

ISSN 0044-4669

Том 63, Номер 3

Март 2023



# ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

[www.sciencejournals.ru](http://www.sciencejournals.ru)



---

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 63, номер 3, 2023 год

---

---

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Об интегральном тождестве и оценке отклонения приближенных решений для бигармонической задачи с препятствием

*К. О. Бесов*

351

Модели экономического роста с неоднородным дисконтированием

*К. Ю. Борисов, М. А. Пахнин*

355

Модель финансовой пирамиды с “квазирациональными” участниками

*Н. С. Кукушкин*

380

Анализ на основе математической модели механизмов стимулирования производственных инвестиций на несовершенном рынке капитала

*Н. К. Обросова, А. А. Шананин*

390

---

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Об одной обратной задаче для уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка

*Н. В. Трусов*

408

---

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Об обтекании цилиндра над неровным дном

*Н. Д. Байков, А. Г. Петров*

424

Влияние интенсивности ударной волны на развитие неустойчивости на шероховатых контактных границах трехслойной газовой системы

*В. В. Змушко, А. Н. Разин, А. А. Синельникова, А. Н. Щербаков*

436

“Быстрое” решение трехмерной обратной задачи квазистатической эластографии с помощью метода малого параметра

*А. С. Леонов, Н. Н. Нефедов, А. Н. Шаров, А. Г. Ягола*

449

Неоднородная задача для квазистационарных уравнений сложного теплообмена с условиями отражения и преломления

*А. Ю. Чеботарев*

465

---

## ИНФОРМАТИКА

Вектор Шепли однородных кооперативных игр

*В. А. Васильев*

474

Обзор теории стабильных паросочетаний и систем договоров

*В. И. Данилов*

491

О стабильных потоках и предпотоках

*А. В. Карзанов*

517

---

---



ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.95

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ТОЖДЕСТВЕ И ОЦЕНКЕ ОТКЛОНЕНИЯ  
ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ  
ЗАДАЧИ С ПРЕПЯТСТВИЕМ<sup>1)</sup>

© 2023 г. К. О. Бесов<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup> 119991 Москва, ул. Губкина 8, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия

<sup>2</sup> 050010 Алматы, ул. Пушкина, 125, Институт математики и математического моделирования  
Министерства образования и науки Республики Казахстан, Казахстан

\*e-mail: kbesov@mi-ras.ru

Поступила в редакцию 20.06.2022 г.  
Переработанный вариант 29.08.2022 г.  
Принята к публикации 14.11.2022 г.

В работе показано, что интегральное тождество, полученное в работе Д.Е. Апушкинской и С.И. Репина для приближенных решений бигармонической задачи с препятствием, удовлетворяющих поточечному ограничению на вторую дивергенцию, справедливо для произвольных приближенных решений. С помощью этого результата получена новая оценка меры отклонения приближенных решений от точных в случае, когда приближенные решения не удовлетворяют поточечному ограничению на вторую дивергенцию. Библ. 5.

**Ключевые слова:** вариационная задача, оценки отклонения от точного решения.

DOI: 10.31857/S0044466923030031, EDN: DXXEPD

В работе [1] рассмотрена задача минимизации функционала

$$J(v) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\Delta v|^2 - f v \right) dx \rightarrow \min, \quad v \in K, \quad (1)$$

на замкнутом выпуклом множестве

$$K = \{v \in H_0^2(\Omega): v \geq \phi \text{ п.в. в } \Omega\}, \quad H_0^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega): v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

где  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^d$  с липшицевой границей  $\partial\Omega$  и единичной внешней нормалью  $\nu$ ,  $f$  и  $\phi$  – заданные функции такие, что  $f \in L_2(\Omega)$ ,  $\phi \in C^2(\bar{\Omega})$  и  $\phi(x) \leq 0$  на  $\partial\Omega$ .

Известно, что задача (1) имеет единственное решение  $u \in H_{\text{loc}}^3(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\Omega)$  (см. [2], [3]), причем

$$(\Delta^2 u - f)(u - \phi) \equiv 0, \quad \Delta^2 u \geq f, \quad u \geq \phi \quad \text{в } \Omega.$$

Отметим сразу, что для того, чтобы множество  $K$  было непусто, на функцию  $\phi$  необходимо наложить дополнительное условие на границе  $\partial\Omega$  или вблизи нее. Иначе, например, в случае  $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}^1$  и  $\phi(x) = 1 - x^2$  для любой функции  $v \in H_0^2(\Omega)$  имеем  $v(x) = \int_{-1}^x (x - \xi)v''(\xi)d\xi = \alpha(x + 1)$  при  $x \rightarrow -1$ , что несовместимо с условием  $v \geq \phi$  п.в. в  $\Omega$ . В качестве упомянутого условия можно взять  $\phi(x) \leq C(\text{dist}(x, \partial\Omega))^2$  для  $x \in \Omega$ , где  $C > 0$  – некоторая константа, или  $\partial\phi/\partial\nu \geq 0$  на множестве  $\partial\Omega \cap \{x : \phi(x) = 0\}$ , если нормаль  $\nu$  определена во всех точках этого множества. То-

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP14869246).

где элементом множества  $K$  будет, например,  $C'\rho^2$  с подходящей константой  $C' > 0$ , где  $\rho$  – регуляризованное расстояние до  $\partial\Omega$  из [4, гл. VI, § 2, теорема 2].

В [1] вводится также пространство  $H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div}) = \{y \in L_2(\Omega; M_{\operatorname{sym}}^{d \times d}) : \operatorname{div} \operatorname{Div} y \in L_2(\Omega)\}$  функций со значениями в пространстве  $M_{\operatorname{sym}}^{d \times d} \cong \mathbb{R}^{d(d+1)/2}$  симметричных  $(d \times d)$ -матриц.

Для (единственного) решения  $u \in K$  задачи (1) в [1] получено следующее интегральное тождество.

**Теорема 1** (см. [1, теорема 2.1]). Пусть  $u \in K$  – решение задачи (1). Для любой функции  $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$  такой, что

$$\operatorname{div} \operatorname{Div} y^*(x) \geq f(x) \quad \text{при п.в. } x \in \Omega, \quad (2)$$

и любой функции  $v \in K$  справедливо тождество

$$\mu(v) + \mu^*(y^*) = \frac{1}{2} \|\nabla \nabla v - y^*\|_{L_2}^2 + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)(v - \phi) dx, \quad (3)$$

где

$$\mu(v) = \frac{1}{2} \|\nabla \nabla(u - v)\|_{L_2}^2 + \mu_{\phi}(v), \quad \mu^*(y^*) = \frac{1}{2} \|p^* - y^*\|_{L_2}^2 + \mu_{\phi}^*(y^*)$$

суть меры отклонения функций  $v$  и  $y^*$  от точных решений  $u$  и  $p^*$  задачи (1) и сопряженной задачи (см. [1]) соответственно,

$$\mu_{\phi}(v) = \int_{\{u=\phi\}} (\operatorname{div} \operatorname{Div} \nabla \nabla u - f)(v - u) dx - \int_{\Gamma_u} [\operatorname{Div} \nabla \nabla u \cdot \nu_{\Gamma_u}] (v - u) ds,$$

$[\cdot]$  – скачок соответствующей величины на границе  $\Gamma_u$  между областями  $\{u = \phi\}$  и  $\{u > \phi\}$ ,

$$\mu_{\phi}^*(y^*) = \int_{\{u>\phi\}} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)(u - \phi) dx.$$

Далее, как замечено в [1], условие (2) неудобно для приложений и хотелось бы иметь оценку величины  $\mu(v) + \mu^*(y^*)$  для любых функций  $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$ , а не только для  $y^*$ , удовлетворяющих условию (2). Такая оценка получена в [1] в следующем виде.

**Теорема 2** (см. [1, теорема 2.2]). Для любых функций  $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$  и  $v \in K$  и произвольного числа  $\beta \in (0, 1]$  имеем

$$\frac{1-\beta}{2} (\|\nabla \nabla(u - v)\|_{L_2}^2 + \|p^* - y^*\|_{L_2}^2) + \mu_{\phi}(v) + \mu_{\phi}^*(y^*) \leq \mathfrak{M}(v, y^*, \beta), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(v, y^*, \beta) = & \frac{1}{2} (1 + \beta) \|\nabla \nabla v - y^*\|_{L_2}^2 + \frac{3}{2\beta} C_F^2 \|(f - \operatorname{div} \operatorname{Div} y^*)_+\|_{L_2}^2 + \\ & + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)(v - \phi) dx, \end{aligned}$$

$C_F$  – константа из неравенства Фридрихса для области  $\Omega$ .

На самом деле несложное рассуждение показывает, что сама теорема 1 справедлива для любых функций  $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$  (т.е. ограничение (2) можно снять уже в теореме 1) и для любых функций  $v \in H_0^2(\Omega)$  (а не только для  $v \in K$ ).

**Теорема 1'.** Пусть  $u \in K$  – решение задачи (1) и  $p^*$  – решение сопряженной задачи. Тогда для любых функций  $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$  и  $v \in H_0^2(\Omega)$  справедливо тождество (3).

**Доказательство.** В силу плотности функций из  $C_0^\infty(\Omega)$  в  $H_0^2(\Omega)$  теорему достаточно доказать для  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Зафиксируем произвольные функции  $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$  и  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Пусть  $C > 0$  –

такая константа, что  $\phi(x) \leq C(\rho(x))^2$  (см. выше) и  $|v(x)| \leq C(\rho(x))^2$  при всех  $x \in \Omega$ . Рассмотрим функции  $v_0 = 3C\rho^2 \in H_0^2(\Omega)$  и  $y_0^* \in H(\Omega, \text{div Div})$  такую, что

$$\text{div Div } y_0^*(x) \geq 2|f(x)| + |\text{div Div } y^*(x)| \quad \text{при п.в. } x \in \Omega$$

(легко показать, что такая функция  $y_0^*$  существует, поскольку правая часть неравенства здесь из  $L_2(\Omega)$ ), и пусть  $v_t = v_0 - t(v_0 - v)$ ,  $y_t^* = y_0^* - t(y_0^* - y^*)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда  $v_t \in H_0^2(\Omega)$ ,  $y_t^* \in H(\Omega, \text{div Div})$ , причем при  $|t| < 1/2$  выполнены неравенство  $v_t \geq \phi$  и условие (2) для  $y_t^*$ . Поэтому в силу теоремы 1 для  $v_t$  и  $y_t^*$  при  $|t| < 1/2$  справедливо тождество (3). Но для  $v_t$  и  $y_t^*$  обе части тождества (3) являются многочленами второй степени по  $t$ . Равенство двух многочленов при всех  $|t| < 1/2$  означает тождественное равенство этих многочленов при всех  $t$ , а значит, и при  $t = 1$ . Но при  $t = 1$  имеем  $v_1 = v$  и  $y_1^* = y^*$ . Теорема доказана.

В частности, в модельной задаче из [1], разд. 3 для функции  $\tilde{n}^*$  условие (2) нарушено. Тем не менее тождество (3) сохраняется, что можно проверить, вычислив все интегралы (например, с помощью онлайн-калькулятора [5]):

$$\begin{aligned} \mu_\phi(v_1) &= \frac{160}{3} + \frac{896}{9} = \frac{1376}{9}, & \mu(v_1) &= \frac{5632}{45} + \frac{1376}{9} = \frac{12512}{45}, & \mu_\phi^*(\tilde{n}^*) &= 72, \\ \mu^*(n^*) &= \frac{872}{35} + 72 = \frac{3392}{35}, & \frac{1}{2} \|v - \tilde{n}^*\|_{L_2}^2 &= \frac{26368}{567}, & \int_{-1}^1 (\tilde{n}^{**} - f)(v_1 - \phi) dx &= \frac{133024}{405}, \end{aligned}$$

так что обе части тождества равны  $118\,112/315 \approx 374.9587$  (в вычисление интегралов в [1] вкрались некоторые ошибки, так что в неравенстве (3.6) из [1] свободные от  $\beta$  члены слева и справа должны быть равны  $374.9587\dots$ ).

Таким образом, в виде теоремы 1' мы получаем усиление обеих теорем 1 и 2 из [1]. Действительно, сравнение теорем 1' и 1 очевидно, а для сравнения теорем 1' и 2 достаточно заметить, что левая часть неравенства (4) строго меньше<sup>2</sup> левой части тождества (3) (коэффициенты при квадратах  $L_2$ -норм уменьшены на  $\beta/2$ ), а правая часть неравенства (4) строго больше правой части тождества (3) (помимо увеличения на  $\beta/2$  коэффициента при квадрате  $L_2$ -нормы, добавлен еще один неотрицательный член – квадрат нормы разности  $(f - \text{div Div } y^*)_+$  с коэффициентом  $3C_F^2/(2\beta)$ ).

Однако следует отметить еще один момент. Основная цель неравенства (4), как и тождества (3), – получить оценку отклонения приближенных решений от точных. При ограничении (2) (и  $v \in K$ ) все члены в левых частях (4) и (3) неотрицательны, поэтому все эти левые части или же только сумму квадратов  $L_2$ -отклонений (сумму в скобках в левой части (4)) можно рассматривать как меру отклонения, оценка которой (при использовании неравенства (4)) или же точное значение (при использовании тождества (3)) дается правой частью (неравенства (4) или тождества (3) соответственно). При этом все участвующие в оценке функции известны (в отличие от точных решений, которые в общем случае неизвестны).

Но при снятии ограничения (2) член  $\mu_\phi^*(y^*)$  может перестать быть неотрицательным, и его уже не следует включать в меру отклонения. Чтобы получить неравенство, которое можно использовать в приложениях, данный член нужно оценить снизу. Например, это можно сделать так<sup>3</sup>:

<sup>2</sup> Если только обе части тождества не обращаются в нуль, что возможно только при  $v \equiv u$  и  $y^* \equiv p^*$ . Но  $v$  и  $y^*$  рассматриваются как приближенные решения, которые мы выбираем и точность приближения которыми хотим оценить, поэтому выбор  $u \equiv v$  и  $p^* \equiv y^*$  означал бы фактически, что нам известны точные решения задачи (1) и сопряженной задачи.

<sup>3</sup> В конкретных приложениях может быть известна какая-то дополнительная информация о поведении точных решений, которая может помочь получить более точную оценку этого члена.

$$\begin{aligned}
\mu_\phi^*(y^*) &= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_+(u - \phi) dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_-(u - \phi) dx = \\
&= \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_+(u - \phi) dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_-(u - v) dx + \\
&+ \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_-(v - \phi) dx \geq \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_+(u - \phi) dx + \\
&+ \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_-(v - \phi) dx - \|(\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_-\|_{L_2} C_F^2 \|\nabla \nabla(u - v)\|_{L_2} \geq \\
&\geq \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_+(u - \phi) dx + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_-(v - \phi) dx - \\
&- \frac{C_F^4}{2\beta} \|(f - \operatorname{div} \operatorname{Div} y^*)_+\|_{L_2}^2 - \frac{\beta}{2} \|\nabla \nabla(u - v)\|_{L_2}^2,
\end{aligned}$$

где  $(a)_- = -(-a)_+ := \min\{a, 0\}$  и  $\beta > 0$  – произвольная константа. Поэтому из теоремы 1' получаем следующее неравенство.

**Теорема 2'.** Пусть  $u \in K$  – решение задачи (1) и  $p^*$  – решение сопряженной задачи. Тогда для любых функций  $y^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$  и  $v \in H_0^2(\Omega)$  и любого  $\beta \in (0, 1)$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \beta}{2} \|\nabla \nabla(u - v)\|_{L_2}^2 + \frac{1}{2} \|p^* - y^*\|_{L_2}^2 + \mu_\phi(v) + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_+(u - \phi) dx \leq \\
\leq \frac{1}{2} \|\nabla \nabla v - y^*\|_{L_2}^2 + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} y^* - f)_+(v - \phi) dx + \frac{C_F^4}{2\beta} \|(f - \operatorname{div} \operatorname{Div} y^*)_+\|_{L_2}^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что здесь уже в левой части все члены неотрицательны (при условии  $v \in K$ ) в отличие от неравенства (4) в теореме 2, где знак члена  $\mu_\phi^*(y^*)$  априори неизвестен. При этом левая часть неравенства (5) заведомо не меньше левой части неравенства (4). Поэтому в качестве меры отклонения функций  $v \in K$  и  $y^*$  от точных решений  $u$  и  $p^*$  соответственно более естественно рассматривать левую часть неравенства (5), нежели левую часть неравенства (4) из теоремы 2. Или же в качестве такой меры отклонения можно рассматривать только первые два члена в левой части неравенства (5). Тогда неравенство (5) немедленно дает оценку такой меры через известные функции (поскольку третий и четвертый члены в левой части (5) заведомо неотрицательны для  $v \in K$ ).

Отметим также, что если выполнено условие (2), то последний член в (5) обращается в нуль и, устремляя  $\beta$  к нулю в (5), получаем тождество (3) (точнее, получаем неравенство, у которого обе части совпадают с соответствующими частями тождества (3)). Таким образом, можно сделать вывод, что чем меньше  $L_2$ -норма функции  $(f - \operatorname{div} \operatorname{Div} y^*)_+$  (которая фактически показывает, насколько сильно нарушено условие (2)), тем более точную оценку отклонения дает неравенство (5) (при подходящем выборе  $\beta$ ).

Автор выражает благодарность Андрею Геннадьевичу Куликовскому и рецензенту за полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апушкинская Д.Е., Репин С.И. Бигармоническая задача с препятствием: гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближенных решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 11. С. 1881–1897.
2. Caffarelli L.A., Friedman A. The obstacle problem for the biharmonic operator // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. 1979. V. 6. P. 151–184.
3. Frehse J. On the regularity of the solution of the biharmonic variational inequality // Manuscr. Math. 1973. V. 9. P. 91–103.
4. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
5. Scherfgen D. Integral calculator. <https://www.integral-calculator.com>.

---

---

ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ

---

---

УДК 519.86

МОДЕЛИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА  
С НЕОДНОРОДНЫМ ДИСКОНТИРОВАНИЕМ

© 2023 г. К. Ю. Борисов<sup>1,2,\*</sup>, М. А. Пахнин<sup>1,2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 191187 Санкт-Петербург, Гагаринская ул., 6/1А, ЕУСПб, Россия

<sup>2</sup> 190013 Санкт-Петербург, Серпуховская ул., 38, ИПРЭ РАН, Россия

\*E-mail: kirill@eu.spb.ru

\*\*E-mail: mpakhnin@eu.spb.ru

Поступила в редакцию 08.08.2022 г.  
Переработанный вариант 08.08.2022 г.  
Принята к публикации 17.11.2022 г.

Предлагается обзор теоретических моделей экономического роста, в которых потребители различаются по своим субъективным коэффициентам дисконтирования. Описывается устройство равновесных траекторий в таких моделях, их динамика и сходимости к стационарным равновесиям, а также взаимосвязь с оптимальными по Парето траекториями. Обсуждаются модели с социально обусловленными коэффициентами дисконтирования, в которых межвременные предпочтения формируются эндогенно, а также рассматриваются основные трудности, связанные с общественным выбором в условиях неоднородных коэффициентов дисконтирования. Представленные в статье модели проливают свет на внутренние механизмы рыночной экономики, которые приводят к делению общества на богатых и бедных. Библ. 45.

**Ключевые слова:** экономический рост, неравенство, неоднородные агенты, дисконтирование, голосование, общее равновесие.

**DOI:** 10.31857/S0044466923030043, **EDN:** DYFCWG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Базовым инструментом для анализа долгосрочного экономического роста является модель Рамсея [1]. Изначально она была предложена как модель оптимального роста, в которой центральный планировщик решал задачу разделения дохода на потребление и инвестиции путем максимизации на бесконечном горизонте планирования целевой функции общества или, что то же, функции полезности так называемого репрезентативного потребителя. Модель Рамсея оказалась крайне удобной, поскольку допускала множество переформулировок и обобщений. Так, например, исходная модель была интерпретирована как модель общего равновесия [2], [3], в которой действуют две фундаментальные теоремы экономики благосостояния.

Ключевую роль в модели Рамсея играют межвременные предпочтения репрезентативного потребителя, которые показывают степень “нетерпеливости” общества. Межвременные предпочтения задаются с помощью коэффициента дисконтирования, который лежит в пределах между нулем и единицей. Равенство этого коэффициента нулю означает абсолютную нетерпеливость или “близорукость”, при которой будущее потребление не имеет никакой ценности для общества с точки зрения сегодняшнего дня. Напротив, равенство этого коэффициента единице означает абсолютную терпеливость, когда единица полезности от любого потребления в будущем так же важна, как и единица полезности от сегодняшнего потребления.

Использование репрезентативного потребителя в моделях макроэкономики и экономического роста оказывается очень удобным, поскольку существенно упрощает анализ. Тем не менее зачастую это упрощение наносит существенный вред исследованию, поскольку ведет к совершенно неадекватным выводам. Люди различаются по многим параметрам, но в контексте экономического роста ключевую роль играет их различие по степени своей нетерпеливости, которое при построении той или иной модели должно находить свое отражение в предположении о неоднородных коэффициентах дисконтирования агентов.

Еще в начале XIX века шотландский экономист Джон Рэй [4] выдвинул гипотезу о том, что богатство любого индивида связано с его желанием сберегать. По наблюдениям Рэя, члены общества, чье желание накапливать было ниже некоторого среднего показателя для данного общества, постепенно тяготели к бедности. И наоборот, люди с желанием накопления, которое было выше среднего, постепенно становились богаче. Тем самым, капитал перераспределялся от нетерпеливых потребителей к более терпеливым. Чуть позже, в начале двадцатого века, идеи Рэя были развиты Ирвингом Фишером [5].

Наконец, Фрэнк Рамсей в своей классической работе [1] рассмотрел модель с несколькими типами агентов, которые различались своими коэффициентами дисконтирования. Он предположил, что в стационарном равновесии весь капитал в экономике будет принадлежать самому терпеливому агенту. Уровень потребления самого терпеливого агента будет максимально возможным, а все остальные, относительно нетерпеливые агенты, будут потреблять лишь необходимый минимум. Таким образом, Рамсей на математическом языке сформулировал идею о том, что различие в межвременных предпочтениях агентов в экономике ведет к сильному неравенству в распределении дохода и богатства. Данное утверждение в литературе называется гипотезой Рэя–Фишера–Рамсея.

В современной литературе определенный интерес к моделям с неоднородным дисконтированием появился после работ Трута Рейдера [6], [7], Роберта Беккера [8] и Трумана Бьюли [9]. Работ, посвященных таким моделям, довольно много, однако мейнстримом они пока не стали. Настоящая статья является выборочным обзором моделей экономического роста с неоднородным дисконтированием. Мы делаем акцент на работах, связанных с гипотезой Рэя–Фишера–Рамсея, а также обсуждаем недавние результаты относительно агрегирования неоднородных межвременных предпочтений в таких моделях (см. также [10–12]).

Прежде чем переходить к описанию теоретических моделей, надо сказать несколько слов об эмпирических исследованиях нетерпеливости. Современные работы убедительно демонстрируют на практике, что разные люди и разные общества имеют разные коэффициенты дисконтирования. Так, субъективные коэффициенты дисконтирования сильно различаются между странами. Например, измеренный медианный коэффициент дисконтирования изменяется в пределах от 0.88 в Австралии до 0.39 в Боснии и Герцеговине (см. [13]). В то же время терпеливость сильнее различается внутри стран, чем между странами. В [14] показано, что межстрановые различия объясняют только 13.5% общей вариации в терпеливости, в то время как на внутристрановые различия приходится оставшиеся 86.5%. Терпеливость людей положительно коррелирует с экономическими показателями. Она объясняет около 40% межстранового различия в доходах, а увеличение терпеливости на одно стандартное отклонение повышает доход на душу населения на величину от 43 до 78% (см. [15]). Таким образом, эмпирические данные свидетельствуют о том, что неоднородность в межвременных предпочтениях необходимо принимать во внимание в экономическом моделировании.

Структура дальнейшей работы такова. В разд. 2 описывается устройство моделей рамсеевского типа с неоднородным дисконтированием и определяется равновесие. Разд. 3 посвящен равновесной динамике и асимптотике равновесных траекторий, а разд. 4 обсуждает устройство оптимальных по Парето траекторий в таких моделях. В разд. 5 рассматривается модель, в которой субъективные коэффициенты дисконтирования являются не экзогенно заданными, а социально обусловленными. В разд. 6 описывается модель с общественным потреблением и затрагиваются вопросы общественного выбора и голосования. Разд. 7 содержит некоторые заключительные замечания.

## 2. МОДЕЛИ РАМСЕЕВСКОГО ТИПА С НЕОДНОРОДНЫМ ДИСКОНТИРОВАНИЕМ

В данном разделе мы описываем устройство моделей рамсеевского типа с неоднородным дисконтированием. В зависимости от предположений относительно задачи, которую решает потребитель, выделяются два типа моделей: модель Рамсея–Бьюли и модель Рамсея–Беккера. Мы вводим определение равновесия в обеих моделях и обсуждаем существование равновесных траекторий.

### 2.1. Общие предпосылки

Опишем основные строительные блоки моделей рамсеевского типа с неоднородным дисконтированием. Время дискретно ( $t = 0, 1, \dots$ ). В экономике производится единственный товар, ко-

торый в каждом периоде времени можно потреблять или инвестировать. Производственный сектор представлен одним репрезентативным производителем, а население состоит из  $N > 1$  различных бесконечно живущих потребителей (агентов).

Технология репрезентативного производителя задается неоклассической положительно-однородной производственной функцией  $F(K, L)$ , заданной на  $\mathbb{R}_+^2$ . Здесь  $K$  – количество используемого капитала, а  $L$  – затраты труда. Далее мы будем пользоваться производственной функцией в интенсивной форме, которая определяется равенством

$$f(k) = F(k, 1).$$

Если интерпретировать величину  $k = K/L$  как капиталовооруженность труда, то  $f(k) = F(K, L)/L$  представляет собой производительность труда (в зависимости от капиталовооруженности). Мы предполагаем, что каждый агент обладает одной единицей рабочей силы. Поэтому в предположении, что рабочая сила используется полностью ( $L = N$ ),  $k = K/N$  представляет собой капитал на душу населения, а  $f(k) = F(K, N)/N$  – это выпуск товара на душу населения.

Мы предполагаем, что  $f(k)$  обладает следующими стандартными свойствами:

$$f(0) = 0, \quad f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0, \quad \lim_{k \rightarrow 0} f'(k) = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0.$$

Кроме того, мы предполагаем, что капитал полностью выбывает в течение одного периода времени, а производственный сектор действует в условиях совершенной конкуренции и максимизирует прибыль. Тем самым, в состоянии равновесия ставка процента  $r$  определяется предельной производительностью капитала, а ставка заработной платы  $w$  – предельной производительностью труда:

$$1 + r = f'(k), \quad w = f(k) - f'(k)k.$$

Что касается потребителей, то предпочтения агента  $i = 1, \dots, N$  описываются межвременной функцией полезности

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t u_i(c_t^i), \tag{2.1}$$

где  $c_t^i$  – потребление агента  $i$  в периоде  $t$ ,  $\beta_i$  – его коэффициент дисконтирования, а  $u_i(c)$  – мгновенная (краткосрочная) функция полезности, которая задана на  $\mathbb{R}_+$ , дважды непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}_{++}$  и, кроме того,

$$u_i'(c) > 0, \quad u_i''(c) < 0, \quad \lim_{c \rightarrow 0} u_i'(c) = +\infty, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} u_i'(c) = 0.$$

Большинство результатов, которые мы описываем в этой статье, верны с небольшими модификациями и для случая, когда функции  $u_i(c)$  для всех  $i$  заданы на  $\mathbb{R}_{++}$  и удовлетворяют некоторым дополнительным предположениям, которым, в частности, удовлетворяют так называемые функции с постоянной эластичностью межвременного замещения вида

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\eta} - 1}{1-\eta}, & 1 \neq \eta > 0; \\ \ln c, & \eta = 1. \end{cases}$$

Если все коэффициенты дисконтирования  $\beta_i$  одинаковы, то разница в поведении агентов незначительна, и модель по своим свойствам оказывается близкой к модели с репрезентативным потребителем. Далее мы будем считать, если в явном виде не оговорено иное, что агенты имеют различные коэффициенты дисконтирования и упорядочены по этим коэффициентам, причем первый агент является самым терпеливым:

$$1 > \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_N > 0. \tag{2.2}$$

## 2.2. Задача потребителя

Предположим, что в периоде времени  $t$  агент  $i$  получает доход в виде заработной платы  $w_t$  и, кроме того, в его распоряжении имеются накопления в размере  $(1 + r_t)s_{t-1}^i$ , где  $s_{t-1}^i$  — это сбережения, которые он сделал в периоде  $t - 1$ , а  $r_t$  — ставка процента в периоде  $t$ . В этом случае средства, которыми располагает агент  $i$  в периоде  $t$ , составляют сумму  $(1 + r_t)s_{t-1}^i + w_t$ , которую он делит на текущее потребление  $c_t^i$  и сбережения  $s_t^i$ . Иными словами, бюджетное ограничение этого агента в рассматриваемом периоде имеет вид

$$c_t^i + s_t^i = (1 + r_t)s_{t-1}^i + w_t. \quad (2.3)$$

Начальные сбережения в размере  $s_{-1}^i = \hat{s}_{-1}^i$  заданы. Неотрицательные и ненулевые последовательности  $\{1 + r_t\}_{t=0}^{\infty}$  и  $\{w_t\}_{t=0}^{\infty}$  принимаются агентом как заданные и известные (как обычно, нами предполагается совершенное предвидение цен со стороны экономических агентов).

Основное предположение о поведении потребителей состоит в том, что в периоде 0 каждый агент  $i$  решает задачу максимизации своей межвременной функции полезности (2.1) при бюджетных ограничениях (2.3), которые должны выполняться для всех  $t = 0, 1, \dots$ , а также некоторых дополнительных ограничениях, которые мы ниже обсудим.

Дело в том, что если допустить возможность неограниченно брать в долг, то задача потребителя окажется бессмысленной: в этом случае агент сможет обеспечить себе любой уровень потребления в любом периоде за счет займов, проценты по которым будут выплачены посредством еще больших займов в следующих периодах. Для того чтобы исключить возможность строительства таких финансовых пирамид и сформулировать содержательную задачу потребителя, можно поступить двумя способами, которые приводят к двум разным типам моделей.

Во-первых, можно позволить агентам брать в долг, т.е. допустить отрицательные сбережения, но добавить к задаче потребителя так называемое условие недопустимости строительства финансовых пирамид (No-Ponzi Game condition):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s_t^i}{(1 + r_1) \cdots (1 + r_t)} \geq 0.$$

Это условие требует, чтобы приведенная к начальному периоду времени величина долга на бесконечности не оказалась положительной. При этом, что любопытно, сам долг может расти, но только темпом, меньшим, чем ставка процента. В этом случае задача потребителя для агента  $i$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u_t(c_t^i), \\ & \text{s.t. } c_t^i + s_t^i = (1 + r_t)s_{t-1}^i + w_t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad s_{-1}^i = \hat{s}_{-1}^i, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s_t^i}{(1 + r_1) \cdots (1 + r_t)} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Этот способ восходит к Труману Бьюли [9], поэтому получающуюся в результате модель уместно называть *моделью Рамсея–Бьюли*.

Заметим, что с учетом условия No-Ponzi Game в задаче (2.4), последовательность бюджетных ограничений агента можно переписать в виде единого межвременного бюджетного ограничения на бесконечном горизонте:

$$c_0^i + \frac{c_1^i}{1 + r_1} + \dots + \frac{c_t^i}{(1 + r_1) \cdots (1 + r_t)} + \dots \leq (1 + r_0)\hat{s}_{-1}^i + w_0 + \frac{w_1}{1 + r_1} + \dots + \frac{w_t}{(1 + r_1) \cdots (1 + r_t)} + \dots$$

Это неравенство означает, что приведенный к начальному периоду времени поток потреблений агента  $i$  не должен превосходить его совокупного дохода на протяжении всей жизни (также приведенного к периоду 0), состоящего из начальных сбережений и потока заработных плат.

Как видно, задача (2.4) является обыкновенной бесконечномерной задачей максимизации полезности на бюджетном ограничении. Для нее необходимыми условиями первого порядка являются равенства

$$\beta_t(1 + r_{t+1})u'_i(c_{t+1}^i) = u'_i(c_t^i), \tag{2.5}$$

которые должны выполняться в каждом периоде времени  $t = 0, 1, \dots$

Во-вторых, можно добавить к задаче потребителя условие неотрицательности сбережений в каждом периоде. Содержательно это означает отказ от условия полноты рынка капитала: агенты не могут брать в долг под свои будущие заработные платы. В этом случае задача потребителя для агента  $i$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t^t u'_i(c_t^i), \\ \text{s.t. } & c_t^i + s_t^i = (1 + r_t)s_{t-1}^i + w_t, \quad s_t^i \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, \quad s_{-1}^i = \hat{s}_{-1}^i. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Этот подход использовал Роберт Беккер [8], поэтому данную модель мы будем называть *моделью Рамсея–Беккера*.

Решение задачи (2.6) удовлетворяет условию отсутствия арбитража в каждом периоде:

$$\beta_t(1 + r_{t+1})u'_i(c_{t+1}^i) \leq u'_i(c_t^i) \quad (= \text{если } s_t^i > 0). \tag{2.7}$$

Действительно, пусть для данных цен факторов производства некоторая последовательность  $\{c_t^i, s_t^i\}_{t=0}^{\infty}$  максимизирует полезность агента  $i$ . Тогда полезность не может быть увеличена за счет увеличения сбережений на бесконечно малую величину в периоде  $t$  (однопериодного необратимого арбитража). Предельные издержки от этой операции (уменьшение потребления в периоде  $t$  на  $u'_i(c_t^i)$ ) обязаны быть не ниже, чем предельная выгода (увеличение потребления в периоде  $t + 1$ ,  $u'_i(c_{t+1}^i)$ ), за счет получения дополнительного дохода от сбережений по ставке процента  $1 + r_{t+1}$ ), приведенная к периоду  $t$  (посредством коэффициента дисконтирования  $\beta_t$ ). Если сбережения потребителя в периоде  $t$  положительны, то точно такое же рассуждение применимо и к уменьшению сбережений на бесконечно малую величину в период времени  $t$ . Тогда неравенство в условии (2.7) справедливо и в обратную сторону, так что условие максимизации полезности принимает вид уравнения Эйлера:

$$\beta_t(1 + r_{t+1})u'_i(c_{t+1}^i) = u'_i(c_t^i),$$

которое, как легко заметить, совпадает с условием (2.5).

Кроме того, решение задачи (2.6) должно удовлетворять условию трансверсальности, которое в данном случае имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \beta_t^t u'_i(c_t^i) s_t^i = 0. \tag{2.8}$$

Обсудим условие (2.8). Про задачу с бесконечным горизонтом планирования можно думать как о пределе задач с конечным горизонтом планирования. Очевидно, что решение задачи с конечным горизонтом планирования  $T$  удовлетворяет условию  $s_T^i = 0$ : так как периода  $T + 1$  не будет, сберегать в периоде  $T$  ничего не нужно. Оказывается, что в пределе при  $T \rightarrow \infty$ , условие  $s_T^i = 0$  превращается в условие (2.8), которое содержательно означает, что полезность агента не может быть увеличена за счет приобретения дополнительной единицы капитала в периоде  $t$  и постоянного хранения этой единицы капитала (арбитража с открытым концом).

Отметим, что в случае с условием трансверсальности требуется проявлять некоторую осторожность. Хорошо известно, что условия (2.7), (2.8) являются достаточными условиями решения задачи потребителя (2.6). В то же время необходимость условия трансверсальности является открытым и сложным вопросом, который нужно для каждой модели проверять отдельно. В нашем случае, в [16] показано, что для рассматриваемой задачи условия (2.7), (2.8) являются также и необходимыми условиями.

### 2.3. Равновесные траектории

Когда в рамках моделей рамсеевского типа идет речь о конкурентном равновесии, предполагается, что агенты обладают совершенным предвидением ставок процента и заработных плат. Производственный сектор в каждом периоде времени решает задачу о максимизации прибыли и формирует спрос на капитал и рабочую силу. В потребительском секторе каждый агент решает задачу о максимизации своей межвременной функции полезности (2.1), определяя планируемые последовательности потребления и сбережений (предложения капитала). В модели Рамсея–Бьюли задача потребителя имеет вид (2.4), а в модели Рамсея–Беккера – вид (2.6). Это единственное различие между двумя моделями, однако, как мы увидим, оно играет существенную роль, поскольку две модели приводят к различным выводам. В равновесии в каждом периоде времени спрос на капитал равен предложению капитала, а спрос на рабочую силу совпадает с предложением рабочей силы. Формально говоря, равновесие определяется следующим образом.

Предположим, что к началу периода времени 0 каждый агент  $i = 1, \dots, N$  обладает начальными сбережениями  $\hat{s}_{-1}^i$ . Суммарные начальные сбережения формируют начальный запас капитала:  $N\hat{k}_0 = \sum_{i=1}^N \hat{s}_{-1}^i > 0$ . Равновесной траекторией в модели Рамсея–Бьюли, исходящей из начального состояния  $(\hat{s}_{-1}^i)_{i=1}^N$ , называется последовательность

$$\{k_t^*, 1 + r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty,$$

которая характеризуется следующими условиями.

**Условие 1.** Для каждого  $i$  последовательность  $\{c_t^{i*}, s_t^{i*}\}_{t=0}^\infty$  является решением задачи (2.4) при  $1 + r_t = 1 + r_t^*$  и  $w_t = w_t^*$ ,  $t = 0, 1, \dots$

**Условие 2.**  $1 + r_t^* = f'(k_t^*)$ ,  $t = 0, 1, \dots$

**Условие 3.**  $w_t^* = f(k_t^*) - f'(k_t^*)k_t^*$ ,  $t = 0, 1, \dots$

**Условие 4.**  $Nk_0^* = \sum_{i=1}^N \hat{s}_{-1}^i$ ,  $Nk_{t+1}^* = \sum_{i=1}^N s_t^{i*}$ ,  $t = 0, 1, \dots$

Равновесной траекторией в модели Рамсея–Беккера, исходящей из начального состояния  $(\hat{s}_{-1}^i)_{i=1}^N$  (где  $\hat{s}_{-1}^i \geq 0$  для всех  $i$ ), называется последовательность  $\{k_t^*, 1 + r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$ , характеризующаяся следующим образом.

**Условие 1'.** Для каждого  $i$  последовательность  $\{c_t^{i*}, s_t^{i*}\}_{t=0}^\infty$  является решением задачи (2.6) при  $1 + r_t = 1 + r_t^*$  и  $w_t = w_t^*$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , и условиями 2–4.

Заметим, что на равновесной траектории как в модели Рамсея–Бьюли, так и в модели Рамсея–Беккера, автоматически имеет место равновесие на рынке произведенного продукта:

$$\sum_{i=1}^N (c_t^{i*} + s_t^{i*}) = Nf(k_t^*),$$

что является следствием закона Вальраса.

### 2.4. Существование равновесных траекторий

Первый вопрос, на который надо отвечать после того как введено понятие равновесия, – это *вопрос о существовании равновесия*. Существует несколько различных способов доказывать теоремы существования в моделях общего экономического равновесия, но все они в конечном итоге сводятся к применению теорем о неподвижной точке. В конечномерном случае доказательство теоремы существования обычно не составляет особой проблемы.

Формально говоря, модели рамсеевского типа являются моделями с бесконечным числом товаров и поэтому они представляют собой бесконечномерные модели общего экономического равновесия. В конечномерном случае ситуация несколько сложнее, чем в конечномерном. Но и тут уже наработан достаточный опыт. При сделанных предположениях положительный ответ на вопрос о существовании равновесной траектории, исходящей из заданного начального состояния, для модели Рамсея–Бьюли можно дать, если наложить на начальные сбережения агентов некоторые разумные ограничения. Важно, чтобы сбережения не оказались “слишком” отри-

цательными, например, достаточно, чтобы они были положительными. Для доказательства теоремы существования в данном случае можно позаимствовать несложное рассуждение из [17].

Доказательство существования равновесных траекторий для модели Рамсея–Беккера является несколько более сложным, чем в случае модели Рамсея–Бьюли, но оно тоже опирается на теорему о неподвижной точке (см., например, [18]).

### 3. РАВНОВЕСНАЯ ДИНАМИКА

В данном разделе мы рассматриваем сходимость равновесных траекторий в моделях Рамсея–Бьюли и Рамсея–Беккера к соответствующим стационарным равновесиям, и обсуждаем взаимосвязь стационарных равновесий с гипотезой Рэя–Фишера–Рамсея.

#### 3.1. Модель Рамсея с репрезентативным потребителем

Заметим, что когда агент только один, никакой разницы между моделью Рамсея–Бьюли и моделью Рамсея–Беккера нет. Обе модели сводятся к равновесной версии модели Рамсея с репрезентативным потребителем. Более того, при заданном начальном состоянии (в случае репрезентативного потребителя оно определяется начальными сбережениями  $\hat{s}_{-1} > 0$ , которые совпадают с начальным запасом капитала,  $\hat{k}_0 = \hat{s}_{-1}$ ) равновесная траектория в такой модели по существу совпадает с оптимальной траекторией, т.е., с решением задачи:

$$\begin{aligned} \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \\ \text{s.t. } c_t + k_{t+1} = f(k_t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad k_0 = \hat{k}_0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $\beta$  – коэффициент дисконтирования репрезентативного потребителя, а  $u(c)$  – его мгновенная функция полезности.

Таким образом, в модели Рамсея с репрезентативным потребителем вопрос об асимптотическом поведении равновесных траекторий сводится к вопросу о том, как ведут себя оптимальные траектории (решения задачи 3.1). Хорошо известно, что вне зависимости от начального состояния на оптимальной траектории  $\{c_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$  капиталовооруженность  $k_t$  сходится при  $t \rightarrow \infty$  к стационарному значению  $k^\beta$ , которое вместе с соответствующей ставкой процента  $r^\beta$  однозначно задается следующими соотношениями:

$$\frac{1}{1 + r^\beta} = \beta, \quad 1 + r^\beta = f'(k^\beta).$$

Эти соотношения составляют суть так называемого *модифицированного золотого правила*, согласно которому стационарная равновесная ставка процента  $r^\beta$  полностью определяется коэффициентом дисконтирования репрезентативного потребителя, а стационарная равновесная капиталовооруженность, в свою очередь, определяется ставкой процента.

В дальнейшем под  $k^\beta$  мы всегда будем понимать капиталовооруженность, которая соответствует модифицированному золотому правилу с коэффициентом дисконтирования  $\beta$ .

#### 3.2. Асимптотика равновесных траекторий в модели Рамсея–Бьюли

Естественно предположить, что и в рассматриваемых нами моделях равновесные траектории сходятся к стационарным равновесиям.

*Стационарным равновесием* в модели рамсеевского типа с неоднородным дисконтированием (как в модели Рамсея–Бьюли, так и в модели Рамсея–Беккера) называется набор  $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$ , такой что последовательность  $\{k_t^*, 1 + r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^{\infty}$ , где для всех  $t = 0, 1, \dots$ ,

$$k_t^* = k^*, \quad 1 + r_t^* = 1 + r^*, \quad w_t^* = w^*, \quad c_t^{i*} = c^{i*}, \quad s_t^{i*} = s^{i*}, \quad i = 1, \dots, N,$$

является равновесной траекторией в этой модели, исходящей из начального состояния  $(s^{i*})_{i=1}^N$ .

Заметим, что в стационарном равновесии для любого агента  $i$  выполняется равенство

$$c^{i*} = r^* s^{i*} + w^*.$$

Оно говорит о том, что агент тратит на потребление весь процентный доход от своих сбережений, равный  $r^* s^{i*}$ , и всю свою заработную плату  $w^*$ . Тем самым, чем богаче агент, тем выше его уровень потребления (если, конечно,  $r^* > 0$ ).

Несложно проверить, что в модели Рамсея–Бьюли существует стационарное равновесие  $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$ , которое однозначно задается следующими соотношениями:

$$k^* = k^{\beta_1}, \quad (3.2)$$

$$1 + r^* = f'(k^*) \left( = \frac{1}{\beta_1} \right), \quad (3.3)$$

$$w^* = f(k^*) - f'(k^*)k^*, \quad (3.4)$$

$$s^{1*} = Nk^* + (N - 1) \frac{w^*}{r^*}, \quad (3.5)$$

$$r^* s^{i*} = -w^*, \quad i = 2, \dots, N, \quad (3.6)$$

$$c^{1*} = N(f(k^*) - k^*), \quad (3.7)$$

$$c^{i*} = 0, \quad i = 2, \dots, N. \quad (3.8)$$

Равенство (3.2) означает, что стационарная равновесная капиталовооруженность задается модифицированным золотым правилом, но только в данном случае  $k^*$  однозначно определяется коэффициентом дисконтирования самого терпеливого агента  $\beta_1$ . Соотношения (3.3), (3.4) показывают, что в стационарном равновесии цены совпадают с предельными продуктами факторов производства. Соотношения (3.5), (3.6) говорят о том, что в стационарном равновесии все агенты, за исключением самого терпеливого, имеют такие долги, что вся их заработная плата уходит на выплату процентов по их долгам. Держателем всех этих долгов является самый терпеливый агент, который одновременно является и собственником всего капитала. Соотношения (3.7), (3.8) означают, что в стационарном равновесии позволить себе положительный уровень потребления может только самый терпеливый агент; именно ему достается все потребление в экономике, тогда как все остальные агенты имеют нулевой уровень потребления.

Как видно, в стационарном равновесии, задаваемом соотношениями (3.2)–(3.8), множество всех агентов делится на два класса – “богатых” и “бедных”, – причем к классу “богатых” принадлежит только самый терпеливый агент.

Является ли охарактеризованное выше стационарное равновесие единственным? Формально говоря, ответ на этот вопрос отрицательный. В модели Рамсея–Бьюли существуют и другие стационарные равновесия: для любого  $m = 1, \dots, N$  существует такое стационарное равновесие  $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$ , в котором только агент  $m$  имеет положительное потребление; это

стационарное равновесие задается следующими соотношениями:  $k^* = k^{\beta_m}$ ,  $1 + r^* = f'(k^*)$ ,  $w^* = f(k^*) - f'(k^*)k^*$ ,  $s^{m*} = Nk^* + (N - 1) \frac{w^*}{r^*}$ ,  $r^* s^{i*} = -w^*$ ,  $i \neq m$ ,  $c^{m*} = N(f(k^*) - k^*)$ ,  $c^{i*} = 0$ ,

$i \neq m$ . Однако при  $m \neq 1$  такое стационарное равновесие не представляет особого интереса для описания асимптотики равновесных траекторий.

Если начальное состояние  $(\hat{s}_{-1}^i)_{i=1}^N$  таково, что сбережения всех агентов не очень малы (например, неотрицательны), то на равновесной траектории  $\{k_t^*, 1 + r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$ , исходящей из этого начального состояния, потребление всех агентов положительно во все периоды времени, а сама эта траектория сходится именно к стационарному равновесию, задаваемому соотношениями (3.2)–(3.8). Отметим, что равновесная траектория не сойдется к стационарному равновесию, задаваемому соотношениями (3.2)–(3.8), только в том случае, если на этой траектории

потребление агента 1 с самого начала в точности равняется нулю, что возможно только в случае специально подобранных начальных сбережений.

Ключевым здесь является тот факт, что потребление всех агентов, за исключением агента 1, сходится к нулю. Это напрямую следует из условий первого порядка в задаче потребителя (2.4).

Действительно, с учетом (2.5), если  $c_t^{i*} > 0$  для всех  $i$  и  $t$ , то для  $i \neq 1$  мы имеем

$$\frac{u'_i(c_{t+1}^{i*})}{u'_i(c_t^{i*})} = \frac{\beta_1 u'_i(c_t^{i*})}{\beta_i u'_i(c_t^{i*})}, \quad t = 0, 1, \dots$$

Поскольку, очевидно, последовательность  $\{c_t^{1*}\}_{t=0}^\infty$  ограничена сверху и, значит, последовательность  $\{u'_1(c_t^{1*})\}_{t=0}^\infty$  отделена от нуля, мы заключаем, что  $c_t^{i*} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Если предположить, что для всех  $i$  мгновенные функции полезности  $u_i(c)$  обладают тем свойством, что  $u'_i(0) < +\infty$ , то потребление всех агентов, за исключением самого терпеливого, не просто сойдется к нулю, а станет с некоторого периода времени в точности равным нулю.

Указанные свойства асимптотического поведения равновесных траекторий в модели Рамсея–Бьюли вызывают некоторые сомнения в дескриптивной значимости этой модели. Совершенно непонятно, почему агенты, потребление которых стремится с течением времени к нулю, будут продолжать осуществлять предложение на рынке труда.

### 3.3. Равновесная динамика в модели Рамсея–Беккера

Поскольку модель Рамсея–Бьюли не очень удовлетворительна с дескриптивной точки зрения, более широкое распространение получила модель Рамсея–Беккера (см. обзор [10]), которая, за счет невозможности заимствований, обеспечивает положительное потребление для каждого агента в каждом периоде.

В модели Рамсея–Беккера естественным кандидатом на роль стационарного равновесия является набор  $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$ , который однозначно задается соотношениями (3.2)–(3.4) вместе с соотношениями

$$\begin{aligned} s^{1*} &= Nk^*, \\ s^{i*} &= 0, \quad i = 2, \dots, N, \\ c^{1*} &= N(f(k^*) - k^*) - (N - 1)w^* (= r^* Nk^* + w^*), \\ c^{i*} &= w^*, \quad i = 2, \dots, N. \end{aligned}$$

В [8] показано, что этот набор действительно является стационарным равновесием в модели Рамсея–Беккера, и, более того, единственным стационарным равновесием. Как мы видим, в стационарном равновесии тоже происходит деление на “богатых” и “бедных”, но не в такой радикальной форме, как в модели Рамсея–Бьюли: в то время как весь капитал принадлежит “богатым” (наиболее терпеливому агенту), все остальные агенты все-таки не “умирают с голоду”, а проедают свою заработную плату, что как раз и соответствует гипотезе Рэя–Фишера–Рамсея.

Здесь следует указать, как устроены стационарные равновесия в модели Рамсея–Беккера в случае, когда самых терпеливых агентов несколько, т.е., если коэффициенты дисконтирования таковы, что  $1 > \beta_1 = \dots = \beta_M > \beta_{M+1} > \dots > \beta_N > 0$ , где  $M > 1$ . В этом случае множество стационарных равновесий представляет собой континуум, так как в стационарных равновесиях весь капитал, принадлежащий самым терпеливым агентам, может быть распределен между этими агентами произвольным образом. Формально, стационарным равновесием является любой набор  $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$  такой, что  $s^{i*} \geq 0$  и  $c^{i*} \geq 0$  для всех  $i$ , а также выполняются соотношения (3.2)–(3.4) вместе с соотношениями

$$\sum_{i=1}^M s^{i*} = Nk^*,$$

$$s^{i*} = 0, \quad i = M + 1, \dots, N,$$

$$\sum_{i=1}^M c^{i*} = N(f(k^*) - k^*) - (N - M)w^*,$$

$$c^{i*} = w^*, \quad i = M + 1, \dots, N.$$

Заметим, что вполне возможна ситуация, когда сбережения одного из терпеливых агентов равны нулю. Тем самым, тот факт, что агент принадлежит к группе самых терпеливых агентов, не гарантирует ему принадлежность к классу “богатых”. Точнее, сам класс “богатых” в данном случае является менее четко выраженным. В то же время класс “бедных” выделяется достаточно четко. Все относительно нетерпеливые агенты с неизбежностью попадают именно в класс “бедных”.

Вернемся к случаю, в котором существует единственный самый терпеливый агент (выполнено условие (2.2)), и зададимся вопросом, сходятся ли равновесные траектории к стационарному равновесию в модели Рамсея–Беккера. Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо проследить эволюцию сбережений каждого из агентов на равновесных траекториях. Если сходимости имеет место, то в динамике либо все относительно нетерпеливые агенты должны перестать сберегать начиная с какого-то периода времени, либо их сбережения должны стремиться к нулю. Однако ключевым отличием модели Рамсея–Беккера от модели Рамсея–Бьюли является тот факт, что каждый агент в каждом периоде получает свою заработную плату. Даже если этот агент не делал сбережений в прошлом периоде, в текущем периоде у него все равно есть принципиальная возможность оставить положительные сбережения. Если в модели Рамсея–Бьюли картина довольна простая, поскольку необходимые условия для решения задачи потребителя имеют вид (2.5), то в модели Рамсея–Беккера необходимые условия имеют несколько более замысловатый вид (2.7), (2.8). Именно с этим связаны основные трудности при анализе равновесной динамики модели Рамсея–Беккера.

Наиболее общее свойство, которому удовлетворяет любая равновесная траектория в модели Рамсея–Беккера, — это свойство *повторяемости нулевых сбережений*: каждый агент, за исключением самого терпеливого, оказывается в положении с нулевыми сбережениями бесконечно часто. Более точно, имеет место следующий факт (см. [19]): на любой равновесной траектории  $\{k_t^*, 1 + r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$  в модели Рамсея–Беккера, для любого агента, за исключением самого терпеливого, положение с нулевыми сбережениями является повторяющимся, а именно, для каждого  $i \neq 1$  существует подпоследовательность  $\{t_m\}_{m=1}^\infty$ , такая что  $s_{t_m}^{i*} = 0$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и, кроме того,  $\liminf_{t \rightarrow \infty} c_t^{i*} > 0$ . Последнее неравенство говорит, что ни для какого агента потребление не может сходить к нулю, что качественно отличает модель Рамсея–Беккера от модели Рамсея–Бьюли.

Из вышесказанного не следует, однако, что, однажды перестав сберегать на равновесной траектории, нетерпеливый агент останется навсегда в положении с нулевыми сбережениями. Можно указать два условия, которые гарантируют, что все агенты, за исключением самого терпеливого, с некоторого периода навсегда останутся в положении с нулевыми сбережениями. Во-первых, в [20] отмечено, что для того чтобы, начиная с некоторого периода времени, выполнялось равенство

$$s_t^{i*} = 0, \quad i = 2, \dots, N, \quad (3.9)$$

достаточно, чтобы  $\beta_i$  было существенно меньше, чем  $\beta_1$  для всех  $i \neq 1$ . Во-вторых, в [19] доказано, что если существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} k_t^*$ , то этот предел равен  $k^{\beta_1}$ , и для всех достаточно больших  $t$  выполняется (3.9).

Интересно отметить, что из того, что для всех достаточно больших  $t$  выполняется (3.9), не следует сходимости последовательности  $\{k_t^*\}_{t=0}^\infty$ . В [19] построен пример равновесной траектории в модели с двумя агентами, в котором нетерпеливый агент с самого начала ничего не сберегает (всем капиталом владеет только терпеливый агент), но при этом суммарный запас капитала не сходится к своему стационарному значению  $k^{\beta_1}$ , а осциллирует вокруг него с периодом 2.

Для того чтобы гарантировать сходимость равновесных траекторий к стационарному равновесию, достаточно наложить на производственную функцию следующее условие:

$$\frac{d}{dk}(f'(k)k) > 0, \quad k > 0. \tag{3.10}$$

Это условие означает, что совокупный доход капитала растет с ростом капиталовооруженности. Такое условие заведомо выполняется для неоклассических двухфакторных производственных функций  $F(K, L)$  с эластичностью замещения между трудом и капиталом большей либо равной единице (в частности, это верно для производственной функции Кобба–Дугласа). В [19] показано, что при выполнении (3.10) любая равновесная траектория в модели Рамсея–Беккера сходится к стационарному равновесию. Как только что было отмечено, в этом случае для всех достаточно больших  $t$  выполняется (3.9).

Если же (3.10) не выполняется, то равновесная динамика в модели Рамсея–Беккера может быть устроена очень сложным образом. В частности, можно построить пример периодического равновесия, в котором для всех относительно нетерпеливых агентов как положение с нулевыми сбережениями, так и положение с положительными сбережениями является повторяющимся (см. [10]). Более того, могут существовать равновесия с циклами любого нечетного периода (см. [21]), а также хаотические равновесия (см. [22]).

Для полноты описания, заметим, что в модели с непрерывным временем равновесная динамика устроена гораздо проще и разительно отличается от динамики модели с дискретным временем. В [23] показано, что в модели Рамсея–Беккера с непрерывным временем существует единственное стационарное равновесие, которое является глобально асимптотически устойчивым, и на любой равновесной траектории, начиная с какого-то конечного периода времени, всем запасом капитала владеет самый терпеливый агент.

### 3.4. Модель Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования

В модели Рамсея–Беккера агентам в каждый конкретный период времени запрещено брать в долг. В модели Рамсея–Бьюли, напротив, займы ограничены довольно необременительным условием No-Ponzi Game. Вполне естественно задаться вопросом, что происходит в промежуточном случае. Этот вопрос рассматривается в [24], [25], где предложена модель, которую можно назвать моделью Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования. Потребители в этой модели могут брать в долг под свою будущую заработную плату, но этот долг должен быть таким, что его можно выплатить за фиксированный промежуток времени  $T$ .

Задача потребителя для агента  $i$  в модели Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования имеет вид

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta_t^i u_t(c_t^i), \\ \text{s.t. } & c_t^i + s_t^i = (1 + r_t) s_{t-1}^i + w_t, \quad t = 0, 1, \dots, \quad s_{-1}^i = \hat{s}_{-1}^i, \\ & s_t^i + \frac{w_{t+1}}{1 + r_{t+1}} + \dots + \frac{w_{t+T}}{(1 + r_{t+1}) \cdots (1 + r_{t+T})} \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $T \geq 1$  – заданное число. Иначе говоря, сбережения агентов могут быть отрицательными в любом периоде  $t$ , но они ограничены снизу приведенной к периоду  $t$  суммой заработных плат в периоды  $t + 1, t + 2, \dots, t + T$ .

Равновесные траектории и стационарные равновесия в такой модели можно ввести по аналогии с соответствующими определениями в обычной модели Рамсея–Беккера. Существование равновесия для  $T = 1$  доказано в [24], а для  $T \geq 2$  – в [25].

Кроме того, в [25] доказано, что в модели Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования единственное стационарное равновесие  $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$  однозначным образом задается соотношениями (3.2)–(3.4) вместе с соотношениями

$$s^{1*} = Nk^* + (N - 1) \left( \frac{w^*}{1 + r^*} + \dots + \frac{w^*}{(1 + r^*)^T} \right),$$

$$s^{i*} = - \left( \frac{w^*}{1+r^*} + \dots + \frac{w^*}{(1+r^*)^T} \right), \quad i = 2, \dots, N,$$

$$c^{1*} = N(f(k^*) - k^*) - (N-1) \left[ w^* - r^* \left( \frac{w^*}{1+r^*} + \dots + \frac{w^*}{(1+r^*)^T} \right) \right],$$

$$c^{i*} = w^* - r^* \left( \frac{w^*}{1+r^*} + \dots + \frac{w^*}{(1+r^*)^T} \right), \quad i = 2, \dots, N.$$

В стационарном равновесии долг всех относительно нетерпеливых агентов является максимально возможным (они занимают ровно столько, сколько позволено), а самый терпеливый агент, как и в модели Рамсея–Бьюли, владеет всем капиталом и долгами всех остальных агентов.

Заметим, что суммарный уровень потребления в стационарном равновесии не зависит от  $T$  и определяется, как обычно, модифицированным золотым правилом для самого терпеливого агента. Однако распределение потребления в обществе напрямую зависит от числа периодов, на которые позволено занимать. Чем сильнее ослаблены ограничения на заимствования, тем беднее оказываются относительно нетерпеливые агенты и тем меньше их уровень потребления. Легко проверить, что индекс Джини по неравенству в потреблении в стационарном состоянии в зависимости от  $T$  принимает наименьшее значение для модели Рамсея–Беккера (с полным запретом на заимствования) и монотонно увеличивается по  $T$ , достигая максимума в модели Рамсея–Бьюли (без ограничений на заимствования).

Этот результат вполне соответствует гипотезе Ирвинга Фишера [5] о том, что чем более развиты кредитные рынки и чем более рыночной является экономика, тем сильнее различия в терпеливости людей влияют на процесс перераспределения капитала в пользу более терпеливых потребителей, и тем выше уровень неравенства в обществе в долгосрочной перспективе.

Как устроена равновесная динамика в модели с ослабленными ограничениями на заимствования? Достаточно полный ответ на этот вопрос имеется для случая  $T = 1$ . В [24] доказано, что при  $T = 1$  любая равновесная траектория в модели Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования сходится к стационарному равновесию. Важно подчеркнуть, что, в отличие от обычной модели Рамсея–Беккера, в данном случае для сходимости равновесных траекторий не нужно делать никаких специальных предположений об устройстве производственной функции, в частности не требуется выполнение условия (3.10).

Как отмечено в [26], случай  $T = 1$  соответствует тому, что заработная плата выплачивается *ex ante* (до начала производственного периода), а не *ex post* (в конце производственного периода). Таким образом, модель Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования при  $T = 1$  можно интерпретировать в духе классической политической экономии: заработная плата в такой модели представляет собой часть авансированного капитала.

Если же  $T \geq 2$ , то для сходимости равновесных траекторий необходимо, по-видимому, делать какие-то дополнительные предположения об устройстве модели. В [25] доказано, что если на равновесной траектории в модели Рамсея–Беккера с ослабленными ограничениями на заимствования капиталовооруженность сходится к стационарному значению, то и сама равновесная траектория сходится. При этом все агенты, за исключением самого терпеливого, начиная с некоторого периода времени, будут находиться в положении с максимально возможным долгом. В то же время для случая  $T = 2$  в [25] построен пример равновесной траектории в модели с двумя агентами, на которой нетерпеливый агент все время находится в положении с максимально возможным долгом, но при этом капиталовооруженность не сходится к своему стационарному значению  $k^{\beta_1}$ , а осциллирует вокруг него с периодом 2.

#### 4. ОПТИМАЛЬНОСТЬ ПО ПАРЕТО

Важный вопрос, который возникает при анализе любой модели общего экономического равновесия, — является ли равновесная траектория оптимальной по Парето? В данном разделе мы обсуждаем свойства оптимальных по Парето траекторий в моделях Рамсея–Бьюли и Рамсея–Беккера.

4.1. Устройство оптимальных по Парето траекторий

В рамках рассматриваемых нами моделей понятие оптимальности по Парето выглядит традиционно. Предположим, что начальная капиталовооруженность  $\hat{k}_0 > 0$  задана. Последовательность  $\{k_t, (c_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$  называется *допустимой траекторией*, исходящей из начального состояния  $\hat{k}_0$ , если  $k_0 = \hat{k}_0$  и для всех  $t = 0, 1, \dots$  выполняются следующие соотношения:

$$0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t), \quad 0 \leq \sum_{i=1}^N c_t^i \leq f(k_t) - k_{t+1}, \quad c_t^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

Допустимая траектория  $\{k_t, (c_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$ , исходящая из  $\hat{k}_0$ , называется *оптимальной по Парето*, если не существует другой допустимой траектории  $\{\tilde{k}_t, (\tilde{c}_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$ , исходящей из того же начального состояния  $\hat{k}_0$ , такой что для всех  $i = 1, \dots, N$  выполняются неравенства

$$\sum_{t=0}^\infty \beta_t^i u_i(\tilde{c}_t^i) \geq \sum_{t=0}^\infty \beta_t^i u_i(c_t^i),$$

причем хотя бы для одного  $i$  это неравенство строгое.

Заметим сразу, что в определениях допустимой траектории и оптимальности по Парето не нужно уточнять, идет ли речь о модели Рамсея—Бьюли или о модели Рамсея—Беккера. Важно только то, что нам даны производственная функция и функции полезности всех потребителей. При этом, в отличие от определения равновесных траекторий, под начальным состоянием понимается только начальная капиталовооруженность, так как вести в данном контексте речь о (начальных) сбережениях не имеет никакого смысла.

