неконсервативных систем уравнений. Здесь предлагается применять не прямой путь, а специальный путь в фазовом пространстве, обоснованный свойствами математической модели. При этом для определения параметров возмущенной области в задаче Римана требуется решать только линейную систему уравнений, а не нелинейную систему уравнений, которая получается при стандартном выборе прямолинейного пути. В разд. 5 мы сравниваем численные и аналитические решения для оценки точности предложенной дискретной модели упругопластики.

## 2. ГИПОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ УИЛКИНСА

Гипопругая модель Уилкинса описывает нестационарные упругопластические течения изотропной сплошной среды. В трехмерной эйлеровой постановке система уравнений записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{T}) &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho E \mathbf{u} - \mathbf{T} \mathbf{u}) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S} + \mathbf{S} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{S} - 2\mu \left( \mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}) \mathbf{I} \right) = \lambda \mathbf{S}.$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{u}$  – вектор скорости,  $\mathbf{T}$  – тензор напряжений,  $E$  – полная энергия,  $\boldsymbol{\Omega} = 0.5(\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T)$  – тензор вращения,  $\mathbf{D} = 0.5(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$  – тензор скоростей деформации,  $\mathbf{S}$  – девиатор тензора напряжений.  $\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$ ,  $p = -1/3\mathbf{T}_{kk}$  – давление,  $\mu$  – модуль сдвига, параметр  $\lambda$  служит для введения критерия пластичности и будет определен ниже.

Первые три уравнения для модели Уилкинса – уравнения законов сохранения массы, импульса и энергии. Последнее уравнение – уравнение эволюции компонент девиатора тензора напряжений. Для описания перехода от упругого к пластическому режиму течения используется критерий Мизеса. Значения компонент тензора напряжений не могут выходить за пределы так называемой поверхности текучести Мизеса  $S_{ij}S_{ij} = 2/3Y^2$ . Критерий Мизеса автоматически удовлетворяется, если  $\lambda$  имеет следующий вид:

$$\lambda = -\frac{3\mu \mathbf{S} : \mathbf{D}}{Y^2} H \left( \frac{\mathbf{S} : \mathbf{S}}{2} - \frac{Y^2}{3} \right), \quad (2)$$

где  $Y$  – предел текучести материала,  $H(x)$  – функция Хевисайда.

Умножив последнее уравнение в (1) на  $\mathbf{S}$  справа и слева и суммируя два полученных уравнения, получим

$$\mathbf{S} : \frac{D\mathbf{S}}{Dt} + \frac{D\mathbf{S}}{Dt} : \mathbf{S} - 2\mu (\mathbf{S} : \mathbf{D} + \mathbf{D} : \mathbf{S}) = 2\lambda \mathbf{S} : \mathbf{S}, \quad (3)$$

где  $D\mathbf{S}/Dt = \partial \mathbf{S}/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{S} + \mathbf{S} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{S}$  означает производную тензора по времени с включением коррекции по Яуману. Следовательно, если  $\mathbf{S} : \mathbf{S} \geq 2/3Y^2$ , то

$$\frac{d(\mathbf{S} : \mathbf{S})}{dt} = 2(\mathbf{S} : \mathbf{D}) \left( 2\mu - \frac{3\mu}{Y^2} (\mathbf{S} : \mathbf{S}) H \left( \frac{\mathbf{S} : \mathbf{S}}{2} - \frac{Y^2}{3} \right) \right) = 0. \quad (4)$$

Отсюда следует, что компоненты тензора напряжений всегда соответствуют области в фазовом пространстве, ограниченной поверхностью текучести, и не выходят за пределы этой поверхности.

Полная энергия, используемая в настоящей работе, определяется в форме  $E = e + 0.5\mathbf{u}^2$ , где  $e = e(\rho, p)$  – внутренняя энергия. В рассматриваемой модели полная энергия не зависит от девиатора тензора напряжения. В некоторых работах, в частности в [5], полная энергия включает в себя третий член, описывающий энергию упругой деформации сдвига:  $(\mathbf{S} : \mathbf{S})/(4\mu\rho)$ . Включение обусловлено условием невозрастания энтропии при упругом нагружении среды. С другой стороны, изменения энтропии в данном случае мало, так что данной поправкой для простоты можно пренебречь.

Давление, плотность и энергия связаны уравнением состояния (УРС). В настоящей работе используются уравнения Ми–Грюнайзена:

$$\begin{aligned} p(\rho, e) &= \rho_0 c_0^2 f(\eta) + \rho \Gamma e, \\ f(\eta) &= \frac{(\eta - 1) \left( \eta - \frac{1}{2} \Gamma (\eta - 1) \right)}{(\eta - s(\eta - 1))^2}, \\ \eta &= \frac{\rho}{\rho_0}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\rho_0$ ,  $c_0$ ,  $s$  – константы,  $\Gamma = (\partial p / \partial e)_\rho / \rho$  – параметр Грюнайзена.

### 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ОДНООСНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Некоторый теоретический анализ структур сильных и слабых волн в упругопластическом материале представлен в [16, 17]. В настоящей работе мы используем методы из [17] и даем краткий вывод результатов. Детали этого анализа можно найти в [17].

В одномерном случае система уравнений (1) может быть упрощена при предположении об одноосной деформации. В этом случае последнее уравнение превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение для одной компоненты девиатора тензора напряжений, интегрирование которого приводит к однозначной аналитической зависимости этой компоненты от плотности.

Для случая ударных волн с большой амплитудой примером одноосной деформации служит удар бесконечной плоской пластины по недеформируемой преграде с некоторой начальной скоростью. Используя условия Рэнкина–Гюгонио, на разрыве можно получить два известных соотношения – адиабату Гюгонио и линию Михельсона–Релея:

$$\begin{aligned} e - e_0 &= \frac{1}{2}(v - v_0)(\sigma + \sigma_0), \\ \sigma - \sigma_0 &= \dot{m}^2 (v - v_0), \\ \dot{m} &= \rho(u - D) = \rho_0(u_0 - D), \end{aligned} \tag{6}$$

где  $v = 1/\rho$ ,  $D$  – скорость ударной волны, индексом “0” обозначено начальное (невозмущенное) состояние.

Таким образом, состояния после прохождения ударных волн описываются точкой пересечения этих двух кривых. Анализ взаимного пересечения кривых показывает, что в зависимости от скорости удара возможны три типа ударно-волновой структуры в упругопластическом материале: одноволновой упругий режим, двухволновой режим с упругим предвестником и одноволновой пластический режим.

Рассмотрим отдельно двухволновой режим течения. Пусть критическое значение перехода от одноволнового упругого режима к двухволновому режиму определяется величиной массовой скорости  $\dot{m}_Y$ . При возникновении двухволнового режима первая ударная волна, называемая упругим предвестником, распространяется с интенсивностью  $\dot{m} = \dot{m}_Y$ . За этой волной параметры изменяются от начального значения до значения, определяемого пределом текучести. Скорости по обе стороны волны должны удовлетворять следующим условиям:

$$\dot{m}_Y = \rho_Y(u - D_1) = \rho_0(u_0 - D_1), \tag{7}$$

где  $\dot{m}_Y$ ,  $\rho_Y$ ,  $\rho_0$  – значения, характеризующие поверхность текучести и начальное состояние соответственно. Вторая волна распространяется по состоянию, определяемому пределом текучести. Массовая скорость в этой волне меньше предельного значения  $\dot{m}_Y$ . С ростом интенсивности массовая скорость второй волны и ее скорость возрастают. При достижении значения  $\dot{m}_Y$  скорости обеих волн сравниваются, и начинается переход к одноволновому пластическому режиму.

Кратко опишем свойства ударной волны в упругопластическом материале:

1. По мере увеличения скорости ударной волны структура проходит три фазы, а именно, одноволновый упругий режим, двухволновый режим с упругим предвестником и одноволновый пластический режим.

2. В двухволновом режиме после первой волны параметры состояния изменяются от начальных значений до значений, соответствующих точке текучести. Величина изменения скорости за фронтом волны определяется параметрами текучести материала.

3. В двухволновом режиме по мере увеличения интенсивности (скорости удара, если ударно-волновой процесс возникает в результате удара о недеформируемую преграду) вторая волна распространяется со все большей скоростью относительно неподвижной лабораторной системы координат, пока ее скорость не сравняется со скоростью первой волны, и процесс перейдет из двухволнового режима в одноволновой.

Слабые волны возникают при растяжении упругопластического материала. Примером такого процесса является следующая постановка задачи. Пусть имеется бесконечная плоская пластина, жестко прикрепленная к неподвижной недеформируемой преграде, скорость которой направлена ортогонально плоскости пластины в сторону от преграды. В результате внутри пластины рас-

пространяется центрированная волна разрежения, которая может иметь разную структуру в зависимости от величины начальной скорости.

В вышеприведенной постановке все физические величины зависят только от одной автономной переменной  $\lambda = x/t$ , и задача сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными данными:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dv} &= f_1(\sigma, v), \\ \frac{du}{dv} &= f_2(\sigma, v), \\ \sigma|_{v=v_0} &= \sigma_0, \quad u|_{v=v_0} = u_0, \end{aligned} \quad (8)$$

которая может быть проинтегрирована численно, например, с помощью метода Рунге–Кутты. Особенностью этой системы является слабый разрыв на решении  $\sigma = \sigma(v)$  в точке, соответствующей параметрам текучести. Таким образом, при растяжении возможно формирование как одной центрированной волны растяжения, так и двух центрированных волн растяжения в зависимости от интенсивности (скорости) растяжения.

Основные свойства возникающих при растяжении центрированных волн разгрузки следующие.

1. Структура слабых волн разгрузки при увеличении скорости растяжения упругопластического материала меняется от одноволновой к двухволновой. Одноволновая структура (одна центрированная волна) возникает при небольших скоростях растяжения, когда изменения параметров в волне происходят в упругой области.

2. В двухволновом режиме (две центрированные волны) после первой волны параметры состояния изменяются от начальных значений до состояния, определяемого параметрами текучести. Дальнейшее изменение параметров происходит уже в пластической области во второй волне.

В разд. 5 численные результаты сравниваются с этими аналитическими выводами, сделанными на основе точного теоретического анализа.

#### 4. КОНСЕРВАТИВНАЯ ВДОЛЬ ФАЗОВОГО ПУТИ СХЕМА HLL

Аппроксимация решения задачи о распаде разрыва типа HLL характеризуется тем, что учитываются только самые крайние волны со скоростями  $s_L$  и  $s_R$ , ограничивающие возмущенную область слева и справа соответственно. Скорости этих волн определяются максимальным и минимальным собственными значениями матрицы Якоби линеаризованной системы уравнений.

Для рассматриваемой системы уравнений эти значения следующие:  $\lambda_{\min} = u - \sqrt{c^2 + 4\mu/3\rho}$ ,  $\lambda_{\max} = u + \sqrt{c^2 + 4\mu/3\rho}$ , где  $c^2 = p_\rho + (p/\rho^2)p_e$  – термодинамическая скорость звука.

Скорости ограничивающих возмущенную область характеристик рассчитываются по предложенной Энфилдом методике (см. [18]) следующим образом:

$$\begin{aligned} s_L &= \min\left(0, \lambda_{\min}(\mathbf{Q}_L), \lambda_{\min}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_R)\right)\right), \\ s_R &= \max\left(0, \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_R), \lambda_{\max}\left(\frac{1}{2}(\mathbf{Q}_L + \mathbf{Q}_R)\right)\right), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mathbf{Q}$  обозначает вектор состояния.

Структура приближенного решения задачи о распаде разрыва имеет вид постоянного распределения параметров между левой и правой границами возмущенной зоны. Обозначим данное состояние как  $\mathbf{Q}_*$ . Состояние слева от начального разрыва обозначается как  $\mathbf{Q}_L$ , состояние справа как  $\mathbf{Q}_R$ . Состояния  $\mathbf{Q}_L$  и  $\mathbf{Q}_*$ , а также  $\mathbf{Q}_*$  и  $\mathbf{Q}_R$  связаны обобщенными соотношениями Рэнкина–Гюгонио на соответствующих разрывах.

Рассмотрим расширенную одномерную систему уравнений, являющуюся следствием пространственной системы уравнений (1), когда все переменные зависят только от одной пространственной переменной  $x$  и времени  $t$ . Она может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + P - S_{xx})}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv - S_{xy})}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw - S_{xz})}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u E + (P - S_{xx})u - S_{xy}v - S_{xz}w)}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho S_{xx})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S_{xx})}{\partial x} - \frac{4}{3}\mu\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho S_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho S_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho S_{yy})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S_{yy})}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\rho \frac{\partial u}{\partial x} - \rho S_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho S_{zz})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S_{zz})}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu\rho \frac{\partial u}{\partial x} - \rho S_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho S_{xy})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S_{xy})}{\partial x} - \mu\rho \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\rho \left( (S_{yy} - S_{xx}) \frac{\partial v}{\partial x} + S_{yz} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho S_{xz})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S_{xz})}{\partial x} - \mu\rho \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2}\rho \left( (S_{zz} - S_{xx}) \frac{\partial w}{\partial x} + S_{yz} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial(\rho S_{yz})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S_{yz})}{\partial x} + \frac{1}{2}\rho \left( -S_{xz} \frac{\partial v}{\partial x} - S_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Первые пять уравнений в (10), т.е. консервативные уравнения для массы, импульса и энергии, решаются численно методом Годунова на основе приближенного HLL решения задачи Римана (см. [19]). Для построения обобщенных условий Рэнкина–Гюгоньо для неконсервативной части в последних шести уравнениях используется метод интегрирования по пути в фазовом пространстве (path-conservative scheme, см. [14]). С этой целью рассмотрим нелинейную гиперболическую систему вида

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

Запишем систему уравнений в автомодельной переменной  $\lambda = x/t$ :

$$\mathbf{Q} - \frac{\partial(\lambda \mathbf{Q})}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \lambda} + \mathbf{B}(\mathbf{Q}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \lambda} = 0. \tag{12}$$

Интегрируя (12) по  $\lambda \in [s_L, s_R]$ , получаем

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{Q}_*(s_R - s_L) - (\mathbf{Q}_R s_R - \mathbf{Q}_L s_L) + (\mathbf{f}_R - \mathbf{f}_L) + \int_{\mathbf{Q}_L}^{\mathbf{Q}_*} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} + \int_{\mathbf{Q}_*}^{\mathbf{Q}_R} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = 0, \\
 & \int_{\mathbf{Q}_L}^{\mathbf{Q}_*} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = \int_0^1 \mathbf{B}(\psi(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_*, s)) \frac{\partial \psi}{\partial s} ds, \\
 & \int_{\mathbf{Q}_*}^{\mathbf{Q}_R} \mathbf{B}(\mathbf{Q}) d\mathbf{Q} = \int_0^1 \mathbf{B}(\psi(\mathbf{Q}_*, \mathbf{Q}_R, s)) \frac{\partial \psi}{\partial s} ds,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где  $\Psi(s)$  – непрерывная параметризуемая кривая в фазовом пространстве (путь),  $0 \leq s \leq 1$  – параметр вдоль кривой. Следовательно, результат интегрирования неконсервативной части зависит от выбора пути. В большинстве схем в качестве пути выбирается прямолинейный отрезок, соединяющий состояния слева и справа от разрыва:

$$\Psi(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_*, s) = \mathbf{Q}_L + (\mathbf{Q}_* - \mathbf{Q}_L)s, \tag{14}$$

$$\int_0^1 \mathbf{B}(\Psi(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_*, s)) \frac{\partial \Psi}{\partial s} ds = (\mathbf{Q}_* - \mathbf{Q}_L) \int_0^1 \mathbf{B}(\Psi(\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_*, s)) ds.$$

Учитывая конкретную форму уравнений в (10), в настоящей работе выбран альтернативный путь, позволяющий упростить вычисление интегралов и избежать итерационного процесса определения параметров возмущенного состояния.

Возьмем для примера шестое уравнение в (10) и, используя уравнение сохранения массы, получим

$$\frac{\partial(\rho S_{xx} + 4/3\mu\rho \ln\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u S_{xx} + 4/3\mu\rho u \ln\rho)}{\partial x} + \rho S_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \rho S_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{15}$$

Используя (13) для первого уравнения в (10), получаем

$$\begin{aligned} \rho_*(s_L - u_*) &= \rho_L(s_L - u_L), \\ \rho_*(s_R - u_*) &= \rho_R(s_R - u_R). \end{aligned} \tag{16}$$

С помощью (16) и, используя (13) для (15), получаем

$$\begin{aligned} \rho_*(s_R - s_L) S_{xx}^* &= \rho_*(s_R - u_*) S'_{xxR} - \rho_*(s_L - u_*) S'_{xxL} - B, \\ S'_{xxL} &= S_{xxL} + \frac{4}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_L}{\rho_*}\right), \quad S'_{xxR} = S_{xxR} + \frac{4}{3}\mu \ln\left(\frac{\rho_R}{\rho_*}\right), \end{aligned} \tag{17}$$

$$B = \int_0^1 \left(\rho S_{xy} \frac{\partial v}{\partial s} + \rho S_{xz} \frac{\partial w}{\partial s}\right) ds (\mathbf{Q}_L \rightarrow \mathbf{Q}_*) + \int_0^1 \left(\rho S_{xy} \frac{\partial v}{\partial s} + \rho S_{xz} \frac{\partial w}{\partial s}\right) ds (\mathbf{Q}_* \rightarrow \mathbf{Q}_R).$$

Предположим, что путь, соединяющий  $\mathbf{Q}_L$  и  $\mathbf{Q}_*$  в фазовом пространстве, состоит из двух звеньев в виде прямолинейных отрезков. При этом вдоль первого звена компоненты скорости  $v$  и  $w$  не изменяются,  $\rho$  меняется от  $\rho_L$  до  $\rho_*$ , для  $i = j$  компоненты  $S_{ij}$  меняются от  $S_{ijL}$  до  $S_{ijL}^*$ , а остальные компоненты не меняются. Вдоль второго звена  $\rho = \rho_*$ , а компоненты скорости  $v, w$  и компоненты  $S_{ij}$  для  $i \neq j$  изменяются линейно от  $S_{ijL}$  до  $S_{ijL}^*$ , а для  $i = j$  – от  $S'_{ijL}$  до  $S_{ijL}^*$ . Путь в фазовом пространстве, соединяющий состояния  $\mathbf{Q}_R$  и  $\mathbf{Q}_*$ , будет строиться аналогично.

При этих предположениях имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\rho S_{xy} \frac{\partial v}{\partial s} + \rho S_{xz} \frac{\partial w}{\partial s}\right) ds (\mathbf{Q}_L \rightarrow \mathbf{Q}_*) &= \frac{\rho_*}{2} (S_{xyL} + S_{xy}^*) (v_* - v_L) + \frac{\rho_*}{2} (S_{xzL} + S_{xz}^*) (w_* - w_L), \\ \int_0^1 \left(\rho S_{xy} \frac{\partial v}{\partial s} + \rho S_{xz} \frac{\partial w}{\partial s}\right) ds (\mathbf{Q}_* \rightarrow \mathbf{Q}_R) &= -\frac{\rho_*}{2} (S_{xyR} + S_{xy}^*) (v_* - v_R) - \frac{\rho_*}{2} (S_{xzR} + S_{xz}^*) (w_* - w_R). \end{aligned} \tag{18}$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены все уравнения в (10), имеющие неконсервативную форму записи. В результате получаем следующие выражения для параметров состояния в возмущенной зоне:

$$\begin{aligned} \rho_* &= \frac{\rho_R(s_R - u_R) - \rho_L(s_L - u_L)}{s_R - s_L}, \\ u_* &= \frac{\rho_R u_R (s_R - u_R) - \rho_L u_L (s_L - u_L) - (P_R - S_{xxR}) + (P_L - S_{xxL})}{\rho_* (s_R - s_L)}, \end{aligned}$$

$$v_* = \frac{\rho_R v_R (s_R - u_R) - \rho_L v_L (s_L - u_L) + S_{xyR} - S_{xyL}}{\rho_* (s_R - s_L)},$$

$$w_* = \frac{\rho_R w_R (s_R - u_R) - \rho_L w_L (s_L - u_L) + S_{xzR} - S_{xzL}}{\rho_* (s_R - s_L)},$$

$$E_* = \frac{\rho_R E_R (s_R - u_R) - (P_R - S_{xxR}) u_R + S_{xyR} v_R + S_{xzR} w_R - \rho_L E_L (s_L - u_L) - (P_L - S_{xxL}) u_L + S_{xyL} v_L + S_{xzL} w_L}{\rho_* (s_R - s_L)}.$$

После этого компоненты девиатора тензора напряжений определяются решением следующей системы линейных уравнений:

$$MS = A_1 + A_2,$$

где  $S = (S_{xx}, S_{yy}, S_{zz}, S_{xy}, S_{xz}, S_{yz})^T$  – вектор компонент девиатора тензора напряжений, а матрицы  $M, A_1$  и  $A_2$  имеют следующий вид:

$$M = \begin{pmatrix} s_R - s_L & 0 & 0 & \frac{v_R - v_L}{2} & \frac{w_R - w_L}{2} & 0 \\ 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{v_L - v_R}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{w_L - w_R}{2} & 0 \\ \frac{v_L - v_R}{4} & \frac{v_R - v_L}{4} & 0 & s_R - s_L & 0 & \frac{w_R - w_L}{4} \\ \frac{w_L - w_R}{4} & 0 & \frac{w_R - w_L}{4} & 0 & s_R - s_L & \frac{v_R - v_L}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{w_L - w_R}{4} & \frac{v_L - v_R}{4} & s_R - s_L \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} S'_{xxR} (s_R - u_*) - S'_{xxL} (s_L - u_*) \\ S'_{yyR} (s_R - u_*) - S'_{yyL} (s_L - u_*) \\ S'_{zzR} (s_R - u_*) - S'_{zzL} (s_L - u_*) \\ S_{xyR} (s_R - u_*) - S_{xyL} (s_L - u_*) + \mu (v_R - v_L) \\ S_{xzR} (s_R - u_*) - S_{xzL} (s_L - u_*) + \mu (w_R - w_L) \\ S_{yzR} (s_R - u_*) - S_{yzL} (s_L - u_*) \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{v_* - v_L}{2} S_{xyL} + \frac{w_* - w_L}{2} S_{xzL} + \frac{v_R - v_*}{2} S_{xyR} + \frac{w_R - w_*}{2} S_{xzR} \\ - \frac{v_* - v_L}{2} S_{xyL} - \frac{v_R - v_*}{2} S_{xyR} \\ - \frac{w_* - w_L}{2} S_{xzL} - \frac{w_R - w_*}{2} S_{xzR} \\ \frac{v_* - v_L}{4} (S'_{yyL} - S'_{xxL}) + \frac{w_* - w_L}{4} S_{yzL} + \frac{v_R - v_*}{4} (S'_{yyR} - S'_{xxR}) + \frac{w_R - w_*}{4} S_{yzR} \\ \frac{w_R - w_*}{4} (S'_{zzR} - S'_{xxR}) + \frac{v_R - v_*}{4} S_{yzR} + \frac{w_* - w_L}{4} (S'_{zzL} - S'_{xxL}) + \frac{w_* - w_L}{4} S_{yzL} \\ - \frac{v_* - v_L}{4} S_{xzL} - \frac{w_* - w_L}{4} S_{xyL} - \frac{v_R - v_*}{4} S_{xzR} - \frac{w_R - w_*}{4} S_{xyR} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$S'_{yyL} = S_{yyL} - \frac{2}{3} \mu \ln \left( \frac{\rho_L}{\rho_*} \right),$$

$$S'_{zzL} = S_{zzL} - \frac{2}{3} \mu \ln \left( \frac{\rho_L}{\rho_*} \right),$$

$$S'_{yyR} = S_{yyR} - \frac{2}{3} \mu \ln \left( \frac{\rho_R}{\rho_*} \right),$$

$$S'_{zzR} = S_{zzR} - \frac{2}{3} \mu \ln \left( \frac{\rho_R}{\rho_*} \right).$$

Имея приближенное решение задачи Римана в каждом узле сетки, решение на новом временном слое определяется по классической схеме Годунова:

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{1}{\Delta x} (D_{i+1/2}^- - D_{i-1/2}^+),$$

$$D_{i-1/2}^+ = \int_0^{s_{i-1/2,R}} (Q_{i-1/2}^{RP} - Q_i^n) dx = \Delta t \cdot s_{i-1/2,R} (Q_{i-1/2}^{RP} - Q_i^n),$$

$$D_{i+1/2}^- = \int_{s_{i+1/2,L}}^0 (Q_i^n - Q_{i+1/2}^{RP}) dx = \Delta t \cdot |s_{i+1/2,L}| (Q_i^n - Q_{i+1/2}^{RP}),$$
(22)

где  $\Delta x$  – длина сетки,  $\Delta t$  – шаг времени,  $Q_{i-1/2}^{RP}$  соответствует значению  $Q_*$  аппроксимации решения соответствующей задачи о распаде разрыва между ячейками сетки  $i - 1$  и  $i$ ,  $Q_{i+1/2}^{RP}$  соответствует значению  $Q_*$  соответствующей задачи о распаде разрыва между ячейками сетки  $i$  и  $i+1$ ,  $s_{i-1/2,R}$  и  $s_{i+1/2,L}$  – границы соответствующих возмущенных зон.

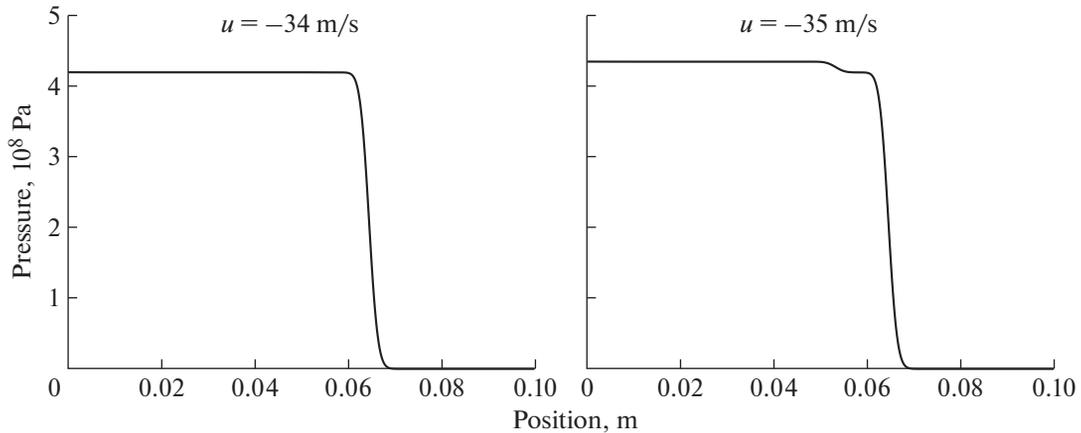
### 5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Ниже приводятся результаты численных экспериментов по ударно-волновым процессам в упругопластическом материале в приближении одномерной одноосной деформации. Представленные результаты соответствуют следующей постановке задачи:

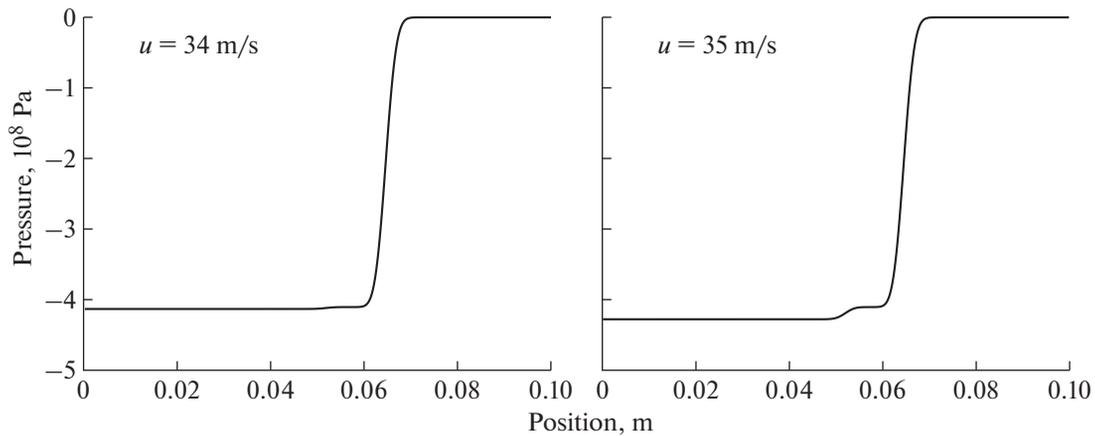
1. В качестве материала выбирается алюминий с УРС Ми–Грюнайзена. Соответствующие параметры УРС указаны в табл. 1.
2. Граничные условия – левая граница материала  $x = 0$  соответствует граничному условию жесткой недеформируемой стенки  $u = 0$ , правая  $x = 0.1$  – свободной лагранжевой границе с нулевым напряжением и давлением.
3. Начальные параметры – плотность  $\rho_0$ , скорость  $u_0$ , давление  $p_0 = 0$ , девиатор напряжений  $S_0 = 0$ . Графики на рисунках отвечают моменту времени  $10^{-5}$  с.

**Таблица 1.** Константы алюминия и критические значения для случаев ударной волны и волны разрежения

Параметры УРС		Критические значения	Ударная волна	Центрированная волна растяжения
$\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	2780	$u_0^*$ , м/с	–34.02	33.82
$\Gamma$	2.13	$\rho^*$ , кг/м <sup>3</sup>	2794.64	2765.43
$s$	1.338	$p^*$ , ГПа	0.42	–0.41
$a_0$ , м/с	5330	$u_0^{**}$ , м/с	–794.69	–
$\mu$ , ГПа	27.6	$\rho^{**}$ , кг/м <sup>3</sup>	3167.70	–
$Y$ , ГПа	0.29	$p^{**}$ , ГПа	14.15	–



Фиг. 1. Валидация критических значений для ударной волны (количество ячеек – 2000).



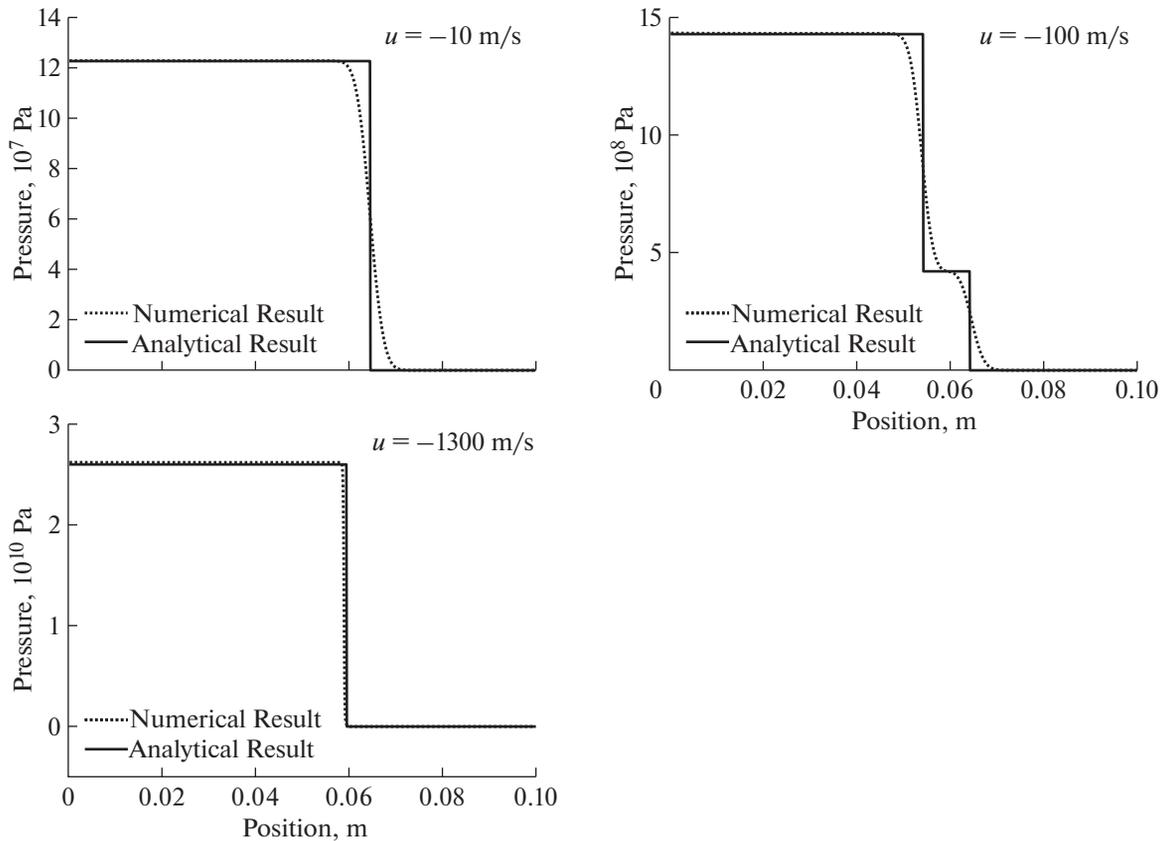
Фиг. 2. Валидация критических значений для волны разрежения.

4. В расчетах используется равномерная неподвижная сетка, состоящая из 1000 или 2000 ячеек. Вычисления проводятся с переменным шагом по времени, соответствующему условию устойчивости численного метода (условию CFL).

В первом столбце табл. 1 приведены константы УРС для алюминия, во втором – соответствующие критические параметры для ударной волны, а в третьем – для волны разрежения. Индексы \* и \*\* обозначают критические значения для перехода от одноволнового к двухволновому режиму и от двухволнового к одноволновому режиму соответственно.

Рассмотрим следующие два случая. Первый случай является примером ударной волны, когда объект ударяется о стену слева с определенной отрицательной начальной скоростью. Второй случай является примером центрированной волны растяжения, когда левая сторона объекта прикреплена к стене, а правая растягивается с положительной начальной скоростью. В разд. 3 приводились теоретические значения основных характеристик структуры волн, которые теперь сравниваются с численными результатами.

На фиг. 1 и 2 показано распределение давления, когда начальная скорость находится около первого критического значения. Видно, что численно рассчитанные критические значения должны лежать между 34–35 м/с, что очень близко к данным, приведенным в табл. 1. Соответствующие теоретические и численные значения приведены в табл. 2. Индекс 1 обозначает параметр состояния после первой волны, а индекс 2 – параметр состояния после второй волны. В этой таблице  $\rho_1$  и  $p_1$  являются  $\rho^*$  и  $p^*$ ,  $u_1 = u_0 - u_0^*$ , потому что, как уже отмечено, значение изменения скорости через первую волну фиксировано и величина равна  $u_0^*$ .



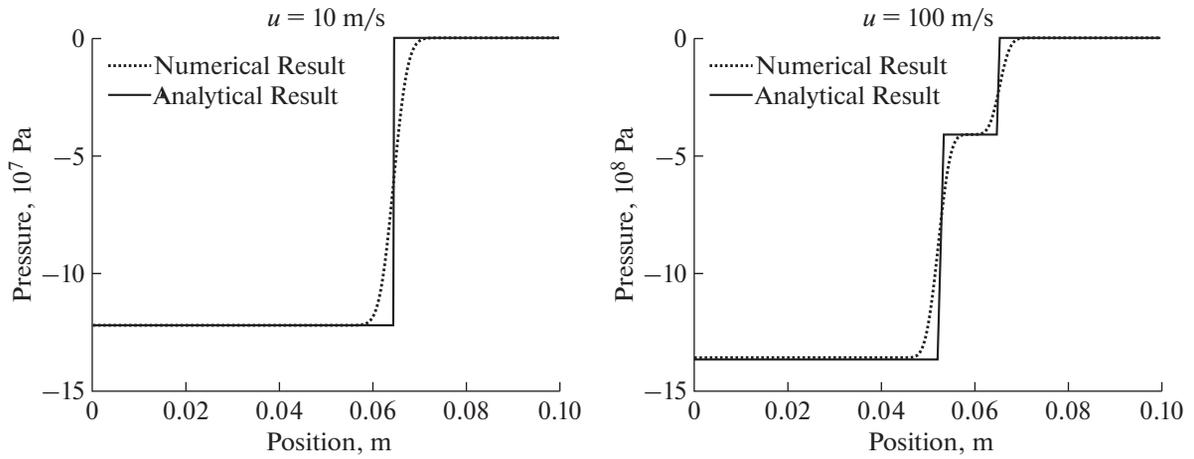
Фиг. 3. Распределение давления при нескольких различных скоростях для ударной волны.

При изменении начальной скорости соответственно меняется и режим волны. На фиг. 3 и 4 показаны численные результаты и теоретические значения для различных волновых режимов в случае ударных и центрированных волн. Соответствующие конкретные значения указаны в табл. 3 и 4.

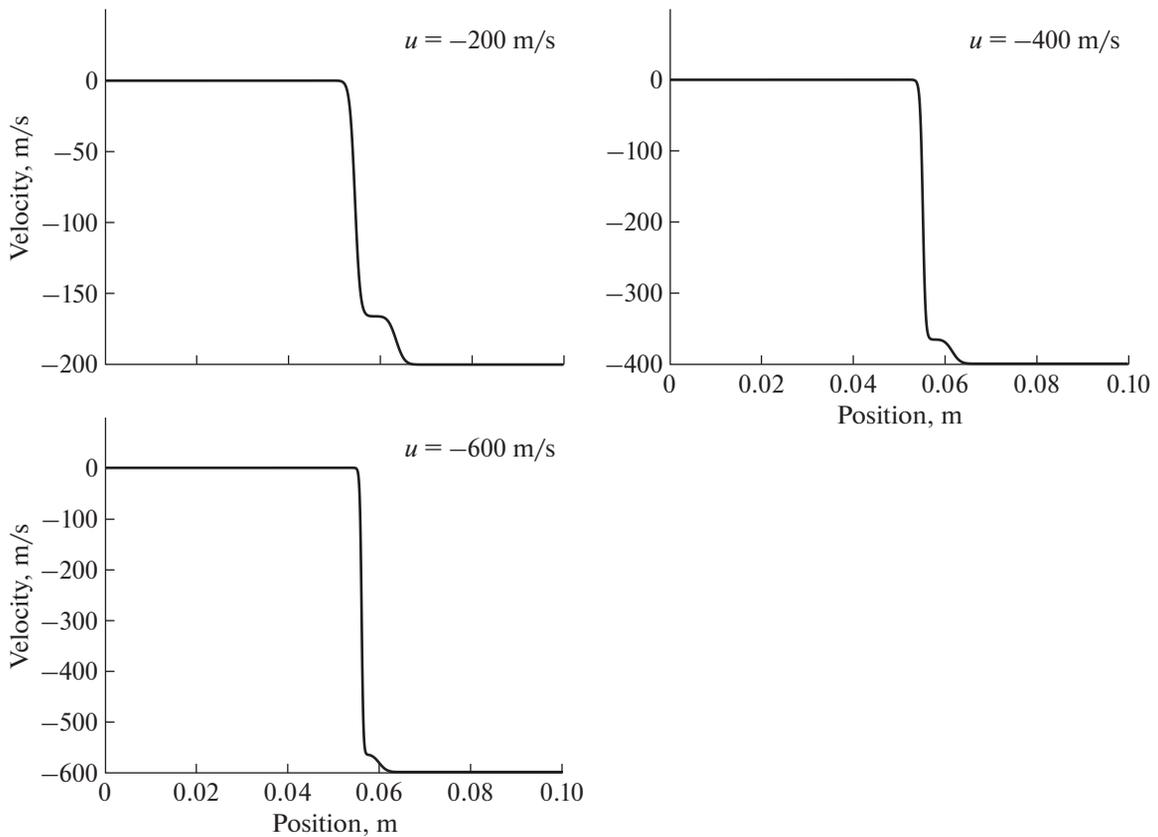
В двухволновом режиме начальная скорость продолжает увеличиваться, как показано на фиг. 5 и 6. Независимо от величины начальной скорости после первой волны параметры состояния изменяются от своего начального значения до значений, точно соответствующих параметрам текучести. Величина изменения скорости также фиксирована и является первым критическим значением. По мере увеличения начальной скорости в случае центрированной волны разрежения дальнейшего перехода к одноволновому режиму не происходит. Для ударной волны скорость распространения первой ударной волны уменьшается. При больших скоростях числен-

Таблица 2. Теоретические и численные значения в случае ударной и разреженной волн вокруг первого критического значения

Параметры	Теоретические значения (ударная волна)	Теоретические значения (разреженная волна)	Численные значения ( $u = -35$ м/с)	Численные значения ( $u = 35$ м/с)
$u_1$ , м/с	-0.98	1.18	-1.00	1.18
$\rho_1$ , кг/м <sup>3</sup>	2794.64	2765.43	2794.64	2765.43
$p_1$ , ГПа	0.42	-0.41	0.42	-0.410
$u_2$ , м/с	0	0	0.00	0.00
$\rho_2$ , кг/м <sup>3</sup>	2795.17	2764.82	2795.17	2764.81
$p_2$ , ГПа	0.436	-0.428	0.435	-0.427

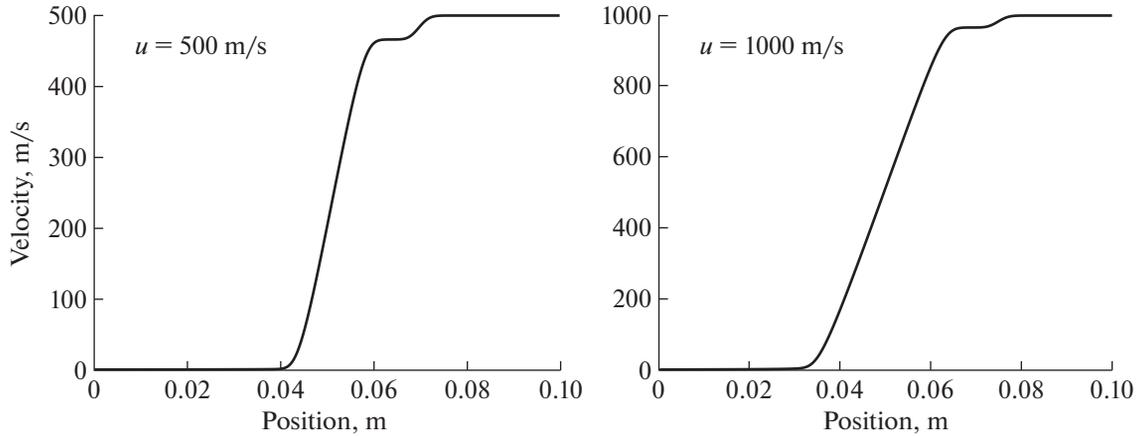


Фиг. 4. Распределение давления при нескольких различных скоростях для волны разрежения.



Фиг. 5. Распределение скорости для ударной волны при нескольких различных скоростях в пределах двухволнового режима (количество сеток – 2000).

ная диссипация первой волны достаточно большая. Это может быть связано с тем, что начальная скорость близка ко второму критическому значению, и что первая волна скоро начнет исчезать. Возможно, можно точно описать эту волну, используя более точный алгоритм и большее число сеток. Однако сравнение здесь только качественное с теоретическими выводами, поэтому конкретные значения не приводятся.



Фиг. 6. Распределение скорости для волны разрежения при нескольких различных скоростях в пределах двухволнового режима (число сеток – 2000).

Таблица 3. Теоретические значения в различных режимах

Параметры	$u = -10$ м/с	$u = -100$ м/с	$u = -1300$ м/с	$u = 10$ м/с	$u = 100$ м/с
$u_1$ , м/с	0	-65.98	–	0	66.18
$\rho_1$ , кг/м <sup>3</sup>	2784.31	2794.64	–	2775.69	2765.43
$p_1$ , ГПа	0.123	0.42	–	-0.122	-0.41
$x_1$ , м	0.0645	0.06394	–	0.06445–0.06463	0.06490–0.06553
$u_2$ , м/с	–	0	0	–	0
$\rho_2$ , кг/м <sup>3</sup>	–	2828.74	3388.46	–	2730.82
$p_2$ , ГПа	–	1.430	25.970	–	-1.366
$x_2$ , м	–	0.05407	0.05940	–	0.05220–0.05354

Таблица 4. Численные значения в различных режимах

Параметры	$u = -10$ м/с	$u = -100$ м/с	$u = -1300$ м/с	$u = 10$ м/с	$u = 100$ м/с
$u_1$ , м/с	0.00	-66.01	/	0	66.18
$\rho_1$ , кг/м <sup>3</sup>	2784.31	2794.64	/	2775.69	2765.43
$p_1$ , ГПа	0.123	0.420	/	-0.122	-0.410
$x_1$ , м	0.0644	0.06455	/	0.05835–0.07015	0.06105–0.07075
$u_2$ , м/с	/	0.00	0.00	/	0
$\rho_2$ , кг/м <sup>3</sup>	/	2828.72	3393.77	/	2730.54
$p_2$ , ГПа	/	1.431	26.173	/	-1.358
$x_2$ , м	/	0.05385	0.05888	/	0.04635–0.05775

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для расчета неконсервативной модели Уилкинса используется широко применяемая в настоящее время схема, консервативная по пути в фазовом пространстве в сочетании с численными методами HLL. Предложен выбор пути, альтернативный широко используемому в литературе прямолинейному, который приводит к решению линейной задачи и упрощает расчетную схему. В приближении одномерной одноосной деформации обе схемы (с прямолинейным и предложенным путем интегрирования в фазовом пространстве) совпадают в силу консервативности определяющей системы уравнений.

Получено хорошее совпадение численных результатов и теории в широком диапазоне параметров задачи ударно-волнового взаимодействия с недеформируемой стенкой. Численные расчеты не только совпадают с теоретическими результатами, но и хорошо отражают характеристики и тенденции упругопластического течения, показанные в теоретическом решении. Например, численные результаты описывают три различные структуры для ударной волны и две различные структуры для центрированной волны растяжения, а также изменение положения между двумя волнами при изменении начальной скорости в случае двухволновой структуры.

Предложенный численный метод может быть распространен на двух- и трехмерный случаи, а также использован в модели диффузной границы для описания динамических процессов в гомоматериальной среде. Это является предметом дальнейшей нашей работы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wilkins M.L.* Calculation of elastic-plastic flow. М.: California Univ. Livermore Radiat. Lab., 1963.
2. *Godunov S.K., Romenskii E.* Elements of continuum mechanics and conservation laws. М.: Springer Science & Business Media, 2003.
3. *Peshkov I., Romenski E.* A hyperbolic model for viscous Newtonian flows // *Continuum Mech. and Thermodynam.* 2016. V. 28. P. 85–104.
4. *Kojic M., Bathe K.J.* Studies of finite element procedures—Stress solution of a closed elastic strain path with stretching and shearing using the updated Lagrangian Jaumann formulation // *Computers & Structures.* 1987. V. 26. № 1–2. P. 175–179.
5. *Kulikovskii A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Y.* Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems. М.: CRC Press, 2000.
6. *Fridrich D., Liska R., Wendroff B.* Cell-centered Lagrangian Lax–Wendroff HLL hybrid method for elasto-plastic flows // *Computers & Fluids.* 2017. V. 157. P. 164–174.
7. *Maire P.H., Abgrall R., Breil J., et al.* A nominally second-order cell-centered Lagrangian scheme for simulating elastic–plastic flows on two-dimensional unstructured grids // *J. Comput. Phys.* 2013. V. 235. P. 626–665.
8. *Peshkov I., Boscheri W., Loubère R., et al.* Theoretical and numerical comparison of hyperelastic and hypoelastic formulations for Eulerian non-linear elastoplasticity // *J. Comput. Phys.* 2019. V. 387. P. 481–521.
9. *Pares C.* Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework // *SIAM J. Numer. Anal.* 2006. V. 44. № 1. P. 300–321.
10. *Dumbser M., Castro M., Parés C., et al.* ADER schemes on unstructured meshes for nonconservative hyperbolic systems: Applications to geophysical flows // *Computers & Fluids.* 2009. V. 38. № 9. P. 1731–1748.
11. *Munoz-Ruiz M.L., Parés C.* Godunov method for nonconservative hyperbolic systems // *J. ESAIM: Math. Model. and Numeric. Anal.* 2007. V. 41. № 1. P. 169–185.
12. *Maso Dal, LeFloch P.G., and Murat F.* Definition and weak stability of nonconservative products // *J. Math. Pures Appl.* 1995. V. 74. P. 483–548.
13. *Dumbser M., Hidalgo A., Castro M., et al.* FORCE schemes on unstructured meshes II: Non-conservative hyperbolic systems // *Comput. Meth. Appl. Mech. and Engineer.* 2010. V. 199. № 9–12. P. 625–647.
14. *Dumbser M., Balsara D.S.* A new efficient formulation of the HLLEM Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems // *J. Comput. Phys.* 2016. V. 304. P. 275–319.
15. *Serezhkin A., Menshov I.* On solving the Riemann problem for non-conservative hyperbolic systems of partial differential equations // *Comput. Fluid.* 2020. V. 210. P. 104675.
16. *Gavrilyuk S.L., Favrie N., Saurel R.* Modelling wave dynamics of compressible elastic materials // *J. Comput. Phys.* 2008. V. 227. № 5. P. 2941–2969.
17. *Menshov I.S., Mischenko A.V., Serejkin A.A.* Numerical modeling of elastoplastic flows by the Godunov method on moving Eulerian grids // *Math. Model. and Comput. Simulat.* 2014. V. 6. P. 127–141.
18. *Einfeild B.* On Godunov-type methods for gas dynamics // *SIAM J. Numer. Anal.* 1988. V. 25. № 2. P. 294–318.
19. *Toro E.F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. М.: Springer Science & Business Media, 2013.

## УТОЧНЕННЫЕ СХЕМЫ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД<sup>1)</sup>

© 2023 г. В. И. Голубев<sup>1,2,\*</sup>, И. С. Никитин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

<sup>2</sup> 123056 Москва, ул. 2-я Брестская, 19\18,

ИАП РАН Институт автоматизации проектирования РАН, Россия

\*e-mail: w.golubev@mail.ru, golubev.vi@mipt.ru

Поступила в редакцию 16.03.2023 г.

Переработанный вариант 16.03.2023 г.

Принята к публикации 26.06.2023 г.

Для устойчивого численного решения определяющей системы упруговязкопластической модели сплошной среды предложена явно- неявная схема 2-го порядка с явной аппроксимацией уравнений движения и неявной аппроксимацией определяющих соотношений, содержащих малый параметр времени релаксации в знаменателе нелинейных свободных членов. Для согласования порядков аппроксимации явного упругого и неявного корректировочного шагов построена неявная аппроксимация второго порядка для изотропной и анизотропной моделей упруговязкопластической модели сплошной среды. Получены уточненные корректировочные формулы для девиаторов напряжений после “упругого” шага расчета при различных представлениях функции вязкости. Полученные решения неявной аппроксимации 2-го порядка для девиаторов напряжений упруговязкопластической системы уравнений допускают предельный переход при стремлении времени релаксации к нулю. Корректировочные формулы, полученные таким предельным переходом, можно трактовать как регуляризаторы численных решений упругопластических систем. Библ. 28. Фиг. 5.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, упруговязкопластические среды, полулинейные гиперболические системы, явно-неявные схемы повышенного порядка.

DOI: 10.31857/S0044466923100046, EDN: MNBRTI

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Деформируемую среду, которая в нестационарных процессах нагружения проявляет вязкие свойства за пределом упругости, т.е. обладает динамическим пределом текучести, зависящим от скорости деформаций, называют упруговязкопластической. Одномерная модель такой среды была предложена в работах [1, 2] (модель Соколовского–Малверна). Ее обобщение на многомерный случай выполнено в работах [3, 4].

Определяющие уравнения модели выводятся из аддитивного представления девиатора тензора скоростей деформации в виде суммы упругой и вязкопластической составляющих. Объемная вязкопластическая составляющая при этом равна нулю. Поэтому дифференциальная часть нестационарных систем уравнений упруговязкопластических сред [4–7] совпадает с системой уравнений динамической теории упругости. Однако выражения для девиаторов скоростей вязкопластических деформаций за пределом упругости (пределом текучести) вносят в уравнения для девиаторных компонент напряжений сильно нелинейные свободные члены с характерным временем релаксации  $\tau$  в знаменателе.

В нестационарных процессах с характерным временем, много большим, чем  $\tau$ , тем более в квазистатических процессах, упруговязкопластические (УВП) среды ведут себя как упругопластические (УП) [8–10]. То есть при  $\tau \rightarrow 0$  УВП системы уравнений переходят в системы типа

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта № 19-71-10060), <https://rscf.ru/project/19-71-10060/>.

Прандтля–Рейса [9, 10]. С использованием формулировок моделей на основе вариационных неравенств этот факт доказан в монографиях [11, 12].

Однако для существенно нестационарных процессов с характерными временами, меньшими или порядка  $\tau$  эффекты скоростного упрочнения, резкого роста динамического предела текучести проявляют себя в полной мере [7, 10]. Для их описания требуется использовать полную УВП систему уравнений.

Как уже отмечено, УВП системы уравнений в своей дифференциальной части совпадают с уравнениями динамической упругости, поэтому заведомо являются гиперболическими и приводятся к дивергентному виду, что обеспечивает консервативность сеточно-характеристических и конечнообъемных численных методов решения начально-краевых задач.

В то же время УП системы уравнений, к которым сводятся теории пластического течения, не являются дивергентными. Для построения теории сильных разрывов приходится применять модифицированные формулировки [12, 13], в частности, использовать предельные переходы от УВП к УП обобщенному решению. При этом результат может зависеть от выбора “переходной” УВП модели [13, 14].

Поэтому формулировка существенно нестационарных задач неупругого деформирования в виде УВП системы уравнений, с одной стороны, отражает физику динамических процессов, а с другой стороны, обеспечивает регуляризацию недивергентных УП систем уравнений.

Устойчивое интегрирование определяющих соотношений связи напряжений и деформаций в УВП системах уравнений по явной схеме для малых времен релаксации  $\tau$  требует более сильного ограничения величины временного шага, нежели обычное курантовское ограничение. Устранить это дополнительное ограничение можно с помощью неявных схем расчета определяющих соотношений (“жесткой” части общей УВП системы уравнений). Важно, что описываемые ниже неявные схемы расчета определяющих уравнений для УВП сред не требуют решения систем алгебраических уравнений, и расчет каждого шага по времени проводится явно с обычным курантовским шагом по времени.

## 2. ИЗОТРОПНЫЕ И АНИЗОТРОПНЫЕ МОДЕЛИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СПЛОШНЫХ СРЕД

### 2.1. Система уравнений изотропной упруговязкопластической среды

В декартовой прямоугольной системе координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) система уравнений изотропной упруговязкопластической (УВП) среды при малых деформациях имеет вид [4, 7]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial s_{ij}}{\partial t} &= 2\mu e'_{ij} - 2\mu \frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{s_{kl}s_{kl}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle / \tau, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad e'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \\ s_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}, \quad \sigma = \sigma_{kk} / 3, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $v_i$  — компоненты вектора скорости,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений,  $s_{ij}$  — компоненты девиатора напряжений,  $\sigma$  — среднее напряжение,  $e_{ij}$  — компоненты тензора скорости деформации,  $e'_{ij}$  — компоненты девиатора скорости деформации,  $\sqrt{s_{kl}s_{kl}}$  — второй инвариант девиатора напряжений,  $\sigma_s$  — предел текучести,  $F(x)$  — нелинейная функция вязкости, описывающая скоростное упрочнение,  $F \geq 0$ ,  $F(0) = 0$ ,  $\langle F \rangle = FH(f)$ ,  $H(x)$  — функция Хэвисайда,  $\tau$  — характерное время релаксации компонент девиатора напряжений на поверхность текучести,  $\rho$  — плотность среды,  $\lambda$  и  $\mu$  — модули упругости Ламе. По повторяющимся индексам происходит суммирование.

## 2.2. Система уравнений анизотропной упруговязкопластической среды

Системы уравнений анизотропных упруговязкопластических сред возникают при построении континуальных моделей деформируемых сред с дискретным набором плоскостей скольжения (слоистые, блочные среды) и с нелинейными (вязкопластическими) условиями проскальзывания на контактных границах. Такие системы могут быть получены методом асимптотического осреднения [15] или с помощью дискретного варианта теории скольжения [5]. Кратко опишем схему построения континуальной модели с использованием теории скольжения.

В декартовой прямоугольной системе координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) рассмотрим безграничную упругую среду с ориентированной системой периодически повторяющихся параллельных плоскостей скольжения. Ориентацию этой системы зададим единичной нормалью  $\mathbf{n}$ . Расстояние между плоскостями скольжения постоянно и равно  $\varepsilon$ . Плотность материала  $\rho$ , а также модули упругости Ламе  $\lambda$  и  $\mu$  считаются заданными константами. Напряженное состояние описывается тензором напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ . Вектор касательного напряжения на плоскости скольжения равен  $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ , нормальное напряжение равно  $\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ . Введем вектор скоростей сдвига  $\boldsymbol{\gamma}$ , определяемый скачками касательной  $[\mathbf{V}_\tau]$  скоростей на контактных границах:  $\boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{V}_\tau]/\varepsilon$ .

Вязкопластические условия контактного взаимодействия имеют следующий вид:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_\tau}{|\boldsymbol{\sigma}_\tau|} \left\langle F \left( \frac{|\boldsymbol{\sigma}_\tau|}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle / \tau,$$

где  $\tau$  – время релаксации,  $F(x)$  – нелинейная функция вязкости, отличная от нуля за пределом условия скольжения  $|\boldsymbol{\sigma}_\tau| = \sigma_s$ .

Для того чтобы перейти к континуальной модели среды, содержащей систему таких плоскостей скольжения, будем рассматривать  $\boldsymbol{\gamma}$  как непрерывные функции координат и времени, имеющие смысл распределенных скоростей скольжений. Воспользуемся соотношениями теории скольжения, которая применялась многими авторами для построения моделей неупругих сред с непрерывным распределением плоскостей скольжения (см. обзор [5]). Эти соотношения позволяют учитывать вклад скоростей скольжений  $\boldsymbol{\gamma}$  в тензор скоростей неупругой деформации  $\mathbf{e}^\gamma$ :

$$\mathbf{e}^\gamma = (\mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \otimes \mathbf{n})/2.$$

Полный тензор скоростей деформации  $\mathbf{e}$  получается сложением упругих и неупругих составляющих и равен:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^\gamma, \quad \mathbf{e} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)/2.$$

Здесь  $\mathbf{v}$  – “макроскопическая” скорость частиц среды,  $\mathbf{e}^e$  – тензор скоростей упругой деформации, который связан с тензором напряжений законом Гука:  $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \lambda(\mathbf{e}^e : \mathbf{I})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{e}^e$ .

Сквозные условия для  $\boldsymbol{\gamma}$  соответствуют локальным контактным условиям:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_\tau}{|\boldsymbol{\sigma}_\tau|} \left\langle F \left( \frac{|\boldsymbol{\sigma}_\tau|}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle / \tau.$$

Система замыкается уравнениями движения:  $\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ .

Отметим, что принятое нелинейное условие вязкопластического скольжения справедливо в случае поджатых слоев (при  $\sigma_n < 0$ ). Соответственно, континуальная система уравнений слоистой среды применима при выполнении данного неравенства. В случае возникновения растягивающих напряжений на межслойных границах необходимо вводить дополнительные переменные – распределенные отслоения и уточнять построенную систему уравнений [5].

Если направление нормали к плоскости скольжения (межслойной границе) совпадает с направлением оси  $x_3$  принятой системы координат, то для нормали будет справедливо соотношение  $n_j = \delta_j^3$ , где  $\delta_j^i$  – символ Кронекера.

В этой системе координат тензор скоростей неупругих деформаций равен:

$$e_{3j}^\gamma = \frac{\sigma_{3j}}{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle / \tau.$$

Тогда система уравнений анизотропной упруговязкопластической среды, описывающая динамику слоистой среды с вязкопластическими условиями скольжения на межслойных контактных границах, перпендикулярных оси  $x_3$ , примет вид [5, 6]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad i \neq 3, \quad j \neq 3, \\ \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial t} &= \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3}, \\ \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial t} &= 2\mu e_{3j} - 2\mu \frac{\sigma_{3j}}{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\sigma_{3k}\sigma_{3k}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle / \tau, \quad j \neq 3, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим, что классическая система уравнений изотропной УВП среды также может быть обоснована с помощью теории скольжения [16] с использованием локального условия скольжения на произвольно ориентированной плоскости и интегрирования по всевозможным плоскостям, где превышено предельное условие  $|\sigma_\tau| = \sigma_s$ .

Обе УВП системы уравнений (1) и (2) являются полулинейными гиперболическими системами первого порядка дивергентного вида. Вся характерного вида нелинейность сосредоточена в свободных, недифференциальных членах уравнений для компонент девиаторов или касательных напряжений.

### 3. НЕЯВНАЯ СХЕМА 2-ГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С НЕЛИНЕЙНЫМИ СВОБОДНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Поскольку системы (1) и (2) по существу аналогичны друг другу, будем вести построение численной схемы на примере изотропной УВП системы (1). Особый интерес представляет схема расчета части системы уравнений для девиаторов с нелинейным свободным членом и возможным малым параметром в его знаменателе. Что касается остальных уравнений системы (1) – линейных уравнений движения для компонент скорости и уравнения для среднего напряжения, то их численная аппроксимация по какой-либо явной схеме требуемого (2-го) порядка не вызывает затруднений [17]. Будем считать, что такая аппроксимация проведена, значения скоростей и среднего напряжения на верхнем временном слое определены с учетом необходимых по постановке начальных и граничных условий.

Построим неявную аппроксимацию 2-го порядка уравнения для девиаторов тензора напряжений с нелинейным свободным членом из УВП системы (1) путем аппроксимации правой части полулинейных уравнений в виде полусуммы слагаемых на верхнем и нижнем слоях по времени:

$$\frac{s_{ij}^{n+1} - s_{ij}^n}{\Delta t} = 2\mu \frac{(e_{ij}^{/n+1} + e_{ij}^{/n})}{2} - \frac{2\mu}{\tau} \left( \frac{s_{ij}^{n+1}}{\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{s_{kl}^{n+1} s_{kl}^{n+1}}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle + \frac{s_{ij}^n}{\sqrt{s_{kl}^n s_{kl}^n}} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{s_{kl}^n s_{kl}^n}}{\sigma_s} - 1 \right) \right\rangle \right) / 2.$$

Индексами  $n + 1$  и  $n$  помечены значения искомым величин на верхнем и нижнем слоях разбиения по времени,  $\Delta t$  – шаг по времени.

Эту нелинейную систему уравнений для  $s_{ij}^{n+1}$  можно записать в виде:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{1}{\delta} \left( \frac{\bar{s}_{ij}^{n+1}}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}} \left\langle F \left( \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}} - 1 \right) \right\rangle + \frac{\bar{s}_{ij}^n}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}} \left\langle F \left( \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} - 1 \right) \right\rangle \right).$$

Здесь введены безразмерные компоненты  $\bar{s}_{ij}^{n+1} = s_{ij}^{n+1} / \sigma_s$ ,  $\bar{s}_{ij}^n = s_{ij}^n / \sigma_s$ ,  $\bar{s}_{ije}^{n+1} = s_{ije}^{n+1} / \sigma_s$ , где  $s_{ije}^{n+1} = s_{ij}^n + \mu (e_{ij}^{/n+1} + e_{ij}^{/n}) \Delta t$  – компоненты девиатора после “упругого” шага по времени,  $\delta = \frac{\tau \sigma_s}{\Delta t \mu}$  – безразмерный малый параметр системы уравнений.

Отметим, что с учетом проведенного ранее расчета значений компонент скорости на верхнем временном слое, компоненты “упругого” девиатора  $\bar{s}_{ije}^{n+1}$  также можно считать известными, как и значения  $\bar{s}_{ij}^n$  на  $n$ -м слое.

Нелинейную систему, из которой необходимо найти неизвестные компоненты девиатора на верхнем слое  $\bar{s}_{ij}^{n+1}$ , можно записать следующим образом:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \left( \delta + \frac{\langle F(\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}} - 1) \rangle}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}} \right) + \bar{s}_{ij}^n \frac{\langle F(\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} - 1) \rangle}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}} = \delta \bar{s}_{ije}^{n+1}. \tag{3}$$

Свернем эти уравнения последовательно с  $\bar{s}_{ij}^{n+1}$ ,  $\bar{s}_{ij}^n$ ,  $\bar{s}_{ije}^{n+1}$  и введем обозначения для возникающих сверток с неизвестными значениями

$$X = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^{n+1}}, \quad Y = \sqrt{\bar{s}_{kl}^{n+1} \bar{s}_{kl}^n}, \quad Z = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^{n+1}},$$

и уже вычисленными значениями

$$T = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}, \quad S = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kle}^{n+1}}, \quad \Sigma = \sqrt{\bar{s}_{kle}^{n+1} \bar{s}_{kle}^{n+1}}.$$

Получим нелинейную систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} X^2 \left( \delta + \frac{\langle F(X - 1) \rangle}{X} \right) + Y^2 \frac{\langle F(T - 1) \rangle}{T} &= \delta Z^2, \\ Y^2 \left( \delta + \frac{\langle F(X - 1) \rangle}{X} \right) + T^2 \frac{\langle F(T - 1) \rangle}{T} &= \delta S^2, \\ Z^2 \left( \delta + \frac{\langle F(X - 1) \rangle}{X} \right) + S^2 \frac{\langle F(T - 1) \rangle}{T} &= \delta \Sigma^2. \end{aligned}$$

Исключая неизвестные  $Y$  и  $Z$ , получаем уравнение для  $X^2$ :

$$X^2 \left( \delta + \frac{\langle F(X - 1) \rangle}{X} \right)^2 = \Delta P^2,$$

где

$$\Delta P^2 = \delta^2 \bar{s}_{ije}^{n+1} \bar{s}_{ije}^{n+1} - 2\delta \bar{s}_{ije}^{n+1} \bar{s}_{ij}^n \frac{\langle F(T - 1) \rangle}{T} + \bar{s}_{ij}^n \bar{s}_{ij}^n \left( \frac{\langle F(T - 1) \rangle}{T} \right)^2 = \delta^2 \tilde{S}^2 \geq 0,$$

$$\tilde{S}^2 = \tilde{s}_{kl}^{n+1} \tilde{s}_{kl}^{n+1}, \quad \tilde{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\bar{s}_{ij}^n \langle F(T - 1) \rangle}{T \delta}, \quad T = \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}.$$

Нетрудно видеть, что промежуточный девиатор  $\tilde{s}_{ij}^{n+1}$  и его свертка  $\tilde{S}$  вычисляются по результатам “упругого” шага по времени.

Поскольку для свертки  $\tilde{S}^2$  всегда выполняется  $\tilde{S}^2 \geq 0$ , получаем окончательное уравнение для неизвестной свертки  $X$ :

$$\delta X + \langle F(X - 1) \rangle = \delta \tilde{S}. \tag{4}$$

Отметим, что из (3) следует формула для искомым компонент девиатора на верхнем временном слое в следующем виде:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\delta \tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\left( \delta + \frac{\langle F(X - 1) \rangle}{X} \right)} = \frac{\delta \tilde{s}_{ij}^{n+1} X}{(\delta X + \langle F(X - 1) \rangle)} = \tilde{s}_{ij}^{n+1} \frac{X}{\tilde{S}}. \tag{5}$$

Таким образом, для полного определения величин  $\bar{s}_{ij}^{n+1}$  следует решить уравнение (4) и подставить результат в (5).

Уточним диапазоны допустимых значений для  $X$ .

При  $X < 1$  решение (4) тривиально:  $X = \tilde{S}$ .

Следовательно,  $\bar{s}_{ij}^{n+1} = \tilde{s}_{ij}^{n+1}$  с критерием применимости  $\tilde{S} < 1$  после “упругого” шага.

При  $X \geq 1$  следует решить уравнение

$$\delta X + F(X - 1) = \delta \tilde{S}. \tag{6}$$

Для этого нужно конкретизировать функцию вязкости с учетом ее упомянутых выше свойств  $F \geq 0, F(0) = 0, \langle F \rangle = FH(f)$ .

#### 4. КОРРЕКТИРОВОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ ВЯЗКОСТИ

##### 4.1. Изотропная УВП среда

Как правило, для функции вязкости используются степенные или полиномиальные аппроксимации, построенные по результатам экспериментальных исследований [7, 10]. Рассмотрим случай линейной функции вязкости  $F(x) = x$ , когда уравнение (6) имеет точное решение, независимо от величины параметра  $\delta$ .

В этом случае решение уравнения (6), условие  $X \geq 1$  и искомые компоненты девиатора имеют вид:

$$X = \frac{(1 + \delta \tilde{S})}{(1 + \delta)}, \quad \tilde{S} \geq 1, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \frac{(1 + \delta \tilde{S})}{(1 + \delta)}. \tag{7}$$

При малых  $\delta$  имеем

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \sim \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} (1 + \delta(\tilde{S} - 1)).$$

Рассмотрим случай степенной функции вязкости  $F(x) = x^q$ . Необходимо решить уравнение при  $\delta \ll 1$ :

$$\delta X + (X - 1)^q = \delta \tilde{S}, \quad X \geq 1, \quad q > 0.$$

Будем искать решение в виде асимптотического ряда по степеням  $\delta^{1/q}$  с точностью до первого малого члена:

$$X = 1 + C_1 \delta^{1/q} + \dots$$

Подставляя это разложение и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\delta$ , получим значение неизвестного коэффициента разложения:

$$C_1 = (\tilde{S} - 1)^{1/q}, \quad X \sim 1 + (\tilde{S} - 1)^{1/q} \delta^{1/q}, \quad \tilde{S} \geq 1.$$

Отсюда следует решение для девиаторов при произвольном положительном  $q$ :

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} \sim \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{S}} \left( 1 + (\tilde{S} - 1)^{1/q} \delta^{1/q} \right). \tag{8}$$

Легко видеть, что частное точное решение (7) при малых  $\delta$  совпадает с полученным приближенным решением.

Также обсудим вопрос предельного перехода  $\delta \rightarrow 0$ , поскольку формула для промежуточного девиатора  $\bar{s}_{ij}^{n+1}$  содержит малый параметр в знаменателе:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{s}_{ije}^{n+1}} - \frac{\tilde{s}_{ij}^n \langle F(T - 1) \rangle}{T \delta}.$$

Для этого уравнение (6), справедливое на  $n + 1$ - слое по времени, перепишем для  $n$ -го слоя:

$$\delta T + \langle F(T - 1) \rangle = \delta \sqrt{\tilde{s}_{kl}^n \tilde{s}_{kl}^n}.$$

Отсюда имеем

$$\langle F(T-1) \rangle = \delta \left\langle \sqrt{\tilde{s}_{kl}^n \tilde{s}_{kl}^n} - \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} \right\rangle,$$

и в формуле для промежуточного девиатора удается снять особенность при  $\delta \rightarrow 0$ :

$$\tilde{s}_{ij}^{n+1} = \bar{s}_{ije}^{n+1} - \frac{\bar{s}_{ij}^n}{\sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n}} \left\langle \sqrt{\tilde{s}_{kl}^n \tilde{s}_{kl}^n} - \sqrt{\bar{s}_{kl}^n \bar{s}_{kl}^n} \right\rangle, \quad \bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ij}^{n+1}}{\tilde{\Sigma}}. \quad (9)$$

#### 4.2. Анизотропная (слоистая) УВП среда

Что касается системы уравнений (2) для анизотропной упруговязкопластической среды, описывающей динамику слоистой среды с вязкопластическими условиями скольжения на межслойных контактных границах, то для ее численного решения корректировка касательных напряжений, скажем, аналога формул (8) и (9), будет выглядеть следующим образом. Для степенного вязкопластического условия скольжения на межслойных границах корректировочные формулы имеют вид:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{3j}^{n+1} &\sim \frac{\tilde{\sigma}_{3j}^{n+1}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{3k}^{n+1} \tilde{\sigma}_{3k}^{n+1}}} \left( 1 + (\sqrt{\tilde{\sigma}_{3k}^{n+1} \tilde{\sigma}_{3k}^{n+1}} - 1)^{1/q} \delta^{1/q} \right), \\ \tilde{\sigma}_{3j}^{n+1} &= \bar{\sigma}_{3je}^{n+1} - \frac{\bar{\sigma}_{3j}^n}{\sqrt{\bar{\sigma}_{3k}^n \bar{\sigma}_{3k}^n}} \frac{\langle F(\sqrt{\bar{\sigma}_{3k}^n \bar{\sigma}_{3k}^n} - 1) \rangle}{\delta}, \quad j \neq 3, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Предельный переход к нулевому времени релаксации (нулевой вязкости)  $\delta \rightarrow 0$  дает следующий результат:

$$\tilde{\sigma}_{3j}^{n+1} = \bar{\sigma}_{3je}^{n+1} - \frac{\bar{\sigma}_{3j}^n}{\sqrt{\bar{\sigma}_{3l}^n \bar{\sigma}_{3l}^n}} \left\langle \sqrt{\tilde{\sigma}_{3l}^n \tilde{\sigma}_{3l}^n} - \sqrt{\bar{\sigma}_{3l}^n \bar{\sigma}_{3l}^n} \right\rangle, \quad \tilde{\Sigma}^2 = \tilde{\sigma}_{3l}^{n+1} \tilde{\sigma}_{3l}^{n+1}, \quad \bar{\sigma}_{3j}^{n+1} = \frac{\tilde{\sigma}_{3j}^{n+1}}{\tilde{\Sigma}}.$$

Таким образом, показано, что полученные решения неявной аппроксимации 2-го порядка для девиаторов напряжений УВП системы уравнений допускают предельный переход при малом времени релаксации. Следовательно, формулы (7)–(9) для различных представлений функций вязкости при малых  $\delta$  можно трактовать как регуляризаторы численных решений УП систем. Сами эти формулы представляют собой алгебраические корректировки компонент девиаторов напряжений, полученных в результате расчета “упругого” шага по времени.

Этот прием, предложенный в свое время в работах [18, 19], широко использовался в вычислительной практике, например, в [20–22] и в огромном количестве других работ, но трактовался как корректировка 1-го порядка в результате физического расщепления упругопластического процесса на упругий шаг и приведение девиаторов напряжений на круг текучести. Сама эта корректировка в принятых обозначениях выглядит следующим образом:

$$\bar{s}_{ij}^{n+1} = \frac{\tilde{s}_{ije}^{n+1}}{\sqrt{\tilde{s}_{kle}^{n+1} \tilde{s}_{kle}^{n+1}}}.$$

В приведенном изложении специфические корректировки девиаторов напряжений за пределом текучести 2-го порядка возникают как обоснованный результат построения явно-неявной схемы 2-го порядка для УВП системы уравнений, а корректировка (9) – для УП системы уравнений.

## 5. РАСЧЕТ УПРУГОГО ШАГА

Система уравнений изотропной линейно упругой среды может быть получена из системы уравнений упруговязкопластической среды (1), если формальным положить нелинейную функ-

цию вязкости  $F(y)$  тождественно равной нулю. В полных напряжениях и скоростях она может быть записана в каноническом виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + A_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} = \mathbf{f},$$

где матрицы  $A_1, A_2, A_3$  являются функциями упругих параметров среды  $\lambda, \mu, \rho$ , а вектор  $\mathbf{u}$  включает в себя все шесть независимых компонент тензора напряжений и три компоненты вектора скорости среды. В правой части системы стоит вектор  $\mathbf{f}$ , описывающий действующую на рассматриваемый элементарный объем внешнюю силу. Для ее решения в настоящей работе применялся сеточно-характеристический метод на параллелепипедных сетках. На первом этапе производилось расщепление по пространственным направлениям, сводящее исходную трехмерную дифференциальную систему уравнений к набору из трех последовательно решаемых одномерных систем уравнений. Сравнение различных схем пространственного расщепления для задач акустики и упругости представлено, например, в работах [23, 24]. Для определенности рассматривается шаг расщепления по координате  $x_1$ . В дальнейшем, ввиду гиперболичности полученных одномерных систем, возможно введение новых неизвестных функций, сводящих задачу к набору одномерных линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \xi \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0,$$

где  $\xi$  — одно из собственных значений матрицы  $A_1$ . Для решения данного уравнения справедливо тождество

$$w(x_1, x_2, x_3, t + \Delta t) = w(x_1 - \xi \Delta t, x_2, x_3, t),$$

где  $\Delta t$  — используемый при расчетах шаг по времени. Фиксируя в пространстве некоторый набор узлов расчетной сетки (шаблон), в общем случае, получаем одномерную задачу интерполяции. В работе использовался интерполянт в виде полинома третьей степени, обеспечивающий третий порядок аппроксимации полученной одномерной схемы как по времени, так и по пространству [25]. Ее расчетная формула имеет вид

$$w_m^{n+1} = w_m^n + \frac{\sigma}{2}(w_{m-1}^n - w_{m+1}^n) + \frac{\sigma^2}{2}(w_{m-1}^n - 2w_m^n + w_{m+1}^n) - \frac{\sigma(1 - \sigma^2)}{6}(w_{m-2}^n - 3w_{m-1}^n + 3w_m^n - w_{m+1}^n),$$

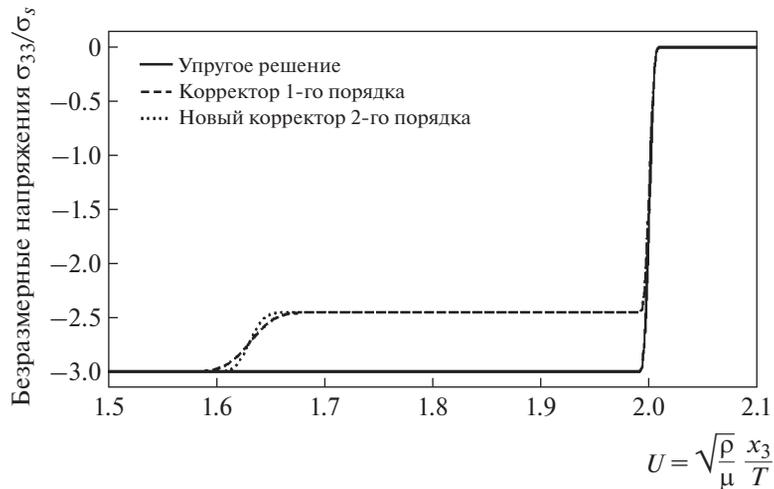
где верхний индекс относится к шагу по времени, а нижний — к пространственной координате  $x_1$ ,  $\sigma = \xi \Delta t / \Delta x_1 < 1$  — число Куранта. Отличительной особенностью данной схемы является практически полное отсутствие осцилляций даже на разрывных решениях, что объясняется ее близостью к области монотонных схем в пространстве неопределенных коэффициентов [26].

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

С использованием описанной явно-неявной схемы было проведено моделирование процесса распространения динамических возмущений в изотропной упруговязкопластической среде от мгновенно приложенной нагрузки при различных значениях времени релаксации (параметра  $\delta$ ), в том числе и при  $\delta = 0$ . Среда описывалась следующими параметрами: плотность  $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$ , скорость распространения продольных волн  $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} = 4500 \text{ м/с}$ , скорость распространения поперечных волн  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  варьировалась, предел текучести  $\sigma_s = 112\,500 \text{ Па}$ . Расчетная область представляла собой параллелепипед размерами  $50 \times 50 \times 10\,000 \text{ м}$ . Она покрывалась кубической расчетной сеткой с шагом  $5 \text{ м}$ . Для корректного расчета задачи о нагружении полупространства на боковых гранях расчетной области использовалось условие нулевой пространственной производной решения. Для устойчивости используемой на этапе решения упругой задачи явной сеточно-характеристической схемы использовался шаг по времени  $0.001 \text{ с}$ , удовлетворяющий условию Куранта. Рассчитывалось  $2 \text{ с}$  физического эксперимента.

### 6.1. Нормальная нагрузка на упруговязкопластическое полупространство

В трехмерной постановке рассматривался случай мгновенного приложения к изотропному упруговязкопластическому полупространству  $x_3 > 0$  сжимающей нагрузки  $\sigma_n = -3\sigma_s = -337\,500 \text{ Па}$  вдоль оси  $x_3$ . Скорость поперечных волн в среде составляла  $2250 \text{ м/с}$ . В случае изотропной ли-



Фиг. 1. Распределение напряжения  $\sigma_{33}$  вдоль оси  $x_3$  через 2 с от начала расчета,  $\sigma_n = -3\sigma_s$ ,  $\delta = 0$ .

нейно-упругой среды известно аналитическое решение, заключающееся в распространении продольной волны, которое изображено на фиг. 1. Для случая упругопластической среды аналитическое решение представляет собой упругий предвестник – продольную волну, а также волну пластических деформаций, распространяющуюся с меньшей скоростью  $c_f = \sqrt{(\lambda + 2\mu/3)/\rho}$ . При этом между двумя разрывами решения устанавливается зона постоянных по пространству напряжений, величина которых  $\sigma_{33}^*$  также может быть вычислена аналитически. Используя условие текучести Мизеса при определенном соотношении между компонентами напряжений  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}\lambda/(\lambda + 2\mu)$ , получаем

$$(\sigma_{11} - \sigma/3)^2 + (\sigma_{22} - \sigma/3)^2 + (\sigma_{33} - \sigma/3)^2 = \sigma_s^2, \quad \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + 2\mu)} \sigma_{33}.$$

Отсюда имеем

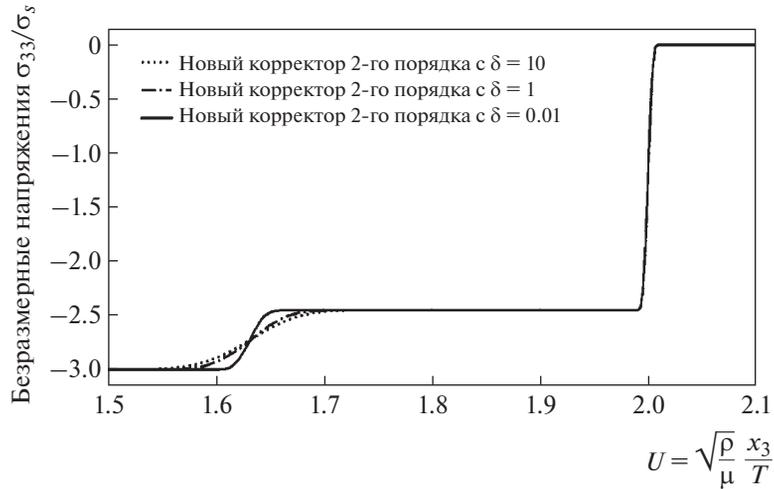
$$\sigma_{33}^* = \frac{(\lambda + 2\mu)\sqrt{6}}{\mu} \frac{\sigma_s}{4}.$$

На фиг. 1 представлены численные решения, полученные по известным ранее расчетным формулам 1-го порядка аппроксимации, и по предложенным в настоящей работе формулам 2-го порядка аппроксимации. Видно, что при одинаковой точности разрешения разрыва на упругом предвестнике, точность разрешения разрыва на волне пластичности выше при использовании разработанного нами алгоритма. Отметим, что в обоих случаях корректно восстанавливаются скорости распространения обеих волн и значение напряжения  $\sigma_{33}^*$ .

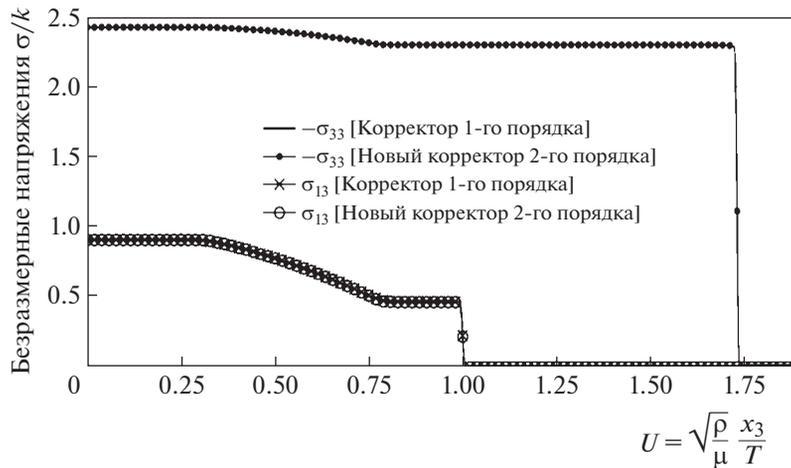
Кроме того, разработанный в настоящей работе вычислительный алгоритм может быть успешно использован в том случае, если время релаксации  $\tau$  не мало. Были проведены расчеты по деформированию упруговязкопластической среды с линейным условием вязкости для ненулевых значений безразмерного параметра  $\delta$ . Результаты расчетов представлены на фиг. 2. Видно, что увеличение вязкости среды приводит к увеличению размывания фронта пластической волны и не влияет на фронт упругого предвестника.

### 6.2. Комбинированная нагрузка на УВП полупространство

В трехмерной постановке также было получено численное решение задачи о мгновенном приложении совместно сдвиговой и сжимающей нормальной нагрузок на изотропное упруговязкопластическое полупространство  $x_3 > 0$ . Для этой задачи существует аналитическое решение [27] в предельном случае идеальной упругопластической среды (исчезающей вязкости). Сравнение с аналитикой позволяет оценить точность численных решений различного порядка аппроксимации.



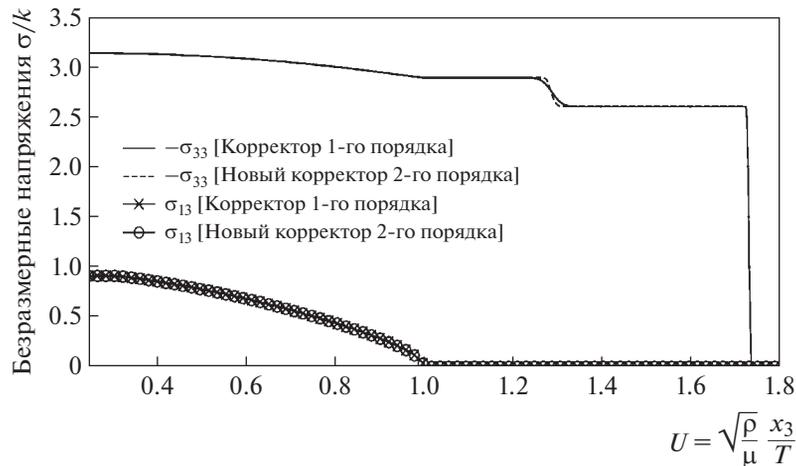
**Фиг. 2.** Распределение напряжения  $\sigma_{33}$  вдоль оси  $x_3$  через 2 с от начала расчета для различных значений параметра  $\delta$ ,  $\sigma_n = -3\sigma_s$ .



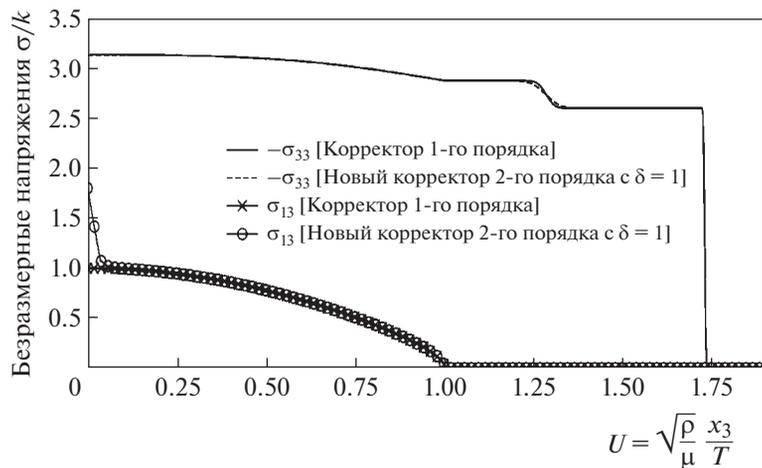
**Фиг. 3.** Пространственное распределение касательных и сдвиговых напряжений при расчете по схеме из работы [18] и по явно- неявной схеме,  $\sigma_n = -2.4k$ ,  $\sigma_\tau = 0.9k$ .

Скорость поперечных волн в среде была равна 2598 м/с. Для возможности сопоставления результатов проведенных расчетов с аналитическим решением, представленным в работе [27], в рассмотрение была введена величина  $k = \sigma_s/\sqrt{2}$ . Соответствующие рассматриваемой постановке граничные условия при  $x_3 = 0$  на компоненты тензора напряжений имели вид:  $\sigma_{33} = \sigma_n$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_\tau$ . На фиг. 3 представлены результаты расчетов, полученные с использованием формулы из работы [18] и представленной в настоящей работе корректировки. Использованы значения:  $\sigma_n = -2.4k$ ,  $\sigma_\tau = 0.9k$ . Видно, что фронты волн на обоих компонентах тензора напряжений разрешаются с одинаковой точностью обоими методами, граничные условия выполняются, скорости движения фронтов совпадают с приведенными в работе [27, рис. 5].

Далее, нами был проведен расчет с увеличением сжимающей нагрузки до значений, использованных в работе [27, рис. 6]. Результаты численных расчетов по обеим схемам представлены на фиг. 4. На компоненте  $\sigma_{33}$  тензора напряжений наблюдаются две волны: продольная волна – упругий предвестник, и пластическая волна, распространяющаяся с меньшей скоростью. Анализ расчетов показывает, что предложенная в работе схема 2-го порядка аппроксимации с той же



Фиг. 4. Пространственное распределение касательных и сдвиговых напряжений при расчете по схеме из работы [18] и по явно-неявной схеме,  $\sigma_n = -3.1k$ ,  $\sigma_\tau = 0.9k$ .



Фиг. 5. Пространственное распределение касательных и сдвиговых напряжений при расчете по схеме из работы [18] и по явно-неявной схеме,  $\sigma_n = -2.4k$ ,  $\sigma_\tau = 1.8k$ .

точностью разрешает разрыв на продольной волне и непрерывное решение на компоненте  $\sigma_{13}$ , однако, более точно воспроизводит пластическую волну.

Достоинством самой системы уравнений УВП модели и предложенного численного метода ее решения по сравнению с идеальной УП моделью является то, что она допускает касательные нагрузки, превышающие предел текучести. При ненулевом значении времени релаксации зоны такого превышения сосредоточены в окрестности границы деформируемой области, где приложены высокоамплитудные касательные нагрузки. При малых значениях времени релаксации эти зоны носят пограничный характер, вне этих зон решение мало отличается от идеально упруго-пластического. Для иллюстрации этого эффекта приведены результаты численного решения с  $\sigma_\tau = 1.8k$  на фиг. 5.

Еще раз отметим, что все построенные на графиках распределения напряжений получены в результате расчета по полноценному коду для трехмерных динамических систем уравнений, а не по аппроксимации одномерной нестационарной системы. Обычно в этом случае наблюдается значительное размывание волновых фронтов, в том числе и упругих, особенно для больших значений времени расчета. Предложенная явно-неявная схема дает хорошие результаты в широком диапазоне комбинированных нагрузок, при различных временах релаксации, в том числе допус-

кает предельный переход к его нулевому значению (регуляризованное УП решение) и лучше держит волновые фронты в сравнении с широко используемой схемой [18]. Такой результат достигается за счет использования высокоточной сеточно-характеристической схемы для расчета явного упругого шага и предложенной неявной аппроксимации второго порядка для нелинейных свободных членов.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовано динамическое поведение изотропной и анизотропной упруговязкопластической среды с произвольной функцией вязкости под действием внешней нагрузки. Возникающая система уравнений является полулинейной гиперболической с малым параметром в знаменателе свободного члена, что не позволяет напрямую применять явные расчетные схемы. Предложен оригинальный подход, основанный на неявной аппроксимации части системы уравнений для девиаторов с нелинейным свободным членом и возможным малым параметром в его знаменателе. Путем алгебраических преобразований показано, что это приводит к явному расчетному алгоритму, обладающему вторым порядком аппроксимации по времени.

Полученные решения неявной аппроксимации 2-го порядка для девиаторов напряжений упруговязкопластической системы уравнений допускают предельный переход при стремлении времени релаксации к нулю. Корректировочные формулы, полученные таким предельным переходом, можно трактовать как регуляризаторы численных решений упругопластических систем.

Для получения промежуточного численного решения линейной упругой задачи в работе использован сеточно-характеристический метод на параллелепипедных расчетных сетках. Он позволяет обеспечить повышенный порядок аппроксимации, совместно с отсутствием сильных осцилляций даже на разрывных решениях.

Получено численное решение трехмерной задачи о мгновенном приложении сжимающей и сдвиговой нагрузок к упруговязкопластическому полупространству. Продемонстрированы сохранение точности разрешения фронта упругой волны и повышение точности разрешения фронта пластической волны. Дальнейшие исследования могут быть направлены на применение рассмотренных в работе моделей и численных методов в обратных сейсмических задачах [28].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Malvern L.E.* The propagation of longitudinal waves of plastic deformations in a bar of material exhibiting a strain-rate effect // *J. Appl. Mech.* 1951. V. 18.
2. *Соколовский В.В.* Распространение упруго-вязкопластических волн в стержнях // *Прикл. матем. и механ.* 1948. Т. 12. № 8.
3. *Пэжина П.* Основные вопросы вязкопластичности. М.: Мир, 1968. 176 с.
4. *Кукуджанов В.Н.* Вычислительная механика сплошных сред. М.: Физматлит, 2008. 320 с.
5. *Никитин И.С.* Динамические модели слоистых и блочных сред с проскальзыванием, трением и отслоением // *Изв. РАН. Механ. твердого тела.* 2008. № 4. С. 154–165.
6. *Никитин И.С.* Теория неупругих слоистых и блочных сред. М.: Физматлит, 2019. 190 с.
7. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 310 с.
8. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962. 432 с.
9. *Кукуджанов В.Н.* Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида // *Механ. твердого тела.* 2001. № 5. С. 96–111.
10. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
11. *Дюво Г., Лионс Н.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
12. *Садовский В.М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М.: Наука, 1997. 208 с.
13. *Dal Maso G., LeFloch P.G., Murat F.* Definition and weak stability of nonconservative products // *J. de Mathématiques Pures et Appliquées.* 1995. V. 74. № 6. P. 483–548.
14. *Parés C.* Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems: a theoretical framework // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* 2006. V. 44. № 1.
15. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
16. *Nikitin I.S.* Constitutive equations of the elastoviscoplastic model and slip theory // *Mechanics of Solids.* 2007. V. 42. № 2. P. 260–270.

17. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 600 с.
18. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 163–212.
19. Wilkins M.L. Computer simulation of dynamic phenomena. Berlin-Heidelberg–New-York: Springer, 1999. 264 p.
20. Кукуджанов В.Н. Метод расщепления упругопластических уравнений // Механ. твердого тела. 2004. № 1. С. 98–108.
21. Абузаров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л., Кочетков А.В. и др. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 940–953.
22. Бураго Н.Г. Моделирование разрушения упругопластических тел // Вычисл. механ. сплошных сред. 2008. Т. 1. №. 4. С. 5–20.
23. Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B. Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting // Computer Research and Modeling. 2022. V. 14(4). P. 899–910.
24. Petrov I., Golubev V., Shevchenko A. Higher-Order Grid-Characteristic Schemes for the Acoustic System // Proc. 2021 Ivannikov Memorial Workshop, IVMEM 2021. 2021. P. 61–65.
25. Golubev V.I., Shevchenko A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B., Malovichko M.S. Compact Grid-Characteristic Scheme for the Acoustic System with the Piece-Wise Constant Coefficients // Internat. Journal of Applied Mechanics. 2022. P. 2250002.
26. Холодов А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т. 17. № 6. С. 1476–1492.
27. Bleich H.H., I. Nelson I. Plane Waves in an Elastic-Plastic Half-Space Due to Combined Surface Pressure and Shear // ASME. J. Appl. Mech. 1966. V. 33:1. P. 149–158.
28. Golubev V.I., Nikitin I.S., Vasyukov A.V., Nikitin A.D. Fractured inclusion localization and characterization based on deep convolutional neural networks // Procedia Structural Integrity. 2023. V. 43. P. 29–34.

## ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТОЧНОЙ СХОДИМОСТИ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МЕТОДА НА ХИМЕРНЫХ СЕТКАХ В ЗАДАЧЕ УЛЬТРАЗВУКОВОГО НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ РЕЛЬСОВОГО ПОЛОТНА<sup>1)</sup>

© 2023 г. А. А. Кожемяченко<sup>1,2,\*</sup>, А. В. Фаворская<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9,  
Московский физико-технический институт, Россия

<sup>2</sup> 117218 Москва, Нахимовский пр-т., 36, к. 1,  
Научно-исследовательский институт системных исследований РАН, Россия

\*e-mail: anton-kozhemyachenko@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.05.2023 г.  
Переработанный вариант 27.05.2023 г.  
Принята к публикации 26.06.2023 г.

В работе рассматривается пример решения трехмерной прямой задачи ультразвукового контроля в рельсовом полотне, представляемого в виде линейно-упругой среды, с использованием сеточно-характеристического метода на криволинейной структурированной химерной и регулярных структурированных сетках. Между химерной и регулярными сетками используется взаимная интерполяция, учитывающая особенности перехода от криволинейной к регулярной сеткам в трехмерном пространстве. Предложен аналитический алгоритм для построения химерной сетки. Приведены анализ сходимости разработанных численных алгоритмов в зависимости от изменения шага по пространственным направлениям и сравнительный анализ полноволновых полей модуля скорости распространения возмущения от источника. Библ. 43. Фиг. 17.

**Ключевые слова:** численное моделирование, сеточно-характеристический метод, химерные сетки, неразрушающий контроль, ультразвуковой метод, рельсовое полотно.

**DOI:** 10.31857/S0044466923100071, **EDN:** FOEBUS

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Методы неразрушающего контроля [1] позволяют следить за состоянием различных объектов мониторинга в условиях их длительного срока эксплуатации. Широкое распространение получили такие методы неразрушающего контроля, как магнитные и/или электромагнитные [2], нейтронные [3], рентгеновской дифракции [4], римановской спектроскопии [5] и ультразвуковые [6]. Из них ультразвуковые методы, основанные на линейной зависимости между временем прохождения волны и напряжением эластичного материала, просты в использовании и демонстрируют высокую эффективность при рассмотрении металлических объектов. Согласно [5] ультразвуковые методы при измерении внутренних напряжений подразделяются на три типа: с использованием только продольных волн [7], с использованием также поперечных волн [8] и с использованием продольных волн с критическим преломлением (LCR waves) [9]. Несмотря на несовершенство теории и зависимости от множества параметров окружающей среды и материала [10], ультразвуковые методы неразрушающего контроля широко используются в задачах наблюдения за состоянием железнодорожного полотна благодаря их сильной проникающей способности и высокой чувствительности [11]. Излучаемые зондами ультразвуковые волны отражаются от контактных усталостных повреждений, а их переотражения, проекции и дифракция преобразуются и собираются в т.н. В-сканированных (B-scan) изображениях [12]. В настоящее

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта № 20-71-10028).

время одним из перспективных направлений в этой области является создание автоматизированного интеллектуального алгоритма обработки изображений В-сканирования [13, 14] с целью точного и стабильного определения дефекта без необходимости ручной обработки.

Методы математического и численного моделирования активно используются в ряде задач безопасности на железнодорожном транспорте. Например, в [15] проведено сравнение метода конечных элементов и объединенных метода конечных элементов и безэлементного метода Галеркина для задачи ударпрочности железнодорожного транспорта. Для анализа образования усталостных трещин при постоянных и переменных нагрузках проводится численное моделирование с использованием метода граничных элементов, конечных элементов, безэлементного метода Галеркина, обобщенного метода конечных элементов [16–20].

Численное решение прямой задачи ультразвукового неразрушающего контроля железнодорожного полотна может быть сведено к решению начально-краевой задачи для уравнений упругого тела или в более общей постановке к задаче численного решения гиперболической системы уравнений. Для решения таких задач используются конечно-элементные [21] и конечно-разностные [22] методы. Среди методов конечных элементов наибольший интерес представляют вариации метода Галеркина [23–25] и метод спектральных элементов [26, 27]. Среди конечно-разностных методов можно выделить методы Годунова [28], методы, использующие схему Кабаре [29, 30], методы на сдвинутых сетках [31, 32], также к числу конечно-разностных методов относится сеточно-характеристический метод [33–35], который используется в настоящей работе.

Для решения уравнений математической физики в последнее время стали использоваться химерные или перекрывающиеся расчетные сетки, которые ранее применялись для решения гидродинамических задач [36–39]. Так, сеточно-характеристический метод с использованием химерных сеток позволяет описывать границы сложной формы [40], в том числе контактные [41] или не сонаправленные с координатными осями [34].

В разд. 2 рассматривается система уравнений, используемая для математического моделирования задачи неразрушающего контроля. В разд. 3 рассмотрен используемый для расчетов сеточно-характеристический метод на регулярных и криволинейных сетках. Разд. 4 посвящен особенностям используемой взаимной интерполяции между криволинейной и регулярными сетками. В разд. 5 поясняется используемый алгоритм для генерации химерной расчетной сетки. В разд. 6 приведены конфигурации рассматриваемых расчетных сеток, а в разд. 7 с их использованием приведены результаты исследования на сеточную сходимость в различных нормах. Разд. 8 содержит выводы и указания на области применения предложенного алгоритма.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕРАЗРУШАЮЩЕГО КОНТРОЛЯ

Для моделирования волновых процессов в рельсовом полотне рассматривается следующая система уравнений:

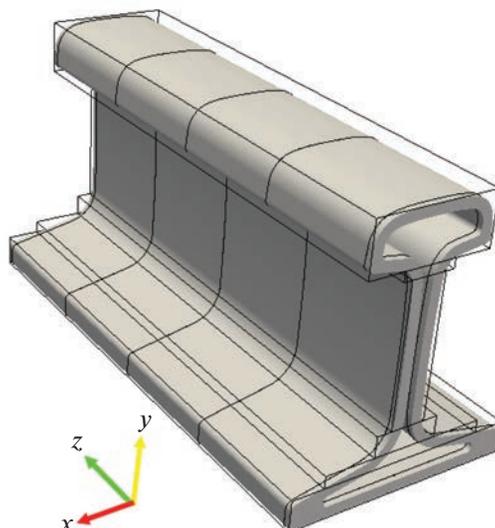
$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t))^T, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) = (\rho c_p^2 - 2\rho c_s^2)(\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))\mathbf{I} + \rho c_p^2 (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + (\nabla \otimes \mathbf{v}(\mathbf{r}, t))^T). \quad (2.2)$$

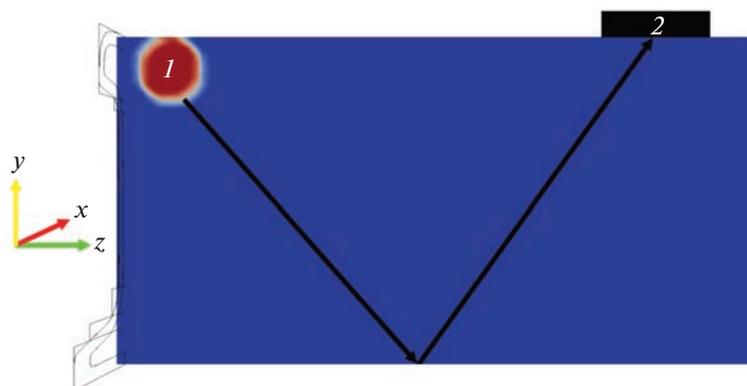
В уравнениях (2.1), (2.2)  $\mathbf{v}$  – производная смещений бесконечно-малого элемента материала по времени,  $\boldsymbol{\sigma}$  – симметричный тензор напряжений Коши,  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$  – плотность стали,  $c_p = 6250.1282 \text{ м/с}$  – скорость распространения продольных Р-волн в материале,  $c_s = 3188.5210 \text{ м/с}$  – скорость поперечных S-волн в материал.

На фиг. 1 представлен пример расчетной области, моделирующей рельсовое полотно и состоящей из шести структурированных прямоугольных сеток с постоянным шагом и одной структурированной криволинейной химерной сетки.

Рассматривается задача неразрушающего контроля, в рамках которой вблизи верхней границы рельса задается источник синусоидальных возмущений с одним периодом и частотой 625.01282 кГц, как показано в разрезе на фиг. 2. На оставшейся части внешней границы химерной сетки устанавливаются условие свободной границы и нулевые начальные условия.



Фиг. 1. Расчетная область, моделирующая рельсовое полотно.



Фиг. 2. Постановка задачи неразрушающего контроля: 1 – источник, 2 – приемник.

### 3. СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД В ИЗОТРОПНОЙ ЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ

Для численного решения систем уравнений (2.1), (2.2) применяется сеточно-характеристический метод. Систему в трехмерном случае можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{q} + \mathbf{A}_3 \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{q} = 0,$$

далее производится расщепление по трем направлениям и получаются выражения вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q} = 0, \quad (3.1)$$

матрица  $\mathbf{A}_1$  гиперболическая, у нее существует набор собственных векторов, и она представима в виде

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{\Omega}^1 \mathbf{\Lambda}^1 (\mathbf{\Omega}^1)^{-1},$$

где матрица  $\Omega^1$  составлена из собственных векторов, собственные значения матрицы  $\Lambda^1$  есть элементы диагональной матрицы  $\Lambda^1$ . Теперь (3.1) запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q} + \Omega^1 \Lambda^1 (\Omega^1)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{q} = 0. \quad (3.2)$$

Введем замену  $\omega = \Omega^1 \mathbf{q}$  и умножим систему уравнений (3.2) на матрицу  $(\Omega^1)^{-1}$ , внося ее под операторы дифференцирования. Таким образом, получаем систему линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \Lambda^1 \frac{\partial}{\partial x} \omega = 0. \quad (3.3)$$

Значения  $\omega$ , называемые также инвариантами Римана, на следующем временном слое определяются из численного решения уравнений переноса методом характеристик или конечно-разностными схемами. В настоящей работе использована конечно-разностная схема Русанова [41].

Таким образом, вычисления разбиваются на три стадии. На первой стадии (3.4) производится умножение всех векторов  $\mathbf{q}$  на матрицу  $\Omega^1$ , на второй стадии решается система (3.3), а на третьей стадии делается обратная замена (3.5):

$$\omega = (\Omega^1)^{-1} \mathbf{q}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{q} = \Omega^1 \omega. \quad (3.5)$$

Аналогичным образом рассматриваются оставшиеся одномерные системы уравнений.

Рассмотрим для определенности направление  $x$ . Пусть вектор  $\mathbf{n}$  направлен вдоль выбранного направления, а векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  образуют с ним декартову систему координат. Введем симметричные тензоры второго ранга

$$\mathbf{N}_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j + \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_i),$$

где индексы варьируются от 0 до 2, а под  $\mathbf{n}_0$  понимается вектор  $\mathbf{n}$ .

Вектор неизвестных в случае изотропной линейно-упругой среды имеет вид

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \{v_x, v_y, v_z, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}^T, \quad (3.6)$$

а матрицы  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  и  $\mathbf{A}_3$  имеют набор собственных значений:

$$\{c_p, -c_p, c_s, -c_s, c_s, -c_s, 0, 0, 0\}.$$

Применяя алгоритм сеточно-характеристического метода в регулярной структурированной сетке, для инвариантов Римана и неизвестных (3.6) вдоль направления  $x$  можно получить выражения:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= v_x \mp \frac{1}{c_p \rho} \sigma_{xx}, \\ \omega_{3,4} &= v_y \mp \frac{1}{c_s \rho} \sigma_{xy}, \\ \omega_{5,6} &= v_z \mp \frac{1}{c_s \rho} \sigma_{xz}, \\ \omega_7 &= \sigma_{yz}, \\ \omega_8 &= \sigma_{yy} - \sigma_{zz}, \\ \omega_9 &= \sigma_{yy} + \sigma_{zz} - 2k \sigma_{xx}, \\ \mathbf{v} &= \frac{1}{2} \{\omega_1 + \omega_2, \omega_3 + \omega_4, \omega_5 + \omega_6\}^T, \end{aligned}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\rho c_p (\omega_2 - \omega_1)}{2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\rho c_s (\omega_4 - \omega_3)}{2}, \quad \sigma_{xz} = \frac{\rho c_s (\omega_6 - \omega_5)}{2},$$

$$\sigma_{yz} = \omega_7, \quad \sigma_{yy,zz} = \frac{(k\rho c_p (\omega_2 - \omega_1) + \omega_9 \pm \omega_8)}{2},$$

где  $k = 1 - 2 \frac{c_s^2}{c_p^2}$ .

В случае структурированной криволинейной сетки  $\{x, y, z\}$  рассматривается преобразование координат и переход к структурированной регулярной сетке  $\{\xi(x, y, z), \eta(x, y, z), \zeta(x, y, z)\}$  со скалярным полем вида (3.7) для соответствующего направления и ортонормированным базисом (3.8). Тогда для выбранного направления  $\xi$  после применения сеточно-характеристического метода в условиях криволинейной сетки получим следующий набор собственных значений:

$$\{lc_p, -lc_p, lc_s, -lc_s, lc_s, -lc_s, 0, 0, 0\}$$

и следующий вид инвариантов Римана:

$$l(x, y, z) = |\nabla \xi(x, y, z)| = \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2}, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{\nabla \xi(x, y, z)}{|\nabla \xi(x, y, z)|}, \quad \mathbf{n}_1(x, y, z) = \frac{\nabla \eta(x, y, z)}{|\nabla \eta(x, y, z)|}, \quad \mathbf{n}_2(x, y, z) = \frac{\nabla \zeta(x, y, z)}{|\nabla \zeta(x, y, z)|}, \tag{3.8}$$

$$\omega_{1,2} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_p \rho} \mathbf{N}_{00} \div \boldsymbol{\sigma},$$

$$\omega_{3,4} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_s \rho} \mathbf{N}_{01} \div \boldsymbol{\sigma},$$

$$\omega_{5,6} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v} \mp \frac{1}{c_s \rho} \mathbf{N}_{02} \div \boldsymbol{\sigma},$$

$$\omega_7 = 2\mathbf{N}_{12} \div \boldsymbol{\sigma}, \quad \omega_8 = (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) \div \boldsymbol{\sigma}, \quad \omega_9 = (\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22} - 2k\mathbf{N}_{00}) \div \boldsymbol{\sigma},$$

$$\mathbf{v} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \mathbf{n} + \frac{\omega_3 + \omega_4}{2} \mathbf{n}_1 + \frac{\omega_5 + \omega_6}{2} \mathbf{n}_2,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{(\omega_2 - \omega_1)(\rho(c_p - c_s)\mathbf{N}_{00} + \rho c_3 \mathbf{I})}{2} + \rho c_s (\omega_4 - \omega_3) \mathbf{N}_{01} + \rho c_s (\omega_6 - \omega_5) \mathbf{N}_{02} +$$

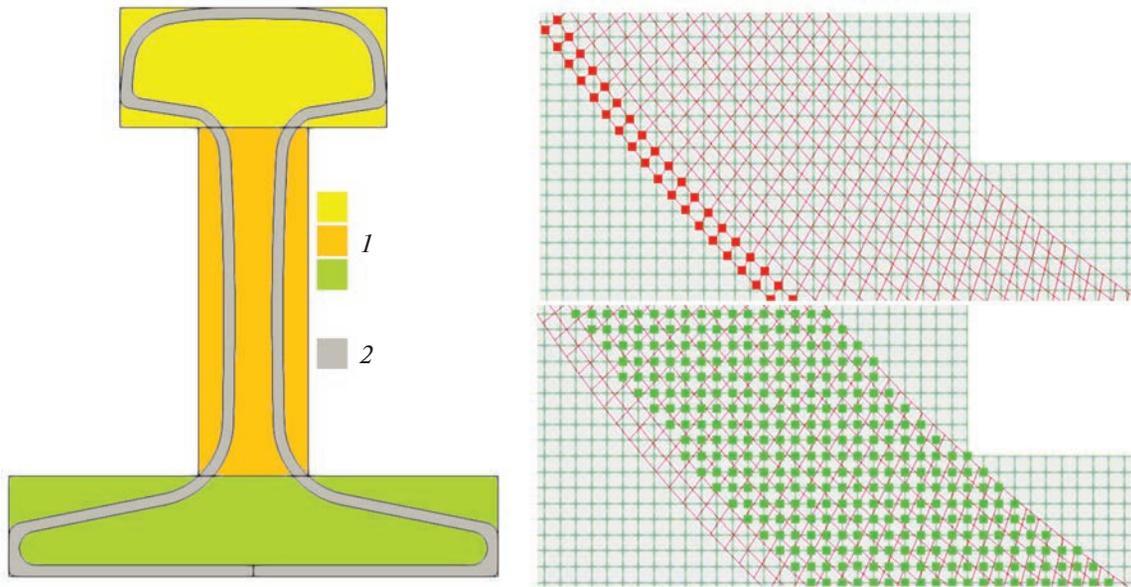
$$+ 2\omega_7 \mathbf{N}_{12} + \frac{\omega_8 (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22})}{2} + \frac{\omega_9 (\mathbf{I} - \mathbf{N}_{00})}{2},$$

где  $c_3 = \left( 1 - 2 \frac{c_s^2}{c_p^2} \right) c_p$ .

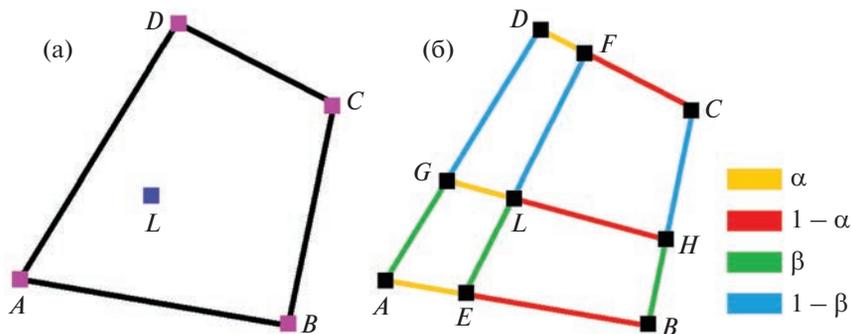
#### 4. ВЗАИМНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ МЕЖДУ РЕГУЛЯРНОЙ И КРИВОЛИНЕЙНОЙ СТРУКТУРИРОВАННЫМИ СЕТКАМИ

При реализации численного алгоритма необходимо выполнять интерполяцию из регулярной сетки в химерную сетку (узлы, отмеченные красным на фиг. 3) и из химерной сетки в регулярную сетку (узлы, отмеченные зеленым на фиг. 3).

Для перехода из обычной регулярной сетки в узлы химерной сетки может быть использована обычная билинейная интерполяция, однако при ее использовании для перехода от узлов химерной сетки к узлам регулярной сетки возникают неоднозначность выбора системы координат и необходимость решения системы линейных уравнений для каждой ячейки химерной сетки. Поэтому предлагается другой тип интерполяции, который позволяет избежать этих недостатков.



Фиг. 3. Профиль рельса в задаче интерполяции: 1 – регулярные сетки, 2 – химерная сетка.



Фиг. 4. Интерполяция в точке  $L$  через точки четырехугольника  $ABCD$ : а – постановка задачи интерполяции, б – определение коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ .

Рассмотрим четырехугольник  $ABCD$  произвольной формы (фиг. 4), ориентированный так, чтобы удовлетворять неравенству  $AB + AD \geq BC + CD$ . Точка, в которой необходимо решить задачу интерполяции, обозначена через  $L$ , также введены две вспомогательные линии  $EF$  и  $GH$  таким образом, что

$$\alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DC} = \frac{GL}{GH}, \quad \beta = \frac{AG}{AD} = \frac{BH}{BC} = \frac{EL}{EF}. \tag{4.1}$$

Зная коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ , по аналогии с билинейной интерполяцией в прямоугольнике можно получить:

$$\mathbf{u}_L = (1 - \alpha)(1 - \beta)\mathbf{u}_A + \alpha(1 - \beta)\mathbf{u}_B + \alpha\beta\mathbf{u}_C + (1 - \alpha)\beta\mathbf{u}_D,$$

здесь  $\mathbf{u}$  – это вектор неизвестных, подлежащих интерполяции.

Используя схему с фиг. 4б и (4.1), получим систему уравнений для поиска  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$x_L = x_A + \alpha(x_B - x_A) + \beta(x_D - x_A) + \alpha\beta(x_A + x_C - x_B - x_D), \tag{4.2}$$

$$y_L = y_A + \alpha(y_B - y_A) + \beta(y_D - y_A) + \alpha\beta(y_A + y_C - y_B - y_D). \tag{4.3}$$

Чем ближе четырехугольник к параллелограмму, тем ближе система уравнений (4.2), (4.3) к системе линейных уравнений. В связи с этим предложен учитывающий различные конфигурации  $ABCD$  алгоритм нахождения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ . Пусть задана ошибка  $\varepsilon$ , с которой мы ищем координаты точки  $L$  из уравнений (4.2), (4.3). Если обнаружено, что расстояние от точки  $L$  до одного из узлов химерной сетки меньше  $\varepsilon$  или расстояние от точки  $L$  до одного из ребер  $ABCD$  меньше  $\varepsilon$ , то соответственно используется либо копирование, либо линейная интерполяция вдоль соответствующего сегмента. Иначе рассматриваются следующие случаи.

1. Необходимо вычислить  $\alpha$  и  $\beta$ , используя выражения (4.4) и (4.5) соответственно. Если при этом выражения (4.2), (4.3) выполняются с ошибкой меньше чем  $\varepsilon$ , то задача интерполяции решена. Данный случай соответствует тому, когда  $ABCD$  достаточно близок к трапеции  $AD//BC$  или параллелограмму:

$$\alpha = \frac{d(L, AD)}{d(L, AD) + d(L, BC)}, \quad \beta = \frac{d(L, AB)}{d(L, AB) + d(L, CD)}, \quad (4.4)$$

$$\beta = \frac{(x_L - x_A) - (x_B - x_A)\alpha}{(x_D - x_A) + (x_A + x_C - x_B - x_D)\alpha} = \frac{(y_L - y_A) - (y_B - y_A)\alpha}{(y_D - y_A) + (y_A + y_C - y_B - y_D)\alpha}. \quad (4.5)$$

2. При невыполнении условия из п. 1. необходимо найти  $\beta$  из (4.4) и  $\alpha$  из (4.6) тогда, если выражения (4.2), (4.3) выполняются с ошибкой, не превосходящей  $\varepsilon$ , то задача интерполяции решена. В этом случае  $ABCD$  оказывается близок к трапеции  $AB//CD$ :

$$\alpha = \frac{(x_L - x_A) - (x_D - x_A)\beta}{(x_B - x_A) + (x_A + x_C - x_B - x_D)\beta} = \frac{(y_L - y_A) - (y_D - y_A)\beta}{(y_B - y_A) + (y_A + y_C - y_B - y_D)\beta}. \quad (4.6)$$

3. Наконец, если не выполнены условия из п. 1 и п. 2, то необходимо решать систему нелинейных уравнений (4.2), (4.3). Введем параметр с рекомендованным значением  $\varepsilon_N = 0.3$ . Если для одного из квадратных уравнений относительно  $\alpha$  и  $\beta$  (4.7) верно неравенство (4.8)

$$a\theta^2 - b\theta + c = 0, \quad \theta \in \{\alpha, \beta\}, \quad (4.7)$$

$$\frac{a}{b} < \varepsilon_N, \quad (4.8)$$

то для нахождения соответствующего  $\theta$  используются ньютоновские итерации:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{\frac{c}{b} - \theta_n \left(1 - \theta_n \frac{a}{b}\right)}{1 - 2\theta_n \frac{a}{b}}.$$

В соответствии с итерационным процессом оставшийся коэффициент находится из выражения (4.5) или (4.6), а завершение итераций наступает при выполнении выражений (4.2), (4.3) с ошибкой меньше, чем  $\varepsilon$ . Начальное приближение для  $\theta$  можно найти из (4.4).

Если условие (4.8) не выполнено ни для одного из квадратных уравнений (4.7) относительно  $\alpha$  и  $\beta$ , то решается квадратное уравнение с наибольшим коэффициентом  $a$  с использованием стандартной формулы через дискриминант.

При рассмотрении задачи интерполяции в трехмерном пространстве используется следующий переход от рассматриваемого четырехугольника к восьмиугольнику:

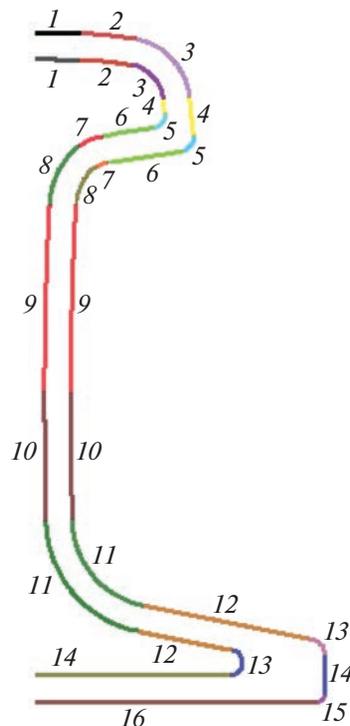
$$\begin{aligned} u_L^{2D} &= a_{ij}^{2D} u_{ij} + a_{i+1,j}^{2D} u_{i+1,j} + a_{ij+1}^{2D} u_{ij+1} + a_{i+1,j+1}^{2D} u_{i+1,j+1}, \\ a_{ijk}^{3D} &= a_{ij}^{2D}, \quad k \in [0, N_z], \\ u_L^{3D} &= a_{ijk}^{3D} u_{ijk} + a_{i+1,j,k}^{3D} u_{i+1,j,k} + a_{ij+1,k}^{3D} u_{ij+1,k} + a_{i+1,j+1,k}^{3D} u_{i+1,j+1,k} + \\ &+ a_{ijk+1}^{3D} u_{ijk+1} + a_{i+1,j,k+1}^{3D} u_{i+1,j,k+1} + a_{ij+1,k+1}^{3D} u_{ij+1,k+1} + a_{i+1,j+1,k+1}^{3D} u_{i+1,j+1,k+1}, \end{aligned}$$

где  $a$  – коэффициенты при решении задачи интерполяции, а  $u_{ijk}$  – компоненты поля,  $N_z$  – количество узлов расчетной сетки вдоль направления  $OZ$ .

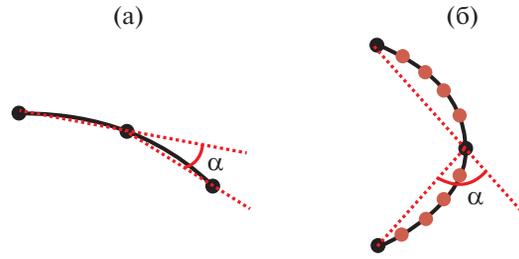
## 5. АЛГОРИТМ ГЕНЕРАЦИИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ХИМЕРНОЙ СЕТКИ

Для создания химерной сетки использован разработанный специальный алгоритм [42]. Профиль рельса разбивается на сегменты, форма которых задается аналитически, исходя из геометрических особенностей рассматриваемого профиля и соответствующей инженерной документации. В предложенном алгоритме как внешняя, так и внутренняя границы криволинейной области разбиваются на отдельные сегменты. В силу симметрии профиля по оси  $OY$  достаточно построить половину соответствующих границ, разбитых на 16 и 14 сегментов соответственно, согласно фиг. 5. К каждому из сегментов применяется естественная параметризация кривой, после чего вдоль параметризованной кривой вводится расчетная сетка с заданным пользователем шагом  $h_U$  между узлами.

Рассмотрим вначале внешнюю границу криволинейной области. Для учета областей с большим радиусом кривизны вводится дополнительный параметр в виде допустимого угла  $\alpha_{\max} = \frac{\pi}{10}$  отклонения между узлами расчетной сетки. На фиг. 6 схематично приведены два случая, которые учитываются алгоритмом. В случае фиг. 6а после естественной параметризации кривой и введения расчетной сетки с заданным шагом пользователя  $h_U$  допустимый угол не превышает установленного значения  $\alpha_{\max}$  и дополнительного сгущения расчетной сетки не требуется. В случае фиг. 6б полученная расчетная сетка плохо описывает исходный сегмент, т.е. требуется произвести сгущение сетки, добавив новые узлы (отмечены оранжевым) путем измельчения шага до  $h_\alpha$  для рассматриваемого сегмента, при котором с учетом радиуса кривизны угол отклонения между узлами составит  $\alpha = \alpha_{\max} = \frac{\pi}{10}$ . Данная проверка проводится для всех сегментов.



**Фиг. 5.** Разбиение половины профиля внутренней и внешней границ криволинейной области на соответствующие пронумерованные сегменты.



Фиг. 6. Постановка задачи сгущения расчетной сетки для сегментов с большим радиусом кривизны.

Для решения задачи измельчения расчетной сетки в каждом сегменте, в котором условие на допустимый угол  $\alpha_{\max}$  не выполнено, на основе функции (5.1) ставится в соответствие функция  $H_{\text{USED}}$  (5.2), зависящая от естественного параметра  $t$ . Каждую такую функцию  $H_{\text{USED}}$  можно задать через коэффициенты (5.3), вычисляемые через параметры сегментов после естественной параметризации, соответствующие началу  $t_{\text{START}}$  и концу сегмента  $t_{\text{END}}$ , и предустановленный шаг  $h_U$  и характерный для сегмента минимальный шаг  $h_\alpha$ . Параметр  $h_{\text{GROW}} = 0.25$  введен для расчета промежутка, в котором будет происходить постепенное сгущение сетки при переходе между сегментами, соседствующими с рассматриваемым:

$$t \geq 0, \quad H_0(t) = \begin{cases} 1 - 2t^2, & t \in [0, 1/2], \\ 2(t - 1)^2, & t \in (1/2, 1], \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad (5.1)$$

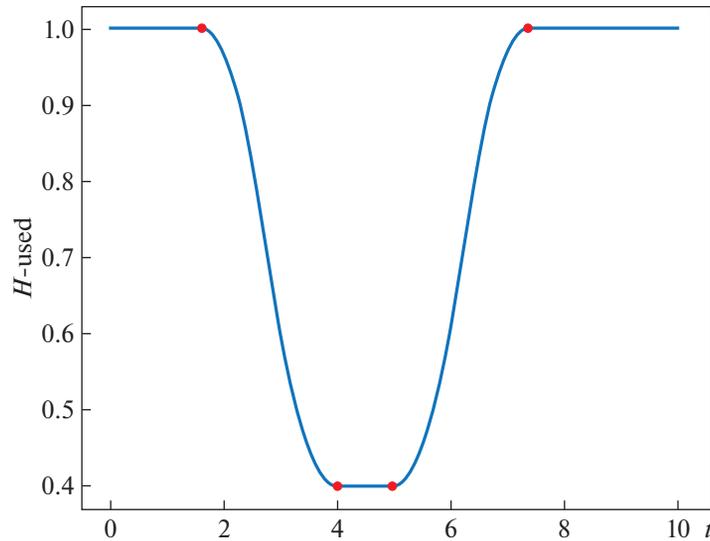
$$H_{\text{USED}}(t) = \begin{cases} 1, & t < t_{\text{START}} - \Delta t_{\text{LEFT}}, \\ 1 + AH_0\left(\frac{t_{\text{START}} - t}{\Delta t_{\text{LEFT}}}\right), & t \in [t_{\text{START}} - \Delta t_{\text{LEFT}}, t_{\text{START}}), \\ 1 + A, & t \in [t_{\text{START}}, t_{\text{START}} + \Delta t_{\text{CENTER}}], \\ 1 + AH_0\left(\frac{t - t_{\text{START}} - \Delta t_{\text{CENTER}}}{\Delta t_{\text{RIGHT}}}\right), & t \in (t_{\text{START}} + \Delta t_{\text{CENTER}}, t_{\text{START}} + \Delta t_{\text{CENTER}} + \Delta t_{\text{RIGHT}}], \\ 1, & t > t_{\text{START}} + \Delta t_{\text{CENTER}} + \Delta t_{\text{RIGHT}}, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\Delta t_{\text{LEFT}} = \Delta t_{\text{RIGHT}} = \frac{h_U - h_\alpha}{h_{\text{GROW}}}, \quad t_{\text{CENTER}} = t_{\text{END}} - t_{\text{START}}, \quad A = -\frac{h_U - h_\alpha}{h_U}. \quad (5.3)$$

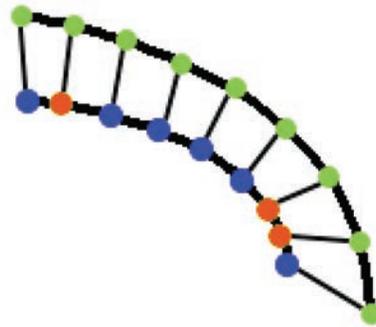
На фиг. 7 представлен пример функции (5.2) для  $t_{\text{START}} = 4$ ,  $t_{\text{END}} = 5$ ,  $h_U = 1.0$ ,  $h_\alpha = 0.4$  при  $t \in [0, 10]$ , красными маркерами отмечены крайние точки для промежутков по  $t$  из (5.2).

Таким образом, понимая для каких сегментов  $h_U$  остается неизменным, а для каких необходимо постепенное сгущение до соответствующего  $h_\alpha$  и используя все соответствующие  $H_{\text{USED}}$ , с учетом параметризации всего контура, можно получить итоговое распределение параметра измельчения сетки для всей внешней границы криволинейной области, умножая  $H_{\text{USED}}$  на размер пользовательского шага или перемножая соответствующие функции между собой, в случае если два подобных сегмента соседствуют друг с другом.

Для получения внутренней границы, которая также была естественно параметризована, каждая точка внешней границы переносится вдоль линии. Однако при подобном подходе узлы расчетной сетки на внутренней границе могут оказаться либо слишком отдалены, либо слишком



Фиг. 7. Пример распределения  $H_{USED}$  при  $t_{START} = 4$ ,  $t_{END} = 5$ ,  $h_U = 1.0$ ,  $h_{\alpha} = 0.4$ .



Фиг. 8. Первичное распределение узлов на внутренней границе.

близко относительно друг друга, как показано на фиг. 8, где потенциально проблемные узлы выделены оранжевым цветом.

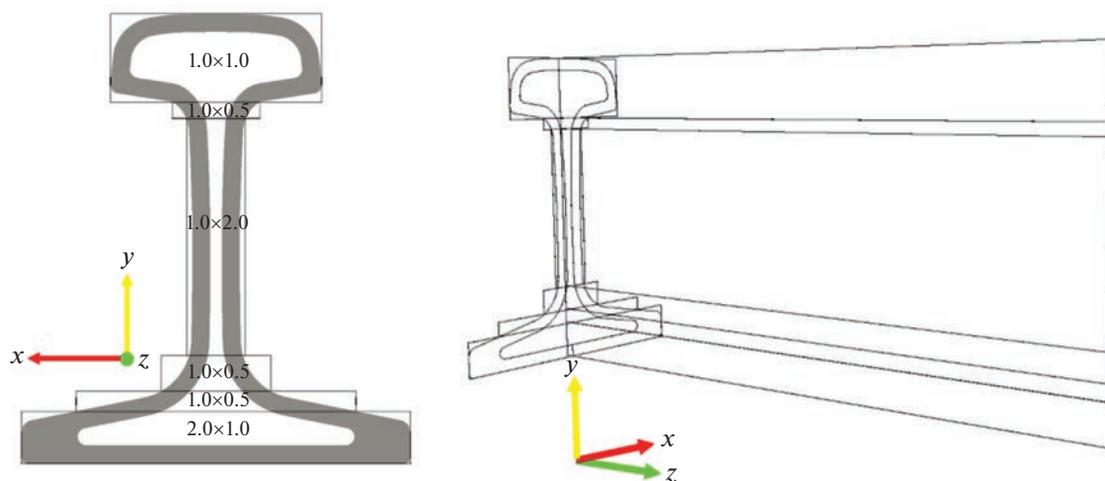
Поэтому после получения первичного распределения на внутренней границе криволинейной области необходимо выполнить проверку условия (5.4) и при его выполнении сдвинуть рассматриваемый узел с радиус-вектором координат  $\mathbf{r}_{CENTER}$ :

$$\text{if } \left( \frac{h_{RIGHT} - h_{LEFT}}{h_{RIGHT}} > h_{GROW} \right) \text{ or } \left( \frac{h_{RIGHT} - h_{LEFT}}{h_{RIGHT}} > h_{GROW} \right): \quad (5.4)$$

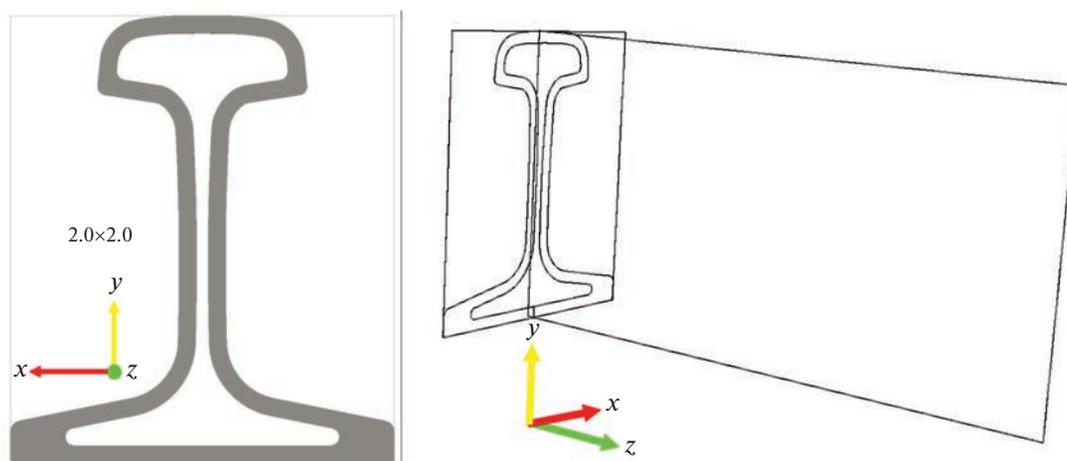
$$\mathbf{r}_{CENTER} = \frac{\mathbf{r}_{RIGHT} + \mathbf{r}_{LEFT}}{2},$$

где  $h_{RIGHT}$  и  $h_{LEFT}$  — это расстояние между соседними узлами. Ввиду того, что после однократного перемещения может потребоваться сдвигка уже для других узлов, подобная процедура повторяется несколько раз, а в настоящей работе она была выполнена пять раз.

Найдя окончательно распределение узлов для внутренней и внешней границ криволинейной области, мы сможем восстановить итоговую криволинейную сетку, учитывающую геометрию рассматриваемого объекта и пригодную для численных расчетов.



Фиг. 9. Расчетная сетка № 1 с шестью подобластями  $g$ .



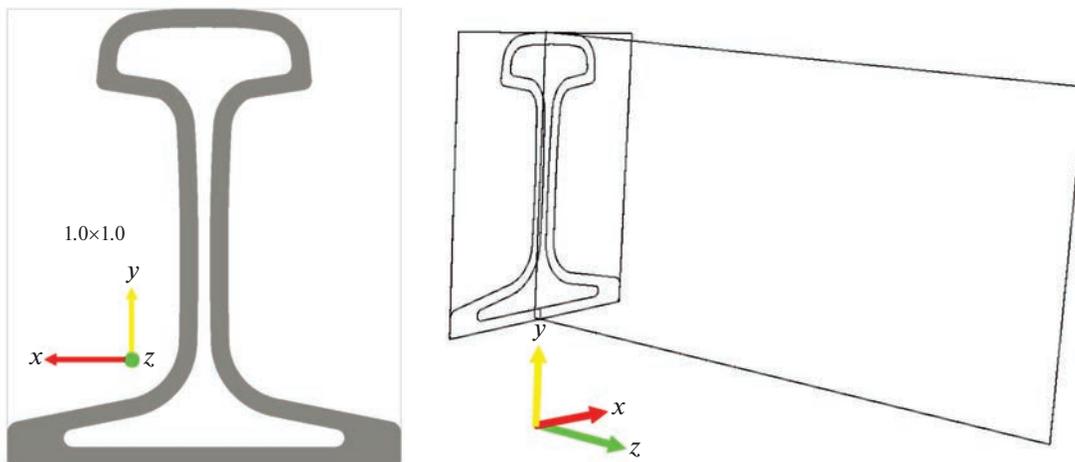
Фиг. 10. Расчетная сетка № 2 с одной подобластью  $g$ .

## 6. РАСЧЕТНЫЕ СЕТКИ

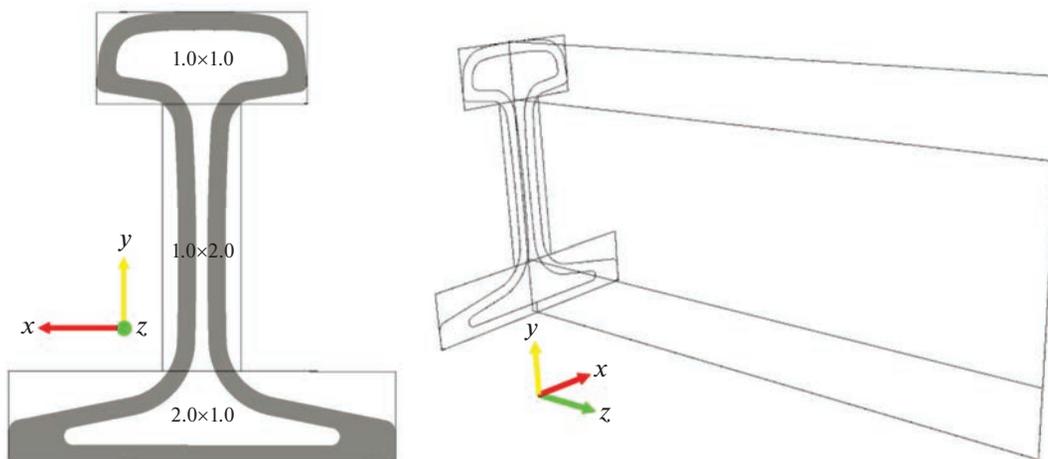
В целях исследования сходимости решения по сетке и проверки надежности предложенного метода для моделирования объектов с криволинейной границей были рассмотрены шесть пронумерованных различных конфигураций расчетных сеток из [43] на фиг. 9–14, на которых изображены профиль рельса в плоскости  $OXY$  и срез в плоскости  $OYZ$  при разном способе покрытия объекта расчетными сетками, при этом вдоль  $OZ$  сетка является регулярной. Видно, что получающийся срез в плоскости  $OYZ$  разделен на подобласти  $g$  с одинаковыми шагом вдоль направления  $Z$  2 мм, длиной 0.3 м и высотой 0.152 м. Размер ячеек в подобластях  $g$  по направлениям  $X$  и  $Y$  указаны на соответствующих фиг. 9–14 в мм. Во всех конфигурациях расчетных сеток строилась одинаковая химерная сетка с характерным наименьшим шагом 0.4 мм.

## 7. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

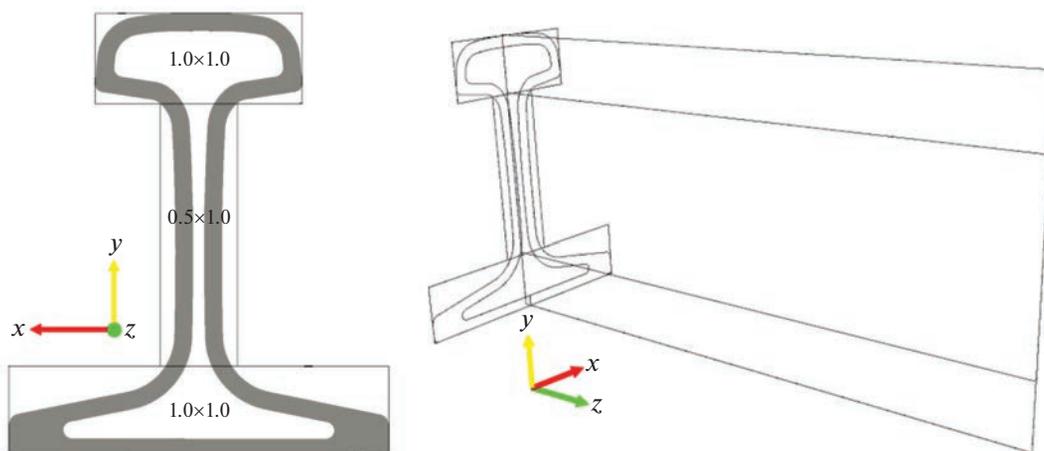
В этом разделе представлены результаты численного моделирования для различных конфигураций расчетных сеток. Шаг по времени во всех расчетах составлял 204.795799229 мкс, количе-



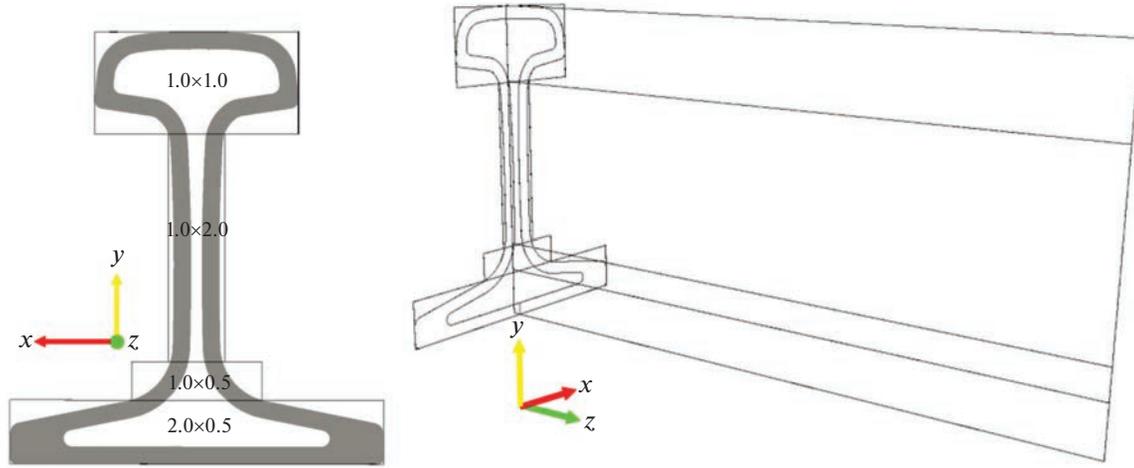
Фиг. 11. Расчетная сетка № 3 с одной подобластью  $g$  с измененным шагом относительно фиг. 5.



Фиг. 12. Расчетная сетка № 4 с тремя подобластями  $g$ .



Фиг. 13. Расчетная сетка № 5 с тремя подобластями  $g$  с измененным шагом относительно фиг. 7.



Фиг. 14. Расчетная сетка № 6 сетка с четырьмя подобластями  $g$ .