Поскольку производственная функция в интенсивной форме и мгновенные функции полезности строго вогнуты, естественный способ поиска оптимальных по Парето траекторий состоит в максимизации “центрального планировщиком” функции общественного благосостояния, представляющей собой взвешенную сумму межвременных полезностей всех агентов с взвешивающими коэффициентами  $\lambda_0^i \geq 0, \dots, \lambda_0^N \geq 0$  ( $\sum_{i=1}^N \lambda_0^i = 1$ ) на множестве всех допустимых траекторий, т.е., в решении задачи вида

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^N \lambda_0^i \sum_{t=0}^\infty \beta_t^i u_i(c_t^i), \\ \text{s.t. } & \sum_{i=1}^N c_t^i + k_{t+1} = f(k_t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad k_0 = \hat{k}_0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Очевидно, что решение задачи (4.1) зависит от набора  $(\lambda_0^i)_{i=1}^N$ . При этом любую оптимальную по Парето траекторию в модели Рамсея с неоднородным дисконтированием можно получить как решение задачи (4.1) с соответствующим образом подобранными весами агентов.

В [27] доказано, что решение такой задачи существует и единственно, а также что если  $\lambda_0^1 > 0$ , то для решения  $\{k_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$  задачи (4.1) выполняются следующие предельные соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k_t^* = k^{\beta_1}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_t^{1*} = N(f(k^{\beta_1}) - k^{\beta_1}), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c_t^{i*} = 0, \quad i = 2, \dots, N.$$

В любом случае оптимальная по Парето траектория обладает тем свойством, что потребление всех агентов, за исключением одного, сходится к нулю. Иными словами, в случае неоднородного дисконтирования на любой оптимальной по Парето траектории в долгосрочной перспективе все потребители за исключением одного счастливца (которым, скорее всего, окажется самый терпеливый агент) буквально “умирают с голоду”.

В экономической теории оптимальность по Парето является центральным понятием. Считается, что как бы мы ни определили оптимальность, оптимальное состояние обязательно должно быть оптимальным по Парето. Однако в рассматриваемом нами случае оптимальность по Парето выглядит довольно удивительно и вряд ли может обладать нормативной привлекательностью.

Нетрудно проверить, что любая равновесная траектория в модели Рамсея–Бьюли является оптимальной по Парето. При этом взвешивающие коэффициенты  $(\lambda_0^i)_{i=1}^N$ , соответствующие этой траектории, при естественных предположениях все положительны. Коэффициент  $\lambda_0^i$  будет равняться нулю только в том случае, если потребление агента  $i$  равно нулю с самого начала.

Что касается модели Рамсея–Беккера, то в ней, как мы отмечали, на равновесных траекториях ни для какого агента потребление не сходится к нулю. Это означает, что равновесные траектории в модели Рамсея–Беккера не являются оптимальными по Парето. В то же время любая равновесная траектория в модели Рамсея–Беккера является *технологически эффективной* (см. [28]). Это более слабое свойство, чем оптимальность по Парето. Оно означает, что на равновесной траектории не происходит перенакопления капитала, и общество не может увеличить уровень своего суммарного потребления в каком-то периоде, не уменьшив его в другом периоде (вне зависимости от того, как это суммарное потребление распределено между разными агентами).

#### 4.2. Взвешивающие коэффициенты

Вернемся к задаче “центрального планировщика” (4.1), предполагая что все взвешивающие коэффициенты положительны:  $\lambda_0^i > 0, i = 1, \dots, N$ . Решение задачи (4.1) обладает свойством временной согласованности: если посмотреть на “хвост” этого решения, начинающийся с  $t = 1$ , то окажется, что он представляет собой решение “хвоста” исходной задачи. А именно, последовательность  $\{k_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=1}^\infty$  является решением задачи

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^N \lambda_0^i \sum_{t=1}^\infty \beta_t^i u_i(c_t^i), \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^N c_t^i + k_{t+1} = f(k_t), \quad t = 1, 2, \dots, \quad k_1 = k_1^*. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Несложно заметить, что целевую функцию в задаче (4.2) с точностью до умножения на положительную константу можно переписать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_1^i \sum_{t=0}^\infty \beta_t^i u_i(c_{t+1}^i),$$

где

$$\lambda_1^1 = \frac{\beta_1 \lambda_0^1}{\sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_0^i}, \quad \dots, \quad \lambda_1^N = \frac{\beta_N \lambda_0^N}{\sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_0^i}.$$

Таким образом, как и в задаче (4.1), в задаче (4.2) целевая функция представляет собой взвешенную сумму межвременных функций полезности отдельных потребителей с положительными коэффициентами  $(\lambda_1^i)_{i=1}^N$ , в сумме дающими единицу. При этом важно обратить внимание на тот факт, что взвешивающие коэффициенты не совпадают с коэффициентами в задаче (4.1). Более того, очевидно, что в периоде времени 1 по сравнению с периодом 0 взвешивающий коэффициент самого терпеливого агента увеличивается, а взвешивающий коэффициент самого нетерпеливого агента уменьшается:  $\lambda_1^1 > \lambda_0^1, \lambda_1^N < \lambda_0^N$ . Если рассматривать целевые функции в задачах (4.1) и (4.2) как функции общественного благосостояния в периодах времени 0 и 1, то априорно не совсем понятно, почему эта функция должна меняться с течением времени в пользу самого терпеливого агента.

Если процедуру пересчета взвешивающих коэффициентов продолжить, то в каждый будущий период времени  $\tau$  взвешивающие коэффициенты  $(\lambda_\tau^i)_{i=1}^N$  будут задаваться следующим образом:

$$\lambda_\tau^1 = \frac{\beta_1^\tau \lambda_0^1}{\sum_{i=1}^N \beta_i^\tau \lambda_0^i}, \quad \dots, \quad \lambda_\tau^N = \frac{\beta_N^\tau \lambda_0^N}{\sum_{i=1}^N \beta_i^\tau \lambda_0^i}.$$

Очевидно, что взвешивающий коэффициент самого терпеливого агента сходится к единице, а все остальные – к нулю:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda_{\tau}^1 = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \lambda_{\tau}^i = 0, \quad i = 2, \dots, N.$$

Этот факт с еще одной стороны высвечивает ту роль, которую играет агент с наибольшим коэффициентом дисконтирования в моделях с неоднородным дисконтированием.

### 5. СОЦИАЛЬНО ОБУСЛОВЛЕННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ДИСКОНТИРОВАНИЯ

До сих пор коэффициенты дисконтирования агентов предполагались постоянными и экзогенно заданными. В то же время есть все основания считать, что эти коэффициенты являются социально обусловленными, т.е. эндогенными с точки зрения модели в целом. В данном разделе мы описываем модель рамсеевского типа, в которой коэффициенты дисконтирования агентов формируются эндогенно и определяются их относительным богатством. Мы предполагаем, что богатые более терпеливы, чем бедные, поскольку это согласуется со здравым смыслом и эмпирическими данными. Такое предположение сделано в работах [29], [30] в рамках АК-модели, которая отличается от модели Рамсея (АК-модель является моделью эндогенного роста), однако все утверждения, приводимые в данном разделе, можно доказать с помощью рассуждений, которые почти дословно повторяют рассуждения из работ [29], [30].

#### 5.1. Стационарные равновесия

Предположим, что коэффициент дисконтирования  $\beta$  каждого агента в текущем периоде задается равенством

$$\beta = \phi\left(\frac{z}{y}\right), \tag{5.1}$$

где  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, 1)$  – непрерывная и монотонно возрастающая функция,  $z$  – богатство, которым располагает агент в рассматриваемом периоде времени, а  $y$  – средняя величина располагаемого богатства в экономике.

Предположим, что неотрицательные сбережения агентов  $(s^i)_{i=1}^N$  (где  $s^i \geq 0$  для всех  $i$ ) в какой-то период времени заданы. В этом случае капиталовооруженность равна  $k = \frac{\sum_{i=1}^N s^i}{N}$ , а ставка процента  $r$  и ставка заработной платы  $w$  определяются как  $1 + r = f'(k)$ ,  $w = f(k) - f'(k)k$ . В этой ситуации располагаемое богатство потребителя  $i$  равно  $(1 + r)s^i + w$ , тогда как среднее располагаемое богатство представляет собой величину

$$\frac{\sum_{i=1}^N ((1 + r)s^i + w)}{N} = f(k).$$

Тем самым, можно определить коэффициент дисконтирования  $\beta_i$  потребителя  $i$ , который оказывается равен

$$\beta_i = \phi\left(\frac{(1 + r)s^i + w}{f(k)}\right).$$

Сделанное предположение означает, что коэффициент дисконтирования агента является возрастающей функцией не абсолютного, а относительного уровня его богатства. Следует подчеркнуть, что функция  $\phi(\cdot)$  одинакова для всех агентов. Тем самым, модель с социально обусловленными коэффициентами дисконтирования качественно отличается от моделей с экзогенно заданными коэффициентами дисконтирования: в данной модели все агенты абсолютно идентичны по своим экзогенным характеристикам.

В отличие от модели с экзогенно заданными коэффициентами дисконтирования, прежде чем давать определение равновесной траектории, удобно определить стационарные равновесия.

Набор  $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$  называется *стационарным равновесием* в модели с социально обусловленными коэффициентами дисконтирования, если он является стационарным равновесием в модели Рамсея–Беккера с коэффициентами дисконтирования  $(\beta_i)_{i=1}^N$ , задаваемыми равенствами

$$\beta_i = \phi\left(\frac{(1 + r^*)s^{i*} + w^*}{f(k^*)}\right), \quad i = 1, \dots, N.$$

Следует подчеркнуть, что здесь не предполагается упорядочивание коэффициентов дисконтирования по убыванию, как это делалось при описании модели Рамсея–Беккера.

Как устроено множество стационарных равновесий в данной модели? В отличие от модели Рамсея–Беккера, где агент с наибольшим коэффициентом дисконтирования с самого начала является главным претендентом на то, чтобы оказаться владельцем всего капитала, в данном случае все агенты равноправны – каждый из них в стационарном состоянии может оказаться или не оказаться владельцем капитала. Более точно, для любого непустого подмножества  $I$  множества агентов существует такое стационарное равновесие  $\{k^*, 1 + r^*, w^*, (c^{i*})_{i=1}^N, (s^{i*})_{i=1}^N\}$ , что

$$\begin{aligned} s^{i*} &= \frac{Nk^*}{|I|}, \quad i \in I, \\ s^{i*} &= 0, \quad i \notin I, \\ c^{i*} &= r^* \frac{Nk^*}{|I|} + w^*, \quad i \in I, \\ c^{i*} &= w^*, \quad i \notin I, \end{aligned}$$

где  $|I|$  – число элементов множества  $I$ . Никаких других стационарных равновесий в модели не существует.

Таким образом, в каждом стационарном равновесии множество всех агентов делится на две группы, которые можно условно назвать “богатые” и “бедные”, причем внутри каждой из двух групп агенты находятся в абсолютно одинаковом положении. Первые владеют всем капиталом ( $\sum_{i \in I} s^{i*} = Nk^*$ ), а сбережения вторых равны нулю, и они проедают всю свою заработную плату. Отметим, что деление множества всех агентов на “богатых” и “бедных” в стационарном равновесии может быть любым, за исключением случая, когда множество “богатых” пусто.

В стационарном равновесии коэффициент дисконтирования “богатых” агентов равен

$$\beta = \phi\left(\frac{(1 + r^*) \frac{N}{|I|} k^* + w^*}{f(k^*)}\right) = \phi\left(1 + \frac{N - |I|}{|I|} \frac{k^*}{f(k^*)}\right).$$

В то же время устройство стационарного равновесия в модели Рамсея–Беккера таково, что именно этот коэффициент дисконтирования определяет равновесную капиталовооруженность  $k^*$  посредством равенства  $\beta = 1/f'(k^*)$ . Отсюда вытекает, что при заданном числе “богатых”  $|I|$  равновесная капиталовооруженность  $k^*$  определяется как решение уравнения

$$\phi\left(1 + \frac{N - |I|}{|I|} \frac{k}{f(k)}\right) = \frac{1}{f'(k)}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим функции  $L(k) = \phi\left(1 + \frac{N - |I|}{|I|} \frac{k}{f(k)}\right)$  и  $R(k) = 1/f'(k)$ . Из свойств производственной функции вытекает, что  $R(k)$  растет с ростом  $k$ , причем  $R(0) = 0$  и  $R(k) \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Для каждого фиксированного  $|I|$ ,  $L(k)$  растет с ростом  $k$ , причем  $L(0) = \phi(1) > 0$  и  $\lim_{k \rightarrow \infty} L(k) < 1$ . Та-

ким образом, при каждом  $|I|$ , уравнение (5.2) обязательно имеет решение  $k^* > 0$ , причем в точке решения  $L'(k^*) < R'(k^*)$ .

Хотелось бы, чтобы при заданном числе “богатых”  $|I|$  стационарное равновесие  $k^*$  было единственным. Для этого нужны дополнительные условия, но, скорее всего, не очень обременительные. Например, если производственная функция в интенсивной форме является функцией Кобба–Дугласа ( $f(k) = ak^\alpha$ ,  $a > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ), то для существования единственного решения уравнения (5.2) достаточно, чтобы функция  $\phi(\cdot)$  была вогнутой, что вполне согласуется со здравым смыслом.

Таким образом, при некоторых разумных дополнительных условиях, уравнение (5.2) имеет единственное решение  $k^*$ . Заметим также, что  $L(k)$  при каждом фиксированном  $k$  убывает с ростом  $|I|$ . Отсюда следует, что чем больше  $|I|$ , тем меньше  $k^*$ . Таким образом, чем больше число “богатых” в стационарном равновесии, тем меньше стационарная капиталовооруженность. Действительно, если “богатых” много, то капитал равномерно распределяется между большим количеством “богатых”, и на каждого из них приходится меньшее количество капитала. Поэтому относительный уровень богатства каждого из них ниже, чем при меньшем числе “богатых”, а значит ниже и коэффициент дисконтирования. А именно этот коэффициент дисконтирования и определяет стационарную капиталовооруженность.

Легко заметить, что с ростом числа “богатых” в стационарном равновесии уменьшается уровень неравенства по богатству и доходам, измеряемый, например, с помощью индекса Джини. Действительно, если всем капиталом владеет один агент, то неравенство очень велико, а если капитал распределен равномерно между всеми, то неравенство отсутствует. Отсюда следует, что в рамках наших предположений капиталовооруженность и выпуск в стационарных равновесиях увеличиваются с ростом неравенства. Однако сделанные предположения не учитывают тот факт, что коэффициенты дисконтирования потребителей отражают не только степень их индивидуальной нетерпеливости, но их горизонт планирования, который зависит, среди прочего, от уровня социальной напряженности в обществе. В свою очередь, социальная напряженность в значительной степени определяется уровнем неравенства в распределении богатства и доходов.

Для того чтобы учесть эту зависимость, следует слегка скорректировать предположение о формировании коэффициентов дисконтирования и заменить (5.1) на следующее выражение:

$$\beta = (1 - p(G))\phi\left(\frac{z}{y}\right), \quad (5.3)$$

где  $G$  – индекс неравенства в распределении богатства, а  $p(G)$  – фактор понижения коэффициента дисконтирования в зависимости от уровня неравенства. Его можно интерпретировать как вероятность того, что в течение ближайшего промежутка времени произойдут серьезные социальные потрясения, ведущие к серьезной перестройке экономической жизни. Естественно считать, что функция  $p(G)$  монотонно возрастает с ростом  $G$ , причем сначала медленно, а затем, начиная с какого-то критического значения неравенства, быстро увеличивается вплоть до единицы. В этом случае зависимость капиталовооруженности  $k^*$  и выпуска  $f(k^*)$  от неравенства в стационарном равновесии будет иметь перевернутую U-образную форму: при малых значениях неравенства его увеличение приведет к росту капиталовооруженности и выпуска, а при значительных – к падению (см. также [31]).

### 5.2. Скользящие равновесные траектории

Как мы видели, в стационарном равновесии в модели с социально обусловленными коэффициентами дисконтирования агенты делятся на “богатых” и “бедных”. Возникает естественный вопрос о том, как экономика придет и придет ли вообще в это стационарное равновесие. Можно предположить, что многое зависит от начального состояния, точнее, от начального распределения богатства.

Для того чтобы попытаться ответить на поставленный вопрос, нужно в первую очередь определить, что такое равновесная траектория. Один из возможных подходов к этому определению рассматривается в [29], где предложено понятие *скользящей равновесной траектории*.

Идея скользящего равновесия применительно к рассматриваемой модели состоит в следующем. Предположим, что изначально экономика находится в состоянии, где сбережения агентов

задаются неотрицательным вектором  $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$ . Потребители строят свои коэффициенты дисконтирования по следующему правилу:

$$\beta_i = (1 - p(G_0))\phi\left(\frac{(1 + r_0)s_{-1}^i + w_0}{f(k_0)}\right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.4)$$

где

$$Nk_0 = \sum_{i=1}^N s_{-1}^i, \quad 1 + r_0 = f'(k_0), \quad w_0 = f(k_0) - f'(k_0)k_0,$$

а  $G_0$  — соответствующий вектору  $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$  индекс неравенства в распределении богатства. При коэффициентах дисконтирования, построенных по правилу (5.4), строится равновесная траектория модели Рамсея—Беккера, исходящая из начального состояния  $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$ , и первый шаг этой траектории реализуется.

В результате экономика попадает в новое состояние, где сбережения агентов задаются некоторым неотрицательным вектором  $(s_0^i)_{i=1}^N$ . Коэффициенты дисконтирования пересчитываются по правилу:

$$\beta_i = (1 - p(G_1))\phi\left(\frac{(1 + r_1)s_0^i + w_1}{f(k_1)}\right), \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.5)$$

где

$$Nk_1 = \sum_{i=1}^N s_0^i, \quad 1 + r_1 = f'(k_1), \quad w_1 = f(k_1) - f'(k_1)k_1,$$

а  $G_1$  — соответствующий вектору  $(s_0^i)_{i=1}^N$  индекс неравенства в распределении богатства. И снова строится равновесная траектория модели Рамсея—Беккера, только на этот раз используются коэффициенты дисконтирования, построенные по правилу (5.5), а исходит она из начального состояния  $(s_0^i)_{i=1}^N$ . После того как первый шаг этой траектории реализуется, экономика попадает в состояние, где сбережения агентов задаются неотрицательным вектором  $(s_1^i)_{i=1}^N$ .

Продолжив эту процедуру до бесконечности, мы получим последовательность  $\{k_t, 1 + r_t, w_t, (c_t^i)_{i=1}^N, (s_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$ , которая называется *скользящей равновесной траекторией*, исходящей из начального состояния  $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$ .

Предположим для простоты, что агенты упорядочены по убыванию начальных сбережений, а сбережения самых состоятельных  $M$  агентов абсолютно одинаковы:

$$s_{-1}^1 = s_{-1}^2 = \dots = s_{-1}^M > s_{-1}^{M+1} \geq s_{-1}^{M+2} \geq \dots \geq s_{-1}^N. \quad (5.6)$$

Рассмотрим скользящую равновесную траекторию  $\{k_t, 1 + r_t, w_t, (c_t^i)_{i=1}^N, (s_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$ , исходящую из начального состояния  $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$ , и попытаемся понять, какова будет динамика сбережений различных агентов. Можно предположить, что эта динамика будет подчиняться следующей логике событий.

Если изначально агент  $i$  принадлежит к группе самых состоятельных ( $i \leq M$ ), то он окажется в группе самых терпеливых и его коэффициент дисконтирования будет выше, чем у менее состоятельного агента  $j > M$ . Поэтому и сбережения агента  $i$  в периоде  $t = 0$  окажутся выше, чем у агента  $j$ , причем разрыв в уровне сбережений увеличится так, что  $s_0^i/s_0^j > s_{-1}^i/s_{-1}^j$ . Поэтому относительный уровень богатства агента  $i$  вырастет, т.е. будет выполняться неравенство

$$\left(\frac{(1 + r_1)s_0^i + w_1}{f(k_1)}\right) > \left(\frac{(1 + r_0)s_{-1}^i + w_0}{f(k_0)}\right).$$

В результате коэффициент дисконтирования агента  $i$  вырастет по сравнению с коэффициентом дисконтирования агента  $j$  (заметим, что в абсолютном выражении коэффициент дисконтирования может и упасть, что возможно, если увеличится индекс неравенства). На следующем шаге

история повторится, и в долгосрочной перспективе скользящая равновесная траектория сойдется к стационарному равновесию, в котором класс “богатых” будет состоять только из тех, кто принадлежал в самом начале к группе самых состоятельных. А все те, кто изначально был хоть чуть менее состоятелен, окажутся в классе “бедных”.

При некоторых предположениях проведенное рассуждение оказывается верным. А именно, если коэффициенты дисконтирования не зависят от неравенства ( $p(G) = \text{const}$ ), производственная функция является функцией Кобба–Дугласа, а мгновенные функции полезности – логарифмическими ( $u_i(c) = \ln c, i = 1, \dots, N$ ), то на любой скользящей равновесной траектории  $\{k_t, 1 + r_t, w_t, (c_t^i)_{i=1}^N, (s_t^i)_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$ , исходящей из начального состояния  $(s_{-1}^i)_{i=1}^N$ , удовлетворяющего (5.6), начиная с некоторого периода времени сбережения всех агентов, за исключением первых  $M$ , равны нулю, и траектория сходится к стационарному равновесию, в котором класс “богатых” состоит из первых  $M$  агентов, а класс “бедных” – из всех остальных.

По-видимому, требование  $p(G) = \text{const}$  здесь не является существенным и его можно значительно ослабить. Что касается предположений об устройстве производственной функции и функций полезности, то, скорее всего, без каких-нибудь специальных предположений обойтись вряд ли возможно.

### 5.3. Равновесные траектории

Отличительная особенность скользящих равновесных траекторий состоит в том, что в каждом периоде времени агенты строят равновесные траектории в модели Рамсея–Беккера и делают один шаг, не учитывая того, что на следующем шаге они изменят свои коэффициенты дисконтирования. С точки зрения современной экономической теории такая ситуация интерпретируется как признак неполной рациональности агентов. Поэтому интересно понять, что получится, если агенты способны принимать во внимание изменение своего относительного уровня богатства с течением времени и изменение своих коэффициентов дисконтирования. Правда, приписывать экономическим агентам столь высокий уровень рациональности не представляется реалистичным.

Предположим, что агент  $i$  в периоде времени 0 знает, что одна единица полезности, полученная в периоде 1, равноценна для него  $\beta_{i,1}$  единиц полезности, полученных в периоде 0; одна единица полезности, полученная в периоде 2, равноценна для него  $\beta_{i,2}$  единиц полезности, полученных в периоде 1; и так далее. В этом случае межвременная функция полезности агента  $i$  задается как

$$u_i(c_0^i) + \beta_{i,1}u_i(c_1^i) + \beta_{i,2}\beta_{i,1}u_i(c_2^i) + \dots,$$

а задача потребителя принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \max u_i(c_0^i) + \beta_{i,1}u_i(c_1^i) + \beta_{i,2}\beta_{i,1}u_i(c_2^i) + \dots, \\ \text{s.t. } & c_t^i + s_t^i = (1 + r_t)s_{t-1}^i + w_t, \quad s_t^i \geq 0, \quad t = 0, 1, \dots, \quad s_{-1}^i = \hat{s}_{-1}^i. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Соответственно, *равновесной траекторией* в модели с социально обусловленными коэффициентами дисконтирования, исходящей из начального состояния  $(\hat{s}_{-1}^i)_{i=1}^N$  (где  $\hat{s}_{-1}^i \geq 0$  для всех  $i$ ), естественно назвать последовательность  $\{(\beta_{i,t+1}^*)_{i=1}^N, k_t^*, 1 + r_t^*, w_t^*, (c_t^{i*})_{i=1}^N, (s_t^{i*})_{i=1}^N\}_{t=0}^\infty$ , которая характеризуется следующим образом.

**Условие 1".** Для каждого  $i$  последовательность  $\{c_t^{i*}, s_t^{i*}\}_{t=0}^\infty$  является решением задачи (5.7) при

$$\begin{aligned} & 1 + r_t = 1 + r_t^*, \quad w_t = w_t^*, \\ & \beta_{i,t+1}^* = (1 - p(G_t^*))\phi\left(\frac{(1 + r_t^*)s_{t-1}^{i*} + w_t^*}{f(k_t^*)}\right), \quad t = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

где  $G_t^*$  – значение индекса неравенства в периоде  $t$ , и условиями 2–4.

Можно доказать, что равновесные траектории существуют. Кроме того, легко заметить, что стационарные равновесия в случае скользящих равновесных траекторий и равновесных траекторий суть одно и то же. Что касается равновесной динамики, то в данном случае авторам про нее практически ничего не известно, хотя естественно предполагать, что при каких-то дополнитель-

ных условиях должен работать тот же механизм деления общества на “богатых” и “бедных”, что и в случае скользящих равновесных траекторий.

## 6. ОБЩЕСТВЕННЫЙ ВЫБОР И ГОЛОСОВАНИЕ

До сих пор мы рассматривали рыночное равновесие в моделях, где потребление агентов было частным. Однако множество важных экономических задач связано с общественным потреблением. Например, качество окружающей среды является глобальным общественным благом, поэтому для принятия решений о борьбе с глобальным изменением климата необходимо агрегировать неоднородные предпочтения всех членов общества. Вопрос о том, какова оптимальная экономическая политика с точки зрения неоднородного общества, находится на стыке теории экономического роста и теории общественного выбора. В данном разделе мы описываем основные трудности, связанные с общественным выбором в моделях с неоднородным дисконтированием, и намечаем пути их преодоления (см. также [32]).

### 6.1. Отсутствие победителя по Кондорсе

Вопросы коллективного принятия межвременных решений естественно рассматривать в рамках модели рамсеевского типа с общественным потреблением. Предположим, что агенты потребляют единственный товар совместно или делят выпуск поровну. В этом случае потребление можно рассматривать как количество добытого исчерпаемого или возобновляемого природного ресурса (общественного блага). Пусть  $k_t$  – это запас ресурса на начало периода  $t$ , а  $f(k_t)$  – запас ресурса, доступный к концу периода  $t$ , с учетом процессов регенерации. В этот момент потребители должны решить, какое количество ресурса извлечь и потребить. Тогда динамику изменения запаса ресурса можно записать в стандартном виде  $c_t + k_{t+1} = f(k_t)$ . Если ресурс исчерпаемый, то  $f(k) = k$ . Если ресурс возобновляемый, то можно считать, что  $f(k)$  удовлетворяет тем же свойствам, что и неоклассическая производственная функция в интенсивной форме. Начальный запас ресурса  $\hat{k}_0 > 0$  задан.

Предпочтения агента  $i$  описываются межвременной функцией полезности  $\sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t u_i(c_t)$ , где, как и выше,  $\beta_i$  – коэффициент дисконтирования агента  $i$ , но теперь аргументом мгновенной функции полезности  $u_i(c)$  выступает общее для всех агентов потребление. У каждого агента  $i$  имеется своя оптимальная траектория общественного потребления (отвечающая коэффициенту дисконтирования  $\beta_i$ ), представляющая собой решение задачи (3.1) при  $\beta = \beta_i$  и  $u(c) = u_i(c)$ . Поскольку агенты различаются своими коэффициентами дисконтирования, все эти оптимальные траектории разные. Какую траекторию выберет общество, состоящее из неоднородных агентов?

Предположим, что агенты выбирают траекторию общественного потребления путем голосования. Естественно считать, что результат голосования неоднородных агентов будет совпадать с оптимальной траекторией для медианного агента. Трудность, однако, в том, что голосование за оптимальную траекторию является бесконечномерным, поскольку голосовать нужно за бесконечную последовательность потреблений. Хорошо известно, что в общем случае победителя по Кондорсе в многомерном голосовании не существует, причем это верно, даже если агенты неоднородны только по одному параметру, например, коэффициенту дисконтирования (см., в частности, [33], [34]).

Кроме того, в [35] доказано утверждение, напоминающее теорему Эрроу о невозможности: если множество альтернатив является достаточно большим, то любое правило голосования, отличное от диктатуры (в частности, голосование большинством и взвешенным квалифицированным большинством), не может быть транзитивным. Это утверждение означает, что предпочтения любого отдельного агента (например, медианного) не могут определять равновесный исход голосования, так как в этом случае итоговое правило окажется транзитивным. Таким образом, до недавнего времени в литературе доминировала точка зрения, что голосование в моделях с неоднородным дисконтированием в принципе не может привести к однозначному результату.

Проиллюстрируем отсутствие транзитивности и победителя по Кондорсе на примере простой трехпериодной модели с тремя агентами. Предположим, что  $f(k) = k$ , а  $u_i(c) = \ln c$  для всех  $i = 1, 2, 3$ , так что полезность агента  $i$  имеет вид  $U^i = \ln c_0 + \beta_i \ln c_1 + \beta_i^2 \ln c_2$ . Агенты различаются только своими коэффициентами дисконтирования, а условие (2.2) имеет вид  $1 > \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > 0$ , так что агент 2 обладает медианным коэффициентом дисконтирования.

Каждый агент  $i$  имеет свою оптимальную траекторию общественного потребления,  $C^{i*} = \{c_0^{i*}, c_1^{i*}, c_2^{i*}\}$ , которая представляет собой решение задачи

$$\max \ln c_0 + \beta_i \ln c_1 + \beta_i^2 \ln c_2, \quad \text{s.t. } c_0 + c_1 + c_2 = \hat{k}_0. \quad (6.1)$$

Легко проверить, что в этом случае

$$c_0^{i*} = \frac{\hat{k}_0}{1 + \beta_i + \beta_i^2}, \quad c_1^{i*} = \frac{\beta_i \hat{k}_0}{1 + \beta_i + \beta_i^2}, \quad c_2^{i*} = \frac{\beta_i^2 \hat{k}_0}{1 + \beta_i + \beta_i^2}.$$

В начальном периоде 0 агенты голосуют по поводу траектории общественного потребления. Множество допустимых траекторий (альтернатив) имеет вид  $\mathcal{C} = \{(c_0, c_1, c_2) \in \mathbb{R}_+^3 \mid c_0 + c_1 + c_2 = \hat{k}_0\}$ . Покажем прежде всего, что если победитель по Кондорсе существует, то он совпадает с оптимальной траекторией для агента 2 с медианным коэффициентом дисконтирования. Действительно, предположим противное, – победитель по Кондорсе – это некоторая траектория  $C^* = \{c_0^*, c_1^*, c_2^*\} \in \mathcal{C}$ , которая не совпадает с  $C^{2*}$ . Тогда либо  $c_1^* \neq \beta_2 c_0^*$ , либо  $c_2^* \neq \beta_2 c_1^*$ . Предположим для определенности, что  $c_1^* > \beta_2 c_0^*$  (все остальные случаи можно рассмотреть аналогично). В этом случае также  $c_1^* > \beta_3 c_0^*$ .

Рассмотрим скалярное произведение  $\nabla U^i$  в точке  $(c_0^*, c_1^*, c_2^*)$  на вектор  $z = (1, -1, 0)$ :

$$\nabla U^i(c_0^*, c_1^*, c_2^*) \cdot z = \left( \frac{1}{c_0^*}, \frac{\beta_i}{c_1^*}, \frac{\beta_i^2}{c_2^*} \right) \cdot (1, -1, 0) = \frac{1}{c_0^*} - \frac{\beta_i}{c_1^*} = \frac{c_1^* - \beta_i c_0^*}{c_0^* c_1^*}.$$

Очевидно, что это произведение положительно для  $i = 2$  и  $i = 3$ . Таким образом, для достаточно маленького возмущения  $(c_0^*, c_1^*, c_2^*)$  в направлении  $z$  (чуть больше потребления в периоде 0 и чуть меньше потребления в периоде 1), найдется траектория  $C' \in \mathcal{C}$ , которую агенты 2 и 3 предпочтут перед  $C^*$ . Таким образом,  $C^*$  не является победителем по Кондорсе. Это означает, что победитель по Кондорсе (если он существует) совпадает с  $C^{2*}$ , оптимальной траекторией для агента 2.

Покажем теперь, что  $C^{2*}$  не является победителем по Кондорсе. Рассмотрим скалярное произведение  $\nabla U^i$  в точке  $(c_0^{2*}, c_1^{2*}, c_2^{2*})$  на вектор  $z = (1, -2, 1)$ :

$$\nabla U^i(c_0^{2*}, c_1^{2*}, c_2^{2*}) \cdot z = \left( 1 - 2 \frac{\beta_i}{\beta_2} + \frac{\beta_i^2}{\beta_2^2} \right) \frac{1 + \beta_2 + \beta_2^2}{k_0} = \left( 1 - \frac{\beta_i}{\beta_2} \right)^2 \frac{1 + \beta_2 + \beta_2^2}{k_0}.$$

Это произведение положительно для  $i = 1$  и  $i = 3$ . Таким образом, для достаточно маленького возмущения  $(c_0^*, c_1^*, c_2^*)$  в направлении  $z$  (чуть больше потребления в периодах 0 и 2, чтобы удовлетворить нетерпеливого агента 3 и терпеливого агента 1 соответственно, и чуть меньше потребления в периоде 1, чтобы остаться в множестве допустимых альтернатив) найдется траектория  $\tilde{C} \in \mathcal{C}$ , которую агенты 1 и 3 предпочтут перед  $C^{2*}$ . Таким образом,  $C^{2*}$  тоже не является победителем по Кондорсе, а значит, победителя по Кондорсе в таком голосовании не существует.

### 6.2. Межвременное электоральное равновесие

Каким образом можно преодолеть такое “проклятие многомерности” в голосовании? Одним из способов является сужение множества допустимых альтернатив. В [36] показано, что если агенты различаются только своими коэффициентами дисконтирования и выбирают не из бесконечномерного множества всех возможных траекторий, а только из множества индивидуально оптимальных траекторий, то победителем по Кондорсе оказывается оптимальная траектория для агента с медианным коэффициентом дисконтирования. Фактически, такую процедуру можно интерпретировать как голосование за коэффициент дисконтирования.

В нашем примере эту процедуру можно описать следующим образом. Предположим, что агенты выбирают не из множества всех альтернатив  $\mathcal{C}$ , а из множества, состоящего из трех элементов  $\{C^{1*}, C^{2*}, C^{3*}\}$ . Покажем, что  $C^{2*}$  побеждает во всех попарных голосованиях, и тем самым

является победителем по Кондорсе. Действительно, рассмотрим выбор между  $C^{2*}$  и  $C^{1*}$ . Очевидно, что агент 1 предпочитает свою оптимальную траекторию  $C^{1*}$ , а агент 2 предпочитает  $C^{2*}$ . Решающий голос принадлежит агенту 3, и легко понять, что агент 3 предпочитает  $C^{2*}$  перед  $C^{1*}$ . В самом деле, величина  $c_0^{i*} = \hat{k}_0 / (1 + \beta_i + \beta_i^2)$  убывает по  $\beta_i$ , так что  $c_0^{3*} > c_0^{2*} > c_0^{1*}$ . Раз агент 2 предпочитает  $C^{2*}$  перед  $C^{1*}$ , это тем более верно для еще более нетерпеливого агента 3, который еще сильнее предпочитает потребление в начальные периоды времени. Аналогично, при выборе между  $C^{2*}$  и  $C^{3*}$ , агенты 1 и 2 предпочтут траекторию  $C^{2*}$ . Впрочем, как видно, существование однозначного исхода голосования в данном случае гарантируется за счет ограничения множества альтернатив.

Другой способ получить разумный результат голосования – слегка видоизменить определение победителя. В [37] рассматривается модель рамсеевского типа с общественным потреблением и предлагается новый подход к динамическому голосованию, основанный на понятии межвременного электорального равновесия. Данный подход базируется на трех ключевых принципах: 1) агенты голосуют пошагово; 2) агенты голосуют не по поводу абсолютной величины (уровня потребления), а по поводу относительной величины (нормы потребления); 3) агенты обладают совершенным предвидением исходов будущих голосований.

Формально, в каждом периоде агенты голосуют только за норму потребления в данном периоде, имея некоторые ожидания относительно будущих норм потребления. В таком одномерном голосовании существует единственный победитель по Кондорсе. *Межвременное электоральное равновесие* – это последовательность победителей по Кондорсе в одномерных голосованиях, полученная при условии совершенного предвидения исходов будущих голосований. В [37] показано, что если агенты неоднородны только по одному параметру (все агенты имеют одинаковые ожидания и мгновенные функции полезности, а различаются только коэффициентами дисконтирования), то победителем по Кондорсе в одномерном голосовании оказывается предпочтительная норма потребления для агента с медианным коэффициентом дисконтирования. В этом случае в модели существует единственное межвременное электоральное равновесие, и оно однозначно соответствует оптимальной траектории общественного потребления для агента с медианным коэффициентом дисконтирования.

Проиллюстрируем межвременное электоральное равновесие в нашем примере. Перепишем задачу (б.1) для агента  $i$  в терминах норм потребления  $e_0 = c_0/k_0$ ,  $e_1 = c_1/k_1$  и  $e_2 = c_2/k_2$ :

$$\max \ln(e_0 \hat{k}_0) + \beta_i \ln(e_1(1 - e_0)\hat{k}_0) + \beta_i^2 \ln(e_2(1 - e_1)(1 - e_0)\hat{k}_0).$$

Решение этой задачи, оптимальная траектория норм потребления для агента  $i$ ,  $E^{i*} = \{e_0^{i*}, e_1^{i*}, e_2^{i*}\}$ , имеет вид

$$e_0^{i*} = \frac{1}{1 + \beta_i + \beta_i^2}, \quad e_1^{i*} = \frac{1}{1 + \beta_i}, \quad e_2^{i*} = 1.$$

Очевидно, что между оптимальной траекторией в терминах уровней потреблений  $C^{i*}$  и оптимальной траекторией в терминах норм потребления  $E^{i*}$  существует взаимно однозначное соответствие – в задаче оптимизации для агента  $i$  не важно, какую из переменных использовать в качестве переменной управления. Однако такая замена переменных полностью меняет дело в контексте голосования.

Покажем прежде всего, что идея последовательности одномерных голосований не работает для уровней потреблений. Пусть в периоде времени 0 агенты имеют общие ожидания относительно будущих потреблений,  $\bar{c}_1$  и  $\bar{c}_2$ , и голосуют относительно  $c_0$ . Предпочтительный уровень потребления в периоде 0 для агента  $i$  является решением задачи

$$\max \ln c_0, \quad \text{s.t. } c_0 + \bar{c}_1 + \bar{c}_2 = \hat{k}_0.$$

Легко видеть, что данная задача оптимизации вырождена. Если будущие уровни потребления зафиксированы, то межвременное бюджетное ограничение полностью определяет предпочтительный уровень сегодняшнего потребления. Более того, предпочтительное значение  $c_0$  одинаково для всех агентов: для каждого агента оптимально потребить сегодня как можно больше, учитывая будущее потребление и начальный запас ресурса. Точно такая же логика применима к одно-

мерному голосованию относительно  $c_1$  и  $c_2$ . Таким образом, любая траектория  $\{c_0, c_1, c_2\}$ , такая что  $c_0 + c_1 + c_2 = \hat{k}_0$ , может быть получена как результат пошагового голосования относительно уровней потребления при совершенном предвидении будущих исходов. Так что в этом случае голосование тоже не приводит к однозначному результату.

Однако, если агенты формируют ожидания по поводу норм потребления, то ситуация с голосованием меняется. Пусть в периоде времени 0 агенты имеют общие ожидания по поводу будущих норм потребления,  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$ , и голосуют относительно  $e_0$ . Предпочтительная норма потребления в периоде 0 для агента  $i$  является решением задачи

$$\max \ln(e_0 \hat{k}_0) + \beta_i \ln(\bar{e}_1(1 - e_0) \hat{k}_0) + \beta_i^2 \ln(\bar{e}_2(1 - \bar{e}_1)(1 - e_0) \hat{k}_0),$$

и нетрудно убедиться, что она совпадает с  $e_0^{i*}$ , оптимальной нормой потребления в периоде 0 для агента  $i$ . Поскольку предпочтения агентов в одномерном голосовании относительно  $e_0$  однопиковые, и  $e_0^{i*}$  убывает по  $\beta_i$ , существует единственный победитель по Кондорсе, и это предпочтительная норма потребления в периоде 0 для агента 2 с медианным коэффициентом дисконтирования:  $e_0^* = e_0^{2*}$ .

Далее, пусть в периоде времени 1 агенты имеют общие ожидания относительно  $\bar{e}_2$  и голосуют по поводу  $e_1$  с учетом уже выбранной  $e_0^*$ . Предпочтительная норма потребления в периоде 1 для агента  $i$  является решением задачи

$$\max \ln(e_1(1 - e_0^*) \hat{k}_0) + \beta_i \ln(\bar{e}_2(1 - e_1)(1 - e_0^*) \hat{k}_0),$$

и снова легко видеть, что она совпадает с  $e_1^{i*}$ , оптимальной нормой потребления в периоде 1 для агента  $i$ . Единственным победителем по Кондорсе в одномерном голосовании относительно  $e_1$  является предпочтительная норма потребления в периоде 1 для агента 2,  $e_1^* = e_1^{2*}$ .

В конечный период времени 2, предпочтительная норма потребления для агента  $i$  является решением задачи

$$\max \ln(e_2(1 - e_1^*)(1 - e_0^*) \hat{k}_0),$$

и она равна  $e_2^{i*} = 1$ . Агенты голосуют единогласно, и единственный победитель по Кондорсе — это  $e_2^* = 1$ .

Таким образом, межвременное электоральное равновесие в нашем примере — последовательность победителей по Кондорсе в одномерных голосованиях за нормы потребления в периодах 0, 1 и 2, — имеет вид

$$\mathbf{E}^* = \left\{ \frac{1}{1 + \beta_2 + \beta_2^2}, \frac{1}{1 + \beta_2}, 1 \right\}.$$

Заметим, что в данном простом примере победитель по Кондорсе в каждом периоде не зависит от ожиданий, хотя в общем случае это, конечно, будет уже не так. Очевидно, что  $\mathbf{E}^*$  совпадает с оптимальной траекторией в терминах норм потребления для агента 2,  $\mathbf{E}^{2*}$ , и однозначно соответствует оптимальной траектории общественного потребления для агента 2 с медианным коэффициентом дисконтирования,  $\mathbf{C}^{2*}$ .

Таким образом, предложенный в [37] простой и естественный подход к голосованию обеспечивает микрооснования для выбора предпочтений медианного агента в качестве предпочтений общества в целом. Межвременное электоральное равновесие успешно применяется в динамических моделях общего равновесия с производственной функцией Кобба–Дугласа и логарифмическими мгновенными функциями полезности. В подобных моделях оказывается возможным в явном виде отыскать победителя по Кондорсе в одномерных голосованиях по поводу тех или иных параметров экономической политики. В частности, в [38] рассмотрена модель рамсеевского типа с неоднородным дисконтированием и исчерпаемыми природными ресурсами, в которой агенты голосуют относительно нормы извлечения ресурсов. В [39] рассмотрена модель, где агенты голосуют относительно ставок налогообложения и долей производительных и потребительских общественных благ в общем выпуске. В обоих случаях, если агенты неоднородны только по

своим коэффициентам дисконтирования, то исход голосования определяется предпочтениями агента с медианным коэффициентом дисконтирования.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Межвременные предпочтения, характеризующиеся субъективным коэффициентом дисконтирования, занимают центральное место в современной экономической теории. Рассмотренные нами в данном обзоре модели показывают, что неоднородность в межвременных предпочтениях (различие в экзогенно заданных коэффициентах дисконтирования или различие в начальном уровне богатства в случае социально обусловленных коэффициентов дисконтирования) приводит в долгосрочной перспективе к делению общества на два неравных класса: “богатых” и “бедных”. В то время как “богатые” (самые терпеливые) обладают всем запасом капитала в экономике, “бедные” (относительно нетерпеливые) ничего не сберегают и потребляют лишь необходимый минимум.

Хотя обсуждаемые нами модели с неоднородным дисконтированием носят чисто теоретический характер, они оказываются полезными и для анализа более прикладных вопросов. Например, с их помощью можно анализировать влияние той или иной экономической политики на экономический рост и неравенство (см., в частности, [40–42]) и даже осуществлять расчеты по реальным данным (см. [43], [44]). При этом схема анализа обычно основана на принципах сравнительной статистики или сравнительной динамики. Вопрос, на который исследователи пытаются дать ответ, выглядит примерно так: что произойдет, если изменятся те или иные параметры экономической политики?

В то же время хотелось бы понимать, как эти параметры выбираются. Здесь теория экономического роста встречается с теорией общественного выбора. Ряд рассмотренных нами в данном обзоре моделей показывает, что в динамическом голосовании относительно выбора параметров экономической политики существует однозначный результат, который определяется предпочтениями агента с медианным коэффициентом дисконтирования. Модели общественного выбора в условиях неоднородного дисконтирования тоже могут оказаться полезными на практике, хотя их применение наталкивается на любопытную трудность. Согласно недавним экспериментальным исследованиям, коллективные решения являются более терпеливыми, чем индивидуальные: когда люди делают выбор для общества, они гораздо чаще склонны отложить текущее потребление ради будущей выгоды, чем когда они делают выбор только для себя (см., например, [45]).

Таким образом, теоретические модели экономического роста, в которых агенты различаются своими коэффициентами дисконтирования, позволяют успешно анализировать процессы перераспределения богатства в обществе, а также проблемы коллективного принятия межвременных решений. В то же время наше рассмотрение явно указывает на необходимость заниматься более прикладными моделями, которые позволили бы приблизить исследуемые вопросы к практике. Мы надеемся, что данный обзор послужит этой цели.

Авторы благодарны Александру Шананину за крайне полезные замечания и вдумчивые комментарии. К.Ю. Борисов выражает благодарность ПАО “Северсталь” за поддержку в ходе работы над статьей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ramsey F.P.* A Mathematical Theory of Saving // *Economic Journal*. 1928. V. 38. P. 543–559.
2. *Cass D.* Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation // *Review of Economic Studies*. 1965. V. 32. P. 233–240.
3. *Koopmans T.C.* On the Concept of Optimal Economic Growth. In: *Study Week on the Econometric Approach to Development Planning*. Amsterdam: North-Holland, 1965. 38 p.
4. *Rae J.* *Statement of Some New Principles of Political Economy*. Boston: Hilliard, Gray, and Co, 1834.
5. *Fisher I.* *The Rate of Interest*. New York: Macmillan, 1907.
6. *Rader T.* *The Economics of Feudalism*. New York: Gordon and Breach, 1971.
7. *Rader T.* *Theory of General Economic Equilibrium*. New York: Academic Press, 1972.
8. *Becker R.A.* On the Long-run Steady State in a Simple Dynamic Model of Equilibrium with Heterogeneous Households // *Quarterly J. of Economics*. 1980. V. 95. I. 2. P. 375–382.
9. *Bewley T.F.* An Integration of Equilibrium Theory and Turnpike Theory // *J. of Mathematical Economics*. 1982. V. 10. P. 233–267.
10. *Becker R.A.* Equilibrium Dynamics with Many Agents. In: *Mitra T., Dana R.-A., Le Van C., Nishimura K., editors, Handbook on Optimal Growth 1. Discrete Time*. Heidelberg: Springer, 2006. P. 385–442.

11. Борисов К.Ю., Пахнин М.А. О некоторых подходах к моделированию деления общества на бедных и богатых // Ж. новой экономической ассоциации. 2018. Т. 4. № 40. С. 32–59.
12. Борисов К.Ю., Пахнин М.А. Общественное благосостояние в моделях экономического роста с неоднородными потребителями // Вестник СПбГУ: Экономика. 2019. Т. 35. № 2. С. 173–196.
13. Wang M., Rieger M.O., Hens T. How Time Preferences Differ: Evidence from 53 Countries // J. of Economic Psychology. 2016. V. 52. P. 115–135.
14. Falk A., Becker A., Dohmen T., Enke B., Huffman D., Sunde U. Global Evidence on Economic Preferences // Quarterly J. of Economics. 2018. V. 133. I. 4. P. 1645–1692.
15. Hübner M., Vannoorenberghe G. Patience and Long-run Growth // Economics Letters. 2015. V. 137. P. 163–167.
16. Kamihigashi T. A Simple Proof of the Necessity of the Transversality Condition // Economic Theory. 2002. V. 20. I. 2. P. 427–433.
17. Duran J., Le Van C. Simple Proof of Existence of Equilibrium in a One-Sector Growth Model with Bounded or Unbounded Returns From Below // Macroeconomic Dynamics. 2003. V. 7. P. 317–332.
18. Becker R.A., Boyd III J.H., Foias C.A. The Existence of Ramsey Equilibrium // Econometrica. 1991. V. 59. P. 441–460.
19. Becker R.A., Foias C.A. Characterization of Ramsey Equilibrium // J. of Economic Theory. 1987. V. 41. P. 173–184.
20. Becker R.A., Tsyganov E.N. Ramsey Equilibrium in a Two-Sector Model with Heterogeneous Households // J. of Economic Theory. 2002. V. 105. P. 188–225.
21. Sorger G. On the Structure of Ramsey Equilibrium: Cycles, Indeterminacy, and Sunspots // Economic Theory. 1994. V. 4. P. 745–764.
22. Sorger G. Chaotic Ramsey Equilibrium // International J. of Bifurcation and Chaos. 1995. V. 5. P. 373–380.
23. Mitra T., Sorger G. On Ramsey's Conjecture // J. of Economic Theory. 2013. V. 148. I. 5. P. 1953–1976.
24. Borissov K., Dubey R.S. A Characterization of Ramsey Equilibrium in a Model with Limited Borrowing // J. of Mathematical Economics. 2015. V. 56. P. 67–78.
25. Becker R.A., Borissov K., Dubey R.S. Ramsey Equilibrium with Liberal Borrowing // J. of Mathematical Economics. 2015. V. 61. P. 296–304.
26. Borissov K., Dubey R.S. Growth with Many Agents and Wages Paid *ex ante* // Economic Modelling. 2020. V. 89. P. 101–107.
27. Le Van C., Vailakis Y. Existence of a Competitive Equilibrium in a One Sector Growth Model with Heterogeneous Agents and Irreversible Investment // Economic Theory. 2003. V. 22. I. 4. P. 743–771.
28. Becker R.A., Mitra T. Efficient Ramsey Equilibria // Macroeconomic Dynamics. 2012. V. 16, I. S1, P. 18–32.
29. Borissov K. Growth and Distribution in a Model with Endogenous Time Preferences and Borrowing Constraints // Mathematical Social Sciences. 2013. V. 66. P. 117–128.
30. Borissov K., Lambrecht S. Growth and Distribution in an AK-model with Endogenous Impatience // Economic Theory. 2009. V. 39. I. 1. P. 93–112.
31. Борисов К.Ю., Подкорытова О.А. О влиянии неравенства в распределении доходов на темпы экономического роста // Вестник СПбГУ: Экономика. 2006. Т. 1. С. 155–168.
32. Pakhnin M. Collective Choice with Heterogeneous Time Preferences // J. of Economic Surveys. 2022. P. 1–32.
33. Boylan R.T., McKelvey R.D. Voting over Economic Plans // American Economic Review. 1995. V. 85. I. 4. P. 860–871.
34. Boylan R.T., Ledyard J., McKelvey R.D. Political Competition in a Model of Economic Growth: Some Theoretical Results // Economic Theory. 1996. V. 7. P. 191–205.
35. Jackson M.O., Yariv L. Collective Dynamic Choice: The Necessity of Time Inconsistency // American Economic Journal: Microeconomics. 2015. V. 7. I. 4. P. 150–178.
36. Beck N. Social Choice and Economic Growth // Public Choice. 1978. V. 33. I. 2. P. 33–48.
37. Borissov K., Pakhnin M., Puppe C. On Discounting and Voting in a Simple Growth Model // European Economic Review. 2017. V. 94. P. 185–204.
38. Borissov K., Pakhnin M. Economic Growth and Property Rights on Natural Resources // Economic Theory. 2018. V. 65. I. 2. P. 423–482.
39. Borissov K., Hanna J., Lambrecht S. Public Goods, Voting, and Growth // J. of Public Economic Theory. 2019. V. 21. I. 6. P. 1221–1265.
40. Mankiw N.G. The Savers-Spenders Theory of Fiscal Policy // American Economic Review. 2000. V. 90. I. 2. P. 120–125.
41. Palivos T. Optimal Monetary Policy with Heterogeneous Agents: A Case for Inflation // Oxford Economic Papers. 2005. V. 57. I. 1. P. 34–50.
42. Smetters K. Ricardian Equivalence: Long-run Leviathan // J. of Public Economics. 1999. V. 73. I. 3. P. 395–421.
43. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 6. С. 1034–1056.
44. Шананин А.А., Тарасенко М.В., Трусов Н.В. Consumer Loan Demand Modeling // Communications in Computer and Information Science. 2021. V. 1476. P. 417–428.
45. Glätzle-Rützler D., Lergetporer P., Sutter M. Collective Intertemporal Decisions and Heterogeneity in Groups // Games and Economic Behavior. 2021. V. 130. P. 131–147.

---

---

**ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ**

---

---

УДК 519.865

**МОДЕЛЬ ФИНАНСОВОЙ ПИРАМИДЫ  
С “КВАЗИРАЦИОНАЛЬНЫМИ” УЧАСТНИКАМИ<sup>1)</sup>**

© 2023 г. Н. С. Кукушкин<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup> 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, Россия

<sup>2</sup> 141701 Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

\*e-mail: ququns@inbox.ru

Поступила в редакцию 02.05.2022 г.

Переработанный вариант 23.10.2022 г.

Принята к публикации 14.11.2022 г.

Предлагается модель финансовой пирамиды, где каждый участник принимает решения о входе в пирамиду и выходе из нее на основе принципа гарантированного результата, опираясь на свои представления о характеристиках других участников. Если организаторы пирамиды имеют возможность провести весь процесс достаточно быстро (так, чтобы выплаты агентам, поучаствовавшим в пирамиде и вовремя ее покинувшим, не имели слишком большого значения), то в результате неудачниками окажутся в точности те агенты, кто имел завышенную оценку доли неудачников в общей массе агентов. Библ. 14.

**Ключевые слова:** финансовая пирамида, ограниченная рациональность, принцип гарантированного результата, неподвижная точка.

**DOI:** 10.31857/S0044466923030080, **EDN:** DYIZFX

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Период “рыночных реформ” 1990-х годов в РФ ознаменовался, помимо прочего, обилием финансовых пирамид. Одного этого факта должно быть достаточно, чтобы оправдать интерес к такого рода феноменам, тем более что они наблюдались и наблюдаются не только в этот период и не только в РФ.

Надо сказать, что чередование взлетов и падений цен каких-то активов, часто выглядящее совершенно необъяснимым, характерно для рыночной экономики и отнюдь не обделено вниманием экономической науки (см. [1–12]). Далекое не все колебания такого рода являются результатом чьих-то целенаправленных манипуляций.

Здесь нет и речи об этой проблематике в ее полной общности; принимая финансовую пирамиду как данность, будем думать о логике агентов, несущих (или не несущих) туда свои деньги, понимая, что они имеют дело именно с пирамидой.

Разумеется, поведение жертв финансовых пирамид можно объяснять просто глупостью; однако универсальный характер такого объяснения делает его не особенно интересным. Более того, не все участники оказываются жертвами, так что утверждение об их глупости может быть подвергнуто сомнению. Например, Исаак Ньютон правильно расценил South Sea Bubble как пузырь (в сущности, пирамиду), но вошел туда и вскоре вышел с прибылью (см. [13]) (правда, он позже вошел еще раз и потерял свои инвестиции).

Автору неоднократно приходилось слышать примерно такую мотивировку для участия: “да, я понимаю, что это просто пирамида и кто-то останется в дураках, но пока оно все лопнет, я еще успею получить свой небольшой выигрыш”. Именно эта позиция и будет предметом анализа.

В предлагаемой здесь модели фигурируют агенты, в принципе, готовые участвовать в возникающей на их глазах пирамиде, но различающиеся своими представлениями о безопасном разmere пирамиды. Каждый имеет оценку снизу числа “неудачников”, т.е. агентов, которые войдут в пирамиду и не успеют из нее выйти. Опираясь на эту свою оценку, каждый агент принимает все решения, исходя из принципа наибольшего гарантированного результата, т.е. вполне рацио-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 23-11-00129).

нальным образом (см. [14]). Единственное слабое место – сама оценка, которая вполне может оказаться (и оказывается у кого-то) ошибочной; в этом смысле поведение агентов только “квази” рационально.

Сосредотачиваясь именно на этом аспекте проблемы, на результатах взаимодействия различных представлений об окружающей действительности, мы игнорируем все прочие. В частности, мы полностью исключаем какой-либо обман, дезинформацию, хотя в некоторых реальных примерах именно этот аспект был решающим (Madoff's case). У нас все участники вполне отдают себе отчет, что они имеют дело именно с финансовой пирамидой, и что весь процесс неизбежно закончится тем, что кто-то лишится своих денег; просто каждый полагает, что уж он-то не попадет в число проигравших. Более того, мы предполагаем, что организаторы своевременно и точно информируют действительных и потенциальных участников о текущем положении дел, и что участники, решившие покинуть пирамиду до момента краха, не встретят никаких препятствий.

Не совсем традиционный характер предлагаемой модели требует нетрадиционной организации изложения: приходится начинать с середины, как бы предполагая, что все концы можно связать, и только затем действительно связывать их с помощью точных формулировок и доказательств. В следующем разд. 2 описывается общий облик модели и вводятся необходимые обозначения. В разд. 3 анализируется принятие решений отдельным агентом, который вынужден воспринимать пирамиду как природный процесс, не доступный его влиянию, и устанавливается “оптимальная гарантирующая” стратегия агента. В разд. 4 доказываются существование и единственность процесса, порождаемого таким “оптимальным” поведением агентов. Наконец, в разд. 5 ситуация анализируется с точки зрения организаторов пирамиды и устанавливаются условия, при которых число неудачников, в исходной формулировке определяемое лишь постфактум, по результатам всего процесса, оказывается в действительности определяемым исходными данными модели.

## 2. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА

В самых общих чертах наша модель выглядит так: есть два типа действующих лиц – команда организаторов пирамиды (выступающая как один агент, “Организатор”) и потенциальные участники (в т.ч. будущие жертвы) пирамиды. В дальнейшем изложении слово “агент” относится только к потенциальным участникам пирамиды. Весь процесс развивается в непрерывном времени; каждый агент в какой-то момент добровольно принимает решение: стоит ли ему участвовать, стремясь максимизировать свою “гарантированную” прибыль, опираясь на свою априорную оценку и доступную в момент принятия решения информацию.

Не участвующие агенты ничего не приобретают и ничего не теряют при любом развитии событий. Каждый участвующий агент вносит на свой счет фиксированную сумму денег (единицу) сразу при входе, затем этот счет растет с непрерывно начисляемым сложным процентом. В любой момент участник может потребовать закрытия счета; тогда вся сумма немедленно выплачивается. В любой момент Организатор может завершить процесс и исчезнуть со всеми оставшимися деньгами. Таким образом, постфактум все участники пирамиды делятся на два подмножества: тех, кто успел вовремя ее покинуть, и тех, кто не успел. Первые получают обратно первоначальный взнос плюс накопившиеся проценты; вторые теряют первоначальный взнос. Организатор получает взносы всех неудачников минус проценты, выплаченные покинувшим пирамиду вовремя.

Все агенты составляют бесконечно делимую массу, каждый агент бесконечно мал. Агенты не проявляют никакой инициативы; в каждый момент времени некоторая (бесконечно малая) их часть получает предложение/возможность вступить в пирамиду, и каждый из них реагирует так, как считает нужным. В дальнейшем этот процесс называется “сканированием” агентов. Как именно происходит это сканирование, не имеет значения для наших целей: можно представлять себе как самопроизвольную диффузию информации о пирамиде среди массы агентов, так и целенаправленную кампанию Организатора. Ключевое предположение – независимость внутренних характеристик агентов и момента сканирования; другими словами, контингент, сканируемый в каждый отдельный момент, имеет те же характеристики, что и вся масса.

Агент, вошедший в пирамиду в момент  $t$  и успевший покинуть ее в момент  $t + \Delta$ , получает обратно  $\exp(\delta \cdot \Delta)$ , т.е. его чистый выигрыш составляет  $\exp(\delta \cdot \Delta) - 1$ ; для организатора эта величина – потери. Повторного предложения вступить агенту, однажды отказавшемуся или ранее вышедшему из пирамиды, не бывает; наш полный набор предположений обеспечивает, что такое предположение все равно было бы отвергнуто.

В какой-то момент  $t^*$ , выбираемый Организатором, он заканчивает процесс и исчезает с деньгами. Агент, решивший войти в пирамиду в момент  $t^*$ , просто теряет свои деньги. Если какой-то агент, бывший в пирамиде, решает покинуть ее в этот самый последний момент  $t^*$ , то считается, что он успеет забрать свои деньги, а уж потом (но в тот же самый момент!) Организатор исчезнет. Последнее предположение обосновывается тем, что доля агентов, покидающих пирамиду в любой конкретный момент, оказывается бесконечно малой, поэтому выплаты в момент  $t^*$  не влияют на доход Организатора; для участников же обеспечивается существование “оптимальной”, “условно гарантирующей”, стратегии.

Динамика процесса описывается двумя функциями времени:  $\sigma(t)$  — доля массы агентов, просканированная к моменту  $t$ , и  $m(t)$  — доля, состоящая в пирамиде на момент  $t$ . В начальный момент  $t = 0$ , естественно,  $\sigma(0) = m(0) = 0$ . Финальное значение  $m(t^*)$  характеризует долю неудачников или “дураков” в популяции. В соответствии с нашей общей установкой на максимальную открытость, текущее значение  $m(t)$  общеизвестно в любой момент  $t$ .

Допустимым режимом сканирования будем называть отображение  $\sigma : [0, \bar{t}] \rightarrow [0, 1]$  (где константа  $\bar{t} > 0$  входит в описание режима), удовлетворяющее условиям: строго возрастает, непрерывно,  $\sigma(0) = 0$  и  $\sigma(\bar{t}) = 1$ . В дальнейшем рассматриваются и ситуации, когда режим сканирования устанавливается Организатором, и ситуации, когда он задан экзогенно. Выбор  $t^* \in [0, \bar{t}]$  в любом случае остается за Организатором.

Функция  $m(\cdot)$  определяется как режимом сканирования  $\sigma(\cdot)$ , так и решениями индивидуальных (“бесконечно малых”) агентов. Поскольку решение о выходе может быть принято любым агентом в любой момент, априори нельзя исключить скачки  $m(t)$  вниз. Скачки же вверх невозможны из-за непрерывности  $\sigma(\cdot)$ . Другими словами,

$$\liminf_{t' \rightarrow t-0} m(t') \geq m(t) \geq \limsup_{t' \rightarrow t+0} m(t') \quad (2.1)$$

при всех  $t \in ]0, t^* [$ . Это свойство (“полу непрерывность слева снизу и справа сверху”) имеет простое, но полезное следствие.

**Лемма 1.** Пусть  $0 \leq t^- < t^+ \leq t^*$  и  $m(t^-) < \alpha \leq m(t^+)$ ; обозначим  $t^0 := \inf\{t \in [t^-, t^+] \mid \alpha \leq m(t)\}$ . Тогда  $m(t^0) = \alpha$ .

**Доказательство.** Правое неравенство в (2.1) при  $t = t^0$  обеспечивает неравенство  $m(t^0) \geq \alpha$  и, следовательно,  $t^0 > t^-$ . Теперь левое неравенство в (2.1) обеспечивает неравенство  $m(t^0) \leq \alpha$ .

### 3. СТРАТЕГИИ АГЕНТОВ

Если говорить о решениях, принимаемых каждым отдельным агентом, то, прежде всего, он должен решить входит ли в пирамиду, когда (если) до него дойдет процесс сканирования. В случае отказа последствия сразу ясны — нулевой выигрыш, и больше никаких решений принимать не придется. При вступлении же в пирамиду, вообще говоря, агент должен будет в каждый следующий момент решать, не пора ли выходить. В случае своевременного выхода агент получит строго положительный выигрыш, если же Организатор убежит раньше (в том числе, в самый момент входа), то “выигрыш” агента окажется отрицательным. И в том, и в другом случае, принимающему решению агенту известны текущие момент времени  $t$  и объем пирамиды  $m(t)$ . Более того, мы будем считать известной и всю предысторию, т.е. функцию  $m(\cdot)$ .

Помимо этой текущей информации, каждый агент имеет свое индивидуальное представление о всей совокупности агентов, а именно, свою субъективную оценку снизу доли неудачников. Принимая решение о входе в пирамиду или выходе из нее, агент максимизирует гарантированный (если верить этой оценке) доход. Подчеркнем, что эта оценка постоянна, никакого обучения в процессе участия в пирамиде не предусмотрено (процесс занимает слишком малое время).