ство итераций по времени составило 80. Для проверки сходимости использовалась интегральная норма  $L_1$ , в расчете которой применялся метод прямоугольников, по формуле

$$L_1 = \sum_{g=0}^{G-1} L_1^g = \sum_{g=0}^{G-1} h_y^g h_z^g \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_y^g-2} (v_{i0}^g + v_{iN_z^g-1}^g) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_z^g-2} (v_{0j}^g + v_{N_y^g-1j}^g) + \frac{1}{4} (v_{00}^g + v_{0N_z^g-1}^g + v_{N_y^g-10}^g + v_{N_y^g-1N_z^g-1}^g) + \sum_{i=1}^{N_y^g-2} \sum_{j=1}^{N_z^g-2} v_{ij}^g \right), \quad (7.1)$$

где  $N_y^g$  и  $N_z^g$  – количество узлов в соответствующей подобласти  $g$  расчетной сетки, из которых состоит срез  $OYZ$  согласно фиг. 5–10. Также для оценки сходимости была подсчитана норма  $L_\infty$  по формуле

$$L_\infty = \max_{g,i,j} |v_{ij}^g|, \quad (7.2)$$

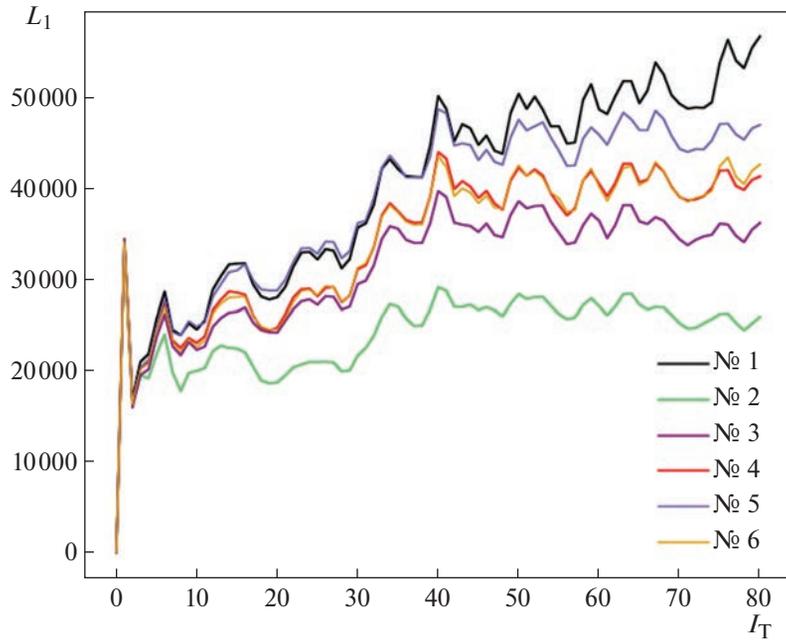
суть которой в поиске глобального максимума по абсолютной величине в рассматриваемой расчетной сетке среза  $OYZ$ , состоящей из различного числа подобластей  $g$ .

В результате были получены графики зависимости норм (7.1) на фиг. 15 и (7.2) на фиг. 16 от шага по времени для каждой из расчетных сеток. По оси абсцисс отложен номер шага по времени  $I_T$ .

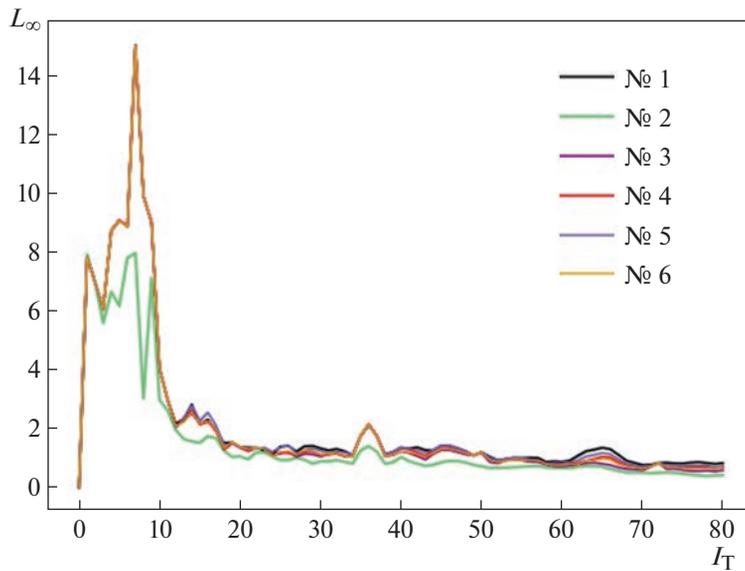
Согласно фиг. 11 наибольшую интегральную норму имеют расчетные сетки, у которых суммарно большее количество узлов из-за мелкости разбиения подобластей вдоль  $OY$  по сравнению с другими. При этом и на фиг. 15, и на фиг. 16 можно наблюдать постепенный выход норм на плато, особенно хорошо это заметно для  $L_\infty$ . На фиг. 16 также можно заметить значительную разницу численного решения на 7-м временном шаге для расчетной сетки № 2 по сравнению с другими. Это связано с тем, что из всех расчетных сеток она наиболее грубая.

На фиг. 17 приведена визуализация распространения исходного возмущения от источника вдоль плоскости  $OYZ$  и трех перпендикулярных к ней секциях в плоскостях  $OXY$  в момент времени 8.191831969 мс, соответствующего 40 итерации по времени для соответствующей расчетной сетки.

Из фиг. 17 следует, что в подобластях  $g$  с уменьшенным шагом по пространству наблюдается лучшая визуализация пространственно-временного решения, в то же время разделение профиля рельса на большее количество подобластей  $g$  также позволяет детализировать расчет волнового поля.



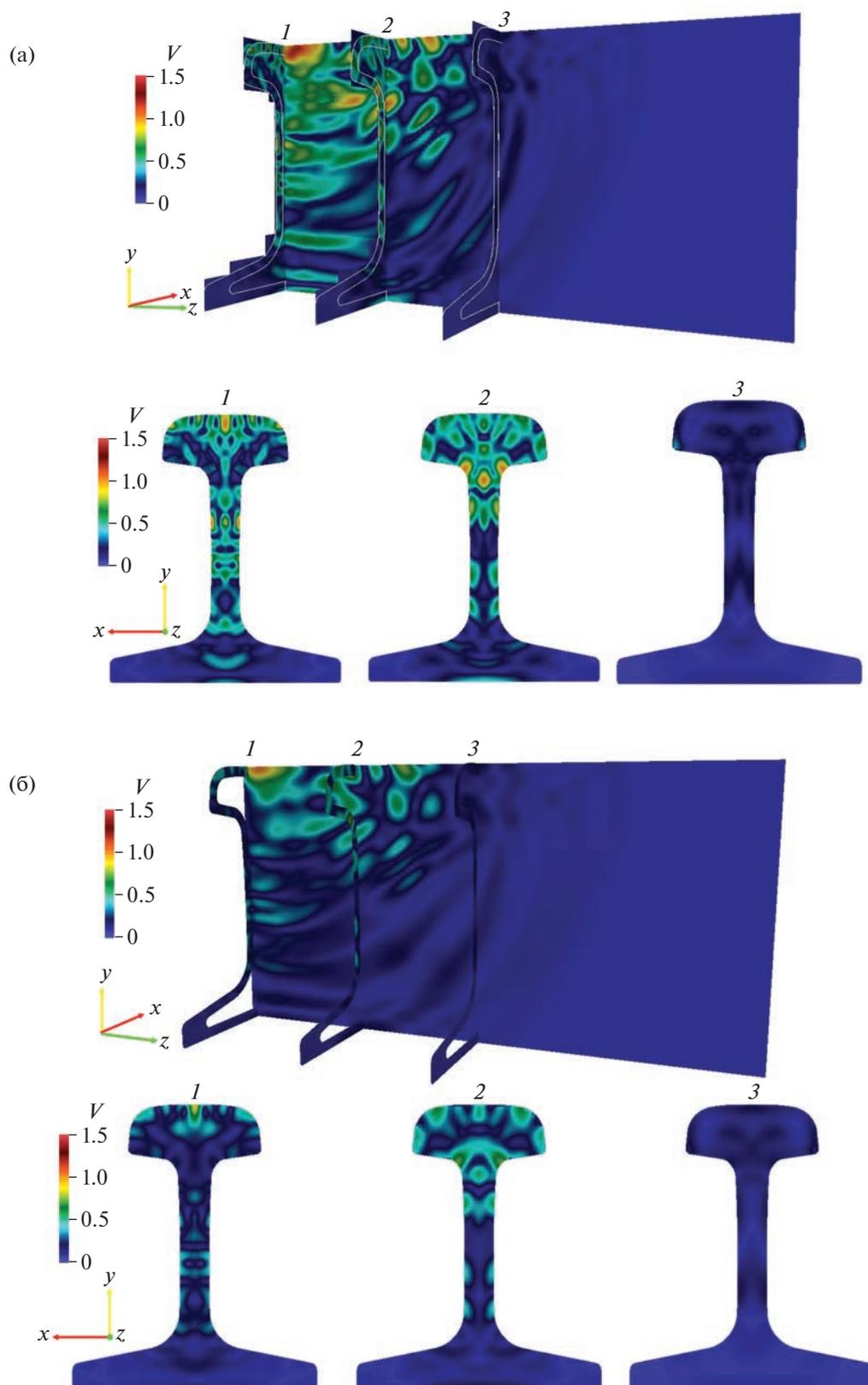
Фиг. 15. Изменение величины  $L_1$  в течение расчета.



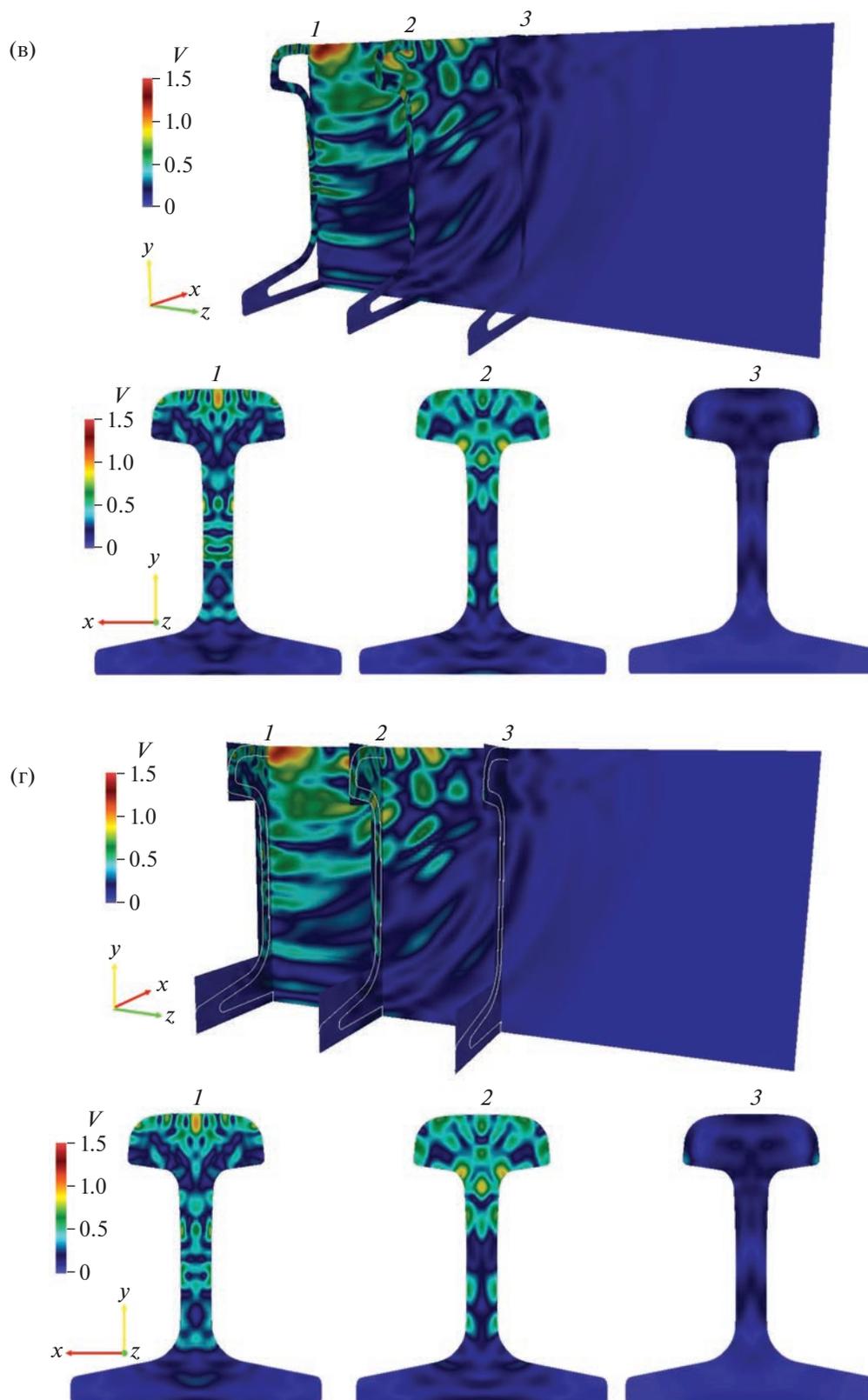
Фиг. 16. Изменение величины  $L_\infty$  в течение расчета.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

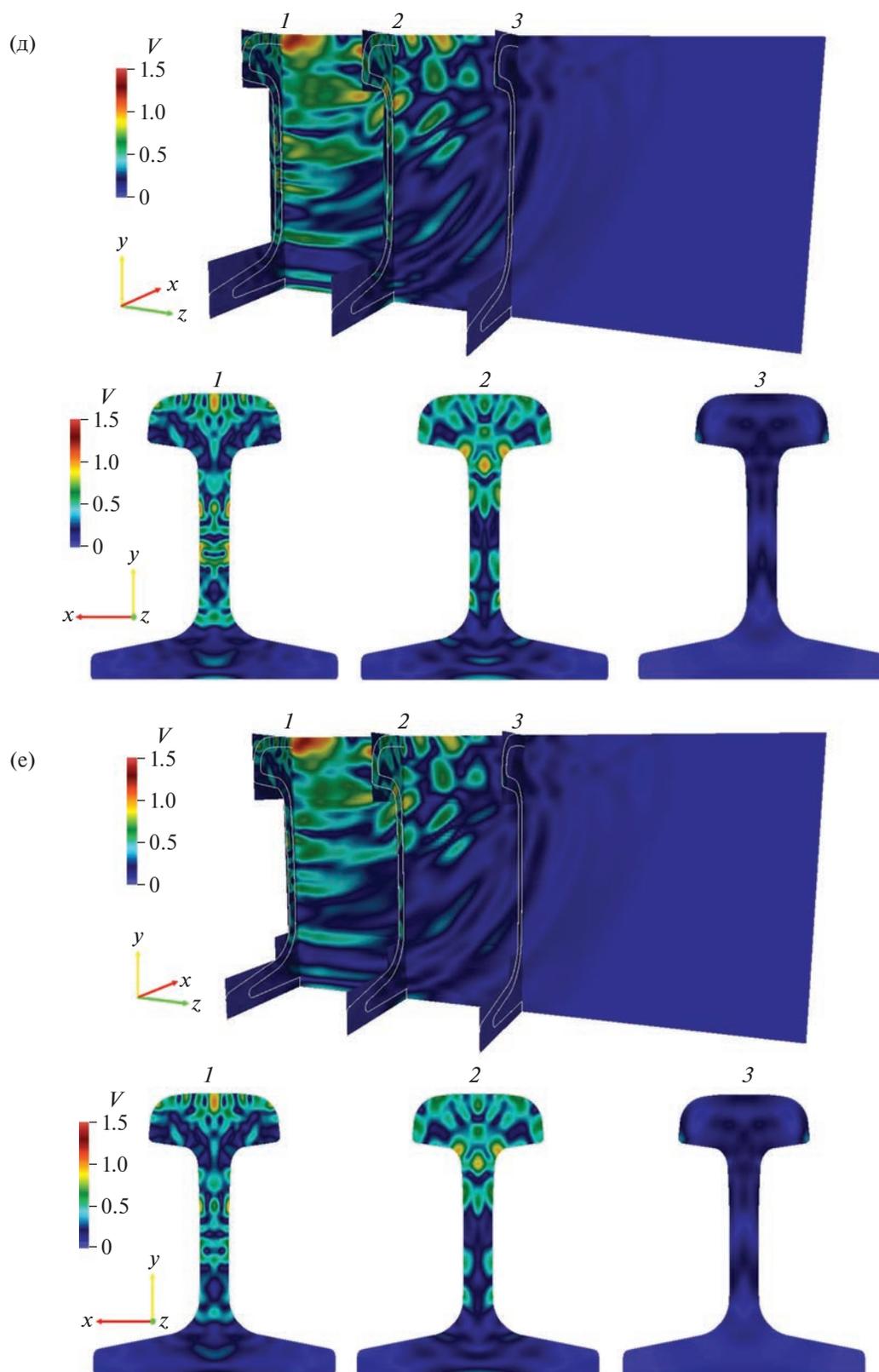
Сеточно-характеристический метод на химерных расчетных сетках был адаптирован для численного решения прямой задачи ультразвукового неразрушающего контроля рельсового полотна. Данный метод позволяет учитывать сложную геометрию профиля рельса. Разработан алгоритм взаимной интерполяции, переходящий в билинейную в случае прямоугольных ячеек, учитывающий особенности перехода от регулярной сетки к химерной и обратно. Разработанные



Фиг. 17. Распределение абсолютной величины  $v$  в плоскости  $OYZ$  и трех плоскостях  $OXY$  для расчетных сеток № 1 (а), № 2 (б), № 3(в), № 4 (г), № 5 (д), № 6 (е) в момент времени 8.191831969 мс.



Фиг. 17. Продолжение.



Фиг. 17. Окончание.

численные алгоритмы позволяют строить различные конфигурации сеток, моделирующие объект сложной формы в зависимости от пространственного шага и разбиения рассматриваемого объекта на подобласти.

Полученные авторами результаты показывают сеточную сходимость предложенных алгоритмов и дают основания использовать сеточно-характеристический метод при дальнейшем изучении задач железнодорожной безопасности и неразрушающего контроля в частности, в которых требуется использовать ультразвуковые методы исследования и мониторинга состояния железнодорожных путей.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rossini N.S., Dassisti M., Benyounis K.Y., Olabi A.G.* Methods of measuring residual stresses in components // *Materials & Design*. 2012. V. 35. P. 572588.
2. *Hwang Y.I., Kim Y.I., Seo D.C., Seo M.K., Lee W.S., Kwon S., Kim K.B.* Experimental Consideration of Conditions for Measuring Residual Stresses of Rails Using Magnetic Barkhausen Noise Method // *Materials*. 2021. V. 14. № 18. P. 5374.
3. *Palkowski H., Brück S., Pirling T., Carradó A.* Investigation on the Residual Stress State of Drawn Tubes by Numerical Simulation and Neutron Diffraction Analysis // *Materials*. 2013. V. 6. № 11. P. 51185130.
4. *Kelleher J., Prime M.B., Buttle D., Mummery P., Webster P.J., Shackleton J., Withers P.J.* // The Measurement of Residual Stress in Railway Rails by Diffraction and Other Methods // *Journal of Neutron Research*. 2003. V. 11. № 4. P. 187–193.
5. *Huang H., Zhang K., Wu M., Li H., Wang M.J., Zhang S.M., Chen J.H., Wen M.* Comparison between axial residual stresses measured by Raman spectroscopy and X-ray diffraction in SiC fiber reinforced titanium matrix composite // *Acta Physica Sinica*. 2018. V. 67. № 19. P. 267276
6. *Li Z., He J., Teng J., Wang Y.* Internal Stress Monitoring of In-Service Structural Steel Members with Ultrasonic Method // *Materials*. 2016. V. 9. № 4. P. 223.
7. *Jia D.W., Bourse G., Chaki S., Lacrampe M.F., Robin C., Demouveau H.* Investigation of stress and temperature effect on the longitudinal ultrasonic waves in polymers // *Research in Nondestructive Evaluation*. 2014. V. 25. № 1. P. 2029.
8. *Javadi Y., Azarib K., Ghalehbandi S.M., Roy M.J.* Comparison between using longitudinal and shear waves in ultrasonic stress measurement to investigate the effect of post-weld heat-treatment on welding residual stresses // *Research in Nondestructive Evaluation*. 2017. V. 28 № 2. P. 101122.
9. *Hwang Y.I., Kim G., Kim Y.I., Park J.H., Choi M.Y., Kim K.B.* Experimental Measurement of Residual Stress Distribution in Rail Specimens Using Ultrasonic LCR Waves // *Applied Sciences*. 2021. V. 11. № 19. P. 9306.
10. *Guo J., Fu H., Pan B., Kang R.* Recent progress of residual stress measurement methods: A review // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2021. V. 34. № 2. P. 5478.
11. *Alahakoon S., Sun Y.Q., Spiriyagin M., Cole C.* Rail flaw detection technologies for safer, reliable transportation: a review // *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2018. V. 140. № 2. P. 020801.
12. *Gao X., Liu Y., Li J., Gao X.* Automatic recognition and positioning of wheel defects in ultrasonic B-scan image using artificial neural network and image processing // *J. of Testing and Evaluation*. 2019. V. 48. № 1. P. 20180545.
13. *Yu H., Li Q., Tan Y., Gan J., Wang J., Geng Y., Jia L.* A Coarse-to-Fine Model for Rail Surface Defect Detection // *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2019. V. 68. № 3. P. 656666.
14. *Wu F.P., Li Q., Li S., Wu T.* Train rail defect classification detection and its parameters learning method // *Measurement*. 2020. V. 151. № 2. P. 107246.
15. *Tang Z., Liu F.J., Guo S.H., Chang J., Zhang J.J.* Evaluation of coupled finite element/meshfree method for a robust full-scale crashworthiness simulation of railway vehicles // *Advances in Mechanical Engng*. 2016. V. 8. № 4. P. 1687814016642954.
16. *Adak D., Pramod L.N.A., Ooi E.T., Natarajan S.* A combined virtual element method and the scaled boundary finite element method for linear elastic fracture mechanics // *Engng Analysis with Boundary Elements*. 2020. V. 113. P. 916.
17. *Teng Z.H., Sun F., Wu S.C., Zhang Z.B., Chen T., Liao D.M.* An adaptively refined XFEM with virtual node polygonal elements for dynamic crack problems // *Comput. Mechanics*. 2018. V. 62. № 5. P. 10871106.
18. *Wu S.C., Zhang S.Q., Xu Z.W.* Thermal crack growth-based fatigue life prediction due to braking for a high-speed railway brake disc // *Internat. Journal of Fatigue*. 2016. V. 87. P. 359369 .
19. *Jiang S., Gu Y., Fan C., Qu W.* Fracture mechanics analysis of bimaterial interface cracks using the generalized finite difference method // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2021. V. 113. P. 102942.
20. *Nejad R.M., Liu Z., Ma W., Berto F.* Reliability analysis of fatigue crack growth for rail steel under variable amplitude service loading conditions and wear // *Internat. Journal of Fatigue*. 2021. V. 152. P. 106450.

21. *Li S., Wu Y.* Energy-preserving mixed finite element methods for the elastic wave equation // *Appl. Math. and Comput.* 2022. V. 422. № 15. P. 126963.
22. *Cao J., Chen J.B.* A parameter-modified method for implementing surface topography in elastic-wave finite-difference modeling // *Geophysics*. 2018. V. 83. № 6. P. 313–332.
23. *Duru K., Rannabauer L., Gabriel A.A., Igel H.* A new discontinuous Galerkin method for elastic waves with physically motivated numerical fluxes // *J. of Scientific Computing*. 2021. V. 88. № 3. P. 1–32.
24. *Huang J., Hu T., Li Y., Song J., Liang S.* Numerical dispersion and dissipation of the triangle-based discontinuous Galerkin method for acoustic and elastic velocity-stress equations // *Computers & Geosciences*. 2022. V. 159. № 1. P. 104979.
25. *Ladonkina M.E., Neklyudova O.A., Ostapenko V.V., Tishkin V.F.* On the Accuracy of the Discontinuous Galerkin Method in Calculation of Shock Waves // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2018. V. 58. № 8. P. 13441353.
26. *Sepehry N., Ehsani M., Asadi S., Shamshirsaz M., Nejad F.B.* Fourier spectral element for simulation of vibro-acoustic modulation caused by contact nonlinearity in the beam // *Thin-Walled Structures*. 2022. V. 174. P. 109112.
27. *Trinh P.T., Brossier R., Métivier L., Tavard L., Virieux J.* Efficient time-domain 3D elastic and viscoelastic full-waveform inversion using a spectral-element method on flexible Cartesian-based mesh. // *Geophysics*. 2019. V. 84. № 1. P. 61–83.
28. *Godunov S.K., Denisenko V.V., Klzuchinskii D.V., Fortova S.V., Shepelev V.V.* Study of Entropy properties of Linearized Version of Godunov's Method // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2020. V. 60. № 4. P. 628640.
29. *Kovyrkina O., Ostapenko V.V.* Monotonicity of the CABARET Scheme Approximating a Hyperbolic System of Conservation Laws // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2018. V. 58. № 9. P. 14351450.
30. *Chukhno V.I., Usov E.* CABARET Scheme as Applied to Numerical Approximation of Two-Fluid Flow Equations // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2018. V. 58. № 9. P. 14511461.
31. *Gordon R., Turkel E., Gordon D.* A compact three-dimensional fourth-order scheme for elasticity using the first-order formulation // *Internat. Journal for Numerical Methods in Engng*. V. 122. № 21. P. 6341–6360.
32. *Lu Z., Ma Y., Wang S., Zhang H., Guo J., Wan Y.* Numerical simulation of seismic wave triggered by low-frequency sound source with 3D staggered-grid difference method in shallow water // *Arabian Journal of Geosciences*. 2021. V. 14. № 6. P. 1–8.
33. *Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., Petrov I.B.* Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method // *Geophysical Prospecting*. 2018. V. 66. № 8. P. 1485–1502.
34. *Khokhlov N., Favorskaya A., Stetsyuk V., Mitskovets I.* Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones // *J. of Comput. Phys.* 2021. V. 446. № 1. P. 110637.
35. *Kozhemyachenko A.A., Petrov I.B., Favorskaya A.V., Khokhlov N.I.* Boundary conditions for modeling the impact of wheels on railway track // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2020. V. 60. № 9. P. 1539–1554.
36. *Steger J.L.* A Chimera grid scheme: advances in grid generation. American Society of Mechanical Engineers // *Fluids Engng Division*. 1983. V. 5. P. 55–70.
37. *Chesshire G., Henshaw W.D.* Composite overlapping meshes for the solution of partial differential equations // *J. of Comput. Phys.* 1990. V.90. № 1. P. 1–64.
38. *Henshaw W.D., Schwendeman D.W.* Parallel computation of three-dimensional flows using overlapping grids with adaptive mesh refinement // *J. of Comput. Phys.* 2008. V. 227. № 16. P. 7469–7502.
39. *Chang X.H., Ma R., Wang N.H., Zhao Z., Zhang L.P.* A Parallel Implicit Hole-cutting Method Based on Background Mesh for Unstructured Chimera Grid // *Computers & Fluids*. 2020. V. 198. P. 104403.
40. *Favorskaya A.V., Khokhlov N.I., Petrov I.B.* Grid-Characteristic Method on Joint Structured Regular and Curved Grids for Modeling Coupled Elastic and Acoustic Wave Phenomena in Objects of Complex Shape // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. V. 41. № 4. P. 512–525.
41. *Favorskaya A., Khokhlov N.* Accounting for curved boundaries in rocks by using curvilinear and Chimera grids // *Procedia Computer Science*. 2021. V. 192. P. 3787–3794.
42. *Favorskaya A.V.* Simulation of the human head ultrasound study by grid-characteristic method on analytically generated curved meshes // *Smart Innovation, Systems and Technologies*. 2021. V. 214. P. 249–263.
43. *Favorskaya A., Khokhlov N., Sagan V., Podlesnykh D.* Parallel computations by the grid-characteristic method on Chimera computational grids in 3D problems of railway non-destructive testing // *Lecture Notes in Computer Science*. 2022. V. 13708. P. 199–213.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ, В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ С ЯВНЫМ ВЫДЕЛЕНИЕМ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ<sup>1)</sup>

© 2023 г. И. А. Митьковец<sup>1</sup>, Н. И. Хохлов<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ (НИУ), Россия

\*e-mail: khokhlov.ni@mipt.ru

Поступила в редакцию 12.05.2023 г.  
Переработанный вариант 12.05.2023 г.  
Принята к публикации 26.06.2023 г.

Рассматривается вопрос численного моделирования распространения волновых возмущений в гетерогенных средах с наличием пористых включений, а также вопрос явного выделения пористых неоднородностей. В качестве подхода для явного выделения неоднородностей предложен метод наложенных сеток. Для численного решения возникающих систем дифференциальных уравнений в частных производных применяется сеточно-характеристический метод. Рассмотрены особенности предложенного метода, проведена верификация предложенных алгоритмов, приводится серия тестовых расчетов. Библ. 48. Фиг. 9.

**Ключевые слова:** сеточно-характеристический метод, распространение сейсмических возмущений, пористые среды, явное выделение неоднородностей, наложенные сетки.

**DOI:** 10.31857/S0044466923100125, **EDN:** WHK1AY

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из самых старых и распространенных методов поиска и разведки месторождений углеводородов на текущий момент, по-видимому, является сейсмическая разведка. В то время, как основной ее задачей является определение структуры подповерхностного пространства по данным наземных (и, возможно, скважинных) наблюдений, важной составляющей решения данной задачи является описание процесса распространения сейсмических волн от источника вглубь геологической среды. Решение прямых задач сейморазведки может быть использовано, например, для уточнения запасов углеводородов в районах с большим числом эксплуатируемых скважин, построения синтетических сейсмограмм для нужд региональной сейморазведки, уточнения присутствия углеводородов и их характеристик в известной геологической структуре. Значительное развитие в данном направлении возможно с использованием численного моделирования распространения сейсмических волн в реалистичных моделях геологического массива, поскольку реализуется возможность задания произвольной внутренней структуры среды с последующей оценкой синтетического сигнала-отклика.

Настоящая работа посвящена исследованию пространственных динамических процессов, протекающих в геологических средах, содержащих пористые включения, в процессе сейсмической разведки. Геологические породы, содержащие пористые и трещиноватые включения, являются одним из источников залежей углеводородов. Более того, такие структуры с низкой пористостью и проницаемостью используются для контролируемого хранения и миграции газа. Относительно высокая пористость и развитая сеть микротрещин имеют важное значение для добычи природного газа в плотных газоносных песчаниковых коллекторах, являющихся одним из основных факторов обогащения газа (см. [1]). В то же время развитие природных микротре-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта 21-11-00139).

щин способствует формированию сети пор-трещин при гидроразрыве пласта, что является одним из определяющих факторов добычи углеводородов. При решении обратной задачи, опираясь на сейсмические данные и имея таким образом модель геологического устройства под поверхностью, можно определять оптимальные места бурения скважин. Вследствие чего для нефте- и газодобычи необходимы модели, позволяющие максимально точно описывать физические свойства подобных структур. В частности, важно создание моделей, описывающих сейсмические характеристики пор и микротрещин (см. [1]).

При распространении упругих волн через среду, имеющую такие неоднородности, как поры или трещины, будет происходить ослабление возмущения. Помимо таких факторов, как потеря плотности энергии, вызванных расширением фронта волны и трения зернистых материалов, это связано с частичным отражением упругой волны от неоднородностей (см. [2]). Величина последнего эффекта зависит от пористости среды, формы пор, трещин, их взаимного расположения и материала, которым они заполнены. Все эти параметры могут варьироваться в реальных геологических породах, поэтому они должны учитываться в реалистичной модели среды (см. [3]). Важно, чтобы разработанные математические модели и численные методы учитывали эти факторы.

Существуют теоретические модели подобных сред. Классической является модель Гассмана (см. [4, 5]), в которой устанавливается связь между упругими параметрами насыщенной жидкости или газом пористой среды. В модели Гассмана предполагается, что мы можем описывать упругие свойства пористой среды аналогично однородному изотропному материалу. Для этого в модели предполагается, что порода состоит из твердого каркаса (скелета), по которому равномерно распределен флюид в жидкой или газообразной фазах. Основываясь на этом предположении, производится расчет “эффективных” параметров среды, описывающих упругие свойства материала. Предположения, заложенные в модель Гассмана, накладывают определенные ограничения на ее применение. Основное ограничение связано с частотой распространяющегося сигнала. При достаточно высоких частотах модель Гассмана плохо описывает упругие характеристики двухфазных пород из-за отсутствия учета влияния движения флюида относительно твердого каркаса. Физическое влияние пор учитывается в твердо-жидкостной модели Био, описывающей пористые среды, в которых жидкая и твердая фазы имеют схожую плотность (см. [6]). Как и в модели Гассмана, в модели Био считается, что поры равномерно распределены по всему объему среды, но при этом учитывается частота проходящей волны и в движение вязкой жидкости в порах. На основе этой модели были разработаны другие, учитывающие свойства жидкости, проницаемости и углов падения, такие как модель Squirt и BISQ (см. [7–10]), частично насыщенная модель (см. [11, 12]). Была разработана обобщенная модель Био для анизотропных вязкоупругих сред, поскольку в природе существуют породы, обладающие анизотропией по отношению к направлению упругой волны (см. [13]). Также в ряде исследований проводилось изучение затухания продольных волн в частично насыщенных породах (см. [14–16]). Микроструктурный подход к аналитическому изучению затухания и дисперсии волн, проходящих через пористую структуру, проводился в работах [17–19]. Для описания среды в них использовалось представление пор в виде эллипса с заданным соотношением полуосей и пористость (доля объема занимаемого полостями пор).

На основе нелинейной теории фильтрации (см. [20]) была предложена линеаризованная модель Доровского (см. [21]). В этой модели используются все скорости распространения упругих волн и требуется всего три параметра для описания пористой среды, против четырех в модели Био. Однако она не позволяет точно описывать волны Стоунли при различных частотах (см. [22]).

Тем не менее неоднородная структура пор и микротрещин может приводить к сложным зависимостям между скоростью прохождения упругой волны и пористостью, которые не поддаются классическим формулам (см. [23]). Степенная зависимость скорости прохождения упругой волны от соотношения полуосей эллипса, описывающего поры, была продемонстрирована в [24]. При этом для поверхностных волн такая зависимость не была выявлена. Чувствительность продольной скорости упругой волны к соотношению сторон исследуется в [25]. Отмечается различие скорости для породы с иглообразными и сферическими порами при одинаковых макропараметрах. Также отмечается влияние насыщающего флюида (газа или жидкости). Важность учета распределения пор по размерам и толщине их стенок была продемонстрирована с помощью моделирования на микроуровне в работе [26].

Из вышеизложенного следует, что развитие более точных математических моделей пористых сред, в том числе с явным выделением неоднородностей, является актуальной задачей. В насто-

ящей работе предлагается новый подход для явного выделения пористых неоднородностей, основанный на наложенных или химерных сетках. Ранее данный подход уже применялся для выделения геологических трещиноватых неоднородностей. Так, в работе [27] рассматривался вопрос применения повернутых наложенных сеток для выделения отдельных трещин. В [28] применялся подход на искривленных наложенных сетках, который позволяет более точно выделять трещиноватые неоднородности. Также в работе [29] описано применение метода наложенных сеток для явного выделения топографии земной поверхности.

В качестве численного метода для решения возникающей системы дифференциальных уравнений в настоящей работе используется сеточно-характеристический метод (см. [30]), который изначально разрабатывался для решения задач газовой динамики. Одним из основоположников данного метода был А.С. Холодов (см. [31, 32]). Затем сеточно-характеристический метод был обобщен для решения задач упругости. Данное направление начал развивать И.Б. Петров. Первые работы на эту тему можно найти в [33, 34]. И.Б. Петров внес большой вклад в развитие сеточно-характеристического метода для данного направления. Позже он был обобщен для решения задач сейсмики (см. [35]), явного выделения геологических неоднородностей (см. [36]), задач сейсмостойкости (см. [37]) и других динамических задач механики деформируемого твердого тела. В настоящей работе также применяется сеточно-характеристический метод.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

### 2.1. Математическая модель

Для решения обобщенной задачи моделирования распространения сейсмической волны в грунте будем использовать линейно-упругую и изотропную модель среды (см. [38–41]). В тензорной форме она имеет вид (см. [30])

$$\rho \mathbf{v}_t = (\nabla \cdot \mathbf{T})^T, \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} + \mu (\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T), \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность среды,  $\mathbf{v}$  – скорость перемещения среды,  $\mathbf{T}$  – тензор напряжений Коши,  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе, характеристики упругих деформаций,  $\mathbf{I}$  – единичный тензор,  $\otimes$  – оператор тензорного произведения  $(\nabla \otimes \mathbf{v})_{i,j} = \nabla_i v_j$ .

Для задания пористых неоднородностей предлагается их явное выделение. Пористое включение представляется в виде пустой или заполненной поры. В случае, если пора пустая, на границе области задается условие свободной границы. Если пора заполнена другим материалом, задается контактное условие на границе раздела поверхностей. При описании свободных граничных условий свободной поверхности мы полагаем проекцию тензора напряженности на нормаль к границе, равной нулю в граничных узлах, таким образом, должно выполняться

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор единичной длины, перпендикулярный границе и ориентированный против области моделирования.

В случае заполненной поры необходимо контактное условие на границе раздела сред. Для описания передачи возмущения между сетками с различными характеристиками среды нами был реализован механизм контакта сеток. Реализация данного механизма предполагает, что граничные узлы таких сеток в месте их контакта геометрически совпадают. В таком случае мы полагаем равенство нормальных составляющих тензоров напряженности в совпадающих узлах таких сеток и равенство скорости контактных сред. Эти условия можно записать в виде соотношений

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1, \quad (4)$$

$$\mathbf{f}_0 = -\mathbf{f}_1, \quad (5)$$

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{T}_1 \cdot (-\mathbf{n}), \quad (6)$$

где индексы 0 и 1 обозначают различные контактные сетки;  $\mathbf{f}_i$  – сила, действующая со стороны области, описываемой  $i$ -й сеткой;  $\vec{v}_i$  – скорость среды на рассматриваемой границе. Более подробное описание данных граничных и контактных условий приводится в [30].

2.2. Численный метод

Сеточно-характеристический метод использует характерные свойства систем гиперболических уравнений, описывающих распространение упругих волн (см. [42, 43]). Математические принципы сеточно-характеристического метода основаны на представлении уравнений движения линейно-упругой среды в матричной форме. Для двумерного случая она имеет вид

$$\mathbf{x}\mathbf{q}_t + \mathbf{A}_1\mathbf{q}_x + \mathbf{A}_2\mathbf{q}_y = 0, \tag{7}$$

где  $\mathbf{q}$  – это вектор, состоящий из пяти компонент:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ T_{11} \ T_{22} \ T_{12}]^T. \tag{8}$$

Матрицы  $\mathbf{A}_k, k = 1, 2$ , являются квадратными матрицами размера  $5 \times 5$ . Произведение матриц  $\mathbf{A}_k$  и вектора  $\mathbf{q}$  может быть вычислено следующим образом:

$$\mathbf{A}_k \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \rho^{-1}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) \\ \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{I} + \mu(\mathbf{n} \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где  $\mathbf{n}$  является единичным вектором, направленным вдоль направлений  $x, y$  для матриц  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  соответственно. Чтобы представить эту формулу явного интегрирования по времени, мы используем спектральное разложение матрицы  $\mathbf{A}_k$ . Например, для матрицы  $\mathbf{A}_1$

$$\mathbf{A}_1 = (\mathbf{\Omega}_1)^{-1} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{\Omega}_1, \tag{10}$$

где  $\mathbf{\Lambda}_1$  – диагональная матрица  $5 \times 5$ , образованная собственными значениями матрицы  $\mathbf{A}_1$ ;  $\mathbf{\Omega}_1^{-1}$  – матрица  $5 \times 5$ , образованная соответствующими собственными векторами. Обратим внимание, что матрицы  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{A}_2$  имеют одинаковый набор собственных значений:

$$\{c_p, -c_p, -c_s, c_s, 0, 0\}. \tag{11}$$

Здесь  $c_p$  – продольная скорость волны, равная

$$\sqrt{(\rho^{-1}(\lambda + 2\mu))}, \tag{12}$$

и  $c_s$  – поперечная скорость волны, равная

$$\sqrt{(\rho^{-1}\mu)}. \tag{13}$$

В [30, 44] показано, что решение уравнения (7) для вектора  $\mathbf{q}$  в координатах  $x, y$  для следующего шага по времени может быть записано следующим образом:

$$\mathbf{q}(t + \tau, x, y) = \sum_{j=1}^J \mathbf{X}_{1,j} \mathbf{q}(t, x - \Lambda_{1,j}\tau, y), \tag{14}$$

$$\mathbf{q}(t + \tau, x, y) = \sum_{j=1}^J \mathbf{X}_{2,j} \mathbf{q}(t, x, y - \Lambda_{2,j}\tau). \tag{15}$$

Здесь  $\tau$  – шаг интегрирования по времени,  $\mathbf{X}_{1,j}$  и  $\mathbf{X}_{2,j}$  – характеристические матрицы, которые можно выразить с использованием компонент матриц  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  и их собственных значений следующим образом:

$$\mathbf{X}_{i,j} = \mathbf{\sigma}_{*i,j} \mathbf{\sigma}_{i,j}, \quad i = 1, 2, \tag{16}$$

где  $\mathfrak{a}_{*i,j}$  есть  $j$ -я колонка матрицы  $(\Omega_i)^{-1}$ ,  $\mathfrak{a}_{i,j}$  есть  $j$ -я строчка матрицы  $\Omega_i$ . Скалярные компоненты вектора  $\mathfrak{a}_{*i,j}$  определяются следующим образом:

$$\omega_{1,2} = \left( \Omega_1 \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \right)_{1,2} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \mp (c_s \rho)^{-1} (\mathbf{N}_{00} * \mathbf{T}), \quad (17)$$

$$\omega_{3,4} = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{v} \mp (c_s \rho)^{-1} (\mathbf{N}_{01} * \mathbf{T}), \quad (18)$$

$$\omega_{5,6} = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{v} \mp (c_s \rho)^{-1} (\mathbf{N}_{02} * \mathbf{T}), \quad (19)$$

$$\omega_7 = \mathbf{N}_{12} * \mathbf{T}, \quad (20)$$

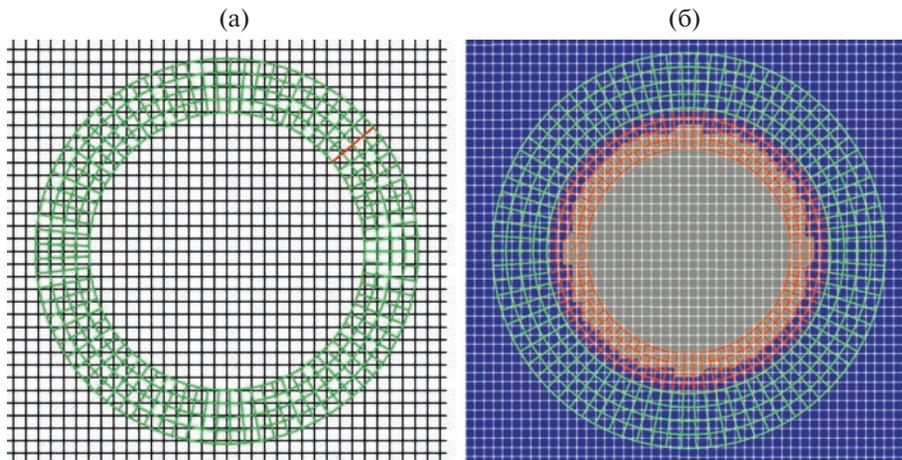
$$\omega_8 = (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{22}) * \mathbf{T}, \quad (21)$$

$$\omega_9 = \left( \mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22} - \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{N}_{00} \right) * \mathbf{T}. \quad (22)$$

В уравнениях (17)–(22) звездочка  $*$  обозначает свертку двух тензоров ранга 2. Выражения (16)–(17) могут быть использованы для нахождения решения, вектора  $\mathbf{q}$ , в любой момент времени,  $t + \tau$ , при заданных начальных условиях. Таким образом, получаем прямой алгоритм пошагового выполнения – численное моделирование распространения упругих волн в неоднородных средах. Для численного интегрирования в работе применяется сеточно-характеристическая схема третьего порядка точности (см. [30]).

### 2.3. Метод наложенных сеток

Основная цель работы – разработка нового подхода, основанного на учете различных неоднородностей с использованием наложенных сеток. В качестве неоднородностей рассматриваются единичные поры, представляющие собой замкнутое включение какой-либо формы. При использовании метода наложенных сеток, он же метод химерных сеток, используются основная, как правило, прямолинейная регулярная сетка, и, как минимум, одна наложенная сетка. На фиг. 1а представлен пример реализации таких сеток: роль основной сетки выполняет прямолинейная регулярная сетка, ячейки которой являются квадратами с заданной длиной ребер, роль наложенной сетки – криволинейная сетка, образующая кольцо. В процессе моделирования распространения упругой волны, после расчета значений напряженности на следующем временном



**Фиг. 1.** Расположение наложенных сеток для описания пор: (а) – пример основной регулярной прямолинейной сетки (черный цвет) и наложенной на нее криволинейной (зеленый цвет) для случая моделирования полового отверстия, красным цветом отмечены замкнутые границы, к которым применяются периодические граничные условия; (б) – пример основной регулярной прямолинейной сетки (белый цвет), ребра внешней наложенной сетки (оранжевый); серым цветом обозначена область основной сетки, имеющая характеристики “заполнителя”.

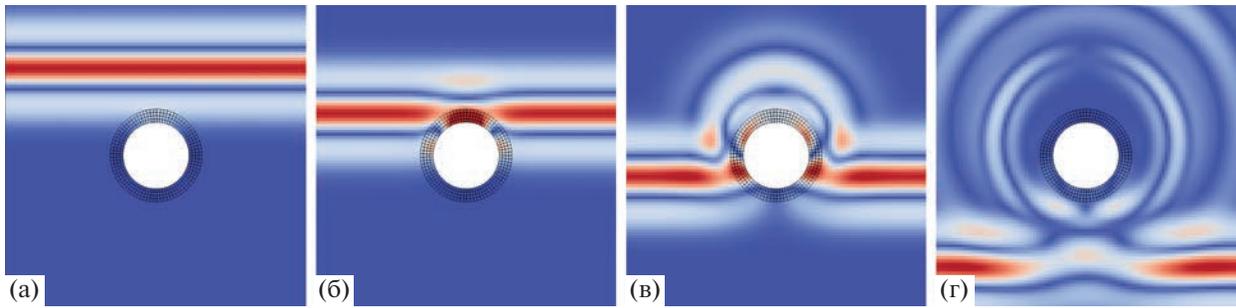
шаге для всех узлов основной сетки, происходит интерполяция этих значений в соответствующие узлы наложенной сетки и уже после этого рассчитывается распространение возмущения в рамках наложенной сетки. Вычисление следующего временного шага завершается после того, как происходит обратная интерполяция из наложенной сетки в основную. Заметим, что для корректности процедуры интерполяции между вычислительными сетками необходимо, чтобы основная и наложенная сетки имели идентичные характеристики среды. Достаточно подробно метод наложенных сеток исследован в [27], там же приводится исследование его точности при использовании сеточно-характеристического метода.