Соответствующие формальные конструкции развернуты ниже; сначала мы дадим неформальное описание и объяснение оптимальной стратегии.

Пусть  $\delta > 0$  и агент, просканированный в момент  $t$ , уверен, что доля  $m(t^*)$  неудачников в общей массе агентов не меньше  $\alpha$ . Если  $m(t) \geq \alpha$ , то в его картине мира вполне возможно, что Организатор убежит в этот самый момент ( $t^* = t$ ), что приведет к отрицательному “выигрышу”

агента в случае входа в пирамиду; воздержавшись же от входа, агент имеет гарантированный нулевой результат. Напротив, при  $m(t) < \alpha$ , агент уверен, что пирамида продержится еще какое-то время, поэтому можно входить безбоязненно, рассчитывая на положительный выигрыш.

Аналогично, если в момент  $t$  агент уже находится в пирамиде и  $m(t) \geq \alpha$ , то Организатор может убежать в этот самый момент ( $t^* = t$ ) и “выигрыш” агента окажется отрицательным; приняв же решение о выходе, агент фиксирует положительный выигрыш. Если же  $m(t) < \alpha$ , то, по мнению агента, Организатор убежит в какой-то момент  $t^* > t$ , когда будет  $m(t^*) \geq \alpha$ . Согласно лемме 1, сначала должен произойти момент  $\tau \in [t, t^*]$ , в который  $m(\tau) = \alpha$ , поэтому агент спокойно покинет пирамиду в этот самый момент  $\tau$ , опять-таки фиксируя положительный выигрыш. В итоге, агент остается в пирамиде.

Перейдем теперь к формальному описанию стратегий агентов. По общим правилам теории игр стратегией следует считать набор отображений, преобразующих информацию, доступную агенту в соответствующий момент, в принимаемое решение. С решениями разобраться проще всего: будем обозначать  $\mathcal{D}$  множество  $\{\top, \perp\}$ , интерпретируемое как множество элементарных решений агента ( $\top$  означает вход в пирамиду или продолжение участия,  $\perp$  – отказ от входа или выход).

Доступной наблюдению информацией будем считать текущий момент времени и реализованную до сих пор траекторию  $m(\cdot)$ . Будем обозначать  $\mathcal{M}$  множество пар  $\langle t^0, m(\cdot) \rangle$ , где  $t^0 \geq 0$ , а  $m(\cdot)$  – функция  $[0, t^0] \rightarrow [0, 1]$ , у которой  $m(0) = 0$ , неравенства (2.1) справедливы при всех  $t \in ]0, t^0[$ , а при  $t = t^0$  справедливо левое неравенство в (2.1). Будем обозначать  $\mathcal{S}$  множество отображений  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$ ; тогда стратегии каждого агента образуют множество  $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$  – при решении вопроса о входе применяется первая компонента, при решении вопроса о выходе – вторая.

Запишем теперь выигрыш агента, применяющего определенную стратегию  $\bar{s} = (s_1, s_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ , если в какой-то момент  $t^0$  ему предоставится возможность войти в пирамиду. Этот выигрыш, естественно, зависит от всей динамики пирамиды (которая неизвестна агенту в момент  $t^0$ ); соответственно, обозначать его будем  $U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle)$ . Для точных формулировок потребуется еще одно обозначение. Пусть  $\langle t^*, m(\cdot) \rangle \in \mathcal{M}$  и  $t^0 \leq t^*$ ; будем обозначать  $m(\cdot|t^0)$  ограничение функции  $m(\cdot)$  на отрезок  $[0, t^0]$ .

Итак, если  $s_1(\langle t^0, m(\cdot|t^0) \rangle) = \perp$  (агент не вошел в пирамиду), то  $U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle) := 0$  независимо от всего остального. Пусть  $s_1(\langle t^0, m(\cdot|t^0) \rangle) = \top$  (агент вошел в пирамиду); обозначим

$$T^* := \{t \in [t^0, t^*] | s_2(\langle t, m(\cdot|t) \rangle) = \perp\}. \tag{3.1}$$

Если  $T^* = \emptyset$  (агент оставался в пирамиде до конца), то  $U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle) := -1$ . В противном случае (агент успел выйти из пирамиды), обозначая  $\Delta := \inf T^* - t^0$ , положим  $U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle) := \exp(\delta \cdot \Delta) - 1$ .

**Замечание 1.** Если  $T^* \neq \emptyset$ , то агент успевает выйти из пирамиды, однако точный момент выхода может остаться неопределенным, если  $s_2(\langle t^0 + \Delta, m(\cdot|t^0 + \Delta) \rangle) = \top$ ; тем не менее, выигрыш,  $\exp(\delta \cdot \Delta) - 1$ , определен однозначно, поскольку он зависит от момента выхода непрерывным образом.

Пусть  $\alpha \in [0, 1]$ ; определим отображение  $s^\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$  следующим образом:

$$s^\alpha(\langle t, m(\cdot) \rangle) := \begin{cases} \perp, & m(t) \geq \alpha; \\ \top, & m(t) < \alpha. \end{cases} \tag{3.2}$$

Теперь предложенная в начале раздела стратегия агента записывается как  $\bar{s}^\alpha := (s^\alpha, s^\alpha) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ .

**Замечание 2.** В стратегии  $\bar{s}^\alpha$  не используются две возможности, предусмотренные общим определением стратегии: решения о входе и о выходе принимаются по одному и тому же правилу, а информация о всей предыстории,  $m(\cdot|t^0)$ , вообще никак не используется. Тем не менее, чтобы утвер-

ждать ненужность этих возможностей, было необходимо сначала включить их в определение стратегии.

Будем обозначать  $\mathcal{M}^\alpha$  (при  $\alpha \in [0,1]$ ) множество пар  $\langle t^*, m(\cdot) \rangle \in \mathcal{M}$ , удовлетворяющих условию  $m(t^*) \geq \alpha$ .

**Предложение 1.** Пусть  $\alpha \in [0,1]$ ,  $\langle t^*, m(\cdot) \rangle \in \mathcal{M}^\alpha$ ,  $t^0 \leq t^*$ , и  $\bar{s} = (s_1, s_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ . Тогда найдется  $t^{**} \in [t^0, t^*]$ , при котором  $\langle t^{**}, m(\cdot) \rangle \in \mathcal{M}^\alpha$  и

$$U(\bar{s}^\alpha; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle) \geq U(\bar{s}; t^0, \langle t^{**}, m(\cdot) \rangle). \quad (3.3)$$

**Доказательство.** Мы рассмотрим две базовые альтернативы. Пусть  $s^\alpha(\langle t^0, m(\cdot|t^0) \rangle) = \perp$ ; тогда  $m(t^0) \geq \alpha$  и  $U(\bar{s}^\alpha; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle) = 0$ . Теперь, если  $s_1(\langle t^0, m(\cdot|t^0) \rangle) = \perp$ , то  $U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle) = 0$  и (3.3) выполняется (как равенство) при  $t^{**} = t^*$ . Если же  $s_1(\langle t^0, m(\cdot) \rangle) = \top$ , то  $U(\bar{s}; t^0, \langle t^0, m(\cdot) \rangle) = -1$ ,  $\langle t^0, m(\cdot|t^0) \rangle \in \mathcal{M}^\alpha$  и (3.3) выполняется (как строгое неравенство) при  $t^{**} = t^0$ .

Пусть теперь  $s^\alpha(\langle t^0, m(\cdot|t^0) \rangle) = \top$  и, следовательно,  $m(t^0) < \alpha$ . Поскольку  $\langle t^*, m(\cdot) \rangle \in \mathcal{M}^\alpha$ , для  $T^\alpha$ , определенного аналогично  $T^*$  при замене в равенстве (3.1)  $s_2$  на  $s^\alpha$ , имеем  $t^* \in T^\alpha \neq \emptyset$ . Обозначив  $t^\rightarrow := \inf T^\alpha$  и применяя лемму 1 с  $t^- = t^0$  и  $t^+ = t^*$ , получаем  $m(t^\rightarrow) = \alpha$ . Таким образом,  $U(\bar{s}^\alpha; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle) = \exp(\delta \cdot (t^\rightarrow - t^0)) - 1 > 0$ .

Если теперь  $s_1(\langle t^0, m(\cdot|t^0) \rangle) = \perp$ , то  $U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle) = 0$  и (3.3) выполняется (как строгое неравенство) при  $t^{**} = t^*$ . Если же  $s_1(\langle t^0, m(\cdot|t^0) \rangle) = \top$ , то мы определяем  $T^*$  равенством (3.1). Если теперь  $T^* = \emptyset$ , то  $U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle) = -1$  и (3.3) выполняется (как строгое неравенство) при  $t^{**} = t^*$ . В противном случае обозначаем  $t^\rightarrow := \inf T^*$ ; если  $t^\rightarrow \leq t^\rightarrow$ , то (3.3) выполняется опять-таки при  $t^{**} = t^*$  (как строгое неравенство или как равенство). Наконец, если  $t^\rightarrow > t^\rightarrow$ , то (3.3) выполняется (как строгое неравенство) при  $t^{**} = t^\rightarrow$ . Предложение доказано.

**Следствие 1.** При любых  $\alpha \in [0,1]$  и  $\bar{s} \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$  справедливо

$$\inf\{U(\bar{s}^\alpha; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle) | \langle t^*, m(\cdot) \rangle \in \mathcal{M}^\alpha \text{ \& } t^0 \leq t^*\} \geq \inf\{U(\bar{s}; t^0, \langle t^*, m(\cdot) \rangle) | \langle t^*, m(\cdot) \rangle \in \mathcal{M}^\alpha \text{ \& } t^0 \leq t^*\}. \quad (3.4)$$

**Замечание 3.** Следствие 1 к предложению 1, вроде бы, само по себе утверждает, что  $\bar{s}^\alpha$  – оптимальная гарантирующая стратегия. Оно, однако, не исключает ситуации, когда инфимум в (3.4) для  $\bar{s}^\alpha$  достигается, а какая-то другая стратегия  $\bar{s} \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$  обеспечивает тот же инфимум, но при этом не достигающийся (и тем самым  $\bar{s}$  оказывается “все же несколько надежнее”  $\bar{s}^\alpha$ ). Предложение 1 исключает и такую возможность.

#### 4. ДИНАМИКА ПРОЦЕССА

В этом разделе развитое до сих пор полуформальное описание динамики роста пирамиды преобразуется в формально-математические конструкции.

Итак, вся совокупность агентов представляет собой единичный квадрат  $A := [0,1] \times [0,1]$ ; каждый отдельный агент характеризуется парой  $(\beta, \alpha) \in A$ , где ордината  $\alpha$  выражает оценку агентом доли неудачников во всей массе агентов, а абсцисса  $\beta$  – что-то вроде “номера в очереди на сканирование”. На  $A$  задана мера – прямое произведение мер на координатных отрезках: стандартная мера Лебега (равномерное распределение) на оси абсцисс, а на оси ординат распределение, заданное непрерывной функцией плотности  $p$ , удовлетворяющей условиям  $p(a) \geq 0$  для всех  $a$  и  $\int_0^1 p(a) da = 1$ . Таким образом, мера всего множества  $A$  равна 1. Удобно рассматривать “дополнительную” функцию распределения ординаты:  $P(\alpha) := \int_\alpha^1 p(a) da$ , “вероятность того, что

случайно выбранный агент оценивает долю неудачников в массе агентов числом бóльшим (бóльшим или равным)  $\alpha$ ”; функция  $P$  непрерывна и убывает от 1 до 0.

Пусть заданы допустимый режим сканирования  $\sigma : [0, \bar{t}] \rightarrow [0, 1]$  и момент завершения процесса  $t^* \in [0, \bar{t}]$  (пока неважно, кем и как заданы). Поскольку  $\sigma(\cdot)$  непрерывна и строго возрастает, существует также непрерывная и строго возрастающая обратная функция  $\vartheta : \sigma([0, t^*]) \rightarrow [0, t^*]$ , так что  $\vartheta(\beta)$  – момент сканирования агентов с данным  $\beta$ .

Динамика состояния пирамиды задается семейством измеримых подмножеств  $\Pi(t) \subseteq A$  ( $t \in [0, t^*]$ ), где  $(\beta, \alpha) \in \Pi(t)$  означает, что агент  $(\beta, \alpha)$  состоит в пирамиде в момент  $t$ . Мэру множества  $\Pi(t)$  будем обозначать  $m(t)$ .

Сформулированные выше полужормально предположения, включая предположение, что каждый агент принимает решения о входе-выходе, руководствуясь стратегией (3.2), могут теперь быть выражены одним условием:

$$(\beta, \alpha) \in \Pi(t) \Leftrightarrow [\beta \leq \sigma(t) \ \& \ \forall t' \in [\vartheta(\beta), t][\alpha > m(t')]]. \tag{4.1}$$

Имеет смысл обсудить этот момент подробнее. Для того, чтобы агент  $(\beta, \alpha)$  в момент  $t$  оказался в пирамиде, необходимо, во-первых, чтобы он на этот момент был уже просканирован (первый член конъюнкции в правой части (4.1)) и, во-вторых, чтобы с самого его момента сканирования  $\vartheta(\beta)$  и до текущего момента  $t$  выполнялось условие в нижней строке (3.2) (второй член конъюнкции в правой части). Это необходимое условие одновременно и достаточно.

**Теорема 1.** При любой непрерывной плотности распределения  $p(\cdot)$ , любом допустимом режиме сканирования  $\sigma : [0, \bar{t}] \rightarrow [0, 1]$  и любом  $t^* \in [0, \bar{t}]$  существует единственное семейство измеримых подмножеств  $\Pi(t) \subseteq A$  ( $t \in [0, t^*]$ ), удовлетворяющее условию (4.1).

**Доказательство.** Для доказательства теоремы используем следующую лемму.

**Лемма 2.** Если система подмножеств  $\Pi(t)$  удовлетворяет условию (4.1), то в любой момент  $t \in [0, t^*]$  справедливо равенство

$$\Pi(t) = [0, \sigma(t)] \times ]m(t), 1]. \tag{4.2}$$

**Доказательство леммы 2.** Вложение  $\Pi(t) \subseteq [0, \sigma(t)] \times ]m(t), 1]$  сразу следует из (4.1); оно может быть строгим лишь в том случае, если  $T^* := \{t' \in [0, t] | m(t') > m(t)\}$  не пусто (заметим, что  $t \notin T^*$  в любом случае). Чтобы вывести из непустоты  $T^*$  противоречие, потребуется сравнительно длинное рассуждение.

Пусть  $t^0 \in T^*$ , т.е.  $m(t^0) > m(t)$ ; обозначим  $w^0 := \sup_{\tau \in [t^0, t]} m(\tau) \geq m(t^0)$ . Если  $w^0 = m(t^0)$ , то мы у цели: поскольку  $\alpha > m(t^0) \geq m(\tau)$  при всех  $(\beta, \alpha) \in \Pi(t^0)$  и  $\tau \in [t^0, t]$ , получаем, что второй член конъюнкции в правой части (4.1) остается истинным вплоть до текущего момента  $t$ , откуда  $\Pi(t^0) \subseteq \Pi(t)$ , что несовместимо с неравенством  $m(t^0) > m(t)$ .

В противном случае, т.е. при  $w^0 > m(t^0)$ , выберем  $t^1 \in [t^0, t]$ , для которого  $m(t^1) > \max\{w^0 - 1/2, m(t^0)\}$ , и обозначим  $w^1 := \sup_{\tau \in [t^1, t]} m(\tau) \geq m(t^1)$ . Если теперь  $w^1 = m(t^1)$ , то получаем  $\Pi(t^1) \subseteq \Pi(t)$  и то же самое противоречие.

Если же  $w^1 > m(t^1)$ , то продолжаем в том же духе: выбираем  $t^2 \in [t^1, t]$ , для которого  $m(t^2) > \max\{w^1 - 1/4, m(t^1)\}$ , обозначаем  $w^2 := \sup_{\tau \in [t^2, t]} m(\tau) \geq m(t^2)$  и т.д. В результате мы получаем либо  $\Pi(t^k) \subseteq \Pi(t)$  на каком-то шаге  $k$ , т.е. искомое противоречие, либо бесконечную последовательность  $\{t^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , у которой  $t > t^{k+1} > t^k$ ,  $m(t^{k+1}) > m(t^k) > m(t)$  и  $w^k \geq w^{k+1}$  при всех  $k$ . В последнем случае обозначим  $t^\infty := \sup_k t^k (= \lim_{k \rightarrow \infty} t^k)$ ,  $w^\infty := \sup_k m(t^k) (= \lim_{k \rightarrow \infty} m(t^k))$  и  $\Delta := (m(t^0) - m(t))/2 (> 0)$ . Важно заметить, что способ выбора  $t^k$  на каждом шаге обеспечивает равенства  $w^\infty = \inf_k w^k = \lim_{k \rightarrow \infty} w^k$ .

Поскольку  $m(t^k) \rightarrow w^\infty \leftarrow w^k$ , а  $P$  непрерывна, имеем  $P(m(t^k)) - P(w^k) < \Delta$  для достаточно больших  $k$ ; зафиксируем одно такое  $k$ . Как отмечено в самом начале доказательства леммы, имеет место вложение  $\Pi(t^k) \subseteq [0, \sigma(t^k)] \times ]m(t^k), 1]$ , следовательно,

$$\Pi(t^k) = \{(\beta, \alpha) \in \Pi(t^k) \mid m(t^k) < \alpha \leq w^k\} \cup \{(\beta, \alpha) \in \Pi(t^k) \mid w^k < \alpha\}.$$

Выбор  $k$  обеспечивает, что мера первой “половины”  $\Pi(t^k)$  меньше  $\Delta$ . Учитывая, что  $m(t^k) - m(t) > 2\Delta$ , получаем, что мера второй “половины”,  $\Pi(t^k) \cap ([0, \sigma(t^k)] \times ]w^k, 1])$ , превышает  $m(t)$ , меру множества  $\Pi(t)$ . С другой стороны, для любого агента  $(\beta, \alpha)$  из этой второй “половины” второй член конъюнкции в правой части (4.1) остается истинным вплоть до момента  $t$ , откуда  $\Pi(t^k) \cap ([0, \sigma(t^k)] \times ]w^k, 1]) \subseteq \Pi(t)$  – опять то же самое, на этот раз окончательное, противоречие. Лемма доказана.

Равенство (4.2) немедленно дает нам равенство

$$m(t) = \sigma(t)P(m(t)) \quad (4.3)$$

при всех  $t \in [0, t^*]$ .

При произвольном  $\beta \in [0, 1]$  определим отображение  $f_\beta : [0, 1] \rightarrow [-1, 1]$  равенством  $f_\beta(\alpha) := \beta P(\alpha) - \alpha$ ; поскольку  $P$  непрерывна и убывает,  $f_\beta(0) = \beta$  и  $f_\beta(1) = -1$ , существует единственное решение  $\mu(\beta)$  уравнения  $f_\beta(\mu(\beta)) = 0$ :

$$\mu(\beta) = \beta P(\mu(\beta)). \quad (4.4)$$

Поскольку  $f_\beta(\alpha)$  строго возрастает по  $\beta$  при любом  $\alpha \in [0, 1]$ , функция  $\mu$  строго возрастает на  $[0, 1]$ .

Учитывая (4.4), равенство (4.3) можно переписать как

$$m(t) = \mu(\sigma(t)), \quad (4.5)$$

а отсюда

$$\Pi(t) = [0, \sigma(t)] \times ]\mu(\sigma(t)), 1] \quad (4.6)$$

при всех  $t \in [0, t^*]$ .

Поскольку отображение  $\mu$  определяется исключительно функцией  $P$ , равенство (4.6) сразу доказывает единственность системы подмножеств  $\Pi(t)$ . Если же, наоборот, использовать его в качестве определения  $\Pi(t)$ , то получаем и существование: мерой каждого множества  $\Pi(t)$  будет  $\sigma(t) \cdot P(\mu(\sigma(t)))$ , что, согласно (4.4), совпадает с  $\mu(\sigma(t))$ , а отсюда сразу следует (4.2); последнее же равенство сразу влечет условие (4.1). Теорема доказана.

Равенства (4.4) и (4.5) сразу дают важное свойство:

$$m(t) = \alpha \Leftrightarrow \sigma(t) = \alpha/P(\alpha). \quad (4.7)$$

Другими словами, текущий объем пирамиды и объем просканированной массы агентов связаны жестким образом, не зависящим от режима сканирования, который определяет лишь связь между  $\alpha$  и  $t$  в (4.7).

По завершении процесса вся совокупность агентов оказывается разделенной на три подмножества: те, кто вообще не участвовал в пирамиде,  $A^0 := A \setminus \bigcup_{t \in [0, t^*]} \Pi(t)$ ; неудачники, кто вошел в пирамиду и не успел вовремя ее покинуть,  $A^+ := \Pi(t^*)$ ; наконец, те, кто вошел и успел выйти,  $A^- := A \setminus (A^0 \cup A^+)$ . (“Плюсы” и “минусы” расставлены с точки зрения Организатора.) Важно, что это разбиение не зависит от режима сканирования и определяется исключительно объемом пирамиды в момент завершения.

**Предложение 2.** Пусть заданы допустимый режим сканирования  $\sigma : [0, \bar{t}] \rightarrow [0, 1]$  и  $t^* \in [0, \bar{t}]$ . Имея в виду процесс, определенный в теореме 1, обозначим  $\alpha^* := m(t^*)$  и  $\beta^* := \alpha^*/P(\alpha^*)$ . Тогда справедливы равенства  $A^0 = (]\beta^*, 1] \times [0, 1]) \cup \{(\beta, \alpha) \in [0, \beta^*] \times [0, \alpha^*] \mid \beta > \alpha/P(\alpha)\}$ ;  $A^+ = \Pi(t^*) = [0, \beta^*] \times ]\alpha^*, 1]$ ;  $A^- = \{(\beta, \alpha) \in [0, \beta^*] \times [0, \alpha^*] \mid \beta \leq \alpha/P(\alpha)\}$ .

**Доказательство.** Согласно равенству (4.7),  $\sigma(t^*) = \beta^*$ . Следовательно, агенты с  $\beta > \beta^*$  не будут просканированы и заведомо останутся вне пирамиды; этим объясняется первая компонента в выражении для  $A^0$ . Если  $\alpha > \alpha^*$ , то агент  $(\beta, \alpha)$  обязательно войдет в пирамиду, если будет просканирован, т.е. если  $\beta \leq \beta^*$ , и не выйдет до самого конца; отсюда  $A^+ \supseteq [0, \beta^*] \times [\alpha^*, 1]$ .

Если, наконец,  $\alpha \leq \alpha^*$ , то агент  $(\beta, \alpha)$  с  $\beta \leq \beta^*$  будет приглашен в пирамиду, причем он откажется, если  $\beta > \alpha/P(\alpha)$ , и согласится в противном случае, выйдя в момент равенства  $m(t) = \alpha$ , т.е. при  $\sigma(t) = \alpha/P(\alpha)$ . В результате никто из этих агентов не попадет в  $A^+$ . Предложение доказано.

Положим  $\alpha^+ := \mu(1)$  – максимально возможный объем пирамиды, который реализуется, если просканированы все агенты;  $\alpha^+$  является единственной неподвижной точкой отображения  $P$ , т.е.  $\alpha^+ = P(\alpha^+)$ . Очевидным образом,  $0 < \alpha^+ < 1$ .

### 5. ЗАДАЧА ОРГАНИЗАТОРА

Выигрыш Организатора является разностью между суммарным взносом неудачников и процентами, выплаченными агентам, поучаствовавшим в пирамиде и вовремя ее покинувшим. С доходной частью все сразу понятно, это  $m(t^*) = \mu(\sigma(t^*))$ ; как и выше, будем использовать обозначение  $\alpha^* := m(t^*)$ .

Агент с  $\alpha > \alpha^*$ , войдя однажды в пирамиду, не покинет ее до конца; поэтому никаких денег такие агенты не унесут. Агенты с  $\alpha \leq \alpha^*$  будут входить в пирамиду, если  $\beta \leq \alpha/P(\alpha)$ , и покинут ее одновременно при  $\sigma(t) = \alpha/P(\alpha)$ . Таким образом, все агенты с каждым  $\alpha \in [0, \alpha^*]$  унесут вместе

$$p(\alpha) \int_0^{\alpha/P(\alpha)} [\exp(\delta[\vartheta(\alpha/P(\alpha)) - \vartheta(\beta)]) - 1] d\beta. \tag{5.1}$$

А выигрыш Организатора составит

$$U(\alpha^*) := \alpha^* - \int_0^{\alpha^*} p(a) \int_0^{a/P(a)} [\exp(\delta[\vartheta(a/P(a)) - \vartheta(b)]) - 1] db da. \tag{5.2}$$

**Предложение 3.** *Каковы бы ни были непрерывная плотность распределения  $p(\cdot)$  и  $\delta > 0$ , если Организатор может выбрать допустимый режим сканирования  $\sigma(\cdot)$  и момент окончания  $t^*$  любым образом, то оптимального выбора не существует, а верхняя грань возможных значений выигрыша Организатора равна  $\alpha^+$ .*

**Доказательство.** Организатор может назначить режим сканирования  $\sigma(t) := Kt$  ( $K > 0$ ), так что  $\bar{t} = 1/K$ , и момент окончания  $t^* := \bar{t}$ . В результате финальный объем пирамиды будет  $\alpha^+$ . При любом  $\varepsilon > 0$  можно выбрать  $K > \delta/\log(1 + \varepsilon)$ ; тогда сумма всех выплат ушедшим агентам будет меньше  $\varepsilon$ . Таким образом, верхняя грань выигрыша Организатора не меньше  $\alpha^+$ .

С другой стороны, из (5.2) сразу видно, что выигрыш не может быть больше, чем  $\alpha^+$ . Даже равенство  $U(\alpha^*) = \alpha^+$  невозможно, поскольку  $1 - P(\alpha^+) > 0$ , а интеграл в (5.1) строго положителен при всех  $\alpha \in ]0, \alpha^+]$ . Предложение доказано.

**Предложение 4.** *Каковы бы ни были непрерывная плотность распределения  $p(\cdot)$  и допустимый режим сканирования  $\sigma(\cdot)$ , если Организатор может выбрать  $\delta > 0$  и момент окончания  $t^*$  любым образом, то оптимального выбора не существует, а верхняя грань возможных значений выигрыша Организатора равна  $\alpha^+$ .*

**Доказательство.** Поскольку подинтегральное выражение в (5.1) не превосходит  $\exp(\delta \cdot \bar{t}) - 1$ , надлежащим выбором  $\delta > 0$  сумма всех выплат ушедшим агентам может быть сделана сколь угодно малой. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство предложения 3.

Если же предположить, что допустимый режим сканирования  $\sigma(\cdot)$  и  $\delta > 0$  заданы экзогенно, а Организатор может выбрать только момент окончания  $t^*$ , то, вообще говоря, ситуация усложняется.

При заданном режиме сканирования выбор момента окончания  $t^*$  эквивалентен выбору финального объема пирамиды  $\alpha^* = m(t^*)$ . Как показывает (5.2), выигрыш Организатора оказывается непрерывной функцией от  $\alpha^*$ , а значит,  $\max_{\alpha} U(\alpha^*)$  достигается.

Отчетливый результат может быть получен в предположении, что сканирование происходит “достаточно быстро”. Пусть  $K > 0$ ; будем называть допустимый режим сканирования  $\sigma(\cdot)$   $K$ -быстрым, если  $\sigma(t'') - \sigma(t') \geq K(t'' - t')$  всякий раз, когда  $\bar{t} \geq t'' \geq t' \geq 0$ . Очевидным образом,  $\sigma(\cdot)$  является  $K$ -быстрым тогда и только тогда, когда обратное отображение  $\vartheta(\cdot)$  удовлетворяет условию Липшица с константой  $1/K$ .

**Предложение 5.** *Каковы бы ни были непрерывная плотность распределения  $p(\cdot)$  и  $\delta > 0$ , существует такое  $K > 0$ , что при любом  $K$ -быстром допустимом режиме сканирования оптимальным для Организатора будет момент окончания  $t^* = \bar{t}$ , т.е. просканированы будут все агенты.*

**Доказательство.** Из равенства (5.2) немедленно вытекает дифференцируемость функции  $U(\alpha)$ , а также явное выражение для ее производной:

$$U'(\alpha) = 1 - p(\alpha) \int_0^{\alpha/P(\alpha)} [\exp(\delta[\vartheta(\alpha/P(\alpha)) - \vartheta(\beta)]) - 1] d\beta. \quad (5.3)$$

Рассуждая аналогично доказательству предложения 3, получаем существование такого  $K > 0$ , что интеграл в (5.1) окажется сколь угодно мал при любом  $\alpha$ , а отсюда  $U(\alpha)$  строго возрастает. Следовательно, максимум  $U(\alpha)$  достигается при  $\alpha = \alpha^+$ . Предложение доказано.

**Предложение 6.** *Каковы бы ни были непрерывная плотность распределения  $p(\cdot)$  и допустимый режим сканирования  $\sigma(\cdot)$ , существует такое  $\delta > 0$ , что оптимальным для Организатора будет момент окончания  $t^* = \bar{t}$ , т.е. просканированы будут все агенты.*

**Доказательство.** Совершенно аналогично доказательству предложения 5, при малом  $\delta > 0$  интеграл в (5.1) окажется сколь угодно мал при любом  $\alpha$ , и поэтому  $U(\alpha)$  строго возрастает.

**Иллюстративный пример.** Пусть распределение оценки числа неудачников равномерное,  $p(a) = 1$  для всех  $a \in [0, 1]$ ; тогда  $P(a) = 1 - a$  и  $\alpha^+ = 1/2$ . Режим сканирования тоже пусть будет равномерным,  $\sigma(t) := Kt$  ( $K > 0$ ); следовательно,  $\bar{t} = 1/K$ . Из равенства (5.3) сразу следует, что  $U'(\alpha)$  убывает по  $\alpha$ , а значит, для оптимальности выбора  $t^* = \bar{t}$ , т.е. сканирования всей совокупности агентов, необходимо и достаточно, чтобы  $U'(1/2) \geq 0$ . Учитывая, что  $\vartheta(b) = b/K$  для всех  $b \in [0, 1]$ , получаем условие

$$\int_0^1 [\exp(\delta[1 - b]/K) - 1] db \leq 1 \quad (5.4)$$

или

$$\exp(\delta/K) \leq 1 + 2\delta/K.$$

Это условие заведомо выполняется при  $\delta/K \leq 1.2$  (рецензент предложил более точную оценку  $\delta/K < 1.2564\dots$ ); если, например,  $K = 1$ , то “достаточно малым” будет уже  $\delta = 1$ , т.е. ставка 100%. При  $\delta/K \geq 1.3$  условие (5.4) перестает выполняться, так что сканирование всех агентов уже не оптимально для Организатора. В результате “в дураках” окажутся некоторые агенты с  $\alpha \leq \alpha^+$  (и малых  $\beta$ ), а некоторые агенты с  $\alpha > \alpha^+$  (и больших  $\beta$ ), наоборот, не попадут в пирамиду.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена модель финансовой пирамиды, позволяющая в определенной степени рационализировать участие в ней. Каждый агент принимает решения, исходя из принципа наибольшего гарантированного результата и опираясь на свою оценку числа неудачников среди об-

щей массы агентов. “Оптимальной гарантирующей” стратегией оказывается участие в пирамиде, пока ее действительный размер не достиг этой оценки и отказ от участия или, соответственно, выход, если оценка достигнута. Предполагая непрерывное распределение величины оценки в массе агентов, доказаны существование и единственность соответствующего динамического процесса, обеспечивающего, в частности, непрерывный и монотонный рост объема пирамиды. В результате агенты с большими оценками соглашаются участвовать на более длинном интервале времени, а агенты со “слишком” большими оценками остаются до конца и теряют свои инвестиции. Если весь процесс происходит достаточно быстро (так, чтобы выплаты агентам, участвовавшим в пирамиде и вовремя ее покинувшим, не имели слишком большого значения), то “слишком” большими оказываются оценки, превышающие неподвижную точку дополнительной функции распределения.

Автор благодарит А.А. Шананина за ценные замечания к первоначальной версии работы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barlevy G., Veronesi P.* Rational panics and stock market crashes // *J. Econom. Theory.* 2003. V. 110. P. 234–263.
2. *Blanchard O.J.* Speculative bubbles, crashes and rational expectations // *Economics Lett.* 1979. V. 3. P. 387–389.
3. *Boldrin M., Levine D.K.* Growth cycles and market crashes // *J. Econom. Theory.* 2001. V. 96. P. 13–39.
4. *Epstein L.G., Wang T.* Uncertainty, risk-neutral measures and security price booms and crashes // *J. Econom. Theory.* 1995. V. 67. P. 40–82.
5. *Kocherlakota N.* Injecting rational bubbles // *J. Econom. Theory.* 2008. V. 142. P. 218–232.
6. *Liu F., Conlon J.R.* The simplest rational greater-fool bubble model // *J. Econom. Theory.* 2018. V. 175. P. 38–57.
7. *Miao J.* Introduction to economic theory of bubbles // *J. Math. Economics.* 2014. V. 53. P. 130–136.
8. *Miao J.* Introduction to economic theory of bubbles II // *J. Math. Economics.* 2016. V. 65. P. 139–140.
9. *Milgrom P., Stokey N.* Information, trade, and common knowledge // *J. Econom. Theory.* 1982. V. 26. P. 17–27.
10. *Moinas S., Pouget S.* The bubble game: An experimental study of speculation // *Econometrica.* 2013. V. 81. P. 1507–1539.
11. *Schiller R.J.* Irrational Exuberance. Princeton: Princeton Univer. Press, 2000.
12. *Tirole J.* On the possibility of speculation under rational expectations // *Econometrica.* 1982. V. 50. P. 1163–1181.
13. *Chancellor E.* Devil Take the Hindmost. N.Y.: Plume, 1999.
14. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

---

---

**ОПТИМАЛЬНОЕ  
УПРАВЛЕНИЕ**

---

---

УДК 519.865

**АНАЛИЗ НА ОСНОВЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЗМОВ  
СТИМУЛИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ИНВЕСТИЦИЙ  
НА НЕСОВЕРШЕННОМ РЫНКЕ КАПИТАЛА<sup>1)</sup>**

© 2023 г. Н. К. Обросова<sup>1,2,3,\*</sup>, А. А. Шананин<sup>1,2,3,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, Федеральный исследовательский центр  
“Информатика и управление” РАН, Россия

<sup>2</sup> 119992 Москва, Ленинские горы, Московский центр фундаментальной и прикладной математики,  
МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

<sup>3</sup> 141701 Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9,  
Московский физико-технический институт (НИУ), Россия

\*e-mail: nobrosova@ya.ru

\*\*e-mail: alexshan@ya.ru

Поступила в редакцию 23.06.2022 г.  
Переработанный вариант 23.06.2022 г.  
Принята к публикации 14.11.2022 г.

Проблема возобновления рыночных инвестиций в реальном секторе российской экономики тесно связана с состоянием предпринимательской среды в условиях несовершенного рынка капитала в России и проблемой оценки доходности инвестиционных проектов. Трудности с определением показателя доходности в условиях несовершенной денежно-кредитной системы связаны с существенным расхождением процентных ставок по депозитам и кредитам и могут быть преодолены в рамках подхода Кантора–Липмана, который позволяет вычислить показатель доходности пула инвестиционных проектов, доступных инвестору. С точки зрения собственника производства рыночные инвестиции зависят от состояния предпринимательской среды и конкурируют с инвестициями в потребление. Возникает проблема оценки порогового значения показателя доходности, при котором собственнику выгодно отложить потребление в пользу рыночных инвестиций. Мы предлагаем подход к решению этой проблемы в терминах математической модели инвестиционного поведения собственника производства в условиях несовершенного рынка капитала, формализованной в виде задачи оптимального управления с фазовым ограничением на бесконечном горизонте. Решение задачи основано на построении вязкостного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана. Показано, что инвестиционная стратегия собственника производства может существенно зависеть от состояния предпринимательской среды. Результаты исследования задачи позволили предложить подход к объяснению перехода российской экономики из режима восстановительного роста в режим стагнации в конце 2007 г., сопровождавшийся спадом инвестиционной активности в производственной сфере. Библ. 20. Фиг. 7.

**Ключевые слова:** модель Кантора–Липмана, доходность инвестиций, оптимальное управление, модель инвестиций, несовершенный рынок, вязкостное решение, уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана.

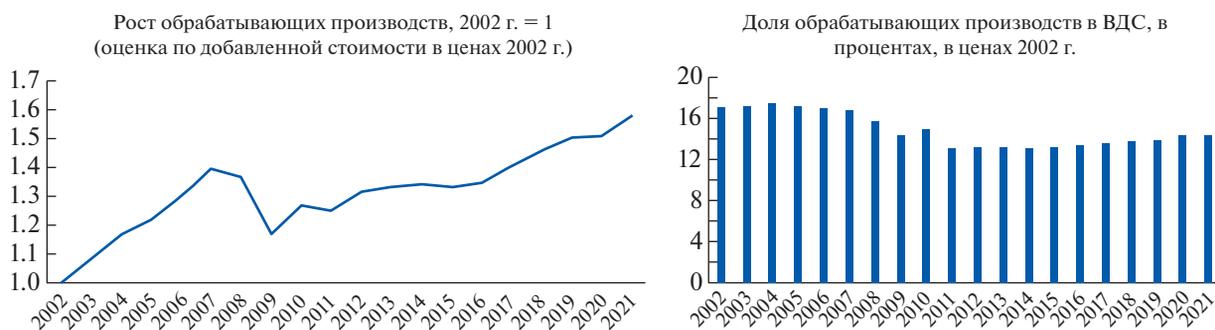
**DOI:** 10.31857/S0044466923030109, **EDN:** DZHJUG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных проблем современной российской экономики является проблема стимулирования инвестиционной активности в обрабатывающем секторе с целью его технологической модернизации и повышения темпов роста производства. Решение этой проблемы важно как с точки зрения повышения конкурентоспособности продукции сектора, так и с точки зрения повышения уровня жизни населения, так как обрабатывающий сектор является наиболее трудоемким сектором экономики.

---

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (грант № 23-11-00129).



Фиг. 1. Статистические показатели динамики развития обрабатывающего сектора РФ.

Ввиду исторически сложившихся особенностей российская экономика характеризуется неоднородностью ее секторов, связанной с высокой конкурентоспособностью на мировом рынке продукции добывающих (капиталоемких) отраслей и технологической отсталостью обрабатывающих (трудоемких) отраслей экономики, проигрывающих в конкуренции импортным аналогам (подробнее см. [1]). В постсоветский период экономика России прошла через несколько эволюционных этапов. Однако неоднородность и технологическая отсталость трудоемкого сектора сохранились. Перечислим кратко особенности основных этапов развития российской экономики за последние три десятилетия.

Этап 1. Трансформационный спад (1990–1998 гг.), сопровождавшийся упрощением структуры производства за счет вытеснения неэффективных технологических цепочек и замены их импортными аналогами, что привело к снижению мультипликатора в производстве с 2 до 1.3.

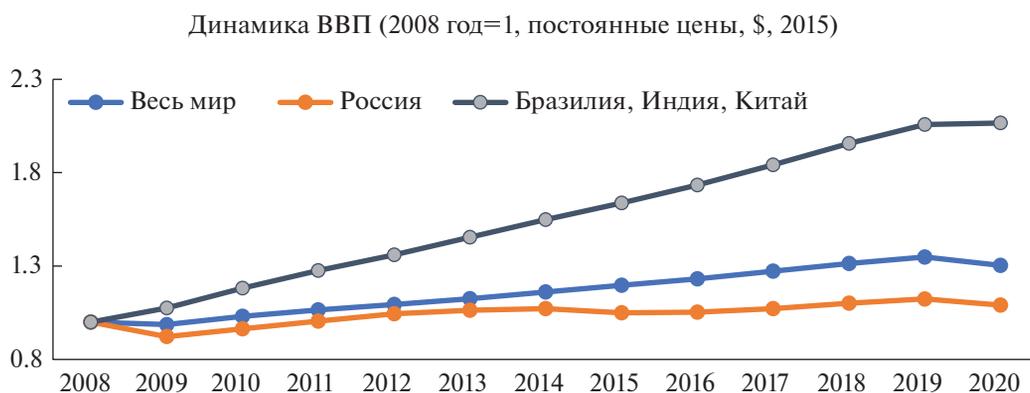
Этап 2. Восстановительный рост (1998–2008 гг.), сопровождавшийся процессами импортовытеснения в ряде отраслей, ростом мультипликатора до 1.8. В этот период важное значение имело бюджетное финансирование перспективных направлений (национальных проектов), имеющих высокую доходность (в основном, в инфраструктурных отраслях).

Этап 3. Период стагнации экономики, начавшийся к концу 2007 г. и продолжающийся до настоящего времени. В этот период в связи с выросшими транзакционными издержками снизилась доходность крупных национальных проектов в инфраструктурных отраслях, замедлились темпы экономического роста и произошел спад инвестиционной активности в производственной сфере.

На фиг. 1 представлены динамика роста в обрабатывающем секторе (левый график) и доля обрабатывающего сектора в валовой добавленной стоимости (ВДС) в России (правый график) на втором и третьем этапе эволюции экономики (источник: сайт Росстата РФ [www.rosstat.gov.ru](http://www.rosstat.gov.ru)). Анализ статистических рядов подтверждает замедление темпов роста в обрабатывающем секторе после 2007 г., а также сокращение доли обрабатывающего сектора в ВДС, которая до настоящего времени не вернулась к уровню начала 2000-х годов.

Следует отметить, что тенденции общемировой динамики экономического роста и аналогичных показателей для крупных развивающихся экономик существенно отличаются от показателей роста российской экономики России в период стагнации. По данным Всемирного Банка за период 2008–2019 гг. экономика России выросла на 12.4%, в то время как мировая экономика выросла на 34.9%. Данная ситуация проиллюстрирована на фиг. 2, где приведены статистические данные о динамике валового внутреннего продукта (ВВП) не только для российских данных, но и для общемировых показателей, а также для агрегированного показателя трех крупных развивающихся экономик мира (Бразилии, Индии и Китая).

Спад инвестиционной активности в обрабатывающем секторе отечественной экономики в период стагнации требует объяснения, учитывающего особенности российской ситуации. Естественным подходом к решению данного вопроса являются математические модели экономики, основанные на описании интересов и логики поведения основных экономических агентов с учетом особенностей сложившихся экономических отношений и позволяющие анализировать ключевые причины изменения стратегий поведения агентов. Значительный опыт таких исследований накоплен научной школой академиков Н.Н. Моисеева и А.А. Петрова (см. [2], [3]). В настоящей статье мы продолжаем исследования в данном направлении и строим математическую модель инвестиционного поведения собственника в производственной сфере, учитывающую



Фиг. 2. Динамика ВВП крупных развивающихся экономик и всего мира.

особенности рынка инвестиций в России. Результаты исследования модели позволяют предложить подход к объяснению механизмов восстановления роста в обрабатывающем секторе отечественной экономики.

Одной из важных особенностей российских экономических условий является несовершенство рынка капитала, характеризующееся значительным расхождением процентных ставок по кредитам и депозитам финансовых организаций. Наша гипотеза заключается в том, что причиной сокращения рыночных инвестиций на рубеже 2008 г. и перехода в режим стагнации российской экономики стало изменение состояния предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала. Для анализа состоятельности данной гипотезы необходимо ответить на следующие вопросы.

- Что такое предпринимательская среда и как ее моделировать в российских условиях?
- Как описывать изменение состояния предпринимательской среды и как построить числовую характеристику этого состояния?
- Как моделировать поведение собственника капитала в зависимости от характеристики состояния предпринимательской среды?

Ответы на эти вопросы неочевидны и требуют учета отмеченных выше особенностей сложившихся экономических отношений.

Описание предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала мы предлагаем проводить в рамках подхода Кантора–Липмана, который впервые был предложен в [4], [5] и развит в более поздних публикациях многих авторов (см. [6–13]). В разд. 1 мы приводим описание модели Кантора–Липмана и даем краткий обзор результатов исследований и развития модели. Эти результаты обосновывают использование модели Кантора–Липмана для описания предпринимательской среды в условиях несовершенного рынка капитала и позволяют вычислить числовую характеристику предпринимательской среды, являющуюся показателем доходности пула всех доступных инвестору инвестиционных проектов. Такой показатель доходности при некоторых дополнительных предположениях может быть вычислен как минимальный положительный корень инвестиционной функции, которая строится в терминах модели. Тем самым мы предлагаем ответ на первые два поставленных выше вопроса.

В разд. 2 мы переходим к рассмотрению третьего вопроса и показываем, что классические модели потребительского поведения типа модели Рамсея (см. [15]) плохо подходят для целей нашего исследования, а именно, не позволяют описать существенную связь между стратегией поведения инвестора на несовершенном рынке капитала и характеристикой предпринимательской среды, вычисленной в терминах модели Кантора–Липмана. Далее в разд. 3 мы предлагаем подход к моделированию поведения инвестора на несовершенном рынке капитала, который позволяет проанализировать такую связь. Мы строим математическую модель инвестиционного поведения собственника производства в сложившейся предпринимательской среде с показателем доходности  $r$ , который может быть вычислен в терминах подхода Кантора–Липмана и является входным параметром модели. Для описания потребительского поведения собственника мы используем новый подход, который предполагает заинтересованность собственника в накоплении средств потребления (объектов недвижимости, предметов роскоши и т.п.) наряду с инвестици-

онной деятельностью. Модель формализована в виде задачи оптимального управления с фазовым ограничением на бесконечном горизонте. Исследование задачи основано на изучении свойств решения аналогичной задачи оптимального управления на конечном горизонте времени и дальнейшем построении обобщенного (вязкостного) решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, соответствующего исходной задаче. Данная задача оптимального управления проанализирована авторами в [16]. В разд. 4 статьи мы приводим схему исследования задачи и основные результаты. Экономическая интерпретация полученных результатов обсуждается в разд. 5. Результаты исследования модели позволяют проявить зависимость инвестиционного поведения собственника предприятия от начального уровня его капитала и характеристики состояния предпринимательской среды. Показано, что активность инвестиционной деятельности малого и среднего бизнеса в производственном секторе зависит от характеристик предпринимательской среды, сложившейся на несовершенном рынке капитала и рост доходности предпринимательской среды приводит к переключению поведения собственника из режима приоритетного потребления в режим приоритетного инвестирования. В то же время представители крупного бизнеса оказываются нейтральны по отношению к изменению состояния предпринимательской среды.

В разд. 6 мы возвращаемся к описанию предпринимательской среды в терминах подхода Кантора–Липмана применительно к ситуации в России на рубеже 2008 г. На основе результатов исследования модели поведения собственника мы приводим возможное объяснение механизма переключения из режима восстановительного роста в режим стагнации в обрабатывающем (трудоемком) секторе отечественной экономики при ухудшении характеристик предпринимательской среды.

## 2. ОПИСАНИЕ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСКОЙ СРЕДЫ В УСЛОВИЯХ НЕСОВЕРШЕННОГО РЫНКА КАПИТАЛА. МОДЕЛЬ КАНТОРА–ЛИПМАНА

В ситуации несовершенного рынка капитала перестают работать традиционно используемые в теории корпоративных финансов подходы к оценке инвестиционных проектов, основанные на расчете доходности с помощью показателя NPV (Net Present Value) – чистой приведенной стоимости денежных потоков, связанных с проектом. В рамках данного подхода инвестиционный проект описывается распределенными во времени финансовыми потоками  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ , связанными с вложением средств ( $a_i < 0$ ) и получением выплат ( $a_i > 0$ ) по проекту в  $i$ -й период времени от начала проекта,  $i = 0, 1, \dots, n$ , где  $n$  – конечно, т.е. предполагается, что проект полностью завершается через определенный период времени. Если платежи осуществляются через некоторые равные промежутки времени, то NPV проекта с вектором потоков платежей  $\mathbf{a}$  вычисляется по формуле

$$NPV(\mathbf{a}, r) = a_0 + a_1 e^{-r} + \dots + a_n e^{-rn}, \quad (2.1)$$

где  $r$  – дефлятор денежных потоков, позволяющий привести все финансовые потоки проекта к начальному моменту времени. В теории корпоративных финансов в качестве такого дефлятора предлагается рассматривать показатель доходности общедоступного для инвесторов альтернативного способа вложения средств. Предполагается, что проект  $\mathbf{a}$  следует считать рентабельным и поддерживать, если рассчитанный с использованием дефлятора  $r$  показатель  $NPV(\mathbf{a}, r) > 0$ , и считать нерентабельным, если  $NPV(\mathbf{a}, r) < 0$ . Возникает вопрос о выборе дефлятора денежных потоков  $r$ , так как от его величины существенно зависит оценка рентабельности проектов по критерию NPV. Очевидно, что величина дефлятора  $r$  заключена между процентными ставками по депозитам  $r_D$  и кредитам  $r_L$ , т.е.  $r_D \leq r \leq r_L$ . Поэтому вопрос выбора дефлятора  $r$  не так важен в условиях совершенного рынка капитала (в странах с развитой рыночной экономикой), так как процентные ставки по кредитам и депозитам в этом случае близки друг к другу и значение  $r$  определяется достаточно точно  $r \approx r_D \approx r_L$ . В ситуации несовершенного рынка капитала, характерного для России, расхождение процентных ставок велико,  $r_D < r_L$ , и рентабельность проекта существенно зависит от выбора значения дефлятора  $r$  из диапазона  $r_D \leq r \leq r_L$ . Поэтому на несовершенном рынке капитала возникает проблема выбора значения дефлятора денежных потоков  $r$  инвестиционного проекта. Для определения значения дефлятора следует formalизовать понятие общедоступных альтернативных проектов по вложению средств. На несовершенном рынке капитала доходности таких вложений зависят не только от показателей экономической среды, но и от индивидуальных характеристик инвестора, что приводит к их неоднозначности.

Решение этой проблемы было предложено в работах Кантора и Липмана (см. [4], [5]), в которых доходность инвестиционных проектов вычисляется на основе решения задачи управления интенсивностью реализации проекта с целью максимизации дохода инвестора при условии завершения всей инвестиционной деятельности к терминальному моменту времени. Модель Кантора–Липмана позволяет формализовать описание предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала как полного пула общедоступных инвесторам проектов по вложению средств и вычислить единую величину дефлятора денежных потоков  $r$ , характеризующего этот пул проектов. Значение этого дефлятора отражает доходность альтернативного способа вложения денег в условиях сформировавшейся предпринимательской среды.

В модели Кантора–Липмана предпринимательская среда описывается пулом всех доступных инвестору проектов

$$\mathbf{a}^m = (a_0^m, a_1^m, \dots, a_n^m), \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

где  $n + 1$  – наибольшая продолжительность среди всех проектов (если проект заканчивается раньше, то соответствующие компоненты дополняются нулями). Для решения задачи оценки дефлятора  $r$  как доходности альтернативного общедоступного способа вложения денег следует предположить, что все входящие в пул проекты являются стационарными и тиражируемыми. Стационарность проекта означает, что проект является доступным в неизменном виде в любой момент времени. Тиражируемость проекта означает, что в каждый момент времени  $t$  проект  $m$  может запускаться с произвольной постоянной для данного проекта интенсивностью  $u_m(t) \geq 0$ . Принимая решение относительно финансовых вложений, инвестор формирует инвестиционную стратегию  $\{u_m(t) | m = 1, 2, \dots, M; t = 0, 1, \dots, T - n - 1\}$  при условии, что к моменту времени  $T$  вся инвестиционная деятельность должна завершиться. Тогда динамика остатка расчетного счета  $s(t)$  инвестора описывается соотношением

$$s(t+1) = s(t) + \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^n a_k^m u_m(t-k), \quad t = 0, 1, \dots, T-1.$$

Заметим, что пул проектов включает, в том числе, проекты депонирования под процент  $r_D$  и кредитования под процент  $r_L$ , если они доступны инвестору. Поэтому дополнительных возможностей занимать и вкладывать деньги у инвестора нет и выполняется условие самофинансирования  $s(t) \geq 0$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ . В модели Кантора–Липмана рассматривается следующая задача об оптимальной стратегии инвестирования:

$$s(T) \rightarrow \max, \quad (2.2)$$

$$s(t+1) = s(t) + \sum_{m=1}^M \sum_{k=0}^n a_k^m u_m(t-k), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (2.3)$$

$$s(t) \geq 0, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.4)$$

$$s(0) = x_0 > 0, \quad (2.5)$$

$$u_m(t) \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad t = 0, 1, \dots, T - n - 1, \quad (2.6)$$

$$u_m(t) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad t = -n, -n + 1, \dots, -1, \quad t = T - n, T - n + 1, \dots, T - 1. \quad (2.7)$$

Отметим, что условие полного завершения инвестиционной деятельности к терминальному моменту времени приводит к ограничению (2.7). Выполнение условия (2.7) гарантирует, что инвестиционный процесс не является финансовой пирамидой, из которой нельзя выйти, фиксируя доход. Именно это условие гарантирует единственность значения дефлятора денежных потоков проекта в результате решения задачи (подробнее см. [8], [12]).

Обозначим через  $V_T$  оптимальное значение функционала в задаче (2.2)–(2.7).

Введем понятие инвестиционной функции  $F(r)$ , которая определяется как поточечный максимум показателей NPV (см. (2.1)) всех проектов, входящих в доступный пул проектов инвестора:

$$F(r) = \max_{1 \leq m \leq M} \sum_{k=0}^n a_k^m e^{-rk}, \quad r \in [0, +\infty). \quad (2.8)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 1** (Д.Г. Кантор, С.А. Липман, см. [4], [5]).

1. Если  $F(0) \leq 0$ , то для любого  $T \geq 0$ ,  $V_T = x_0$  (пул инвестиционных проектов убыточен).

2. Если  $F(r) > 0$  для всех  $r \in [0, \infty)$ , то существует  $T_0 > 0$  такое, что для любого  $T \geq T_0$  справедлива оценка  $V_T = +\infty$  (пул инвестиционных проектов допускает арбитраж).

3. Если  $F(0) > 0$ , существует  $\tilde{r} > 0$  такое, что  $F(\tilde{r}) < 0$ , и  $\rho > 0$  – наименьший положительный корень уравнения  $F(r) = 0$ , то  $\rho$  является доходностью пула инвестиционных проектов, т.е.

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\ln(V_T)}{T} = \rho.$$

4. Если  $\rho$  – минимальный положительный корень инвестиционной функции  $F(r)$ , причем  $\rho$  – простой корень, т.е.  $\left\{ m \left| \sum_{k=0}^n a_k^m e^{-\rho k} = F(\rho) \right. \right\} = 1$  и  $F'(\rho) \neq 0$ , то существуют положительные константы  $0 < c < C$  такие, что  $ce^{\rho T} \leq V_T \leq Ce^{\rho T}$ .

Из теоремы 1 следует, что в условиях несовершенного рынка капитала темп роста доходов  $r$  при реализации пула инвестиционных проектов (дефлятор денежных потоков) может быть найден как минимальный положительный корень инвестиционной функции  $F(r)$ . Тем самым теорема Кантора–Липмана позволяет решить вопрос об оценке дефлятора  $r$ , используемого в (2.1) для вычисления NPV проекта. В рамках этого подхода также удастся решить проблему множественности альтернативной характеристики проекта – величины IRR (internal rate of return), ставкой дисконта, при которой NPV проекта обращается в нуль.

Предложенный Д.Г. Кантором и С.А. Липманом подход к построению оценки доходности пула тиражируемых инвестиционных проектов в условиях несовершенного рынка капитала получил развитие в [4–14]. В работе Л. Адлера и Д. Гейла с использованием теоремы А. Пуанкаре была установлена связь условия оценки Кантора–Липман (см. [4, 5]) доходности пула тиражируемых инвестиционных проектов с теоремой об арбитраже. В [7, 8] И.М. Сониная и Э.Л. Пресмана переформулировали постановку задачи об оптимальной стратегии инвестирования в терминах динамики вектора, задающего финансовую позицию инвестора. Компоненты этого вектора определяют текущие и будущие запасы ликвидных средств инвестора при условии, что он не начинает новых инвестиционных проектов. В терминах динамики вектора финансовых позиций исследованы режимы сбалансированного роста, введено понятие ликвидных финансовых состояний и охарактеризованы режимы, являющиеся финансовыми пирамидами. Подход И.М. Сониной и Э.Л. Пресмана получил развитие в работе В.З. Беленького (см. [9]), в которой модель Кантора–Липмана интерпретировалась как обобщенная модель экономического роста Неймана–Гейла, а результаты ее исследования трактовались как анализ магистральных эффектов в соответствующей краевой задаче.

В [12–14] задача об оценке финансового состояния инвестора формализована в виде уравнения Беллмана, решение которого позволяет строить оценки финансовых состояний инвестора и оценивать их ликвидность на основе принадлежности к конусу ликвидных состояний. В [12] показано, что невырожденное решение уравнения Беллмана в конусе ликвидных состояний существует только в том случае, если в качестве дефлятора денежных потоков выбран минимальный положительный корень инвестиционной функции (построенной как поточечный максимум преобразований Лапласа денежных потоков всего пула инвестиционных проектов, доступных инвестору). Классический вариант модели Кантора–Липмана сформулирован для дискретного времени, когда моменты времени поступления денежных потоков синхронизированы. В [11] подход Кантора–Липмана обобщен на случай непрерывного времени, для которого доказан аналог теоремы 1. Это позволяет расширить возможности применения модели Кантора–Липмана в моделях экономической динамики. В [8] исследована более общая постановка задачи инвестора, в которой авторы отказываются от условия (2.7). Доказано, что в этом случае инвестиционная стратегия с доходностью, превышающей минимальный корень инвестиционной функции, требует постоянных реинвестиций для поддержания роста, т.е. из такого инвестиционного процесса нельзя выйти и фиксировать доход (ситуация “финансовой пирамиды”).

Результаты исследования модели и ее модификаций показывают, что подход Кантора–Липмана позволяет

- формализовать описание предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала;

- однозначно решить вопрос о выборе дефлятора финансовых потоков  $r$  на несовершенном рынке капитала при расчете показателя  $NPV(\mathbf{a}, r)$  инвестиционного проекта  $\mathbf{a}$ , определенного в (2.1); тем самым дать однозначный ответ о рентабельности проекта  $\mathbf{a}$ ;
- вычислить значение дефлятора финансовых потоков  $r$ , используемого в выражении (2.1) для расчета показателя  $NPV(\mathbf{a}, r)$ , как минимальный положительный корень инвестиционной функции  $F(r)$ , определенной в (2.8).
- корректно ввести понятие состояния предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала, определяя его как значение дефлятора финансовых потоков  $r$ , вычисленного в терминах модели.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ СОБСТВЕННИКА ПРОИЗВОДСТВА НА НЕСОВЕРШЕННОМ РЫНКЕ КАПИТАЛА

Предположим, что собственник капитала принимает инвестиционные решения в производственном секторе в условиях сформировавшейся предпринимательской среды на несовершенном рынке капитала, которую мы будем описывать с помощью модели Кантора–Липмана. Тогда характеристика состояния предпринимательской среды  $r$  (доходность пула доступных инвестиционных проектов), определяемая как минимальный положительный корень инвестиционной функции  $F(r)$ , является экзогенным входным параметром при описании инвестиционного поведения собственника.

**Замечание 1.** В условиях существенного расхождения процентных ставок по депозитам и кредитам доходность предпринимательской среды  $r$ , вычисленная в терминах модели Кантора–Липмана, будет ниже процента по кредитам, т.е.  $r < r_L$ . Поэтому на несовершенном рынке капитала собственнику невыгодно поддерживать инвестиционную деятельность за счет кредитных средств, а источником рыночных инвестиций в производство является, преимущественно, чистая прибыль собственника от производственной деятельности.

Предположим, что инвестиционное поведение собственника производства определяется выбором одной из двух альтернатив: рыночные инвестиции в производство с доходностью  $r$  или расходование полученной от производственной деятельности чистой прибыли на собственные нужды, т.е. на потребление. Целью нашего исследования является анализ гипотезы о том, что состояние предпринимательской среды в условиях несовершенного рынка капитала может влиять на решения собственника о способе вложения свободных средств. Поэтому в математической модели должна быть учтена существенная зависимость между поведением собственника производства и характеристикой состояния предпринимательской среды  $r$ .

Классическим подходом к описанию потребительского поведения являются модели рамсеевского типа, в которых экономический агент максимизирует дисконтированное потребление при бюджетном ограничении (см. [15]). Однако, как мы покажем далее, такой тип моделей плохо подходит для целей нашего исследования.

Рассмотрим финансовую деятельность собственника производства, который в каждый момент времени  $t \geq 0$  получает мгновенную чистую прибыль  $\pi$  от производственной деятельности (после уплаты всех налогов и обязательных платежей). Предположим, что собственник может расходовать прибыль либо на конечное потребление в объеме  $C(t) \geq 0$ , либо на инвестиции в производство в предпринимательской среде, характеризующейся доходностью  $r$ .

Предположим, что в начальный момент времени собственник обладает положительным начальным капиталом  $M_0 > 0$ . Тогда с учетом сделанных предположений динамика капитала  $M(t)$  собственника производства определяется следующим уравнением:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \pi - C(t) + rM(t), \quad M(0) = M_0 > 0, \quad (3.1)$$

где  $rM(t)$  – доход от инвестиций в производство в предпринимательской среде с показателем доходности  $r$ .

Напомним, что заемные средства не могут обеспечивать инвестиционную деятельность на несовершенном рынке капитала (см. замечание 1), поэтому должно выполняться условие неотрицательности капитала собственника

$$M(t) \geq 0. \quad (3.2)$$

**Пример.** Следуя традиционной схеме Рамсея, предположим, что целью собственника является максимизация дисконтированного с коэффициентом  $\delta > 0$  потребления  $C(t)$  за конечный период времени  $[0, T]$ . Тогда с учетом (3.1), (3.2) получим, что выбор стратегии  $C(t) \geq 0$  потребительского поведения собственника определяется как решение следующей задачи оптимального управления с фазовым ограничением:

$$\int_0^T C(t) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max, \tag{3.3}$$

$$\frac{dM(t)}{dt} = \pi - C(t) + rM(t), \tag{3.4}$$

$$M(0) = M_0 > 0, \tag{3.5}$$

$$M(t) \geq 0, \tag{3.6}$$

$$C(t) \geq 0. \tag{3.7}$$

**Предложение 1.** *Оптимальное поведение собственника в задаче (3.3)–(3.7) в зависимости от соотношения параметров модели определяется одним из двух режимов.*

*Режим 1. Если  $r < \delta$  (низкая доходность инвестиций), то оптимальная стратегия собственника заключается в потреблении всего начального запаса капитала  $M_0$  в нулевой момент времени и дальнейшее поддержание потребления на максимальном уровне за счет всей прибыли от производственной деятельности в условиях полного отсутствия инвестиций, т.е.*

$$C(0) = \delta(t) M_0, \quad C(t) \equiv \pi, \quad M(t) \equiv 0 \quad \text{при всех } t \in (0, T],$$

где  $\delta(t)$  – дельта-функция.

*Режим 2. Если  $r > \delta$  (высокая доходность инвестиций), то собственник откладывает потребление до конца временного горизонта планирования своей деятельности, инвестирует всю прибыль в производство, а в конце периода потребляет все накопленные средства, т.е.*

$$C(t) \equiv 0 \quad \text{при всех } t \in [0, T), \quad C(T) = \delta(t - T) M(T),$$

где  $\delta(t - T)$  – дельта-функция, сосредоточенная в точке  $T$ .

**Доказательство.** Рассмотрим значение функционала (3.3) для режимов 1 и 2 и покажем, что для любой другой допустимой траектории  $C(t)$  значение функционала не может увеличиться.

1. Пусть  $r < \delta$ . Обозначим функционал в задаче (левая часть (3.3)) через  $\Phi(T)$  и найдем его значение  $\Phi_1(T)$  в режиме 1:

$$\Phi_1(T) = \int_0^T C(t) e^{-\delta t} dt = M_0 + \frac{\pi}{\delta} (1 - e^{-\delta T}).$$

Предположим, что существует траектория  $C(t)$ , отличная от режима 1, в которой значение функционала  $\Phi(T)$  будет больше, чем  $\Phi_1(T)$ . Из (3.4) имеем

$$C(t) = \pi - \frac{dM(t)}{dt} + rM(t). \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в функционал (3.3) и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= \int_0^T \left( \pi - \frac{dM(t)}{dt} + rM(t) \right) e^{-\delta t} dt = \\ &= M_0 + \frac{\pi}{\delta} (1 - e^{-\delta T}) - M(T) e^{-\delta T} + \int_0^T (r - \delta) M(t) e^{-\delta t} dt \leq M_0 + \frac{\pi}{\delta} (1 - e^{-\delta T}) = \Phi_1(T). \end{aligned}$$

Последнее неравенство очевидно следует из соотношения  $r - \delta < 0$  и условия (3.6). Противоречие.

2. Пусть  $r > \delta$ . Обозначим значение функционала  $\Phi(T)$  в режиме 2 через  $\Phi_2(T)$ . В режиме 2 уравнение (3.4) принимает вид

$$\frac{dM(t)}{dt} = \pi + rM(t), \quad t \in [0, T].$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$M(t) = -\frac{\pi}{r} + \left(M_0 + \frac{\pi}{r}\right)e^{rt}, \quad (3.9)$$

тогда

$$\Phi_2(T) = -\frac{\pi}{r}e^{-\delta T} + \left(M_0 + \frac{\pi}{r}\right)e^{(r-\delta)T}.$$

Предположим, что существует траектория  $C(t)$ , отличная от режима 2, в которой значение функционала  $\Phi(T)$  будет больше, чем  $\Phi_2(T)$ . Аналогично случаю 1, имеем

$$\Phi(T) = \int_0^T \left( \pi - \frac{dM(t)}{dt} + rM(t) \right) e^{-\delta t} dt = M_0 + \frac{\pi}{\delta}(1 - e^{-\delta T}) - M(T)e^{-\delta T} + \int_0^T (r - \delta)M(t)e^{-\delta t} dt.$$

Учитывая (3.9), получим

$$\begin{aligned} \int_0^T (r - \delta)M(t)e^{-\delta t} dt &= \int_0^T (r - \delta) \left( -\frac{\pi}{r} + \left(M_0 + \frac{\pi}{r}\right)e^{rt} \right) e^{-\delta t} dt = \\ &= \frac{(\delta - r)}{\delta r} \pi (1 - e^{-\delta T}) + \left(M_0 + \frac{\pi}{r}\right) (e^{(r-\delta)T} - 1). \end{aligned}$$

С учетом (3.6) легко показать, что

$$\Phi(T) = -\frac{\pi}{r}e^{-\delta T} + \left(M_0 + \frac{\pi}{r}\right)e^{(r-\delta)T} - M(T)e^{-\delta T} = \Phi_2(T) - M(T)e^{-\delta T} \leq \Phi_2(T).$$

Получили противоречие. Тем самым режимы 1 и 2 являются оптимальным решением в задаче (3.3)–(3.7). Предположение 1 доказано.

Решение задачи (3.3)–(3.7) показывает, что оптимальные режимы потребления и инвестиций в рассмотренном варианте модели являются тривиальными, нет оптимального режима с одновременным потреблением и инвестициями. При этом поведение системы однотипное при любых значениях начальных условий. При стремлении горизонта планирования к бесконечности интеграл (3.3) расходится, если  $r > \delta$ , т.е. решение задачи не существует. Рассмотрение более общих вариантов моделей потребительского поведения рамсеевского типа позволяет подробно описывать динамику потребительского поведения домашних хозяйств и их поведения на рынке депозитов и кредитования (см., например, [17], [18]), однако, аналогично рассмотренной в примере модели, не позволяют дать содержательный ответ на вопрос о зависимости инвестиционных решений собственника от доходности предпринимательской среды. Таким образом, в рамках моделей рамсеевского типа не удается объяснить переключение из режима инвестиционного роста в режим стагнации в производственной сфере.

В настоящей работе мы предлагаем альтернативный подход, в котором целью собственника является развитие сектора потребления, обладающего своими потребительскими мощностями (недвижимость, предметы роскоши т.п.). Предположим, что собственник заинтересован в максимизации дисконтированного уровня средств потребления  $k(t) \geq 0$  в потребительском секторе. Исходя из уровня накопленных к текущему моменту средств потребления  $k(t)$ , собственник планирует расходы на приобретение новых средств потребления в объеме  $\zeta k(t)$ , где  $\zeta \geq 0$  – параметр, характеризующий максимальный темп роста средств потребления. Однако в зависимости от состояния конъюнктуры реализация планов может происходить не в полном объеме. Таким образом, в каждый момент времени  $t$  собственнику доступны два способа вложения свободных средств:

- реализация доли  $v(t)$  новых потребительских планов  $\zeta k(t)$ , где  $v(t) \in [0,1]$  – параметр управления;
- рыночные инвестиции в производство в предпринимательской среде с доходностью  $r$ .

Тогда динамика средств потребления собственника описывается уравнением

$$\frac{dk}{dt} = v\zeta k,$$

где  $k(0) = k_0 > 0$ , а изменение капитала собственника определяется уравнением

$$\frac{dM}{dt} = \pi - v\zeta k + rM,$$

с начальным условием  $M(0) = M_0 > 0$ .

Цель собственника – максимизация дисконтированных с коэффициентом  $\delta > 0$  средств потребления на бесконечном горизонте:

$$\int_0^{+\infty} k(t) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max. \tag{3.10}$$

**Замечание 2.** 1) Выбор бесконечного горизонта интегрирования в целевом функционале (3.10) имеет естественную интерпретацию. Предположим, что горизонт планов собственника  $T > 0$  конечен, но заранее собственнику неизвестен и является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с некоторым показателем  $\gamma > 0$ . В условиях неопределенности окончания деятельности естественно рассматривать задачу о максимизации математического ожидания дисконтированных средств потребления собственника, функционал в которой будет равен

$$\int_0^{+\infty} \gamma e^{-\gamma T} \int_0^T k(t) e^{-\delta t} dt dT = \int_0^{+\infty} k(t) e^{-\delta t} \int_t^{+\infty} \gamma e^{-\gamma T} dT dt = \int_0^{+\infty} k(t) e^{-(\delta+\gamma)t} dt.$$

Таким образом, задача по-прежнему формализуется в виде (3.10), где в качестве нового коэффициента дисконтирования следует рассматривать величину  $\gamma + \delta$ .

2) Будем предполагать, что собственник строит планы новых потребительских проектов  $\zeta k(t)$ , исходя из предположения об их “реальности”. Формально это означает, что выполняется условие  $\zeta < \delta$ , гарантирующее сходимость интеграла (3.10).

В рамках сделанных предположений модель инвестиционного поведения собственника производства формализуется в виде следующей задачи:

$$\int_0^{+\infty} k(t) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max_v, \quad \frac{dk}{dt} = v\zeta k, \quad k(0) = k_0 > 0, \tag{3.11}$$

$$\frac{dM}{dt} = \pi - v\zeta k + rM, \quad M(0) = M_0 > 0, \quad M(t) \geq 0, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Задача (4.2), называемая далее  $P_\infty$ , представляет собой задачу оптимального управления на бесконечном горизонте с ограничением на фазовую переменную  $M(t) \geq 0$ , которое отражает условие несовершенства рынка капитала в рассматриваемой модели (см. замечание 1). Такая постановка приводит к техническим трудностям в ходе исследования модели. Исследование задачи оптимального управления  $P_\infty$  приведено авторами в [16]. В следующем разделе настоящей работы мы приведем краткую схему исследования и сформулируем основные результаты, доказательство которых можно найти в [16].

#### 4. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОВЕДЕНИЯ СОБСТВЕННИКА. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу оптимального управления на конечном интервале времени  $T$ :

$$\int_0^T k(t) e^{-\delta t} dt \rightarrow \max_v, \quad \frac{dk}{dt} = v\zeta k, \quad \frac{dM}{dt} = \pi - v\zeta k + rM, \quad (4.1)$$

$$k(0) = k_0 > 0, \quad M(0) = M_0 > 0, \quad M(t) \geq 0, \quad 0 \leq v \leq 1.$$

Решение задачи (4.1), называемой далее  $P_T$ , проанализировано в [16]. Схема исследования сводится к применению принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовым ограничением, приведенного, например, в [19, с. 185], и дальнейшему изучению поведения траекторий прямой и сопряженной систем задачи  $P_T$  в зависимости от значений параметров задачи и начальных условий. Приведем формулировки результатов.

**Утверждение 1** (см. [16]). Рассмотрим случай  $r < \delta$ . Справедливы следующие утверждения.

1) В области значений начальных условий  $(M_0, k_0)$ , определяемой соотношением

$$0 < M_0 < k_0 \frac{\zeta}{\zeta - r} (e^{(\zeta-r)T} - 1) + \frac{\pi}{r} (e^{-rT} - 1), \quad (4.2)$$

уравнение

$$M_0 e^{r\hat{T}} + \frac{\pi}{r} (e^{r\hat{T}} - 1) - \frac{\zeta k_0}{\zeta - r} (e^{\zeta\hat{T}} - e^{r\hat{T}}) = 0$$

имеет единственный корень  $\hat{T} \in [0, T)$ , и решение задачи  $P_T$  определяется следующими соотношениями:

$$v(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \hat{T}, \\ \frac{\pi}{\zeta k(t)}, & \hat{T} < t \leq T; \end{cases}$$

$$k(t) = \begin{cases} k_0 e^{\zeta t}, & 0 \leq t < \hat{T}, \\ k_0 e^{\zeta\hat{T}} + \pi(t - \hat{T}), & \hat{T} < t \leq T; \end{cases}$$

$$M(t) = \begin{cases} M_0 e^{rt} + \frac{\pi}{r} (e^{rt} - 1) - \frac{\zeta k_0}{\zeta - r} (e^{\zeta t} - e^{rt}), & 0 \leq t < \hat{T}, \\ 0, & \hat{T} < t \leq T. \end{cases}$$

2) В области значений начальных условий  $(M_0, k_0)$ , удовлетворяющих неравенству

$$M_0 \geq k_0 \frac{\zeta}{\zeta - r} (e^{(\zeta-r)T} - 1) + \frac{\pi}{r} (e^{-rT} - 1), \quad (4.3)$$

решение задачи  $P_T$  при любых  $t \in [0, T]$  определяется соотношениями

$$v(t) = 1,$$

$$k(t) = k_0 e^{\zeta t},$$

$$M(t) = M_0 e^{rt} + \frac{\pi}{r} (e^{rt} - 1) - \frac{\zeta k_0}{\zeta - r} (e^{\zeta t} - e^{rt}).$$

**Утверждение 2.** Рассмотрим случай  $r > \delta$ . Справедливы следующие утверждения.

1) В области значений начальных условий  $(M_0, k_0)$ , определяемой неравенствами (4.2), т.е.

$$0 < M_0 < k_0 \frac{\zeta}{\zeta - r} (e^{(\zeta-r)T} - 1) + \frac{\pi}{r} (e^{-rT} - 1),$$

существует единственное решение  $(\tilde{T}, \hat{T})$  системы уравнений

$$\begin{cases} M_0 e^{r\hat{T}} + \frac{\pi}{r}(e^{r\hat{T}} - 1) - \frac{\zeta k_0}{\zeta - r}(e^{\zeta(\hat{T}-\tilde{T})} - e^{r(\hat{T}-\tilde{T})}) = 0, \\ \frac{r}{\delta(r - \zeta)}(1 - e^{r(\hat{T}-T)}) \left( e^{(\delta-\zeta)(\hat{T}-\tilde{T})} - e^{(\delta-r)(\hat{T}-\tilde{T})} \right) + \frac{1}{\delta - \zeta} (1 - e^{(\delta-\zeta)(\hat{T}-\tilde{T})}) = 0, \end{cases}$$

причем  $0 \leq \tilde{T} < \hat{T} \leq T$ .

Решение задачи  $P_T$  определяется соотношениями

$$v(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \tilde{T}, \\ 1, & \tilde{T} \leq t \leq \hat{T}, \\ \frac{\pi}{\zeta(k_0 e^{\zeta(\hat{T}-\tilde{T})} + \pi(t - \hat{T}))}, & \hat{T} \leq t \leq T; \end{cases}$$

$$k(t) = \begin{cases} k_0, & 0 \leq t \leq \tilde{T}, \\ k_0 e^{\zeta(t-\tilde{T})}, & \tilde{T} \leq t \leq \hat{T}, \\ k_0 e^{\zeta(\hat{T}-\tilde{T})} + \pi(t - \hat{T}), & \hat{T} \leq t \leq T; \end{cases}$$

$$M(t) = \begin{cases} M_0 e^{rt} + \frac{\pi}{r}(e^{rt} - 1), & 0 \leq t \leq \tilde{T}, \\ M_0 e^{rt} + \frac{\pi}{r}(e^{rt} - 1) - \frac{\zeta k_0}{\zeta - r}(e^{\zeta(t-\tilde{T})} - e^{r(t-\tilde{T})}), & \tilde{T} < t \leq \hat{T}, \\ 0, & \hat{T} < t \leq T. \end{cases}$$

2) В области значений начальных условий  $(M_0, k_0)$ , удовлетворяющих неравенству (4.3), т.е.

$$M_0 \geq k_0 \frac{\zeta}{\zeta - r} (e^{(\zeta-r)T} - 1) + \frac{\pi}{r} (e^{-rT} - 1),$$

решение задачи  $P_T$  при любых  $t \in [0, T]$  определяется соотношениями

$$v(t) = 1,$$

$$k(t) = k_0 e^{\zeta t},$$

$$M(t) = M_0 e^{rt} + \frac{\pi}{r}(e^{rt} - 1) - \frac{\zeta k_0}{\zeta - r}(e^{\zeta t} - e^{rt}).$$

**Замечание 3.** 1) Утверждения 1, 2 позволяют разделить фазовую плоскость  $(M_0, k_0)$  на две области с разными режимами оптимального управления для задачи  $P_T$ . Граница между областями определяется равенством

$$M_0 = k_0 \frac{\zeta}{\zeta - r} (e^{(\zeta-r)T} - 1) + \frac{\pi}{r} (e^{-rT} - 1). \tag{4.4}$$

2) При  $T \rightarrow \infty$  линейная граница (4.4) на плоскости  $(M_0, k_0)$  стремится к прямой:

$$k_0 = (rM_0 + \pi) \frac{(r - \zeta)_+}{r\zeta}. \tag{4.5}$$

Вернемся теперь к исходной задаче  $P_\infty$  с бесконечным горизонтом. Необходимое и достаточное условие оптимальности в задаче  $P_\infty$  – существование функции цены, удовлетворяющей урав-

нению Гамильтона–Якоби–Беллмана для задачи  $P_\infty$ , в котором закон управления, соответствующий оптимальной траектории, является максимизатором.

Задаче оптимального управления  $P_\infty$  соответствует уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана вида (см. [20, гл. 1, ч. 3])

$$\delta V = k + \zeta k \left( \frac{\partial V}{\partial k} - \frac{\partial V}{\partial M} \right)_+ + \frac{\partial V}{\partial M} (\pi + rM). \quad (4.6)$$

Анализ решения задачи  $P_T$  на конечном горизонте позволяет найти вязкостное (обобщенное) (см. [20]) решение уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана для задачи  $P_\infty$  и построить позиционное оптимальное управление в исходной модели. В [16] доказаны следующие основные результаты.

**Теорема 2** (см. [16]). Пусть  $r < \delta$ . Тогда для задачи  $P_\infty$  справедливы следующие утверждения.

1) Оптимальное управление определяется выражением

$$v(k, M) = \begin{cases} 1, & M > 0, \\ \min\left(\frac{\pi}{\zeta k}, 1\right), & M = 0. \end{cases}$$

2) Функция цены

$$V_1(k, M) = \begin{cases} \frac{k}{\delta - \zeta} - \frac{\zeta k}{\delta(\delta - \zeta)} e^{-(\delta - \zeta)\hat{T}(M, k)} + \frac{\pi}{\delta^2} e^{-\delta\hat{T}(M, k)}, & \text{если } rM + \pi < \frac{r\zeta k}{r - \zeta}, \\ \frac{k}{\delta - \zeta}, & \text{если } rM + \pi \geq \frac{r\zeta k}{r - \zeta}, \end{cases}$$

является дифференцируемой функцией и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана (4.6). Величина  $\hat{T}(M, k) > 0$  является единственным корнем уравнения

$$\left( rM + \pi - \frac{r\zeta k}{r - \zeta} \right) e^{r\hat{T}} = \pi - \frac{r\zeta k}{r - \zeta} e^{\zeta\hat{T}}$$

при  $rM + \pi < \frac{r\zeta k}{r - \zeta}$ ,  $r - \zeta > 0$ . В противном случае положим  $\hat{T}(M, k) = +\infty$ .

3) Фазовые траектории системы, соответствующие оптимальному управлению, имеют вид

$$k(t) = \begin{cases} k_0 e^{\zeta t}, & 0 \leq t < \hat{T}(M_0, k_0), \\ k_0 e^{\zeta\hat{T}(M_0, k_0)} + \pi(t - \hat{T}(M_0, k_0)), & t \geq \hat{T}(M_0, k_0); \end{cases}$$

$$M(t) = \begin{cases} M_0 e^{rt} + \frac{\pi}{r}(e^{rt} - 1) - \frac{\zeta k_0}{\zeta - r}(e^{\zeta t} - e^{rt}), & 0 \leq t < \hat{T}(M_0, k_0), \\ 0, & t \geq \hat{T}(M_0, k_0). \end{cases}$$

**Теорема 3** (см. [16]). Пусть  $r > \delta$ . Тогда для задачи  $P_\infty$  справедливы следующие утверждения.

1) Оптимальное управление определяется выражением

$$v(k, M) = \begin{cases} 0, & \text{если } rM + \pi < \frac{r\zeta k}{r - \zeta}, \\ 1, & \text{если } rM + \pi \geq \frac{r\zeta k}{r - \zeta}. \end{cases}$$

2) Функция цены

$$V(k, M) = \begin{cases} \frac{k}{\delta} \left( 1 + \frac{\zeta}{(\delta - \zeta)} \left( \frac{(r - \zeta)(rM + \pi)}{r\zeta k} \right)^{\frac{\delta}{r}} \right), & \text{если } rM + \pi \leq \frac{r\zeta k}{r - \zeta}, \\ \frac{k}{\delta - \zeta}, & \text{если } rM + \pi > \frac{r\zeta k}{r - \zeta} \end{cases}$$

является вязкостным решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (4.6).

3) Фазовые траектории системы, соответствующие оптимальному управлению, имеют вид

$$k(t) = \begin{cases} k_0, & 0 \leq t \leq \tilde{T}, \\ k_0 e^{\zeta(t-\tilde{T})}, & t \geq \tilde{T}; \end{cases}$$

$$M(t) = \begin{cases} M_0 e^{rt} + \frac{\pi}{r}(e^{rt} - 1), & 0 \leq t \leq \tilde{T}, \\ M_0 e^{rt} + \frac{\pi}{r}(e^{rt} - 1) - \frac{\zeta k_0}{\zeta - r}(e^{\zeta(t-\tilde{T})} - e^{r(t-\tilde{T})}), & t \geq \tilde{T}, \end{cases}$$

где

$$\tilde{T} = \left( \frac{1}{r} \ln \frac{\zeta k_0}{(r - \zeta)(r M_0 + \pi)} \right)_+. \tag{4.7}$$

**Замечание 4.** Пусть  $r > \delta$ . Если  $\tilde{T} > 0$  (см. (4.7)), то фазовые траектории задачи  $P_\infty$ , соответствующие оптимальному управлению, при  $t \geq \tilde{T}$  имеют вид

$$k(t) = k_0 e^{\zeta(t-\tilde{T})}, \quad M(t) = \frac{\zeta k_0}{r - \zeta} e^{\zeta(t-\tilde{T})} - \frac{\pi}{r}$$

и связаны линейным соотношением

$$rM(t) + \pi = \frac{r\zeta k(t)}{r - \zeta}.$$

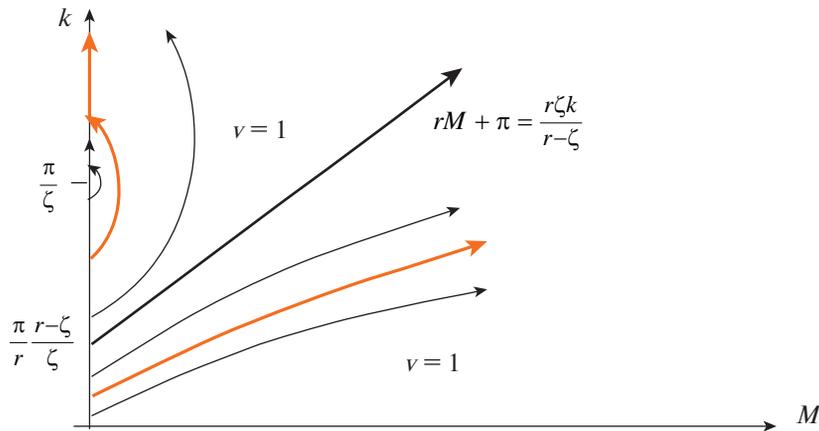
### 5. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результаты исследования модели инвестиционного поведения собственника производства в предпринимательской среде с доходностью  $r$  на несовершенном рынке капитала позволяют проанализировать зависимость оптимальных стратегий собственника от параметров модели и начальных условий.

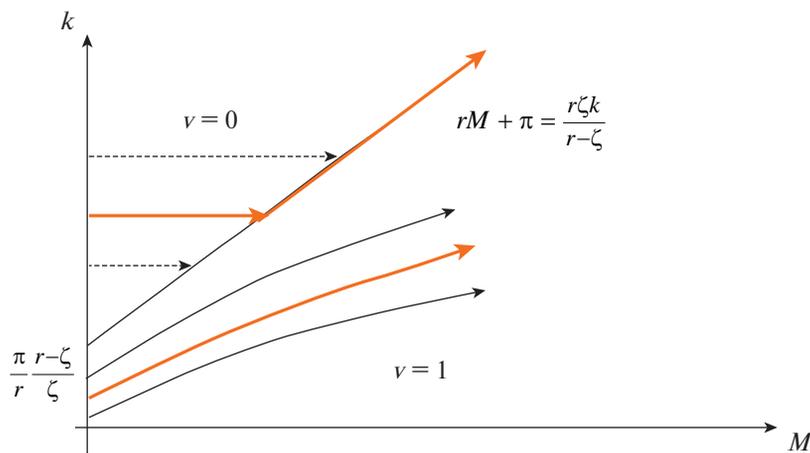
1. В условиях низкой доходности инвестиций ( $r < \delta$ ) оптимальной стратегией поведения собственника является приоритетное расходование прибыли от производственной деятельности на личное потребление (теорема 2). На фиг. 3 представлен типичный фазовый портрет траекторий системы в задаче ( $P_\infty$ ) при условиях  $r > \delta$ ,  $r > \zeta$ . Заметим, что на фазовой плоскости существуют две области значений фазовых переменных исходной задачи, в которых наблюдается разный тип поведения собственников. Граница между областями – прямая, определенная в (4.5) (при  $r < \zeta$  прямая (4.5) вырождается в прямую  $k(t) = 0$  и нижняя область исчезает). Траектории системы, стартующие в верхней области на фиг. 3, соответствуют собственникам, которые обладают меньшим начальным капиталом  $M_0$ , чем агенты, чьи траектории расположены в нижней области на фиг. 3. Поэтому естественно интерпретировать агентов из верхней области как собственников малого и среднего бизнеса, а агентов из нижней области – как крупных собственников. Анализ полученных в теореме 2 результатов позволяет утверждать, что для собственников малого и среднего бизнеса при низкой доходности предпринимательской среды характерно интенсивное накопление средств потребления до полного исчерпания капитала  $M$ , а далее расходование на приобретение средств потребления всего текущего дохода от производственной деятельности (верхняя область на фиг. 3).

Представители крупного бизнеса имеют другой тип поведения. Их финансовое состояние позволяет наращивать средства потребления с максимально возможным темпом  $\zeta$ , а оставшуюся часть прибыли направлять на инвестиции в производство независимо от прочих соотношений параметров модели (нижняя область на фиг. 3).

2. В условиях высокой доходности инвестиций ( $r > \delta$ ) представителям малого и среднего бизнеса оказывается выгодно отсрочить личное потребление и наращивать капитал за счет доходов от рыночных инвестиций (теорема 3). На фиг. 4 представлен типичный фазовый портрет траекторий системы в задаче  $P_\infty$  при условии  $r > \delta$ . Аналогично п. 1, на фазовой плоскости ( $M, k$ ) можно выделить две области: верхняя соответствует представителям малого и среднего бизнеса,



Фиг. 3. Фазовый портрет системы в случае  $r < \delta$ .



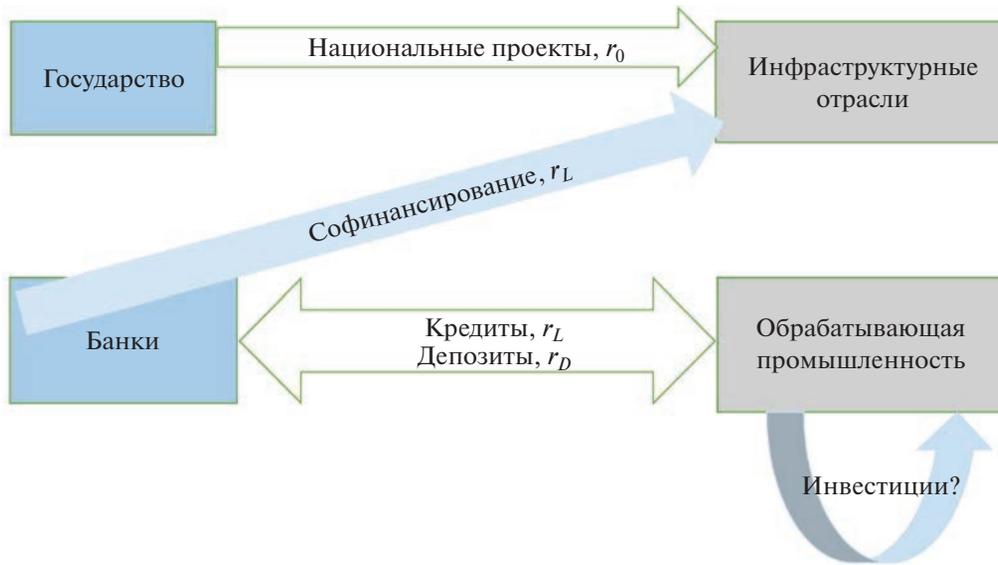
Фиг. 4. Фазовый портрет системы в случае  $r > \delta$ .

а нижняя – представителям крупного бизнеса. Заметим, что поведение крупных собственников (нижняя область на фиг. 4) не отличается от рассмотренного в п. 1 в ситуации низкой доходности предпринимательской среды. Таким образом, на крупных инвесторов не оказывает влияние состояние предпринимательской среды и целесообразно использовать другие методы стимулирования инвестиционной активности. В отличие от этого представители малого и среднего бизнеса инвестируют в развитие производства до определенного уровня своего благосостояния и только потом начинают вкладывать прибыль от основной деятельности в накопление средств потребления и одновременно инвестировать в производство с одинаковым максимально возможным темпом  $\zeta$  (верхняя область на фиг. 4).

### 6. ОБЪЯСНЕНИЕ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ИЗ РЕЖИМА ВОССТАНОВИТЕЛЬНОГО РОСТА В РЕЖИМ СТАГНАЦИИ НА ОСНОВЕ ПОДХОДА КАНТОРА–ЛИПМАНА

В результате исследования модели инвестиционного поведения собственника на несовершенном рынке капитала показано, что улучшение состояния предпринимательской среды (рост доходности  $r$ ) может привести к переключению поведения собственников малого и среднего бизнеса из режима потребления в режим инвестирования. Наоборот, ухудшение характеристик инвестиционной среды (снижение доходности  $r$ ) приводит к сворачиванию инвестиционной деятельности представителей малого и среднего бизнеса.

В заключение работы на основе подхода Кантора–Липмана опишем возможный механизм переключения из режима восстановительного роста в режим стагнации российской экономики



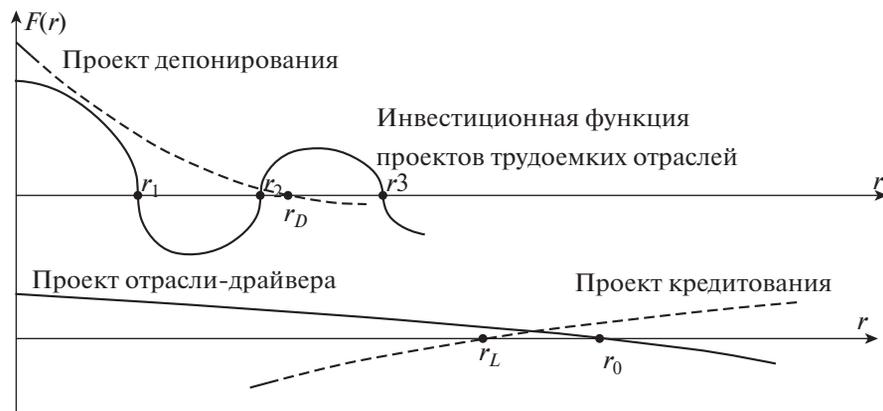
Фиг. 5. Схема взаимодействия агентов в российской экономике.

на рубеже 2008 г. Напомним, что в терминах модели Кантора–Липмана величина доходности  $r$  на несовершенном рынке капитала может быть найдена как минимальный подложительный корень инвестиционной функции  $F(r)$ , определенной в (2.8).

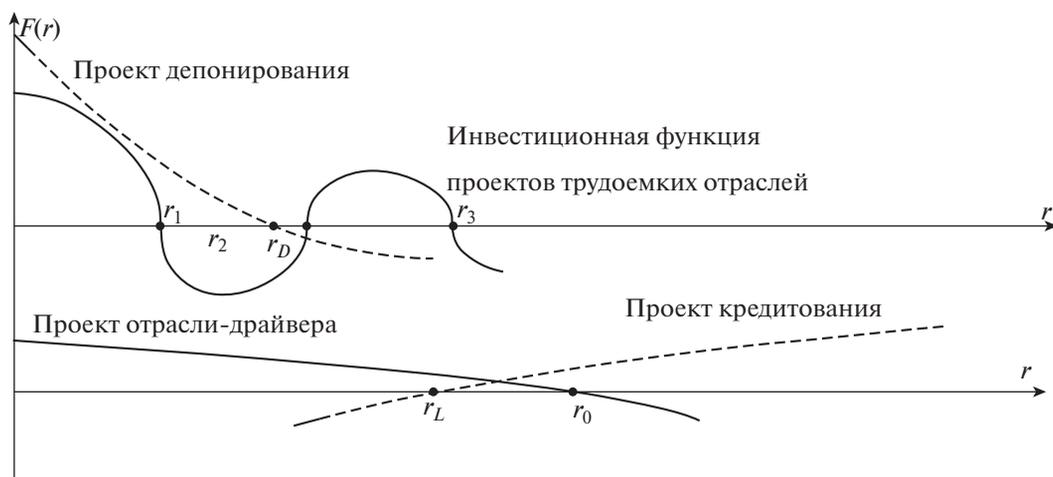
На фиг. 5 приведена типичная для рассматриваемого периода схема взаимодействия экономических агентов, поведение которых могло повлиять на прекращение роста в производственной сфере российской экономики.

Период восстановительного роста сопровождался крупными высокодоходными (процент по доходу  $r_0 > 0$ ) национальными проектами по реформированию инфраструктурных отраслей (реформа электроэнергетики, связь, транспортные проекты). Государство выделяло средства на эти проекты при условии рыночного софинансирования. Источником такого софинансирования являлась система коммерческих банков. В ситуации высокой доходности  $r_0$  национальных проектов банки могли назначать достаточно высокие проценты по кредитам  $0 < r_L < r_0$ . Партнером банков являлись собственники предприятий обрабатывающей промышленности, которые пользовались услугами кредитования под процент  $r_L$  и депонирования средств под процент  $0 < r_D < r_L$ , который также назначался банками. При этом расхождение этих процентных ставок оказывалось значительным в условиях несовершенного рынка капитала, однако величина процента по депозитам  $r_D$  могла поддерживаться банками на достаточно высоком уровне при высокой процентной ставке  $r_0$ . В рамках подхода Кантора–Липмана это означает, что инвестиционный полином (2.8), описывающий предпринимательскую среду собственника в производственной сфере, мог иметь несколько корней (далее мы рассматриваем ситуацию трех корней  $r_1, r_2, r_3$ , см. фиг. 6, 7), но высокий процент  $r_D$  экранировал два из трех его положительных корней (фиг. 6), что приводило к удержанию относительно высокой ставки доходности  $r_3$  предпринимательской среды в производственной сфере. Эта ситуация проиллюстрирована на фиг. 6.

Со временем рост транзакционных издержек в инфраструктурных отраслях привел к снижению доходности  $r_0$  национальных проектов. Соответственно, банки снизили процент по кредитам  $r_L < r_0$ . Следствием этого явилось снижение процента по депозитам  $r_D$ , который не может превышать  $r_L$ . Снижение  $r_D$  было более значительным, поскольку система коммерческих банков к этому моменту накопила большой объем ликвидности и не была более заинтересована в привлечении депозитов. В результате падения процента  $r_D$  минимальный положительный корень инвестиционной функции в производственной сфере перескочил из значения  $r_3$  в значение  $r_1 < r_3$ . Данная ситуация проиллюстрирована на фиг. 7. В результате доходность предпринимательской среды в обрабатывающем секторе производства резко снизилась. Собственники пред-



Фиг. 6. Ситуация высокой доходности предпринимательской среды:  $r_2 < r_D < r_L < r_0$ .



Фиг. 7. Ситуация низкой доходности предпринимательской среды:  $r_D < r_2 < r_L < r_0$ .

приятый могли либо продолжать инвестиции под невыгодные проценты  $r_1$ , либо положить средства на депозит под более высокий процент  $r_D > r_1$  (режим рантье). Можно предположить, что коэффициент дисконтирования доходов собственника производства фактически приблизился к значению процента по депозиту  $\delta \approx r_D$ , поэтому проект депонирования стал альтернативой производственной деятельности. Такая ситуация могла привести к спаду инвестиционной активности в производственной сфере и способствовать переходу в режим стагнации российской экономики.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шананин А.А. Анализ финансового состояния инвестора на основе модели Кантора–Липмана // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 293–306.
2. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.
3. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. От госплана к неэффективному рынку: математический анализ эволюции российских экономических структур. UK: The Edwin Mellen Press, 1999.
4. Cantor D.G., Lipman S.A. Investment selection with imperfect capital markets // *Econometrica*. 1983. V. 51. № 4. P. 1121–1144.
5. Cantor D.G., Lipman S.A. Optimal investment selection with a multitude of projects // *Econometrica*. 1995. V. 63. № 5. P. 1231–1240.

6. *Adler L., Gale D.* Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy // *Mathematical Finance*. 1997. V. 7. № 1. P. 73–81.
7. *Sonin I.M.* Growth rate, internal rates of return and turn pikes in an investment model // *Economic Theory*. 1996. V. 5. P. 383–400.
8. *Presman E.L., Sonin I.M.* Growth rate, internal rates of return and financial bubbles. Moscow: SEMI Rus. Acad. Sci., 2000.
9. *Беленький В.З.* Экономическая динамика: анализ инвестиционных проектов в рамках линейной модели Неймана–Гейла. М.: Рос. экон. шк., 2002.
10. *Ващенко М.П.* Оценка доходности инвестиционных проектов в условиях неопределенности // *Матем. моделирование*. 2009. Т. 21. № 3. С. 18–30.
11. *Ващенко М.П., Шананин А.А.* Оценка доходности пула инвестиционных проектов в модели оптимального инвестирования в непрерывном времени // *Матем. моделирование*. 2012. Т. 24. № 3. С. 70–86.
12. *Shananin A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh.* Financial bubbles existence in the Cantor–Lippman model for continuous time // *Lobachevskii J. Math.* 2018. V. 39. № 7. P. 929–935.
13. *Шананин А.А.* Математическое моделирование инвестиций на несовершенном рынке капитала // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2019. Т. 25. № 4. С. 265–274.
14. *Шананин А.А.* Анализ финансового состояния инвестора на основе модели Кантора–Липмана // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2020. Т. 26. № 1. С. 293–306.
15. *Ramsey F.P.* A mathematical theory of savings // *Econ. J.* 1928. № 38. P. 543–559.
16. *Obrosova N.K., Shananin A.A., Spiridonov A.A.* A Model of investment behavior of enterprise owner in an imperfect capital market // *Lobachevskii J. Math.* 2022. V. 43. № 4. P. 1023–1036.
17. *Рудева А.В., Шананин А.А.* Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности. // *Дифференц. уравнения*. 2009. Т. 45. № 12. С. 1799–1803.
18. *Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А.* Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 6. С. 1034–1056.
19. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
20. *Bardi M. Capuzzo-Dolcetta I.* Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhauser, 1997.

УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
КОЛМОГорова–Фоккера–Планка<sup>1)</sup>

© 2023 г. Н. В. Трусов<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup> 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, кор. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

<sup>2</sup> 119991 Москва, Ленинские горы, Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

\*e-mail: trunick.10.96@gmail.com

Поступила в редакцию 15.09.2022 г.  
Переработанный вариант 15.09.2022 г.  
Принята к публикации 17.11.2022 г.

В работе исследуется математическое описание экономического поведения домашних хозяйств с помощью уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка. Данное уравнение описывает динамику плотности распределения домашних хозяйств по двум характеристикам: финансовому состоянию и доходам. Основываясь на статистических данных Росстата об экономическом положении домашних хозяйств России, исследуется вопрос о согласованности статистических данных с решением уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка. Задача формализована в виде минимизации отклонения решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка от статистических данных за счет управления расходами домашних хозяйств. Представлено численное решение экстремальной задачи, приведены результаты расчетов. Библ. 10. Фиг. 11. Табл. 1.

DOI: 10.31857/S0044466923030110, EDN: DZONBT

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Моделирование экономического поведения домашних хозяйств опирается на концепцию рационального репрезентативного экономического агента и восходит к работе Ф. Рамсея [1]. Модели поведения репрезентативного домашнего хозяйства для различных социальных слоев разрабатывались в [2], [3] и использовались для анализа состояния рынка потребительского кредита. Динамика поведения репрезентативного домашнего хозяйства характеризует “среднее” поведение домашних хозяйств в рассматриваемом социальном слое. Исследование поведения большого количества домашних хозяйств в рамках социального слоя позволяет более качественно отслеживать их экономическую динамику. Большое количество домашних хозяйств можно описывать плотностью их распределения по финансовому состоянию и доходам. Финансовое состояние – величина, характеризующая разницу между доступными ликвидными средствами с депозитарными счетами домашнего хозяйства и его задолженностью перед банковским сектором. Динамику эволюции плотности распределения можно описать с помощью уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (см. [4]).

В данной работе исследуется вопрос о качестве моделирования экономического поведения домашних хозяйств с помощью уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка в сравнении со статистическими данными обследования бюджетов домашних хозяйств (ОБДХ) в России за период 2015–2020 гг. [5]. В разд. 2 поставлена задача согласованности наблюдаемой статистики с динамикой распределения домашних хозяйств, описываемой уравнением Колмогорова–Фоккера–Планка. В разд. 3 представлен алгоритм численного решения данной задачи, результаты которого апробированы на данных российской статистики и представлены в разд. 4. В заключение (разд. 5) обсуждаются пути дальнейших исследований.

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (Грант 23-11-00129).

2. ЗАДАЧА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Мы полагаем, что доходы домашнего хозяйства  $S$  являются стохастическим процессом и описываются стохастическим дифференциальным уравнением

$$dS = S(\gamma dt + \sigma dW),$$

$$S(0) = S_0,$$

где  $\gamma \in \mathbb{R}$  характеризует темп роста доходов,  $dW$  – стохастический дифференциал винеровского процесса  $W$ ,  $\sigma > 0$ . Пусть  $M(t)$  – ликвидные средства домашнего хозяйства, которые описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{dM}{dt} = S(t) - p(t)C(t) + H_L(t) - H_D(t), \tag{1}$$

где  $C(t)$  – расходы домашнего хозяйства;  $p(t)$  – индекс потребительских цен, растущий с темпом инфляции  $j$ , т.е.  $p(t) = p_0 e^{jt}$ ,  $p_0 > 0$ ; величина  $H_L(t) \in \mathbb{R}$  описывает заимствования по потребительскому кредиту, а величина  $H_D(t) \in \mathbb{R}$  характеризует пополнение/снятие сбережений в форме депозитов в коммерческих банках. Изменение задолженности  $L(t) \geq 0$  описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dL}{dt} = H_L(t) + r_L L(t), \tag{2}$$

где  $r_L > 0$  является процентной ставкой по потребительскому кредиту. Изменение сбережений в форме депозитов  $D(t) \geq 0$  описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dD}{dt} = H_D(t) + r_D D(t), \tag{3}$$

где  $r_D > 0$  является процентной ставкой по депозитам, причем предполагается выполнение условия отсутствия арбитража, т.е.  $r_L > r_D > 0$ . Закон Фишера связывает между собой ликвидные средства  $M(t)$  с потребительскими расходами домашнего хозяйства  $C(t)$  через величину  $\frac{1}{\theta} > 0$ , характеризующую скорость обращения денег

$$M(t) = \theta p(t)C(t).$$

Пусть  $x(t)$  – финансовое состояние домашнего хозяйства. Оно задается выражением

$$x(t) = M(t) + D(t) - L(t). \tag{4}$$

Рациональное поведение предполагает, что домашнее хозяйство не имеет задолженности по потребительскому кредиту и сбережений в коммерческих банках одновременно, поэтому

$$L(t) = \max\{M(t) - x(t), 0\} = (M(t) - x(t))_+,$$

$$D(t) = (x(t) - M(t))_+.$$

Дифференцируя уравнение (4) в силу уравнений (1)–(3), мы получаем динамику изменения финансового состояния домашнего хозяйства

$$\frac{dx}{dt} = S - \frac{1}{\theta} M - r_L (M - x)_+ + r_D (x - M)_+, \quad x(0) = x_0. \tag{5}$$

Таким образом, финансовое состояние  $x$  домашнего хозяйства и его доходы  $S$  описываются динамической системой

$$\frac{dx}{dt} = S - \frac{1}{\theta} M - r_L (M - x)_+ + r_D (x - M)_+,$$

$$dS = S(\gamma dt + \sigma dW),$$

$$x(0) = x_0,$$

$$S(0) = S_0.$$

В работе [2] исследуется задача рамсеевского типа о максимизации дисконтированного потребления репрезентативного домашнего хозяйства, которое управляет потреблением  $C(t)$ . Условие расплаты по потребительскому кредиту к конечному моменту времени влечет ограничение на финансовое состояние  $x \geq \frac{-S}{r_L - \gamma}$ . Если данное неравенство нарушается, то домашнее хозяйство не может расплатиться с потребительским кредитом при сложившейся конъюнктуре (см. [2]).

Пусть  $m(x, S, t)$  описывает плотность распределения домашних хозяйств по финансовым состояниям  $x$  и доходам  $S$  в момент времени  $t$ . В [4] выведено уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка, которое описывает эволюцию плотности распределения  $m(x, S, t)$

$$\frac{\partial m(x, S, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (S\sigma^2(x, S)m(x, S, t)) + \frac{\partial}{\partial S} (Sm(x, S, t)\gamma(x, S)) + \frac{\partial}{\partial x} (mf(x, S)) = 0, \tag{6}$$

с начальными условиями

$$m(x, S, 0) = m_0(x, S), \tag{7}$$

где  $f(x, S)$  является правой частью дифференциального уравнения (5), т.е.

$$f(x, S) = S - \frac{1}{\theta} M - r_L (M - x)_+ + r_D (x - M)_+. \tag{8}$$

**Замечание 1.** Отметим, что  $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} m(x, S, t) dS dx = C, \forall t \in [0, T]$  в уравнении (6),  $C > 0$ .

Пусть  $\tilde{m}(x, S, t)$  – наблюдаемая статистика плотности распределения домашних хозяйств на временном отрезке  $[0, T]$ . В данной работе исследуется задача воспроизведения статистической плотности распределения  $\tilde{m}(x, S, t)$  с помощью уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (6), (7) за счет управления ликвидными средствами  $M(t)$ , т.е.

$$\frac{\partial m(x, S, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial S^2} (S\sigma^2(x, S)m(x, S, t)) + \frac{\partial}{\partial S} (Sm(x, S, t)\gamma(x, S)) + \frac{\partial}{\partial x} (m(x, S, t)f(x, S)) = 0, \tag{9}$$

$$m(x, S, 0) = \tilde{m}(x, S, 0), \tag{10}$$

$$J = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} (\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t))^2 dS dx dt \rightarrow \min_{M(x, S, t) \geq \mu(x, S, t)}, \tag{11}$$

где  $\mu(x, S, t) = \theta(x, S, t)C_{\min}(t)$ ,  $C_{\min}(t)$  – минимальное потребление в момент времени  $t \in [0, T]$ .

Для решения экстремальной задачи (9)–(11) необходимо выписать сопряженное уравнение. Пусть  $v(x, S, t)$  – гладкая функция с компактным носителем. Построим лагранжиан экстремальной задачи (9)–(11), где в качестве множителя Лагранжа выступает функция  $v(x, S, t)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m, v) = & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} [\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t)]^2 dS dx dt + \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} [m(x, S, T)v(x, S, T) - \\ & - \tilde{m}(x, S, 0)v(x, S, 0)] dS dx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} m(x, S, t) \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \gamma S \frac{\partial v}{\partial S} + f \frac{\partial v}{\partial x} \right] dS dx dt. \end{aligned} \tag{12}$$

**Замечание 2.** Для получения лагранжиана (12) используется интегрирование по частям в уравнении Колмогорова–Фоккера–Планка.

Сопряженное уравнение для экстремальной задачи (9)–(11) имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} + \gamma S \frac{\partial v}{\partial S} + f \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{13}$$

с терминальным условием

$$v(x, S, T) = 0. \tag{14}$$

Представим алгоритм решения экстремальной задачи (9)–(11):

Шаг 1. Задаем начальное управление  $M^0(x, S)$ .

Шаг 2. Решаем уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка (9), (10) в прямом времени.

Шаг 3. Решаем сопряженное уравнение (13), (14) в попятном времени.

Шаг 4. Находим новое управление  $M^\kappa(x, S)$ , где  $\kappa \in \mathbb{N}$  – номер итерации:

$$M^\kappa(x, S) := M^{\kappa-1}(x, S) + hm \frac{\partial V}{\partial x} \left( \frac{1}{\theta} + r_L \cdot \mathbb{1}_{M^{\kappa-1} > x} + r_D \cdot \mathbb{1}_{M^{\kappa-1} < x} \right),$$

где  $h > 0$  – шаг сходимости,

$$\mathbb{1}_{a > b} = \begin{cases} 1, & \text{если } a > b, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Шаг 5. Переходим к шагу 2 до тех пор, пока не будет выполнен критерий останова

$$\left| \sqrt{J^\kappa} - \sqrt{J^{\kappa-1}} \right| < \varepsilon.$$

### 3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

#### 3.1. Разностная схема для уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка

Ограничим множество финансовых состояний  $x$  и множество доходов  $S$ . Пусть  $x \in [-L_1, L_2]$ ,  $S \in [S_1, S_2]$ , где  $L_1 > 0$ ,  $L_2 > 0$ ,  $S_2 > S_1 \geq 0$ . Разобьем диапазон финансовых состояний на  $M + 1$  узлов, диапазон доходов на  $H + 1$  узлов, временной отрезок на  $N + 1$  узлов. Будем полагать, что все разбиения равномерны. Определим длины отрезков:  $\Delta x = \frac{L_1 + L_2}{M}$ ,  $\Delta S = \frac{S_2 - S_1}{H}$ ,  $\Delta t = \frac{T}{N}$ . Для адвективной части уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (9) мы используем противоточную схему Годунова первого порядка. Разностные схемы такого вида были успешно применены в работах [6–8].

Будем придерживаться следующих обозначений. Пусть  $m_{j,k}^i$  характеризует значение функции  $m(x, S, t)$  в точке  $(j\Delta x, k\Delta S, i\Delta t)$ ,  $j = 1, M - 1$ ,  $k = 1, H - 1$ ,  $i = 0, N$ . Разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка (9) представляется в виде

$$m_{j,k}^{i+1} = m_{j,k}^i + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \left( m_{j,k+1}^i S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k+1}^i)^2 - 2m_{j,k}^i S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 + m_{j,k-1}^i S_{k-1}^2 (\sigma_{j,k-1}^i)^2 \right) - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left( m_{j,k+\frac{1}{2}}^i S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i - m_{j,k-\frac{1}{2}}^i S_{k-\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-\frac{1}{2}}^i \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( m_{j+\frac{1}{2},k}^i f_{j+\frac{1}{2},k}^i - m_{j-\frac{1}{2},k}^i f_{j-\frac{1}{2},k}^i \right), \quad (15)$$

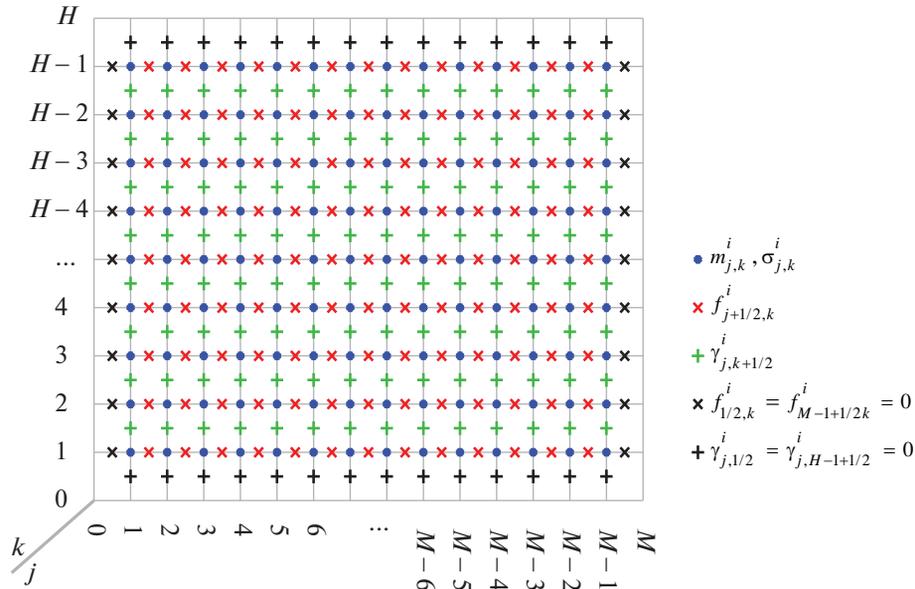
$$j = 2, M - 2, \quad k = 2, H - 2, \quad i = 0, N - 1,$$

где

$$m_{j,k+\frac{1}{2}}^i = \begin{cases} m_{j,k+1}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i < 0, \\ m_{j,k}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \geq 0, \end{cases} \quad m_{j+\frac{1}{2},k}^i = \begin{cases} m_{j+1,k}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0, \\ m_{j,k}^i, & \text{если } S_{k+\frac{1}{2}} f_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq 0. \end{cases}$$

Мы накладываем гомогенные условия Неймана на границе области:  $f_{\frac{1}{2},k}^i = f_{M-1+\frac{1}{2},k}^i = \gamma_{j,\frac{1}{2}}^i = \gamma_{j,H-1+\frac{1}{2}}^i = 0$ , и граничные условия  $m_{j,1}^i = m_{j,H-1}^i = m_{1,k}^i = m_{M-1,k}^i = 0$ , где  $j = 1, M - 1$ ,  $k = 1, H - 1$ ,  $i = 0, N - 1$ .

Схематично, разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка может быть представлена в следующем виде (фиг. 1).



Фиг. 1. Разностная схема уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка.

Естественным требованием является неотрицательность плотности распределения. Выражение этого требования можно обеспечить за счет условий из следующей леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $m^i \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (H-1)}$  является матрицей с неотрицательными компонентами. Пусть  $\tilde{\sigma} = \max_{i \in I, j \in J, k \in K} \sigma_{j,k}^i$ , где  $I \in \{0, \dots, N-1\}$ ,  $J \in \{1, \dots, M-1\}$ ,  $K \in \{1, \dots, H-1\}$ . Если выполнены ограничения (16), (17) на  $f_{j+1/2,k}^i$ ,  $j = \overline{1, M-2}$ ,  $k \in K$ ,  $i \in I$ , и  $\gamma_{j,k+1/2}^i$ ,  $j \in J$ ,  $k = \overline{1, H-2}$ ,  $i \in I$ , тогда матрица  $m^{i+1} \in \mathbb{R}^{(M-1) \times (H-1)}$  состоит из неотрицательных элементов.

$$\frac{\Delta x}{2} \left( \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) \leq f_{j+1/2,k}^i \leq \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 \right), \tag{16}$$

$$\frac{\Delta S}{2S_{k+1/2}} \left( \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) \leq \gamma_{j,k+1/2}^i \leq \frac{\Delta S}{2S_{k+1/2}} \left( \frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 \right), \tag{17}$$

где  $\hat{S}_{k+1} = \min\{S_{k+1}, S_2\}$ .

**Доказательство.** Зафиксируем  $i, j, k$ . Нам необходимо показать, что компоненты  $m_{j-1,k}^i, m_{j,k+1}^i, m_{j,k}^i, m_{j,k-1}^i, m_{j+1,k}^i$  являются неотрицательными величинами. Для этого необходимо рассмотреть всевозможные комбинации знаков величин  $f_{j+1/2,k}^i, f_{j-1+1/2,k}^i, \gamma_{j,k+1/2}^i, \gamma_{j,k-1+1/2}^i$ . Легко видеть, что величины  $f_{j+1/2,k}^i, f_{j-1+1/2,k}^i$  перемещаются горизонтально вдоль компонентов  $m_{j-1,k}^i, m_{j,k}^i, m_{j+1,k}^i$  в зависимости от своих знаков, тогда как величины  $\gamma_{j,k+1/2}^i, \gamma_{j,k-1+1/2}^i$  перемещаются вертикально вдоль компонентов  $m_{j,k-1}^i, m_{j,k}^i, m_{j,k+1}^i$ .

При компонентах  $m_{j-1,k}^i, m_{j,k+1}^i, m_{j,k-1}^i, m_{j+1,k}^i$  знаки величин  $f_{j+1/2,k}^i, f_{j-1+1/2,k}^i, \gamma_{j,k+1/2}^i, \gamma_{j,k-1+1/2}^i$ , входящие со своими множителями в уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка (15) положительны

(например, если  $f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0$ , тогда эта величина соответствует узлу  $m_{j+1,k}^i$  и входит со множителем  $-\frac{\Delta t}{\Delta x} < 0$ , таким образом, знак в узле  $m_{j+1,k}^i$  положителен).

Прежде чем переходить к рассмотрению значения  $m_{j,k}^i$  в центральном узле  $(i, j, k)$ , рассмотрим подробнее лапласиан в уравнении (15). Пусть

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k+1}^i)^2, \quad \varphi_2 = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2, \quad \varphi_3 = \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_{k-1}^2 (\sigma_{j,k-1}^i)^2.$$

Очевидно, что  $\varphi_1 \geq 0, \varphi_3 \geq 0$ . Величина  $\varphi_2 \geq 0$  в соответствии с условиями Куранта о сходимости явной разностной схемы параболического уравнения (15) (см. [9]). Мы накладываем ограничения Куранта в виде  $\frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_2^2 < \frac{1}{2}$ , где  $S_2$  является правой границей фазового пространства  $S$ .

Теперь рассмотрим центральный узел  $(i, j, k)$ . Если мы докажем, что значение  $m_{j,k}^i$  является неотрицательным для случая  $f_{j+\frac{1}{2},k}^i > 0, f_{j-\frac{1}{2},k}^i < 0, \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i > 0, \gamma_{j,k-\frac{1}{2}}^i < 0$ , тогда для других возможных случаев сочетания знаков величин  $f_{j+\frac{1}{2},k}^i, f_{j-\frac{1}{2},k}^i, \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i, \gamma_{j,k-\frac{1}{2}}^i$  значение  $m_{j,k}^i$  также будет неотрицательным. Рассмотрим компоненты  $m_{j,k}^i$  для данного случая для узла  $(i, j, k)$ . Согласно ограничениям (16), (17) мы получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{\Delta t}{\Delta S} S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i + \frac{\Delta t}{\Delta S} S_{k-\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-\frac{1}{2}}^i - \frac{\Delta t}{\Delta x} f_{j+\frac{1}{2},k}^i + \frac{\Delta t}{\Delta x} f_{j-\frac{1}{2},k}^i \geq \\ & \geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} \hat{S}_k^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) - \\ & \quad - \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{1}{2\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 \right) + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \frac{1}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{2\Delta t} \right) = \\ & = 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \hat{S}_{k+1}^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \hat{S}_k^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{4} \geq \\ & \geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 + \frac{\tilde{\sigma}^2}{4} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - \frac{1}{4} \geq \\ & \geq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 \tilde{\sigma}^2 + \tilde{\sigma}^2 \frac{\Delta t}{\Delta S^2} S_k^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что значения коэффициентов, соответствующие компонентам  $m_{j-1,k}^i, m_{j,k+1}^i, m_{j,k}^i, m_{j,k-1}^i, m_{j+1,k}^i$ , при ограничениях (16)–(17) являются неотрицательными. Лемма доказана.