#### 2.4. Учет единичных отверстий

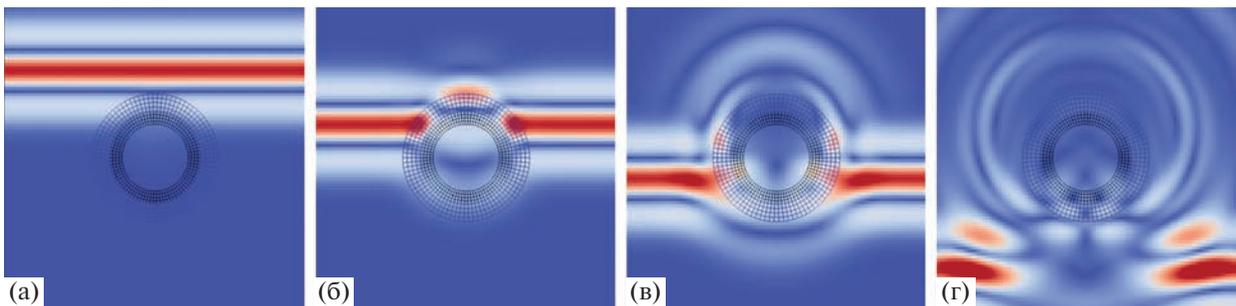
Для того чтобы моделировать присутствие полого отверстия при моделировании распространения упругих волн с применением сеточно-характеристического метода, нами было предложено использовать метод наложенных сеток для описания свободной границы отверстия круглой или овальной формы. Для это предлагается произвести взаимно однозначное преобразование равномерной регулярной сетки в криволинейную сетку, которая будет образовывать кольцо. На границе наложенной сетки, которая представляет собой внутреннюю границу образованного ею кольца, используются граничные условия свободной поверхности, формируя таким образом стенку полого отверстия. А на перпендикулярных ей границах сетки (отмечены красным на фиг. 1а), полностью совпадающих и таким образом замыкающих сетку в кольцо, применены периодические граничные условия, что позволяет моделировать распространение возмущения в узлах на этих границах в любом направлении, аналогично распространению во внутренних узлах сетки. Периодические граничные условия реализованы таким образом, что для узлов вблизи одной из границ соседними являются также и узлы, находящиеся у противоположной границы. Внешняя сторона такой “закольцованной” сетки граничных условий не имеет. Такая реализация позволяет описывать отверстие равносторонним многоугольником, который образуется на внутренней стороне наложенной сетки, в отличие от ломанной, состоящей из перпендикулярных друг другу отрезков, совпадающих с ребрами основной регулярной сетки при использовании “лестничного” описания границы регулярной сеткой.

В случае отверстий, заполненных материалом, отличным от материала среды, используются две наложенные сетки в форме кольца, вложенные друг в друга (см. фиг. 1б). Замыкание сеток самих на себя происходит аналогичным образом с применением периодических граничных условий. Основная сетка в такой постановке не является однородной, узлы, находящиеся в центре описываемого отверстия, имеют параметры материала “заполнителя” поры, отличные от параметров материала среды “каркаса”. При этом узлы основной сетки, образующие собой “лестничную” границу заполнителя и каркаса, должны геометрически находиться под внутренней наложенной сеткой. Эта внутренняя наложенная сетка имеет параметры материала заполнителя и не имеет граничных условия на внутренней и внешней сторонах образуемого ею кольца. Внешняя наложенная сетка, напротив, имеет параметры среды каркаса и также не имеет граничных условий, помимо периодических на замыкаемых границах. Между внутренней стороной внешней наложенной сетки и внешней стороной внутренней наложенной сетки реализован контакт двух различных сред (см. (4)). Таким образом, возмущение, распространяющееся в основной сетке в направлении центра заполненного отверстия после интерполяции, попадает на внешнюю сторону внешней наложенной сетки, распространяется по этой сетке, проходит через контакт различных сред и продолжает распространение во внутренней сетке, после которого в результате интерполяции попадает обратно в основную сетку.

Для демонстрации работы предлагаемого метода нами было проведено моделирование распространения упругой волны в присутствии отверстий обоих типов. На фиг. 2 представлена волновая картина распространения волн в образце, имеющем круглое полое отверстие в различные моменты времени. В данном расчете использовалась основная равномерная квадратная сетка размером  $101 \times 101$  узлов с шагом ячеек 2 м и криволинейная наложенная сетка размером  $85 \times 5$  узлов с характерным шагом ячеек 2 м, плотность используемого материала  $2500 \text{ кг/м}^3$ , продольная скорость упругой волны 3000 м/с, поперечная скорость 1500 м/с. Таким образом, рассматривается пора радиусом 22 м. При моделировании использовался шаг интегрирования  $dt = 2 \times 10^{-4}$  с, всего было произведено 400 шагов. Визуализация результата моделирования распространения плоской волны в присутствии заполненного отверстия приведена на фиг. 3. В данном расчете использовались аналогичные параметры основной сетки, материала “каркаса” и шага интегрирования по времени. Параметры материала поры следующие: плотность  $2500 \text{ кг/м}^3$ ,



Фиг. 2. Распространение упругой волны в присутствии полого отверстия.



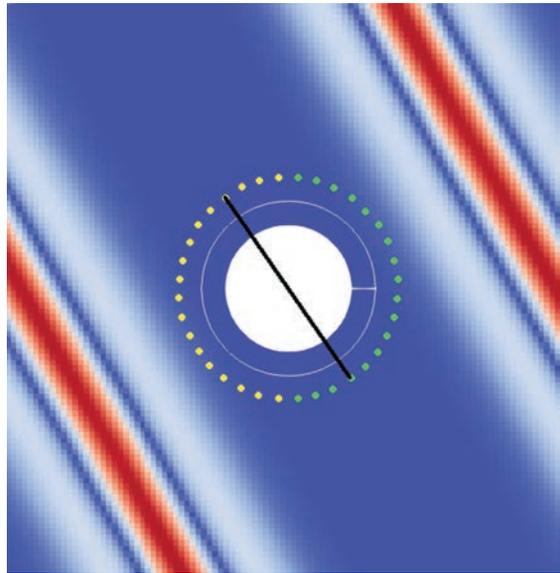
Фиг. 3. Распространение упругой волны в присутствии заполненного отверстия.

продольная скорость упругой волны 5400 м/с, поперечная скорость 2700 м/с. Размеры внешней и внутренней наложенных сеток совпадают и составляют  $83 \times 5$  узлов. Характерный размер ячеек внутренней наложенной сетки также составляет 2 м, а внешней 2.3 м. Плоская волна с частотой 100 Гц, заданная функцией Рикера, движется параллельно оси  $Oy$ .

### 3. ВЕРИФИКАЦИЯ МЕТОДА

Рассмотрим вопросы верификации предложенного метода. В первую очередь было проведено сравнение решения задачи Лэмба сеточно-характеристическим методом с использованием метода наложенных сеток с аналогичными постановками известных решений. Целью данного шага верификации является демонстрация применимости сеточно-характеристического метода с использованием метода наложенных сеток для корректного моделирования распространения эластичных волн линейно в упругой среде с учетом граничных условий свободной поверхности. За один из эталонных результатов было взято решение, полученное сеточно-характеристическим методом с регулярной прямолинейной сеткой и граничными условиями свободной поверхности (см. [30]). Другим решением, с которым мы проводили сравнение своего метода, было решение, полученное программным комплексом `specfem2d` (см. [45]), основанное на методе спектральных элементов с использованием неструктурных сеток. Подробная методика и результаты данных сравнений были описаны в [46]. Кроме того, в [29] проведено сравнение результатов моделирования распространения упругой волны под синусоидальной свободной поверхностью с аналогичной постановкой в программном комплексе `specfem2d`. В результате этих исследований показано, что применение метода наложенных сеток при использовании сеточно-характеристического метода позволяет достигать результаты, незначительно отличающиеся от результатов работы эталонных моделей, приведенных выше.

Для верификации реализации нашего метода, позволяющего учитывать единичные отверстия при моделировании распространения упругой волны в неоднородной среде, была проведена серия расчетов, проверяющих симметрию реализации системы “наложенная сетка–основная сетка”, в случае периодического граничного условия на замыкаемых границах наложенной сетки, которая образует кольцо, описывающее пору. Верификация проводилась для обоих случаев: по-



**Фиг. 4.** Визуализация постановки задачи верификации симметричности отверстия: белым обозначены границы наложенной сетки; желтым и зеленым – попарно сравниваемые группы приемников; черная линия демонстрирует принцип, по которому сравниваются приемники.

лого отверстия с граничными условиями свободной поверхности на внутренней поверхности и отверстия, заполненного упругим материалом, отличным от материала окружающей среды.

**Описание эксперимента.** В постановке задачи верификации единичного отверстия рассматривается распространение упругих волн в квадратной области в присутствии круглого отверстия, параметры моделирования описаны в п. 2.4. В дополнение к описанной выше постановке вокруг наложенной сетки на расстоянии 5 м от внешнего края сетки располагается 36 приемников. На описанное отверстие по основной сетке набегают 2 плоские волны, частотой 100 Гц, симметрично относительно прямой, проходящей через центр отверстия под переменным углом, постановка численного эксперимента приведена на фиг. 4. Сравнивалась сумма ошибок принятого приемниками сигнала по норме  $L_2$  в течение периода моделирования. Что выражается формулами

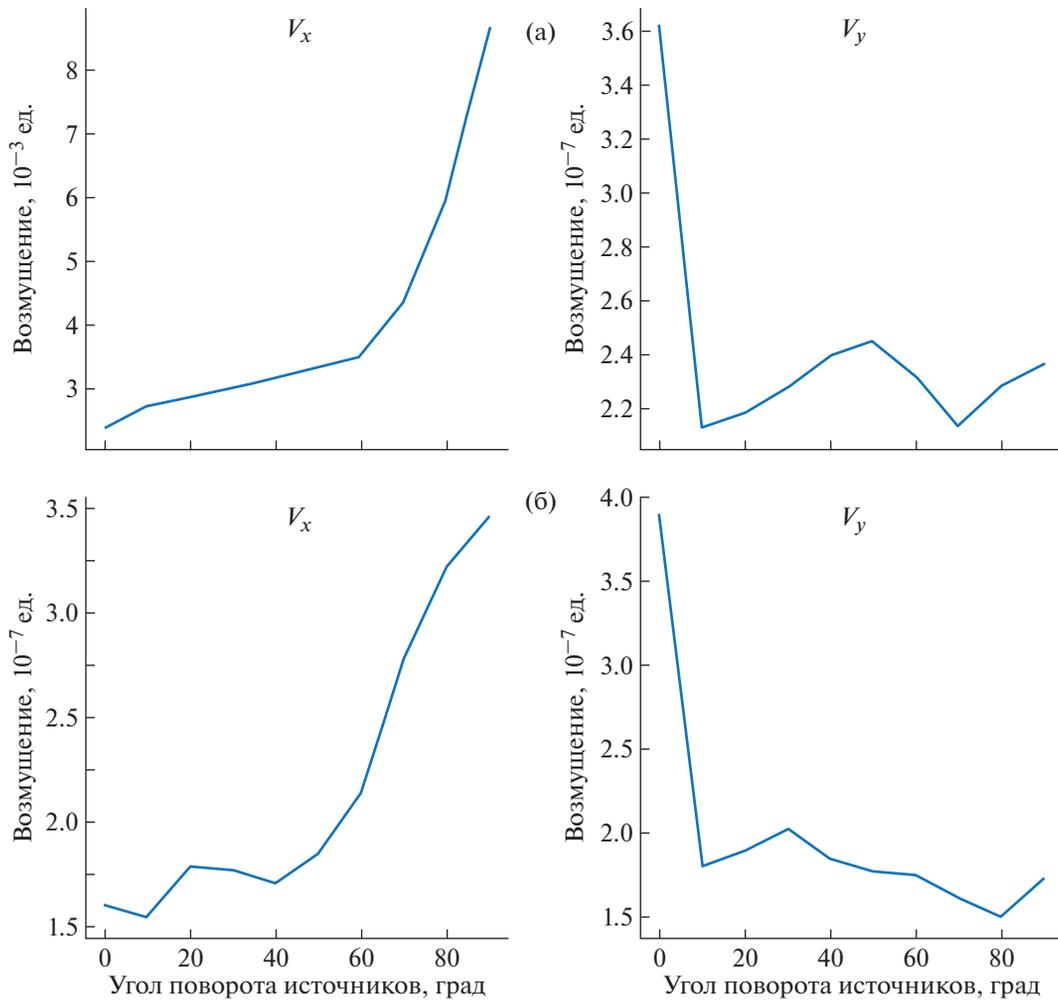
$$L_{2r,x} = \frac{\sqrt{\sum_{t=0}^{\text{steps}} V_{x,t,r} - V_{x,t,r+\text{cnt}/2}^2}}{\sqrt{\sum_{t=0}^{\text{steps}} V_{x,t,r}^2}}, \tag{23}$$

$$L_{2x} = \sum_{r=1}^{\text{cnt}/2} L_{2r,x}, \tag{24}$$

$$L_{2r,y} = \frac{\sqrt{\sum_{t=0}^{\text{steps}} V_{y,t,r} - V_{y,t,r+\text{cnt}/2}^2}}{\sqrt{\sum_{t=0}^{\text{steps}} V_{y,t,r}^2}}, \tag{25}$$

$$L_{2y} = \sum_{r=1}^{\text{cnt}/2} L_{2r,y}, \tag{26}$$

где  $V_{y,t,r}$  – возмущение, сонаправленное с осью  $Ox$ , на  $t$ -м шаге вычислений в точке расположения приемника под номером  $r$ ;  $\text{steps}$  – общее количество итераций по времени в текущем расчете;  $\text{cnt}$  – суммарное количество приемников в эксперименте.

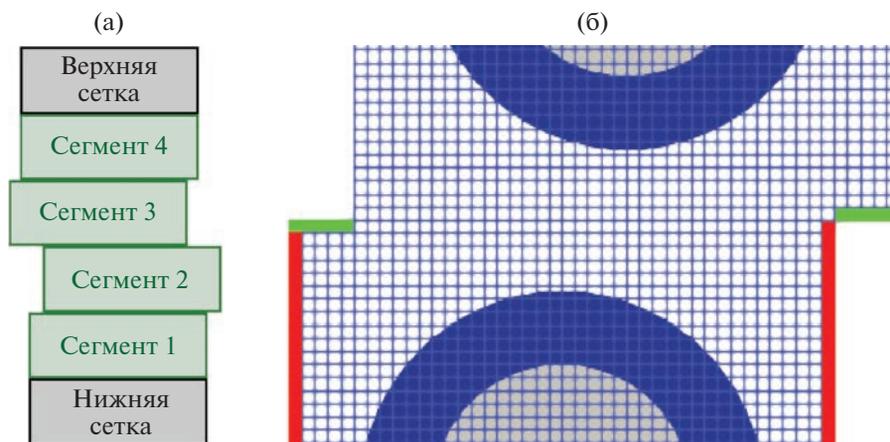


**Фиг. 5.** Суммарная ошибка по норме  $L_2$  при различных углах между осями основной сетки и фронтом волны: (а) – пустое отверстие, (б) – заполненное отверстие.

Была проведена серия экспериментов при различных углах наклона фронта плоской волны, относительно осей равномерной регулярной основной сетки, для изучения анизотропии использованного метода. Диапазон измерений от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , более широкий диапазон не потребовался ввиду симметричности расположения источников волн и равномерности основной сетки. Результаты проведенных серий экспериментов для полого и заполненного отверстий представлены на фиг. 5а и 5б соответственно. На приведенных графиках представлены экспериментально вычисленные зависимости (24) и (26) от угла между фронтами плоских волн, распространяющихся в направлении отверстия. Полученные графики на фиг. 5а и 5б демонстрируют, что ошибка по норме  $L_2$  отдельно взятой компоненты возмущения максимальна в случае перпендикулярности направления распространения упругой волны и компоненты возмущения. Из абсолютных величин ошибки по норме  $L_2$  для полого и заполненного отверстий можно сделать вывод, что интерполяция между основной и наложенной сетками не вносит существенной ошибки в данных экспериментах (менее 1%).

#### 4. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

В данном разделе рассмотрим примеры, демонстрирующие возможности разработанного подхода для численного решения задач распространения волновых возмущений в пористых средах.

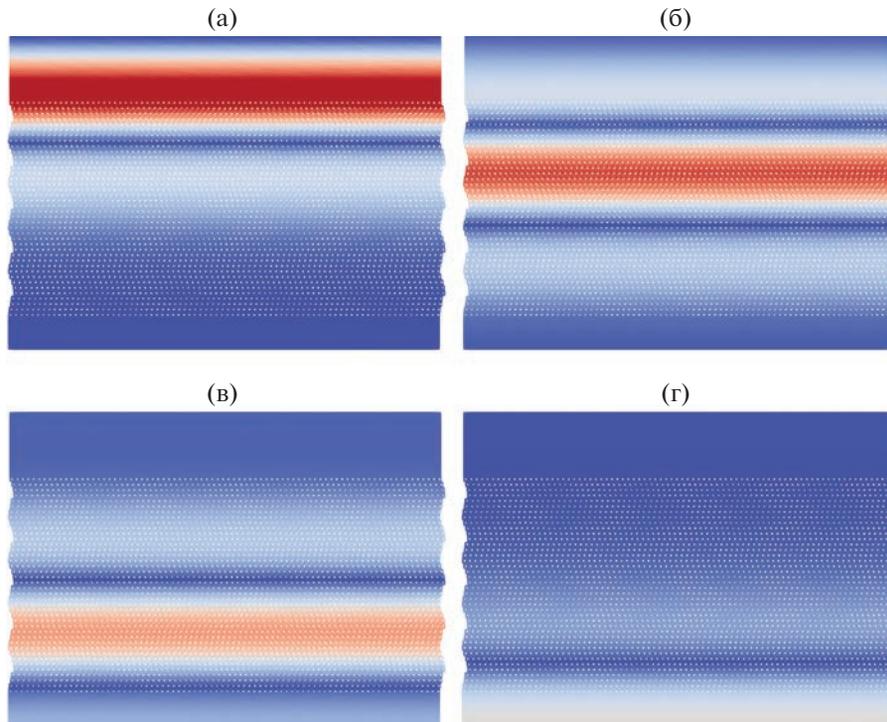


Фиг. 6. Распространение упругой волны в пористом слое. Белыми точками обозначены поры. Градиентом показана амплитуда упругой волны.

#### 4.1. Прохождение фронта волны через пористый слой

Рассмотрим вопрос прохождения фронта плоской волны через пористый слой. На основе проведенного численного эксперимента могут быть определены эффективные упругие параметры пористой среды. Пример показывает возможности разработанного подхода для проведения такого рода исследований. Для моделирования тонкого пористого слоя каждая пора выделяется и рассматривается отдельно. Рассматривается тонкий пористый слой, состоящий из полых отверстий, представленных кругами одинакового радиуса. Слой находится между двумя полупространствами. Упругие параметры полупространств и каркаса пористого слоя совпадают. На фиг. 6а представлена схема расположения основных сеток. “Верхняя” и “нижняя” сетки (выделены черным) – равномерные регулярные сетки, не имеющие интерполяционного взаимодействия с другими сетками. Они служат для описания среды, в которой находятся источник и приемник соответственно. Между ними располагаются сетки-“сегменты”, смещенные на произвольное количество узлов друг относительно друга. Каждая сетка-“сегмент” необходима для описания отдельного полого отверстия в среде, центр которого совпадает с геометрическим центром “сегмента”. Метод описания поры с использованием наложенной сетки описан выше. Смещение “сегментов” друг относительно друга необходимо для исследования различных конфигураций расположения отверстий и исключения эффектов, вызванных их структурой, таких как интерференция. Для наглядной визуализации проведенного эксперимента на фиг. 7 приведена картина распространения линейно-упругой волны в тонком пористом слое в различные моменты времени. При моделировании описанной выше задачи использовалось 50 сегментов сеток, каждый из которых содержал наложенную сетку, описывающую единичную пору радиуса от 11 до 41 м. Варьируя радиус пор между экспериментами (в каждом отдельном эксперименте радиусы всех пор одинаковы), эксперимент позволяет измерять свойства такого пористого слоя в зависимости от пористости среды в диапазоне от 4 до 52%. В предлагаемом методе при увеличении диапазона пористости квадратично растет вычислительная сложность моделирования. Каждый из этих сегментов имеет размер  $51 \times 51$  узлов с длиной ребра 2 м. Наложённые сетки также имеют характерные размеры ячеек 2 м и имеют размеры от  $44 \times 6$  до  $162 \times 6$  узлов в зависимости от радиуса пор в эксперименте. “Верхняя сетка” и “нижняя сетка”, представленные на фиг. 6а, имеют размеры  $51 \times 501$  и  $51 \times 251$  соответственно. Размер ячеек в этих сетках также составляет 2 м. В данном эксперименте используется источник Рикера с длиной волны 6000 м. Приемник, регистрирующий напряженность, расположен на высоте 200 м от нижнего края “нижней сетки”. Физические параметры среды во всех сетках идентичны: плотность материала  $2500 \text{ кг/м}^3$ , продольная скорость упругой волны  $3000 \text{ м/с}$ , поперечная скорость  $1500 \text{ м/с}$ .

Существует ряд аналитических теорий, позволяющих оценить значение модуля упругости материала в зависимости от его степени пористости  $p = S_{\text{pore}} / (S_0 + S_{\text{pore}})$ , где  $S_{\text{pore}}$  – площадь пор,  $S_0$  – площадь, занимаемая средой каркаса. Наиболее известные из них модели – Reuss (27),



**Фиг. 7.** Расположение вычислительных сеток при моделировании тонкого пористого слоя: (а) – взаимное расположение основных сеток; (б) – периодически граничные условия (крайние узлы отмечены красным) и контакт между сетками-“сегментами” (крайние узлы отмечены зеленым).

Voigt (28) и Hashin–Shtrikman (29) (см. [47]), которые в нашем случае среды, состоящей из двух материалов, принимают вид

$$\frac{1}{K} = \frac{p}{K_{\text{pore}}} + \frac{1-p}{K_0}, \quad (27)$$

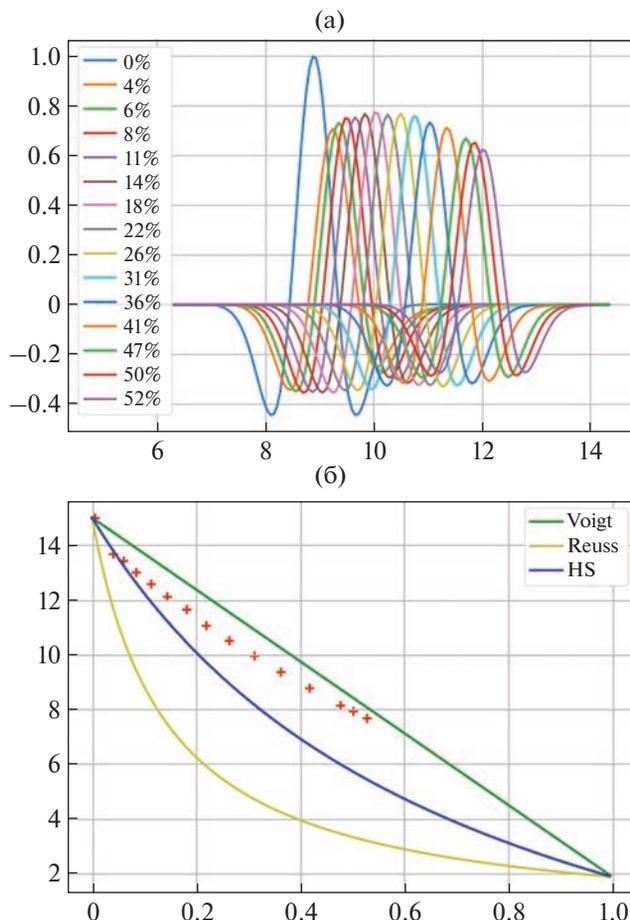
$$K = pK_{\text{pore}} + (1-p)K_0, \quad (28)$$

$$K = K_0 + \frac{p}{(K_{\text{pore}} - K_0)^{-1} + (1-p)(K_0 + 4\mu_0/3)^{-1}}, \quad (29)$$

где  $K_0$ ,  $K_{\text{pore}}$ ,  $K$  – модули упругости материала каркаса, заполнителя и получившегося образца соответственно;  $\mu_0$  – модуль сдвига материала каркаса. В приведенном эксперименте приемник расположен в нижней части моделируемой области, что позволило измерить зависимость величины возмущения, вызванного распространением от времени. Данная зависимость представлена на фиг. 8а. Используя зависимости, представленные на этом графике, учитывая расположение приемника, величины участков среды, в которых отсутствуют вкрапления пор, и параметры используемого источника Рикера, вычислены значения продольной скорости упругой волны для каждого значения пористости в эксперименте. Поскольку в рассматриваемой постановке измерение поперечной скорости упругой волны не представляется возможным, для ее оценки будем использовать приближенное значение модуля сдвига Hashin–Shtrikman (30) (см. [47])

$$\mu = \mu_0 + \frac{p}{(\mu_{\text{pore}} - \mu_0)^{-1} + \frac{2p(K_0 + 2\mu_0)}{5\mu_0(K_0 + 4\mu_0/3)}}, \quad (30)$$

где  $\mu_{\text{pore}}$ ,  $\mu$  – модули сдвига материала заполнителя и получившегося образца соответственно. Получившаяся зависимость модуля сдвига от пористости материала представлена на фиг. 8б и отмечена красными крестами. Для сравнения на фиг. 8б представлены теоретические оценки зависимости модуля упругости, согласно моделям Reuss (27), Voigt (28) и Hashin–Shtrikman (29).

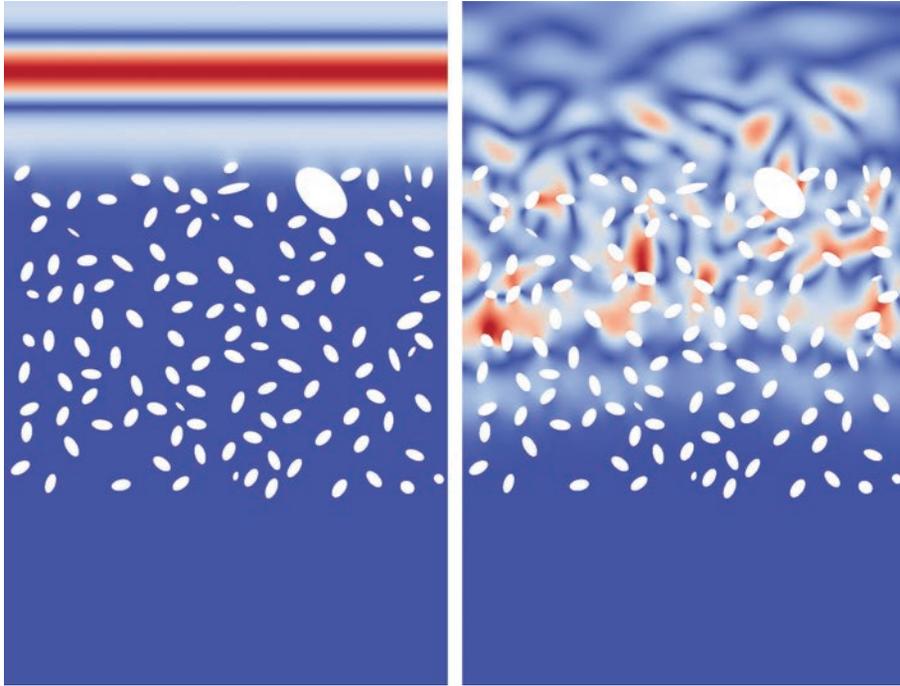


**Фиг. 8.** Результаты моделирования тонкого пористого слоя при различных значениях пористости: (а) — зависимость значения возмущения на приемнике от времени для различных значений пористости; (б) — графики сравнения зависимости объемного модуля упругости от пористости среды, полученные в результате моделирования предлагаемым методом с теоретическими границами Reuss, Voigt и моделью Hashin–Shtrikman.

Как следует из графика, предлагаемый метод дает результаты, укладывающиеся в теоретические оценки. Заметим, что вычислительная сложность данного метода растет квадратично с приближением пористости к предельным значениям 0 и 1, чем обуславливается диапазон измерений на фиг. 8.

#### 4.2. Моделирование сегмента реалистичной породы

Предлагаемый в статье метод позволяет при моделировании распространения упругих волн использовать различные геометрические формы отверстий. Для демонстрации потенциальной области применения данного метода рассмотрим пример, который воспроизводит постановку, используемую в ([48], Fig. 1), где все поры представлялись эллипсами. Вследствие высокой трудоемкости получения точных координат пор, для моделирования рассмотрим только верхнюю половину представленного образца. Следует отметить, что данное ограничение связано с трудностью оцифровки вручную постановки эксперимента из работы [48] и не связано с ограничениями метода. В данном эксперименте используются одна основная регулярная прямолинейная сетка и 120 наложенных криволинейных сеток различных размеров. Количество пор в эксперименте равно соответственно 120. Регулярная сетка имеет размер  $850 \times 1300$  узлов, размером  $1 \times 1$  м. Шаг интегрирования по времени составил  $1.5 \times 10^{-5}$  с. Наложённые сетки, описывающие поры, имеют различные размеры в диапазоне от  $39 \times 5$  до  $304 \times 5$  узлов, что, в свою очередь, позволяет моделировать полые отверстия в форме эллипса с размерами полуосей от 7.1, 5.0 м до



**Фиг. 9.** Результаты моделирования реалистичной пористой среды, волновая картина в различные моменты времени.

59.1, 36.1 м. Физические параметры среды во всех сетках идентичны и составляют: плотность материала  $2500 \text{ кг/м}^3$ , продольная скорость упругой волны  $3000 \text{ м/с}$ , поперечная скорость  $1500 \text{ м/с}$ . Использовался источник с длиной волны  $300 \text{ м}$ . Волновые картины данного расчета в различные моменты времени представлены на фиг. 9.

Данный эксперимент демонстрирует возможности разработанного алгоритма. Предложенный метод позволяет задавать сложные конфигурации пористых структур в достаточно большом количестве и проводить расчет за разумное время.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается новый подход для моделирования распространения волновых возмущений в пористых средах. Построена модель пористой среды на основе линейно-изотропной теории упругости и явного выделения каждой пористой неоднородности. В качестве механизма выделения пор используется подход, основанный на наложенных сетках. Ранее данный подход уже применялся авторами для выделения топографии поверхности и трещиноватых неоднородностей. Для интегрирования возникающих систем дифференциальных уравнений в частных производных используется сеточно-характеристический метод. Описана методика верификации предлагаемого метода и представлены ее результаты.

В качестве примеров использования разработанного алгоритма приведена серия тестовых расчетов. Один из них – способ, позволяющий производить моделирование пористого слоя с различными параметрами пористости и толщины. Для частного случая такой конфигурации приводится эксперимент по численному исследованию упругих параметров пористого слоя в зависимости от пористости среды. В заключение работы продемонстрирована возможность моделирования реалистичной пористой среды, состоящей из пор различных форм и размеров. В результате можно сделать заключение, что рассмотренный метод наложенных сеток имеет потенциал для изучения свойств пористых сред различного состава и конфигураций.

В качестве дальнейшего развития данного направления стоит отметить перенос алгоритмов на трехмерный случай и распараллеливания в системах с общей и распределенной памятью.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Qi Yingkai, Chen Xuehua, Zhao Qingwei, Luo Xin, Feng Chunqiang.* Seismic wave modeling of fluid-saturated fractured porous rock: Including fluid pressure diffusion effects of discrete distributed large-scale fractures // *EGUsphere*. 2023. № 1. P. 1–26.
2. *Liu Jiong, Wei Xiu Cheng, Ji Yu Xin, Chen Tian Sheng, Liu Chun Yuan, Zhang Chun Tao, Dai Ming Gang.* An analysis of seismic scattering attenuation in a random elastic medium // *Appl. Geophys.* 2011. V. 8. № 12. P. 344–354.
3. *Wei Yijun, Ba Jing, Carcione J.M.* Stress effects on wave velocities of rocks: Contribution of crack closure, squirt flow and acoustoelasticity // *J. Geophys. Res.: Solid Earth*. 2022. V. 127. № 10. P. 2022JB025253.
4. *Gassmann F.* On elasticity of porous media // *Classics of Elastic Wave Theory*. 2007. № 1. P. 389–408.
5. *Berryman J.G.* Origin of gassmann's equations // *Geophysics*. 1999. V. 64. P. 1627–1629.
6. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. ii. higher frequency range // *J. Acoustical Soc. Am.* 1956. V. 28. № 6. P. 179.
7. *Dvorkin J., Nur A.* Dynamic poroelasticity: a unified model with the squirt and the biot mechanisms // *Geophysics*. 1993. V. 58. P. 524–533.
8. *Dvorkin J., Nolen-Hoeksema R., Nur A.* The squirt-flow mechanism: macroscopic description // *Geophysics*. 1994. V. 59. P. 428–438.
9. *Dvorkin J., Mavko G., Nur A.* Squirt flow in fully saturated rocks // *Geophysics*. 1995. V. 60. P. 97–107.
10. *Yang Dinghui, Zhang Zhongjie.* Effects of the biot and the squirt-flow coupling interaction on anisotropic elastic waves // *Chinese Sci. Bull.* 2000. V. 45. P. 2130–2138.
11. *Pride S.R., Berryman J.G., Harris J.M.* Seismic attenuation due to wave-induced flow // *J. Geophys. Res.: Solid Earth*. 2004. № 1. P. 109.
12. *Müller T.M., Toms-Stewart J., Wenzlau F.* Velocity-saturation relation for partially saturated rocks with fractal pore fluid distribution // *Geophys. Res. Lett.* 2008. V. 35. № 5. P. 9306.
13. *Huang Xingguo, Greenhalgh Stewart, Han Li, Liu Xu.* Generalized effective biot theory and seismic wave propagation in anisotropic, poroviscoelastic media // *J. Geophys. Res.: Solid Earth*. 2022. V. 127. № 3. P. 2021JB023590.
14. *Jing B.A., Carcione J.M., Hong Cao, Qi-Zhen Du, Zhen-Yu Yuan, Ming-Hui Lu.* Velocity dispersion and attenuation of p waves in partially-saturated rocks: Wave propagation equations in double-porosity medium // *Chinese J. Geophys.* 2012. V. 55. № 1. P. 219–231.
15. *Amalokwu K., Best A.I., Sothcott J., Chapman M., Minshull T., Li X.Y.* Water saturation effects on elastic wave attenuation in porous rocks with aligned fractures // *Geophys. J. Inter.* 2014. V. 197. № 5. P. 943–947.
16. *Sun Weitao, Ba Jing, Müller T.M., Carcione J.M., Cao Hong.* Comparison of p-wave attenuation models of wave-induced flow // *Geophys. Prospect.* 2015. V. 63. № 3. P. 378–390.
17. *Kachanov M.* Elastic solids with many cracks and related problems // *Adv. Appl. Mech.* 1993. V. 30. P. 259–445.
18. *Gu'eguen Y., Sarout J.* Crack-induced anisotropy in crustal rocks: Predicted dry and fluid-saturated thomsen's parameters // *Physics of the Earth and Planetary Interiors*. 2009. V. 172. P. 116–124.
19. *Gu'eguen Y., Sarout J.* Characteristics of anisotropy and dispersion in cracked medium // *Tectonophysics*. 2011. V. 503. № 4. P. 165–172.
20. *Dorovsky N.V.* Continual theory of filtration // *Sov. Geology and Geophysics*. 1989. P. 34–39.
21. *Blokhin A.M., Dorovskii V.N.* Mathematical modelling in the theory of multivelocity continuum. 1995. P. 183.
22. *Dorovsky V.N., Perepechko Yu.V., Fedorov A.I.* Stoneley waves in the biot–johnson and continuum filtration theories // *Russian Geology and Geophys.* 2012. V. 53. № 5. P. 475–483.
23. *Guo Zhiqi, Qin Xiaoying, Zhang Yiming, Niu Cong, Wang Di, Ling Yun.* Numerical investigation of the effect of heterogeneous pore structures on elastic properties of tight gas sandstones // *Frontiers in Earth Science*. 2021. V. 9. № 4. P. 219.
24. *Li Tianyang, Wang Zizhen, Yu Nian, Wang Ruihe, Wang Yuzhong.* Numerical study of pore structure effects on acoustic logging data in the borehole environment. 2020. V. 28. № 5. <https://doi.org/10.1142/S0218348X20500498>
25. *Ozotta O., Saberi M.R., Kolawole O., Malki M.L., Rasouli V., Pu Hui.* Pore morphology effect on elastic and fluid flow properties in bakken formation using rock physics modeling // *Geomechanics and Geophysics for Geo-Energy and Geo-Resources*. 2022. V. 8. № 12. P. 1–19.
26. *Aney Sh., Rege A.* The effect of pore sizes on the elastic behaviour of open-porous cellular materials // *Math. and Mech. of Solids*. 2022. № 10.
27. *Khokhlov N., Favorskaya A., Stetsyuk V., Mitskovets I.* Grid-characteristic method using Chimera meshes for simulation of elastic waves scattering on geological fractured zones // *J. Comput. Phys.* 2021. V. 446. P. 110637.
28. *Khokhlov N.I., Favorskaya A., Furgailo V.* Grid-characteristic method on overlapping curvilinear meshes for modeling elastic waves scattering on geological fractures // *Minerals*. 2022. V. 12. № 12. P. 1597.

29. *Mitskovets I., Stetsyuk V., Khokhlov N.* Novel approach for modeling curved topography using overset grids and grid-characteristic method // European Association of Geoscientists Engineers 2020. № 12. P. 1–5.
30. *Favorskaya A.V., Zhdanov M.S., Khokhlov N.I., Petrov I.B.* Modelling the wave phenomena in acoustic and elastic media with sharp variations of physical properties using the grid-characteristic method // Geophys. Prospect. 2018. V. 66. № 10. P. 1485–1502.
31. *Magomedov K.M., Kholodov A.S.* The construction of difference schemes for hyperbolic equations based on characteristic relations // USSR Comput. Math. and Math. Phys. 1969. V. 9. № 2. P. 158–176.
32. *Korotin P.N., Petrov I.B., Pirogov V.B., Kholodov A.S.* On a numerical solution of related problems of supersonic flow over deformable shells of finite thickness // USSR Comput. Math. and Math. Phys. 1987. V. 27. № 4. P. 181–188.
33. *Petrov I.E., Kholodov A.S.* Numerical study of some dynamic problems of the mechanics of a deformable rigid body by the mesh-characteristic method // USSR Comput. Math. and Math. Phys. 1984. V. 24. № 3. P. 61–73.
34. *Petrov I.B., Tormasov A.G., Kholodov A.S.* On the use of hybrid grid-characteristic schemes for the numerical solution of three-dimensional problems in the dynamics of a deformable solid // USSR Comput. Math. and Math. Phys. 1990. V. 30. № 4. P. 191–196.
35. *Kvasov I.E., Pankratov S.A., Petrov I.B.* Numerical simulation of seismic responses in multilayer geologic media by the grid-characteristic method // Math. Model. Comput. Simulat. 2011. V. 3. № 2. P. 196–204.
36. *Muratov M.V., Petrov I.B.* Estimation of wave responses from subvertical macrofracture systems using a grid characteristic method // Math. Model. Comput. Simulat. 2013. V. 5. № 5. P. 479–491.
37. *Petrov I.B., Khokhlov N.I.* Modeling 3D seismic problems using high-performance computing systems // Math. Model. Comput. Simulat. 2014. V. 6. № 4. P. 342–350.
38. *Aki Keiiti, Richards P.G.* Quantitative seismology, 2nd ed. // Quse. 2022. V. 68. P. 1546–1546.
39. *LeVeque R.J.* Finite volume methods for hyperbolic problems // Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. 2002. V. 8.
40. *Zhdanov M.S.* Geophysical inverse theory and regularization problems. 2002. P. 609.
41. *Zhdanov M.S.* Inverse theory and applications in geophysics // Inverse Theory and Appl. Geophys. 2015. V. 9. P. 1–704.
42. *Petrov I.B., Favorskaya A.V., Sannikov A.V., Kvasov I.E.* Grid-characteristic method using high-order interpolation on tetrahedral hierarchical meshes with a multiple time step // Math. Model. Comput. Simulat. 2013. V. 5. № 9. P. 409–415.
43. *Golubev V.I., Petrov I.B., Khokhlov N.I.* Numerical simulation of seismic activity by the grid-characteristic method // Comput. Math. and Math. Phys. 2013. V. 53. № 10. P. 1523–1533.
44. *Khokhlov N.I., Golubev V.I.* On the class of compact grid-characteristic schemes // Smart Innovation, Systems and Technolog. 2019. V. 133. P. 64–77.
45. *Komatitsch D., Tromp J.* Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation // Geophys. J. Inter. 1999. V. 139. № 12. P. 806–822.
46. *Khokhlov N.I., Stetsyuk V.O., Mitskovets I.A.* Overset grids approach for topography modeling in elastic-wave modeling using the grid-characteristic method // Компьют. иссле д. и моделирование. 2019. V. 11. P. 1049–1059.
47. *Mavko G., Mukerji T., Dvorkin J.* Effective elastic media: bounds and mixing laws // The Rock Physics Handbook. 2009. № 3. P. 169–228.
48. *Wang Z., Wang R., Li T., Qiu Hao, Wang F.* Pore-scale modeling of pore structure effects on p-wave scattering attenuation in dry rocks // PLoS ONE. 2015. № 5. P. 10.

Посвящается 70-летию Игоря Борисовича Петрова

## ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ БЛИЗОСТИ РЕШЕНИЙ В $L_2$ ДВУХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЗВЕСЕЙ В ПРИБРЕЖНЫХ СИСТЕМАХ<sup>1)</sup>

© 2023 г. В. В. Сидорякина<sup>1,\*</sup>, А. И. Сухинов<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 347936 Таганрог, ул. Инициативная, 48, Таганрогский ин-т им. А.П. Чехова, РГЭУ, Россия

<sup>2</sup> 344000 Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1, ДГТУ, Россия

\*e-mail: cvv9@mail.ru

\*\*e-mail: sukhinov@gmail.com

Поступила в редакцию 16.03.2023 г.  
Переработанный вариант 29.05.2023 г.  
Принята к публикации 26.06.2023 г.

Рассмотрены пространственно-трехмерные модели процессов транспорта взвесей в прибрежных морских системах. Данные процессы имеют ряд характерных особенностей: высокую концентрацию взвесей (например, при осуществлении дампинга грунта на дно), значительное превышение ареала распространения взвесей по отношению к глубине акватории, сложный гранулометрический (многофракционный) состав взвеси, взаимные переходы между отдельными фракциями. Для описания распространения взвесей могут быть использованы начально-краевые задачи диффузии–конвекции–реакции. Предлагается на временной сетке, построенной для исходной непрерывной начально-краевой задачи, выполнить преобразование правых частей с “запаздыванием”, чтобы для функций – концентраций взвесей, входящих в правые части уравнений задачи и не относящихся к той фракции, для которой сформулирована начально-краевая задача для уравнения диффузии–конвекции, значения этих концентраций определялись на предыдущем временном слое. Такой подход позволяет упростить последующую численную реализацию каждого из уравнений диффузии–конвекции. Кроме того, если число фракций три и более, появляется возможность на каждом временном шаге организовать независимое (параллельное) вычисление каждой из концентраций. Ранее были определены достаточные условия существования и единственности решения начально-краевой задачи транспорта взвесей, а также построена и исследована консервативная устойчивая разностная схема, которая численно реализована для модельных и реальных задач. В настоящей работе приведены результаты исследования сходимости решения преобразованной “с запаздыванием” задачи к решению исходной начально-краевой задачи транспорта взвесей. Доказано, что разности решений начально-краевых задач (исходной и преобразованной, с “запаздыванием” в функциях правых частей на временной сетке) стремятся к нулю при стремлении параметра  $\tau$  (шага временной сетки) к нулю со скоростью  $O(\tau)$  в норме гильбертова  $L_2$ . Библ. 24.

**Ключевые слова:** пространственно-трехмерная модель, транспорт многофракционных взвесей, взаимные превращения фракций, процессы диффузии–конвекции–осаждения, оценки решений в  $L_2$ .

**DOI:** 10.31857/S0044466923100149, **EDN:** LIKHHN

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При моделировании прибрежных систем весьма часто возникают задачи конвекции–диффузии–осаждения (переноса) взвесей, которые могут состоять из нескольких фракций. Эти задачи могут быть поставлены в связи с проведением дноуглубительных работ, прогнозированием эрозии берега, образованием наносов, оценкой антропогенных воздействий на прибрежные экоси-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта № 23-21-00509), <https://rscf.ru/project/23-21-00509/>.

стемы (см. [1–4]). Для их решения обычно требуется информация о процессах транспорта взвесей для конкретных участков водных объектов, а также прогностические модели, позволяющие упростить и предсказать результат конкретных ситуаций и действий (см. [5, 6]).

Понимание процессов транспорта взвесей и возможности их моделирования значительно продвинулись за последние десятилетия (см. [7–10]): появились все более точные, миниатюрные и более дешевые приборы для получения и обработки полевых или лабораторных данных; широкое распространение получила интеграция численных моделей; бесплатные или дешевые спутниковые данные становятся все более адаптированными, точными и многочисленными. Значительны достигнутые результаты в области построения математических моделей транспорта взвесей и их теоретического анализа (см. [11–14]).

В настоящей работе авторами представлена пространственно-трехмерная модель транспорта взвесей, учитывающая следующие физические параметры и процессы: скорость движения водной среды, многофракционный состав взвесей, конвекцию, диффузию и осаждение частиц, взаимный переход (преобразование) частиц, имеющих различную гидравлическую крупность и др. В основе математической модели транспорта взвесей лежит система уравнений с частными производными параболического типа с младшими производными и функциями источников, число которых равно количеству фракций взвешенного вещества. Проведение исследований построенной задачи базируется на использовании временной сетки и преобразовании с “запаздыванием” правых частей уравнений, при отнесении функций (определяющих концентрацию взвесей различных фракций, участвующих в формировании правых частей уравнений и не фигурирующих в левых частях уравнений, т.е. в членах, описывающих диффузию–конвекцию–осаждение) к предыдущему временному слою. Ранее были доказаны существование и единственность решения начально-краевой задачи транспорта взвесей (см. [15–17]). Целью настоящей работы является исследование сходимости решения построенной задачи с “запаздыванием”, когда концентрации фракций, не входящие в левую часть уравнений диффузии, вычисляются на правом конце предыдущего шага по времени, к решению исходной начально-краевой задачи транспорта взвесей в норме гильбертова пространства  $L_2$  при стремлении шага временной сетки к нулю.

Предлагаемый подход дает возможность построить параллельный алгоритм решения каждой из отдельных задач диффузии–конвекции в пределах временного шага, с необходимостью обменов сеточной информацией по получению финальных на данном временном слое значений сеточных функций между параллельными вычислительными процессами, что позволяет существенно уменьшить временные затраты на обмены информацией.

## 2. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЗВЕСЕЙ

Будем использовать прямоугольную декартову систему координат  $Oxyz$ .

Процесс транспорта взвесей рассматриваем на примере некоторого водного объема, который вмещает трехмерная область  $G$ . Область  $G$  водоема представляет собой цилиндрическую область, боковая поверхность которой образована движением вертикальной оси вдоль кусочно-гладкой замкнутой линии  $\partial\Sigma_b$ , ограничивающей данную поверхность  $\Sigma_b$ , представляющей собой гладкую поверхность, “крышка” области  $G$  в выбранной системе координат  $\bar{\Sigma}_b = \Sigma_b \cup \partial\Sigma_b$ . Нижнее основание  $\Sigma_f$  – невозмущенная свободная поверхность водоема, точнее та ее часть, которая “вырезается” при движении направляющей (параллельной оси  $Oz$ ) на плоскости  $z = 0$ . Будем обозначать цилиндрическую поверхность, заключенную между  $\Sigma_b$  и  $\Sigma_f$ , как  $\Sigma_l$ . Таким образом, замыкание области  $G$ ,  $\bar{G} = G \cup \Gamma$ , где  $\Gamma = \Sigma_f \cup \Sigma_b \cup \Sigma_l$ .

Пусть в области  $G$  находится взвесь многофракционного состава. Для упрощения выкладок будем рассматривать взвесь, состоящую из трех фракций (постановка задачи для общего случая представлена, например, в [18, 19]). Ограничение, накладываемое на количество фракций, не влияет на общую идею получения представленного в работе результата.

Система уравнений, описывающая концентрацию отдельных фракций взвешенного вещества, будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} + u \frac{\partial c_r}{\partial x} + v \frac{\partial c_r}{\partial y} + (w + w_{gr}) \frac{\partial c_r}{\partial z} = \mu_{hr} \left( \frac{\partial^2 c_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_r}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{vr} \frac{\partial c_r}{\partial z} \right) + F_r, \quad r = 1, 2, 3. \quad (1)$$

В уравнениях (1) используются следующие обозначения:  $c_r = c_r(x, y, z, t)$  – концентрация частиц взвеси  $r$ -го типа в точке  $(x, y, z)$  и в момент времени  $t$ ;  $u, v, w$  – компоненты вектора скорости движения водной среды;  $w_{gr}$  – гидравлическая крупность частиц  $r$ -го типа;  $\mu_{hr}, \mu_{vr}$  – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии частиц  $r$ -го типа соответственно.

Функции правых частей имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= (\alpha_2 c_2 - \beta_1 c_1) + \gamma_1 c_1, \\ F_2 &= (\beta_1 c_1 - \alpha_2 c_2) + (\alpha_3 c_3 - \beta_2 c_2) + \gamma_2 c_2, \\ F_3 &= (\beta_2 c_2 - \alpha_3 c_3) + \gamma_3 c_3, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\alpha_r, \beta_r$  – коэффициенты, определяющие интенсивность превращения частиц  $r$ -го типа в  $(r-1)$ -й и  $(r+1)$ -й тип соответственно,  $\alpha_r \geq 0, \beta_r \geq 0, \gamma_r$  – мощность внешнего источника частиц  $r$ -го типа.

Граничные и начальные условия для уравнений (1) формулируются следующим образом:

– начальные условия при времени  $t = 0$

$$c_r(x, y, z, 0) = c_{r0}(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{G}; \quad (3)$$

– граничные условия, считая, что осаждение частиц взвесей на дно необратимо,

$$c_r = c'_r, \quad c'_r = \text{const}, \quad (x, y, z) \in \Sigma_l, \quad \text{если} \quad u_{\bar{n}} < 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial \bar{n}} = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_l, \quad \text{если} \quad u_{\bar{n}} \geq 0; \quad (5)$$

где  $u_{\bar{n}}$  – проекция вектора скорости на внешнюю нормаль  $\bar{n}$  к границе,  $c'_r$  – известные значения концентрации;

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_f; \quad (6)$$

$$\frac{\partial c_r}{\partial z} = -\frac{w_{gr}}{\mu_{vr}} c_r, \quad (x, y, z) \in \Sigma_b. \quad (7)$$

Решение задачи (1)–(7) отыскивается в некоторой заданной области  $G \times [0 < t \leq T]$  непрерывного изменения аргументов, представляющей собой четырехмерный цилиндр с образующими параллельными оси времени  $Ot$ .

Будем предполагать, что выполняются необходимые по ходу изложения требования к гладкости участвующих в уравнениях (1) функций, которые будут конкретизированы в конце статьи.

Из предположения, что существует классическое решение задачи (1)–(7), в [13, 14] сформулированы достаточные условия его единственности, а также непрерывной зависимости решения от входных данных: от функций начального условия, граничных условий и правой части.

### 3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ С “ЗАПАЗДЫВАНИЕМ” НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЗВЕСЕЙ

Для того чтобы провести преобразование с “запаздыванием” задачи (1)–(7) с учетом начальных и граничных условий, построим на временном отрезке  $0 \leq t \leq T$  равномерную сетку с шагом  $\tau$ :

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 1, \dots, N; N\tau \equiv T\}.$$

Будем использовать следующую договоренность в обозначениях: переменные для рассматриваемых функций концентрации взвесей указываться не будут там, где подразумеваются “непрерывные” переменные  $(x, y, z, t)$ , если же данные функции определяются в фиксированный момент времени или это требует смысл проводимых рассуждений, то они будут указываться непосредственно.

На временной сетке  $\omega_t$  для исходной непрерывной начально-краевой задачи (1)–(7) выполним преобразование с “запаздыванием” так, чтобы функции – концентрации взвесей, входящие в правые части уравнений (1) задачи, определялись на предыдущем временном слое.

На каждом шаге времени номера  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $t_{n-1} < t \leq t_n$  рассматриваются преобразованные уравнения (1), решениями которых являются функции  $\tilde{c}_r^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N + 1$ :

$$\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial t} + u^n \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial y} + (w^n + w_{gr}) \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z} = \mu_{hr} \left( \frac{\partial^2 \tilde{c}_r^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{c}_r^n}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{vr} \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z} \right) + \tilde{F}_r^n, \quad (8)$$

$$\tilde{F}_1^n = \left( \alpha_2 \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) - \beta_1 \tilde{c}_1^n \right) + \gamma_1^n \tilde{c}_1^n,$$

$$\tilde{F}_2^n = \left( \beta_1 \tilde{c}_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) - \alpha_2 \tilde{c}_2^n \right) + \left( \alpha_3 \tilde{c}_3^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) - \beta_2 \tilde{c}_2^n \right) + \gamma_2^n \tilde{c}_2^n,$$

$$\tilde{F}_3^n = \left( \beta_2 \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) - \alpha_3 \tilde{c}_3^n \right) + \gamma_3^n \tilde{c}_3^n,$$

где  $\tilde{c}_r^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})$  – финальное значение концентрации частиц взвесей  $r$ -го типа, рассчитанное на предыдущем временном слое  $t_{n-2} < t \leq t_{n-1}$ ,  $n = 2, \dots, N$ .

Если  $n = 1$ , то в качестве  $\tilde{c}_r^1(x, y, z, t_0)$  достаточно взять функцию начального условия, т.е.  $\tilde{c}_r^1(x, y, z, 0) \equiv c_{r0}(x, y, z)$ . Если же  $n = 2, \dots, N$ , то функции  $\tilde{c}_r^n(x, y, z, t_{n-1}) = \tilde{c}_r^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})$  предполагаются известными, поскольку предполагается решенной задача (1)–(7) для предыдущего временного промежутка  $t_{n-2} < t \leq t_{n-1}$ .

К уравнениям (8) добавим начальные условия вида

$$\begin{aligned} \tilde{c}_r^1(x, y, z, 0) &= c_{r0}, \quad (x, y, z) \in \bar{G}, \\ \tilde{c}_r^n(x, y, z, t_{n-1}) &= \tilde{c}_r^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}), \quad n = 2, \dots, N, \quad (x, y, z) \in G, \end{aligned} \quad (9)$$

а также граничные условия, аналогичные условиям (3)–(7).

Для всех  $t$ ,  $t_{n-1} < t < t_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , имеем

$$\tilde{c}_r^n = c_r', \quad (x, y, z) \in \Sigma_l, \quad \text{если } u_{\bar{n}} < 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial \bar{n}} = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_l, \quad \text{если } u_{\bar{n}} \geq 0; \quad (11)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z} = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_f; \quad (12)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z} = -\frac{w_{gr}}{\mu_{vr}} \tilde{c}_r^n, \quad (x, y, z) \in \Sigma_b. \quad (13)$$

#### 4. ИССЛЕДОВАНИЕ БЛИЗОСТИ РЕШЕНИЙ ПРЕОБРАЗОВАННОЙ И ИСХОДНОЙ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТА МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ВЗВЕСЕЙ

Представим исходную задачу (1)–(7) в виде цепочки связанных начально-краевых задач, построенных на каждом временном слое  $t_{n-1} < t \leq t_n$  номера  $n = 1, 2, \dots, N$  сетки  $\omega_t$ . В этом случае уравнения (1) будут иметь вид

$$\frac{\partial c_r^n}{\partial t} + u^n \frac{\partial c_r^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial c_r^n}{\partial y} + (w^n + w_{gr}) \frac{\partial c_r^n}{\partial z} = \mu_{hr} \left( \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_r^n}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{vr} \frac{\partial c_r^n}{\partial z} \right) + F_r^n. \quad (14)$$

Для краткости не будем приводить определение функций  $F_r^n$  на каждом промежутке времени  $t_{n-1} < t \leq t_n$ , считая, что  $F_r^n \equiv F_r(x, y, z, t)$ ,  $t_{n-1} < t \leq t_n$ . Начальные и граничные условия для уравнений (14) определяются очевидным образом из выражений (3)–(7).

Убедимся в том, что на каждом временном слое  $t_{n-1} < t \leq t_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , решение уравнения (14) соответствующим образом стремится к решению уравнения (8) при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $N\tau = T$  в норме пространства  $L_2(G)$ .

Введем обозначения  $z_r^n(x, y, z, t) = c_r^n(x, y, z, t) - \tilde{c}_r^n(x, y, z, t)$ ,  $t_{n-1} < t \leq t_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Дальнейшие рассуждения будут относиться к отдельным типам фракций. Более детально рассмотрим случай  $r = 1$ .

Пусть  $\gamma_{1\max}^n = \max_{\substack{(x,y,z) \in G \\ t_{n-1} < t \leq t_n}} \{\gamma_1^n(x, y, z, t)\}$ , где  $\gamma_1^n$  – мощность источников частиц первого типа на вре-

менном промежутке  $t_{n-1} < t \leq t_n$  (очевидно, для исходной и преобразованной с “запаздыванием” задач мощность источника частиц одинакова).

Вычтем из первого уравнения (14) для  $c_1^n$  первое уравнение, содержащее  $\tilde{c}_1^n$  из системы (8),  $n = 1, 2, \dots, N$ . Получаем систему вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1^n}{\partial t} + u^n \frac{\partial z_1^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial z_1^n}{\partial y} + (w^n + w_{g1}) \frac{\partial z_1^n}{\partial z} &= \mu_{h1} \left( \frac{\partial^2 z_1^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1^n}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{v1} \frac{\partial z_1^n}{\partial z} \right) + (F_1^n - \tilde{F}_1^n), \\ F_1^n - \tilde{F}_1^n &= \alpha_2 (c_2^{n-1}(x, y, z, t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})) + (-\beta_1 + \gamma_{1\max}^n) z_1^n. \end{aligned} \tag{15}$$

Дополним уравнение (15) начальными условиями

$$\begin{aligned} z_1^1(x, y, z, 0) &= 0, \quad (x, y, z) \in \bar{G}, \\ z_1^n(x, y, z, t_{n-1}) &= z_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (x, y, z) \in G, \end{aligned} \tag{16}$$

и условиями на границе

$$z_1^n = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_l, \quad \text{если } u_{\bar{n}} < 0; \tag{17}$$

$$\frac{\partial z_1^n}{\partial \bar{n}} = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_l, \quad \text{если } u_{\bar{n}} \geq 0; \tag{18}$$

$$\frac{\partial z_1^n}{\partial z} = 0, \quad (x, y, z) \in \Sigma_f; \tag{19}$$

$$\frac{\partial z_1^n}{\partial z} = -\frac{w_{g1}}{\mu_{v1}} z_1^n, \quad (x, y, z) \in \Sigma_b. \tag{20}$$

Введем скалярное произведение функций  $\xi(x, y, z, t)$  и  $\eta(x, y, z, t)$ , таких что для любого  $0 \leq t \leq T$ ,  $(x, y, z) \in G$  существуют и ограничены интегралы  $\iiint_G \xi^2(x, y, z, t) dG$  и  $\iiint_G \eta^2(x, y, z, t) dG$ , каждый из которых есть непрерывно дифференцируемая функция переменной  $t$ .

Под скалярным произведением  $(\xi, \eta)$  понимаем выражение

$$(\xi, \eta) = \iiint_G \xi(x, y, z, t) \eta(x, y, z, t) dG,$$

которое представляет собой функцию, зависящую от переменной  $t$ .

В гильбертовом пространстве  $L_2(G)$  для функций, интегрируемых “с квадратом” на  $G$ , введем норму (см. [20]):

$$\|\xi\|_{L_2(x,y,z)} \equiv (\xi, \xi)^{1/2} \equiv \left( \iiint_G \xi^2(x, y, z, t) dG \right)^{1/2}.$$

Каждая такая норма является неотрицательной функцией переменной  $t$ , которую мы предполагаем непрерывно дифференцируемой по этой переменной, если исходная функция  $\xi$  такова.

Будем предполагать, что каждая из функций  $c_1^n$  и  $\tilde{c}_1^n$  интегрируема “с квадратом” в области  $G$  для всех  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Умножим скалярно обе части уравнения (15) на функцию  $z_1^n$  и проинтегрируем сначала по пространственным переменным, а затем по временной переменной  $t$  от  $t_{n-1}$  до  $t_n$ . После перегруппировки слагаемых получим

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G \frac{\partial z_1^n}{\partial t} z_1^n dG \right) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G \left( u^n \frac{\partial z_1^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial z_1^n}{\partial y} + (w^n + w_{g1}) \frac{\partial z_1^n}{\partial z} \right) z_1^n dG \right) dt - \\ & - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G \left( \mu_{h1} \left( \frac{\partial^2 z_1^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1^n}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{v1} \frac{\partial z_1^n}{\partial z} \right) \right) z_1^n dG \right) - \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (-\beta_1 + \gamma_{1\max}^n) (z_1^n)^2 dG \right) = \quad (21) \\ & = \alpha_2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (c_2^{n-1}(x, y, z, t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})) z_1^n dG \right) dt. \end{aligned}$$

С учетом тождества  $z_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) \equiv z_1^n(x, y, z, t_{n-1})$  преобразуем первое слагаемое из левой части равенства (21):

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G z_1^n \frac{\partial z_1^n}{\partial t} dG \right) dt = \frac{1}{2} \iiint_G \left( \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{\partial (z_1^n)^2}{\partial t} dt \right) dG = \quad (22) \\ & = \frac{1}{2} \iiint_G \left( (z_1^n(x, y, z, t_n))^2 - (z_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}))^2 \right) dG = \frac{1}{2} \left( \|z_1^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)}^2 - \|z_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 \right). \end{aligned}$$

Заметим, что в выражении (22) порядок интегрирования изменен в силу теоремы Фубини (см. [21]).

Используя формулу (теорему) Гаусса, преобразуем второе слагаемое в левой части равенства (21) с учетом граничных условий (17)–(20). Для удобства введем обозначение

$$\Sigma^+ = \begin{cases} (x, y, z) \in \Gamma, & \text{если } u_{\bar{n}}^+ \equiv v_{\bar{n}} \geq 0, \\ \Phi, & \text{если } v_{\bar{n}} < 0, \end{cases}$$

где  $u_{\bar{n}}^+$  – совокупность всех  $u_{\bar{n}}$ , определенных на границе  $\Sigma_l$ , таких что  $u_{\bar{n}} \geq 0$ .

Имеем

$$\begin{aligned} & \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G z_1^n \left( u^n \frac{\partial z_1^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial z_1^n}{\partial y} + (w^n + w_{g1}) \frac{\partial z_1^n}{\partial z} \right) dG \right) dt = \quad (23) \\ & = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G z_1^n \operatorname{div}(\mathbf{U}_1^n z_1^n) dG \right) dt = \frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iint_{\Sigma^+} u_{\bar{n}}^+ (z_1^n)^2 d\Sigma^+ \right) dt, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{U}_1^n = \|u^n, v^n, w^n - w_{g1}\|^T$ .

Преобразуем третье слагаемое, стоящее в левой части равенства (21).

С этой целью используем равенство, которое можно считать первой формулой Грина применительно к нашей задаче:

$$\begin{aligned} & \iiint_G \left[ \mu_{h1} \left( \frac{\partial^2 z_1^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_1^n}{\partial y^2} \right) z_1^n + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{v1} \frac{\partial z_1^n}{\partial z} \right) z_1^n \right] dG = \quad (24) \\ & = - \iint_{\Sigma_b} w_{g1} (z_1^n)^2 d\Sigma_b - \iiint_G \mu_{h1} \left[ \left( \frac{\partial z_1^n}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_1^n}{\partial y} \right)^2 \right] dG - \iiint_G \mu_{v1} \left( \frac{\partial z_1^n}{\partial z} \right)^2 dG. \end{aligned}$$

Пусть  $L_x, L_y, L_z$  есть максимальные размеры области  $G$  по направлениям координатных осей  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно:

$$L_x = \sup_{\substack{A' \in G \\ A'' \in G}} \rho(A', A''), \quad \text{где } A' = (x', y, z) \in G, \quad A'' = (x'', y, z) \in G,$$

$$L_y = \sup_{\substack{B' \in G \\ B'' \in G}} \rho(B', B''), \quad \text{где } B' = (x, y', z) \in G, \quad B'' = (x, y'', z) \in G,$$

$$L_z = \sup_{\substack{C' \in G \\ C'' \in G}} \rho(C', C''), \quad \text{где } C' = (x, y, z') \in G, \quad C'' = (x, y, z'') \in G,$$

где  $\rho(P, Q)$  – евклидова функция расстояния в  $G$ . Тогда имеют место неравенства Пуанкаре

$$\iiint_G \mu_{hl} \left[ \left( \frac{\partial z_1^n}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z_1^n}{\partial y} \right)^2 \right] dG \geq 4\mu_{hl} \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) \iiint_G (z_1^n)^2 dG, \quad (25)$$

$$\iiint_G \mu_{vl} \left( \frac{\partial z_1^n}{\partial z} \right)^2 dG \geq 4\mu_{vl \min} \frac{1}{L_z^2} \iiint_G (z_1^n)^2 dG, \quad (26)$$

где  $\mu_{vl \min} = \min_G \{ \mu_{vl}(x, y, z) \}$ .

С учетом соотношений (22)–(26) от равенства (21) переходим к неравенству вида

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|z_1^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iint_{\Sigma^+} u_n^+(z_1^n)^2 d\Sigma^+ \right) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iint_{\Sigma_b} w_{gl}(z_1^n)^2 d\Sigma_b \right) dt + \\ & + \left[ 4\mu_{hl} \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) + 4\mu_{vl \min} \frac{1}{L_z^2} + \beta_1 - \gamma_{1 \max}^n \right] \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (z_1^n)^2 dG \right) dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|z_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \alpha_2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (c_2^{n-1}(x, y, z, t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})) z_1^n dG \right) dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Далее обратимся к интегралу, стоящему в правой части неравенства (27). В результате его вычисления получаем (см. [22])

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (c_2^{n-1}(x, y, z, t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})) z_1^n dG \right) dt = \\ & = \alpha_2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G \left( c_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) + \frac{\partial c_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}^*)}{\partial t} (t - t_{n-1}) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) \right) z_1^n dG \right) dt. \end{aligned} \quad (28)$$

При записи равенства (28) было использовано разложение по формуле Тейлора

$$c_2^{n-1}(x, y, z, t) = c_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) + \frac{\partial c_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}^*)}{\partial t} (t - t_{n-1}), \quad (29)$$

где  $t_{n-1} \leq t_{n-1}^* \leq t_n, t - t_{n-1} \leq \tau$ .

Частная производная  $\frac{\partial c_2^{n-1}}{\partial t}$  предполагается непрерывной на отрезке  $t_{n-1} \leq t \leq t_n, n = 1, 2, \dots, N$ , определения, поэтому она ограничена:

$$\left| \frac{\partial c_2^{n-1}}{\partial t} \right| \leq M_2^{n-1} \equiv \text{const} > 0. \quad (30)$$

С учетом выражений (29) и (30), а также вводимого обозначения  $z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) = c_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})$ ,  $n = 2, \dots, N + 1$ , для равенства (28) получаем

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (c_2^{n-1}(x, y, z, t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})) z_1^n dG \right) dt \leq \\ & \leq \alpha_2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) z_1^n dG \right) dt + \alpha_2 M_2^{n-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (t - t_{n-1}) z_1^n dG \right) dt. \end{aligned} \tag{31}$$

Привлекая неравенство вида  $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ , в соотношении (31) получим

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) z_1^n dG \right) dt + \alpha_2 M_2^{n-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (t - t_{n-1}) z_1^n dG \right) dt \leq \\ & \leq \frac{\alpha_2}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}))^2 + (z_1^n)^2 dG \right) dt + \frac{\alpha_2}{2} M_2^{n-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \left( \iiint_G (t - t_{n-1})^2 + (z_1^n)^2 \right) dG \right) dt = \\ & = \frac{\alpha_2}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}))^2 dG \right) dt + \frac{\alpha_2}{2} M_2^{n-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \left( \iiint_G (t - t_{n-1})^2 \right) dG \right) dt + \\ & + \frac{\alpha_2}{2} (1 + M_2^{n-1}) \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (z_1^n)^2 dG \right) dt = \frac{\alpha_2}{2} \|z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt + \\ & + \frac{\alpha_2}{2} M_2^{n-1} \text{mes } G \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t - t_{n-1})^2 dt + \frac{\alpha_2}{2} (1 + M_2^{n-1}) \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (z_1^n)^2 dG \right) dt = \\ & = \frac{\alpha_2}{2} \tau \|z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \frac{\alpha_2}{6} \tau^3 M_2^{n-1} \text{mes } G \equiv \iiint_G dG + \frac{\alpha_2}{2} (1 + M_2^{n-1}) \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (z_1^n)^2 dG \right) dt, \end{aligned} \tag{32}$$

где  $\text{mes } G \equiv \iiint_G dG$ . С учетом равенства (32) выражение (31) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (c_2^{n-1}(x, y, z, t) - \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})) z_1^n dG \right) dt \leq \\ & \leq \frac{\alpha_2}{2} \tau \|z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \frac{\alpha_2}{6} \tau^3 M_2^{n-1} \text{mes } G + \frac{\alpha_2}{2} (1 + M_2^{n-1}) \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (z_1^n)^2 dG \right) dt. \end{aligned} \tag{33}$$

Используя неравенство (33), представим соотношение (27) в виде

$$\begin{aligned} & \|z_1^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)}^2 + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iint_{\Sigma^+} u_{\bar{n}}^+(z_1^n)^2 d\Sigma^+ \right) dt + 2 \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iint_{\Sigma_b} w_{g1}(z_1^n)^2 d\Sigma_b \right) dt + \\ & + 2 \left[ 4\mu_{hl} \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) + 4\mu_{v1\min} \frac{1}{L_z^2} - \frac{\alpha_2}{2} (1 + M_2^{n-1}) + \beta_1 - \gamma_{1\max} \right] \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left( \iiint_G (z_1^n)^2 dG \right) dt \leq \\ & \leq \|z_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \alpha_2 \tau \|z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \frac{\alpha_2}{3} \tau^3 M_2^{n-1} \text{mes } G. \end{aligned} \tag{34}$$

Пусть выполняется условие

$$4\mu_{hl} \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) + 4\mu_{v1\min} \frac{1}{L_z^2} - \frac{\alpha_2}{2} (1 + M_2^{n-1}) + \beta_1 - \gamma_{1\max} > 0. \tag{35}$$

В силу выполнения условия (35) можно утверждать, что все слагаемые, содержащие интегралы, стоящие в левой части неравенства (34), будут неотрицательными, а потому в дальнейшем мы можем ими пренебречь (рассматриваемое неравенство при этом только усилится). На основании сказанного, соотношение (34) можно представить в виде

$$\|z_1^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)}^2 \leq \|z_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \alpha_2 \tau \|z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + K_1 \tau^3, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (36)$$

где  $K_1 \equiv \frac{\alpha_2}{3} \left( \max_{2 \leq n \leq N+1} M_2^{n-1} \right) \text{mes } G$ .

Аналогично случаю  $r = 1$  могут быть получены оценки для  $\|z_2^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)}$  и  $\|z_3^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)}$ . А именно,

$$\begin{aligned} \|z_2^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)}^2 &\leq \|z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \beta_1 \tau \|z_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \\ &+ \alpha_3 \tau \|z_3^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \frac{\beta_1}{3} \tau^3 M_1^{n-1} \text{mes } G + \frac{\alpha_3}{3} \tau^3 M_3^{n-1} \text{mes } G, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\|z_3^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)}^2 \leq \|z_3^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \beta_2 \tau \|z_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1})\|_{L_2(G)}^2 + \frac{\beta_2}{3} \tau^3 M_2^{n-1} \text{mes } G \quad (38)$$

при выполнении условий

$$\begin{aligned} 4\mu_{h2} \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) + 4\mu_{v2\min} \frac{1}{L_z^2} + \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_{2\max}^n - \frac{\beta_1}{2} M_1^{n-1} - \frac{\alpha_3}{2} M_3^{n-1} &> 0, \\ 4\mu_{h3} \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) + 4\mu_{v3\min} \frac{1}{L_z^2} + \alpha_3 - \gamma_{3\max}^n - \frac{\beta_2}{2} M_2^{n-1} &> 0, \end{aligned}$$

где

$$K_2 \equiv \left( \frac{\beta_1}{3} \max_{2 \leq n \leq N+1} M_1^{n-1} + \frac{\alpha_3}{3} \max_{2 \leq n \leq N+1} M_3^{n-1} \right) \text{mes } G, \quad K_3 \equiv \frac{\beta_2}{3} \left( \max_{2 \leq n \leq N+1} M_2^{n-1} \right) \text{mes } G,$$

$$\left| \frac{\partial c_1^{n-1}}{\partial t} \right| \leq M_1^{n-1} \equiv \text{const} > 0, \quad \left| \frac{\partial c_3^{n-1}}{\partial t} \right| \leq M_3^{n-1} \equiv \text{const} > 0,$$

$$\gamma_{2\max}^n = \max_{\substack{(x,y,z) \in G \\ t_{n-1} < t \leq t_n}} \{ \gamma_2^n(x, y, z, t) \}, \quad \gamma_{3\max}^n = \max_{\substack{(x,y,z) \in G \\ t_{n-1} < t \leq t_n}} \{ \gamma_3^n(x, y, z, t) \}.$$

Очевидно, что с учетом начального условия (16) для каждого из неравенств (36)–(38) можно получить для различных значений  $n, n = 1, 2, \dots, N$ , неравенства

$$\|z_r^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)}^2 \leq n K_r \tau^3 (1 + O(\tau)) \leq T K_r \tau^2 (1 + O(\tau)), \quad T = N\tau, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

из которых следуют оценки

$$\|z_r^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)} \leq O(\tau), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad r = 1, 2, 3.$$

Представленный результат сформулируем в виде теоремы.

**Теорема.** Пусть дана начально-краевая задача

$$\frac{\partial c_r}{\partial t} + u \frac{\partial c_r}{\partial x} + v \frac{\partial c_r}{\partial y} + (w + w_{gr}) \frac{\partial c_r}{\partial z} = \mu_{hr} \left( \frac{\partial^2 c_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_r}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{vr} \frac{\partial c_r}{\partial z} \right) + F_r, \quad r = 1, 2, 3, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} F_1 &= (\alpha_2 c_2 - \beta_1 c_1) + \gamma_1 c_1, \\ F_2 &= (\beta_1 c_1 - \alpha_2 c_2) + (\alpha_3 c_3 - \beta_2 c_2) + \gamma_2 c_2, \\ F_3 &= (\beta_2 c_2 - \alpha_3 c_3) + \gamma_3 c_3, \end{aligned}$$

в области  $G \times [0 < t \leq T]$  с достаточно гладкой границей  $\Gamma = \Sigma_f \cup \Sigma_b \cup \Sigma_l$  ( $\Sigma_b$  – поверхность, представляющая “крышку” области  $G$ ,  $\Sigma_f$  – невозмущенная свободная поверхность водоема,  $\Sigma_l$  – цилиндрическая поверхность, заключенная между  $\Sigma_b$  и  $\Sigma_f$  с начальными и граничными условиями (3)–(7). В отношении функций, участвующих в уравнениях (39), примем следующие требования гладкости:

$$c_r(x, y, z, t) \in C^2(G) \cap C(\bar{G}), \quad \text{grad } c_r \in C(\bar{G}), \quad \|\mu, v, w + w_{gr}\|^T \in C^1(G) \cap C(\bar{G}),$$

$$c_{r0}(x, y, z, t) \in C(G) \cap C(\bar{G}), \quad F_r(x, y, z, t) \in C(G), \quad \mu_{vr}(x, y, z) \in C^1(G) \cap C(\bar{G}), \quad c'_r \in C(\Sigma_l), \quad (40)$$

$$\left| \frac{\partial c_r}{\partial t} \right| \leq M_r \equiv \text{const} > 0, \quad r = 1, 2, 3,$$

а также выполняются условия согласованности граничных и начальных условий.

Пусть далее на временной сетке  $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 1, \dots, N; N\tau \equiv T\}$  поставлена начально-краевая задача вида

$$\frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial t} + u^n \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial y} + (w^n + w_{gr}) \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z} = \mu_{hr} \left( \frac{\partial^2 \tilde{c}_r^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{c}_r^n}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{vr} \frac{\partial \tilde{c}_r^n}{\partial z} \right) + F_r^n, \quad r = 1, 2, 3, \quad (41)$$

$$\tilde{F}_1^n = (\alpha_2 \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) - \beta_1 \tilde{c}_1^n) + \gamma_1^n \tilde{c}_1^n,$$

$$\tilde{F}_2^n = (\beta_1 \tilde{c}_1^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) - \alpha_2 \tilde{c}_2^n) + (\alpha_3 \tilde{c}_3^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) - \beta_2 \tilde{c}_2^n) + \gamma_2^n \tilde{c}_2^n,$$

$$\tilde{F}_3^n = (\beta_2 \tilde{c}_2^{n-1}(x, y, z, t_{n-1}) - \alpha_3 \tilde{c}_3^n) + \gamma_3^n \tilde{c}_3^n,$$

с начальными и граничными условиями, аналогичными условиям (9)–(13). Для начально-краевой задачи (41) выполняются требования, указанные в соотношениях (40). Тогда при выполнении условий

$$4\mu_{h1} \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) + 4\mu_{v1, \min} \frac{1}{L_z^2} - \frac{\alpha_2}{2} (1 + M_2^{n-1}) + \beta_1 - \gamma_{1, \max}^n > 0,$$

$$4\mu_{h2} \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) + 4\mu_{v2, \min} \frac{1}{L_z^2} + \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_{2, \max}^n - \frac{\beta_1}{2} M_1^{n-1} - \frac{\alpha_3}{2} M_3^{n-1} > 0,$$

$$4\mu_{h3} \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} \right) + 4\mu_{v3, \min} \frac{1}{L_z^2} + \alpha_3 - \gamma_{3, \max}^n - \frac{\beta_2}{2} M_2^{n-1} > 0,$$

$$\gamma_{r, \max}^n = \max_{\substack{(x, y, z) \in G \\ t_{n-1} < t \leq t_n}} \{ \gamma_r^n(x, y, z, t) \}, \quad \left| \frac{\partial c_r^{n-1}}{\partial t} \right| \leq M_r^{n-1} \equiv \text{const} > 0, \quad r = 1, 2, 3,$$

имеют место оценки

$$\|c_r^n(x, y, z, t_n) - \tilde{c}_r^n(x, y, z, t_n)\|_{L_2(G)} \leq O(\tau), \quad r = 1, 2, 3, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассматривается нестационарная пространственно-трехмерная математическая модель транспорта многокомпонентной взвеси, для которой поставлена начально-краевая задача и проведено ее преобразование на временной сетке с шагом  $\tau$  с “запаздыванием”, когда концентрации фракций, присутствующие в правых частях уравнений и не входящие в их левые части уравнений конвекции–диффузии, вычисляются на правом конце предыдущего шага по времени. В результате получена цепочка начально-краевых задач, связанных по начальным–конечным данным на каждом шаге временной сетки. Доказана сходимость решений преобразованной системы к решению исходной задачи в норме гильбертова пространства  $L_2(G)$  со скоростью  $O(\tau)$  при  $\tau \rightarrow 0$ .

На основе данного преобразования исходной системы могут быть построены монотонные разностные схемы модели транспорта многокомпонентной взвеси, для которых будет выпол-

няться сеточный принцип максимума, позволяющий установить устойчивость схемы по начальным данным, по граничным условиям, а также по правой части уравнения. Также данное преобразование дает возможность построить параллельный алгоритм решения каждой из отдельных задач диффузии–конвекции в пределах временного шага с необходимостью обменов сеточной информацией по получению финальных на данном временном слое значений сеточных функций между параллельными вычислительными процессорами, что позволяет существенно уменьшить временные затраты на обмены информацией.

Также заметим, что рассматриваемые в работе вычислительные алгоритмы могут быть использованы и для описания ряда других физических процессов. Одна из потенциальных областей применения связана с процессами, происходящими в прискважинной зоне. При бурении скважины взвесь частиц бурового раствора проникает в пористую геологическую среду. Ввиду осаждения частиц на стенки поровых каналов происходит их сужение, снижается проницаемость среды (см. [23, 24]). Для описания физики задачи может быть использована система диффузии–конвекции–реакции и схемы, предложенные авторами после их обобщения на криволинейные расчетные сетки.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lin B., Falconer R.A.* Numerical modelling of three-dimensional suspended sediment for estuarine and coastal waters // *J. Hydraulic Res.* 1996. V. 34. № 4. P. 435–456.  
<https://doi.org/10.1080/00221689609498470>
2. *Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б.* Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеоздат, 1987. 296 с.
3. *Петров И.Б.* Проблемы моделирования природных и антропогенных процессов в Арктической зоне Российской Федерации // *Матем. моделирование.* 2018. Т. 30. № 7. С. 103–136; *Math. Models Comput. Simul.* 2019. V. 11. №. 2. P. 226–246.  
<https://doi.org/10.1134/S2070048219020145>
4. *Дымников В.П., Залесный В.Б.* Основы вычислительной геофизической гидродинамики. М.: Геос, 2019, 448 с.
5. *Murillo J., Burguete J., Brufau P. García-Navarro P.* Coupling between shallow water and solute flow equations: analysis and management of source terms in 2D // *Inter. J. Numer. Meth. Fluid.* 2005. V. 49. № 3. P. 267–299.  
<https://doi.org/10.1002/flid.992>
6. *Ballent A., Pando S., Purser A., Juliano M.F., Thomsen L.* Modelled transport of benthic marine microplastic pollution in the Nazaré Canyon // *Biogeo-science.* 2013. V. 10. № 12. P. 7957–7970.  
<https://doi.org/10.5194/bg-10-7957-2013>
7. *Cao L., Liu S., Wang S., Cheng Q., Fryar A.E., Zhang Z., Yue F., Peng T.* Factors controlling discharge-suspended sediment hysteresis in karst basins, southwest China // *Implications for sediment management. J. Hydrol.* 2021. V. 594. P. 125792.  
<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2020.125792>
8. *Haddadchi A., Hicks M.* Interpreting event-based suspended sediment concentration and flow hysteresis patterns // *J. Soils Sed.* 2021. V. 21. № 1. P. 592–612.  
<https://doi.org/10.1007/s11368-020-02777-y>
9. *Jirka G.H.* Large scale flow structures and mixing processes in shallow flows // *J. Hydr. Res.* 2001. V. 39. № 6. P. 567–573.  
<https://doi.org/10.1080/00221686.2001.9628285>
10. *Афанасьев А.П., Качанов И.В., Шаталов И.М.* Методики определения расстояний осаждения взвешенных частиц при дноуглубительных работах на судоходных реках // *Вестник Гос. ун-та морск. и речн. флота им. адмирала С.О. Макарова.* 2020. Т. 12. № 2. С. 310–322.  
<https://doi.org/10.21821/2309-5180-2020-12-2-310-322>
11. *Belyaev K., Chetverushkin B., Kuleshov A., Smirnov I.* Correction of the model dynamics for the Northern seas using observational altimetry data // *J. Phys.: Conf. Ser., IOP Publ.* 2021. V. 2131. P. 022113.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/2131/2/022113>
12. *Зиновьев Е.А., Китаев А.Б.* О воздействии взвешенных частиц на гидрофауну // *Изв. Самарского научн. центра РАН.* 2015. Т. 17. № 5. С. 283–288.
13. *Yan H., Vosswinkel N., Ebbert S., Kouyi G.L., Mohn R., Uhl M., Bertrand-Krajewski J.-L.* Numerical investigation of particles' transport, deposition and resuspension under unsteady conditions in constructed stormwater ponds // *Environ Sci Eur.* 2020. V. 32 № 76.  
<https://doi.org/10.1186/s12302-020-00349-y>
14. *Сидорякина В.В., Сухинов А.И.* Исследование корректности и численная реализация линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2017. Т. 57. № 6. С. 985–1002;

- Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. № 6. P. 978–994.  
<https://doi.org/10.7868/S0044466917060138>
15. *Murphy J.C.* Changing Suspended Sediment in United States Rivers and Streams: Linking Sediment Trends to Changes in Land Use/Cover, Hydrology and Climate // *Hydrol. Earth Syst. Sci.* 2020. V. 24. P. 991–1010.  
<https://doi.org/10.5194/hess-24-991-2020>
  16. *Sukhinov A., Sidoryakina V.* Two-Dimensional-One-Dimensional Alternating Direction Schemes for Coastal Systems Convection-Diffusion Problems // *Mathematics.* 2021. V. 9. P. 3267.  
<https://doi.org/10.3390/math9243267>
  17. *Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Сидорякина В.В., Проценко С.В., Атаян А.М.* Локально-двумерные схемы расщепления для параллельного решения трехмерной задачи транспорта взвешенного вещества // *Матем. физ. и компьют. моделирование.* 2021. Т. 24. № 2. С. 38–53.  
<https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2021.2.4>
  18. *Сухинов А.И., Сидорякина В.В.* Построение и исследование корректности математической модели транспорта и осаждения взвесей с учетом изменения рельефа дна // *Вестник Донского гос. технич. ун-та.* 2018. Т. 18. № 4. С. 350–361.  
<https://doi.org/10.23947/1992-5980-2018-18-4-350-361>
  19. *Sukhinov A.I., Sukhinov A.A., Sidoryakina V.V.* Uniqueness of solving the problem of transport and sedimentation of multicomponent suspensions in coastal systems structures // *J. Phys.: Conf. Ser., IOP Publ.* 2020. V. 1479. № 1. P. 012081.  
<https://doi.org/10.1088/1742-6596/1479/1/012081>
  20. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
  21. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. Учебник. 4-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1981. 512 с.
  22. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
  23. *Golubev V.I.* Pore space colmatation during the bimodal suspension flow through the porous medium // *Computational Mathematics and Information Technologies.* 2019. V. 2. № 2. P. 67–75.  
<https://doi.org/10.23947/2587-8999-2019-2-2-67-75>
  24. *Голубев В.И., Михайлов Д.Н.* Моделирование динамики фильтрации двухчастичной суспензии через пористую среду // *Труды МФТИ. Труды Московского физико-технического института (национального исследовательского университета).* 2011. Т. 3. № 2. С. 143–147.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭПИДЕМИЙ: НЕЙРОСЕТЬ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ И SIR-МОДЕЛИ<sup>1)</sup>

© 2023 г. О. И. Криворотко<sup>1,\*</sup>, Н. Ю. Зятков<sup>1</sup>, С. И. Кабанихин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4,  
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия

\*e-mail: o.i.krivorotko@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 22.05.2023 г.  
Переработанный вариант 22.05.2023 г.  
Принята к публикации 26.06.2023 г.

Ранее был предложен метод построения начального приближения для решения обратной задачи акустики градиентным методом на основе сверточной нейронной сети, обученной предсказывать распределение скоростей в среде по волновому отклику (И.Б. Петров, А.С. Станкевич, А.В. Васюков, Докл. РАН, 2023). Показано, что нейронная сеть, обученная на откликах от простых слоистых структур, может быть успешно использована при решении обратной задачи для существенно более сложной модели. В настоящей статье мы изложим алгоритмы обработки данных об эпидемиях и пример применения нейронных сетей для моделирования распространения COVID-19 в Новосибирской области, основанный только на данных. Построена нейросеть NN-COVID-19, которая использует данные об эпидемии. Показано, что нейронная сеть на порядок лучше, чем SEIR-HCD, предсказывает распространение COVID-19 на 5 дней. При появлении нового штамма (Омикрон) после переобучения нейросеть способна предсказать распространение эпидемии более точно. Отметим, что нейросеть использует не только эпидемиологические данные, но и социальные (праздники, введение и соблюдение ограничительных мер и т.п.). Предложенный подход позволяет уточнять математические модели. Сравнение кривых, построенных по SEIR-HCD модели и нейронной сетью, показывает, что графики решения прямой задачи практически совпадают с графиками, построенными нейросетью. Это позволяет уточнить коэффициенты дифференциальной модели. Библ. 19. Фиг. 12. Табл. 2.

**Ключевые слова:** эпидемиология, временные ряды, машинное обучение, глубокое обучение, обработка данных, рекуррентные нейронные сети, полносвязные нейронные сети, COVID-19, прогнозирование.

DOI: 10.31857/S0044466923100095, EDN: MCDEIS

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Нейросети Data driven обучаются на основе большого количества данных и могут использоваться для решения обратных задач, а также для построения математических моделей. Для этого сначала собирают достаточно представительный набор данных о процессе, который затем обрабатывается и приводится к единому формату для обучения нейросети. В процессе обучения нейросеть настраивает веса и параметры, с целью минимизировать ошибку предсказания. После обучения нейросети ее качество проверяется на валидационных и тестовых данных. Подобный подход использовался для построения ежемесячных прогнозов вероятности наступления рецессии в США в течение следующих 6, 12 и 24 мес. в зависимости от текущих макроэкономических и финансовых факторов (см. [1]).

<sup>1)</sup>Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Минобрнауки РФ № 075-15-2022-281.

Нейросети Data driven могут помочь получить уравнение, которое описывает данный процесс, а также уточнить существующие модели и уравнения (SEIR-HCD). Это можно сделать с помощью методов глубокого обучения, таких как автоэнкодеры (см. [2]) или генеративно-состязательные сети (см. [3]), которые могут выявлять скрытые закономерности в данных и создавать математические модели на основе этих закономерностей. Наряду с Data driven следует упомянуть и Physics Informed нейросети, при конструировании и обучении которых используют и учитывают физические законы, ограничения и связи между различными параметрами. В настоящей работе предпринята попытка комбинирования этих подходов.

Отметим работы, в которых анализируются и сравниваются Data driven и Physics Informed подходы к обучению нейросетей. В [4] обсуждаются преимущества и недостатки обоих подходов и предлагается новый подход, который комбинирует физические законы и данные для более точного предсказания.

В [5] сравниваются Data driven и Physics Informed подходы на примере реальных промышленных задач и дается вывод, что комбинация обоих подходов может дать наилучший результат.

В [6] сравниваются различные алгоритмы машинного обучения для предсказания содержания органического углерода в почве и дается вывод, что комбинация Physics Informed и Data driven подходов может дать наилучший результат.

В [7] представляется метод Sparse Identification of Nonlinear Dynamical Systems (SINDy), который использует Data driven подход для идентификации уравнений, описывающих динамику системы. В статье “Data-Driven Discovery of Partial Differential Equations” также представляется метод Data driven подхода для идентификации уравнений, описывающих динамику системы, включая уравнения в частных производных. Такие методы могут быть полезны для решения обратных задач и получения уравнений из экспериментальных данных.

Подробный обзор математических моделей описания распространения эпидемий приведен в [8]. В [9] предложен метод построения начального приближения для решения обратной задачи акустики на основе сверточной нейронной сети, обученной предсказывать распределение скоростей в среде по волновому отклику. Показано, что нейронная сеть, обученная на откликах от простых слоистых структур, может быть успешно использована при решении обратной задачи для существенно более сложной модели.

В [10] предложен подход глубокого обучения для прогнозирования количества зараженных и умерших от COVID-19 за период 1–4 нед. в нескольких районах США. Рекуррентная нейронная сеть с так называемой долгой краткосрочной памятью (LSTM) обучается на нескольких выборках временных рядов одновременно. Результаты показали, что добавление индекса активности населения в качестве переменной и использование нескольких выборок для обучения сети повышают эффективность прогнозирования. Результаты прогноза имеют точность и пространственные закономерности, аналогичные стандартной ансамблевой модели, используемой в качестве эталона.

В [11] проведено прогнозирование вспышки и анализ распространения пандемии COVID-19 с использованием нейронной сети. Архитектура нейронной сети была разработана для прогнозирования последствий вспышки пандемии в Катаре, Испании и Италии. Официальные статистические данные, собранные в этих странах до 6 июля 2021 г., были использованы для подтверждения и тестирования модели прогнозирования. Чувствительность модели была проанализирована с использованием среднеквадратичной ошибки (RMSE). Моделирование COVID-19 показало эффективность мер, принятых правительствами и медицинскими организациями для смягчения последствий пандемии.

В [12] проведено исследование заболеваемости COVID-19 в Приморском крае в 2020–2022 гг., в которой показано, что способ моделирования ранговых распределений с учетом периодичности процесса заболеваемости находится в рамках общего тренда исследований развития пандемического процесса.

В настоящей статье излагаются алгоритмы обработки эпидемиологических данных и применения нейросетей на примере распространения COVID-19 в Новосибирской области. В работе построена нейросеть NN-COVID-19, которая использует эпидемиологические и социологические (праздники, введение и соблюдение ограничительных мер) данные об эпидемии. Показано, что нейронная сеть на порядок лучше описывает ожидаемое количество выявленных заболевших и подключенных к ИВЛ на ближайшие 5 дней, чем модель SEIR-HCD (см. [13, 14]). При появлении нового штамма (Омикрон) требуется переобучение, после которого нейросеть (на примере штамма Кентавра) демонстрирует приемлемые прогнозы.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 изложены алгоритмы получения и обработки исходных данных. В разд. 3 описан алгоритм построения и обучения нейронной сети. В разд. 4 приведены результаты численных расчетов и выводы.

## 2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И ИХ ОБРАБОТКА

### 2.1. Источники получения исходных данных и их описание

Большая часть данных по Новосибирской области была получена из открытых источников путем автоматизированного сбора и структурирования (парсинг) с сайтов:

1) сайт РБК с ежедневными новостными сводками об эпидемиологической ситуации COVID-19 в Новосибирской области (количество протестированных, зараженных, выздоровевших, умерших, госпитализированных и т.д.): <https://nsk.rbc.ru/nsk/story/5e30678d9a7947df0c919a7a>,

2) сайт компании Инвитро с данными о проценте населения с количеством поздних антител IgG к вирусу SARS-Cov-2: [https://www.invitro.ru/1/invitro\\_monitor/](https://www.invitro.ru/1/invitro_monitor/),

3) сайт компании Яндекс с данными об индексе самоизоляции в Новосибирске: <https://yandex.ru/company/researches/2020/podomam>,

4) данные о количестве захоронений умерших от COVID-19 в Новосибирске (предоставлены директором Центра по взаимодействию с органами власти и промышленными партнерами Новосибирского государственного университета, к.ф.-м.н. А.Н. Люлько).

Собранные исходные данные опубликованы на сайте <https://covid19-modeling.ru/data>.

На фиг. 1 показаны некоторые необработанные исходные данные для Новосибирской области, которые использовались для последующего преобразования и применения к ним методов машинного обучения.

### 2.2. Обработка исходных данных

Первичная обработка данных, представленных в виде временных рядов:

- 1) заполнение недостающих значений в данных с помощью линейной интерполяции,
- 2) замена экстремальных значений интерполированием (устранение выбросов в данных),
- 3) сглаживание данных (экспоненциальная скользящая средняя) — более зашумленные данные (4) и (6) были сглажены 14-дневной экспоненциальной скользящей средней; менее зашумленные данные (3) и (7) сглажены 7-дневной экспоненциальной скользящей средней.

Результат обработки показан на фиг. 2.

## 3. СТРУКТУРА МОДЕЛИ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Важнейшим условием эффективной работы NN-COVID-19 является устранение несбалансированности данных (большие всплески в отдельных интервалах) на основе логарифмирования (см. [15]).