### 3.2. Разностная схема для сопряженного уравнения

Прежде чем переходить к разностной схеме для сопряженного уравнения, отметим, что дискретное уравнение Колмогорова–Фоккера–Планка (15) может быть записано через индикаторные функции:

$$\begin{aligned} m_{j,k}^{i+1} = & m_{j,k}^i + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} \left( m_{j,k+1}^i S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k+1}^i)^2 - 2m_{j,k}^i S_k^2 (\sigma_{j,k}^i)^2 + m_{j,k-1}^i S_{k-1}^2 (\sigma_{j,k-1}^i)^2 \right) - \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left( m_{j,k+1}^i S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{1}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i < 0} + m_{j,k}^i S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{1}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \geq 0} - \right. \\ & \left. - m_{j,k}^i S_{k-\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{1}_{\gamma_{j,k-\frac{1}{2}}^i < 0} - m_{j,k-1}^i S_{k-\frac{1}{2}} \gamma_{j,k-\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{1}_{\gamma_{j,k-\frac{1}{2}}^i \geq 0} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( m_{j+1,k}^i f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{1}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0} + m_{j,k}^i f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{1}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq 0} - \right. \\ & \left. - m_{j,k}^i f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{1}_{f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i < 0} - m_{j-1,k}^i f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{1}_{f_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \geq 0} \right), \end{aligned}$$

где  $j = \overline{2, M-2}$ ,  $k = \overline{2, H-2}$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ . Чтобы избавиться от громоздких выражений, для простоты введем следующие обозначения: пусть

$$\begin{aligned} a_{j,k}^i &= S_{k+1}^2 (\sigma_{j,k}^i)^2, \quad \bar{b}_{j,k+\frac{1}{2}}^i = S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{1}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i < 0}, \quad b_{j,k+\frac{1}{2}}^i = S_{k+\frac{1}{2}} \gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \cdot \mathbb{1}_{\gamma_{j,k+\frac{1}{2}}^i \geq 0}, \\ \bar{c}_{j+\frac{1}{2},k}^i &= f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{1}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i < 0}, \quad c_{j+\frac{1}{2},k}^i = f_{j+\frac{1}{2},k}^i \cdot \mathbb{1}_{f_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq 0}. \end{aligned}$$

Тогда дискретная запись экстремальной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{m_{j,k}^{i+1} - m_{j,k}^i}{\Delta t} - \frac{1}{2\Delta S^2} (m_{j,k+1}^i a_{j,k+1}^i - 2m_{j,k}^i a_{j,k}^i + m_{j,k-1}^i a_{j,k-1}^i) + \\ & + \frac{1}{\Delta S} \left( m_{j,k+1}^i \bar{b}_{j,k+\frac{1}{2}}^i + m_{j,k}^i \left( b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) - m_{j,k-1}^i b_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) + \end{aligned} \quad (18)$$

$$+ \frac{1}{\Delta x} \left( m_{j+1,k}^i \bar{c}_{j+\frac{1}{2},k}^i + m_{j,k}^i \left( c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) - m_{j-1,k}^i c_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) = 0,$$

$$m_{j,k}^0 = \tilde{m}_{j,k}^0, \quad (19)$$

$$J = \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{H-1} (\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i)^2 \rightarrow \min_{\substack{M_{j+\frac{1}{2},k}^i \geq \theta_{j+\frac{1}{2},k}^i \\ C_{\min}^i}}. \quad (20)$$

С учетом нулевых граничных условий, лагранжиан к дискретной экстремальной задаче (18)–(20) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m, v) &= \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{H-1} (\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i)^2 + \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=2}^{M-2} \sum_{k=2}^{H-2} v_{j,k}^i \left[ \frac{m_{j,k}^{i+1} - m_{j,k}^i}{\Delta t} - \right. \\ & - \frac{1}{2\Delta S^2} (m_{j,k+1}^i a_{j,k+1}^i - 2m_{j,k}^i a_{j,k}^i + m_{j,k-1}^i a_{j,k-1}^i) + \\ & + \frac{1}{\Delta S} \left( m_{j,k+1}^i \bar{b}_{j,k+\frac{1}{2}}^i + m_{j,k}^i \left( b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) - m_{j,k-1}^i b_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) + \\ & \left. + \frac{1}{\Delta x} \left( m_{j+1,k}^i \bar{c}_{j+\frac{1}{2},k}^i + m_{j,k}^i \left( c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) - m_{j-1,k}^i c_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Выделим слагаемые с компонентами  $m_{j,k}^i$ . С учетом граничных условий на плотность распределения  $m$  и терминального условия на сопряженную функцию  $v_{j,k}^{N-1} = 0$ ,  $j = \overline{2, M-2}$ ,  $k = \overline{2, H-2}$ , лагранжиан (21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(m, v) &= \Delta t \Delta x \Delta S \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{H-1} (\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i)^2 + \\ & + \Delta t \Delta x \Delta S \left\{ \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=3}^{M-3} \sum_{k=3}^{H-3} m_{j,k}^i \left[ \frac{v_{j,k}^{i-1} - v_{j,k}^i}{\Delta t} - \frac{1}{2\Delta S^2} a_{j,k}^i (v_{j,k-1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k+1}^i) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\Delta S} \left( \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i v_{j,k-1}^i + \left( b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,k}^i - b_{j,k+\frac{1}{2}}^i v_{j,k+1}^i \right) + \\
 & + \frac{1}{\Delta x} \left( \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i v_{j-1,k}^i + \left( c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{j,k}^i - c_{j+\frac{1}{2},k}^i v_{j+1,k}^i \right) \Big] + \sum_{j=2}^{M-2H-2} \sum_{k=2} \left[ \frac{-m_{j,k}^0 v_{j,k}^0}{\Delta t} \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} \sum_{i=0}^{N-2M-2} \sum_{j=2} \left[ m_{j,H-2}^i a_{j,H-2}^i v_{j,H-3}^i - 2m_{j,2}^i a_{j,2}^i v_{j,2}^i - 2m_{j,H-2}^i a_{j,H-2}^i v_{j,H-2}^i + m_{j,2}^i a_{j,2}^i v_{j,3}^i \right] + \\
 & + \frac{1}{\Delta S} \sum_{i=0}^{N-2M-2} \sum_{j=2} \left[ m_{j,H-2}^i \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i v_{j,H-3}^i + m_{j,2}^i \left( b_{j,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,1+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,2}^i + \right. \\
 & \quad \left. + m_{j,H-2}^i \left( b_{j,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,H-2}^i + m_{j,2}^i b_{j,2+\frac{1}{2}}^i v_{j,3}^i \right] + \\
 & + \frac{1}{\Delta x} \sum_{i=0}^{N-2H-2} \sum_{k=2} \left[ m_{M-2,k}^i \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},k}^i v_{M-3,k}^i + m_{2,k}^i \left( c_{2+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{2,k}^i + \right. \\
 & \quad \left. + m_{M-2,k}^i \left( c_{M-2+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{M-2,k}^i + m_{2,k}^i c_{2+\frac{1}{2},k}^i v_{3,k}^i \right] \Big\}.
 \end{aligned}$$

Откуда получаем уравнение на сопряженную переменную в попятном времени

$$\begin{aligned}
 v_{j,k}^{i-1} &= v_{j,k}^i + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta S^2} a_{j,k}^i \left( v_{j,k-1}^i - 2v_{j,k}^i + v_{j,k+1}^i \right) - \\
 & - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left( \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i v_{j,k-1}^i + \left( b_{j,k+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,k-1+\frac{1}{2}}^i \right) v_{j,k}^i - b_{j,k+\frac{1}{2}}^i v_{j,k+1}^i \right) - \\
 & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i v_{j-1,k}^i + \left( c_{j+\frac{1}{2},k}^i - \bar{c}_{j-1+\frac{1}{2},k}^i \right) v_{j,k}^i - c_{j+\frac{1}{2},k}^i v_{j+1,k}^i \right) + 2\Delta t \left( \tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i \right), \\
 & \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{3, M-3}, \quad k = \overline{3, H-3},
 \end{aligned} \tag{22}$$

терминальное условие

$$v_{j,k}^{N-1} = 0, \quad j = \overline{2, M-2}, \quad k = \overline{2, H-2}, \tag{23}$$

а также граничные условия. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 h_3^{1,i} &= \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},3}^i, \quad h_{H-3}^{1,i} = \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-3}^i, \quad h_3^{2,i} = \frac{1}{\Delta x} \left( c_{M-2+\frac{1}{2},3}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},3}^i \right), \\
 h_{H-3}^{2,i} &= \frac{1}{\Delta x} \left( c_{M-2+\frac{1}{2},H-3}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-3}^i \right), \quad \tilde{h}_3^{1,i} = \frac{1}{\Delta x} \left( c_{2+\frac{1}{2},3}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},3}^i \right), \\
 \tilde{h}_{H-3}^{1,i} &= \frac{1}{\Delta x} \left( c_{2+\frac{1}{2},H-3}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},H-3}^i \right), \quad h_3^{2,i} = -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},3}^i, \quad h_{H-3}^{2,i} = -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},H-3}^i, \\
 g_{2,H-3}^i &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \bar{b}_{2,H-3+\frac{1}{2}}^i, \quad g_{2,3}^i = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,2}^i - \frac{1}{\Delta S} b_{2,2+\frac{1}{2}}^i, \\
 g_{2,H-2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left( b_{2,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{2,H-3+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left( c_{2+\frac{1}{2},H-2}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},H-2}^i \right), \\
 g_{2,2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{2,2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left( b_{2,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{2,1+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left( c_{2+\frac{1}{2},2}^i - \bar{c}_{1+\frac{1}{2},2}^i \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{3,H-2}^i &= -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},H-2}^i, & g_{3,2}^i &= -\frac{1}{\Delta x} c_{2+\frac{1}{2},2}^i, \\
g_{M-2,H-3}^i &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \bar{b}_{M-2,H-3+\frac{1}{2}}^i, \\
g_{M-2,3}^i &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,2}^i - \frac{1}{\Delta S} b_{M-2,2+\frac{1}{2}}^i, \\
g_{M-2,H-2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left( b_{M-2,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{M-2,H-3+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left( c_{M-2+\frac{1}{2},H-2}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-2}^i \right), \\
g_{M-2,2}^i &= \frac{1}{\Delta S^2} a_{M-2,2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left( b_{M-2,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{M-2,1+\frac{1}{2}}^i \right) + \frac{1}{\Delta x} \left( c_{M-2+\frac{1}{2},2}^i - \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},2}^i \right), \\
g_{M-3,H-2}^i &= \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},H-2}^i, & g_{M-3,2}^i &= \frac{1}{\Delta x} \bar{c}_{M-3+\frac{1}{2},2}^i, \\
g_{j,H-3}^i &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i, & j &= \overline{3, M-3}, \\
g_{j,3}^i &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,2}^i - \frac{1}{\Delta S} b_{j,2+\frac{1}{2}}^i, & j &= \overline{3, M-3}, \\
g_{j,H-2}^i &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,H-2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left( b_{j,H-2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,H-3+\frac{1}{2}}^i \right), & j &= \overline{3, M-3}, \\
g_{j,2}^i &= \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta S^2} a_{j,2}^i + \frac{1}{\Delta S} \left( b_{j,2+\frac{1}{2}}^i - \bar{b}_{j,1+\frac{1}{2}}^i \right), & j &= \overline{3, M-3}, \\
r_{j,k}^i &= 2(\tilde{m}_{j,k}^i - m_{j,k}^i).
\end{aligned}$$

Тогда граничные условия задаются следующим образом:

$$V_{M-3,H-2}^{i-1} = \frac{r_{M-3,H-2}^{i-1} - g_{M-3,H-3}^{i-1} V_{M-3,H-3}^i}{g_{M-3,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (24)$$

$$V_{M-3,2}^{i-1} = \frac{r_{M-3,2}^{i-1} - g_{M-3,3}^{i-1} V_{M-3,3}^i}{g_{M-3,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (25)$$

$$V_{M-2,H-3}^{i-1} = \frac{r_{M-2,H-3}^{i-1} - h_{H-3}^{1,i-1} V_{M-3,H-3}^i}{h_{H-3}^{2,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (26)$$

$$V_{M-2,3}^{i-1} = \frac{r_{M-2,3}^{i-1} - h_3^{1,i-1} V_{M-3,3}^i}{h_3^{2,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (27)$$

$$V_{M-2,H-2}^{i-1} = \frac{r_{M-2,H-2}^{i-1} - g_{M-2,H-3}^{i-1} V_{M-2,H-3}^i - g_{M-3,H-2}^{i-1} V_{M-3,H-2}^i}{g_{M-2,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (28)$$

$$V_{M-2,2}^{i-1} = \frac{r_{M-2,2}^{i-1} - g_{M-2,3}^{i-1} V_{M-2,3}^i - g_{M-3,2}^{i-1} V_{M-3,2}^i}{g_{M-2,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (29)$$

$$V_{2,H-3}^{i-1} = \frac{r_{2,H-3}^{i-1} - \tilde{h}_{H-3}^{2,i-1} V_{3,H-3}^i}{\tilde{h}_{H-3}^{1,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (30)$$

$$v_{2,3}^{i-1} = \frac{r_{2,3}^{i-1} - \tilde{h}_3^{2,i-1} v_{3,3}^i}{\tilde{h}_3^{1,i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (31)$$

$$v_{3,H-2}^{i-1} = \frac{r_{3,H-2}^{i-1} - g_{3,H-3}^{i-1} v_{3,H-3}^i}{g_{3,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (32)$$

$$v_{3,2}^{i-1} = \frac{r_{3,2}^{i-1} - g_{3,3}^{i-1} v_{3,3}^i}{g_{3,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (33)$$

$$v_{2,H-2}^{i-1} = \frac{r_{2,H-2}^{i-1} - g_{2,H-3}^{i-1} v_{2,H-3}^i - g_{3,H-2}^{i-1} v_{3,H-2}^i}{g_{2,H-2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad (34)$$

$$v_{2,2}^{i-1} = \frac{r_{2,2}^{i-1} - g_{2,3}^{i-1} v_{2,3}^i - g_{3,2}^{i-1} v_{3,2}^i}{g_{2,2}^{i-1}}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (35)$$

Таким образом, сопряженное уравнение задается динамическим уравнением (22), терминальным условием (23) и краевыми условиями (24)–(35).

**Замечание 3.** Если знаменатель обращается в ноль в уравнениях (24)–(35), то это соответствует нулевой плотности распределения в данной точке, и значение сопряженной переменной может быть любым. Для определенности будем считать, что сопряженная переменная в этой точке равна нулю.

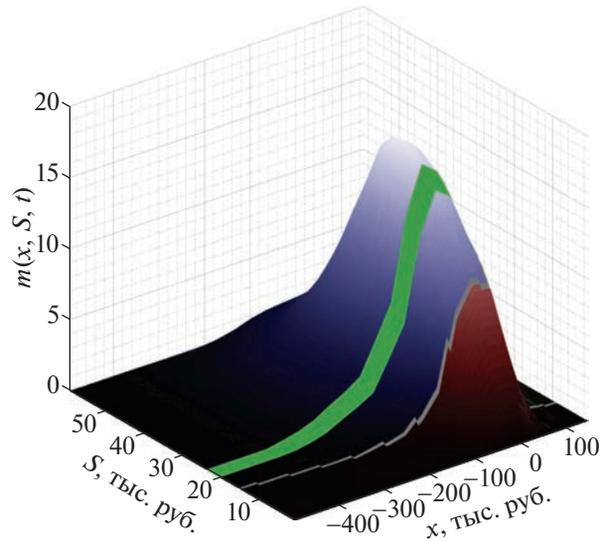
#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Статистические данные ОБДХ собираются Росстатом ежеквартально и охватывают около 50000 домашних хозяйств из 82 регионов России. На основе данных по уровню потребления на душу населения эти регионы были разделены на 3 группы: богатую, среднюю и бедную. Согласно статистике ОБДХ, около половины домашних хозяйств из бедной группы регионов проживают в городском типе населенного пункта, а оставшееся половина в селе. Поскольку стиль жизни в городе отличается от села, то данная группа регионов была разделена еще на две. В каждой группе регионов выделяются слои населения с разными уровнями доходов и расходов.

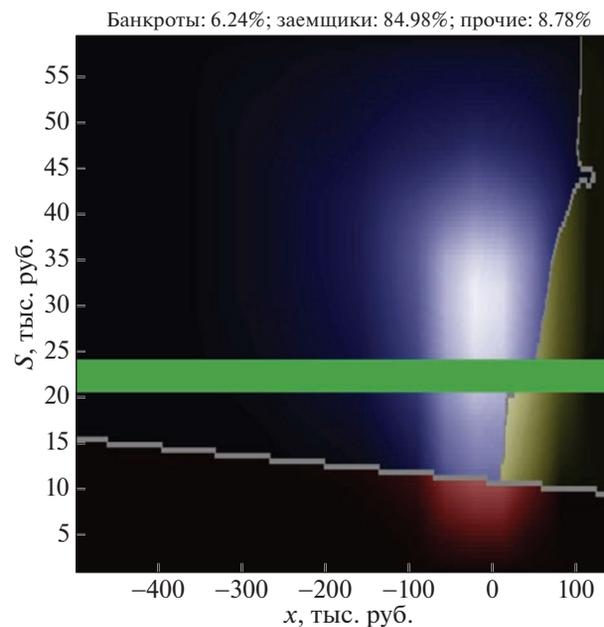
Среди участников опроса ОБДХ мы выделили заемщиков в каждой группе регионов. Заемщики делятся на два типа: низкодоходные и высокодоходные. Они имеют разные поведенческие параметры, такие как скорость обращения денег  $\frac{1}{\theta}$ , темп роста доходов  $\gamma$ , параметр волатильности доходов  $\sigma$ . Граница разделения заемщиков на низкодоходных и высокодоходных проводится с помощью программного комплекса [10]. Чтобы обеспечить непрерывность этих параметров, вводится “серая зона”, центром которой является граница разделения заемщиков, склеивающая параметры  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma$  по непрерывности.

Участники опроса ОБДХ меняются каждый год, но в течение каждого года опрашиваются одни и те же домашние хозяйства. Исходя из этого, алгоритм идентификации статистической плотности распределения проводился в каждом году независимо с 2015 по 2020 г. В качестве примера рассмотрим домашние хозяйства, проживающие в средней группе регионов в 2020 г. Статистическую плотность распределения построим на плоскости  $S$ ,  $x$ , основываясь практически на 5000 домашних хозяйств, которые оказались заемщиками из средней группы регионов. Обозначим через  $D_1$  низкодоходных заемщиков, а через  $D_2$  – высокодоходных. Пусть  $\sigma_{D_1} = 0.01$ ,  $\sigma_{D_2} = 0.02$ ,  $\theta_{D_1} = 1$ ,  $\theta_{D_2} = 3$ . Для удобства масштабирования денежные единицы будем понимать в тысячах рублей. Параметры сетки:  $L_1 = 500$ ,  $L_2 = 150$ ,  $S_1 = 0$ ,  $S_2 = 60$ ,  $M = 400$ ,  $H = 100$ ,  $N = 100$ . Временной горизонт  $T = 1$ , параметры оптимизационного алгоритма  $h = 4$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ . Ограничим вариацию управления на каждой итерации величиной 0.2. Оптимизацию будем проводить в области платежеспособных заемщиков, в случае, если домашнее хозяйство находится в области банкротства, мы считаем, что его потребление находится на минимуме. Функционал экстремальной задачи также рассматривается на области платежеспособных заемщиков.

Январь, 2020



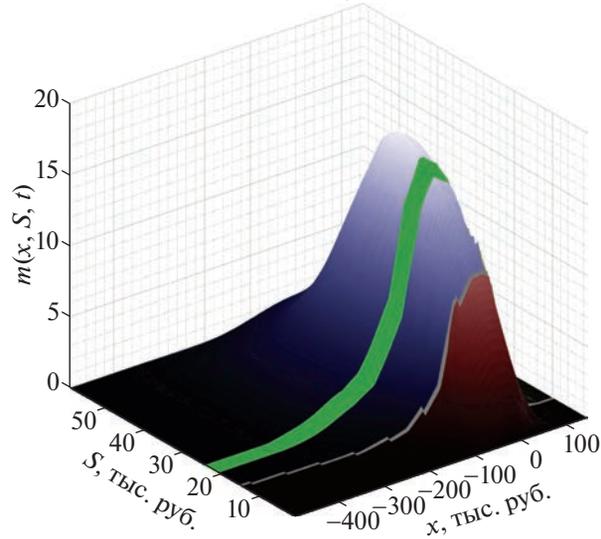
Фиг. 2. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в январе 2020 г.



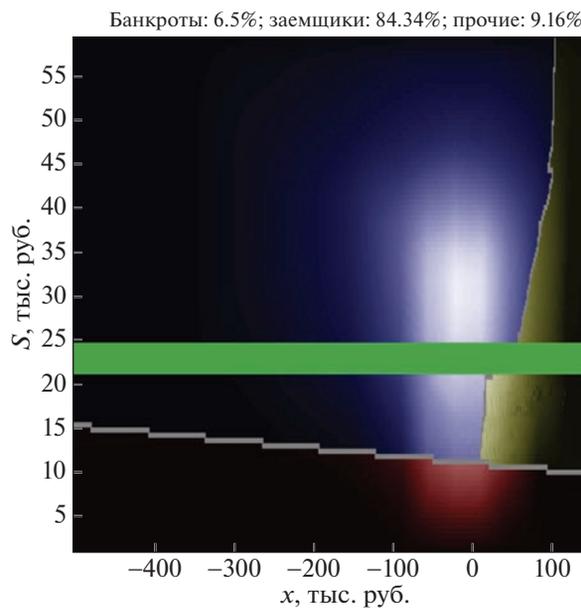
Фиг. 3. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в январе 2020 г. (вид сверху).

На фиг. 2–7 представлены расчетные данные, полученные с помощью решения уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка в различные временные периоды 2020 г. На фиг. 2, 4, 6 показаны плотности распределения в трехмерном отображении, а на фиг. 3, 5, 7 – в проекции на плоскость доходов и финансового состояния. Синим цветом изображены заемщики, красным – банкроты, которые не имеют возможности расплатиться с потребительским кредитом при текущей экономической ситуации. Оранжевым изображены домашние хозяйства, которые не берут займы по потребительскому кредиту. Зеленая полоса вдоль оси  $x$  – “серая зона”, склеивающая до непрерывности параметры низкодоходных и высокодоходных заемщиков.

Июнь, 2020



Фиг. 4. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в июне 2020 г.

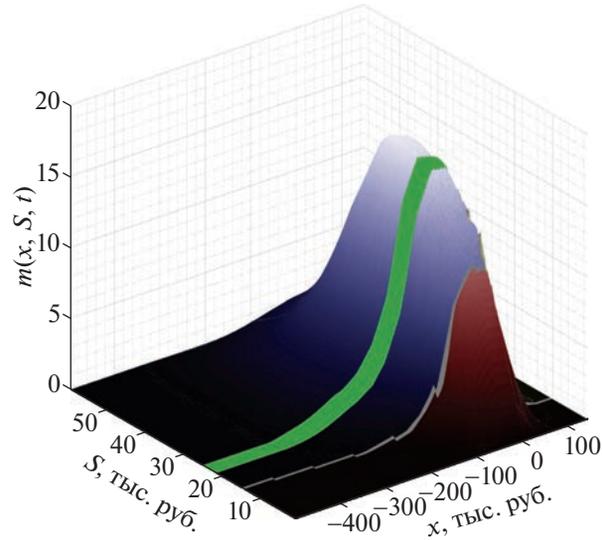


Фиг. 5. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в июне 2020 г. (вид сверху).

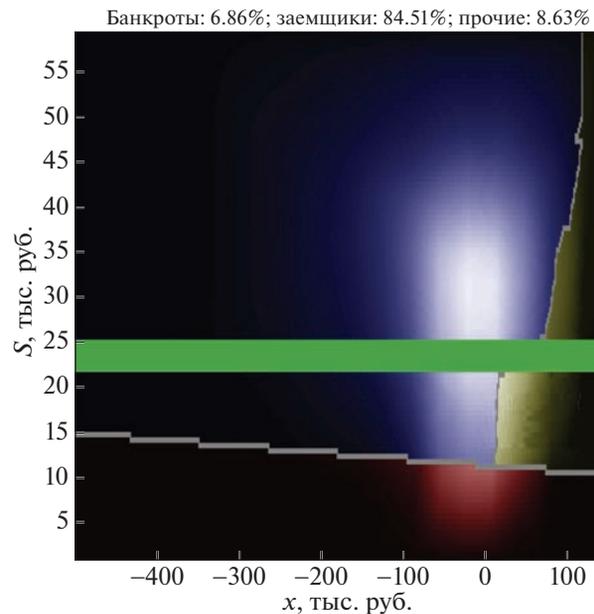
Для данного примера среднее отклонение плотности распределения, полученной при решении уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, по сравнению со статистической плотностью распределения составляет 9.4%, т.е.

$$\frac{\int_0^T \int_{\Omega} |\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t)| dx dS dt}{\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{m}(x, S, t) dx dS dt} = 0.094,$$

Декабрь, 2020



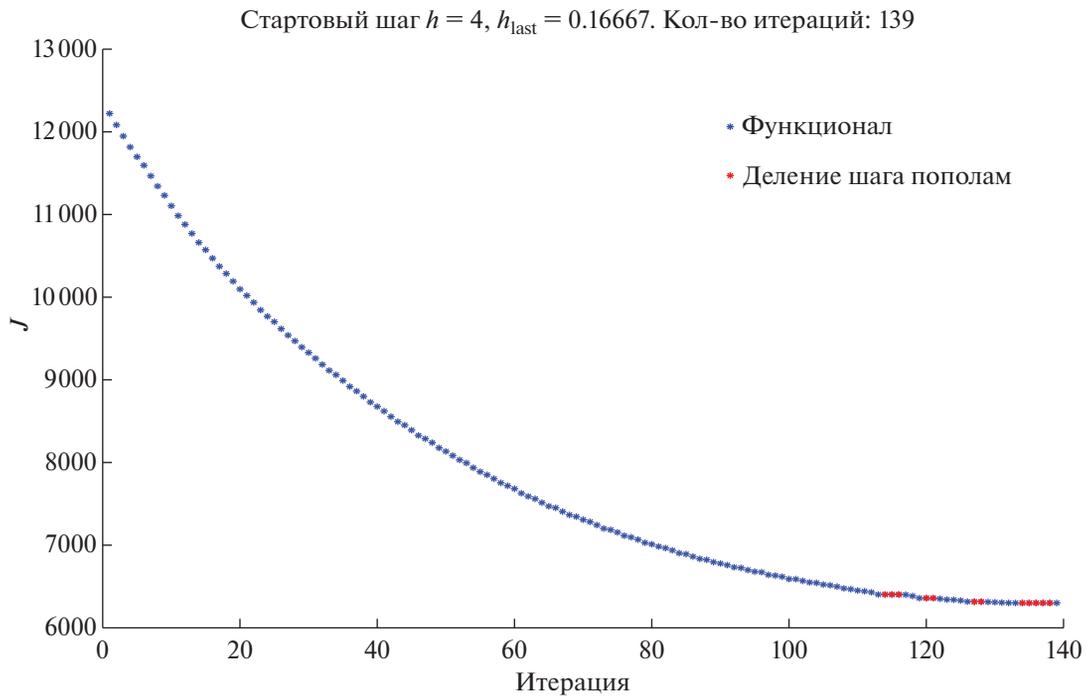
Фиг. 6. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в декабре 2020 г.



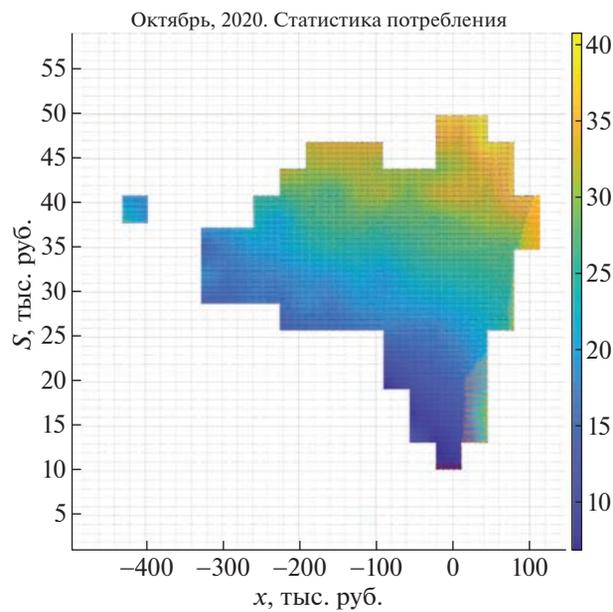
Фиг. 7. Расчет плотности распределения домашних хозяйств в декабре 2020 г. (вид сверху).

где  $\Omega$  — область платежеспособных заемщиков на плоскости  $x$  и  $S$ . Средние отклонения для остальных групп регионов на всех рассматриваемых периодах представлены в Приложении.

Отметим, что для данного примера были проведены 139 итераций алгоритма поиска минимизатора, представленного в разд. 2. Поскольку мы ищем локальный экстремум задачи, нет гарантии монотонности итерационного алгоритма. В случае нарушения монотонности, воспроизводится предыдущая итерация и делится шаг сходимости  $h$  пополам. Динамика итерационной сходимости представлена на фиг. 8.

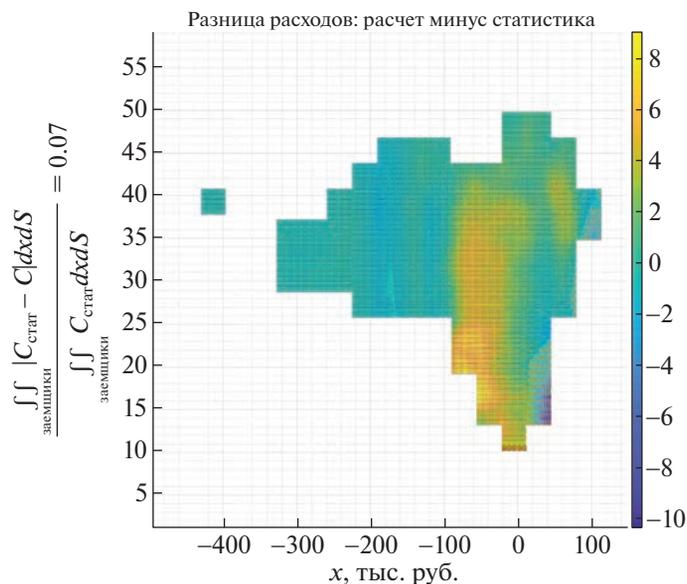


**Фиг. 8.** Значение функционала экстремальной задачи в зависимости от номера итерации оптимизационного алгоритма.

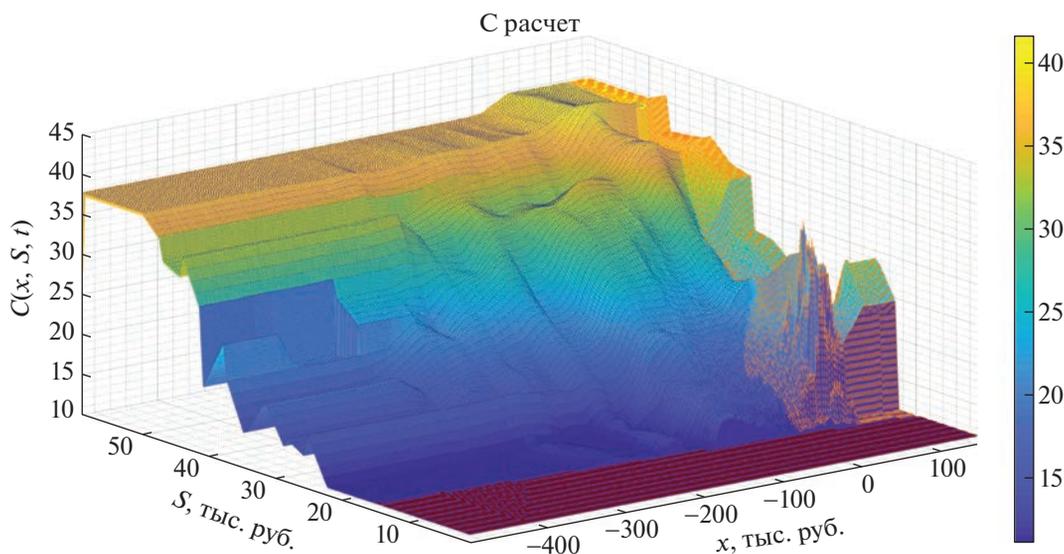


**Фиг. 9.** Статистическое потребление по данным ОБДХ.

Представим значение потребления, полученного при решении экстремальной задачи и сравним его со статистическими данными в октябре 2020 г. (см. фиг. 9–11). Как видно, найденное потребление сопоставляется со статистическими данными, погрешность составляет порядка 7%.



Фиг. 10. Разница рассчитанного потребления и статистического.



Фиг. 11. Рассчитанное потребление.

### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовался вопрос согласованности статистических данных ОБДХ с динамикой плотности распределения домашних хозяйств по доходам и финансовым состояниям с решением уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка. Множество всевозможных решений уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка формирует подпространство, на которое искалась проекция статистических данных. Задача формализована в виде экстремальной, представлен итерационный алгоритм поиска проекции, построены соответствующие разностные схемы. Численные результаты демонстрируют возможность описания эволюции экономического поведения домашних хозяйств с помощью уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка на качественном уровне.

Темой для дальнейшего исследования может служить использование построенной проекции в качестве входных данных для определения поведенческих характеристик домашних хозяйств: отвращения к риску и коэффициента дисконтирования, как это было реализовано для репрезентативного домашнего хозяйства (см. [2]); настройка поведенческих характеристик домашних хозяйств для идентификации полученного потребления в разрезе социальных слоев на региональном уровне, построение прогнозных сценариев.

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю, Александру Алексеевичу Шананину за руководство и помощь в исследовании стохастических задач рамсеевского типа.

Приложение

Отклонение от статистических данных.

Таблица 1. 
$$\frac{\int_0^T \int_{\Omega} \int |\tilde{m}(x, S, t) - m(x, S, t)| dx dS dt}{\int_0^T \int_{\Omega} \int \tilde{m}(x, S, t) dx dS dt}$$

Год	Бедная группа регионов, город	Бедная группа регионов, село	Средняя группа регионов	Богатая группа регионов
2015	8.5%	12.3%	10.3%	7.5%
2016	9.3%	11.3%	9.2%	12.5%
2017	9.6%	8.4%	11.4%	9%
2018	10.2%	7.4%	7.3%	9%
2019	8.9%	11.3%	8.3%	7.3%
2020	11.2%	8.6%	9.4%	13.3%

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ramsey F.P. A mathematical theory of savings // The Economic Journal. 1928. V. 152. № 38. P. 543–559.
2. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 6. С. 1034–1056.
3. Shaninin A.A., Tarasenko M.V., Trusov N.V. Consumer Loan Demand Modeling // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends. 2021. CCIS. V. 1476. P. 417–428.
4. Shaninin A.A., Trusov N.V. The household behaviour modelling based on Mean Field Games approach // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42. № 7. P. 1738–1752.
5. Обследование бюджетов домашних хозяйств [Электронный ресурс] / Федеральная служба государственной статистики. 2015–2020. <https://obdx.gks.ru/> (дата обращения: 15.10.2022)
6. Lachapelle A., Salomon J., Turinici G. Computation of Mean Field equilibria in economics // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2010. V. 20. P. 567–588.
7. Trusov N. Numerical solution of Mean Field Games problems with turnpike effect // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41. № 4. P. 559–573.
8. Trusov N. Numerical study of the stock market crises based on mean field games approach. Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2021. V. 29. № 6. P. 849–865.
9. Гулин А.В., Самарский А.А. Численные методы. Москва, 1989.
10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No. 2022619524. “Анализ спроса на потребительский кредит в РФ”. Правообладатель: Трусов Николай Всеволодович. Заявка No. 2022618580. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2022 г.

ОБ ОБТЕКАНИИ ЦИЛИНДРА НАД НЕРОВНЫМ ДНОМ<sup>1)</sup>© 2023 г. Н. Д. Байков<sup>1,\*</sup>, А. Г. Петров<sup>1,\*\*</sup><sup>1</sup> 119526 Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1, ИПМ РАН им. А.Ю. Ишлинского, Россия

\*e-mail: baikov\_nd@rambler.ru

\*\*e-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 16.04.2022 г.

Переработанный вариант 26.07.2022 г.

Принята к публикации 14.11.2022 г.

Рассматривается плоская задача обтекания цилиндра произвольного сечения потенциальным потоком жидкости над неровным дном со скоростью потока на бесконечности, направленной параллельно дну. Циркуляция поля скорости определяется из постулата Гольдштика: максимальная скорость на контуре цилиндра должна быть минимальна. Для решения этой задачи разработаны две численные схемы метода граничных элементов. Одна численная схема определяет течение на ограниченной, но произвольно заданной поверхности дна. Вторая схема определяет обтекание контура в полуплоскости. Сравнение расчетов по численным схемам и точным решениям показывает скорость сходимости метода при увеличении элементов сетки. Проводится сопоставление давления на цилиндрической и донной поверхностях с экспериментальными данными и численными расчетами по  $k-\omega$  модели, а также сопоставление картин линий тока с учетом отрывной зоны. Библиография: 16. Фиг. 8. Табл. 3.

**Ключевые слова:** потенциальное течение жидкости, обтекание, циркуляция, метод граничных элементов.

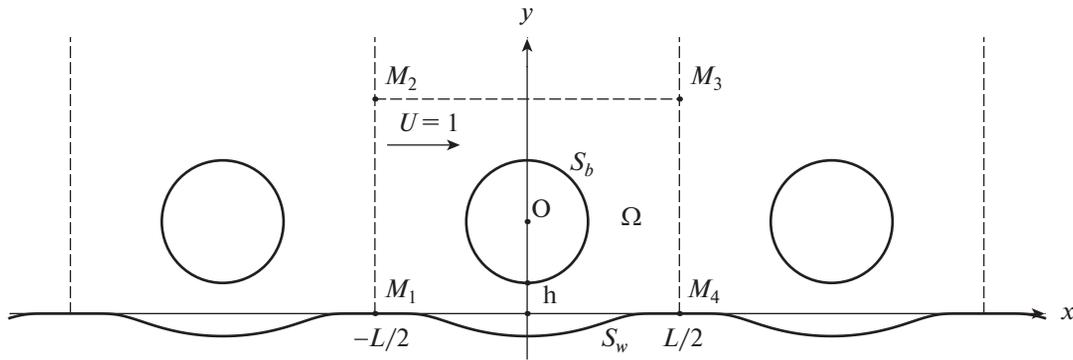
**DOI:** 10.31857/S004446692303002X, **EDN:** DZOWGF

В работе [1] построено точное решение задачи обтекания цилиндра около плоскости с циркуляцией, определенной из минимаксного принципа Гольдштика (см. [2]). Решение выражено через тета-функции. Проведенное в указанной работе сопоставление с экспериментальными данными и численными расчетами (см. [3], [4]) показало, что даже без учета отрывной зоны распределение давления на цилиндре и плоскости, найденное из интеграла Бернулли, качественно согласуется с экспериментальными данными (см. [3]). В этой же работе дана подробная библиография различных аналитических решений, представленных в монографиях [5], [6] и журналах [7–13]. В них описаны решения для частных случаев, выраженные через аналитические функции, либо представленные рядами, и часто плохо сходящимися.

В настоящей работе рассмотрены две численные схемы метода граничных элементов для решения плоской задачи обтекания контура — около прямолинейной и криволинейной границ. Циркуляция вычисляется из минимаксного принципа Гольдштика. Точность численных схем демонстрируется на сравнении их друг с другом и с точными решениями. Из анализа экспериментальных данных и расчетов турбулентного обтекания кругового цилиндра около различных прямолинейных и криволинейных донных поверхностей делается вывод о геометрии отрывной зоны за цилиндром. Напряжение на донной поверхности предлагается определять с помощью численного решения методом граничных элементов задачи обтекания контура, включающего цилиндр и отрывную зону. Такой способ расчета на несколько порядков сокращает время расчета гидродинамической задачи в сравнении с  $k-\omega$  моделью.

**1. Общая постановка задачи потенциального обтекания цилиндра около произвольной донной поверхности.** Для удобства построения численной схемы рассматривается приближение задачи об обтекании цилиндра произвольного сечения около донной поверхности потенциальным потоком жидкости. Суть приближения заключается в том, что поле скорости течения полагается периодическим по оси  $x$  с периодом  $L$ , который много больше размера обтекаемого контура

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 22-21-00833).



Фиг. 1. Схема обтекания цилиндра около донной поверхности.

(фиг. 1). Скорость натекающего потока  $U$  для простоты полагается равной единице. Это не ограничивает общность постановки задачи в силу ее линейности по параметру  $U$ . Формы обтекаемого контура и одного периода дна заданы (в декартовых координатах). Тогда задачу можно свести к рассмотрению области  $\Omega$ , заключенной между поверхностью дна  $S_w$ , контуром обтекаемого тела  $S_b$  и парой вертикальных прямых  $x = -L/2$  и  $x = L/2$ . Для описания течения будем использовать функцию потенциала  $\Phi$ . Так как класс изучаемых в работе течений имеет отличные от нуля циркуляции вдоль  $S_w$  и  $S_b$ , для построения численного алгоритма необходимо уметь учитывать многозначность  $\Phi$ . Для этого будем представлять искомый потенциал течения, обтекающего  $S_w$  и  $S_b$ , в виде суммы циркуляционной и бесциркуляционной, но однозначно заданной частей:

$$\Phi = \Phi_{x+\Gamma} + \tilde{\Phi}.$$

Функция  $\Phi_{x+\Gamma}$  — это явно заданная функция, которая определяется как вещественная часть следующего комплексного потенциала:

$$W_{x+\Gamma}(z) := z - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left[ \sin \frac{\lambda(z - z_b)}{2} \right] + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left[ \sin \frac{\lambda(z - z_w)}{2} \right].$$

Здесь  $z_b$  и  $z_w$  относятся к двум произвольно заданным точкам внутри цилиндра и под поверхностью дна соответственно, а  $\lambda := 2\pi/L$ . Введенный таким образом потенциал определяет течение, для которого

$$\int_{S_w} \frac{\partial \Phi_{x+\Gamma}}{\partial s'} ds' = L + \Gamma, \quad \int_{S_b} \frac{\partial \Phi_{x+\Gamma}}{\partial s'} ds' = -\Gamma,$$

где обход дна выполняется в направлении от  $x = -L/2$  к  $L/2$ , а обход тела — по часовой стрелке. Циркуляция  $\Gamma$  подлежит определению в соответствии с принципом Гольдштика (этот вопрос будет рассмотрен в следующих разделах). Кроме того, введенный потенциал за счет линейной части учитывает асимптотику течения на бесконечности. Указанные свойства  $\Phi_{x+\Gamma}$  позволяют сформулировать для остаточной части  $\tilde{\Phi}$ , как для однозначной в  $\Omega$  функции, следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\Phi} &= 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \tilde{\Phi}(x, y) = \tilde{\Phi}(x + L, y), \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} &= -\frac{\partial \Phi_{x+\Gamma}}{\partial n} - \frac{\partial \Psi_{x+\Gamma}}{\partial s}, \quad (x, y) \in S_w \cup S_b, \\ \tilde{\Phi} &\rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Здесь направления обхода контуров определены аналогично случаю выше, а  $n$  — нормаль, внешняя по отношению к жидкости.

В силу гармоничности рассматриваемых функций, поиск решения задачи сводится к нахождению значений  $\tilde{\Phi}$  на границах  $S_w$  и  $S_b$ , с помощью которых могут быть определены соответствующие граничные скорости:

$$V = \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi_{x+\Gamma}}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial s}. \quad (1.1)$$

Значений  $V$ , в свою очередь, достаточно для построения картины линий тока и эпюр давления на границах.

Наконец, для нахождения значений  $\tilde{\Phi}$  на контурах  $S_w$  и  $S_b$  при заданной циркуляции  $\Gamma$  воспользуемся следующим интегральным уравнением, вытекающим из постановки краевой задачи:

$$\int_{S_w \cup S_b} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n'}(M, M') \tilde{\Phi}(M') ds' - \pi \tilde{\Phi}(M) = - \int_{S_w \cup S_b} \tilde{G}(M, M') \frac{\partial \Psi_{x+\Gamma}}{\partial s'} ds', \quad M(x, y) \in S_w \cup S_b, \quad (1.2)$$

$$\tilde{G}(M, M') = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{4}{\lambda^2} \left( \operatorname{sh}^2 \left[ \frac{\lambda(y-y')}{2} \right] + \sin^2 \left[ \frac{\lambda(x-x')}{2} \right] \right) \right], \quad \lambda := \frac{2\pi}{L}.$$

Отметим, что в [14] рассматривалось поле напряженности двух заряженных электрических проводников. При отсутствии скорости натекающего потока задача в настоящей работе была бы эквивалентом задачи для электрического потенциала из [14]. Как следствие, при отсутствии скорости потока на бесконечности можно было бы проследить связь между интегральным уравнением (1.2) и уравнениями из [14].

**2. Численная схема задачи потенциального обтекания цилиндра около донной поверхности.** Для аппроксимации интегрального уравнения системой линейных уравнений вводятся параметризации  $\zeta_w, \zeta_b \in [0, 1]$  для границ  $S_w$  и  $S_b$  соответственно. На указанных отрезках вводятся равномерные сетки из  $N_w$  и  $N_b$  точек. Пусть отображение координат по  $\zeta_w$  и  $\zeta_b$  в пространственные координаты удовлетворяет следующим тождествам:

$$ds_q = L_q \sigma_q(\zeta_q) d\zeta_q, \quad \int_0^1 \sigma_q(\zeta') d\zeta' = 1, \quad q \in \{w, b\}.$$

Здесь  $L_q$  обозначают длины соответствующих границ, а  $\sigma_q$  – заданные положительные функции, с помощью которых можно управлять распределением точек сетки вдоль границы. Пространственные координаты точек сетки обозначим как  $M_w^i(x_w^i, y_w^i)$ ,  $i = 1, N_w$ , и  $M_b^i(x_b^i, y_b^i)$ ,  $i = 1, N_b$ . В общем виде аппроксимация системой линейных уравнений записывается как

$$MX = R.$$

Вектор неизвестных состоит из  $N_w + N_b$  неизвестных

$$X = \left( \tilde{\Phi}|_{M_w^i}, \tilde{\Phi}|_{M_b^i} \right).$$

Матрица  $M$  выражается в виде  $M = B - \pi I$ , где  $I$  обозначает единичную матрицу, а  $B$  – аппроксимация оператора двойного слоя. Так как у подынтегральной функции имеется особенность при  $M = M'$ , при построении численного алгоритма ее необходимо учесть. Пользуясь тем, что

$$\int_{S_w \cup S_b} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n'}(M, M') ds' = 0,$$

устраним особенность под интегралом, преобразовав оператор двойного слоя к виду

$$\int_{S_w \cup S_b} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n'}(M, M') \tilde{\Phi}(M') ds' = \int_{S_w \cup S_b} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n'}(M, M') (\tilde{\Phi}(M') - \tilde{\Phi}(M)) ds'.$$

Как следует из [15], для преобразованного оператора достаточно квадратурной формулы трапеций, чтобы учесть запас гладкости, получаемой под знаком интеграла функции. Поэтому аппроксимация оператора имеет вид

$$B^{ij} := \begin{cases} \frac{1}{N_w} \left( \frac{\partial G^{ij}}{\partial x'} \frac{\partial y^j}{\partial \zeta} - \frac{\partial G^{ij}}{\partial y'} \frac{\partial x^j}{\partial \zeta} \right), & i \neq j, \quad 1 \leq i \leq N_w, \\ \frac{1}{N_b} \left( \frac{\partial G^{ij}}{\partial x'} \frac{\partial y^j}{\partial \zeta} - \frac{\partial G^{ij}}{\partial y'} \frac{\partial x^j}{\partial \zeta} \right), & i \neq j, \quad N_w + 1 \leq i \leq N_w + N_b, \\ -\sum_{k \neq i} B^{ik}, & i = j. \end{cases}$$

Для вычисления правой части системы линейных уравнений необходимо построить аппроксимацию интегрального оператора простого слоя, имеющего логарифмическую особенность. В [15] для этого была предложена квадратурная формула с экспоненциальным порядком аппроксимации. В предположениях настоящей работы формула принимает вид

$$R^i = \sum_{j=1}^{N_w+N_b} A^{ij} \frac{\partial \Psi_{x+\Gamma}^j}{\partial \zeta},$$

где матрица  $A^{ij}$  состоит из четырех подблоков:

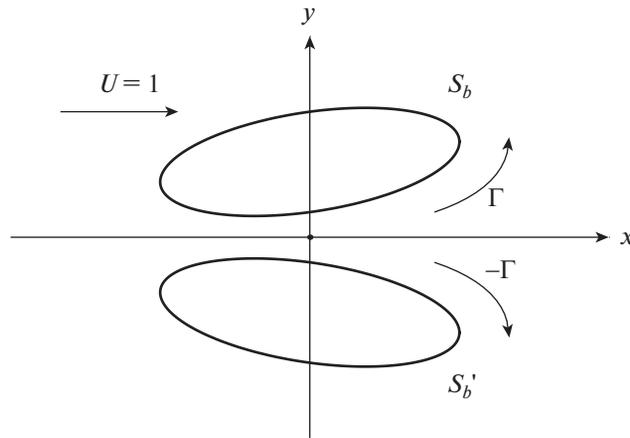
$$\begin{aligned} A_{ww}^{ij} &= -\frac{1}{N_w} (\beta_w(|i-j|) + \tilde{G}_w^{ij}), \quad i, j = \overline{1, N_w}, \\ A_{wb}^{ij} &= -\frac{1}{N_b} \tilde{G}(M_w^i, M_b^j), \quad i = \overline{1, N_w}, \quad j = \overline{1, N_b}, \\ A_{bw}^{ij} &= -\frac{1}{N_w} \tilde{G}(M_b^i, M_w^j), \quad i = \overline{1, N_b}, \quad j = \overline{1, N_w}, \\ A_{bb}^{ij} &= -\frac{1}{N_b} (\beta_b(|i-j|) + \tilde{G}_b^{ij}), \quad i, j = \overline{1, N_b}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \beta_q(0) &:= \alpha_q(0), \quad \beta_q(m) := -\ln \left| \sin \frac{\pi m}{N_q} \right| + \alpha_q(m), \\ \alpha_q(m) &:= -\left( \ln 2 + \frac{(-1)^m}{N_q} + \sum_{k=1}^{\frac{N_q-1}{2}} \frac{1}{k} \cos \frac{2\pi km}{N_q} \right), \\ \tilde{G}_q^{ij} &= \tilde{G}(M_q^i, M_q^j), \quad i \neq j, \\ \tilde{G}_q^{ii} &= \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_q^i} \left[ \tilde{G}(\zeta_q^i, \zeta) - \ln |\sin \pi(\zeta - \zeta_q^i)| \right], \\ m &= \overline{0, N_q - 1}, \quad q \in \{w, b\}. \end{aligned}$$

**3. Случай прямолинейного дна.** В частном случае  $y_w = 0$  задача обтекания контура  $S_b$  эквивалентна обтеканию пары контуров  $S_b$  и  $S_b'$ , расположенных симметрично относительно оси  $x$  (фиг. 2). Независимое рассмотрение этого случая важно тем, что введение искусственного периода  $L$  и сопутствующей ему погрешности не требуется. В этом случае краевая задача будет иметь иной вид. Зафиксируем внешнее по отношению к жидкости направление нормали и направление обхода контуров по часовой стрелке. Функцию потенциала течения будем искать в виде

$$\Phi = \Phi_\Gamma + \tilde{\Phi},$$



Фиг. 2. Схема обтекания двух симметрично расположенных контуров.

где  $\Phi_\Gamma$  – вещественная часть комплексного потенциала

$$W_\Gamma(z) := -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln[z - z_b] + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln[z - z'_b].$$

Здесь  $z_b$  и  $z'_b$  – фиксированные точки внутри  $S_b$  и  $S'_b$  соответственно. Краевую задачу для  $\tilde{\Phi}$  в этом случае можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\Phi} &= 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} &= -\frac{\partial \Phi_\Gamma}{\partial n} - \frac{\partial \Psi_\Gamma}{\partial s}, \quad (x, y) \in S_b \cup S'_b, \\ \tilde{\Phi} &= x + O(1/\sqrt{x^2 + y^2}) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Соответствующее интегральное уравнение приобретает вид

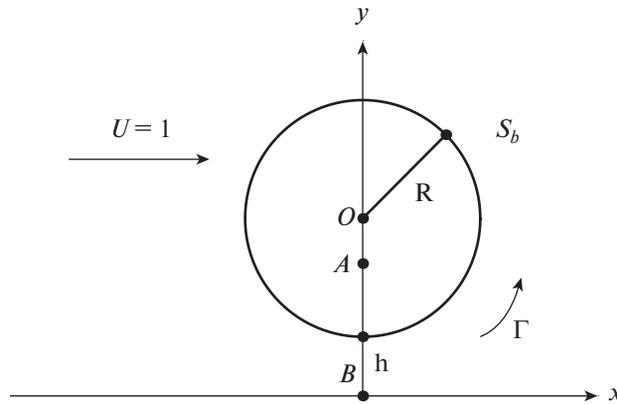
$$\begin{aligned} \int_{S_b \cup S'_b} \frac{\partial G}{\partial n'}(M, M') \tilde{\Phi}(M') ds' - \pi \tilde{\Phi}(M) &= -2\pi x(M) - \int_{S_b \cup S'_b} G(M, M') \frac{\partial \Psi_\Gamma}{\partial s'} ds', \\ M(x, y) &\in S_b \cup S'_b, \\ G(M, M') &= \frac{1}{2} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Задача обтекания пары симметрично расположенных контуров является частным случаем задачи обтекания произвольных контуров  $S_1$  и  $S_2$ . Вывод соответствующего интегрального уравнения приведен в Приложении. Система линейных уравнений, аппроксимирующая систему (3.1), строится аналогично системе п. 2.

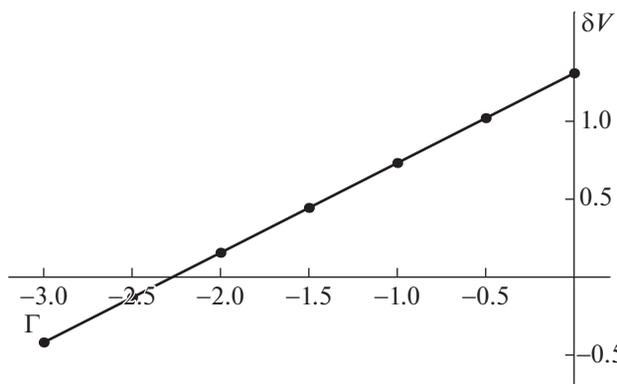
**4. Численное определение циркуляции из минимаксного принципа.** Покажем, что для достаточно широкого класса областей процесс поиска циркуляции, удовлетворяющей минимаксному принципу Гольдштика, можно упростить.

Известно, что скорость на поверхности обтекаемого контура направлена по касательной. Направление касательной выберем по направлению обхода контура. Положение точки на контуре задается натуральным параметром  $s$ . Тогда проекцию скорости на вектор касательной можно выразить как функцию  $V(s)$ . Она будет положительна, если направление вектора скорости совпадает с направлением касательной, и отрицательна в противном случае.

Покажем, что при выполнении определенных требований к форме области искомая циркуляция  $\Gamma_G$  может быть найдена как циркуляция, при которой сумма максимума и минимума  $V(s)$  на контуре равна нулю. В частном случае кругового цилиндра над плоскостью это утверждение верно. Для этого достаточно показать, что при любом малом изменении циркуляции увеличится  $\max |V(s)|$ . Действительно, в силу линейности при изменении циркуляции по Гольдштику на ве-



Фиг. 3. Схема обтекания кругового цилиндра около плоскости.



Фиг. 4. Зависимость  $\delta V(\Gamma)$ .

личину  $\Delta\Gamma$  скорость изменится на величину  $\Delta\Gamma V_0(s)$ , где  $V_0(s)$  – скорость обтекания чисто циркуляционного течения с единичной циркуляцией. Это известная функция, значения которой во всех точках контура имеют один и тот же знак (т.е. на границе круга нет критических точек). Следовательно, при сдвиге на  $\Delta\Gamma$  либо увеличится максимум  $V(s)$ , либо уменьшится минимум. В обоих случаях увеличится максимальное абсолютное значение скорости  $\max|V(s)|$ , что и требовалось доказать.

Обобщим рассмотренный случай: критических точек скорости  $V_0(s)$  на контуре также не будет, если существует конформное отображение области течения жидкости на область, изображенную на фиг. 3, т.е. на область из задачи обтекания кругового цилиндра над плоскостью. Если указанное конформное отображение существует, поиск циркуляции можно свести к решению уравнения  $\delta V := \max V(s) + \min V(s) = 0$ . Пример зависимости  $\delta V$  от  $\Gamma$  для задачи обтекания кругового цилиндра около плоскости при  $h = 0.2$  изображен на фиг. 4.

**5. Сравнение численных результатов с точным решением для обтекания кругового цилиндра около плоскости.** Задача обтекания кругового цилиндра над плоскостью имеет аналитическое решение [1], что позволяет использовать ее для тестирования численных схем. Для простоты положим скорость натекающего потока и радиус цилиндра равными единице. Тогда комплексный потенциал  $W(z)$  и величина циркуляции для минимаксного принципа Гольдштика из [1] в обозначениях настоящей работы принимают вид

$$\begin{aligned}
 W(t) &= aF(t) + \frac{\Gamma_G}{\pi} t, & F(t) &= -\frac{\vartheta_1(t)}{\vartheta_1'(t)}, & t &= \frac{1}{2i} \ln \frac{z - ai}{z + ai}, & a &= \sqrt{(h+1)^2 - 1}, \\
 \Gamma_G &= \frac{a\pi}{2} \left( \gamma_1 + \gamma_2 + \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{h+1} \right), & \gamma_1 &= \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3'} \Big|_{t=0}, & \gamma_2 &= \frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4'} \Big|_{t=0},
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

**Таблица 1.** Сравнение с точным значением  $\Gamma$  при различном числе точек сетки

$h$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\Gamma_G$	-3.208	-2.271	-1.705	-1.324	-1.053
$\Gamma_{16}$	-3.205	-2.270	-1.704	-1.323	-1.052
$\Gamma_{24}$	-3.208	-2.271	-1.705	-1.324	-1.052
$\Gamma_{32}$	-3.208	-2.271	-1.705	-1.324	-1.053

**Таблица 2.** Невязка  $\Delta_{-2,100}$  при различных  $h$  и  $N_b$ 

$h$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$N_b = 16$	$4.27 \times 10^{-4}$	$2.82 \times 10^{-4}$	$1.94 \times 10^{-4}$	$1.07 \times 10^{-4}$	$3.25 \times 10^{-5}$
$N_b = 24$	$7.76 \times 10^{-5}$	$5.30 \times 10^{-5}$	$3.59 \times 10^{-5}$	$2.23 \times 10^{-5}$	$1.13 \times 10^{-5}$
$N_b = 32$	$2.46 \times 10^{-5}$	$1.73 \times 10^{-5}$	$1.24 \times 10^{-5}$	$8.45 \times 10^{-6}$	$5.21 \times 10^{-6}$

где  $\vartheta_i$  используются для обозначения тэта-функций.

Оценить точность расчетов по численной схеме для симметричного обтекания тел позволяют табл. 1 и 2. В первой таблице приведены точные значения циркуляции  $\Gamma_G$ , найденные из минимаксного принципа Гольдштика (5.1), которые для разных значений  $h$  сравниваются с численными значениями  $\Gamma_{16}$ ,  $\Gamma_{24}$  и  $\Gamma_{32}$ , найденными с разным числом точек для сетки на контуре: 16, 24 и 32 точки сетки соответственно. Для повышения эффективности точки распределялись вдоль границ неравномерно, со сгущением в области сближения контуров:

$$\sigma_b(\zeta) = 1 + C \sin(2\pi\zeta),$$

где  $C$  полагалось равным  $-0.7$  (параметру  $\zeta = 0$  ставилась в соответствие крайняя нижняя точка окружности).

Значения касательных скоростей  $V$  в точках сеток на  $S_b$  и  $S'_b$ , получаемые из решения системы уравнений, аппроксимирующей (3.1), позволяют численно восстановить значение функции тока во внутренних точках течения. Для этого используется следующая интегральная формула:

$$\Psi(M) = y(M) + \frac{1}{2\pi} \int_{S_b \cup S'_b} G(M, M') V(M') ds'.$$

Соответствующая аппроксимация имеет вид

$$\bar{\Psi}(M) = y + \frac{1}{2\pi} \sum_{q \in \{b, b'\}} \sum_{i=1}^{N_q} G(M, M_q^i) V(M_q^i) \frac{L_q \sigma_q^i}{N_q}. \quad (5.2)$$

Для упрощения вида формулы можно учесть симметрию между  $S_b$  и  $S'_b$ . При использовании формулы (5.2) не следует выбирать точки  $M$ , расстояние от которых до точек сетки меньше расстояния между самими точками сетки, так как погрешность аппроксимации в этих случаях будет выше. В целом же скорость убывания погрешности аппроксимации по формуле (5.2) имеет экспоненциальный характер (обоснование этого утверждения приведено в [15]). В табл. 2 продемонстрированы абсолютные значения невязки  $\Delta_{x_0, K} := \max_{i=1, \dots, K} |\bar{\Psi}(x_0, i/K) - \Psi(x_0, i/K)|$ , наблюдавшиеся при  $x_0 = -2$ ,  $K = 100$  и различных  $h$ .

Решение (5.1) также позволяет тестировать и численную схему для расчета обтекания над дном произвольной формы на основе аппроксимации периодической решеткой профилей. В этом варианте возникает дополнительная погрешность, связанная с выбором периода  $L$ . В табл. 3 приведены невязки  $\Delta$  при вычислении скорости в точках сетки на поверхности дна в зависимости от  $L$  (метод распределения точек сетки вдоль границ аналогичен предыдущему тесту). Во всех расчетах для аппроксимации границы тела использовалось  $N_b = 36$  точек сетки, а количество точек сетки для аппроксимации дна  $N_w$  изменялось пропорционально  $L$  для того, чтобы обеспечить постоянство шага сетки. Расчеты показали, что размер погрешности в данном случае

**Таблица 3.** Невязка между точным и численным решениями для значений скорости на дне

$L$	$N_b = 36, N_w/L = 64/40$	$\Delta \cdot L^2$
40	0.0126	20.2
60	0.00569	20.5
80	0.00325	20.8
100	0.00213	21.3

оказывается обратно пропорционален квадрату  $L$ . Следует отметить, что полученный результат вполне объясним. Рассмотрим для примера комплексный потенциал обтекания единичного круга безграничным потоком жидкости:

$$W_0(z) = \frac{U}{z} - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z.$$

Ему соответствует следующая сопряженная комплексная скорость:

$$v_0(z) = -\frac{U}{z^2} - i \frac{\Gamma}{2\pi z}.$$

Если бы слева и справа от круга на расстоянии  $L$  находились еще два единичных круга, комплексные скорости на их поверхности можно было бы грубо приблизить как  $v_0(z \pm L)$ . Отсюда их влияние, например, на скорость в верхней точке центрального цилиндра можно было бы оценить через величину  $v_0(i + L) + v_0(i - L)$ . Если мы вычислим главный член асимптотики этого выражения по  $L$ , то получим величину

$$\frac{-2U - \Gamma/\pi}{L^2},$$

т.е. размер погрешности рассматриваемого приближения задачи действительно обратно пропорционален квадрату  $L$ .

**6. Тестирование на задаче обтекания эллипса над неровным дном.** Для получения примеров точных решений задач обтекания тел над неровным дном хорошо подходит метод конформных отображений. Получим с его помощью пример (бесциркуляционного) обтекания эллипса. Для этого введем вспомогательную комплексную плоскость по параметру  $Z$ , в которой рассмотрим круг единичного радиуса  $|Z| = 1$ . Комплексный потенциал обтекания круга задается функцией

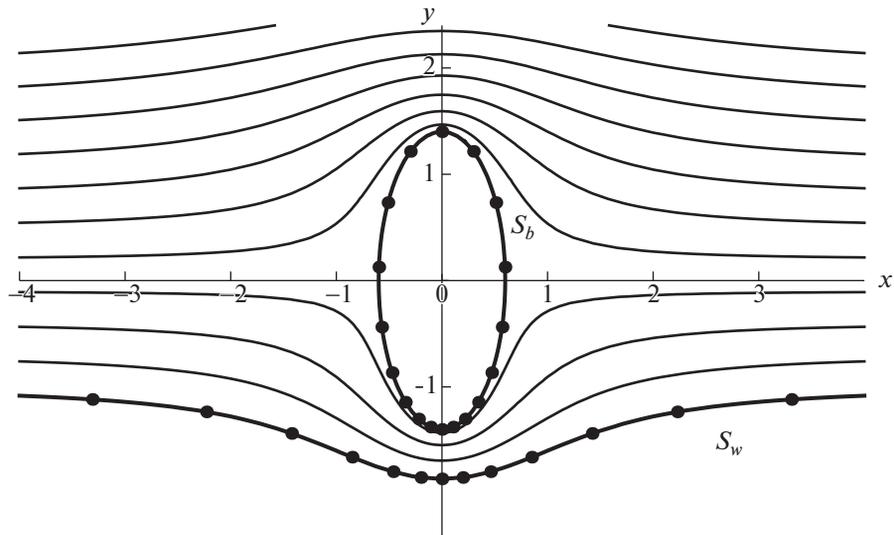
$$W(Z) = Z + \frac{1}{Z}.$$

Конформно отобразим внешность круга на физическую плоскость  $z$  с помощью функции

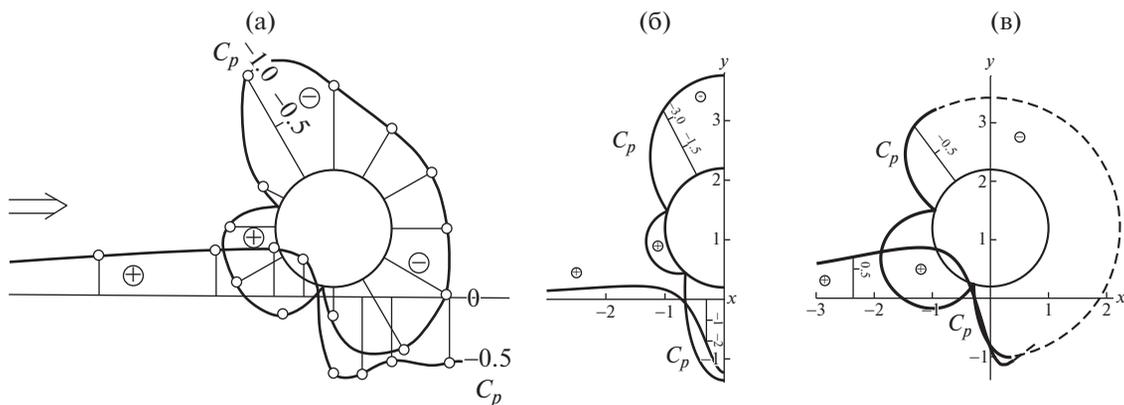
$$z = Z - \frac{K}{Z}.$$

При этом обтеканию круга  $|Z| = 1$  в плоскости  $z$  будет соответствовать обтекание эллипса с полуосями  $1 - K$  и  $1 + K$ . В качестве криволинейного дна зафиксируем линию тока  $\text{Im } W \equiv -1$ . Таким образом, мы определили расчетную область для тестирования соответствующей численной схемы. Форма этой области при  $K = 0.4$  изображена на фиг. 5. Точками на фигуре отмечена сетка, на которой выполнялось тестирование схемы. При значениях параметров  $N_w = 32, N_b = 18$  и  $L = 60$  было получено, что погрешность вычислений скорости на дне по абсолютной величине не превышает 0.005. Также было повторно проверено, что при увеличении  $L$  главный член погрешности убывает обратно пропорционально  $L^2$ .

**7. Сравнение численной схемы обтекания круга около плоского дна с экспериментом.** Выбор циркуляции по постулату Гольдштика приводит к обтеканию кругового цилиндра, при котором распределение скорости на круговом цилиндре и плоскости качественно согласуется с экспериментом, приведенном в [3]. Однако расчетные значения максимальных скоростей на границах за счет вязкости жидкости оказываются примерно в полтора раза меньше скоростей, получаемых по модели идеальной жидкости. Этим объясняется визуальное отличие эпюр коэффициента дав-



Фиг. 5. Обтекание эллипса над неровным дном.

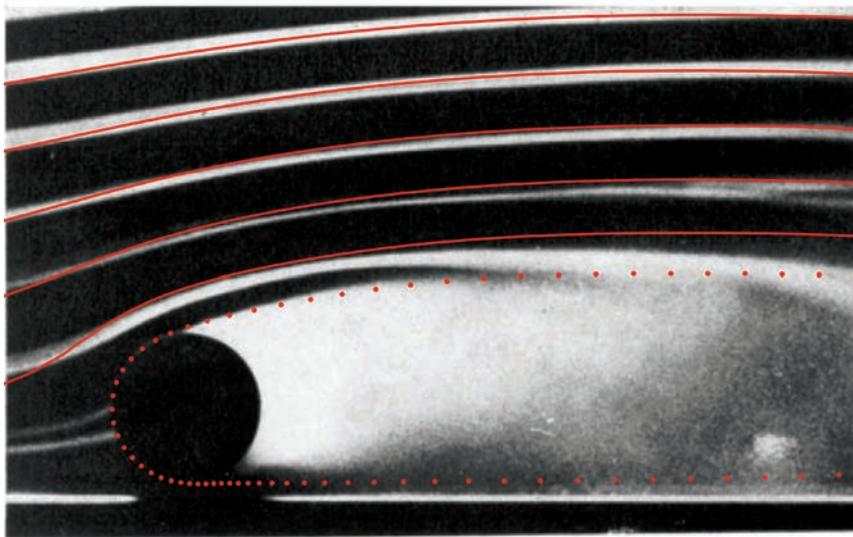


Фиг. 6. Эпюры коэффициента  $C_p$  в эксперименте (а), численном расчете для круга (б) и с учетом застойной зоны (в).