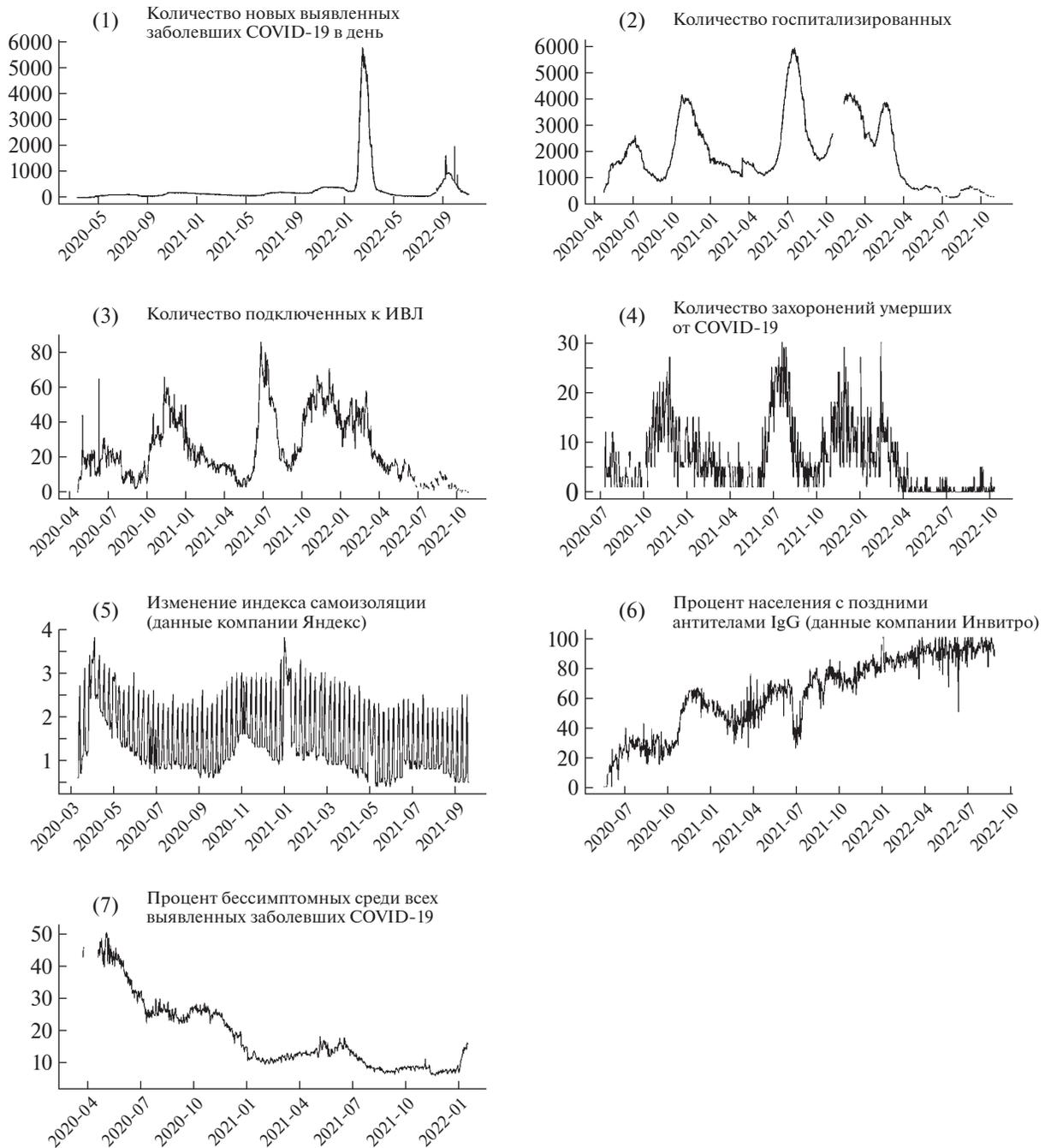
### 3.1. Обучающие признаки для машинного обучения

Каждая вспышка новой волны коронавируса характеризуется изменением эпидемиологических и социально-экономических параметров. Для учета появления новых штаммов (Дельта, Омикрон, Кентавр), порождающих резкое повышение количества заболевших, использовалось логарифмическое преобразование данных (1)–(4).

Для обучения нейронной сети были сгенерированы дополнительные данные: логарифмические приращения за 3, 7 и 14 дней данных (1)–(4). На фиг. 3 показаны полученные временные ряды (признаки) для новых выявленных, критических и захороненных в результате COVID-19 в Новосибирской области.

Дополнительно использовались следующие обучающие признаки для обучения:

- Праздничные и выходные дни. Бинарный временной ряд, заполненный значениями 0 или 1 : 1 — праздничный или выходной, 0 — остальные дни.
- Сезонность: 7 бинарных временных рядов. Первый ряд понедельник: 1, если текущий день понедельник, 0 — в остальных случаях. Аналогично для остальных 6 дней недели.



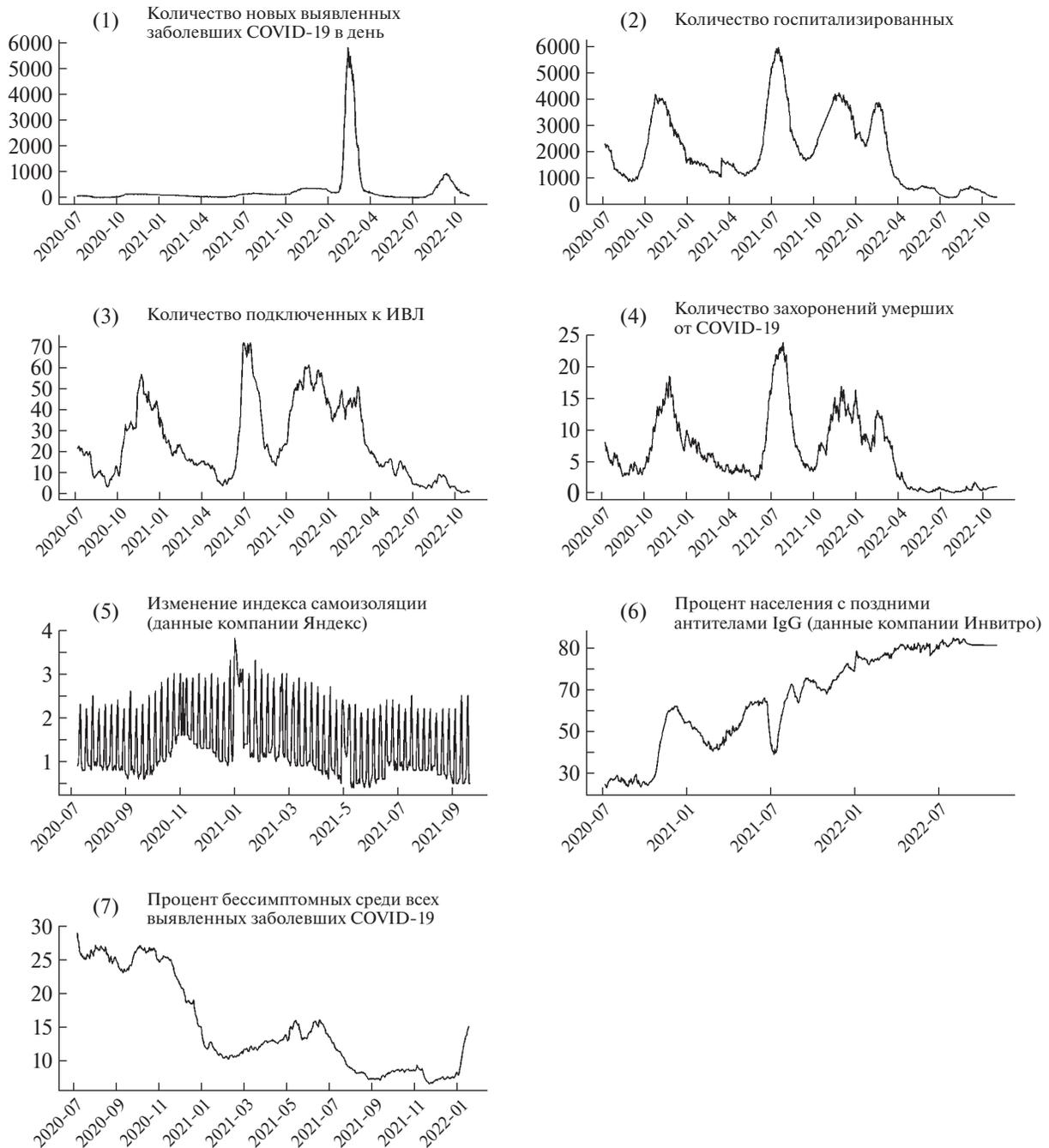
Фиг. 1. Исходные необработанные данные заболеваемости COVID-19 в Новосибирской области.

• Ограничительные меры в регионе: 2 бинарных временных ряда. Для первого ряда 1 – введены ограничения в текущий день, 0 – остальные дни. Для второго ряда 1 – отмена некоторых ограничений, 0 – остальные дни.

В табл. 1 указаны даты введения основных ограничений и их отмены с 2020 по 2022 г.

### 3.2. Целевые функции построения прогноза распространения эпидемии

Для обучения нейронной сети выбраны две целевые функции: (1) – количество новых выявленных заболевших COVID-19, (3) – подключенных к аппаратам ИВЛ в текущий день, графики которых представлены на фиг. 2. Обозначим их в виде вектор-функции  $\mathbf{f}(t) = \{\mathbf{f}_1(t), \mathbf{f}_2(t)\}$ . Выбор

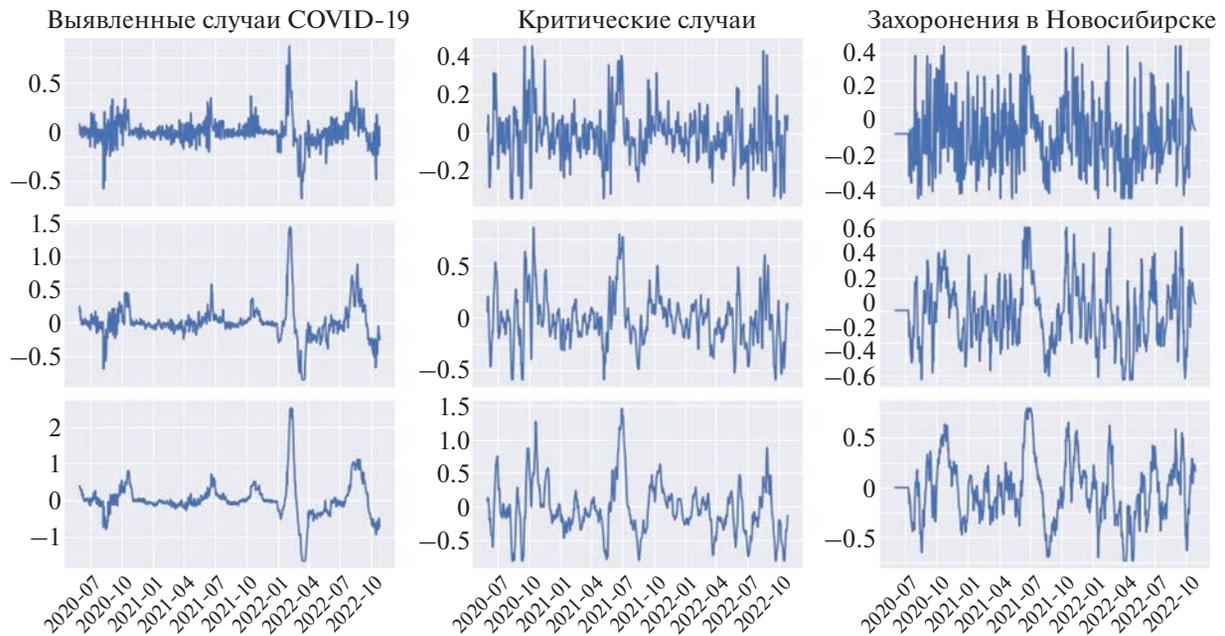


Фиг. 2. Обработанные данные распространения COVID-19 в Новосибирской области.

данных показателей интересен для оптимизации введенных ограничительных мер и уменьшения нагрузки на систему здравоохранения региона.

Для устранения асимметричности в распределении целевых данных  $f(t + 1), \dots, f(t + 5)$  (прогноз по количеству новых заболевших COVID-19 в следующие 5 дней, прогноз по количеству человек, подключенных к аппарату ИВЛ в следующие 5 дней) используется следующее преобразование:

$$\begin{aligned}
 F(t + 1) &= \ln(f(t + 1) + 1) - \ln(\text{SMA}(f(t), 7) + 1), \\
 &\dots \\
 F(t + 5) &= \ln(f(t + 5) + 1) - \ln(\text{SMA}(f(t), 7) + 1).
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

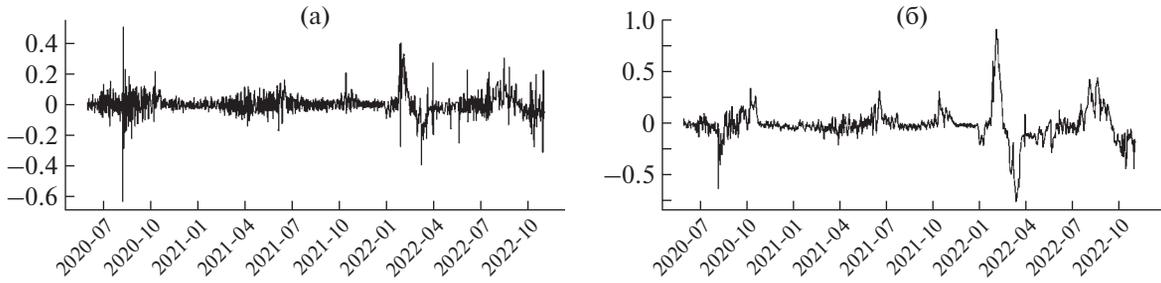


**Фиг. 3.** Сгенерированные дополнительные данные: дневные приращения для новых выявленных, критических и захороненных в Новосибирской области за 3 (первая строка), 7 (вторая строка) и 14 (третья строка) дней.

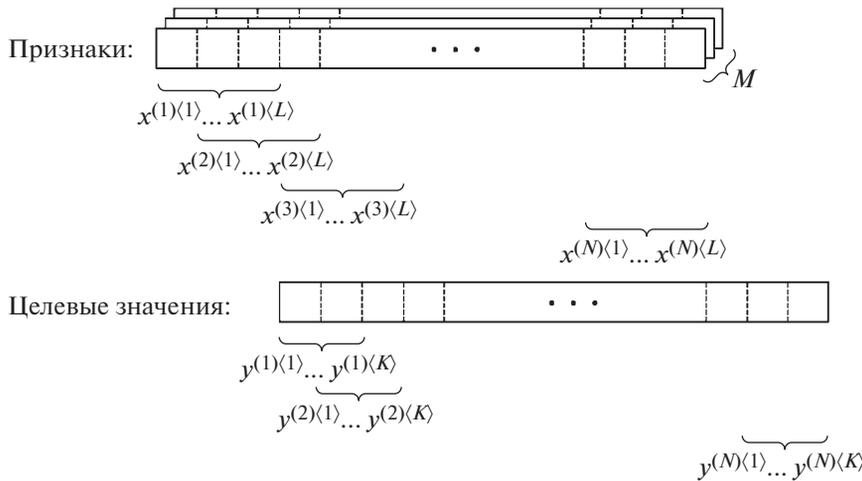
Здесь  $SMA(\mathbf{f}(t), 7) = \sum_{j=1}^7 f(t-j)/7$  – 7-дневная простая скользящая средняя от целевых данных  $\mathbf{f}(t)$ , применяемая с целью уменьшения зашумленности в данных. Для сравнения на фиг. 4а показано логарифмическое преобразование  $\ln(\mathbf{f}(t+1) + 1) - \ln(\mathbf{f}(t) + 1)$  без использования скользящей средней. На фиг. 4б показано логарифмическое преобразование  $\ln(\mathbf{f}(t+1) + 1) - \ln(SMA(\mathbf{f}(t), 7) + 1)$  с использованием простой скользящей средней.

**Таблица 1.** Список ограничений и послаблений с 2020 по 2022 г., а также даты их введения

Дата	Карантинные меры
18 марта 2020	Университеты начали удаленные занятия. Каникулы в школах с 18.03 по 01.04
28 марта 2020	Приостановлены все массовые, развлекательные, общественные мероприятия
31 марта 2020	Усилены меры против коронавируса (социальная дистанция, самоизоляция)
27 апреля 2020	Указ губернатора об обязательном ношении масок в магазинах
12 мая 2020	Возобновление работы продовольственных рынков во всех населенных пунктах кроме областного центра. Разрешено заниматься спортом на улице, соблюдая социальную дистанцию. Разрешены прогулки без посещения общественных мест, детских площадок группам не более двух человек или семьям, живущим вместе
8 июня 2020	Возобновление работы некоторых непродовольственных магазинов
6 июля 2020	Открытие летних веранд в кафе и ресторанах
15 июля 2020	Открытие торговых центров
10 августа 2020	Открытие бассейнов и ресторанов
1 сентября 2020	Начало учебного года (школы, университеты)
23 октября 2020	Начало школьных каникул и возобновление удаленного режима в учебных заведениях
31.12.2020–10.01.2021	Новогодние праздники
01–10.05.2021	Майские праздники



**Фиг. 4.** Логарифмическое преобразование  $\ln(\mathbf{f}(t + 1) + 1) - \ln(\mathbf{f}(t) + 1)$  для новых выявленных заболевших COVID-19 без использования скользящей средней (а) и с использованием простой скользящей средней (б).



**Фиг. 5.** Схема построения набора данных и обучающих меток для обучения нейронной сети.

Ввиду монотонности используемых функций для преобразования временных рядов в (1) возможно восстановление 5-дневных прогнозов  $\mathbf{f}(t + 1), \dots, \mathbf{f}(t + 5)$  по интересующим эпидемиологическим характеристикам с помощью преобразований

$$\mathbf{f}(t + 1) = \exp[\mathbf{F}(t + 1) + \ln(\text{SMA}(\mathbf{f}(t), 7) + 1)] - 1,$$

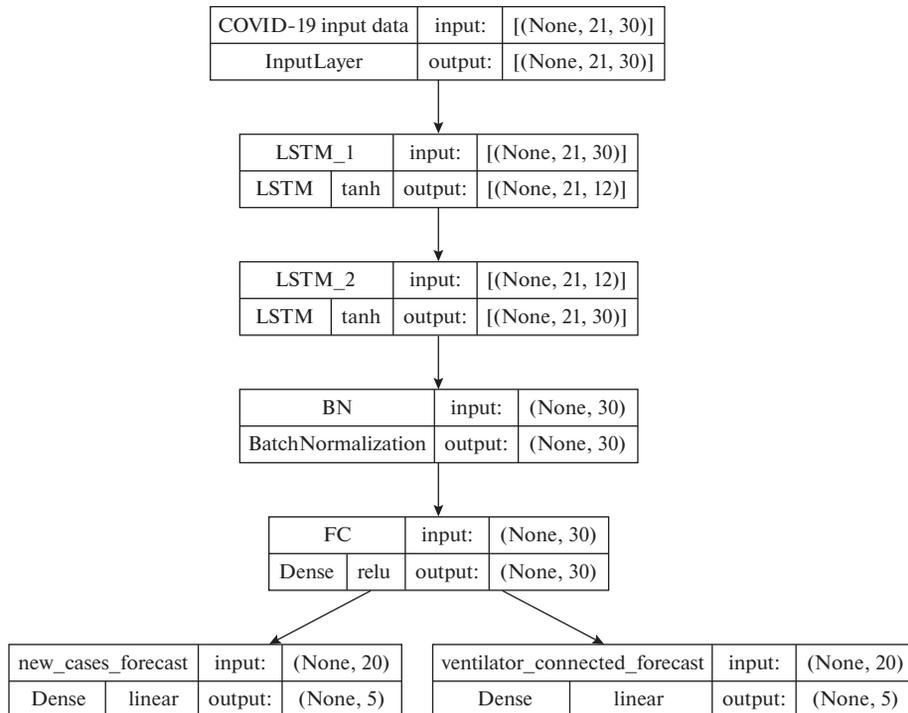
$$\dots$$

$$\mathbf{f}(t + 5) = \exp[\mathbf{F}(t + 5) + \ln(\text{SMA}(\mathbf{f}(t), 7) + 1)] - 1.$$

### 3.3. Архитектура нейронной сети

Для обучения нейронной сети формируется  $N$  наборов данных в виде набора  $M$  временных рядов (количество признаков) размерности  $L$  каждый, как показано на фиг. 5. Параметр  $L$  является гиперпараметром и определяет ширину временного окна, которое рассматривается для формирования прогноза. Используя образец данных размерности  $L \times M$ , формируется прогноз размерности  $K$ . В качестве меток для обучения используются следующие  $K$  значений целевого временного ряда, следующие за образцом данных размерности  $L$ .

На фиг. 6 приведена архитектура нейронной сети, состоящая из рекуррентных и полносвязных слоев. Рекуррентные слои нейронной сети в дополнение к анализу пространства признаков способны анализировать пространство времени в данных. Входной слой сети адаптирован для получения на вход  $M = 23$  временных рядов с шириной временного окна  $L = 14$  дней. Далее данные входного слоя трансформируются через два рекуррентных слоя LSTM (Long short-term memory – долгая краткосрочная память) (см. [16]) с использованием dropout-регуляризации



Фиг. 6. Архитектура нейронной сети.

(см. [17]). Над выходными данными второго LSTM слоя проводится пакетная нормализация (см. [18]). Далее полученные преобразованные данные трансформируются с использованием полносвязанного слоя с 20 нейронами и применением функции активации ReLU (см. [19]). Нейронная сеть имеет два выхода. Первый и второй выходы адаптированы для формирования прогнозов по количеству новых заболевших COVID-19 и количеству больных, подключенных к аппаратам ИВЛ на 5 дней вперед. Преобразование данных в выходные для каждого прогноза осуществляется с помощью полносвязанного слоя.

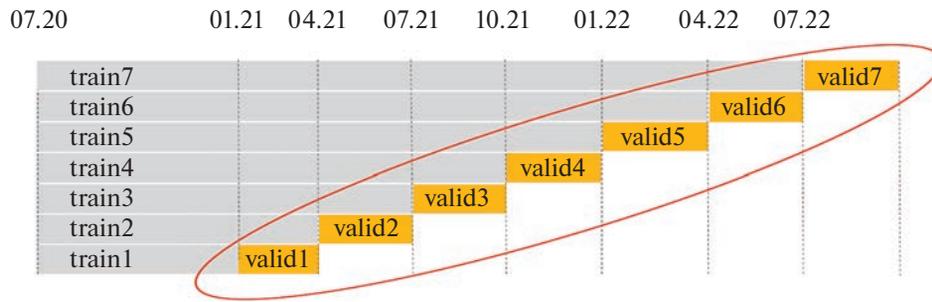
Используемые в численных экспериментах гиперпараметры модели нейронной сети приведены в табл. 2.

### 3.4. Кросс-валидация

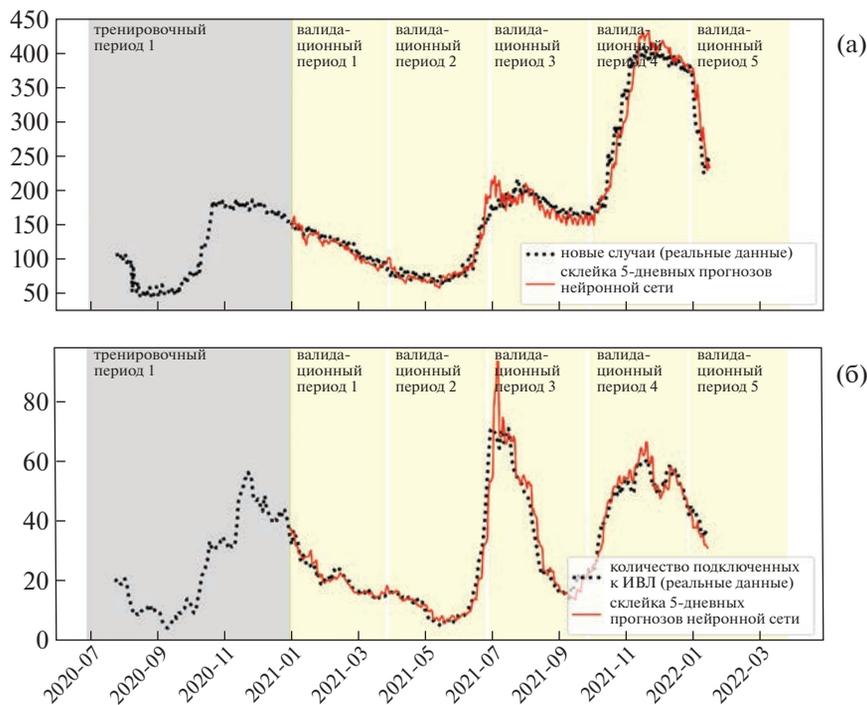
Нейронная сеть обучалась на данных с 2020-07-01 по 2021-01-01 и далее каждые три месяца обучалась снова с учетом дополнительных накопившихся за эти три месяца данных. Валидация модели осуществлялась в течение следующих трех месяцев после обучения. На фиг. 7 показана схема кросс-валидации модели, где серыми блоками обозначены периоды обучения модели, а желтыми обозначены периоды истинных значений (1) и (3), которые не участвовали в обучении

Таблица 2. Гиперпараметры модели нейронной сети

Параметр	Значение
Количество дней прогноза	$K = 5$ дней
Временное окно (количество используемых дней для получения прогноза)	$L = 14$ дней
Число обучающих признаков	$M = 23$
Коэффициент спуска в градиентном методе	0.001
Размер батча (обучающих примеров, которые передаются модели одновременно для обработки во время одной итерации обучения)	20
Количество эпох (итераций работы градиентного метода для одного набора данных)	100



Фиг. 7. Схема кросс-валидации модели нейронной сети.



Фиг. 8. Сравнение новых заболевших COVID-19 (а) и подключенных к ИВЛ в Новосибирской области (б) (черные точки) с результатами моделирования с помощью нейронной сети (красная линия).

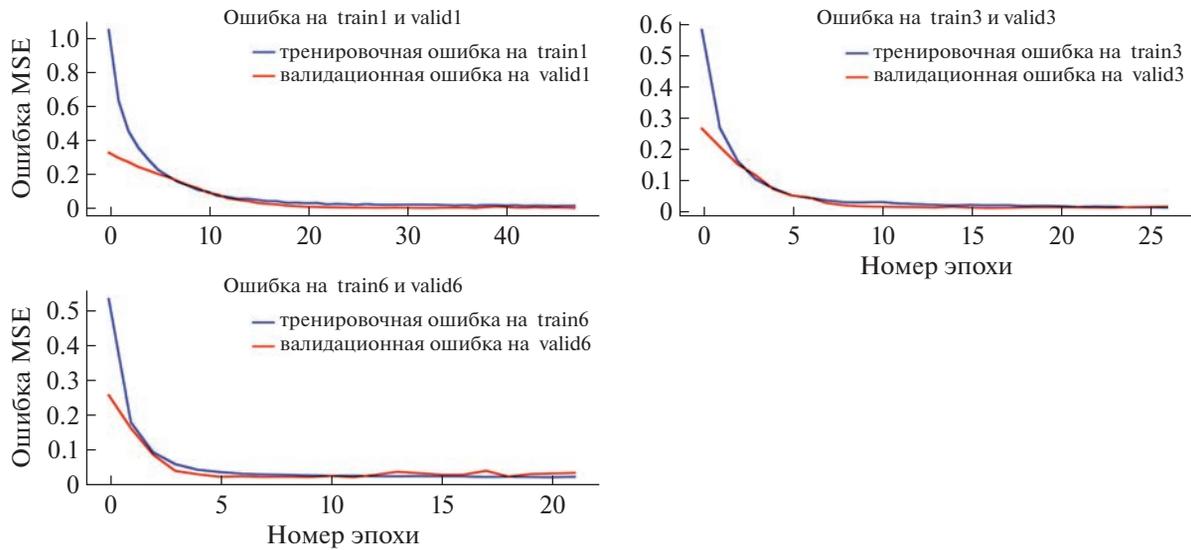
нейронной сети. Валидация обученной модели заключалась в сравнении реальных данных и предсказаний NN-COVID-19. После проведения семи итераций обучения-валидации данные, полученные на валидационных периодах valid1-valid7 (отмечены желтым цветом на фиг. 7), объединяются и сравниваются с истинными значениями.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

##### 4.1. Моделирование на валидационных периодах

Нейронная сеть была обучена для построения краткосрочных 5-дневных прогнозов количества новых заболевших COVID-19 и подключенных к аппарату ИВЛ. Для обучения сети делать более долгосрочные прогнозы необходим приемлемый набор обучающих примеров по вспышкам COVID-19, что в рамках одного региона недостижимо.

На фиг. 8 показаны результаты кросс-валидации модели (см. п. 3.4) на периоде с 2021-01-01 по 2022-01-15 (желтые области на графиках). На фиг. 8а представлена склейка 5-дневных про-



**Фиг. 9.** Среднеквадратичная ошибка на тренировочных train1, train3 и train6 (синяя кривая) и соответствующих валидационных данных valid1, valid3 и valid6 (красная кривая) по мере обучения нейронной сети.

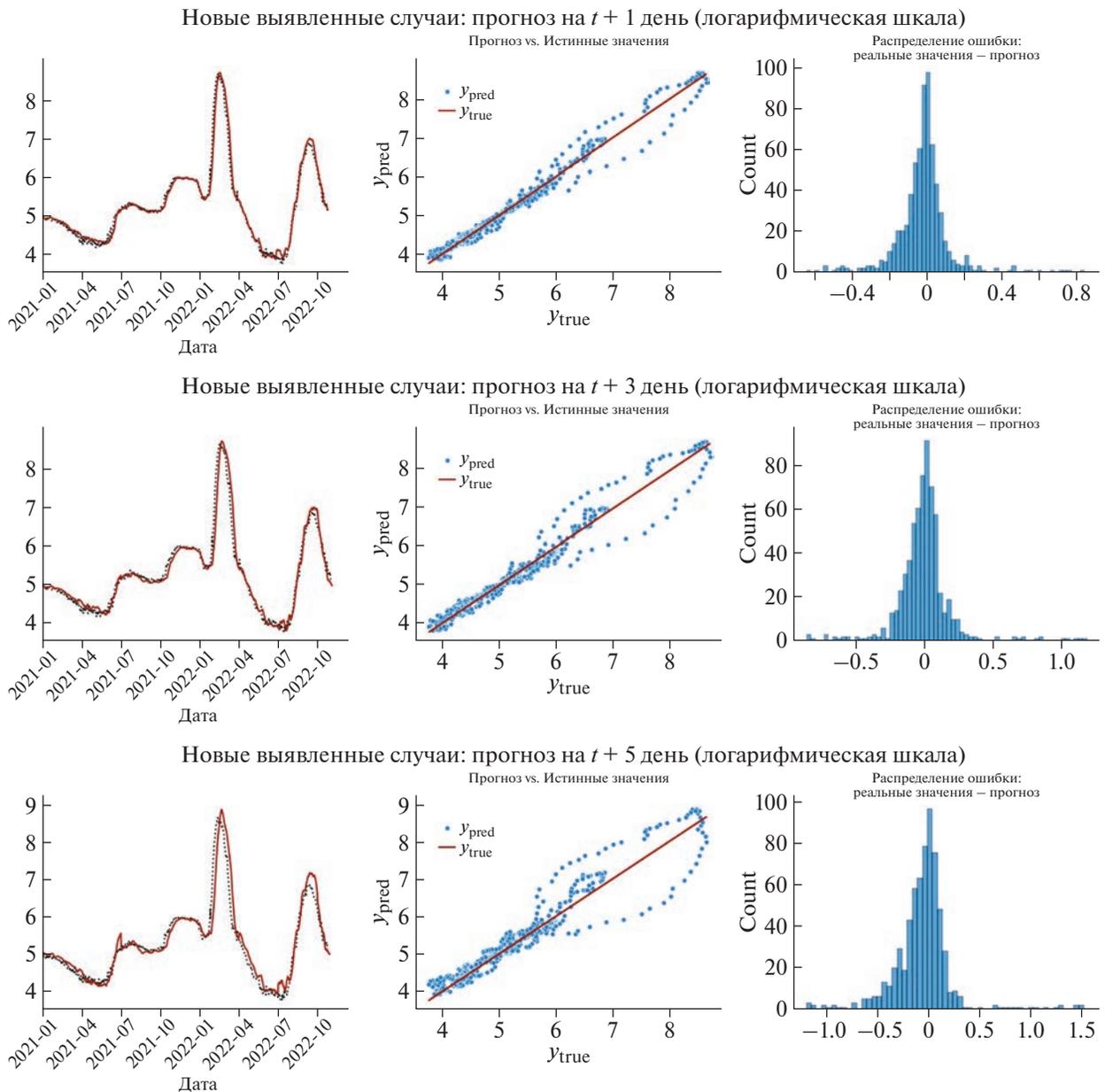
гнозов новых заболевших COVID-19 в Новосибирской области, полученных с помощью обученной нейронной сети (красная кривая). Черными точками обозначены реальные данные новых заболевших COVID-19 в Новосибирской области. На фиг. 8б представлена склейка 5-дневных прогнозов количества больных COVID-19, подключенных к ИВЛ в Новосибирской области, полученные с помощью обученной нейронной сети (красная кривая). Черными точками обозначены реальные данные количества больных COVID-19, подключенных к ИВЛ в Новосибирской области. Показано хорошее соответствие с реальными данными на указанном промежутке с близкими по своей природе вспышками заболевания.

На фиг. 9 приведены кривые среднеквадратичных ошибок на различных тренировочных и соответствующих им валидационных периодах из фиг. 7. Отметим, что по мере обучения нейронной сети на тренировочных периодах и снижения среднеквадратичного отклонения прогнозных значений от истинных (синие кривые), ошибка на соответствующих валидационных периодах также снижается (красные кривые), что подтверждает эффективность выбранных данных и архитектуры нейронной сети.

На фиг. 10 приведено сравнение прогнозов новых заболевших COVID-19 в день  $t + 1$ ,  $t + 3$  и  $t + 5$  с истинными значениями. Использована логарифмическая шкала. Чем ближе синие точки расположены к красной линии на центральных графиках, тем выше точность прогноза. При увеличении времени прогноза среднеквадратичная ошибка увеличивается (графики в центре и справа на фиг. 10), хотя в абсолютных значениях ошибка не сильно заметна (графики слева), погрешность достигает 2%.

Аналогично на фиг. 11 показано сравнение прогнозов количества индивидуумов, подключенных к ИВЛ в дни  $t + 1$ ,  $t + 3$  и  $t + 5$  с истинными значениями. Среднеквадратичная ошибка для данного показателя при увеличении дней прогноза больше (центральные и правые графики), однако абсолютные значения модельных предсказаний близки к истинным (графики слева).

В результате получена высокая точность совпадения прогнозов нейронной сети на данных вне выборки с реальными данными для временного промежутка с 2021-01-01 по 2022-01-01 и с 2022-08-01 по 2022-10-01 и приемлемая точность совпадения прогнозов нейронной сети на данных вне выборки с реальными данными для промежутка с 2022-01-01 по 2022-08-01. Снижение точности на периоде с 2022-01-01 по 2022-08-01 можно объяснить появлением вспышки штамма “Омикрон”. Скорость роста эпидемиологических показателей была высока и не встречалась ра-

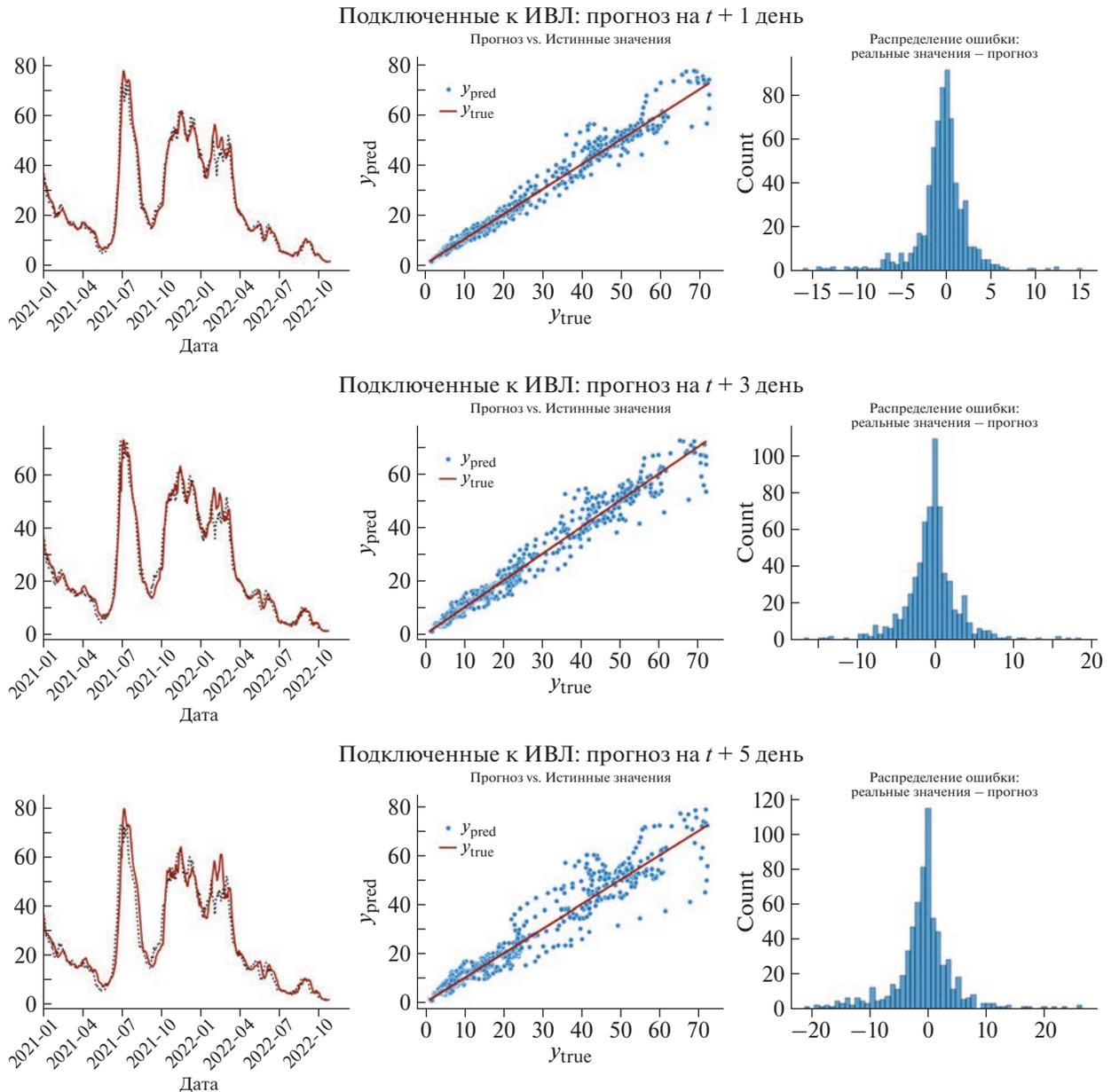


**Фиг. 10.** Сравнение прогноза нейронной сети (красная линия слева) новых заболевших COVID-19 в дни  $t + 1$ ,  $t + 3$  и  $t + 5$  с истинными значениями (черные точки слева). На среднем рисунке красная линия представляет собой зависимость истинных значений новых заболевших COVID-19 по отношению к себе. Синие точки обозначают зависимость спрогнозированных нейронной сетью значений по отношению к истинным. Разность истинных значений и полученных прогнозов отображена справа.

нее в данных, на которых обучалась нейронная сеть. Однако после дообучения нейронной сети с учетом данных contagiозности штамма “Омикрон” точность прогнозов модели вновь стала высокой при прогнозировании штамма “Кентавр” на периоде с 2022-08-01 по 2022-10-01.

#### 4.2. Сравнение с моделью SEIR-HCD

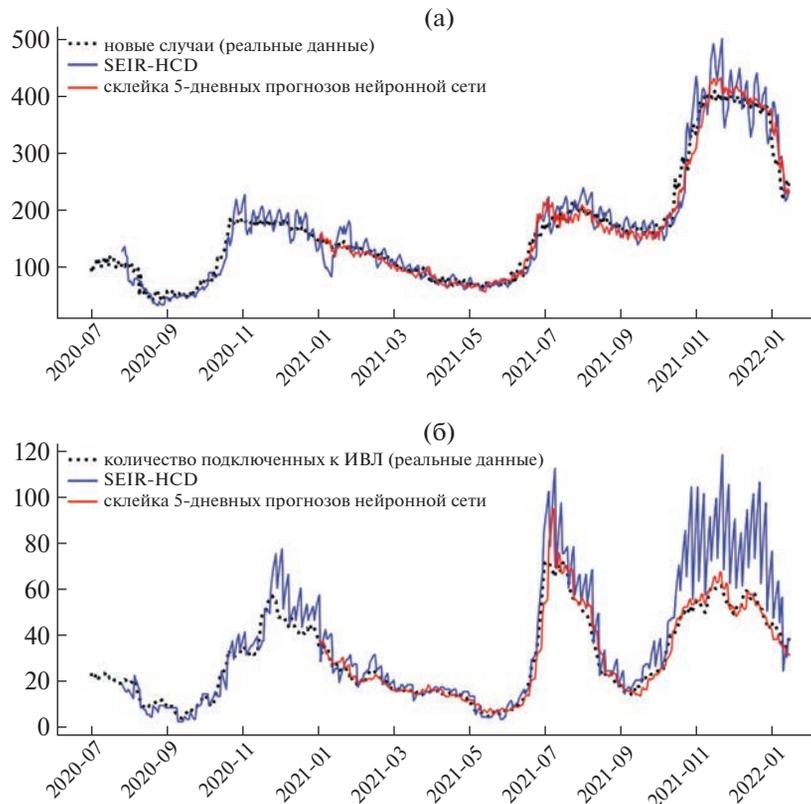
В [13, 14] была модифицирована дифференциальная SEIR-HCD модель распространения COVID-19 в регионах Российской Федерации, описываемая системой семи обыкновенных дифференциальных уравнений, связанных законом действующих масс. На фиг. 12а показано срав-



**Фиг. 11.** Сравнение прогноза нейронной сети количества подключенных к аппарату ИВЛ в дни  $t + 1$ ,  $t + 3$  и  $t + 5$  с истинными значениями.

нение моделирования и краткосрочных базовых сценариев ежедневных заболевших COVID-19 (черные точки), полученных нейронной сетью (красная линия) с результатами модели SEIR-HCD (синяя линия). На фиг. 126 показано сравнение моделирования и сценариев динамики количества больных COVID-19, подключенных к аппарату ИВЛ в Новосибирской области (черные точки), полученных моделью нейронной сети (красная линия) с результатами модели SEIR-HCD (синяя линия).

Показано преимущество модели нейронной сети перед классической дифференциальной моделью SEIR-HCD на краткосрочном периоде прогнозирования ожидаемых критических случаев, нуждающихся в подключении аппарата ИВЛ (фиг. 126).



**Фиг. 12.** Сравнение новых заболевших COVID-19 (а) и подключенных к аппарату ИВЛ в Новосибирской области (б), полученных с помощью применения модели нейронной сети (красная линия) и модели SEIR-HCD (синяя линия). Черными точками обозначены реальные данные.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенная нейронная сеть NN-COVID-19, основанная на обработке реальных данных о распространении COVID-19 в Новосибирской области, показала полное совпадение с SEIR-HCD моделью до появления штамма Омикрон. После добавления для обучения реальных данных по Омикрону (с 01.2022 до 04.2022) NN-COVID-19 смогла предсказать динамику штамма Кентавр.

В течение трех месяцев после обучения нейросеть NN-COVID-19 предсказывает ожидаемое количество заболевших COVID-19 и подключенных к ИВЛ с точностью до 10%, в то время как модель SEIR-HCD должна обновлять параметры каждые 5 дней, что по времени примерно совпадает со временем обучения нейронной сети. Таким образом, нейронная сеть NN-COVID-19 демонстрирует 18-кратное преимущество перед SEIR-HCD с точки зрения времени вычислений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zyatkov N., Krivorotko O.* Forecasting recessions in the US economy using machine learning methods // The 17th International Asian school-seminar “Optimization problems of complex systems” (OPCS). 2021. P. 139–146.  
<https://doi.org/10.1109/OPCS53376.2021.9588678>
2. *Chen S., Guo W.* Auto-encoders in deep learning – a review with new perspectives // Mathematics 2023. V. 11. P. 1–54.
3. *Jie Gui, Zhenan Sun, Yonggang Wen, Dacheng Tao, Jieping Ye.* A review on generative adversarial networks: algorithms, theory, and applications // IEEE Transact. on Knowledge and Data Engineer. 2023. V. 35. № 4. P. 3313–3332.
4. *Ling J., Jones R., Templeton J.* Physics-informed machine learning: A new paradigm for computational mechanics // Comput. Meth. Appl. Mech. Engineer. 2016. V. 309. P. 209–233.

5. *Leyva-Vallina M., Nagy Z.* Data-driven vs. physics-based modeling: A comparison from an industrial perspective // *Chemic. Engineer. Sci.* 2018. V. 182. P. 80–93.
6. *Huang Y., Zhang J., Yang X., Drury C.F., Reynolds W.D., Tan C.S.* Comparing the performance of machine learning algorithms for predicting soil organic carbon stocks in different land use systems // *Geoderma.* 2020. V. 375. P. 114448.
7. *Brunton S.L., Proctor J.L., Kutz J.N.* Discovering governing equations from data by sparse identification of non-linear dynamical systems // *Proceed. Nation. Acad. Sci.* 2016. V. 113. № 15. P. 3932–3937.
8. *Криворотько О.И., Кабанихин С.И.* Математические модели распространения COVID-19. Препринт Ин-та матем. им. С.Л. Соболева СО РАН. 2022. № 300. 63 с.
9. *Петров И.Б., Станкевич А.С., Васюков А.В.* О поиске начального приближения в задаче волновой инверсии с помощью сверточных нейронных сетей // *Докл. АН,* 2023.
10. *Nikparvar B., Rahman M.M., Hatami F., et al.* Spatio-temporal prediction of the COVID-19 pandemic in US counties: modeling with a deep LSTM neural network // *Sci. Rep.* 2021. V. 11. P. 21715.
11. *Shawaqfah M., Altomani F.* Forecast of the outbreak of COVID-19 using artificial neural network: Case study Qatar, Spain, and Italy // *Result. Phys.* 2021. V. 27. P. 104484.
12. *Гузев М.А., Никитина Е.Ю.* Динамика “имперских хвостов” на примере коронавирусной инфекции // *Дальневосточный матем. журн.* 2022. Т. 22. № 1. С. 38–50.
13. *Криворотько О.И., Кабанихин С.И., Зятков Н.Ю., Приходько А.Ю., Прохошин Н.М., Шишленин М.А.* Математическое моделирование и прогнозирование COVID-19 в Москве и Новосибирской области // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2020. Т. 23. № 4. С. 395–414.
14. *Krivorotko O.I., Zyatkov N.Y.* Data-driven regularization of inverse problem for SEIR-HCD model of COVID-19 propagation in Novosibirsk region // *Eurasian J. Math. and Comput. Appl.* 2022. V. 10. Iss. 1. P. 51–68.
15. *Chen T., Guestrin C.* XGBoost: A scalable tree boosting system. In *Proceedings of the ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery and data mining* // *ACM.* 2016. P. 785–794.
16. *Hochreiter S., Schmidhuber J.* Long short-term memory // *Neural Computat.* 1997. V. 9. № 8. P. 1735–1780.
17. *Srivastava N., Hinton G., Krizhevsky A., Sutskever I., Salakhutdinov R.* Dropout: A simple way to prevent neural networks from overfitting // *J. Mach. Learn. Res.* 2014. V. 15. № 1. P. 1929–1958.
18. *Ioffe S., Szegedy C.* Batch normalization: Accelerating deep network training by reducing internal covariate shift // *Inter. Conf. Mach. Learn.* 2015. V. 37. P. 448–456.
19. *Nair V., Hinton G.E.* Rectified linear units improve restricted Boltzmann machines // *Proceed. of the 27th Inter. Conf. Mach. Learn. (ICML-10).* 2010. P. 807–814.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО КАПИТАЛА<sup>1)</sup>

© 2023 г. Н. В. Трусов<sup>1,2,3,\*</sup>, А. А. Шананин<sup>1,2,3,4,5,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, кор. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

<sup>2</sup> 119991 Москва, Ленинские горы, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

<sup>3</sup> 105043 Москва, ул. Парковая, 29, ФГБУ «ВНИИ труда» Минтруда России, Россия

<sup>4</sup> 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

<sup>5</sup> 117198 Москва, ул. Миклухо-Макляя, 6, РУДН, Россия

\*e-mail: trunick.10.96@gmail.com

\*\*e-mail: alexshan@yandex.ru

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.  
Переработанный вариант 13.03.2023 г.  
Принята к публикации 26.06.2023 г.