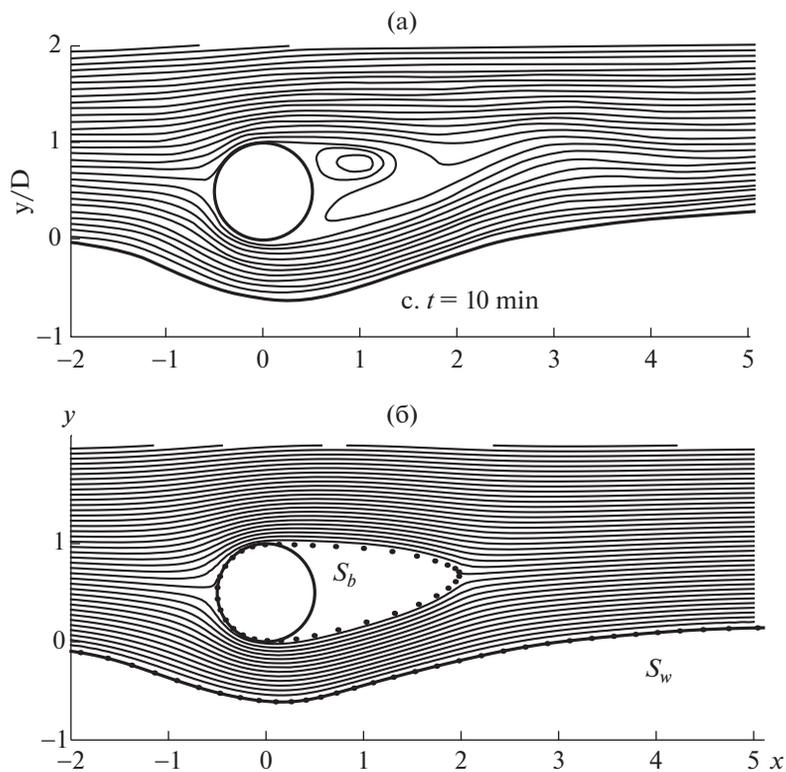
ления  $C_p$ , приведенных на фиг. 6а и 6б. Достичь большего согласия численных расчетов с экспериментом можно, если нарастить круг с обратной стороны, добавив к нему застойную зону, возникающую при натекании реального потока жидкости на тело. Подбор формы тела с учетом застойной зоны по экспериментальным данным из [3] при значениях  $h$ , близких к 0.2, продемонстрирован на фиг. 7. Точками отмечены узлы сетки, использовавшиеся для аппроксимации границы тела с учетом застойной зоны в численном алгоритме. Для аппроксимации границы всего тела оказалось достаточно сетки всего лишь из  $N$ -точек. Сплошные линии на фиг. 7 соответствуют линиям тока численного решения; они качественно согласуются с экспериментом. При таком подходе эпюра коэффициента давления  $C_p$  приобретает вид фиг. 6в, значительно более близкий к данным эксперимента.

При этом для остальных значений  $h$  минимум коэффициента давления под цилиндром меняется в небольших пределах. Это следует из малого изменения максимальной скорости, которая приведена в [1].

**8. Численный расчет обтекания цилиндра над криволинейным дном.** В задачах с криволинейным дном использование численной схемы обтекания двух симметричных контуров становится невозможным. Вместо нее используется схема, построенная на основе системы интегральных уравнений (1.2). Особенности ее применения в точности повторяют особенности, возникающие



Фиг. 7. Расчет с учетом застойной зоны.



Фиг. 8. Сравнение  $k-\omega$  модели (а) с расчетом по методу граничных элементов (б).

при использовании предыдущей схемы. Для повышения точности расчетов сетку следует сгущать в местах сближения границ, а также на участках большей кривизны. Для большего согласия с экспериментом при расчете также следует учитывать застойную зону, возникающую за телом. Пример качественного сравнения с результатами [16] изображен на фиг. 8. Преимуществом использования метода граничных элементов в данном случае является то, что для аппроксимации границ  $S_b$  и  $S_w$  требовалось всего 36 и 64 точки соответственно. Период  $L$  полагался равным 40.

**9. Выводы.** Как видно из сравнения с экспериментом и численными расчетами, распределение давления на цилиндрической и донной поверхностях, определяемые предложенным методом, согласуются с достаточной точностью. Главный член погрешности (первой численной схемы) определяется искусственно введенным периодом  $L$  как величина порядка  $c/L^2$ . Поскольку для расчетов достаточно использовать всего порядка сотни граничных элементов, метод позволяет практически мгновенно вычислять давление на поверхностях, а также строить картину линий тока на обычном компьютере. При обтекании кругового цилиндра его следует наращивать отрывной зоной. Тогда давление согласуется с экспериментом не только в области перед цилиндром, но и позади него. Форма отрывных зон зависит от расстояния цилиндра от дна и слабо зависит от формы донной поверхности. Поэтому эти закономерности можно проследить на имеющихся экспериментах и численных расчетах обтекания цилиндра над ровной поверхностью. Быстрота расчета и относительная простота численных схем являются важным преимуществом перед традиционными методами конечных элементов и использования  $k-\omega$  моделей. К тому же в  $k-\omega$  модель входят подгоночные параметры, значения которых часто не совсем ясны (см. [16]). Определение скорости под цилиндром важно также и для прогнозирования размыва дна под цилиндром, используя теорию русловых процессов. Потребность в таких расчетах связана со строительством трубопроводов на дне рек.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

Задача симметричного обтекания двух тел является частным случаем задачи обтекания двух произвольных тел с границами  $S_1$  и  $S_2$ . Как уже упоминалось в основном тексте, вещественный потенциал рассматриваемого течения является многозначной функцией и выражается в виде суммы многозначной циркуляционной части  $\Phi_\Gamma$  и однозначной бесциркуляционной части  $\tilde{\Phi}$ . Продемонстрируем вывод интегральных тождеств, которым удовлетворяет бесциркуляционная часть, из соответствующей краевой задачи. Для этого обозначим через  $S$  объединение  $S_1$  и  $S_2$ . Пусть  $M$  – произвольная точка на  $S$ , для которой мы хотим сформулировать тождество. Вокруг  $S$  построим окружность достаточно большого радиуса  $R$  с центром в точке  $M$  так, чтобы контуры  $S_1$  и  $S_2$  оказались внутри нее. Введем для окружности обозначение  $C_R$ . На  $S_1$  и  $S_2$  зафиксируем внешнее направление нормали по отношению к жидкости (т.е. нормали направлены внутрь контуров), а на  $C_R$  зафиксируем внешнее направление по отношению к окружности. Тогда из гармоничности функции  $\tilde{\Phi}$  в области, которая снаружи ограничена контуром  $C_R$ , а изнутри контурами  $S_1$  и  $S_2$ , следует тождество

$$\begin{aligned} -\int_S G(M, M') \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n'}(M') ds' + \int_S \tilde{\Phi}(M') \frac{\partial G}{\partial n'}(M, M') ds' + J &= \pi \tilde{\Phi}(M), \\ J &:= -\int_{C_R} G(M, M') \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n'}(M') ds' + \int_{C_R} \tilde{\Phi}(M') \frac{\partial G}{\partial n'}(M, M') ds', \\ G(M, M') &= \ln r(M, M'). \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

При условии, что на бесконечности скорость натекающего потока должна быть горизонтальна и равна единице, общий вид асимптотики функции  $\tilde{\Phi}$  на  $C_R$  при  $R \rightarrow \infty$  будет иметь вид

$$\tilde{\Phi} = x + C + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

С ее помощью интеграл  $J$  вычисляется явно. Интегрирование члена  $O(1/R)$  в пределе при  $R \rightarrow \infty$  дает нуль. Для главных членов асимптотики с помощью подстановок  $x(s') = x(M) + R \cos \theta$ ,  $ds' = R d\theta$ ,  $\partial/\partial n' = \partial/\partial R$  получаем

$$J = \int_0^{2\pi} \ln R \frac{\partial}{\partial R} [x(M) + R \cos \theta + C] R d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} [x(M) + R \cos \theta + C] R d\theta = 2\pi(x(M) + C).$$

С учетом этого равенства тождество (П.1) принимает вид

$$-\int_S G(M, M') \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n'}(M') ds' + \int_S \tilde{\Phi}(M') \frac{\partial G}{\partial n'}(M, M') ds' = \pi \tilde{\Phi}(M) - 2\pi(x(M) + C).$$

Далее учтем условие непротекания на границе  $S$ :

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_{\Gamma}}{\partial n} = -\frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial s}.$$

Отсюда имеем

$$\int_S \tilde{\Phi}(M') \frac{\partial G}{\partial n'}(M, M') ds' - \pi \tilde{\Phi}(M) = -\int_S G(M, M') \frac{\partial \Psi_{\Gamma}}{\partial s'}(M') ds' - 2\pi(x(M) + C).$$

Наконец, потенциал определяется с точностью до константы, поэтому можно положить  $C = 0$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров А.Г., Маклаков Д.В.* Об определении циркуляции вокруг цилиндра, обтекаемого вблизи плоскости // Приклад. матем. и механ. 2022. Т. 3. С. 351–363.
2. *Гольдштик М.А., Ханин В.М.* Взаимодействие цилиндра со свободной поверхностью и струей // Мех. жидкости газа. 1977. № 5. С. 50–58.
3. *Bearman P.W., Zdravkovich M.M.* Flow around a circular cylinder near a plane boundary // J. Fluid. Mech. 1978. V. 89. Part 1. P. 33–47.
4. *Price S.J., Sumner D., Smith J.G., Leong K., Paigdoussis M.P.* Flow visualization around a circular cylinder near to a plane wall // J. Fluid. Structur. 2002. V. 16. № 2. P. 175–191.
5. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
6. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Физматлит, 1980. С. 448.
7. *Lagally M.* The frictionless current in the outer areas of double circuits // Z. Angew. Math. Mech. 1929. № 9. P. 299–305.
8. *Lagally M.* The frictionless flow in the region around two circles. N.A.C.A. Technical Memorandum No. 626, 1931.
9. *Мазур В.Ю.* Устойчивость и переход через критические обороты быстро вращающихся роторов при наличии трения // Механ. жидкости газа. 1966. № 3. С. 75–79.
10. *Wang Q.X.* Interaction of two circular cylinders in inviscid flow // Phys. Fluid. 2004. V. 16. P. 4412–4425.
11. *Crowdy D.G.* Analytical solution for uniform potential flow past multiple cylinders // Eur. J. Mech. B/Fluid. 2006. V. 25. № 4. P. 459–470.
12. *Crowdy D.G., Surana A., Yick K.-Y.* The irrotational motion generated by two planar stirrers in inviscid fluid // Phys. Fluid. 2007. V. 19. P. 018103.
13. *Alassar R.S., El-Gebeily M.A.* Inviscid flow past two cylinders // ASME Trans. J. Fluid Eng. 2009. V. 131. P. 054501.
14. *Петров А.Г., Сандуляну Ш.В.* Моделирование электрохимической обработки методом граничных элементов без насыщения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 120–130.
15. *Петров А.Г.* Алгоритм построения квадратурных формул с экспоненциальной сходимостью для линейных операторов, действующих на периодические функции // Изв. вузов. Матем. 2021. № 2. С. 86–92.
16. *Zhao M., Cheng L.* Numerical modeling of local scour below a piggyback pipeline in currents // J. Hydraul. Engineer. 2008. V. 56. № 10. P. 1452–1463.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 533.1

ВЛИЯНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА РАЗВИТИЕ  
НЕУСТОЙЧИВОСТИ НА ШЕРОХОВАТЫХ КОНТАКТНЫХ ГРАНИЦАХ  
ТРЕХСЛОЙНОЙ ГАЗОВОЙ СИСТЕМЫ<sup>1)</sup>

© 2023 г. В. В. Змушко<sup>1,\*</sup>, А. Н. Разин<sup>1,\*\*</sup>, А. А. Синельникова<sup>1,\*\*\*</sup>, А. Н. Щербаков<sup>1,\*\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> 607188 Нижегородская обл., Саров, пр-т Мира, 37, ФГУП “РФЯЦ – ВНИИЭФ”, Россия

\*e-mail: VVZmushko@vniief.ru

\*\*e-mail: ANRazin@vniief.ru

\*\*\*e-mail: AnASinelnikova@vniief.ru

\*\*\*\*e-mail: ANScherbakov@vniief.ru

Поступила в редакцию 23.04.2022 г.  
Переработанный вариант 09.10.2022 г.  
Принята к публикации 14.11.2022 г.

Изучается влияние интенсивности ударной волны, прошедшей через шероховатые контактные границы, на развитие неустойчивости в трехслойной газовой системе при числах Маха  $M = 1.3$  и  $M = 3$ . Трехслойная система сформирована с помощью постановки по сечению ударной трубы двух тонких пленок (контактных границ). Между контактными границами (в центральном слое системы) находится тяжелый газ (элегаз), а пространство слева и справа от центрального слоя заполнено воздухом. Начальная шероховатость контактных границ задается двухмодовым синусоидальным возмущением. Расчеты проведены по методике МИМОЗА с использованием PLES (implicit large eddy simulation) стратегии моделирования путем интегрирования уравнений Эйлера на разностной сетке с квадратными ячейками. Полученные результаты сопоставляются между собой, а при  $M = 1.3$  и с опытными данными. Библ. 30. Фиг. 11.

**Ключевые слова:** газовая слойка, контактные границы, ударные волны, неустойчивость, турбулентное перемешивание, математическое моделирование.

**DOI:** 10.31857/S0044466923030134, **EDN:** DZYLAC

ВВЕДЕНИЕ

Неустойчивость и турбулентное перемешивание (ТП), развивающиеся на контактных границах (КГ) слоистых систем после прохождения ударной волны (УВ), могут оказывать значительное влияние на характеристики изучаемого течения и поэтому должны быть учтены при разработке ряда устройств, например, при создании устройств, предназначенных для получения высоких концентраций энергии.

Существует ряд методологий (стратегий) и более десятка физических моделей для расчета развития неустойчивости и ТП, возникающих на шероховатых КГ слоев после прохождения УВ. Наличие большого числа методологий указывает на слабую разработанность данной темы. При этом отсутствие необходимого набора экспериментальной информации (например, по взаимодействию ударной волны с пульсациями газодинамических величин и вихрями); наличие нерешенных вопросов в используемых численных методиках (например, отсутствие сходимости решения на фронте скачка при разностном решении уравнений Эйлера, наличие диссипативных и дисперсионных погрешностей разностных схем, понижающих точность моделирования и т.п.) препятствуют получению решения с заданной точностью и не способствуют глубокому пониманию физики перемешивания.

В настоящее время в ВНИИЭФ используются, в основном, две стратегии численного моделирования развития неустойчивости. Первая стратегия — RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes) моделирование задачи с привлечением уравнений газовой динамики (расчет осреднен-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при поддержке Национального центра физики и математики (НЦФМ).

ного течения) и полуэмпирических моделей турбулентности (расчет пульсационных характеристик течения). В качестве полуэмпирических моделей используются три модели: Никифорова, Никифорова–Козлова и К- $\epsilon$  модель (см. [1]). Инициализация ТП в численных расчетах с использованием RANS стратегии требует: 1) по заданной начальной шероховатости КГ рассчитать эволюцию начального возмущения (рост амплитуды пузырей и струй), 2) на основе какого-либо критерия оценить момент перехода от этапа развития неустойчивости к ТП, 3) на момент перехода определить ширину зоны перемешивания и задать в ней начальные данные для решения уравнений ТП (например, для К- $\epsilon$  модели кинетическую энергию турбулентности и скорость диссипации). Такие данные должны быть рассчитаны на основе информации, полученной на этапе расчета развития неустойчивости. На сегодняшний день выбор критерия перехода к ТП и построение алгоритма формирования начальных данных для уравнений ТП остаются фундаментальными проблемами численного моделирования.

Изучению возможностей RANS стратегии моделирования посвящено довольно много работ. В частности, в [2] исследовалась зависимость скорости роста амплитуды возмущений от формы начальной шероховатости КГ. Влиянию размерности начального возмущения (2D или 3D) на переход к ТП, выбору момента времени подключения уравнений ТП к расчету и построению начальных данных для решения уравнений ТП посвящены работы [3–6]. Из других вопросов, возникающих при численном моделировании течений после прохождения УВ через КГ, отметим вопросы сходимости решения на последовательности измельчающихся сеток, наличие паразитных осцилляций газодинамических величин на скошенных сетках с вытянутыми ячейками, деформацию фронта ударной волны при ее взаимодействии с пульсациями газодинамических величин и крупными вихрями и т.п. (см. [6–8]). RANS стратегия моделирования задач с присущими ей проблемами довольно подробно описана в [6].

Во второй стратегии моделирования (ILES – implicit large eddy simulation, см. [9]) отсутствует проблема инициализации перемешивания, что делает ее применение при расчете некоторых задач вполне привлекательной. По сравнению с прямым численным моделированием (DNS – direct numerical simulation) течений и LES (large eddy simulation) моделированием методология ILES также имеет ряд преимуществ. Методология DNS дает удовлетворительные результаты для простых геометрий и лишь при умеренных числах Рейнольдса, но не способна на современных вычислительных системах с необходимой точностью описать мелкомасштабную турбулентность (вязкую диссипацию энергии). В методологии ILES нет явного фильтрации уравнений, что позволяет избежать некоторых трудностей, присущих методам LES (см. [9]). Дополнительным достоинством методологии ILES является простота ее реализации в программных комплексах. Наконец, отметим ситуацию, в которой методология ILES является чрезвычайно полезной. При падении УВ на контактную границу сложной формы (например, состоящую из нескольких участков с различными наклонами) расчет этапа развития неустойчивости и построение начальных данных для решения уравнений ТП в методологии RANS вызывает затруднения.

При постановке расчета с использованием стратегий ILES или RANS, как правило, возникает ряд вопросов, которые до сих пор не имеют законченного решения. Одним из таких вопросов является проблема задания начальной шероховатости границы для инициализации развития неустойчивости на КГ разноплотных газов. Особенно остро эта проблема проявляется при моделировании лабораторных опытов, в которых контактная граница формируется с помощью установки в трубе тонкой пленки, разделяющей газы до начала проведения опыта. После разрыва пленки на кусочки различных размеров в окрестности КГ формируется спектр начальных возмущений, зависящий от свойств пленки, описать который в расчетах не представляется возможным. К настоящему времени чувствительность результатов моделирования задачи к заданию начальной шероховатости границы хорошо известна и является темой многих экспериментальных, численных и теоретических исследований (см., например, [10–21]). В [10], [11] при моделировании лабораторных опытов, поставленных в Институте физики взрыва (ИФВ) по заданию Института теоретической и математической физики (ИТМФ) РФЯЦ-ВНИИЭФ, продемонстрировано, что без задания начальной шероховатости КГ в расчетах не удается получить согласованное с экспериментом развитие неустойчивости и ТП. В [12] при моделировании вихря Тейлора–Грина продемонстрировано влияние размера ячейки разностной сетки на время перехода от этапа развития неустойчивости к ТП для безударных течений.

Таким образом, наличие нерешенных вопросов в используемых стратегиях моделирования турбулентного перемешивания побуждает специалистов заниматься совершенствованием расчетных методик и отработкой технологии счета. Ниже приведены данные расчетного исследования формирования поля течения под действием ударной волны, проходящей по трехслойной га-

зовой системе, в которой первая КГ имеет вид наклонной ступеньки, а вторая КГ расположена поперек ударной трубы. Выполнено две серии расчетов для чисел Маха ударной волны  $M = 1.3$  и  $M = 3$ . Результаты расчетов, полученных при  $M = 1.3$ , сопоставляются с экспериментальной информацией, полученной в ИФВ (см. [22]). Опытные данные для  $M = 3$  на сегодня отсутствуют, так как используемая для проведения экспериментов ударная труба не рассчитана на большие нагрузки.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЯ

Математическое моделирование лабораторных опытов выполнялось в 2D постановке по методике МИМОЗА с использованием уравнений Эйлера без привлечения каких-либо моделей учета ТП (ILES моделирование). Расчетная методика основана на лагранжево-эйлеровой стратегии и выделении веществ концентрациями (подробности см. в [23–26]). Такой подход является эффективным при моделировании задач механики сплошной среды с большими деформациями.

Расчет счетного шага состоит из двух этапов: на первом этапе выполняется интегрирование уравнений Эйлера и уравнения переноса концентраций, записанных в лагранжевых координатах

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad}(P + q), \quad \frac{dz}{dt} = U, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \text{div} U,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{P + q}{\rho} \text{div} U, \quad \frac{d(\rho c_k)}{dt} = -\text{div}(\rho U c_k), \quad P = P(\rho, \varepsilon),$$

где  $z = (x, y)$  – пространственные координаты,  $t$  – время,  $U = (u, v)$  – компоненты скорости,  $\rho$  – плотность,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия,  $q$  – искусственная вязкость,  $c_k$  – объемная концентрация вещества  $k$ ,  $P$  – давление, определяемое из уравнения состояния (в представленных ниже расчетах используется уравнение состояния идеального газа). На лагранжевом этапе расчета границы ячеек сетки перемещаются со скоростью вещества, массы ячеек не изменяются. Интегрирование системы уравнений выполняется на разнесенной разностной сетке. Термодинамические параметры задачи относятся к центрам счетных ячеек, координаты и компоненты скорости – к узлам. Используется полностью консервативная разностная схема второго порядка точности (на гладких течениях) “предиктор-корректор”, аналогичная [26].

Для подавления паразитных осцилляций численного решения в окрестности больших градиентов газодинамических величин вводится искусственная вязкость, являющаяся суммой квадратичной и линейной вязкостей. В случае необходимости для устранения коротковолновых возмущений используется процедура сглаживания оператором четвертого порядка относительно нормальных к линии сетки компонент скорости  $U_n^{\text{сгл}} = U_n [1 - (\alpha L)^2]$ . Разностная аппроксимация оператора  $L$  берется в виде

$$(LU)_m = \frac{2}{M_m} [M_{m+1/2} (U_{k+1} - U_k) - M_{m-1/2} (U_k - U_{k-1})],$$

где  $M_m$  – сумма плоских масс ячеек, имеющих данный узел своей вершиной,  $M_{m+1/2}$  – плоская масса ячейки с номером  $m$ ,  $\alpha$  – коэффициент сглаживания.

На втором этапе проводится построение новой разностной сетки и на ней выполняется пересчет полученных на лагранжевом этапе сеточных значений. Пересчет величин осуществляется с помощью алгоритма, основанного на расщеплении по координатным направлениям и использовании одномерного алгоритма повышенного порядка точности. Для повышения точности вычислений проводится реконструкция потоков на грани ячеек: кусочно-постоянное распределение величин в ячейках заменяется на кусочно-линейное. С целью предотвращения размывания контактных границ между веществами применяется алгоритм их выделения с помощью концентраций (подробности см. в [25]).

В смешанных ячейках (ячейках, содержащих несколько веществ) давление вычисляется покомпонентно, а затем усредняется с учетом объемных концентраций веществ.

Расчет многокомпонентной сплошной среды осуществляется посредством двух методов отслеживания КГ материалов: метода концентраций – Volume-of-Fluid (VoF) (см. [27]) и метода

моментов концентраций – Moment-of-Fluid (MoF) (см. [28]). Особенностью метода VoF является зависимость алгоритма от объемных концентраций материала в соседних счетных ячейках. Эта информация используется для построения нормали к КГ. Поэтому реконструируемые границы в смежных многокомпонентных счетных ячейках являются зависимыми между собой, что приводит к размазыванию КГ с характерным размером удвоенного шага по сетке. Другая особенность методов VoF заключается в том, что при наличии в смешанной ячейке более двух компонентов результат реконструкции КГ зависит от порядка обработки веществ в алгоритме. Неудачный порядок обработки веществ может приводить к преждевременному переносу компонента в соседние ячейки, формируя, по сути, искусственное перемешивание веществ в расчете. Иногда оно проявляется в виде избыточного разбиения вещества на несвязанные фрагменты, размер которых меньше шага по сетке.

В методе Moment-of-Fluid, зная положение центра массы вещества и занимаемую им долю объема в ячейке, путем решения задачи минимизации определяется КГ вещества в виде прямой линии без привлечения данных из соседних счетных ячеек. Метод MoF имеет второй порядок точности, что позволяет точно реконструировать линейные КГ. Методам VoF второго порядка точности для точного восстановления линейной КГ материала требуется, чтобы КГ была линейной в кластере, состоящем из трех ячеек (см. [27], [29]). Именно поэтому теоретическое разрешение метода MoF позволяет восстанавливать детали границ раздела размером шага по сетке, что в пределах от двух до трех раз меньше, чем в методах VoF. Как уже упоминалось выше, в методах VoF также существует проблема зависимости конечного результата от порядка обработки веществ в смешанной ячейке. В алгоритме метода MoF этот вопрос решается комбинаторным способом, используя последовательный перебор всех возможных порядков обработки материалов, с выбором той последовательности, которая приводит к наименьшей ошибке при решении проблемы минимизации. Метод MoF позволяет точнее рассчитывать потоки объемов компонент на этапе адвекции и дольше удерживать целостность КГ материалов в процессе счета.

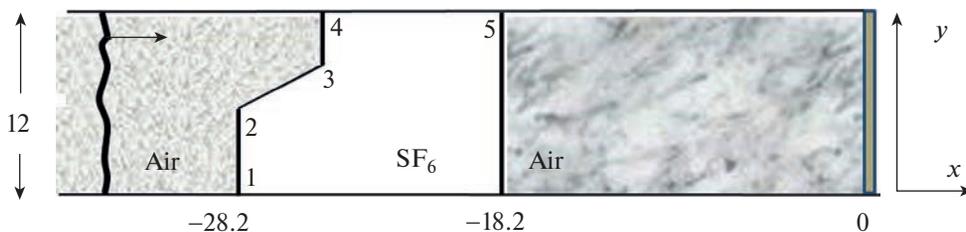
Ниже представлены результаты, полученные на сетке, состоящей из квадратных ячеек со стороной  $h = 0.04$  см. Расчет каждой задачи выполнен с использованием алгоритмов VoF и MoF.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

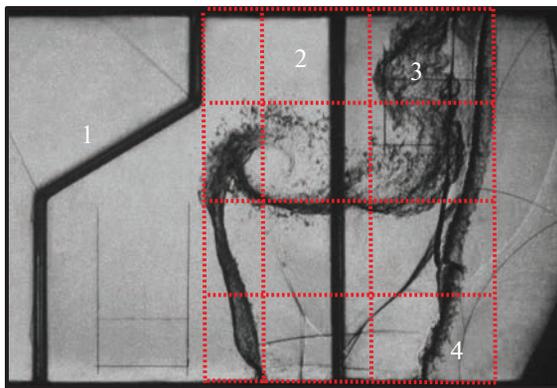
Расчет течения при числе Маха  $M = 1.3$  проходящей через контактные границы УВ проводился и ранее (см. [11]). При использованной в [11] начальной шероховатости контактных границ неустойчивость практически не развивалась. Полученные в расчетах данные в окрестности КГ заметно отличались от экспериментальной информации. Ниже представлены результаты расчетов с заданием шероховатости КГ в форме двухмодовых возмущений.

Схема постановки расчета приведена на фиг. 1. В начальный момент времени газы покоятся в трубе при атмосферном давлении и разделяются тонкими пленками для предотвращения взаимной диффузии перед проведением опыта. Первая пленка (КГ1) имеет два излома (в точках 2 и 3). Участки 1–2 и 3–4 расположены перпендикулярно стенкам трубы, участок 2–3 имеет наклон. Длина участков 1–2, 3–4, 4–5 составляет 6, 3 и 4.7 см соответственно.

Начальные параметры воздуха (Air):  $\rho_0 = 0.0012$  г/см<sup>3</sup> – плотность,  $\gamma = 1.4$  – показатель адиабаты,  $p_0 = 0.0001$  г/(см 10 мкс) – давление; параметры SF<sub>6</sub>:  $\rho_0 = 0.0065$  г/см<sup>3</sup>,  $\gamma = 1.094$ ,  $p_0 = 0.0001$  г/(см 10 мкс). Граничные условия: на стенках трубы ставятся условия скольжения потока, правый торец трубы – жесткая стенка. На левой границе задачи задаются газодинамические параметры, соответствующие величинам за фронтом УВ. Сформированная на левом торце



Фиг. 1. Схема постановки расчета, размеры в см.



**Фиг. 2.** Фотокадр эксперимента и реперная сетка,  $t = 750$  мкс, 1, 2 – рамки крепления контактных границ, 3, 4 – зоны перемешивания на контактных границах.

трубы УВ движется направо, проходит контактные границы и на момент окончания расчета  $t = 750$  мкс достигает правого торца трубы.

При падении УВ на контактные границы разделительные пленки разрушаются на фрагменты различных размеров, создавая спектр начальных возмущений, границы раздела газов ускоряются. Сформировавшийся спектр начальных возмущений зависит от разнотолщинности и свойств пленки, определить который не представляется возможным. Так как при проведении разных опытов для создания пленки используется лак одного состава, а масса лака, затрачиваемая на единицу площади пленки сохраняется, можно ожидать, что используемые в опытах пленки после разрыва формируют на КГ близкие начальные шероховатости (амплитуду и волновое число). В процессе проведения методических расчетов формирующиеся шероховатости были оценены путем сопоставления расчетных и экспериментальных данных по развитию неустойчивости. Отметим также, что визуальное сопоставление расчетных и опытных данных на сегодняшний день является единственно возможным путем проверки применимости методологии моделирования сложных задач с учетом ТП.

В результате взаимодействия УВ с КГ1 на участках 1–2 и 3–4 развивается неустойчивость Рихтмайера–Мешкова, на наклонном участке 2–3 развиваются неустойчивости Рихтмайера–Мешкова и Кельвина–Гельмгольца. После прохождения УВ через КГ1 фронт скачка деформируется (перестает быть плоским). Взаимодействие деформированного скачка, прошедшего КГ1, со второй контактной границей (КГ2) приводит к развитию на КГ2 неустойчивостей Рихтмайера–Мешкова и Кельвина–Гельмгольца. С течением времени на контактных границах (или отдельных частях КГ) формируются зоны перемешивания.

На фиг. 2 представлен фотокадр поля течения, полученный в эксперименте при  $M = 1.3$  на момент времени  $t \approx 750$  мкс. За подробностями постановки экспериментов отсылаем к [11], [22]. На фиг. 2 нанесена реперная сетка, которая далее используется при сравнении расчетных данных между собой и с экспериментальной информацией.

Рассматриваемая задача интересна по ряду причин. Во-первых, скорости роста возмущений уже на линейной стадии на отдельных участках первой контактной границы различны. Во-вторых, после отражения ударной волны от КГ2 на первую контактную границу приходит волна разрежения, которая усиливает развитие неустойчивости. Поскольку моделирование задачи заканчивается до момента отражения УВ от правого торца, развитие неустойчивости на КГ1 происходит при участии волны разрежения, а на КГ2 неустойчивость развивается по инерции.

Для сравнения численных результатов между собой рассчитываются зависимости от времени величины положительной и отрицательной завихренности потока:

$$\omega^+(t) = \int \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy > 0, \quad \omega^-(t) = \int \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy < 0. \quad (1)$$

Интегрирование в (1) выполняется по всей области решения.

Отметим, что в выбранной стратегии моделирования задачи задание начальной шероховатости на КГ не вызывает затруднений в отличие от широко используемой исследователями RANS

стратегии моделирования. Как отмечено ранее, в RANS стратегии моделирования помимо неопределенности в задании начальных возмущений на КГ возникают вопросы перехода от этапа развития неустойчивости к ТП. Для рассматриваемой задачи все отмеченные проблемы являются далеко не простыми.

Согласно импульсной модели Рихтмайера (см. [30]), амплитуда одномодовых начальных возмущений на линейной стадии растет по закону

$$\frac{da}{dt} = k_0 a_0^+ U A^+, \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}, \quad (2)$$

где  $t$  – время,  $a$  – амплитуда возмущения,  $k$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны возмущения,  $U$  – скорость, которую приобретает КГ после прохождения УВ,  $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$  – число Атвуда ( $\rho_1, \rho_2$  – плотности слева и справа от КГ). Верхним индексом (+) обозначены величины, получающиеся после прохождения УВ через контактную границу. Так как УВ пересекает контактную границу со стороны легкого вещества, то  $a_0^+ = a_0^- (1 - U/D)$ , где  $a_0^-$  – начальная амплитуда возмущений (до прихода УВ на КГ),  $D$  – скорость падающей на КГ ударной волны. Ниже при получении оценок принимается, что линейная стадия роста амплитуды струи (пузыря) продолжается, пока выполняется условие  $a \leq 0.1 \lambda$  ( $ak \leq 0.628$ ). Затем начинает проявляться нелинейность процесса, для моделирования которого требуется использовать нелинейные модели, которые учитывают нарушение симметрии в развитии струй и пузырей.

Из (2) следует, что в случае одномодовых стоячих волн на линейной стадии амплитуда растет по закону

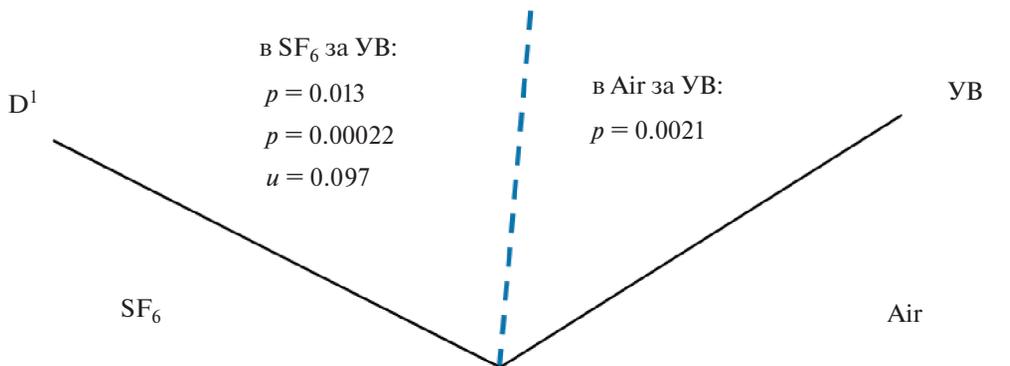
$$a(t) = a_0^+ + \frac{a_0^+}{\lambda_0} 2\pi U A^+ t, \quad (3)$$

из которого заключаем, что чем больше в начальном возмущении отношение амплитуды к длине волны, тем выше скорость роста амплитуды по времени при прочих равных условиях. В выполненных расчетах начальную шероховатость УВ и контактных границ задаем двухмодовым возмущением

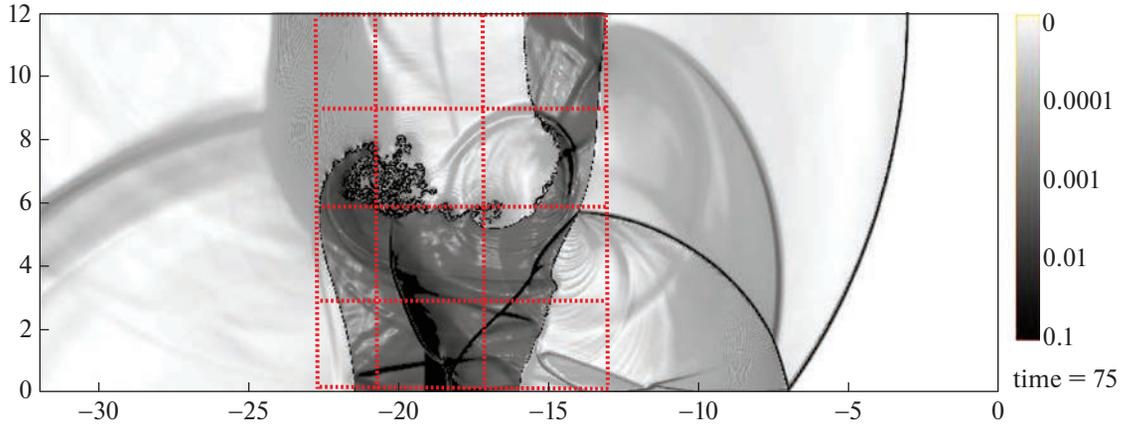
$$D(y) = a_1 \sin(k_1 y) + a_2 \sin(k_2 y). \quad (4)$$

Модой с амплитудой  $a_1$  и волновым числом  $k_1$  задаем предполагаемую шероховатость УВ, падающей на КГ, модой с амплитудой  $a_2$  и волновым числом  $k_2$  описываем шероховатость КГ, сформировавшуюся после разрыва пленки. В (4) принято  $a_1 = 0.01$  см,  $\lambda_1 = 3$  см,  $a_2 = 0.01$  см,  $\lambda_2 = 0.4$  см. В одном расчете возмущения на КГ не задавались.

**Расчеты при  $M = 1.3$ .** Во всех расчетах принята система единиц г, см, 10 мкс. Из соотношений Югионио находим, что за фронтом УВ, движущейся во воздухе, газодинамические параметры принимают значения  $\rho = 0.00182$  г/см<sup>3</sup>,  $p = 0.00018$  г/(см 10 мкс),  $u = 0.151$  см/(10 мкс). При выходе УВ на участок 1–2 КГ1 происходит распад разрыва, в результате которого формируются две УВ и контактный разрыв. Параметры течения после распада разрыва приведены на фиг. 3.



Фиг. 3. Схема распада разрыва на участке 1–2 КГ1,  $M = 1.3$ .



**Фиг. 4.** Поле функции  $F$ , расчет без задания возмущений на КГ; здесь и далее время на фигурах измеряется в десятках мкс.

Скорость УВ, движущейся по  $SF_6$ , составляет  $D^1 \approx 0.2$  см/(10 мкс), число Атвуда после прохождения скачка  $A^+ \approx 0.72$ . Согласно (2) и данным фиг. 3, скорость роста амплитуды возмущений на участке 1–2 КГ1 равна

$$\frac{da}{dt} \approx 0.036k_0a_0^- \tag{5}$$

Скорость разбегания УВ, движущейся по центральной области (в  $SF_6$ ), и КГ (удаления УВ от КГ1) без учета скорости роста струй составляет  $|D^1 - u| \approx 0.1$  см/(10 мкс). Детальный анализа взаимодействия УВ с КГ1 показал, что растущие на КГ1 возмущения не взаимодействуют с фронтом скачка (фронт не деформируется).

На фиг. 4 показано поле функции  $F = 1 - \exp(-10|\nabla\rho|)$ , полученное в расчете при  $M = 1.3$ , выполненном без задания начальных возмущений, и реперная сетка, перенесенная с фиг. 2.

Согласно расчетным данным (фиг. 4), при выбранной технологии моделирования задачи развитие неустойчивости происходит лишь на участке 2–3 КГ1, т.е. там, где направление КГ не совпадает с направлениями линий сетки. Из фиг. 4 следует, что без навязывания шероховатости на КГ, направление которых совпадает с направлениями линий сетки, получить (как в опыте) намешивания контактирующих газов в окрестности контактных границ в рассматриваемой задаче не удастся. Из сопоставления экспериментальной информации (фиг. 2) и численных результатов (фиг. 4) заключаем, что формы центральной области в эксперименте и расчете удовлетворительно согласуются между собой.

Динамика формирования течения с навязанной шероховатостью КГ в системе видна из фиг. 5, на которой представлено поле функции  $F$  на характерные времена  $t = 500$  мкс и на момент окончания расчета  $t = 750$  мкс.

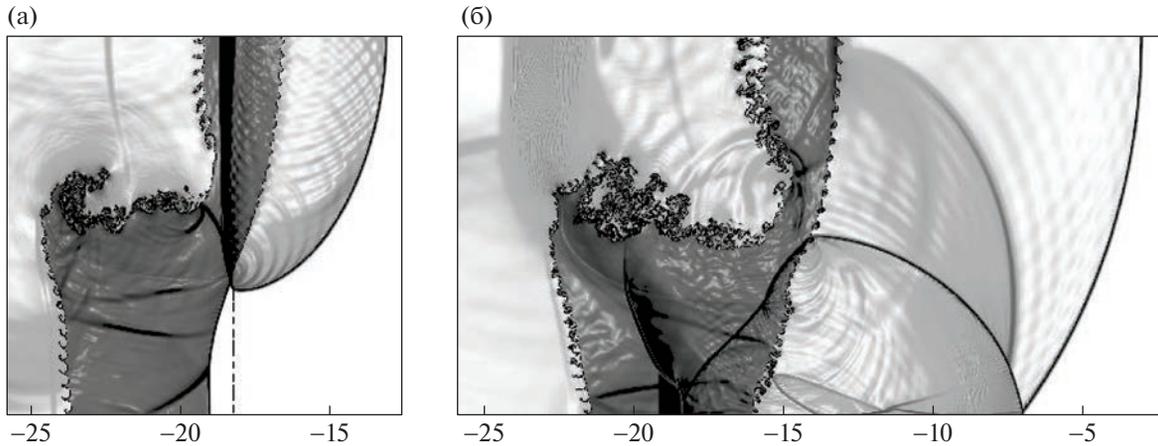
Из данных фиг. 5 следует, что в момент времени  $t = 500$  мкс волна разрежения приближается к возмущенному участку 3–4 КГ1, а при  $t = 750$  мкс скачок выходит на правый торец трубы.

При заданной начальной шероховатости контактных границ для первой и второй мод имеем

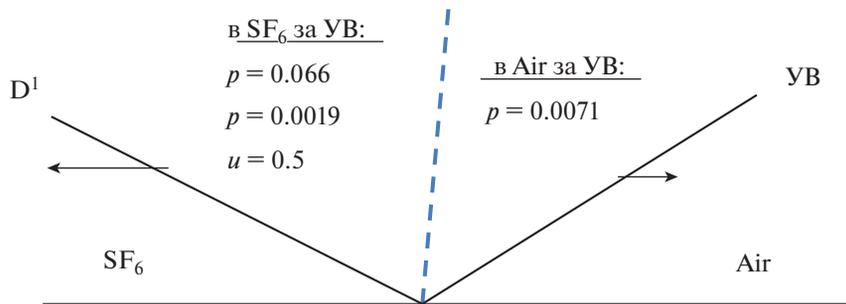
$$\frac{a_1}{\lambda_1} = 0.0033, \quad \frac{a_2}{\lambda_2} = 0.025. \tag{6}$$

Из (3) и (6) заключаем, что амплитуда длинноволнового возмущения растет значительно медленнее ( $\approx$  в 7 раз), чем амплитуда второй моды. Согласно фиг. 5б, на КГ2 развивается 30 струй, что указывает на доминирование второй моды в процессе развития неустойчивости.

**Расчеты при  $M = 3$ .** Из соотношений Гюгонио находим, что за фронтом УВ, движущейся по воздуху, газодинамические параметры принимают значения  $\rho = 0.0046$  г/см<sup>3</sup>,  $p = 0.00103$  г/(см 10 мкс),  $u = 0.759$  см/(10 мкс). При выходе УВ на участок 1–2 КГ1 происходит распад разрыва, при котором формируются две УВ и контактный разрыв. Параметры течения после распада разрыва приведены на фиг. 6.



Фиг. 5. Поля функции  $F$  в расчете с использованием алгоритма VoF: (а)  $t = 50$  мкс, (б)  $t = 75$  мкс,  $M = 1.3$ .



Фиг. 6.  $M = 3$ . Результат распада разрыва на участке 1–2 КГ1.

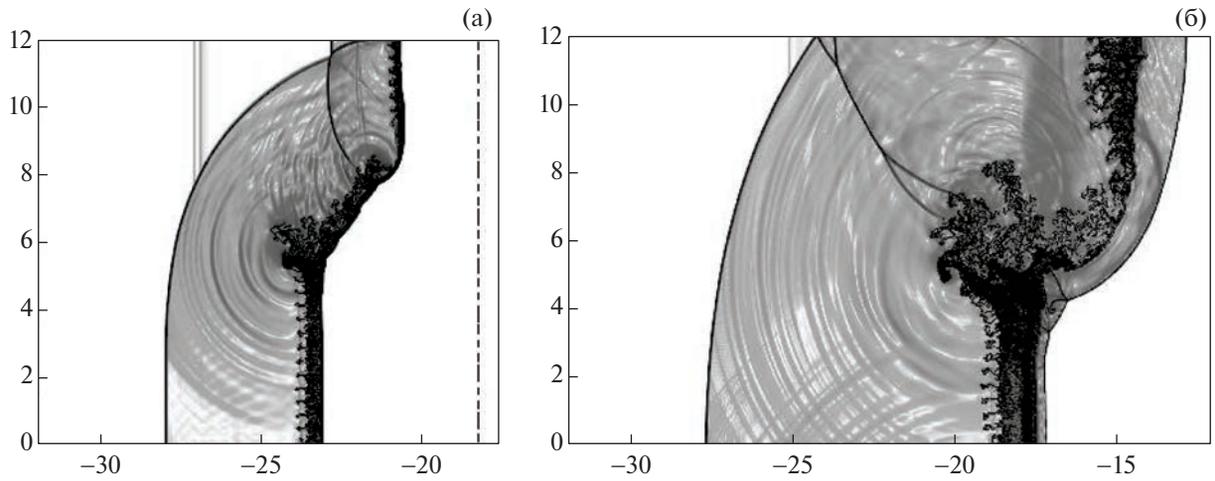
Скорость УВ, движущейся по  $SF_6$ , составляет  $D^1 \approx 0.57$  см/(10 мкс), число Атвуда после прохождения скачка через КГ  $A^+ \approx 0.72$ . Согласно (2) и фиг. 6, скорость роста амплитуды на участке 1–2 КГ1 равна

$$\frac{da}{dt} \approx 0.049k_0a_0^- \quad (7)$$

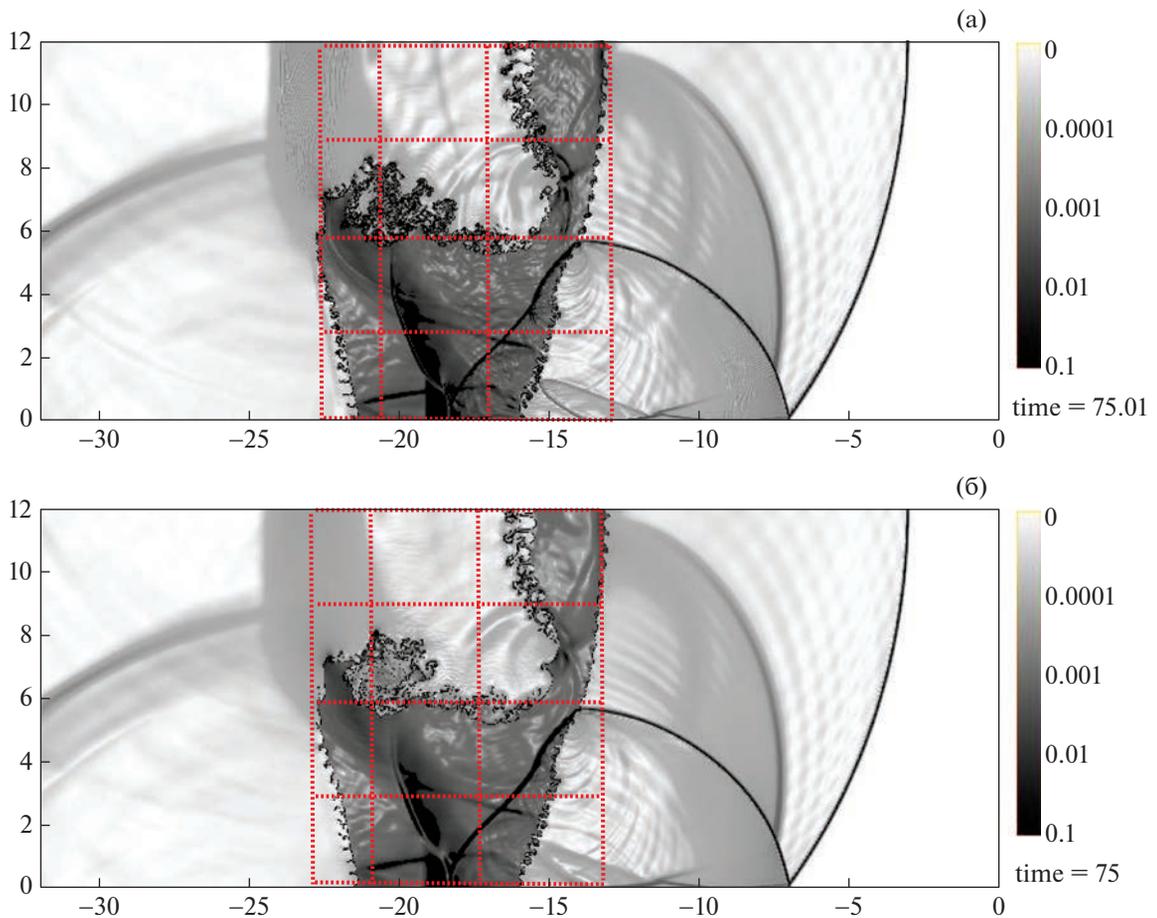
Скорость разбегания УВ, движущейся по центральной области (в  $SF_6$ ), и КГ (удаления УВ от КГ1) без учета скорости роста струй составляет  $\approx 0.07$  см/(10 мкс). Из (5) и (7) следует, что при  $M = 3$  скорость роста амплитуды возмущений на линейной стадии несколько больше, чем при  $M = 1.3$ , а скорость разбегания УВ и КГ меньше. В результате детального анализа прохождения УВ через участок 1–2 КГ1 заключаем, что при  $M = 3$  растущие на КГ1 возмущения не воздействуют на фронт скачка. Но на участках 2–3 и 3–4 из-за близости возмущений и фронта скачка наблюдается слабое воздействие возмущений на фронт скачка, что приводит к деформации фронта, заметной по данным фиг. 7а.

Проанализируем развитие неустойчивости на отдельных (трех) участках первой контактной границы (фиг. 7). В момент времени  $t = 100$  мкс на участке 1–2 КГ1 явно наблюдается рост пузырей, на участке 2–3 уже происходит перемешивание тяжелого и легкого слоев, а на участке 3–4 формируется стадия перехода к ТП. Подобная ситуация наблюдается и на момент времени  $t = 130$  мкс (мгновенное поле функции  $F$  на это время здесь не приводится). Очевидно, что при использовании RANS стратегии моделирования данной задачи могут возникнуть трудности при инициализации ТП на контактной границе и преимущество ILES методологии в данной ситуации становится очевидным.

**Сравнение результатов, полученных по алгоритмам MoF и VoF,  $M = 1.3$ .** Для сравнения результатов расчетов используем поле функции  $F$  (фиг. 8) с реперной сеткой на момент времени  $t = 750$  мкс и график эволюции завихренности (фиг. 9). Из данных фиг. 8 заключаем, что формы

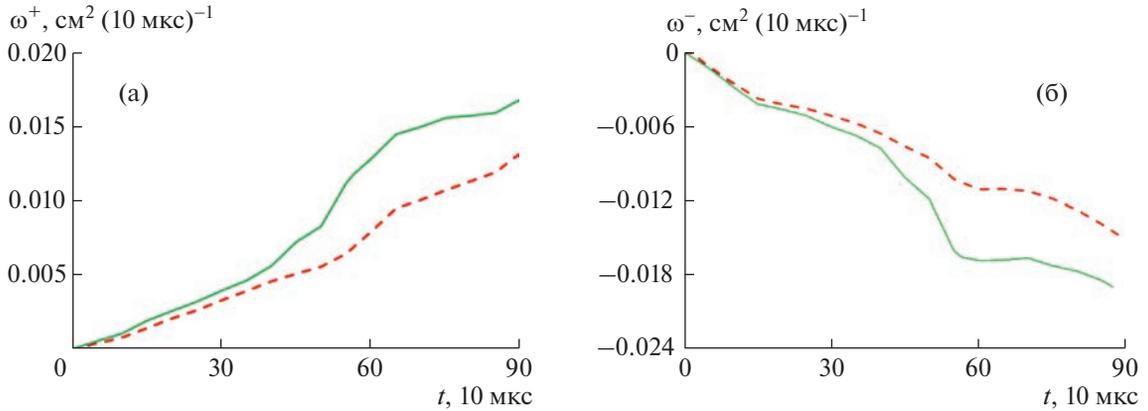


Фиг. 7. Поля функции  $F$  в расчете с использованием алгоритма VoF,  $M = 3$ : (а) —  $t = 10$  мкс, (б) —  $t = 20$  мкс.

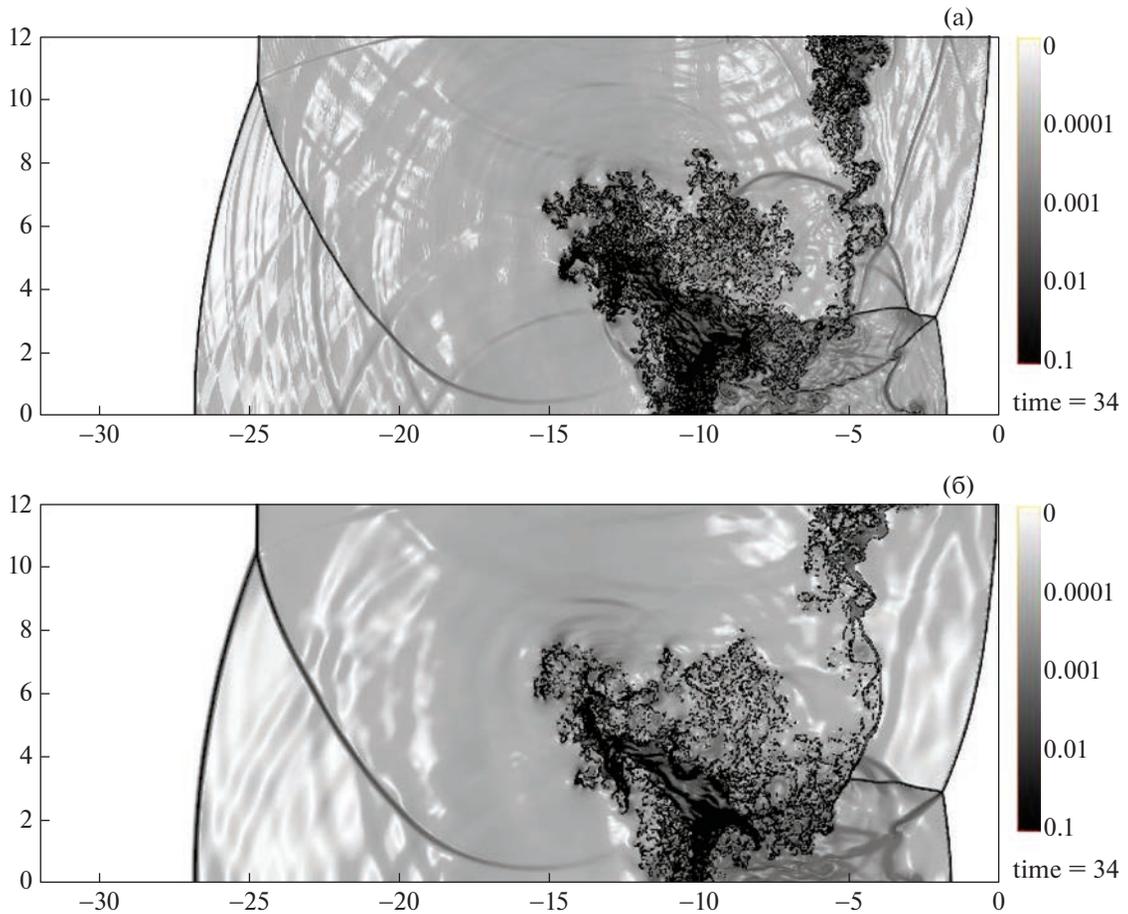


Фиг. 8. Поля функции  $F$ ,  $M = 1.3$ : (а) — расчет по алгоритму VoF, (б) — расчет по алгоритму MoF.

центральных областей удовлетворительно согласуются между собой и с экспериментальной информацией. Заметные различия наблюдаются на участке 2–3 границы, где после развития неустойчивости Кельвина–Гельмгольца формируется зона ТП. При сравнении эволюции завих-



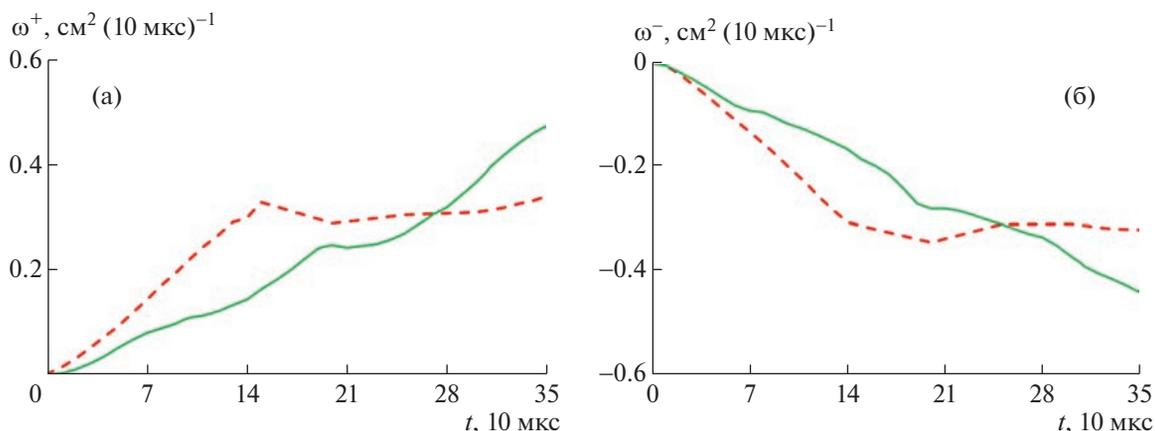
Фиг. 9. Эволюция завихренности (1),  $M = 1.3$ : (а) –  $\omega > 0$ , (б) –  $\omega < 0$ ; штриховые линии – расчет по алгоритму VoF, сплошные линии – расчет по алгоритму MoF.



Фиг. 10. Поля функции  $F$ ,  $M = 3$ : (а) – расчет по алгоритму VoF, (б) – расчет по алгоритму MoF.

ренности замечаем, что в расчете по алгоритму MoF завихренность потока выше, чем в расчете по VoF.

**Сравнение результатов, полученных по алгоритмам MoF и VoF,  $M = 3$ .** Для сравнения результатов расчетов используем поле функции  $F$  (фиг. 10) на момент времени  $t = 340$  мкс и график эволюции завихренности (фиг. 11). По информации фиг. 10 заключаем, что имеются некоторые рас-



**Фиг. 11.** Эволюция завихренности (1),  $M = 3$ : (а) —  $\omega > 0$ , (б) —  $\omega < 0$ ; штриховые линии — расчет по алгоритму VoF, сплошные линии — расчет по алгоритму MoF.

хождения в описании зоны перемешивания. Сравнивая фиг. 10а и 10б, замечаем, что в расчете по алгоритму VoF отслеживается больше волн слабой интенсивности, чем в расчете по алгоритму MoF. Также отмечаем, что в расчете с использованием алгоритма MoF абсолютное значение завихренности (фиг. 9) на последний момент времени выше, чем в расчете по алгоритму VoF.

**Замечание.** На протяжении всего времени расчета в зоне перемешивания газов отсутствуют УВ и, следовательно, генерация турбулентности происходит под действием градиентов средних газодинамических величин, не содержащих разрывов (отсутствует проблема сходимости решения на фронте скачка). Однако следует принять во внимание, что расчеты проводятся на сетке с квадратными ячейками (отсутствуют скошенные и вытянутые ячейки), что обеспечивает монотонность численного решения и препятствует появлению дополнительных погрешностей. Из детального анализа полученных результатов заключаем, что сходимость решения при измельчении сетки отсутствует по энтропии (при измельчении сетки моделируются все более мелкие вихри).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена новая стратегия моделирования газодинамических течений с учетом турбулентного перемешивания, возникающего на шероховатых контактных границах разноплотных веществ после прохождения ударной волны. Методика расчета основана на лагранжево-эйлеровой стратегии интегрирования уравнений Эйлера, выделении веществ концентрациями, использовании алгоритмов высокого порядка точности при реконструкции потоков на грани ячеек.

На основе разработанной стратегии моделировался лабораторный опыт, который представляет интерес для отработки технологии счета подобных задач по ряду причин. Во-первых, скорости роста начальных возмущений (и время перехода к стадии ТП) на различных участках первой контактной границы различны. Поэтому задача является прекрасным тестом для отработки алгоритма перехода от неустойчивости к турбулентному перемешиванию. Во-вторых, развитие возмущений (рост пузырей и струй) на обеих контактных границах происходит при участии неустойчивостей Рихтмайера–Мешкова и Кельвина–Гельмгольца, что довольно часто встречается в практических задачах (другие подобные опыты авторам не известны).

В результате анализа полученных в расчетах данных установлено, что без навязывания начальных возмущений на контактных границах развитие неустойчивости не наблюдается (за исключением участка наклонной контактной границы), что не согласуется с экспериментом. С навязанными двухмодовыми возмущениями форма центральной области и положение скачков в поле течения при числе Маха ударной волны  $M = 1.3$  удовлетворительно согласуются как между собой, так и с экспериментом. В окрестности контактных границ, где происходит наиболее интенсивное развитие неустойчивости, при использованной тактике моделирования задачи наблюдается лишь гетерогенное перемешивание (отсутствует турбулентная диффузия). Интенсивность перемешивания газов увеличивается при увеличении числа Маха ударной волны.

Для лучшего понимания физики перемешивания предполагается продолжить работы по совершенствованию как экспериментальных методов диагностики течения, так и численных алгоритмов. В частности, предполагается внедрить в методику МИМОЗА алгоритм учета турбулентной диффузии в зонах завихренности потока, т.е. в зонах, где происходит перемешивание веществ. Для более детального изучения влияния интенсивности ударной волны на развитие неустойчивости предполагается провести эксперимент при числе Маха ударной волны  $M = 3$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Янилкин Ю.В., Стаценко В.П., Козлов В.И. Математическое моделирование турбулентного перемешивания в сжимаемых средах. Саров: Изд-во ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ. Курс лекций, 2019. Т. 1. 358 с.
2. Groom M., Thornber B. The influence of initial perturbation power spectra on the growth of a turbulent mixing layer by Richtmyer–Meshkov instability // *Physica D*. 407. 2020. 132463.
3. Grinstein F.F. Initial conditions and modeling for simulations of shock driven turbulent material mixing // *Comput. Fluid*. 2017. V. 151. P. 58–72.
4. Haines B., Grinstein F., Schwarzkopf J. Reynolds-averages Navier-Stokes initialization and benchmarking in shock-driven turbulent mixing // *J. Turbulence*. 2013. V. 14. № 2. P. 46–70.
5. Gregoire O., Souffland D., Gauthier S. A second-order turbulence model for gaseous mixtures induced by Richtmyer–Meshkov instability // *J. Turbulence*. 2005. V. 6. № 92. P. 1–20.
6. Разин А. Н. Моделирование турбулентного перемешивания в газовых слоях. Саров: Изд-во ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2020. 289 с.
7. Gauthier S., Bonnet M. A  $K-\epsilon$  model for turbulent mixing in shock–tube flows induced by Rayleigh–Taylor instability // *Phys. Fluid*. 1990. V. 2. № 9. P. 1685–1684.
8. Sinha K., Mahesh K., Candler G. Modeling shock unsteadiness in shock/turbulence interaction // *Phys. Fluid*. 2003. V. 15. № 8. P. 2290–2297.
9. Grinstein F.F., Margolin L.G. and Rider W.J. editors. *Implicit Large Eddy Simulation: Computing Turbulent Flow Dynamics*, Cambridge Univ. Press, New York, 2007.
10. Бодров Е.В., Змушко В.В., Невмержицкий Н.В., Разин А.Н., Сеньковский Е.Д., Сотсков Е.А. Расчетно-экспериментальное исследование развития турбулентного перемешивания в газовой слоеке при прохождении ударной волны // *Изв. РАН. МЖГ*. 2018. № 3. С. 54–62.
11. Большакова А.Э., Змушко В.В., Невмержицкий Н.В., Разин А.Н., Сеньковский Е.Д., Сотсков Е.А. Численное моделирование развития неустойчивости на контактных границах трехслойной газовой системы. Сравнение с экспериментальными данными // *ПМТФ*. 2021. Т. 62. № 1. С. 43–54.
12. Drikakis D., Fureby C., Grinstein F., Youngs D. Simulation of transition and turbulence decay in the Taylor–Green vortex // *J. Turbulence*. 2007. V. 8. № 20. P. 1–12.
13. Ukai S., Balakrishnan K., Menon S. Growth rate predictions of single- and multi-mode Richtmyer–Meshkov instability with reshock // *Shock Wave*. 2011. V. 21. P. 533–546.
14. Olson B., Greenough J. Large eddy simulation requirements for Richtmyer–Meshkov instability // *Phys. Fluid*. 2014. V. 26. P. 044103.
15. Cohen R., Dannevik W., Dimits A., Eliason D., Mirin A.A., Zhou Ye, Porter D.H., Woodward P.R. Three-dimensional simulation of a Richtmyer–Meshkov instability with a two-scale initial perturbation // *Phys. Fluid*. 2002. V. 14. P. 3692–709.
16. Thornber B., Drikakis D., Williams R., Youngs D. The influence of initial conditions on turbulent mixing due to Richtmyer–Meshkov instability // *J. Fluid. Mech*. 2010. 654. P. 99–139.
17. Grinstein F., Gowardhan A., Wachtor A. Simulations of Richtmyer–Meshkov instabilities in planar shock-tube experiments // *Phys. Fluid*. 2011. V. 23. P. 034106.
18. Gowardhan A., Grinstein F. Numerical simulation of Richtmyer–Meshkov instabilities in shocked gas curtains // *J. Turbulence*. 2011. V. 12. № 43. P. 1–24.
19. Змитренко Н.В., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Численное исследование турбулентного перемешивания для одной задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова // *ВАНТ. Сер.: Матем. моделир. физ. процессов*. 2004. Вып. 1. С. 12–26.
20. Синькова О.Г., Стаценко В.П., Янилкин Ю.В. Численное моделирование опыта по исследованию турбулентного перемешивания после неоднократного прохождения ударной волны через границу раздела // *ВАНТ. Сер.: Теор. и прикл. физ.* 2004. Вып. 3. С. 17–22.
21. Hahn M., Drikakis D., Youngs D., Williams R. Richtmyer–Meshkov turbulent mixing arising from an inclined material interface with realistic surface perturbations and reshocked flow // *Phys. Fluid*. 2011. V. 23. P. 046101.
22. Невмержицкий Н.В. Гидродинамические неустойчивости и турбулентное перемешивание веществ. Лабораторное моделирование. Саров: Всерос. науч.-исслед. ин-т эксперим. физики, 2018. 245 с.