В работе исследуется математическое описание экономического поведения домашних хозяйств. С одной стороны, домашние хозяйства являются потребителями, которые стремятся максимизировать дисконтированную функцию полезности на несовершенном рынке сбережений и потребительского кредита. С другой стороны, домашнее хозяйство является работником на рынке труда, получает доходы от трудовой деятельности и стремится повысить свою квалификацию для получения более высокой заработной платы. Повышение квалификации работника осуществляется путем вложений в человеческий капитал. В данной работе математическая модель поведения работника на рынке труда представлена в виде задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте. Доказана теорема о существовании решения, получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Модель идентифицирована по данным российской статистики в различных социальных слоях населения. Библ. 11. Фиг. 9.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, оптимальное управление, задачи на бесконечном горизонте планирования, принцип максимума, задача идентификации.

**DOI:** 10.31857/S0044466923100150, **EDN:** ZWMBCX

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рациональное экономическое поведение домашних хозяйств можно разделить на процессы в соответствии с двумя ролями, выполняемыми в экономике. С одной стороны, домашнее хозяйство является потребителем товаров и услуг, оперирующим в соответствии со своими предпочтениями на рынке сбережений и кредитов. С другой стороны, оно является субъектом на рынке труда, изменяющим свои профессионально квалификационные характеристики с целью увеличения заработной платы.

Моделирование экономического поведения домашних хозяйств восходит к работе Ф. Рамсея [1], в которой представлено поведение репрезентативного домашнего хозяйства на совершенном рынке сбережений и потребительского кредита. В работах [2, 3] представлена модель экономического поведения репрезентативного домашнего хозяйства на несовершенном рынке сбережений и потребительского кредита, который возникает из-за разницы между процентной ставкой по потребительскому кредиту и процентной ставкой по депозитам. Так, на протяжении последнего десятилетия в России, отношение процентных ставок по потребительскому кредиту к депозитам менялось в диапазоне от 2.5 до 3.5. Разрыв в процентных ставках по кредитам и де-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант 23-21-00281).

позитам влечет к негладкости правой части дифференциального уравнения на фазовую переменную (см. [2]). Репрезентативное домашнее хозяйство максимизирует дисконтированное потребление и может находиться в одном из трех режимов экономического поведения: заимствования, не взаимодействия с банковской системой и сбережения в форме депозитов в зависимости от текущего финансового состояния и параметров экономической конъюнктуры (см. [2]). В модели выделяется ограничение кредитоспособности на финансовое состояние домашнего хозяйства, выполнение которого необходимо для возможности выполнить обязательства по ранее взятым кредитам. Это приводит к фазовому ограничению на финансовое состояние домашнего хозяйства (см. [2]). В случае нарушения данного ограничения, образуется финансовая пирамида: чтобы расплатиться с ранее взятыми кредитами, домашнее хозяйство вынуждено брать новый. Такая ситуация наблюдается у малоимущих заемщиков в России (см. [4]). В модели экономического поведения репрезентативного домашнего хозяйства можно построить синтез практически в аналитическом виде [2]. Синтез позволяет определить оптимальное управление в зависимости от текущего значения фазовой переменной и параметров конъюнктуры. Он состоит из 7 различных типов поведения домашнего хозяйства, которые определяют социальный слой (подробнее см. [2]). Данная модель идентифицирована по данным российской статистики [5] и использовалась для анализа состояния потребительского кредита в России как механизм социальной адаптации в условиях пандемии 2020 г. [2, 3] и в условиях сложившейся экономической ситуации [4].

В данной работе представлена математическая модель поведения домашнего хозяйства как работника на рынке труда. Работник получает заработную плату, которую он может расходовать на потребление и на вложение в человеческий капитал. Работник максимизирует дисконтированное потребление и увеличивает свои компетенции для получения более высокой заработной платы. Компетенции работника описываются его человеческим капиталом. В моделях экономического роста выделяют роль динамики человеческого капитала в повышении производительности труда и росте реальной заработной платы см., например, модель Р. Лукаса [7]. В нашей модели мы изучаем микроописание и экономические стимулы, которые влияют на рост человеческого капитала.

## 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РАБОТНИКА С ПОМОЩЬЮ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Будем моделировать поведение репрезентативного, рационального работника, который получает заработную плату  $S$ , тратит ее на осуществление потребительских расходов  $C$  и на развитие своего человеческого капитала  $X$ , т.е.

$$S = C + X.$$

Накопление человеческого капитала  $P(t)$  описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dP}{dt} = X + \mu P, \quad (1)$$

с начальным условием

$$P(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\mu < 0$  – параметр, описывающий устаревание накопленных компетенций работника.

В случайный момент времени появляется вакансия, позволяющая работнику увеличить заработную плату в соответствии с накопленным человеческим капиталом до величины  $S + \zeta_1 P$ ,  $\zeta_1 > 0$ . Будем предполагать, что вероятность появления вакансии не позднее времени  $t$  равна

$$F(t) = 1 - e^{-\zeta_1 \int_0^t P(\tau) d\tau}, \quad (3)$$

где  $\zeta_1 > 0$ . Будем предполагать, что работник оценивает текущее потребление с помощью функции полезности с постоянным отвращением к риску  $u(C) = C^\alpha$ , где  $1 - \alpha$  коэффициент отвращения к риску,  $\alpha \in (0, 1)$ . Будем считать, что он распределяет свой доход между потреблением

$C(t) \geq 0$  и вложением в развитие человеческого капитала  $X(t) \geq 0$  и что при этом он максимизирует математическое ожидание дисконтированного с коэффициентом  $\delta > 0$  потребления

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^t e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt + e^{-\delta T} \frac{(S + \zeta_1 P(T))^\alpha}{\delta} \right\}. \tag{4}$$

Справедлива следующая

**Лемма 1.** *Справедливо следующее представление функционала (4):*

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^t e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt + e^{-\delta T} \frac{(S + \zeta_1 P(T))^\alpha}{\delta} \right\} = \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t (\delta + \xi_1 P(\tau)) d\tau} \left( C^\alpha(t) + \xi_1 P(t) \frac{(S + \zeta_1 P(t))^\alpha}{\delta} \right) dt. \tag{5}$$

**Доказательство.** По определению, математическое ожидание можно записать в виде

$$\mathbb{E} \left\{ \int_0^t e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt + e^{-\delta T} \frac{(S + \zeta_1 P(T))^\alpha}{\delta} \right\} = \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^\tau e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt + \frac{e^{-\delta \tau}}{\delta} (S + \zeta_1 P(\tau))^\alpha \right\} dF(\tau).$$

Последнее слагаемое, в соответствии с (3) может быть записано как

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^\tau e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt + \frac{e^{-\delta \tau}}{\delta} (S + \zeta_1 P(\tau))^\alpha \right\} dF(\tau) = \\ & = \int_0^{+\infty} \int_0^\tau e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt dF(\tau) + \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^\tau (\delta + \xi_1 P(s)) ds} \xi_1 P(\tau) \frac{(1 + \zeta_1 P(\tau))^\alpha}{\delta} d\tau. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям  $\int_0^{+\infty} \int_0^\tau e^{-\delta t} C^\alpha(t) dt dF(\tau)$ , мы получаем выражение (5). Лемма доказана.

Пусть  $\Lambda(t) = \int_0^t (\delta + \xi_1 P(\tau)) d\tau$ . Перейдем к безразмерным величинам, представив следующие замены  $\hat{P} = \frac{P}{S\theta}$ ,  $\tau = \frac{t}{\theta}$ ,  $\hat{\mu} = \mu\theta$ ,  $\hat{\xi}_1 = \frac{\xi_1 S\theta}{\delta}$ ,  $\hat{\zeta}_1 = \zeta_1 S\theta$ , где  $S\theta$  – годовой доход работника. Тогда, в соответствии с доказанной леммой, мы получаем задачу оптимального управления

$$\int_0^{+\infty} e^{-\Lambda(\tau)} \left( u^\alpha + \hat{\xi}_1 \hat{P} \left( \frac{1 + \hat{\zeta}_1 \hat{P}}{S} \right)^\alpha \right) d\tau \rightarrow \max_{0 \leq u \leq 1}, \tag{6}$$

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = (1 - u) + \hat{\mu} \hat{P}, \tag{7}$$

$$\frac{d\Lambda}{d\tau} = \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}), \tag{8}$$

$$\hat{P}(0) = 0, \tag{9}$$

$$\Lambda(0) = 0. \tag{10}$$

Обратим внимание, что управление  $u$  в задаче оптимального управления (6)–(10) характеризует долю от заработной платы, которую работник тратит на потребительские расходы.

**Теорема 1.** 1. Задача оптимального управления (6)–(10) имеет решение. 2. Пусть  $\hat{P}(\tau)$ ,  $\Lambda(\tau)$  – оптимальное решение задачи (6)–(10) и являются абсолютно непрерывными при  $\tau \geq 0$ , пусть также  $u^*(\tau)$  является измеримой функцией при  $\tau \geq 0$ , тогда существуют абсолютно непрерывные функции  $\varphi_1(\tau) > 0$ ,  $\varphi_2(\tau) < 0$ ,  $\tau \geq 0$ :

$$\varphi_1(\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-\hat{\mu}(\tau-s)} \left[ -\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)) \varphi_1(s) + \hat{\xi}_1 (1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s))^\alpha + \frac{\alpha \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_1}{S} \left( \frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)}{S} \right)^{\alpha-1} \right] - \delta\theta \frac{\hat{\xi}_1}{\hat{\mu}} (e^{-\hat{\mu}(\tau-s)} - 1) \left[ \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)) \varphi_2(s) + \min \left\{ 1, \left( \frac{\varphi_1}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\} + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s) \left( \frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)}{S} \right)^\alpha \right] ds, \tag{11}$$

$$\varphi_2(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} \left[ \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)) \varphi_2(s) + \min \left\{ 1, \left( \frac{\varphi_1}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\} + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s) \left( \frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)}{S} \right)^\alpha \right] ds, \tag{12}$$

$$u^*(\tau) = \min \left\{ 1, \left( \frac{\varphi_1(\tau)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right\}. \tag{13}$$

Более того,

$$\hat{P}(\tau) = \int_0^{\tau} \left( 1 - \left( \frac{\varphi_1(s)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right)_+ e^{\hat{\mu}(\tau-s)} ds, \tag{14}$$

$$\Lambda(\tau) = \delta\theta \int_0^{\tau} (1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)) ds. \tag{15}$$

**Доказательство.** 1. Условия задачи оптимального управления (6)–(10) удовлетворяют предположениям П1–П7 о существовании решения задачи оптимального управления на бесконечном горизонте планирования в [8]. 2. Доказательство второй части теоремы основано на необходимых условиях оптимальности для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в [9, 10]. Для начала покажем, что оптимальное управление  $u^*(\tau)$  удовлетворяет (13). Для этого выпишем функцию Гамильтона–Понтрягина

$$\mathcal{H}(\tau, \hat{P}, \Lambda, \varphi_1, \varphi_2) = \sup_{0 \leq u \leq 1} \left\{ e^{-\Lambda} \left( u^\alpha + \hat{\xi}_1 \hat{P} \left( \frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}}{S} \right)^\alpha \right) + \varphi_1 e^{-\Lambda} ((1 - u) + \hat{\mu} \hat{P}) + \varphi_2 e^{-\Lambda} \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}) \right\},$$

откуда легко можно получить (13).

Сопряженная система задачи оптимального управления (6)–(10) определяется матричным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} = -A^T \psi(\tau) + \mathbf{b}(\tau), \tag{16}$$

где  $\psi(\tau) = (\psi_1(\tau), \psi_2(\tau))^T$ ,  $\mathbf{b}(\tau) = (b_1(\tau), b_2(\tau))^T$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \hat{\mu} & 0 \\ \delta\theta \hat{\xi}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}(\tau) = \begin{pmatrix} -e^{-\Lambda(\tau)} \left( \hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau) \left( \frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau)}{S} \right)^\alpha + \frac{\alpha \hat{\xi}_1 \hat{\xi}_1}{S} \left( \frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau)}{S} \right)^{\alpha-1} \right) \\ e^{-\Lambda(\tau)} \left( u^\alpha + \hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau) \left( \frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau)}{S} \right)^\alpha \right) \end{pmatrix}.$$

Введем следующую замену:  $\varphi = \psi e^\Lambda$ . Тогда сопряженная система (16) преобразуется в

$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = -A^T \varphi(\tau) + \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(\tau)) \varphi(\tau) + \mathbf{b}(\tau)e^{\Lambda(\tau)}. \tag{17}$$

Решение дифференциального уравнения (17), согласно [10] (см. с. 12, теорема 8), может быть записано в виде

$$\varphi(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} Z(\tau)Z^{-1}(s) \left[ \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)) \varphi(s) + \mathbf{b}(s)e^{\Lambda(s)} \right] ds, \tag{18}$$

где  $Z(\tau)$  — матрица  $2 \times 2$ , является решением матричного однородного дифференциального уравнения

$$\frac{dZ}{d\tau} = -A^T Z, \tag{19}$$

$$Z(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Решением матричного дифференциального уравнения (19), (20) является матрица

$$Z(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-\hat{\mu}\tau} & \frac{\hat{\xi}_1}{\hat{\mu}}(e^{-\hat{\mu}\tau} - 1)\delta\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица  $Z^{-1}(s)$  имеет следующий вид:

$$Z^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{\hat{\mu}s} & \frac{\hat{\xi}_1}{\hat{\mu}}(e^{\hat{\mu}s} - 1)\delta\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обращаясь к формуле (18), мы получаем, что функции  $\varphi_1(\tau)$ ,  $\varphi_2(\tau)$  удовлетворяют (11), (12) при оптимальном управлении (13).

Применяя метод вариации постоянной для решения обыкновенного дифференциального уравнения (7), при условии оптимальности (13), получаем выражение (14). Откуда, после записи (8) в интегральном виде, получаем (15).

Теорема доказана.

**Следствие 1.** Предположим, что существует момент времени  $\hat{\tau} \geq 0$  такой, что  $\hat{P}(\tau)$  является монотонно возрастающей для любого  $\tau \geq \hat{\tau}$ ,  $\hat{P} < -\frac{1}{\hat{\mu}}$ . Тогда существуют пределы  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{P}(\tau) = \hat{P}^*$ ,

$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_1(\tau) = \varphi_1^*$ ,  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_2(\tau) = \varphi_2^*$ , где

$$\varphi_1^* = \alpha(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^{\alpha-1}, \tag{21}$$

$$\varphi_2^* = -\frac{1}{\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*)} \left[ (1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^\alpha + \hat{\xi}_1 \hat{P}^* \left( \frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*}{S} \right)^\alpha \right], \tag{22}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\hat{\xi}_1}{S} \left( \frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*}{S} \right)^{\alpha-1} (\alpha \hat{\xi}_1 \hat{P}^* + \hat{\xi}_1 \hat{P}^* + 1) + \alpha(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^{\alpha-1} (\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*) - \hat{\mu}) + \\ & + \frac{\hat{\xi}_1}{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*} \left[ (1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^\alpha + \hat{\xi}_1 \hat{P}^* \left( \frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*}{S} \right)^\alpha \right] = 0. \end{aligned} \tag{23}$$

**Доказательство.** Так как функция  $\hat{P}(\tau)$  монотонно возрастает при  $\tau \geq \hat{\tau}$  и является ограниченной, то существует предел  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \hat{P}(\tau) = \hat{P}^*$ . Откуда,  $\frac{d\hat{P}}{d\tau} \rightarrow 0, \tau \rightarrow +\infty$ . Учитывая, что

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = 1 - \min \left\{ 1, \left( \frac{\varphi_1(\tau)}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right\} + \hat{\mu} \hat{P},$$

а для того, чтобы удовлетворить условию  $\frac{d\hat{P}}{d\tau} \rightarrow 0, \tau \rightarrow +\infty$ , функция  $\varphi_1(\tau)$  должна иметь предел

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_1(\tau) = \alpha (1 + \hat{\mu} \hat{P}^*)^{\alpha-1}. \tag{24}$$

Докажем (22). Пусть

$$h_1(s) = \delta \theta (1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)), \tag{25}$$

$$h_2(s) = \min \left\{ 1, \left( \frac{\varphi_1(s)}{\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right\} + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s) \left( \frac{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}(s)}{S} \right)^\alpha. \tag{26}$$

Тогда функцию  $\varphi_2(\tau)$ , в соответствии с (12), можно записать в виде

$$\varphi_2(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} [h_1(s)\varphi_2(s) + h_2(s)] ds. \tag{27}$$

Продифференцируем (27) и получим

$$\frac{d\varphi_2(\tau)}{d\tau} = h_1(\tau)\varphi_2(\tau) + h_2(\tau). \tag{28}$$

Применяя метод вариации постоянной, получаем решение дифференциального уравнения (28)

$$\varphi_2(\tau) = \left( C_0 + \int_0^{\tau} h_2(\eta) e^{-\int_0^{\eta} h_1(\xi) d\xi} d\eta \right) e^{\int_0^{\tau} h_1(\eta) d\eta}, \tag{29}$$

где  $C_0 \in \mathbb{R}$ . Так как  $h_1(\tau) > 0 \forall \tau \geq 0$ , для того, чтобы интеграл (29) сошелся, нужно положить

$$C_0 = - \int_0^{+\infty} h_2(\eta) e^{-\int_0^{\eta} h_1(\xi) d\xi} d\eta,$$

откуда получаем

$$\varphi_2(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} h_2(\eta) e^{\int_{\eta}^{\tau} h_1(\xi) d\xi} d\eta. \tag{30}$$

Интеграл в (30) сходится, так как  $\eta > \tau$ , а значит,  $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_2(\tau) = \varphi_2^*$ .

Покажем, что  $\varphi_2^*$  удовлетворяет (22). Из (25), (26) следует, что

$$h_1(\eta) = \hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta), \tag{31}$$

$$h_2(\eta) = \hat{h}_2 + \varepsilon_2(\eta), \tag{32}$$

где  $\hat{h}_1 > 0, \hat{h}_2 > 0, \varepsilon_1(\eta) \rightarrow 0, \varepsilon_2(\eta) \rightarrow 0$  при  $\eta \rightarrow +\infty$ . Мы получаем, что

$$\varphi_2(\tau) = - \int_{\tau}^{+\infty} \hat{h}_2 e^{\int_{\eta}^{\tau} (\hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta)) d\xi} d\eta - \int_{\tau}^{+\infty} \varepsilon_2(\eta) e^{\int_{\eta}^{\tau} (\hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta)) d\xi} d\eta. \tag{33}$$

Легко видеть, что второе слагаемое в выражении (33) стремится к нулю при  $\tau \rightarrow +\infty$  в силу того, что  $h_1(\xi) > 0, \eta > \tau$ . Пусть

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} e^{\int_{\eta}^{\tau} (\hat{h}_1 + \varepsilon_1(\eta)) d\xi} d\eta. \tag{34}$$

Выражение (34) может быть записано в следующем виде:

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} e^{\hat{h}_1(\tau-\eta)} e^{\int_{\eta}^{\tau} \varepsilon_1(\eta) d\xi} d\eta. \tag{35}$$

Интегрируя по частям (35), получаем

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = -\frac{1}{\hat{h}_1} e^{\hat{h}_1(\tau-\eta)} e^{\int_{\eta}^{\tau} \varepsilon_1(\xi) d\xi} \Big|_{\tau}^{+\infty} - \frac{1}{\hat{h}_1} \int_{\tau}^{+\infty} \varepsilon_1(\eta) e^{\hat{h}_1(\tau-\eta) + \int_{\eta}^{\tau} \varepsilon_1(\xi) d\xi} d\eta. \tag{36}$$

Первое слагаемое в выражении (36) в точности равно  $\frac{1}{\hat{h}_1}$ , а второе стремится к нулю при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Отсюда, в соответствии с (33), получаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \varphi_2(\tau) = -\frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1}.$$

В силу (31), (32), (24) получаем, что предел  $\varphi_2^*$  удовлетворяет (22). Следствие доказано.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВОГО ПОРТРЕТА В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Для исследования оптимальной траектории, найдем положение равновесия системы дифференциальных уравнений (37)–(39), полученной при дифференцировании (11), (12), (14). Будем рассматривать управление  $u < 1$ , так как в противном случае человеческий капитал работника не увеличивается:

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = -\hat{\xi}_1 \left( \frac{1 + \hat{\zeta}_1 \hat{P}}{S} \right)^{\alpha} - \frac{\alpha \hat{\xi}_1 \hat{\zeta}_1 \hat{P}}{S} \left( \frac{1 + \hat{\zeta}_1 \hat{P}}{S} \right)^{\alpha-1} + (\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}) - \hat{\mu}) \varphi_1 - \delta\theta \hat{\xi}_1 \varphi_2, \tag{37}$$

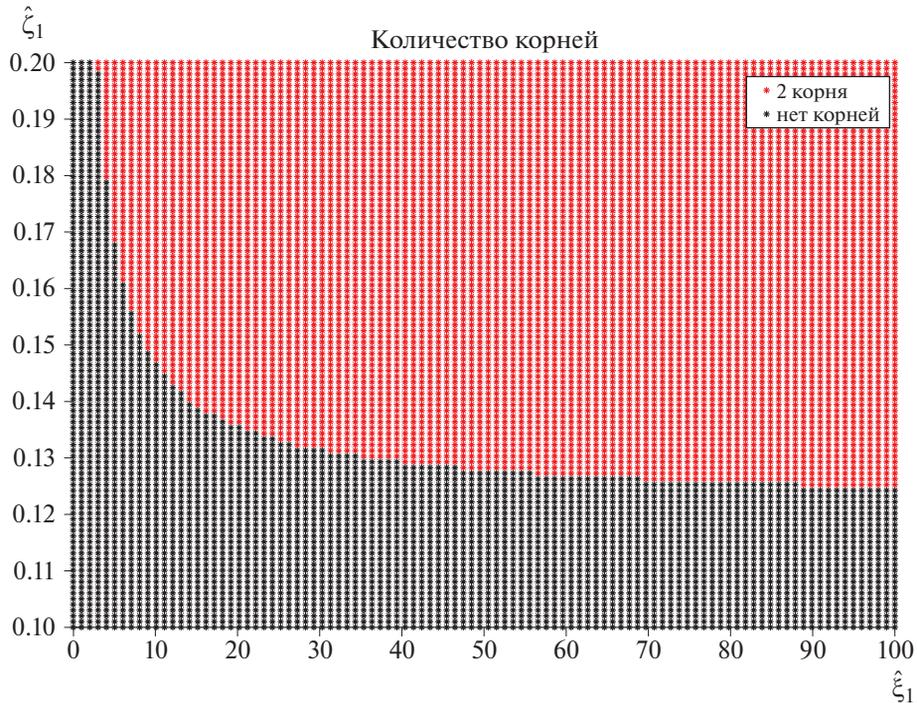
$$\frac{d\varphi_2}{d\tau} = \left( \frac{\varphi_1}{\alpha} \right)^{\alpha-1} + \hat{\xi}_1 \hat{P} \left( \frac{1 + \hat{\zeta}_1 \hat{P}}{S} \right)^{\alpha} + (1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}) \varphi_2, \tag{38}$$

$$\frac{d\hat{P}}{d\tau} = 1 - \left( \frac{\varphi_1}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} + \hat{\mu} \hat{P}. \tag{39}$$

Положение равновесия системы (37)–(39) представлено выражениями (21)–(23). Исследуем вопрос о количестве точек покоя системы (37)–(39). Обозначим через  $f(\hat{P}^*)$  левую часть выражения (23), т.е.

$$f(\hat{P}^*) = -\frac{\hat{\xi}_1}{S} \left( \frac{1 + \hat{\zeta}_1 \hat{P}^*}{S} \right)^{\alpha-1} (\alpha \hat{\zeta}_1 \hat{P}^* + \hat{\zeta}_1 \hat{P}^* + 1) + \alpha (1 + \hat{\mu} \hat{P}^*)^{\alpha-1} (\delta\theta(1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*) - \hat{\mu}) + \frac{\hat{\xi}_1}{1 + \hat{\xi}_1 \hat{P}^*} \left[ (1 + \hat{\mu} \hat{P}^*)^{\alpha} + \hat{\xi}_1 \hat{P}^* \frac{(1 + \hat{\zeta}_1 \hat{P}^*)^{\alpha}}{S} \right]. \tag{40}$$

Отметим, что  $f(0) > 0$ , при  $S > 0, \hat{\mu} < 0$ . Также,  $\lim_{\hat{P}^* \rightarrow -1/\hat{\mu}} f(\hat{P}^*) = +\infty$ . Значит, на множестве  $[0, -1/\hat{\mu}]$  уравнение  $f(\hat{P}^*) = 0$  либо не имеет корней, либо имеет четное число корней в случае об-



Фиг. 1. Количество корней уравнения  $f(\hat{P}^*) = 0$  при  $\alpha = 0.8$ ,  $\hat{\mu} = -0.5$ ,  $S = 30$ ,  $\delta = 0.01$ .

шего положения. На фиг. 1 продемонстрировано количество корней уравнения  $f(\hat{P}^*) = 0$  на плоскости  $\mathcal{O}\hat{\xi}_1\hat{\xi}_1$ . Как видно из фиг. 1, при рассматриваемых параметрах уравнение  $f(\hat{P}^*) = 0$  либо не имеет корней, либо имеет два корня.

Для изучения типов точек положения равновесия, проведем линеаризацию системы (37)–(39) в окрестностях положений равновесия. Матрица Якоби линеаризованной системы будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*) - \hat{\mu}, \\ a_{12} &= -\delta\theta\hat{\xi}_1, \\ a_{13} &= \delta\theta\alpha\hat{\xi}_1(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^{\alpha-1} - \alpha\hat{\xi}_1\hat{\xi}_1\left(\frac{1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*}{S}\right)^{\alpha-2} \left[ 2(1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*) + \hat{P}^*\frac{\hat{\xi}_1(\alpha-1)}{S^2} \right], \\ a_{21} &= -\frac{1}{1-\alpha}(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*), \\ a_{22} &= \delta\theta(1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*), \\ a_{23} &= \frac{\hat{\xi}_1}{S}\left(\frac{1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*}{S}\right)^{\alpha-1} \left[ 1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^* + \alpha\hat{\xi}_1\hat{P}^* - \frac{\hat{\xi}_1(1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*)}{1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*}\hat{P}^* \right] - \frac{\hat{\xi}_1}{1 + \hat{\xi}_1\hat{P}^*}(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^\alpha, \\ a_{31} &= \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}(1 + \hat{\mu}\hat{P}^*)^{2-\alpha}, \\ a_{32} &= 0, \\ a_{33} &= \hat{\mu}. \end{aligned}$$

Выпишем характеристическое уравнение линеаризованной системы  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ , где  $E$  – единичная матрица. Пусть

$$\begin{aligned} b &= a_{11} + a_{22} + \hat{\mu}, \\ c &= a_{13}a_{31} + a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} - a_{22}\hat{\mu} - a_{11}\hat{\mu}, \\ d &= \hat{\mu}a_{11}a_{22} - \hat{\mu}a_{12}a_{21} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{31}a_{22}. \end{aligned}$$

Тогда характеристическую функцию можно записать в следующем виде:

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d. \quad (41)$$

Отметим, что линеаризованная система является неустойчивой, так как коэффициент при множителе  $\lambda^3$  отрицателен, а

$$b = a_{11} + a_{22} + \hat{\mu} = 2\delta\theta(1 + \xi_1\hat{P}^*) > 0.$$

**Предложение 1.** Если коэффициент  $d$  характеристического уравнения

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$$

отрицателен,  $b > 0$ , то существует вещественный отрицательный корень характеристического уравнения, а два других корня имеют положительные вещественные части.

**Доказательство.** Поскольку система является неустойчивой, то все 3 корня характеристического уравнения  $\chi_A(\lambda) = 0$  не могут быть отрицательными. Заметим, что  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \chi_A(\lambda) = +\infty$ , а  $\chi_A(0) = d < 0$ . Значит, уравнение  $\chi_A(\lambda) = 0$  имеет единственный вещественный отрицательный корень. Обозначим корни характеристического уравнения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Пусть  $\lambda_1 < 0$ . Из формул Виета имеем, что

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = d.$$

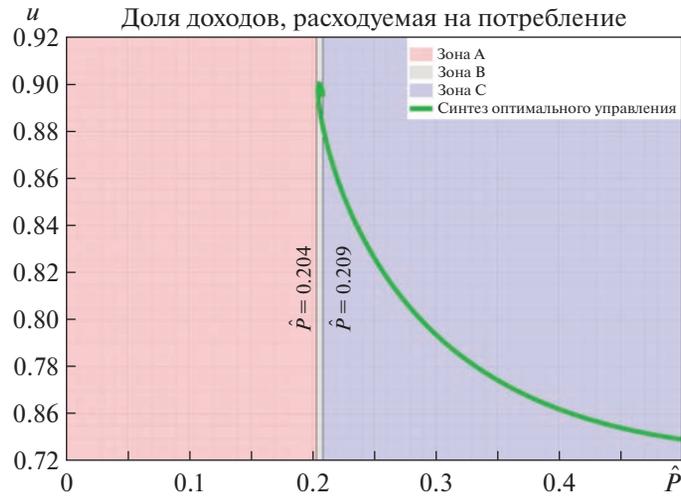
Отсюда получаем, что  $\text{Re}(\lambda_2) > 0, \text{Re}(\lambda_3) > 0$ . Предложение доказано.

**Замечание 1.** При условиях предложения 1, собственный вектор, соответствующий отрицательному вещественному корню характеристического уравнения (41), формирует устойчивую сепаратрису.

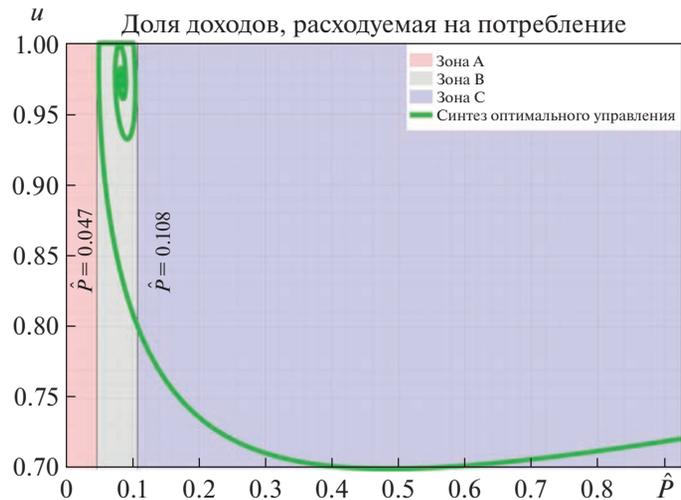
#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе мы представляем численные результаты моделирования поведения работника на рынке труда. Входными параметрами являются  $\xi_1, \hat{\xi}_1, \alpha, \hat{\mu}$ . Чтобы ответить на вопросы, какая будет новая заработная плата работника при достижении определенной квалификации и сколько времени необходимо затратить работнику на развитие человеческого капитала, необходимо осуществить обратный переход к размерным величинам, где необходимо знать параметры коэффициента дисконтирования  $\delta$  и текущей заработной платы  $S$ . Ранее в [4, 6] мы рассматривали статистические данные обследования бюджетов домашних хозяйств (ОБДХ), собираемые Росстатом [5] с 2015 по 2020 г. Статистические данные ОБДХ собираются ежеквартально и охватывают около 50 000 домашних хозяйств из 82 регионов России. На основе данных по уровню потребления на душу населения эти регионы были разбиты на 3 группы: бедную группу, среднюю группу и богатую группу. Обследования ОБДХ показали, что примерно половина домашних хозяйств из бедной группы проживают в населенном пункте городского типа, а оставшаяся половина в селе. Это мотивировало разбить бедную группу регионов еще на две, поскольку стиль жизни в городе отличается от стиля жизни в селе. С помощью программного комплекса [11] были выделены заемщики по потребительскому кредиту в каждой группе регионов. Заемщики делятся на два типа: низкодоходные и высокодоходные, которые формируют социальные слои.

В работе [4], с помощью программного комплекса [11], была проведена идентификация поведения репрезентативных низкодоходных и высокодоходных заемщиков в каждой группе регионов, откуда были установлены параметры отвращения к риску и коэффициент дисконтирования. Мы используем эти параметры для моделирования поведения работника на рынке труда для данных социальных слоев.

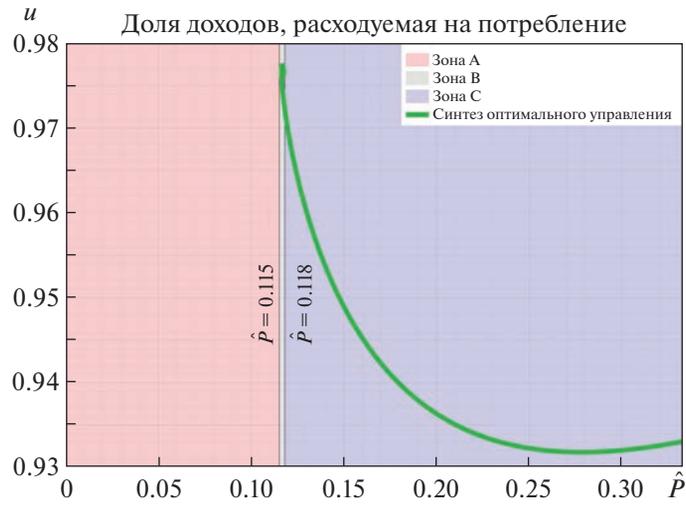


Фиг. 2. Бедная группа регионов. Город. Низкодоходные слои населения.

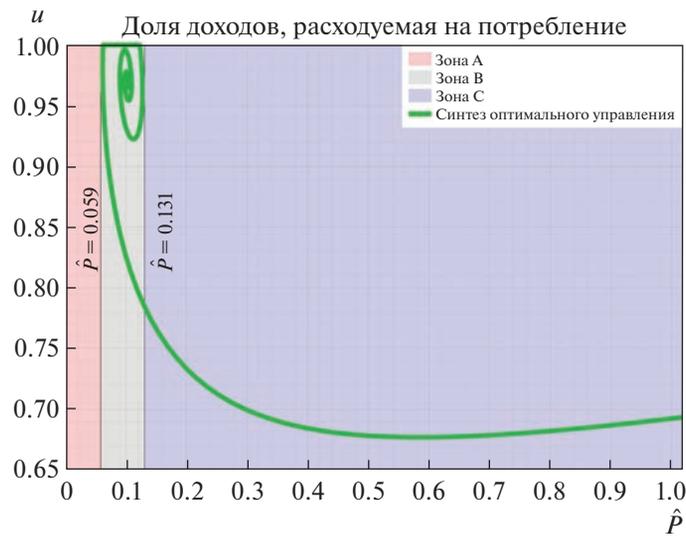


Фиг. 3. Бедная группа регионов. Город. Высокодоходные слои населения.

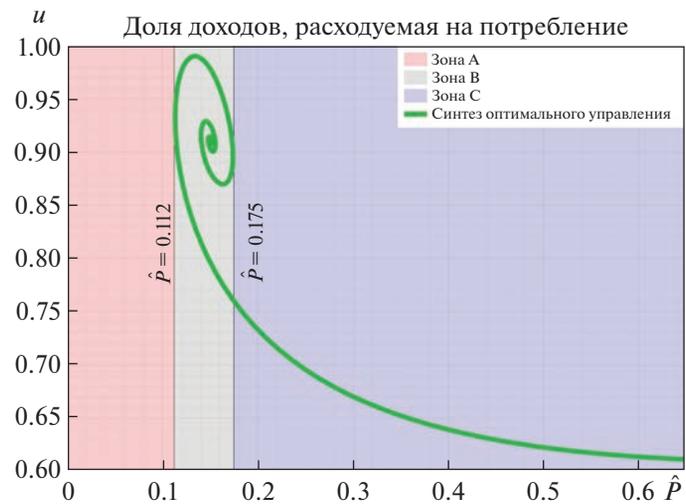
Будем рассматривать такие параметры модели, чтобы для одной из точек положения равновесия коэффициент  $d$  в характеристическом уравнении (41) был отрицателен. Это гарантирует наличие устойчивой сепаратрисы вдоль собственного вектора, соответствующего отрицательному вещественному собственному значению линеаризованной системы. В приложении представлены наборы параметров идентификации поведения работников в каждой группе регионов в разных социальных слоях. Отметим, что используемые данные о доходах и коэффициентах дисконтирования актуальны на конец 2021 г. Доходы представлены в тыс. руб. и формируются для трудоустроенной доли людей, проживающих в домашнем хозяйстве. Также в приложении представлены результаты вложений работников в человеческий капитал: во сколько раз вырастут заработная плата работника (величина  $1 + \hat{\zeta}_1 P^*$ ) и характерное время повышения квалификации работника, до появления новой вакансии будем оценивать величиной  $\frac{1}{\hat{\zeta}_1 P^*}$ , где  $P^*$  – положение равновесия, к которому стремится устойчивая сепаратриса. На фиг. 2–9 представлен синтез оптимального управления, характеризующий затрачиваемую долю от доходов работника на вложения в человеческий капитал в зависимости от текущей квалификации в разных социальных слоях.



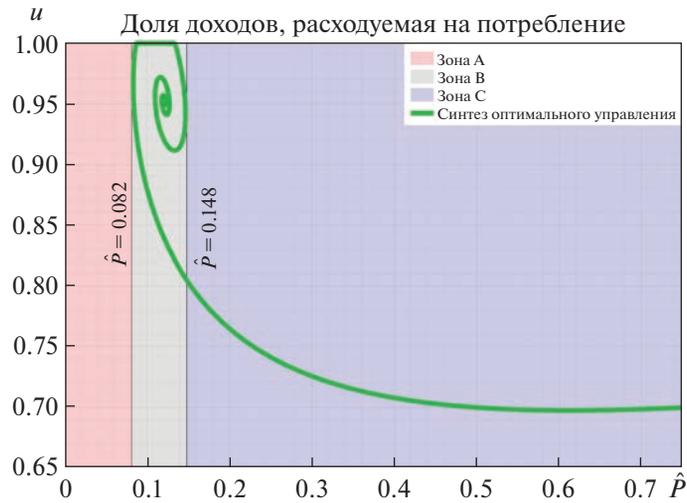
Фиг. 4. Бедная группа регионов. Село. Низкодоходные слои населения.



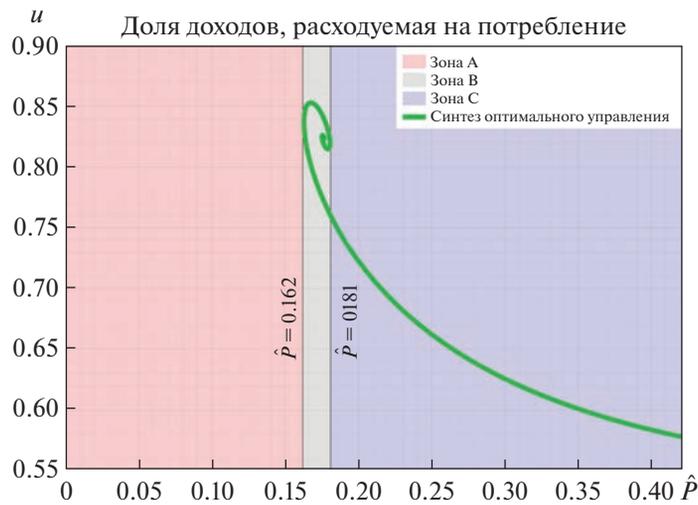
Фиг. 5. Бедная группа регионов. Село. Высокодоходные слои населения.



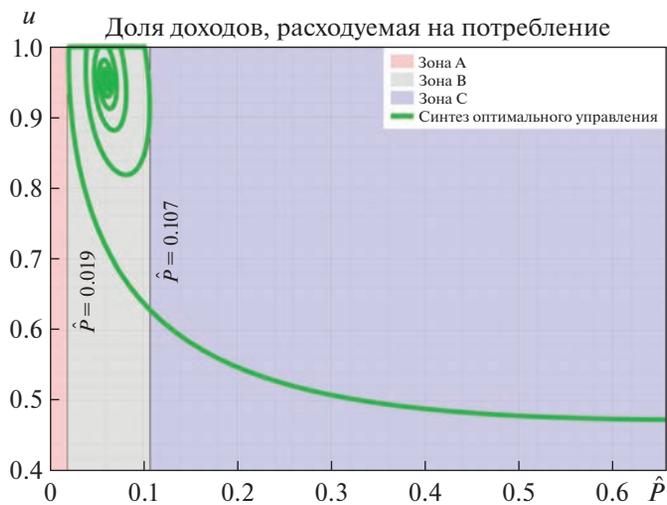
Фиг. 6. Средняя группа регионов. Низкодоходные слои населения.



Фиг. 7. Средняя группа регионов. Высокодоходные слои населения.



Фиг. 8. Богатая группа регионов. Низкодоходные слои населения.



Фиг. 9. Богатая группа регионов. Высокодоходные слои населения.

На фиг. 2, 4 можно выделить две зоны оптимального управления, а на фиг. 3, 5–9 три зоны оптимального управления. Назовем зоной  $A$  – зону отсутствия вложения в человеческий капитал, зоной  $B$  – зону неопределенности, когда возможны колебания в поведении работника по управлению человеческим капиталом, зоной  $C$  – зону развития человеческого капитала. Из анализа структуры синтеза оптимального управления видно, что сами по себе домашние хозяйства не вкладывают в человеческий капитал, им необходим стимул для его развития. В качестве таких стимулов могут выступать программы дополнительного образования, бесплатные курсы по развитию компетенций. Лишь имея определенный запас человеческого капитала, домашние хозяйства начинают его развивать. Стоит отметить, что низкодоходные слои населения нуждаются в большем стимуле к развитию человеческого капитала, чем высокодоходные слои населения.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлена модель поведения работника на рынке труда. Предполагается, что работник тратит свою заработную плату на потребительские расходы и на вложение в человеческий капитал. Работник максимизирует дисконтированное потребление и стремится увеличить свою квалификацию путем увеличения человеческого капитала для получения более высокой заработной платы. Переход на более высокую заработную плату осуществляется при достижении определенной квалификации в случайный момент времени. Задача сформулирована в виде задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте. В работе доказано существование решения задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом, получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина, включая условия трансверсальности, численно построено решение в форме синтеза оптимального управления, на основе которого проанализировано поведение на рынке труда различных социальных слоев России. Результаты показывают, что домашним хозяйствам необходим стимул для развития человеческого капитала. В качестве таких стимулов могут выступать программы дополнительного образования, бесплатные курсы по развитию компетенций. Показано, что низкодоходные слои населения не стремятся развивать человеческий капитал по сравнению с высокодоходными слоями населения, а тратят практически все свои доходы на потребительские расходы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Идентификация поведения работников на рынке труда. Месячные данные

*Бедная группа регионов. Город. Низкодоходные заемщики*

$$\hat{\xi}_1 = 0.65, \hat{\zeta}_1 = 0.15, \hat{\mu} = -0.5, \alpha = 0.924, \delta = 0.012101.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.08 раза за 2.5 мес. и составит 26.98 тыс. руб.

*Бедная группа регионов. Город. Высокодоходные заемщики*

$$\hat{\xi}_1 = 72, \hat{\zeta}_1 = 0.1472, \hat{\mu} = -0.3, \alpha = 0.8515, \delta = 0.011451.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.14 раза за 1.3 мес. и составит 49.51 тыс. руб.

*Бедная группа регионов. Село. Низкодоходные заемщики*

$$\hat{\xi}_1 = 94, \hat{\zeta}_1 = 0.1349, \hat{\mu} = -0.2, \alpha = 0.7989, \delta = 0.01096.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.05 раза за 2.9 мес. и составит 23.49 тыс. руб.

*Бедная группа регионов. Село. Высокодоходные заемщики*

$$\hat{\xi}_1 = 60, \hat{\zeta}_1 = 0.135, \hat{\mu} = -0.3, \alpha = 0.8562, \delta = 0.010459.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.14 раза за 1.6 мес. и составит 46.21 тыс. руб.

*Средняя группа регионов. Низкодоходные заемщики*

$$\hat{\xi}_1 = 40, \hat{\zeta}_1 = 0.157, \hat{\mu} = -0.6, \alpha = 0.7988, \delta = 0.011446.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.1 раза за 3.4 мес. и составит 32.43 тыс. руб.

*Средняя группа регионов. Высокодоходные заемщики*

$$\hat{\xi}_1 = 46, \hat{\zeta}_1 = 0.145, \hat{\mu} = -0.4, \alpha = 0.7768, \delta = 0.010835.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.11 раза за 2.7 мес. и составит 60.4 тыс. руб.

*Богатая группа регионов. Низкодоходные заемщики*

$$\hat{\xi}_1 = 60, \hat{\zeta}_1 = 0.1633, \hat{\mu} = -1, \alpha = 0.8912, \delta = 0.012493.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.07 раза за 3.2 мес. и составит 46.46 тыс. руб.  
*Богатая группа регионов. Высокодоходные заемщики*

$$\hat{\xi}_1 = 78, \hat{\xi}_2 = 0.16, \hat{\mu} = -0.8, \alpha = 0.7479, \delta = 0.010618.$$

Результат: заработная плата работника вырастет в 1.11 раза за 1.8 мес. и составит 96.5 тыс. руб.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ramsey F.P. A mathematical theory of savings // The Economic Journal. 1928. V. 152. № 38. P. 543–559.
2. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 6. С. 1034–1056.
3. Shananin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V. Consumer Loan Demand Modeling // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. 2021. CCIS. V. 1476. P. 417–428.
4. Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование рынка потребительского кредита в России в условиях санкций // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. С. 71–80.
5. Обследование бюджетов домашних хозяйств [Электронный ресурс] / Федеральная служба государственной статистики. 2015–2020. <https://obdx.gks.ru/> (дата обращения: 11.03.2023)
6. Trusov N. Identification of the household behavior modeling based on modified Ramsey model // Lobachevskii J.Math. 2023. V. 44. № 1. P. 454–468.
7. Lucas R. On the Mechanics of Economic Development // J. of Monetary Economics. 1988. V. 22. P. 3–42.
8. Дмитрук А.В., Кузькина Н.В. Теорема существования в задаче оптимального управления на бесконечном интервале времени // Матем. заметки. 2005. Т. 78. № 4. С. 503–518.
9. Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжмский А.В. Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67. № 2 (404). С. 3–64.
10. Асеев С.М., Вельвов В.М. Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике // Успехи матем. наук. 2019. Т. 74. № 6. С. 3–54.
11. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No.2022619524. “Анализ спроса на потребительский кредит в РФ”. Правообладатель: Трусов Николай Всеволодович. Заявка № 2022618580. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2022 г.