23. Змушко В.В., Плетенёв Ф.А., Сараев В.А., Софронов И.Д. Методика решения трехмерных уравнений газовой динамики в смешанных лагранжево-эйлеровых координатах // ВАНТ. Сер. Методики и программы числ. решения задач матем. физ. 1988. Вып. 1. С. 22–27.
24. Софронов И.Д., Афанасьева Е.А., Винокуров О.А., Воропинов А.И., Змушко В.В., Плетенев Ф.А., Рыбаченко П.В., Сараев В.А., Соколова Н.В., Шамраев Б.Н. Комплекс программ МИМОЗА для решения многомерных задач механики сплошной среды на ЭВМ “Эльбрус-2” // ВАНТ. Сер. Матем. моделир. физ. процессов. 1990. Вып. 2. С. 3–9.
25. Zmushko V. V. Computation of convective flows and their realization in MIMOZA code // Proceedings International Workshop “New Models of Numerical Codes for Shock Wave Processes in Condensed Media” / Oxford / September 15–19. 1997. P. 423–429.
26. Ладагин В.К., Пастушенко А.М. Об одной схеме расчета газодинамических течений // Численные методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8. № 2. С. 66–72.
27. Benson D.J. Volume of fluid interface reconstruction methods for multi-material problems. // Appl. Mech. Rev. 2002. V. 55. № 2. P. 151–165.
28. Dyadechko V., Shashkov M. Multi-material interface reconstruction from the moment data. Technic. Rep. LA-UR-07-0656, LANL. 2006.
29. Pilliod J.E., Puckett E.G. Second order accurate volume-of-fluid algorithms for tracking material interfaces // J. Comput. Phys. 2004. V. 199. P. 465–502.
30. Richtmyer R.D. Taylor Instability in shock acceleration of compressible fluids // Commun. Pure Appl. Math. 1960. V. 13. P. 297–319.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 519.632.4

“БЫСТРОЕ” РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЭЛАСТОГРАФИИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА  
МАЛОГО ПАРАМЕТРА<sup>1)</sup>

© 2023 г. А. С. Леонов<sup>1,\*</sup>, Н. Н. Нефедов<sup>2,\*\*</sup>, А. Н. Шаров<sup>2,\*\*\*</sup>, А. Г. Ягола<sup>2,\*\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> 115409 Москва, Каширское ш., 31, НИЯУ “МИФИ”, Россия

<sup>2</sup> 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Россия

\*e-mail: asleonov@mephi.ru

\*\*e-mail: nefedov@phys.msu.ru

\*\*\*e-mail: scharov.aleksandr@physics.msu.ru

\*\*\*\*e-mail: yagola@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 19.09.2022 г.

Переработанный вариант 19.09.2022 г.

Принята к публикации 17.11.2022 г.

Рассматриваются прямая и обратная задачи трехмерной квазистатической эластографии — метода онкологической диагностики. Они основаны на модели исследуемой биологической ткани, подвергаемой поверхностному сжатию, деформации в которой подчиняются законам линейной теории упругости. Возникающие трехмерные смещения ткани описываются краевой задачей для уравнений в частных производных с коэффициентами, которые определяются переменным модулем Юнга и постоянным коэффициентом Пуассона. Краевая задача содержит малый параметр, что позволяет решить ее с помощью теории регулярных возмущений уравнений в частных производных. Это составляет прямую задачу. Обратная задача состоит в нахождении распределения модуля Юнга по известным смещениям ткани. Значительное превышение величины модуля Юнга в некоторой области ткани является признаком возможной онкологии. В статье при некоторых предположениях выписываются простые формулы для решения как прямой, так и обратной задачи трехмерной квазистатической эластографии. Представлены результаты численных экспериментов по приближенному решению трехмерных обратных модельных задач с помощью предлагаемых формул. Полученные приближенные решения достаточно хорошо воспроизводят точные модельные решения. Расчеты по формулам требуют лишь несколько десятков миллисекунд на персональном компьютере средней производительности для достаточно мелких сеток, и поэтому предлагаемый подход с использованием малого параметра может быть применен при онкологической диагностике в реальном времени. Библ. 19. Фиг. 9. Табл. 1.

**Ключевые слова:** трехмерная квазистатическая эластография, обратные задачи, метод малого параметра.

**DOI:** 10.31857/S0044466923030092, **EDN:** DZYZSM

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При онкологической диагностике в последние десятилетия все чаще используются методы медицинской визуализации, составляющие новое направление — *эластографию* (см. [1–5] и др.). Эластографические методы основаны на различиях в механических характеристиках (например, в значениях модуля Юнга) здоровых и опухолевых биологических тканей определенных типов. Для иллюстрации приведем следующую таблицу из [6].

Эластографические методы позволяют определить распределения модулей упругости в ткани по ее деформациям в результате внешних сжатий и тем самым выделить подозрительные на онкологию области с повышенными значениями модулей упругости. Некоторые из этих методов уже внедрены в диагностическую практику, а другие, кажущиеся весьма перспективными, находятся в стадии разработки. К числу последних относится так называемая *квазистатическая эла-*

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 18-11-00042).

**Таблица 1.** Значения модуля Юнга  $E$  для некоторых биологических тканей

Здоровая ткань	$E$ , кПа	Ткань с патологией	$E$ , кПа
Печень нормальная	0.4–6	Печень циррозная	15–100
Простата нормальная	55–70	Карцинома простаты	90–240
Молочная железа: норма	18–24	Молочная железа: карцинома	22–560

*стография.* Она состоит в воздействии на исследуемую часть тела постоянными поверхностными силами, в измерении (или вычислении) возникающих смещений исследуемой биологической ткани, в определении модулей упругости ткани путем решения обратной задачи: “по смещениям найти модули” и в трехмерной визуализации распределений этих модулей.

Деформации (смещения) тканей определяются по данным ультразвуковых исследований или с помощью магнитно-резонансного метода. Принципиальным моментом в такой схеме является решение обратной математической задачи в рамках некоторой модели биологической ткани.

Разработано множество таких моделей различного уровня сложности. Так как зачастую указанные обратные задачи решаются с использованием различной вычислительной техники (персональные компьютеры, вычислительные кластеры, суперкомпьютеры и т.д.), то наиболее перспективными для практической диагностики являются те математические модели, в которых обратные задачи могут быть решены в реальном времени или близко к нему. Поэтому возникают ограничения на модели такого рода. С одной стороны, они должны адекватно отражать соответствующие процессы в биологических тканях, а с другой стороны – быть как можно более простыми с точки зрения математики, давая возможность постановки не очень сложной обратной задачи определения механических характеристик тканей.

Большое распространение получили двумерная и трехмерная эластографические модели, основанные на уравнениях квазистатической теории упругости (см. [5–8]). В них участок исследуемой ткани, характеризуемый распределениями механических модулей, представляется как линейно-упругое изотропное тело, подвергаемое малым поверхностным сжатиям. Решение обратной задачи для таких моделей позволяет найти по известным смещениям ткани распределение этих модулей в рассматриваемой области и, тем самым, найти характерные онкологические включения с повышенным значением модулей. Известно, что трехмерная квазистатическая модель адекватно описывает исследуемые ткани, но обратная задача поиска механических модулей для нее оказывается чрезвычайно трудоемкой. Многочисленные численные эксперименты показали, что для решения трехмерной обратной задачи на персональном компьютере (ПК) средней производительности требуются десятки часов (см. [7–11]). Поэтому решить ее в реальном времени невозможно. Именно по этой причине в настоящее время наиболее интенсивно изучаются двумерные постановки обратных задач квазистатической эластографии, в которых трехмерная биологическая ткань моделируется ее двумерными сечениями (см., например, [5], [7], [9], [12] и др.). Однако даже в двумерных постановках нахождение распределений модулей упругости на ПК требует значительного времени (от десятков минут до часов). Отметим также, что при использовании двумерных постановок обратных задач эластографии (например, в рамках модели плоского деформированного состояния “plane strain”) в сечениях исследуемой ткани могут появляться расчетные ложные включения и другие артефакты (см. [13]).

Таким образом, для эластографии весьма актуальна модификация упомянутой модели квазистатической теории упругости с целью ее возможного упрощения. Оказалось, это можно сделать, учитывая, что соответствующие дифференциальные уравнения модели содержат малый параметр. Соответствующее исследование было проведено для двумерного случая в работе [14], где обратная задача была решена с помощью теории регулярных возмущений уравнений в частных производных. Была получена простая формула, позволяющая решать двумерную обратную задачу на ПК за десятки микросекунд на достаточно подробных сетках. Возникает вопрос: можно ли сделать нечто подобное для трехмерных задач эластографии? Ответ на это положителен, и данная статья посвящена развитию метода малого параметра для решения трехмерных обратных задач эластографии с целью применения к онкологической диагностике в реальном времени.

2. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ТРЕХМЕРНОЙ ЭЛАСТОГРАФИИ

Будем считать, что исследуемый участок биологической ткани моделируется областью (слоем)  $\Omega = [-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty] \times [0, c] \subset R_{xyz}^3$  с границами

$$G_1 = \{(x, y, z): (x, y) \in R_{xy}^2, z = 0\}, \quad G_2 = \{(x, y, z): (x, y) \in R_{xy}^2, z = c\},$$

а сама ткань характеризуется распределением модуля Юнга  $E = E(x, y, z)$  и постоянным коэффициентом Пуассона  $\nu = 0.495$ . Этот слой подвергается на верхней поверхности  $G_2$  воздействию направленной вертикально вниз распределенной силы, а нижняя поверхность слоя  $G_1$  неподвижна. Такие предположения характерны для постановок задач трехмерной эластографии (см., например, [12]). В предположениях выполнения для тела  $\Omega$  линейной теории упругости (см., например, [5–9]) связь смещений ткани  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  (по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно) с распределением модуля Юнга и коэффициентом Пуассона описывается системой уравнений в частных производных:

$$\begin{aligned} & \frac{(1-2\nu)}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (E\theta) + \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ & \quad + \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left( E \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left( E \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0, \\ & \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{(1-2\nu)}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} (E\theta) + \\ & \quad + \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left( E \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left( E \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0, \\ & \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & \quad + \frac{(1-2\nu)}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( E \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\nu}{(1+\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (E\theta) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ . Считаются также выполненными граничные условия: на  $G_2$

$$\begin{aligned} & \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ 2 \left( (1-2\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu\theta \right) n_x + (1-2\nu) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y + (1-2\nu) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_z \right] = 0, \\ & \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_x + 2 \left( (1-2\nu) \frac{\partial v}{\partial y} + \nu\theta \right) n_y + (1-2\nu) \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_z \right] = 0, \\ & \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) n_x + (1-2\nu) \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) n_y + 2 \left( (1-2\nu) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu\theta \right) n_z \right] = f_z, \end{aligned} \tag{2}$$

и на  $G_1$ :  $u = v = w = 0$ . Здесь  $(n_x = 0, n_y = 0, n_z = -1) = n$  – нормаль к  $G_2$ , а  $f_z = f_z(x, y)$  есть вертикальная компонента давления на поверхность  $G_2$ . Определение смещений  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$  по известным коэффициентам  $E(x, y, z)$ ,  $\nu$  составляет *прямую задачу* трехмерной квазистатической эластографии. Если слой  $\Omega$  конечен, т.е. представляется параллелепипедом  $[-a, a] \times [-b, b] \times [0, c]$  с теми же граничными условиями на верхней и нижней поверхностях и с условиями свободных боковых сторон, то при условиях  $f_z(x, y) \in C^1(G_2)$ ,  $E(x, y, z) \in C^1(\bar{\Omega})$  и  $0 < E_1 \leq E(x, y, z) \leq E_2$  прямая задача однозначно разрешима на классе функций  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z) \in W_2^1(\Omega)$  (см., например, [15, гл. 2, 11], где получены более общие результаты). Здесь  $E_{1,2}$  – известные константы. Случай бесконечной области будет изучен ниже. Соответствующие *обратные задачи* эластографии, с качественной точки зрения, заключаются в нахождении распределения модуля Юнга  $E(x, y, z)$  по известным смещениям или функционалам от них (см. [5–12]). Детализация постановки обратной задачи будет рассмотрена в следующих разделах.

Равенства (1), (2) содержат величину  $\varepsilon = 1/2 - \nu \approx 0.005$  ( $2\varepsilon \approx 0.01$ ), которую мы будем считать малым параметром. Тогда уравнения (1) можно переписать в форме

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(E\theta) &= -\frac{\varepsilon}{\nu} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial y}(E\theta) &= -\frac{\varepsilon}{\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( E \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial z}(E\theta) &= -\frac{\varepsilon}{\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( E \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( E \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\},\end{aligned}\quad (3)$$

где  $(x, y, z) \in \Omega \setminus \partial\Omega$ , а граничные условия (2) – в виде

$$\begin{aligned}E(x, y, z) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{z=c} &= 0, & E(x, y, z) \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big|_{z=c} &= 0, \\ E(x, y, z) \left( \theta + \frac{2\varepsilon \partial w}{\nu \partial z} \right) \Big|_{z=c} &= -\frac{(1+\nu)}{\nu} f_z \Big|_{z=c}.\end{aligned}\quad (4)$$

При этом по-прежнему выполнены условия на  $G_1$ :  $u|_{z=0} = v|_{z=0} = w|_{z=0} = 0$ . В дальнейшем правую часть последнего равенства в (4), связанную с давлением на  $G_2$ , будем обозначать как

$$F(x, y) = -\frac{(1+\nu)}{\nu} f_z(x, y).$$

Как уже отмечалось, в практических приложениях прямой и обратной задачи эластографии нужно получать решение *быстро и достаточно точно*. Только тогда соответствующий алгоритм можно использовать в реальной диагностике. Однако даже численное решение трехмерной прямой задачи (1), (2), основанное на методе конечных элементов или на сеточных методах, весьма трудоемко для сравнительно подробных сеток и требует десятков минут, а иногда и часов, расчетов на ПК средней производительности. Для решения обратной задачи требуются уже десятки часов, и только решение обратной задачи на специальных параметрических классах несколько уменьшает это время (см., например, [13]). В настоящей работе мы предлагаем метод приближенного решения прямой задачи как системы уравнений в частных производных с малым параметром. Этот подход позволяет при определенных дополнительных предположениях получить простые аналитические формулы для решений, которые можно использовать для “быстрого” приближенного решения обратной задачи.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ МЕТОДА МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Запишем уравнения (3), (4) в операторной форме. Для этого введем векторную функцию  $U = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ , в которой  $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z) \in W_2^2(\Omega)$ . Определим дифференциальные операторы, действующие из  $W = W_2^2(\Omega) \times W_2^2(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$  в  $L_2 = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ , предполагая, что гладкость коэффициента  $E(x, y, z)$  это гарантирует:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(U) &= \left( \frac{\partial}{\partial x}(E\theta), \frac{\partial}{\partial y}(E\theta), \frac{\partial}{\partial z}(E\theta) \right)^T, \\ \mathcal{L}_1(U) &= \frac{1}{\nu} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( E \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( E \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( E \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Определим также дифференциальные операторы, определяющие граничные условия:

$$\ell_0(U) = \left( \begin{array}{c} E(x, y, z) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ E(x, y, z) \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ E(x, y, z) \theta \end{array} \right) \Big|_{z=c}, \quad \ell_1(U) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{v} E(x, y, z) \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right) \Big|_{z=c}.$$

Тогда прямую задачу можно записать в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(U) &= -\varepsilon \mathcal{L}_1(U), \quad (x, y, z) \in \Omega, \\ \ell_0(U) &= -\varepsilon \ell_1(U) + (0, 0, F(x, y))^T, \quad (x, y) \in R_{xy}^2, \\ U|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Решая задачу (5) формально по методу малого параметра для регулярных возмущений (см., например, [16], [17]), получим  $U(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(x, y, z)$ . Здесь векторные функции  $U_n(x, y, z)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , суть решения задач

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(U_0) &= 0, \quad (x, y, z) \in \Omega, \\ \ell_0(U_0) &= (0, 0, F(x, y))^T, \quad (x, y) \in R_{xy}^2, \\ U_0|_{z=0} &= 0; \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(U_{n+1}) &= -\mathcal{L}_1(U_n), \quad (x, y, z) \in \Omega, \\ \ell_0(U_{n+1}) &= -\ell_1(U_n), \quad (x, y) \in R_{xy}^2, \quad n = 0, 1, \dots, \\ U_{n+1}|_{z=0} &= 0, \end{aligned} \tag{7}$$

в классе функций  $W$  с нормой  $\|U\|_W^2 = \|u\|_{W^2}^2 + \|v\|_{W^2}^2 + \|w\|_{W^2}^2$ .

Если известно, что задачи (6), (7) однозначно разрешимы, то можно ввести линейный оператор  $P(U)$  решения задач (7), и тогда

$$\begin{aligned} U_1 &= P(U_0), \quad U_2 = P(U_1) = P^2(U_0), \dots, U_n = P^n(U_0), \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow U &= U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n P^n(U_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n P^n(U_0). \end{aligned} \tag{8}$$

Ряд Неймана (8) сходится к решению задачи (3), (4) если  $\varepsilon \|P(U_0)\|_W < 1$  (см., например, [17]). В этом случае для приближенного решения прямой задачи надо решить задачу для  $U_0$  и затем проделать несколько итераций по вычислению величин  $U_n = P(U_{n-1})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Однако эта формальная схема уже для нулевого приближения  $U_0 = (u_0, v_0, w_0)$  сталкивается с проблемой неоднозначности решения. Действительно, из задачи для  $U_0$  получим:

$$\frac{\partial}{\partial x}(E\theta_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y}(E\theta_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(E\theta_0) = 0, \quad \theta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}, \tag{9}$$

и поэтому  $E\theta_0 = F_0 = \text{const} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$ . С другой стороны, из граничного условия  $\ell_0(U_0) = (0, 0, F(x, y))^T$ ,  $(x, y) \in R_{xy}^2$ , следует:  $E(x, y, z)\theta_0|_{z=c} = F_0 = F(x, y)$ . Поэтому задача для нулевого приближения разрешима только при условии  $F(x, y) = F_0 = \text{const}$ . Заметим также, что задача (9) для трех компонент нулевого приближения  $U_0$  свелась лишь к одному уравнению:  $\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} = \frac{F_0}{E}$ , и это делает данную задачу недоопределенной даже при условии  $F(x, y) = F_0$ . Таким образом, формальная схема метода малого параметра не реализуема здесь без специальных дополнительных предположений о компонентах решения. Аналогичные проблемы возникают и при решении задач для  $U_n$ ,  $n > 0$ .

#### 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Сформулируем группу предположений, используемых в версии метода малого параметра, которую мы будем применять.

**Модельные предположения.** а)  $F(x, y) = F_0 = \text{const}$  для любых  $(x, y) \in R_{xy}^2$ ; б) величины  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$  “малы”: формально  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z) = 0$ ,  $(x, y, z) \in \Omega$ ; в)  $E(x, y, z) \in C^2(\Omega)$ ,  $E(x, y, z) > 0$  и выполнены условия

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{E(x, y, z)} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{1}{E(x, y, z)} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{E(x, y, z)} \right) = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega. \quad (10)$$

Полагая  $U_0 = (u_0, v_0, w_0)^T$ , получим из (9) и (6) для нулевого приближения  $w_0$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega,$$

$$\left( E(x, y, z) \frac{\partial w_0}{\partial z} \right)_{z=c} = F_0, \quad (x, y) \in R_{xy}^2; \quad w_0(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in R_{xy}^2.$$

Отсюда выводим

$$E(x, y, z) \frac{\partial w_0}{\partial z} = F_0, \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega}; \quad w_0(x, y, 0) = 0. \quad (11)$$

Поэтому нулевое приближение вертикального смещения есть

$$w_0(x, y, z) = F_0 \int_0^z \frac{d\zeta}{E(x, y, \zeta)}. \quad (12)$$

Формулы (12) и (11) можно использовать при решении прямой и обратной задачи эластографии в нулевом приближении.

Кроме того, из граничного условия  $\ell_0(U_0) = (0, 0, F_0)^T$ ,  $(x, y) \in R_{xy}^2$ , получается связь смещений  $u_0(x, y, z)$ ,  $v_0(x, y, z)$  и  $w_0(x, y, z)$ :

$$\left( \frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \Big|_{z=c} = 0, \quad \left( \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \Big|_{z=c} = 0. \quad (13)$$

Из предположения б) следует также, что операторы  $L_0(U)$  и  $L_1(U)$  можно записать как

$$L_0(w) = \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial w}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial w}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left( E \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right)^T,$$

$$L_1(U) = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( E \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( E \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( E \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{pmatrix},$$

и, получающаяся из (7) задача для  $U_1 = (u_1(x, y, z), v_1(x, y, z), w_1(x, y, z))$  – следующего приближения, имеет вид

$$\begin{aligned} L_0(w_1) &= -L_1(U_0), \quad U_0 = (u_0, v_0, w_0), \\ \ell_0(U_1) &= -\ell_1(U_0), \quad (x, y) \in R_{xy}^2, \\ U_1|_{z=0} &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

и снова оказывается недоопределенной, так как не заданы  $u_0(x, y, z)$ ,  $v_0(x, y, z)$ . В дальнейшем мы доопределим эту задачу, используя следующую лемму.

**Лемма 1.** Если при сделанных модельных предположениях в) функции  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  подчиняются равенствам

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w_0}{\partial y}, \quad u|_{z=0} = v|_{z=0} = 0, \tag{15}$$

то  $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$  в  $\Omega$ .

**Доказательство.** Из равенств (15) получим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^z \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, \zeta) d\zeta = -\int_0^z \frac{\partial w_0}{\partial x}(x, y, \zeta) d\zeta, \\ v(x, y, z) &= \int_0^z \frac{\partial v}{\partial z}(x, y, \zeta) d\zeta = -\int_0^z \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, y, \zeta) d\zeta. \end{aligned} \tag{16}$$

Отсюда, с учетом вида (12) функции  $w_0$  и свойств в) функции  $E$ , следует

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2 \int_0^z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}(x, y, \zeta) d\zeta = -2F_0 \int_0^z d\zeta \int_0^\zeta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{1}{E(x, y, \xi)} \right) d\xi = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega.$$

Но должны также выполняться равенства  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z) = 0$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}(x, y, z) = 0$ ,  $(x, y, z) \in \Omega$ . Проверим это для одной из производных, снова учитывая предположения (10) о  $E$  и формулы (16):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\int_0^z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}(x, y, \zeta) d\zeta = -F_0 \int_0^z d\zeta \int_0^\zeta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{E(x, y, \xi)} \right) d\xi = 0 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega.$$

Аналогичное равенство получается и для другой производной. Лемма 1 доказана.

Подчеркнем, что в лемме доказано следующее: при условиях (15) предположения б) вытекают из в). Из условий (15) и самой леммы 1 также ясно, что для фигурирующих в ней функций  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  и для элемента  $U = (u, v, w_0)$  справедливы равенства

$$L_1(U) = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( E \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( E \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \end{pmatrix} = \frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \frac{\partial}{\partial z} \left( E \frac{\partial w_0}{\partial z} \right) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\ell_0(U) = \begin{pmatrix} E(x, y, z) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ E(x, y, z) \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ E(x, y, z) \frac{\partial w_0}{\partial z} \end{pmatrix} \Bigg|_{z=c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E(x, y, z) \frac{\partial w_0}{\partial z} \end{pmatrix} \Bigg|_{z=c}. \tag{18}$$

Основываясь на этом, доопределим процесс вычисления приближений по методу малого параметра следующим образом. Вычислим  $w_0$  по формуле (12). Затем выберем  $u_0, v_0$  так, что они удовлетворяют условиям (15):

$$u_0(x, y, z) = -\int_0^z \frac{\partial w_0}{\partial x} dz, \quad v_0(x, y, z) = -\int_0^z \frac{\partial w_0}{\partial y} dz.$$

Тогда по лемме 1 и в силу равенств (17), (18) задача (14) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) = -\frac{2}{v} \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial w_0}{\partial z} \right), \quad (x, y, z) \in \Omega \setminus \partial\Omega, \\ E(x, y, z) \frac{\partial w_1}{\partial z} \Big|_{z=c} &= -\frac{2}{v} E(x, y, z) \frac{\partial w_0}{\partial z} \Big|_{z=c}, \end{aligned}$$

и ее решение есть  $w_1 = -\frac{2}{v} w_0$ . Далее, задавая  $u_1, v_1$  в форме  $u_1 = -\frac{2}{v} u_0, v_1 = -\frac{2}{v} v_0$ , мы получим функции, для которых снова выполнены условия (15): действительно,

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{2}{v} \frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{2}{v} \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{v} w_0 \right) = -\frac{\partial w_1}{\partial x}$$

и аналогично  $\frac{\partial v_1}{\partial z} = -\frac{\partial w_1}{\partial y}$ . Поэтому по лемме 1 для функций  $u_1, v_1$  также получаются равенства  $\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0$ . Тогда, согласно (7) и равенствам (17), (18), получаем задачу для  $w_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) = -\frac{2}{v} \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial w_1}{\partial z} \right), \quad (x, y, z) \in \Omega \setminus \partial\Omega, \\ E(x, y, z) \frac{\partial w_2}{\partial z} \Big|_{z=c} &= -\frac{2}{v} E(x, y, z) \frac{\partial w_1}{\partial z} \Big|_{z=c}, \end{aligned}$$

аналогичную по форме задаче для  $w_1$ . Поэтому  $w_2 = -\frac{2}{v} w_1 = \left(-\frac{2}{v}\right)^2 w_0$ . Далее, можно взять  $u_2 = -\frac{2}{v} u_1 = \left(-\frac{2}{v}\right)^2 u_0, v_2 = -\frac{2}{v} v_1 = \left(-\frac{2}{v}\right)^2 v_0$  и аналогичным образом вычислить  $w_3$  и т.д. В результате этого процесса получают функции  $w_n = \left(-\frac{2}{v}\right)^n w_0, u_n = \left(-\frac{2}{v}\right)^n u_0, v_n = \left(-\frac{2}{v}\right)^n v_0, n = 0, 1, \dots$ , и решение прямой задачи по методу малого параметра в форме (8) принимает вид

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left(-\frac{2}{v}\right)^n w_0 = \frac{w_0}{1 + \frac{2\varepsilon}{v}}, \quad \frac{2\varepsilon}{v} = \frac{0.01}{0.495} \approx 0.02.$$

Отсюда и из (12), (11) получим

$$w(x, y, z) = \frac{F_0}{1 + \frac{2\varepsilon}{v}} \int_0^z \frac{d\zeta}{E(x, y, \zeta)}, \quad (19)$$

а также

$$E(x, y, z) = \frac{F_0}{\left(1 + \frac{2\varepsilon}{v}\right) \frac{\partial w}{\partial z}}, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (20)$$

и эти формулы можно использовать при решении прямой и обратной задач эластографии для рассматриваемой модели. Аналогично можно найти и функции  $u, v$ :

$$u = \frac{u_0}{1 + \frac{2\varepsilon}{\nu}}, \quad v = \frac{v_0}{1 + \frac{2\varepsilon}{\nu}}. \quad (21)$$

Важным свойством решения  $w$  является то, что оно отличается от  $w_0$  на постоянный нормирующий множитель. Это значит, что при практической визуализации нулевое приближение будет отличаться от решения лишь “яркостью”, имея те же структурные особенности изображения. Это важно, так как при эластографической диагностике часто нужно знать не абсолютные значения модуля Юнга, а отношение  $E(x, y, z)/E_0$ , где  $E_0$  – характерная величина модуля Юнга здоровой ткани. Существенное превышение единицы для такого отношения есть признак, на который следует обратить внимание при диагностике.

### 5. РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотренная модель биологической ткани как бесконечного слоя является весьма идеализированной, хотя полученная формула для решения прямой и обратной задач весьма удобна для практического приложения. Оказывается, что эта формула верна и для конечной области – параллелепипеда  $\Omega_0 = [-a, a] \times [-b, b] \times [0, c]$ , если сделать дополнительное предположение о давлениях на поверхностях  $x = \pm a, y = \pm b$ , т.е. задать граничные условия на этих поверхностях в виде

$$\begin{aligned} \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ 2 \left( (1-2\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \theta \right) n_x + (1-2\nu) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y + (1-2\nu) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_z \right] &= \bar{f}_x, \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) n_x + 2 \left( (1-2\nu) \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \theta \right) n_y + (1-2\nu) \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_z \right] &= \bar{f}_y, \\ \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ (1-2\nu) \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) n_x + (1-2\nu) \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) n_y + 2 \left( (1-2\nu) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \theta \right) n_z \right] &= \bar{f}_z, \end{aligned} \quad (22)$$

со специальными  $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ . Здесь  $n_x, n_y, n_z$  – соответственно взятые компоненты внутренних нормалей к граням  $x = \pm a, y = \pm b$  параллелепипеда. На гранях  $z = 0, z = c$  сохраняются условия (2).

**Теорема 1.** Пусть предположения в) выполнены в  $\Omega_0$ . Если функции  $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$  в граничных условиях (22) имеют вид

$$\bar{f}_x|_{x=\pm a} = \mp F_1, \quad \bar{f}_y|_{x=\pm a} = 0, \quad \bar{f}_z|_{x=\pm a} = 0, \quad \bar{f}_x|_{y=\pm b} = 0, \quad \bar{f}_y|_{y=\pm b} = \mp F_1, \quad \bar{f}_z|_{y=\pm b} = 0, \quad (23)$$

где  $F_1 = \frac{\nu F_0}{(1+\nu) \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{\nu} \right)}$ , то функции  $u, v, w$ , вычисляемые по формулам (19), (20), являются решением задачи (1), (2) в области  $\Omega_0$ .

**Доказательство.** Так как функции  $u, v, w \in C^2(\Omega)$  удовлетворяют уравнениям (3) и граничным условиям (4) в области  $\Omega_0$ , а значит, и в области  $\Omega_0, \Omega_0 \subset \Omega$ , то для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение граничных условий (22) для указанных значений величин  $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ . Например, на поверхности  $x = a$  с  $n_x = -1, n_y = 0, n_z = 0$ , эти условия имеют вид

$$\begin{aligned} -\frac{E}{(1+\nu)} \left( (1-2\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \theta \right)_{x=a} &= \bar{f}_x|_{x=a}, \quad -\frac{E(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=a} = \bar{f}_y|_{x=a}, \\ -\frac{E(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{x=a} &= \bar{f}_z|_{x=a}. \end{aligned}$$

Для функций  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , представленных формулами (19), (21), верны предположения и заключение леммы 1. Используя это, получим из последних формул:

$$\left( \frac{Ev}{(1+v)} \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{x=a} = - \frac{vF_0}{(1+v) \left( 1 + \frac{2\varepsilon}{v} \right)} = -F_1 = \bar{f}_x|_{x=a}, \quad 0 = \bar{f}_y|_{x=a}, \quad 0 = \bar{f}_z|_{x=a}.$$

Таким образом, граничные условия (22) на этой поверхности выполнены с указанными в (23) величинами  $\bar{f}_x$ ,  $\bar{f}_y$ ,  $\bar{f}_z$ . Аналогично проверяются и другие граничные условия. Поэтому функции  $u$ ,  $v$ ,  $w$  из формул (19), (21) удовлетворяют условиям прямой задачи в области  $\Omega_0$  и, значит, представляют единственное ее решение для коэффициентов  $E(x, y, z)$ , подчиненных предположениям в). Теорема 1 доказана.

В заключение этого раздела выясним, какой смысл имеют предположения (10) о модуле Юнга.

**Теорема 2.** Если в области  $\Omega$  (или  $\Omega_0$ ) выполнены условия в), то функция  $E$  имеет там вид

$$E = \frac{1}{A(z)x + B(z)y + C(z)},$$

где  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $C(z)$  – некоторые функции класса  $C^2[0, c]$ .

Для доказательства достаточно выписать хорошо известные общие решения каждого из уравнений (10) и убедиться, что система этих уравнений имеет общее решение  $1/E = A(z)x + B(z)y + C(z)$ .

## 6. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО РЕШЕНИЮ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ

В этом разделе мы изучим на типичных примерах, насколько точно формула (19) для смещений  $w$ , полученная при довольно жестких предположениях о модуле Юнга и об исследуемой области, позволяет решать обратную задачу в конечной области и для распределений модуля Юнга, которые могут и не подчиняются предположениям (10). Во всех рассматриваемых задачах величины  $E$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  выражены в паскалях и метрах соответственно.

Для всех примеров используем следующую схему численных экспериментов по решению обратных задач.

А) Задачи решаем в конечном параллелепипеде  $\Omega_1 = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ .

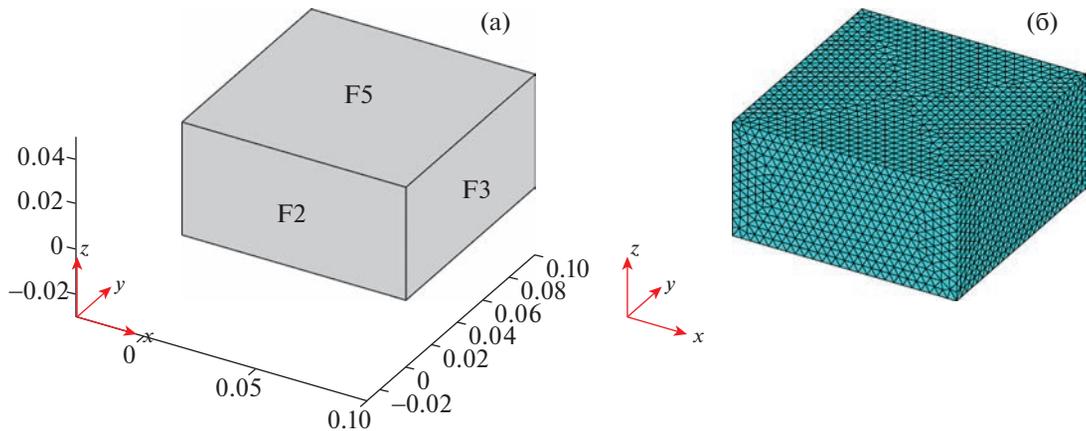
Б) Задаем “точное” (модельное) распределение модуля Юнга  $E$  в области  $\Omega_1$ . Решаем для этого  $E$  краевую задачу (1) в области  $\Omega_1 \setminus \partial\Omega_1$  с граничным условием (2) на поверхности  $z = c$  при  $f_z = \frac{vF_0}{(1+v)}$ ,  $F_0 = 10^3$ , с условием  $u = v = w = 0$  на границе  $z = 0$  и с условием типа (22) при  $\bar{f}_x = \bar{f}_y = \bar{f}_z = 0$  на границах  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$  (свободные границы). Для решения такой прямой задачи применяем метод конечных элементов на достаточно подробной сетке. В результате получают распределения смещений в области  $\Omega_1$ . Найденные таким путем смещения  $w(x, y, z)$  мы будем считать “точными данными” для решения обратной задачи.

В) Решаем обратную задачу по методу малого параметра, т.е. с использованием формулы (19) для нахождения  $w(x, y, z)$ . Производная в формуле вычисляется в случае приближенных данных с помощью известных методов регуляризации на сетке по переменной  $z$  (см., например, [18], [19]).

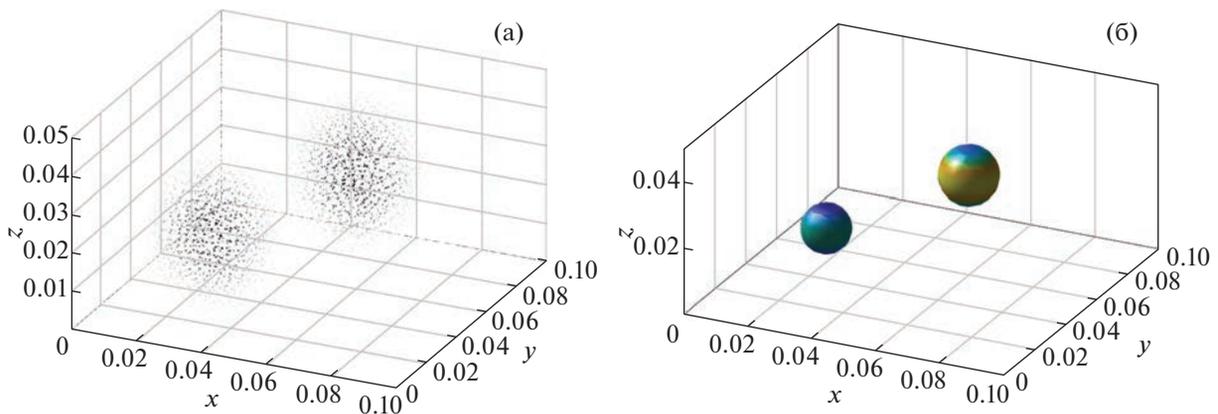
**Модельный пример 1.** Соответствующая область  $\Omega_1$  представлена на фиг. 1а. Для расчетов при нахождении точных данных обратной задачи по МКЭ использовались сетки, показанные на фиг. 1б. Сетка содержит 90 116 узлов метода конечных элементов. Точное (модельное) распределение модуля Юнга в области задано как

$$E(x, y, z) = 30 \times 10^3 + 100 \times 10^3 \exp \left\{ -\frac{r_1^2}{0.01^2} \right\} + 100 \times 10^3 \exp \left\{ -\frac{r_2^2}{0.01^2} \right\},$$

$$r_1^2 = (x - 0.06)^2 + (y - 0.06)^2 + (z - 0.03)^2; \quad r_2^2 = (x - 0.03)^2 + (y - 0.03)^2 + (z - 0.02)^2.$$



Фиг. 1. Геометрическая модель биологической ткани (а) и используемая сетка МКЭ (б).

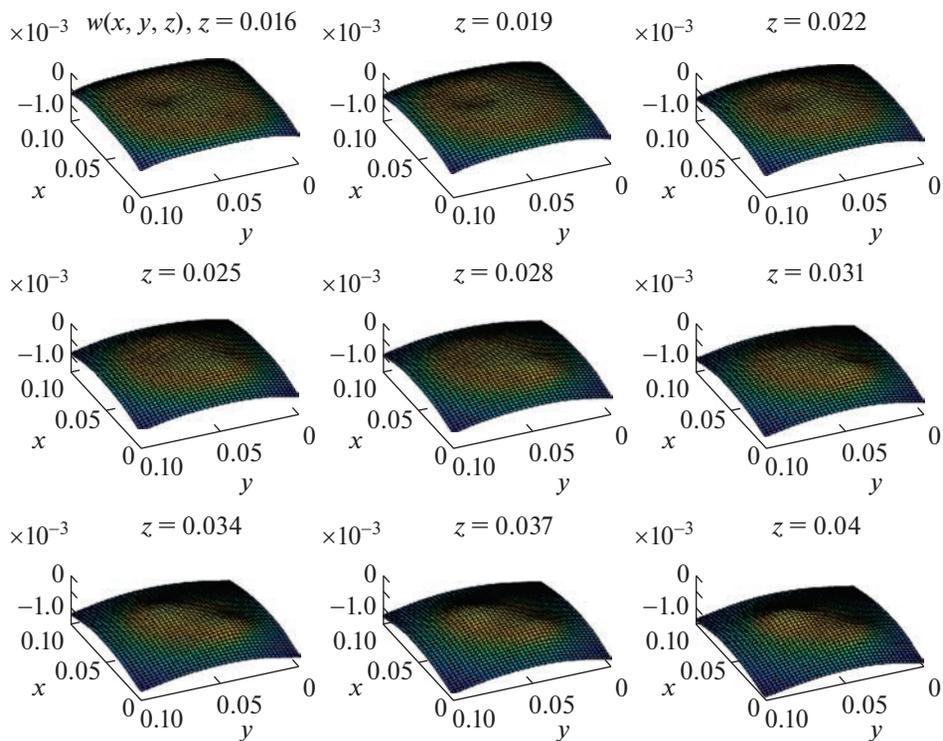


Фиг. 2. Модельная задача 1. (а) – Точный модуль Юнга как набор значений на точках сетки. (б) – Поверхность уровня точного модуля Юнга, соответствующая половине его максимума.

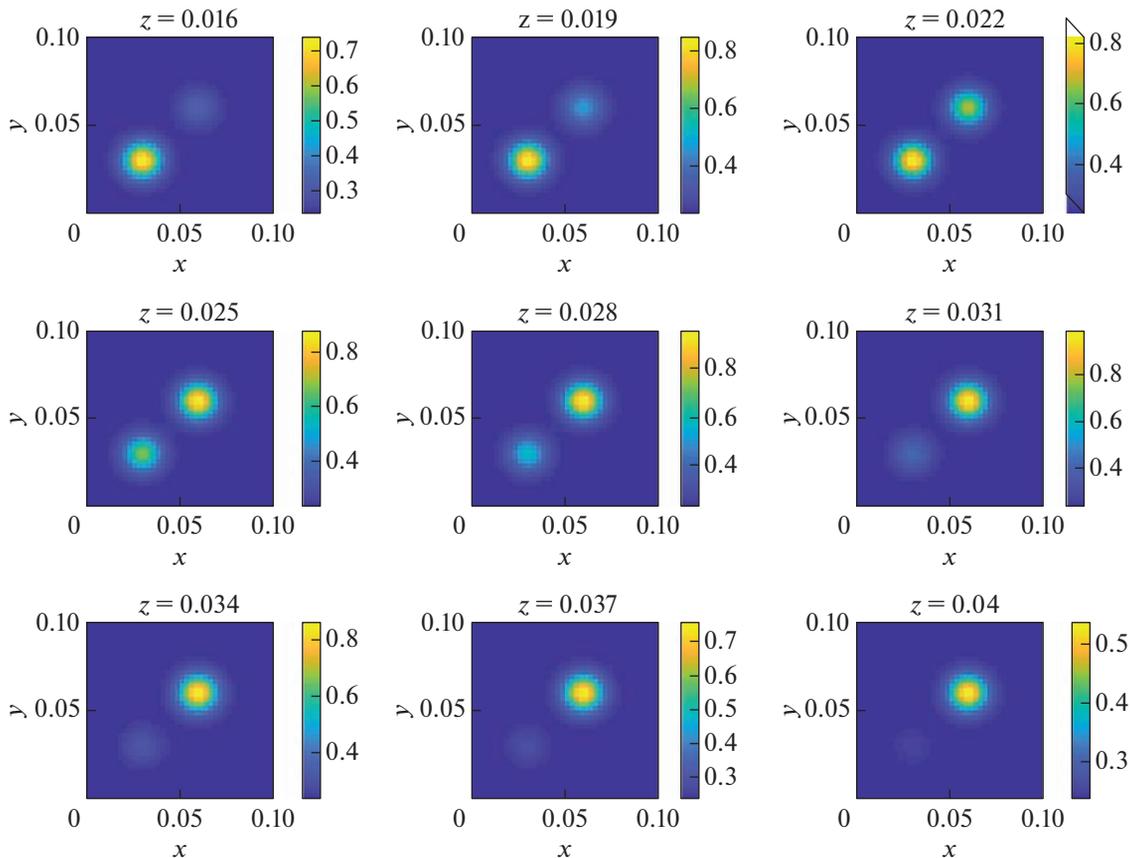
Геометрически это два трехмерных сферически симметричных, “узких” гауссиана. Изобразим их сначала на фиг. 2а как набор точек соответствующей “яркости”, помещенных в ячейки сетки (решение в виде “облака”). Кроме того, изобразим поверхности уровня этих гауссианов, соответствующей половине максимума функции  $E(x, y, z)$  из приведенной модельной формулы (фиг. 2б).

Отметим, что для такого распределения  $E(x, y, z)$  в пунктах А) и Б) процедуры решения обратной задачи заведомо нарушается ряд предположений, при которых получена формула (19). Кроме того, нарушены и условия (23) теоремы 1, дающей эту формулу для конечной области.

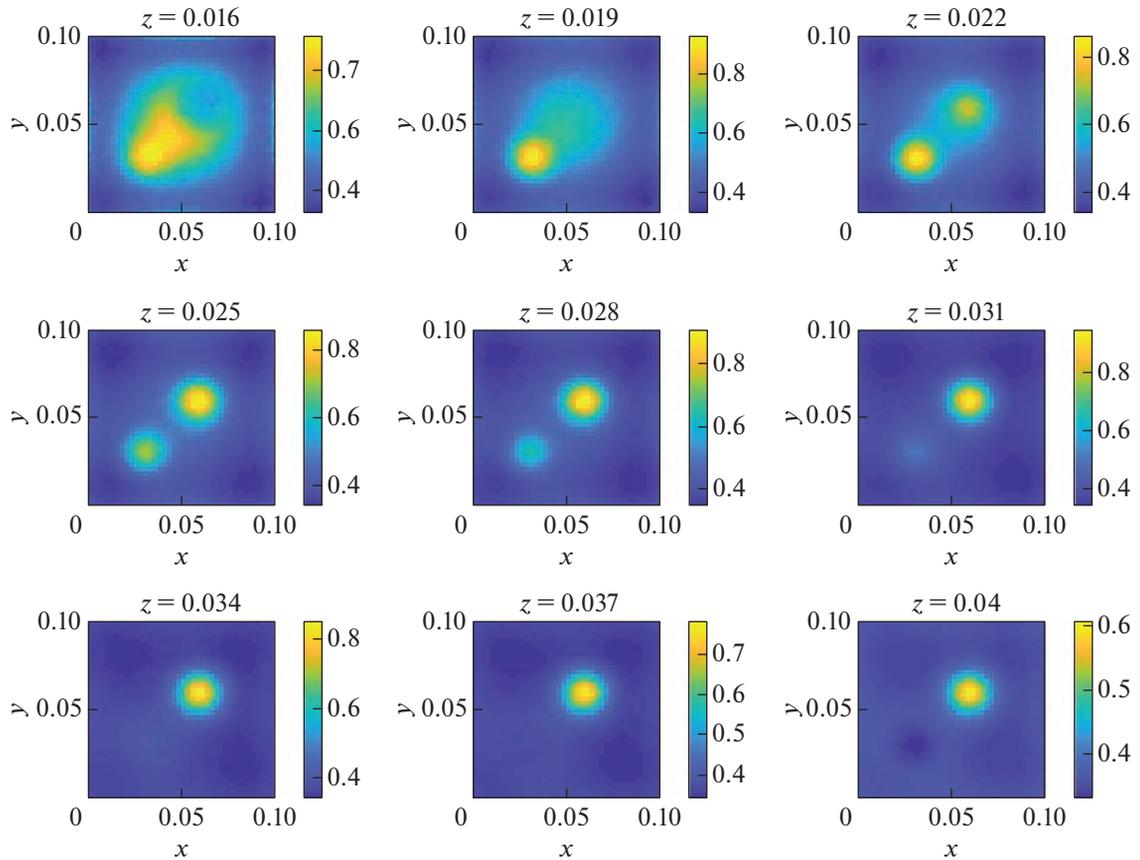
Решим для такого распределения модуля Юнга прямую задачу нахождения смещений  $w(x, y, z)$  по МКЭ. Решение для некоторых избранных  $z$  представлено на фиг. 3. Теперь по полученным смещениям  $w(x, y, z)$  решим обратную задачу восстановления модуля Юнга по методу малого параметра (20). Можно качественно оценить близость точного решения и полученного приближения, сравнивая сечения точного распределения модуля Юнга для разных  $z$  (фиг. 4) и аналогичные сечения для приближения (фиг. 5). Для удобства визуализации на этих рисунках приведены отношения  $E(x, y, z)/E_{\max}$ , где  $E_{\max} = 100 \times 10^3$  Па. Видно, что “глубокие” слои ( $z = 0.016$ ) решения восстанавливаются хуже, чем верхние ( $z = 0.04$ ). Этот эффект характерен и для других решенных модельных обратных задач. Несмотря на нарушения ряда условий, при которых получены формулы (19), (20), найденное приближенное решение обратной задачи с качественной точки зрения достаточно хорошо отражает структуру неоднородности модельного мо-



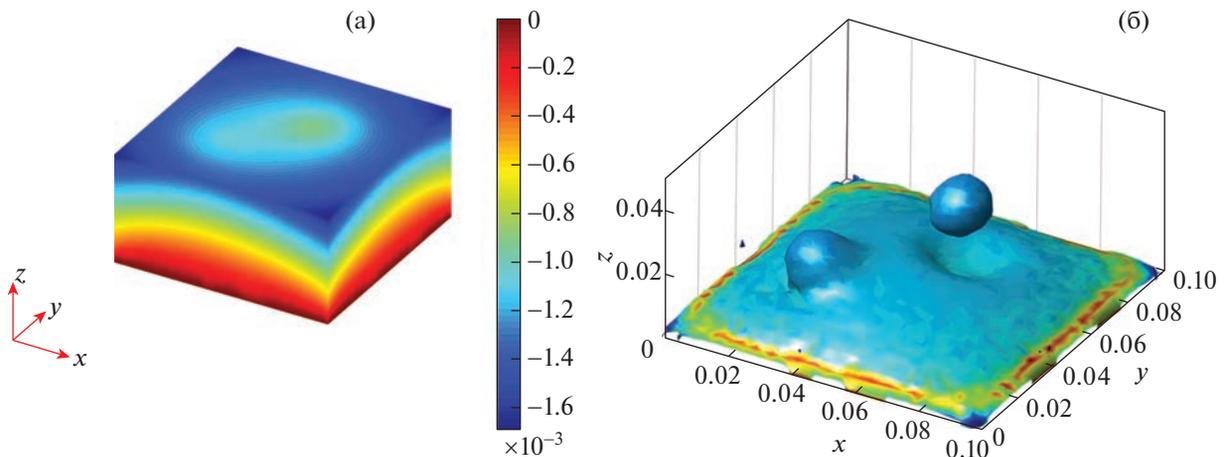
Фиг. 3. Модельная задача 1. Вычисленное по заданному  $E(x, y, z)$  с помощью МКЭ смещение  $w(x, y, z)$  для разных  $z$ .



Фиг. 4. Модельная задача 1. Сечения точного относительного распределения модуля Юнга  $E(x, y, z)/E_{\max}$  для разных  $z$  в цветовом масштабе.



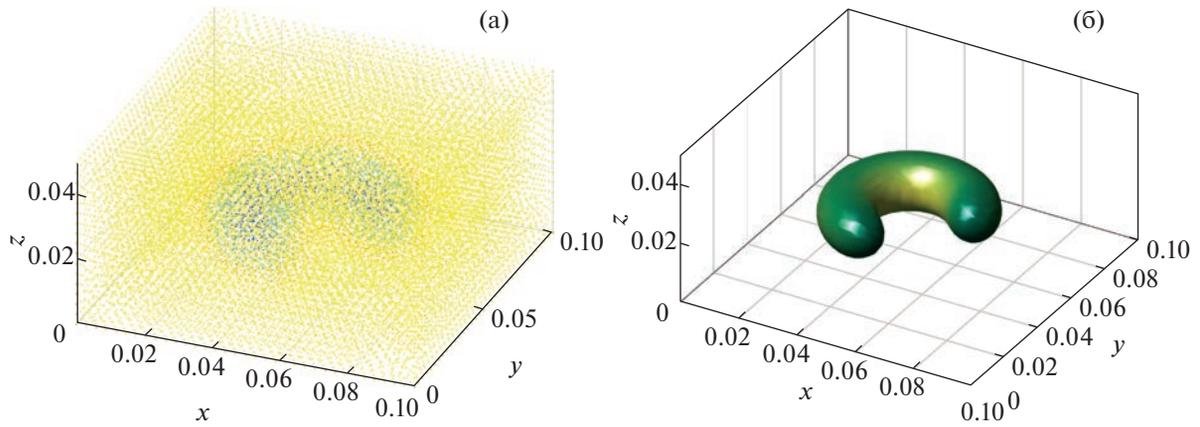
**Фиг. 5.** Модельная задача 1. Сечения найденного приближенного относительного распределения модуля Юнга  $E(x, y, z)/E_{\max}$  для разных  $z$  в цветовом масштабе.



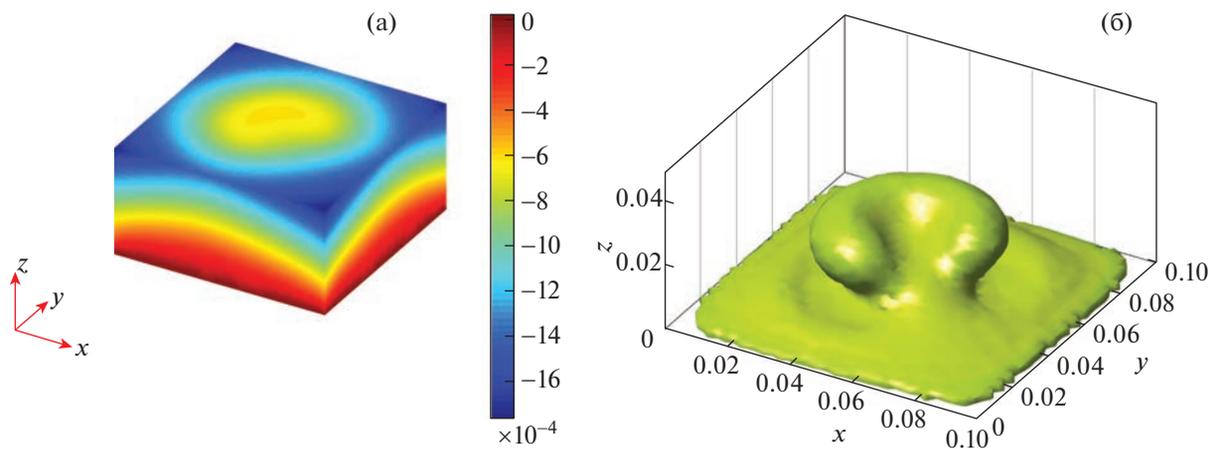
**Фиг. 6.** Модельная задача 1. (а) – Данные для обратной задачи в трехмерном представлении. (б) – Решение обратной задачи как поверхность уровня приближенно найденного модуля Юнга, соответствующая половине его максимального значения.

дуля Юнга. С количественной точки зрения (по цветовому масштабу) оно с удовлетворительной точностью представляет величины отношения  $E(x, y, z)/E_{\max}$ .

Можно также представить данные и решение в трехмерной форме (см. фиг. 6).



**Фиг. 7.** Модельная задача 2. (а) – Точный модуль Юнга как набор значений на точках сетки. (б) – Поверхность уровня точного модуля Юнга, соответствующая половине его максимума.



**Фиг. 8.** Модельная задача 2. (а) – Данные для обратной задачи в трехмерном представлении. (б) – Приближенное решение обратной задачи в виде поверхности уровня.

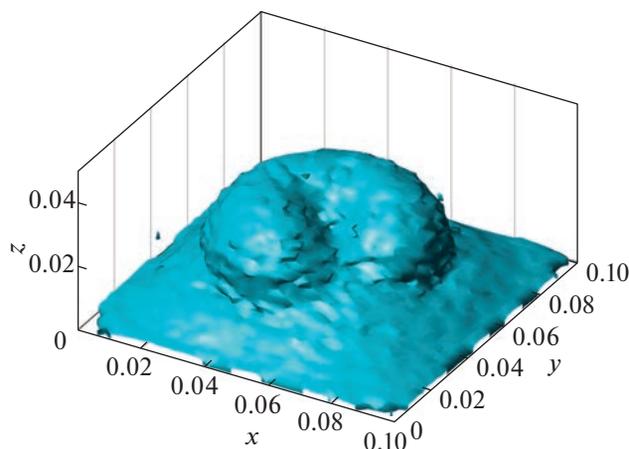
**Модельный пример 2** отличается от первого видом точного решения. Оно представлено на фиг. 7 слева как облако точек и справа – как поверхность уровня, соответствующая половине максимального значения  $E$ . Геометрически – это трехмерный гауссиан, распределенный около части окружности. Точные данные  $w$  для решения обратной задачи и полученное трехмерное приближенное решение  $E$  изображены на фиг. 8.

Приведем также пример решения этой модельной задачи для данных, поточечно возмущенных нормально распределенной случайной ошибкой с нулевым средним. Возмущенные данные  $w_\delta$  удовлетворяют неравенству

$$|w_\delta(x, y, z) - w(x, y, z)| \leq \delta \|w\|_{C(\Omega_1)} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega_1,$$

где число  $\delta > 0$  определяет уровень относительной поточечной ошибки приближенных данных. Найденное по этим данным при  $\delta = 0.001$  приближенное решение обратной задачи изображено на фиг. 9. Из этих расчетов видно, что качественная структура решения сохраняется и при использовании в нашем методе приближенных данных с небольшой ошибкой.

Расчет по формуле (20) на персональном компьютере средней производительности занимает для решенных обратных задач около 20–25 миллисекунд для сеток метода конечных элементов с 90 116 узлами (см. фиг. 1). Скорость расчета и достаточная для визуального распознавания точ-



Фиг. 9. Модельная задача 2. Решение обратной задачи для приближенных данных с  $\delta = 0.001$ .

ность получаемого приближенного решения позволяют надеяться, что этот подход можно использовать в реальной онкологической диагностике. Можно также использовать такое приближенное решение в качестве начального приближения при решении обратной задачи трехмерной квазистатической эластографии для исходной системы (1), (2) по методам из работ [9–11].

## 7. ВЫВОДЫ

1. Применение метода малого параметра к решению краевой задачи трехмерной квазистатической эластографии в бесконечном слое, моделирующем исследуемую биологическую ткань, позволяет при определенных предположениях о распределении модуля Юнга получить простую формулу (19) для смещений ткани, вызванных поверхностным сжатием.

2. Полученную формулу можно использовать в виде (20) для приближенного решения трехмерной обратной задачи эластографии: по заданным (измеренным) вертикальным смещениям найти распределение модуля Юнга. Для этого необходимо использовать регуляризованное на сетке приближение для частной производной вертикального смещения по координате  $z$ .

3. Численные эксперименты для ряда модельных задач показали, что и для конечной области приближенное решение обратной задачи с помощью полученной формулы адекватно отражает основные особенности точного модельного распределения модуля Юнга даже в случае, когда оно не подчиняется ряду условий, использованных при выводе формулы (19).

4. Модельные расчеты на трехмерных сетках размера порядка  $100 \times 100 \times 100$  показали, что время решения обратных задач по полученной формуле (20) составляет несколько десятков миллисекунд на персональном компьютере средней производительности. Такая скорость расчета и достаточная для качественной визуализации точность получаемого приближенного решения позволяют надеяться, что предлагаемый подход к решению обратной задачи квазистатической эластографии можно использовать в реальной трехмерной онкологической диагностике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gao L., Parker K., Lerner R., et al. Imaging of the elastic properties of tissue – a review // *Ultrasound Med. Biol.* 1996. V. 22. P. 959–977.
2. Ophir J., Alam S., Garra B., et al. Elastography: ultrasonic estimation and imaging of the elastic properties of tissues // *Proc. Inst. Mech. Eng. Part H: J. Eng. Med.* 1999. V. 213. P. 203–233.
3. Greenleaf J.F., Fatemi M., Insana M. Selected methods for imaging elastic properties of biological tissues // *Annu. Rev. Biomed. Eng.* 2003. V. 5. P. 57–78.
4. Parker K.J., Taylor L.S., Gracewski S., et al. A unified view of imaging the elastic properties of tissue // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. V. 117. P. 2705–2712.
5. Dooley M. Model-based elastography: a survey of approaches to the inverse elasticity problem // *Phys Med Biol.* 2012. V. 57. P. R35–R73.

6. *Гурбатов С.Н., Демин И.Ю., Прончатов-Рубцов Н.В.* Ультразвуковая эластография: аналитическое описание различных режимов и технологий, физическое и численное моделирование сдвиговых характеристик мягких биологических тканей: учебно-методическое пособие. Нижний Новгород: Нижегородский гос. ун-т, 2015.
7. *Oberai A.A., Gokhale N.H., Feijoo G.R.* Solution of inverse problems in elasticity imaging using the adjoint method // *Inverse Probl.* 2003. V. 19. P. 297–313.
8. *Richards M., Barbone P., Oberai A.* Quantitative three-dimensional elasticity imaging from quasi-static deformation: a phantom study // *Phys. Med. Biol.* 2009. V. 54. P. 757–779.
9. *Leonov A.S., Sharov A.N., Yagola A.G.* A posteriori error estimates for numerical solutions to inverse problems of elastography // *Inverse Probl. Sci. Eng.* 2017. V. 25. P. 114–128.
10. *Leonov A.S., Sharov A.N., Yagola A.G.* Solution of the inverse elastography problem for parametric classes of inclusions with a posteriori error estimate // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2017. V. 26. P. 1–7.
11. *Leonov A.S., Sharov A.N., Yagola A.G.* Solution of the three-dimensional inverse elastography problem for parametric classes of inclusions // *Inverse Probl. Sci. Eng.* 2021. V. 29. № 8. P. 1055–1069.
12. *Rychagov M., Khaled W., Reichling S., et al.* Numerical modeling and experimental investigation of biomedical elastographic problem by using plane strain state model // *Fortsch. Der Akustik.* 2003. V. 29. P. 586–589.
13. *Leonov A.S., Sharov A.N., Yagola A.G.* Solution of the three-dimensional inverse elastography problem for parametric classes of inclusions, *Inverse Problems in Science and Engineering.* 2021. V.29. Issue 8. P. 1055–1069.
14. *Леонов А.С., Нефедов Н.Н., Шаров А.Н., Ягола А.Г.* Решение двумерной обратной задачи квазистатической эластографии с помощью метода малого параметра *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2022. Т. 62. № 5. С. 854–860.
15. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
16. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.
17. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
18. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
19. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: Либроком, 2009.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 519.63

НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ  
УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С УСЛОВИЯМИ  
ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ<sup>1)</sup>

© 2023 г. А. Ю. Чеботарев<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> 690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН;  
690922 Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10, ДВФУ,  
Региональный научно-образовательный математический центр ДЦМИ, Россия

\*e-mail: cheb@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 10.03.2022 г.  
Переработанный вариант 16.09.2022 г.  
Принята к публикации 14.11.2022 г.

Рассматривается неоднородная начально-краевая задача для нелинейной параболично-эллиптической системы, моделирующей радиационный теплообмен с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Доказана нелокальная по времени однозначная разрешимость задачи. Библ. 24.

**Ключевые слова:** квазистационарные уравнения радиационного теплообмена, френелевские условия сопряжения, неоднородная начально-краевая задача, нелокальная разрешимость.

**DOI:** 10.31857/S0044466923030055, **EDN:** EBJTPO

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Теоретический анализ моделей радиационно-кондуктивного (сложного) теплообмена представляет интерес для различных приложений, включая, например, процессы лазерной абляции [1]. При изучении процессов сложного теплообмена в средах, компоненты которых имеют большую разницу в коэффициентах преломления, необходимо учитывать эффекты отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления, вносящие, как показано в [2], значительный вклад в распределение температурных полей. При этом будем предполагать, что область, в которой изучается процесс, окружена непрозрачным для излучения материалом, имеющим заданную температуру на границе области.

В [2], [3] представлен вывод стационарной модели сложного теплообмена в рамках  $P_1$  приближения для многокомпонентной трехмерной области и доказана однозначная разрешимость однородной и неоднородной краевых задач. В работе [4] рассмотрена квазистационарная модель сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения, не содержащая внутренних источников.

В данной статье рассматривается начально-краевая задача для уравнений радиационного теплообмена в многокомпонентной среде с внутренними источниками (объемными или поверхностными). Отметим, что анализ неоднородных начально-краевых задач важен для изучения обратных задач и задач оптимального управления сложным теплообменом.

Нелинейные уравнения, моделирующие сложный теплообмен в рамках  $P_1$  приближения и без учета эффектов отражения и преломления на границах подобластей с различными коэффициентами преломления, изучены достаточно полно. Анализ краевых и обратных задач, задач оптимального управления представлен в [5–14]. Отметим также интересные работы [15–23], посвященные анализу полной модели радиационного теплообмена.

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00113) и Минобрнауки РФ (проект № 122082400001-8) и соглашение № 075-02-2022-880.

Рассмотрим ограниченную липшицеву область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , содержащую конечное число липшицевых подобластей  $\Omega_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , замыкания которых не пересекаются и принадлежат  $\Omega$ . Через  $\Omega_0 = \Omega \setminus \left( \bigcup_{j=1}^p \bar{\Omega}_j \right)$  обозначаем внешнюю подобласть,  $\Gamma = \partial\Omega \subset \Gamma_0 = \partial\Omega_0$ ,  $\Gamma_j = \partial\Omega_j \subset \Gamma_0$ ,  $j = 1, \dots, p$ .

Нестационарный сложный теплообмен в многокомпонентной среде моделируется в каждой из областей  $\Omega_j$ ,  $j = 0, \dots, p$ , при  $t \in (0, T)$  уравнениями

$$r \frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = f, \quad -\alpha \Delta \varphi + \beta(\varphi - \theta^3 |\theta|) = g. \quad (1)$$

Здесь  $\theta$  – нормализованная температура и  $\varphi$  – нормализованная интенсивность теплового излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные кусочно-постоянные параметры  $r$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , описывающие свойства среды, определены в [2–4]. Функции  $f$ ,  $g$  описывают тепловые и радиационные источники.

На внешней границе  $\Gamma = \partial\Omega$  заданы краевые условия (через  $\partial_n$  обозначаем производную в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}$  к границе)

$$a \partial_n \theta + c(\theta - \theta_b)|_{\Gamma} = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

где  $\theta_b$  – заданная граничная температура,  $c$  – коэффициент теплопередачи,  $0 < \gamma \leq 1/2$  – параметр, зависящий от коэффициента излучения поверхности.

На внутренних границах  $\Gamma_j = \partial\Omega_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , ставятся следующие условия сопряжения для температуры  $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$  и интенсивности излучения  $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$ , полученные в [2] (через  $\partial_n$  также обозначаем производную по внешней нормали к  $\partial\Omega_j$ ):

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0 \partial_n \theta_0 = a_j \partial_n \theta_j, \quad (3)$$

$$n_0^2 \alpha_0 \partial_n \varphi_0 = n_j^2 \alpha_j \partial_n \varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0 \partial_n \varphi_0. \quad (4)$$

Здесь  $a_j, \alpha_j, n_j = a, \alpha, n|_{\Omega_j}$ ,  $h_j > 0$  – параметры, зависящие от коэффициентов отражения на внутренних границах. Отметим, что вывод условий (4) основан на френелевских условиях сопряжения на  $\Gamma_j$  для интенсивности излучения  $I$ , не усредненной по направлениям, использовании  $P_1$  приближения для  $I$  и интегрировании указанных условий по направлениям входящих лучей для каждой подобласти.

Кроме этого задаются начальные условия для температуры,

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (5)$$

Начально-краевая задача (1)–(5), где  $f = 0$ ,  $g = 0$  и граничная температура  $\theta_b$  является ограниченной, рассмотрена в [4]. Изучение уравнений сложного теплообмена с источниками, которые моделируются функциями или интегрируемыми функциями, представляет не только теоретический интерес. Представленные в настоящей статье оценки решений неоднородной начально-краевой задачи предназначены для анализа задач оптимального управления и обратных задач сложного теплообмена. Отметим, что для неоднородной задачи потребовалась техника получения оценок решения, отличная от использованной в [4].

Основной результат работы состоит в получении новых априорных оценок решения начально-краевой задачи (1)–(5) и доказательстве нелокальной по времени разрешимости задачи.

## 2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Через  $L^s$ ,  $1 \leq s \leq \infty$ , обозначаем пространства Лебега  $s$  – интегрируемых функций и, соответственно, через  $H^s = W_2^s$  – пространства Соболева. Пусть  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega)$  и

$$W = \{w \in H, w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j), j = 0, \dots, p\}.$$

Пространство  $H$  будем отождествлять с сопряженным пространством  $H'$ . Тогда  $V \subset W \subset H = H' \subset W' \subset V'$ . Далее будем использовать следующие обозначения:  $(f, v)$  – значение функционала  $f \in V'$  на элементе  $v \in V$  и скалярное произведение в  $H$ , если  $f, v \in H$ ;

$$\|v\|^2 = (v, v); \quad (v, w)_j = (v, w)_{L^2(\Omega_j)}, \quad \|v\|_j^2 = (v, v)_j; \quad (v, w)_W = \sum_{j=0}^p (v, w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Через  $L^p(0, T; X)$  (соотв.  $C([0, T], X)$ ) обозначаем пространство строго измеримых функций класса  $L^p$  (соотв. непрерывных), определенных на  $[0, T]$ , со значениями в банаховом пространстве  $X$ .

Пусть исходные данные удовлетворяют следующим условиям.

- (i)  $c, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $c \geq c_0 > 0$ ,  $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ ,  $c_0, \gamma_0 = \text{const}$ ;
- (ii)  $\{a, b, r, \alpha, \beta, n\}_{\Omega_j} = \{a_j, b_j, r_j, \alpha_j, \beta_j, n_j\} > 0$ ,  $b = \sigma \beta n^2$ ,  $\sigma = \text{const} > 0$ ;
- (iii)  $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Gamma \times (0, T))$ ;  $f \in L^2(0, T; V')$ ,  $g \in L^{5/4}(Q)$ ,  $Q = \Omega \times (0, T)$ .

Определим операторы  $A_1 : V \rightarrow V'$ ,  $A_2 : W \rightarrow W'$  и функции  $f_b \in L^2(0, T; V')$ ,  $g_b \in L^2(0, T; W')$ , используя следующие равенства, справедливые для  $\theta, \eta \in V$ ,  $\varphi, w \in W$ :

$$(A_1 \theta, \eta) = (a \nabla \theta, \nabla \eta) + \int_{\Gamma} c \theta \eta d\Gamma,$$

$$\frac{1}{\sigma} (A_2 \varphi, w) = \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 (\nabla \varphi, \nabla w)_j + n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \varphi w d\Gamma + n_0^2 \sum_{j=1}^p h_j \int_{\Gamma_j} (\varphi_0 - \varphi_j)(w_0 - w_j) d\Gamma,$$

$$(f_b, \eta) = \int_{\Gamma} c \theta_b \eta d\Gamma, \quad (g_b, w) = \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 w d\Gamma.$$

Здесь  $\{\varphi_j, w_j\} = \{\varphi, w\}_{\Omega_j}$ .

Скалярное произведение и норму в пространстве  $V$  определим, используя оператор  $A_1$ ,  $(u, v)_V = (A_1 u, v)$ ,  $\|v\|_V^2 = (A_1 v, v)$ . Такая норма эквивалентна стандартной норме пространства  $V$ . Будем также использовать неравенства непрерывности вложений  $V \subset L^6(\Omega)$ ,  $W \subset L^6(\Omega)$ :

$$\|v\|_{L^6(\Omega)} \leq K_1 \|v\|_V, \quad v \in V, \quad \|w\|_{L^6(\Omega)} \leq K_2 \|w\|_W, \quad w \in W.$$

Для возрастающей степенной функции используем обозначение  $[s]^q = |s|^q \text{sign } s$ ,  $q > 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$ . Отметим, что  $d[s]^q/dt = q|s|^{q-1}$ .

Пусть

$$Y = \{y \in L^2(0, T; V) \cap L^5(0, T; L^5(\Omega)), ry' \in L^2(0, T; V') + L^{5/4}(0, T; L^{5/4}(\Omega))\}.$$

Здесь  $ry' = d(ry)/dt$ .

Отметим, что справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $y \in Y$ . Тогда функция  $y$  равна почти всюду некоторой непрерывной функции из  $[0, T]$  в  $H$  и в смысле скалярных распределений на  $(0, T)$  имеет место равенство

$$\frac{d}{dt} (ry, y) = 2(ry', y). \tag{6}$$

Данная лемма является слегка модифицированной версией классического утверждения [24, лемма 1.2, с. 209] и доказана в конце статьи.

Для вывода слабой формулировки краевой задачи (1)–(4) умножим уравнения (1) на тестовые функции  $\eta \in V$  и  $\sigma n^2 \psi \in W$  соответственно, проинтегрируем по частям по областям  $\Omega_j$ , сложим полученные равенства и применим краевые условия (2) и условия сопряжения (3), (4). В результате получаем следующую формулировку.

**Определение.** Пара  $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^{5/4}(0, T; W)$  называется *слабым решением* задачи (1)–(5), если

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g_b + \sigma n^2 g, \quad t \in (0, T) \quad (7)$$

и при этом  $\theta(0) = \theta_0$ .

Заметим, что билинейная форма  $\{\varphi, \psi\} \rightarrow (A_2\varphi + b\varphi, \psi)$  является непрерывной, симметричной и положительно-определенной в пространстве  $W$ . Поэтому из леммы Лакса-Мильграма следует, что для каждого  $\eta \in W'$  существует единственное решение  $\varphi \in W$  уравнения  $A_2\varphi + b\varphi = \eta$  и оператор  $(A_2 + bI)^{-1} : W' \rightarrow W$  непрерывен. Таким образом, пара  $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^{5/4}(0, T; W)$  является решением задачи (7), если и только если функция  $\theta$  является решением следующей задачи Коши для уравнения с операторными коэффициентами

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + f, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \text{где} \quad \varphi = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + \sigma n^2 g + b[\theta]^4). \quad (8)$$

### 3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Определим галёркинские приближения  $\theta_m$  решения задачи (8) и выведем необходимые для доказательства разрешимости априорные оценки. В пространстве  $V$  рассмотрим ортонормированный в  $H$  базис  $w_1, w_2, \dots$ . Пусть

$$\begin{aligned} \theta_k(t) &\in V_k = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_k\}, \quad t \in (0, T), \\ (r\theta_k' + A_1\theta_k + b([\theta_k]^4 - \varphi_k) - f_b - f, v) &= 0 \quad \forall v \in V_k, \\ \theta_k(0) &= \theta_{0k}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь  $\varphi_k = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + \sigma n^2 g + b[\theta_k]^4)$ ,  $\theta_{0k}$  – ортогональная проекция в  $H$  функции  $\theta_0$  на подпространство  $V_k$ .

Задача Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (9) разрешима на малом временном интервале  $(0, T_k)$ . Оценки, полученные ниже, позволяют продолжить решение на  $(0, T)$ .

#### 3.1. Априорные оценки галёркинских приближений

Функция  $\varphi_k$  удовлетворяет равенству

$$A_2\varphi_k + b(\varphi_k - [\theta_k]^4) = g_b + \sigma n^2 g. \quad (10)$$

Пусть  $\mu_\varepsilon(s) = s - \varepsilon \text{sign } s$ , если  $|s| > \varepsilon$  и  $\mu_\varepsilon(s) = 0$ , если  $|s| \leq \varepsilon$ ;  $\varepsilon > 0$ . Тогда  $\psi_\varepsilon(t) = \mu_\varepsilon([\varphi_k(t)]^{1/4})$  принадлежит пространству  $W$ . Умножая скалярно (10) на  $\psi_\varepsilon$ , также как в [3], выводим после предельного перехода при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , что  $\zeta(t) = [\varphi_k(t)]^{5/8} \in W$  и справедливо равенство

$$E(\zeta) + (b(\varphi_k - [\theta_k]^4), [\varphi_k]^{1/4}) = \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 [\zeta]^{2/5} d\Gamma + (\sigma n^2 g, [\zeta]^{2/5}). \quad (11)$$

Здесь

$$E(\zeta) = \frac{16\sigma}{25} \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 \|\nabla \zeta\|_j^2 + \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \zeta^2 d\Gamma + \sigma n_0^2 \sum_{j=1}^p h_j \int_{\Gamma_j} ([\zeta_0]^{8/5} - [\zeta_j]^{8/5})([\zeta_0]^{2/5} - [\zeta_j]^{2/5}) d\Gamma.$$

Отметим сразу, что для квадратичной формы  $E$  справедлива следующая оценка.

**Лемма 2** (см. [3]). *Существует  $K > 0$  такое, что*

$$K \|w\|^2 \leq E(w) \quad \forall w \in W.$$

Полагая  $v = \theta_k$  в (9) и складывая это равенство с (11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\theta_k, \theta_k) + \|\theta_k\|_V^2 + E(\zeta) + (b(|\theta_k|^4 - \varphi_k), \theta_k - [\varphi_k]^{1/4}) = \\ = (f_b + f, \theta_k) + \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 |\zeta|^{2/5} d\Gamma + (\sigma n^2 g, |\zeta|^{2/5}). \end{aligned} \tag{12}$$

Воспользуемся следующими неравенствами для оценки правой части (12):

$$\begin{aligned} (f_b + f, \theta_k) \leq \frac{1}{2} \|f_b + f\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\theta_k\|_V^2, \\ \theta_b^4 |\zeta|^{2/5} \leq \frac{1}{5} (\varepsilon^5 \zeta^2 + 4\varepsilon^{-5/4} |\theta_b|^5), \quad g|\zeta|^{2/5} \leq \frac{1}{5} (\varepsilon^5 \zeta^2 + 4\varepsilon^{-5/4} |g|^{5/4}). \end{aligned}$$

Тогда при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  из (12), с учетом леммы 1, следует оценка

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r\theta_k, \theta_k) + \|\theta_k\|_V^2 + K \|\zeta\|^2 + (b(|\theta_k|^4 - \varphi_k), \theta_k - [\varphi_k]^{1/4}) + \\ + \frac{16\sigma}{25} \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 \|\nabla \zeta\|_j^2 \leq \|f_b + f\|_V^2 + C \left( \int_{\Gamma} |\theta_b|^5 d\Gamma + \int_{\Omega} |g|^{5/4} dx \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь и далее через  $C > 0$  обозначаем постоянные, не зависящие от  $k$ .

Проинтегрировав по времени неравенство (13), получаем оценки

$$\|\theta_k(t)\| \leq C, \quad \int_0^T \|\theta_k(s)\|_V^2 ds \leq C, \quad \int_0^T \|\zeta\|_W^2 ds \leq C, \quad \int_0^T (|\theta_k|^4 - \varphi_k, \theta_k - [\varphi_k]^{1/4}) ds \leq C. \tag{14}$$

Из последней оценки в (14) следует, что

$$\int_0^T (\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\varphi_k\|_{L^{5/4}(\Omega)}^{5/4}) ds \leq C + \int_0^T (|\theta_k|^4, [\varphi_k]^{1/4}) ds + \int_0^T (\varphi_k, \theta_k) ds.$$

Поскольку

$$|\theta_k|^4 \cdot [\varphi_k]^{1/4} = |\theta_k|^4 |\zeta|^{2/5} \leq \frac{4\varepsilon^{5/4}}{5} |\theta_k|^5 + \frac{1}{5\varepsilon} |\zeta|^2, \quad |\varphi_k \theta_k| = |\theta_k| |\zeta|^{8/5} \leq \frac{\varepsilon^5}{5} |\theta_k|^5 + \frac{4}{5\varepsilon^{5/4}} |\zeta|^2,$$

то, выбрав  $\varepsilon > 0$  достаточно малым, получаем

$$\int_0^T (\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\varphi_k\|_{L^{5/4}(\Omega)}^{5/4}) ds \leq C. \tag{15}$$

Далее, используя неравенства вложения  $V \subset L^6(\Omega)$ ,  $W \subset L^6(\Omega)$ , оценим нелинейность:

$$\| |\theta_k|^4 \|_{V'} \leq \sup_{\|v\|_V=1} \| |\theta_k|^4 \|_{L^{6/5}(\Omega)} \|v\|_{L^6(\Omega)} \leq K_1 \left( \int_{\Omega} |\theta|^{24/5} dx \right)^{5/6}.$$

Тогда

$$\int_0^T \| |\theta_k|^4 \|_{V'}^{5/4} dt \leq K_1^{5/4} \int_0^T \left( \int_{\Omega} |\theta_k|^{24/5} dx \right)^{25/24} dt \leq K_1^{5/4} |\Omega|^{1/24} \int_{\Omega} |\theta_k|^5 dx dt \leq C \tag{16}$$

и, аналогично,

$$\int_0^T \| |\theta_k|^4 \|_{W'}^{5/4} dt \leq K_2^{5/4} |\Omega|^{1/24} \int_{\Omega} |\theta_k|^5 dx dt \leq C.$$

Учтем, что  $\varphi_k = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + \sigma n^2 g + b[\theta_k]^4)$  и оператор  $(A_2 + bI)^{-1} : W' \rightarrow W$  непрерывен. Следовательно, из полученной оценки вытекает, что

$$\int_0^T \|\varphi_k\|_W^{5/4} dt \leq C. \tag{17}$$

Получим оценку равномерной непрерывности последовательности  $\theta_k$  в  $L^2(0, T; H)$ . Рассмотрим (9) в момент времени  $s$ , положим  $v = \theta_k(s) - \theta_k(t)$  и проинтегрируем по  $s$  от  $t$  до  $t + h$ , затем по  $t$  от 0 до  $T - h$ . Тогда

$$\frac{1}{2} \int_0^{T-h} (r(\theta_k(t+h) - \theta_k(t), \theta_k(t+h) - \theta_k(t))) dt = \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} p_k(t, s) ds dt. \tag{18}$$

Здесь

$$p_k(t, s) = (A_1 \theta_k(s) + b([\theta_k(s)]^4 - \varphi_k(s)) - f_b(s) - f(s), \theta_k(t) - \theta_k(s)).$$

Воспользуемся неравенствами

$$\begin{aligned} (A_1 \theta_k(s), \theta_k(t) - \theta_k(s)) &\leq \frac{1}{2} \|\theta_k(s)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\theta_k(t)\|_V^2, \\ (b([\theta_k(s)]^4, \theta_k(t) - \theta_k(s)) &\leq \max b([\theta_k(s)]^4, \theta_k(t) - \theta_k(s)) \leq \max b \left( \frac{4}{5} \int_{\Omega} |\theta_k(s)|^5 dx + \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_k(t)|^5 dx \right), \\ |(b(\varphi_k(s), \theta_k(t) - \theta_k(s))| &\leq \max b \left( \frac{8}{5} \int_{\Omega} |\varphi_k(s)|^{5/4} dx + \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_k(s)|^5 dx + \frac{1}{5} \int_{\Omega} |\theta_k(t)|^5 dx \right), \\ |(f_b(s) + f(s), \theta_k(t) - \theta_k(s))| &\leq \|f_b(s) + f(s)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\theta_k(s)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\theta_k(t)\|_V^2. \end{aligned}$$

Эти неравенства позволяют оценить правую часть (18), причем для оценки интегралов от функций, зависящих от  $s$ , достаточно поменять порядок интегрирования. В результате получаем оценку

$$\int_0^{T-h} \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t)\|_V^2 dt \leq C_1 h, \tag{19}$$

где  $C_1 > 0$  не зависит от  $k, h$ .

Полученные оценки (14)–(19) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что существуют функции  $\theta, \varphi$  такие, что

$$\begin{aligned} \theta_k \rightarrow \theta &\text{ слабо в } L^2(0, T; V), L^5(Q), \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \\ \varphi_k \rightarrow \varphi &\text{ слабо в } L^{5/4}(0, T; W), L^{5/4}(Q). \end{aligned} \tag{20}$$

Результатов о сходимости (20) достаточно для предельного перехода при  $k \rightarrow \infty$  в системе (9) и доказательства того, что предельные функции  $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^{5/4}(0, T; W)$  и выполняются равенства (8). При этом предельный переход в нелинейных членах гарантируется неравенством

$$\|\theta_k - \theta\|_{L^4(Q)}^4 \leq \|\theta_k - \theta\|_{L^2(Q)}^{2/3} \|\theta_k - \theta\|_{L^5(Q)}^{10/3}.$$

Таким образом, получаем следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует слабое решение задачи (1)–(5).

**Замечание 1.** Из определений пространств  $Y$  и  $W$  и вложений  $Y \subset C([0, T]; H), W \subset L^{5/4}(\Omega)$  следует, что если  $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^{5/4}(0, T; W)$  – слабое решение задачи (1)–(5), то  $\theta \in C([0, T]; H) \cap L^5(Q), \varphi \in L^{5/4}(Q)$ .

4. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Пусть  $\{\theta_{1,2}, \varphi_{1,2}\} \in Y \cap L^5(Q) \times L^{5/4}(0, T; W) \cap L^{5/4}(Q)$  – слабые решения задачи (1)–(5),  $\theta = \theta_1 - \theta_2$ ,  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Тогда справедливы равенства

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4) = b\varphi, \quad A_2\varphi + b\varphi = b([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4), \quad t \in (0, T), \quad \theta(0) = 0.$$

Умножая скалярно первое уравнение на  $\theta(t)$ , второе на  $\varphi(t)$  и учитывая неравенства

$$([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4)(\theta_1 - \theta_2) \geq 0, \quad |[\theta_1]^4 - [\theta_2]^4| \leq 2(|\theta_1|^3 + |\theta_2|^3)|\theta|,$$

получаем оценки

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\theta, \theta) + \|\theta\|_V^2 \leq (b\varphi, \theta) \leq \max b \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \|\theta\|_{L^{6/5}(\Omega)} \leq \max b |\Omega|^{1/3} \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \|\theta\|, \tag{21}$$

$$(A_2\varphi, \varphi) + (b\varphi, \varphi) \leq 2 \max b \int_{\Omega} (|\theta_1|^3 + |\theta_2|^3) |\theta| |\varphi| dx. \tag{22}$$

Левую часть (22) оценим снизу, используя непрерывность вложения  $W \subset L^6(\Omega)$ , а правую сверху, используя неравенство Гёльдера. Тогда

$$K_3 \|\varphi\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq 2 \max b \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \left( \left( \int_{\Omega} |\theta_1|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} + \left( \int_{\Omega} |\theta_2|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} \right).$$

Здесь  $K_3 = \min\{\alpha n^2, b\}/K_2$ . Заметим, что

$$\left( \int_{\Omega} |\theta_{1,2}|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} \leq \|\theta_{1,2}\|_{L^5(\Omega)}^3 \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{1/5}.$$

Поэтому

$$K_3 \|\varphi\|_{L^6(\Omega)} \leq 2 \max b \left( \|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{1/5}.$$

Подставляя полученное неравенство для  $\varphi$  в правую часть (21), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\theta, \theta) + \|\theta\|_V^2 \leq K_4 \left( \|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{6/5}. \tag{23}$$

Здесь  $K_4 = 2(\max b)^2 |\Omega|^{1/3} / K_3$ . Правую часть (23) оценим, используя неравенство Юнга с параметром  $\varepsilon > 0$ ,

$$\left( \|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{6/5} \leq \frac{4\varepsilon^{5/2}}{5} \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^2 + \frac{3\varepsilon^{-5/3}}{5} \left( \|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^5 \right) \|\theta\|^2.$$

Учитывая непрерывность вложения  $V \subset L^6(\Omega)$ , выводим из (23) при достаточно малом  $\varepsilon$  оценку

$$\min r \|\theta(t)\|^2 \leq K_5 \int_0^t \left( \|\theta_1(s)\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2(s)\|_{L^5(\Omega)}^5 \right) \|\theta(s)\|^2 ds,$$

где  $K_5 > 0$  зависит только от  $K_4, \varepsilon$ . Функция  $s \rightarrow \left( \|\theta_1(s)\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2(s)\|_{L^5(\Omega)}^5 \right)$  интегрируема на  $(0, T)$  и поэтому из неравенства Гронуолла следует  $\theta = 0$ , что означает единственность решения.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует единственное слабое решение задачи (1)–(5).

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1

Определим регуляризацию функции  $y \in Y$ ,

$$y_m(t) = \int_0^t y(s) \rho((t-s)m) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

где  $\rho \in D(\mathbb{R})$ ,  $\int \rho(s)ds = 1$ ,  $\rho(t) = \rho(-t)$ ,  $\text{supp } \rho \subset [-1, 1]$ ;  $y_m \in C^\infty([0, T], V)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$

Тогда

$$y_m \rightarrow y \quad \text{в } L^2_{\text{loc}}((0, T); V) \quad \text{и в } L^5_{\text{loc}}((0, T); L^5(\Omega)).$$

По условию  $ry' = f_1 + f_2$ ,  $f_1 \in L^2(0, T; V')$ ,  $f_2 \in L^{5/4}(0, T; L^{5/4}(\Omega))$ . Определим регуляризации

$$f_{1m}(t) = \int_0^T f_1(s)\rho((t-s)m)ds, \quad f_{2m}(t) = \int_0^T f_2(s)\rho((t-s)m)ds,$$

$$f_{1m} \rightarrow f_1 \quad \text{в } L^2_{\text{loc}}((0, T); V'), \quad f_{2m} \rightarrow f_2 \quad \text{в } L^{5/4}_{\text{loc}}((0, T); L^{5/4}(\Omega)).$$

Заметим, что для  $\varphi \in D(0, T)$ ,  $\text{supp } \varphi \subset (1/m, T - 1/m)$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_0^T ry'_m(t)\varphi(t)dt &= \int_0^T \int_0^T ry(s) \frac{d}{dt} \rho((t-s)m)ds \varphi(t)dt = - \int_0^T \int_0^T ry(s) \frac{d}{ds} \rho((t-s)m)ds \varphi(t)dt = \\ &= \int_0^T \int_0^T (f_1(s) + f_2(s))\rho((t-s)m)ds \varphi(t)dt = \int_0^T (f_{1m}(t) + f_{2m}(t))\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

Поэтому  $ry'_m = f_{1m} + f_{2m}$ . Следовательно,

$$(ry'_m, y_m) = (f_{1m} + f_{2m}, y_m) \rightarrow (f_1, y) + (f_2, y) = (ry', y) \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(0, T).$$

Кроме того,  $(ry_m, y_m) \rightarrow (ry, y)$  в  $L^1_{\text{loc}}(0, T)$ . Поэтому мы можем перейти к пределу в равенстве

$$\frac{d}{dt}(ry_m, y_m) = 2(ry'_m, y_m)$$

в смысле теории распределений; в пределе получим (6).

Так как функция  $t \rightarrow (ry', y)$  интегрируема на  $(0, T)$ , равенство (6) показывает, что  $y \in L^\infty(0, T; H)$ . Поэтому [24, Лемма 1.4, с. 211]

$$\forall v \in H \quad \text{функция } t \rightarrow (ry(t), v) \quad \text{непрерывна.} \quad (24)$$

Далее, для  $t, t_0 \in [0, T]$  используем равенство

$$\|\sqrt{r}(y(t) - y(t_0))\|^2 = (ry(t), y(t)) + (ry(t_0), y(t_0)) - 2(ry(t), y(t_0)).$$

Если  $t \rightarrow t_0$ ,  $(ry(t), y(t)) \rightarrow (ry(t_0), y(t_0))$ . Действительно,

$$(ry(t), y(t)) = (ry(t_0), y(t_0)) + 2 \int_0^t (ry'(s), y(s))ds,$$

а в силу (24),  $(ry(t), y(t_0)) \rightarrow (ry(t_0), y(t_0))$ . Поэтому  $\|\sqrt{r}(y(t) - y(t_0))\|^2 \rightarrow 0$ . Лемма доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковтаныук А.Е., Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю. Использование диффузионного приближения для моделирования радиационных и тепловых процессов в кожном покрове // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 123. № 2. С. 194–199.
2. Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2018. № 57. С. 290–298.
3. Чеботарев А.Ю. Неоднородная краевая задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 12. С. 1660–1665.
4. Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E. Quasi-static diffusion model of complex heat transfer with reflection and refraction conditions // J. Math. Anal. Appl. 2022. V. 507. 125745.

5. *Pinnau R.* Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by  $SP_1$ -system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
6. *Ковтанюк А.Е., Чеботарев А.Ю.* Стационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 711–719.
7. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412. № 1. P. 520–528.
8. *Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю.* Нестационарная задача сложного теплообмена // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 11. С. 1806–1816.
9. *Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.
10. *Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // Appl. Math. Comput. 2016. V. 289. P. 371–380.
11. *Grenkin G.V., Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // J. Math. Anal. Appl. 2016. V. 433. № 2. P. 1243–1260.
12. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2017. V. 51. № 6. P. 2511–2519.
13. *Chebotarev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
14. *Chebotarev A.Yu., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.
15. *Amosov A.* Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative - Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies // Russian J. of Math. Phys. 2016. V. 23. № 3. P. 309–334.
16. *Amosov A.A.* Unique Solvability of Stationary Radiative – Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies // J. of Math. Sc. 2017. V. 224. № 5. P. 618–646.
17. *Amosov A.A.* Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation // J. Math. Sci. 2018. V. 233. № 6. P. 777–806.
18. *Amosov A.A., Krymov N.E.* On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems // J. of Math. Sc. 2020. V. 244. P. 357–377.
19. *Amosov A.A.* Asymptotic Behavior of a Solution to the Radiative Transfer Equation in a Multilayered Medium with Diffuse Reflection and Refraction Conditions // J Math Sci. 2020. V. 244. P. 541–575.
20. *Amosov A.* Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system consisting of an absolutely black body and several semitransparent bodies // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. V. 44. № 13. P. 10703–10733.
21. *Amosov A.* Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a semitransparent body with absolutely black inclusions // Z. Angew. Math. Phys. 2021. V. 72. Article number:104.
22. *Amosov A.A.* Unique solvability of the stationary complex heat transfer problem in a system of gray bodies with semitransparent inclusions // J. Math. Sci. (United States). 2021. V. 255. Issue 4. P. 353–388.
23. *Amosov A.* Nonstationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a Semitransparent Body with Absolutely Black Inclusions // Mathematics. 2021. V. 9. № 13. P. 1471.
24. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.

УДК 519.862

ВЕКТОР ШЕПЛИ ОДНОРОДНЫХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР<sup>1)</sup>© 2023 г. В. А. Васильев<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> 630090 Новосибирск, пр-т акад. Коптюга, 4, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия\*e-mail: [vasilev@math.nsc.ru](mailto:vasilev@math.nsc.ru)Поступила в редакцию 20.08.2022 г.  
Переработанный вариант 09.09.2022 г.  
Принята к публикации 17.11.2022 г.

Для полиномиальных кооперативных игр дается описание интегрального представления вектора Шепли. Это представление осуществляется с помощью так называемого функционала Шепли. Анализируется взаимосвязь предложенного варианта вектора Шепли и полярных форм однородных полиномиальных игр как для конечного, так и для бесконечного числа участников. Особое внимание уделяется некоторым классам однородных кооперативных игр, порожденных произведениями неатомических мер. Отличительной чертой предлагаемого подхода является систематическое использование продолжений полиномиальных функций множества до отвечающих им мер на симметрических степенях исходных измеримых пространств. Библ. 19.

**Ключевые слова:** вектор Шепли, функционал Шепли, однородная кооперативная игра, полярная форма однородной игры,  $\nu$ -интеграл.

**DOI:** 10.31857/S0044466923030122, **EDN:** EBLFKN

## ВВЕДЕНИЕ

К числу главных задач теории кооперативных игр относятся конструирование и анализ различных арбитражных схем, реализующих принципы справедливого распределения гарантированного дохода  $\nu(Q)$  “большой” коалиции  $Q$  между участниками игры  $\Gamma = \langle Q, \Sigma, \nu \rangle$ . При этом важнейшим условием является максимальный учет возможностей “малых” коалиций участников, описываемых алгеброй  $\Sigma$ . Одна из наиболее популярных арбитражных схем состоит в использовании так называемого *вектора Шепли*  $\Phi(\nu)$  (см. [1], [2]) (в литературе применяется также синоним *значение Шепли*, см. [3–5]). Исследованию вектора Шепли неатомических игр, моделирующих условия совершенной конкуренции, посвящена фундаментальная монография [3]. Здесь, как и в ряде работ других авторов (см., например, [6] и имеющуюся там обширную библиографию), анализируются, преимущественно, специальные классы игр, порожденные суперпозициями вида  $\nu = f \circ \mu$ , где  $f$  – вещественная функция ограниченной вариации на отрезке  $[0, 1]$ , непрерывная в его концах и принимающая нулевое значение в точке 0, а  $\mu$  – неатомическая вероятностная мера на борелевской  $\sigma$ -алгебре этого отрезка.

В настоящей работе не накладывается никаких специальных ограничений на способ порождения рассматриваемых классов игр. Предлагаемый подход основан на анализе полиномиальных игр в рамках теории  $K$ -пространств Л.В. Канторовича (см. [7], [8], а также [9]). Используя традиционную теоретико-игровую терминологию (см. [1], [3]), под кооперативной игрой всюду далее понимается упоминавшийся уже объект вида  $\Gamma = \langle Q, \Sigma, \nu \rangle$ , где  $Q$  – некоторое непустое множество,  $\Sigma$  – какая-либо алгебра его подмножеств, а  $\nu$  – функция, заданная на алгебре  $\Sigma$ . Элементы множества  $Q$  называются игроками, а подмножества  $e \subseteq Q$ , принадлежащие алгебре  $\Sigma$ , – коалициями игроков. Значения функции  $\nu$  на элементах алгебры  $\Sigma$  трактуются как максимальный гарантированный доход соответствующих коалиций. Говоря нестрого, исследуемый в работе вектор Шепли представляет собой специальный линейный оператор, сопоставляющий некоторым кооперативным играм  $\Gamma$  один из разумных вариантов распределения их максимального

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 19-10-00910) и программы фундаментальных научных исследований СО РАН (номер темы FWNF-2022-0019) и РФФИ (грант 19-10-00910).

дохода  $v(Q)$ , достигнутого совместными усилиями участников “большой” коалиции  $Q$ . Что касается формальной стороны, то излагаемые в следующих разделах результаты относятся к интегральным представлениям вектора Шепли (см. [5], [10]), облегчающим его отыскание для широкого класса кооперативных игр. Эти результаты получены как для конечного, так и бесконечного числа игроков. В последнем случае особое внимание уделяется однородным играм, порожденным произведениями неатомических вероятностных мер. Продолжаются исследования взаимосвязи между вектором Шепли и полярными формами однородных игр, начатые в [2], [11], [12]. Главный акцент делается на вычислительных аспектах (для некоторых важных случаев даются новые формулы, определяющие вектор Шепли как достаточно простую функцию параметров, задающих рассматриваемую кооперативную игру). Основные из используемых результатов, полученных в предыдущих работах [2], [5], [13], как правило, снабжены более короткими, упрощенными доказательствами. Кроме того, приводятся усовершенствованные критерии однородности как в общем случае, так и для некоторых специальных классов игр.

Главной отличительной чертой предлагаемого подхода к исследованию вектора Шепли однородных кооперативных игр является систематическое использование продолжений рассматриваемых полиномиальных функций множества до отвечающих им мер на симметрических степенях исходных измеримых пространств.

### 1. ОДНОРОДНЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИГРЫ

#### 1.1. KB-пространство $V$ и его подпространства $V^n, V^{(n)}$ и $pV$

Переходя к описанию изучаемых классов игр, введем необходимые понятия и обозначения. Положим  $\mathcal{V} = \{v : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \mid v(\emptyset) = 0\}$ . Пусть  $e$  – произвольный элемент алгебры  $\Sigma$ . Обозначим  $H(e)$  совокупность всех конечных  $\Sigma$ -измеримых разбиений множества  $e$ . Согласно определению, каждый элемент  $\eta \in H(e)$  имеет вид  $\eta = \{e_a\}_A$ , где  $A$  – какое-либо непустое конечное множество, все  $e_a$  принадлежат алгебре  $\Sigma$ ,  $e_a \cap e_{a'} = \emptyset$  при  $a \neq a'$  и, наконец, выполняется равенство

$$\bigcup_{a \in A} e_a = e.$$

Положим  $H = \bigcup_{e \in \Sigma} H(e)$  и для каждого разбиения  $\eta = \{e_a\}_A \in H$  и функции  $v \in \mathcal{V}$  определим ее полиномиальную разность  $v(\eta) = v(\{e_a\}_A)$  формулой

$$v(\eta) := \sum_{\omega \subseteq A} (-1)^{|A \setminus \omega|} v\left(\bigcup_{a \in \omega} e_a\right) \tag{1.1}$$

(здесь и далее  $|A \setminus \omega|$  – число элементов конечного множества  $A \setminus \omega$ ). Величину  $|A|$  будем называть порядком разности  $v(\{e_a\}_A)$ .

Отметим сразу же два полезных тождества (см. [2]): при  $m \geq 3$  и  $A = \{1, \dots, m-1, m, m+1\}$  для любой полиномиальной разности  $v(\{e_a\}_A)$  выполняется соотношение

$$v(\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}\}) = v(\{e_1, \dots, e_{m-1}, e_m \cup e_{m+1}\}) - v(\{e_1, \dots, e_{m-1}, e_m\}) - v(\{e_1, \dots, e_{m-1}, e_{m+1}\}). \tag{1.2}$$

Кроме того, для любых  $e \in \Sigma$  и  $\eta = \{e_a\}_A \in H(e)$  справедливы равенства

$$v(e) = \sum_{\omega \subseteq A} v(\eta^\omega), \quad v \in \mathcal{V}, \tag{1.3}$$

где  $\eta^\omega = \{e_a\}_\omega$  – разбиения множеств  $\bigcup_{a \in \omega} e_a$ , а величины  $v(\eta^\omega)$  определяются, согласно формуле (1.1), равенствами

$$v(\eta^\omega) = \sum_{\omega' \subseteq \omega} (-1)^{|\omega \setminus \omega'|} v\left(\bigcup_{a \in \omega'} e_a\right), \quad \omega \subseteq A.$$

Далее  $\Omega(\eta)$  обозначает множество индексов разбиения  $\eta = \{e_a\}_A \in H$ :

$$\Omega(\eta) = A, \quad \eta = \{e_a\}_A \in H.$$

**Определение 1** (см. [14]). Величину

$$\|v\|_0 = \sup \left\{ \sum_{\omega \subseteq \Omega(\eta)} |v(\eta^\omega)| \mid \eta \in H(Q) \right\}$$

будем называть *полиномиальной вариацией функции*  $v$ . Будем говорить, что функция  $v \in V$  имеет ограниченную полиномиальную вариацию, если  $\|v\|_0 < \infty$ . Положим

$$V = \{v \in \mathcal{V} \mid \|v\|_0 < \infty\}.$$

Опишем конус вполне положительных функций, наделяющий векторное пространство  $V$  с нормой  $\|\cdot\|_0$  структурой  $KV$ -пространства.

**Определение 2** (см. [14]). Будем говорить, что функция  $v \in \mathcal{V}$  *вполне положительна*, если ее полиномиальные разности неотрицательны:  $v(\eta) \geq 0$  для всех  $\eta \in H$ . Выпуклый конус вполне положительных функций  $v \in \mathcal{V}$  обозначим  $V_+$ .

Ясно, что конус  $V_+$  содержится в  $V$  и определяемый им (частичный) порядок

$$u \geq_0 v \Leftrightarrow u - v \in V_+$$

вместе с нормой  $\|\cdot\|_0$  и операциями поточечного сложения и умножения функций наделяет пространство  $V$  структурой нормированного полуупорядоченного кольца. Более того, пространство  $V$  представляет собой  $KV$ -кольцо (см. [14]). В частности, оно является условно-полным относительно полуупорядоченности  $\geq_0$ . При этом норма  $\|\cdot\|_0$  совместима с частичным порядком: монотонная ( $\sigma$ -сходимость  $v_n \downarrow 0$  ( $v_n \uparrow \infty$ )) влечет монотонную сходимость  $\|v_n\|_0 \downarrow 0$  ( $\|v_n\|_0 \uparrow \infty$ ) в нормированном пространстве  $(V, \|\cdot\|_0)$ .

Далее основную роль играют так называемые полиномиальные функции множества из  $V$ , представляющие собой аналоги полиномиальных функционалов на векторных пространствах (см. [15]).

**Определение 3** (см. [12]). Функцию  $v \in V$  будем называть *полиномиальной порядка  $n$* , если все ее полиномиальные разности порядка  $n + 1$  обращаются в нуль:

$$v(\{e_a\}_A) = 0, \quad \{e_a\}_A \in H, \quad |A| = n + 1.$$

Совокупность всех таких функций обозначим  $V^n$ .

Отметим сразу же, что  $V^1$  – обычное пространство конечно-аддитивных мер ограниченной вариации. При этом норма полиномиальной вариации  $\|\cdot\|_0$  совпадает на  $V^1$  с классической нормой полной вариации  $\|\cdot\|$ :

$$\|v\| = \sup \left\{ \sum_{a \in \Omega(\eta)} |v(e_a)| \mid \eta = \{e_a\}_A \in H(Q) \right\},$$

а бинарное отношение  $\geq_0$  в  $V^1$  – с обычным порядком  $\geq$ :

$$u \geq v \Leftrightarrow u(e) \geq v(e), \quad e \in \Sigma.$$

Кроме того, на основании (1.2) имеем: из полиномиальности функции  $v$  порядка  $n$  вытекает ее полиномиальность любого порядка  $m > n$  (т.е. справедливы вложения  $V^n \subseteq V^m$  для всех  $m > n$ ).

**Определение 4** (см. [13]). Положим  $pV = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ . Элементы семейства  $pV$  будем называть *полиномиальными функциями множества*.

Следуя стандартным обозначениям теории векторных решеток, для каждой функции  $v \in V$  определим ее положительную, отрицательную и полную вариации

$$v^+ = v \vee 0, \quad v^- = (-v) \vee 0, \quad |v| = (-v) \vee v$$

соответственно (здесь, как обычно,  $u \vee w$  ( $u \wedge w$ ) обозначают точную верхнюю (нижнюю) грань множества  $\{u, w\}$  в пространстве  $(V, \geq_0)$ ).

**Замечание 1.** Из того, что  $V$  является  $KV$ -пространством, на основании общей теории векторных решеток получаем, что справедливо разложение

$$v = v^+ - v^- \quad \text{для каждой функции } v \in V. \tag{1.4}$$

При этом непосредственно из определения положительной ( $v^+$ ) и отрицательной ( $v^-$ ) вариаций имеем  $u \geq_0 v^+, w \geq_0 v^-$  для любых  $u, w \in V_+$  таких, что  $v = u - w$ . Отсюда, учитывая равенства  $|v| = v^+ + v^-$  и  $v^+ \wedge v^- = 0$  (вытекающие из того, что  $V$  – векторная решетка), нетрудно получить следующие выражения для полиномиальной вариации  $v$ :

$$\|v\|_0 = |v|(Q) = \inf\{u(Q) + w(Q) \mid u - w = v, u, w \in V_+\}.$$

**Определение 5** (см. [13], [14]). Будем говорить, что функция  $v \in V^n$  является *однородной порядка  $n$* , если она дизъюнктна с пространством  $V^{n-1}$  (т.е.  $|v| \wedge |u| = 0$  для всех  $u \in V^{n-1}$ ). Совокупность всех однородных порядка  $n$  полиномиальных функций множества обозначим  $V^{(n)}$ . (Здесь и далее  $V^0 = V^{(0)} := \{0\}$ .)

**Замечание 2.** Подчеркнем, что однородность функции множества в смысле определения 5 кардинально отличается от однородности степени 1, рассматриваемой в [3]. Типичным примером функций множества однородности степени 1 являются, например, суперпозиции вида  $v = f \circ \mu$ , где  $\mu$  есть неатомическая мера на борелевской  $\sigma$ -алгебре отрезка  $[0,1]$ , а  $f$  – вещественная функция, дифференцируемая на области  $R$  значений меры  $\mu$  и однородная степени 1 (т.е. такая, что  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$  для всех  $\alpha \in [0,1]$  и  $x \in R$ ). В то же время степени  $\mu^k$  указанной меры  $\mu$ , будучи однородными для всех  $k > 1$  в смысле определения 5, заведомо не являются однородными степени 1 (см. [3, § 26]).

Напомним (см. [7]), что два элемента  $x, y$  векторной решетки  $X$  называются дизъюнктивными (обозначение  $xdy$ ), если  $|x| \wedge |y| = 0$ . Далее, элемент  $x$  называется дизъюнктивным с множеством  $E \subseteq X$  (обозначение  $xdE$ ), если  $xdy$  для каждого  $y \in E$ . Напомним еще, что всякая архимедова векторная решетка  $X$  является дистрибутивной структурой (см., например, [7, теорема III.5.1] или [9, теорема 6.8]). Следовательно, в условно-полной векторной решетке  $(V, \geq_0)$  выполняется соотношение

$$(u \vee v) \wedge w = (u \wedge w) \vee (v \wedge w) \quad \text{для всех } u, v, w \in V. \tag{1.5}$$

Используя дистрибутивный закон (1.5), приведем простую, но полезную в дальнейшем детализацию определения однородности функций из  $pV$ .

**Предложение 1.** *Функция  $v \in V^n$  является однородной порядка  $n$  тогда и только тогда, когда выполняются соотношения*

$$v^+ dV_+^{n-1}, \quad v^- dV_+^{n-1}. \tag{1.6}$$

(Всюду далее для любого подмножества  $W \subseteq V$  полагаем  $W_+ = W \cap V_+$ .)

**Доказательство.** Как уже отмечалось (замечание 1), для любой функции  $v \in V$  ее положительная и отрицательная вариации дизъюнктивны:  $v^+ dv^-$ . Поэтому (см. [7]) справедливы соотношения  $|v| = v^+ + v^- = v^+ \vee v^-$  для всех  $v \in V$ . Следовательно, для любых функций  $v \in V$  и  $u \in V_+$  выполняются неравенства

$$0 \leq v^+ \wedge u \leq |v| \wedge u, \quad 0 \leq v^- \wedge u \leq |v| \wedge u.$$

Отсюда при  $v \in V^{(n)}$  и  $u \in V_+^{n-1}$  получаем требуемое:  $v^+ du$  и  $v^- du$  для всех  $u \in V_+^{n-1}$ .

С другой стороны, если для функции  $v \in V^n$  выполняются соотношения (1.6), в силу закона дистрибутивности (1.5) имеем

$$|v| \wedge u = (v^+ \vee v^-) \wedge u = (v^+ \wedge u) \vee (v^- \wedge u) = 0$$

для всех  $u \in V_+^{n-1}$ . Значит,  $v$  однородна порядка  $n$ . Предложение 1 доказано.

В дальнейшем используются следующие свойства пространств  $V^n, V^{(n)}$  и  $pV$ .

**Предложение 2** (см. [14]). *Кольцо  $pV$  является нормальной подрешеткой (идеалом) пространства  $V$  (т.е.  $v \in pV$  и  $|v| \geq_0 |u|$  влечет  $u \in pV$ ).*

**Предложение 3** (см. [13], [14]). *Для всех  $n \geq 1$  пространства  $V^n$  и  $V^{(n)}$  являются замкнутыми компонентами (полосами)  $V$  (т.е. идеалами, замкнутыми относительно  $(o)$ -сходимости). В частности, для каждой функции  $v \in V$  и для каждого  $t \geq 1$  существует проекция  $v_{(m)}$  на  $V^{(m)}$ :*

$$v_{(m)} = \sup\{u \in V_+^{(m)} \mid v^+ \geq_0 u\} - \sup\{w \in V_+^{(m)} \mid v^- \geq_0 w\};$$

при этом (по определению) справедлива импликация

$$v \in V_+ \Rightarrow v_{(m)} \in V_+^{(m)} \quad \text{для всех } m \geq 1.$$

Отметим также, что на основании предложения 3 пространства  $V^n$  и  $V^{(n)}$  являются подрешетками  $V$ . Поэтому для всех  $n \geq 1$  справедливы соотношения

$$v \in V^n \Rightarrow v^+, v^-, |v| \in V^n; \quad v \in V^{(n)} \Rightarrow v^+, v^-, |v| \in V^{(n)}.$$

Еще одно из важных свойств полиномиальных функций множества устанавливается следующей теоремой о декомпозиции.

**Теорема 1** (см. [2], [13]). *Для каждого  $n \geq 1$  пространство  $V^n$  является прямой суммой попарно-дизъюнктивных подпространств  $V^{(m)}$ : для всякой функции  $v \in V^n$  существует единственное представление  $v = \sum_{m=1}^n v_m$ , где  $v_m \in V^{(m)}$ ; при этом  $v_m = v_{(l)} \wedge |v_{(l)}| \wedge |v_{(m)}| = 0$  для всех  $l \neq m$ .*

### 1.2. Аналитический критерий однородности

Помимо определения 5 в работе используется и аналитический критерий однородности, дающий описание функций  $v \in V^{(n)}$  в терминах асимптотического поведения их полиномиальных разностей. В формулировке этого критерия, как и всюду далее, предполагается, что семейства  $H(e)$  упорядочены стандартным образом:  $\eta \leq \xi$  тогда и только тогда, когда разбиение  $\xi \in H(e)$  является измельчением разбиения  $\eta \in H(e)$  (т.е. каждый элемент разбиения  $\xi$  содержится в некотором элементе разбиения  $\eta$ ). При этом под пределом  $\lim_{\eta \in H(e)} a_\eta$  понимается предел обобщенной последовательности чисел  $\{a_\eta\}_{\eta \in H(e)}$  по направленности  $H(e)$ . Предлагаемый ниже общий аналитический критерий однородности представляет упрощение критерия  $(H)$  из [2], основанное на предложении 1 из п. 1.1.

**Предложение 4.** *Функция  $v \in V^n$  является однородной порядка  $n$  тогда и только тогда, когда выполняются соотношения*

$$(H_+) \quad \lim_{\eta \in H(Q)} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(m)}} v^+(\eta^\omega) = \lim_{\eta \in H(Q)} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(m)}} v^-(\eta^\omega) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1;$$

где

$$\Omega_\eta^{(m)} = \{\omega \subseteq \Omega(\eta) \mid |\omega| = m\}.$$

(Как и ранее, через  $|\omega|$  обозначается число элементов конечного множества  $\omega$ .)

**Доказательство.** На основании формулы (1.4) и предложения 1 для доказательства рассматриваемого утверждения достаточно ограничиться исследованием случая  $v \in V_+^n$  (т.е. при  $v^+ = v, v^- = 0$ ). Итак, пусть  $v \in V_+^n$  удовлетворяет условию  $(H_+)$ :  $\lim_{\eta \in H(Q)} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(m)}} v(\eta^\omega) = 0$  для всех  $m = 1, 2, \dots, n-1$ . Допустим, что для некоторой функции  $u \in V_+^{n-1}$  выполняется соотношение  $w = u \wedge v \neq 0$ . Тогда, в силу предложения 3 имеем:  $w \in V_+^{n-1}$ . При этом из  $w \neq 0$  вытекает, что

$w(Q) = \varepsilon$  для некоторого положительного числа  $\varepsilon$ . Однако в силу условия  $(H_+)$  существует разбиение  $\eta \in H(Q)$  такое, что

$$S_v(\eta) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(k)}} v(\eta^\omega) < \varepsilon.$$

Кроме того, из определения  $w$  вытекает неравенство  $w_0 \leq v$ . Поэтому для вышеуказанного разбиения  $\eta$  ввиду включения  $w \in V_+^{n-1}$  (и на основании формулы (1.3)) получаем соотношение

$$w(Q) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(k)}} w(\eta^\omega) \leq S_v(\eta) < \varepsilon.$$

Но оно противоречит равенству  $w(Q) = \varepsilon$ . Полученное противоречие доказывает требуемое:  $v$  однородна порядка  $n$ .

Рассмотрим теперь произвольный элемент  $v \in V_+^{(n)}$  и покажем, что он удовлетворяет условию  $(H_+)$ . Напомним (см. [13]), что для вполне положительной функции  $v$  пределы

$$v_m(e) = \lim_{\eta \in H(e)} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(m)}} v(\eta^\omega), \quad m = 1, 2, \dots, n, \tag{1.7}$$

существуют при любых  $e \in \Sigma$ , а определяемые соотношением (1.7) функции  $v_m$  удовлетворяют условиям

$$v_m \leq v, \quad v_m \in V_+^m, \quad m = 1, 2, \dots, n. \tag{1.8}$$

Учитывая определение функций  $v_m$  (соотношения (1.7)), формулу (1.3) и равенство нулю всех полиномиальных разностей функции  $v$  порядка  $m > n$ , получаем представление  $v = v_1 + \dots + v_n$ , где, согласно (1.8),  $v_m \in V_+^m$  для всех  $m = 1, 2, \dots, n$ . Поэтому функция  $w = \sum_{m=1}^{n-1} v_m$  принадлежит  $V_+^{n-1}$  и, следовательно, дизъюнктна с  $v$ . Отсюда, учитывая, что  $v = w + v_n \geq_0 w$ , получаем  $v \wedge w = w = 0$ . Но, в силу вполне положительности функций  $v_m$ , последнее соотношение влечет справедливость равенств  $v_1 = \dots = v_{n-1} = 0$ . Эти равенства и означают выполнение условия  $(H_+)$  для рассматриваемой функции  $v$ .

**Замечание 3.** На основании предложения 4 и формул (1.1), (1.3) для всех  $v$  из  $V_+^{(n)}$  выполняются равенства

$$(H_+^*) \quad \lim_{\eta \in H(Q)} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(n)}} v(\eta^\omega) = v(Q).$$

Используя формулу (1.3) и монотонность полиномиальных разностей функций  $v \in V_+^n$ , можно показать, что для однородности вполне положительных функций из  $V^n$  необходимо и достаточно выполнения условия  $(H_+^*)$ .

**Замечание 4.** Как вытекает из результатов работы [13], функции  $v_m$ , определенные в соответствии с формулой (1.7), удовлетворяют условию

$$\lim_{H(e)} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(k)}} v_m(\eta^\omega) = 0 \quad \text{для всех } e \in \Sigma \text{ и } k = 1, 2, \dots, m-1.$$

Таким образом, для любой функции  $v \in V_+^n$  выполняется равенство  $v = \sum_{m=1}^n v_m$ . При этом формула (1.7) дает явное определение проекции  $v \in pV_+$  на полосу  $V^{(m)}$ :  $v_m = \sup\{w \in V_+^{(m)} \mid w_0 \leq v\}$ .

## 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА ШЕПЛИ

### 2.1. Аксиоматическое описание вектора Шепли

Приступая к аксиоматическому описанию вектора Шепли, напомним (см. [2], [3]), что подпространство  $W \subseteq \mathcal{V}$  называется симметричным, если  $\theta \circ v \in W$  для всех  $\theta \in \mathcal{T}$  и  $v \in W$ , где  $\mathcal{T}$  – группа автоморфизмов измеримого пространства  $(Q, \Sigma)$ , а функции  $\theta \circ v$  определяются по формуле

$$\theta \circ v(e) = v(\theta(e)), \quad \theta \in \mathcal{T}, \quad e \in \Sigma.$$

Отметим, что подпространства  $V^n, V^{(n)}, pV$  и  $fV$  являются симметричными. Здесь, как и в [3], [5], через  $fV$  обозначается семейство всех финитных функций множества из  $\mathcal{V}$ :

$$fV = \{v \in \mathcal{V} \mid \exists R \in \text{Supp } v : (|R| < \infty)\}.$$

Здесь  $\text{Supp } v$  – совокупность всех носителей функции  $v$  (см. [2], [3]):

$$\text{Supp } v = \{R \in \Sigma \mid v(e \cap R) = v(e), e \in \Sigma\}.$$

**Определение 6** (см. [2], [16]). *Вектором Шепли на симметричном подпространстве  $W \subseteq V$  будем называть линейный оператор  $\Phi : W \rightarrow V^1$ , удовлетворяющий условиям*

- A1.  $\Phi(v) \in V_+^1$  для всех  $v \in W \cap V_+$ ;
- A2.  $\Phi(\theta \circ v) = \theta \circ \Phi(v)$  для всех  $\theta \in \mathcal{T}, v \in W$ ;
- A3.  $\Phi(v)(Q) = v(Q)$  для всех  $R \in \text{Supp } v, v \in W$ .

**Замечание 5.** Предлагаемая аксиоматика рассчитана на пространства, содержащие функции с ненулевой атомической (дискретной) составляющей, в том числе и на финитные игры. Поэтому условие A3, касающееся парето-оптимальности распределения  $\Phi(v)$ , дано в той же форме, что и для конечных игр (для неатомических, как видно из [3], достаточен вариант  $\Phi(v)(Q) = v(Q)$ ). Учитывая теоремы единственности (см. [1], [3]), установленные для  $bv'NA$  и  $fV$ , нетрудно проверить, что конструируемый далее оператор  $\Phi_*$  совпадает с классическим значением как на  $fV$ , так и на подпространстве  $pvNA = bv'NA \cap pV$ . Напомним (см. [3]), что  $bv'NA$  – замыкание в норме полной вариации линейного пространства, порожденного всеми играми вида  $f \circ \mu$ , где  $f$  – функция ограниченной вариации на отрезке  $I = [0, 1]$  такая, что  $f(0) = 0$  и непрерывная в точках 0 и 1, а  $\mu$  – неатомическая вероятностная мера на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $B$  множества  $I$ . Отметим также, что в отличие от работы [3], условие A1 накладывает более слабое требование на положительность оператора  $\Phi$ : вместо конуса монотонных функций множества в A1 используется более узкий конус вполне положительных функций  $V_+$ .

### 2.2. Функционал Шепли: основные свойства

В дальнейших рассуждениях ограничимся случаем  $W = pV$  (хотя используемая аргументация без существенных изменений проходит и для более широкого класса аналитических функций множества ограниченной полиномиальной вариации, см. [16]). Суть предлагаемого подхода к построению вектора Шепли на  $pV$  состоит в использовании подходящего билинейного функционала  $Sh : pV \times B \rightarrow \mathbb{R}$ , порождающего искомым линейный оператор  $\Phi_*$  в соответствии с формулой

$$\Phi_*(v)(e) = Sh(v, \chi_e), \quad e \in \Sigma. \quad (2.1)$$

Здесь, как обычно,  $\chi_e$  – индикаторная функция множества  $e$  (т.е.  $\chi_e(t) = 1$  при  $t \in e$  и  $\chi_e(t) = 0$  при  $t \in Q \setminus e$ ),  $B = B(Q, \Sigma)$  – векторная решетка ограниченных  $\Sigma$ -измеримых вещественных функций на  $Q$  с нормой  $\|f\| = \sup\{|f(t)| \mid t \in Q\}$  и конусом положительных элементов  $B_+ = B_+(Q, \Sigma) = \{f \in B \mid f(t) \geq 0, t \in Q\}$ . Как будет показано далее, значение функционала  $Sh$ , фигурирующего в формуле (2.1), представляет собой  $v$ -интеграл некоторого специального усреднения функции  $f$ . Однако ввиду того, что в ряде случаев более удобна стандартная трактовка, в качестве базисного выберем тот вариант определения  $Sh$  (называемого в дальнейшем функциона-

лом Шепли), который наиболее близок к теоретико-вероятностной интерпретации оператора  $\Phi$  (см. [1], [3], [4]).

Приведем необходимые обозначения. Зафиксируем  $v \in \mathcal{V}$ ,  $f \in B$ ,  $\eta = \{e_i\}_1^m$  из  $H(Q)$  и множество  $\tau_\eta = \{t_i\}_1^m$  такое, что  $t_i \in e_i \forall i = 1, 2, \dots, m$ . Обозначая через  $\Pi_m = \Pi(\Omega_\eta)$  совокупность всех перестановок множества  $\Omega(\eta) = \{1, 2, \dots, m\}$ , положим

$$S_v(f, \eta, \tau_\eta) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in \Pi_m} S_v^\pi(f, \eta, \tau_\eta), \tag{2.2}$$

где

$$S_v^\pi(f, \eta, \tau_\eta) = \sum_{i=1}^m f(t_{\pi(i)}) v_i^\pi(\eta),$$

$$v_1^\pi(\eta) = v(e_{\pi(1)}), \quad v_i^\pi(\eta) = v(\cup_{k=1}^i e_{\pi(k)}) - v(\cup_{k=1}^{i-1} e_{\pi(k)}), \quad i \in [2, m].$$

**Определение 7** (см. [2]). *Функционалом Шепли на произведении пространств  $pV$  и  $B$  будем называть отображение  $Sh : pV \times B \rightarrow \mathbb{R}$ , определяемое формулой*

$$Sh(v, f) = \lim_{\eta \in H(Q)} S_v(f, \eta, \tau_\eta), \quad v \in pV, \quad f \in B. \tag{2.3}$$

Для проверки корректности определения 7 необходимо убедиться, что при всех  $v \in pV$  и  $f \in B$  предел обобщенной последовательности  $\{S_v(f, \eta, \tau_\eta)\}_{H(Q)}$  существует, конечен и не зависит от выбора множеств  $\tau_\eta$ . Введем некоторые понятия и обозначения, необходимые для такой проверки.

Обозначим  $e^{[N]}$  совокупность всех конечных подмножеств множества  $e$  и рассмотрим произвольные функции  $\alpha : Q^{[N]} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $v \in V$ . Для каждого разбиения  $\eta = \{e_i\}_1^m \in H(Q)$  зафиксируем некоторую систему  $\tau = \tau_\eta = \{t_i\}_1^m$ , удовлетворяющую условию  $t_i \in e_i, i \in \Omega(\eta)$ , и положим

$$S_v^\alpha(\eta, \tau) = \sum_{\omega \subseteq \Omega(\eta)} \alpha(\tau^\omega) v(\eta^\omega),$$

где  $\tau^\omega = \{t_i \in \tau | i \in \omega\}$  для всех  $\omega \subseteq \Omega(\eta)$ .

**Определение 8** (см. [2]). Скажем, что функция  $\alpha : Q^{[N]} \rightarrow \mathbb{R}$  является  $v$ -интегрируемой, если предел обобщенной последовательности  $\{S_v^\alpha(\eta, \tau)\}_{H(Q)}$  существует, конечен и не зависит от выбора систем  $\tau_\eta, \eta \in H(Q)$ . Этот предел обозначим  $\int \alpha dv$  и назовем  $v$ -интегралом функции  $\alpha$ .

**Замечание 6.** В ряде случаев (например, для регулярных игр, см. [14])  $v$ -интегрирование редуцируется к вычислению интеграла функции  $\alpha$  по “обычной мере”:  $\int \alpha dv = \int \alpha d\mu_v$ , где  $\mu_v$  – счетно-аддитивная функция множества, восстанавливаемая по регулярной игре  $v$  на основании соотношений  $\mu_v(e^{[N]}) = v(e)$ ,  $e \in \Sigma$  (подробности см. в [5], [10]).

К числу  $v$ -интегрируемых функций относятся различные композиции измеримых и непрерывных функций, подчиненные некоторым требованиям согласованности. Приведем один из вариантов такой композиции. Пусть функция  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  такова, что  $\|f\| = \sup\{|f(t)| | t \in Q\} < \infty$ , а  $\phi$  – симметричная вещественнозначная функция, определенная на  $n$ -мерном кубе  $[-\|f\|, \|f\|]^n$ .

Композицией  $f$  и  $\phi$  будем называть функцию  $f * \phi : Q^{[N]} \rightarrow \mathbb{R}$ , задаваемую формулой

$$f * \phi = \begin{cases} \phi(f(t_1), \dots, f(t_n)), & \tau = \{t_i\}_1^n \in Q^{(n)}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $Q^{(n)} = \{\tau \subseteq Q | |\tau| = n\}$ . Формулируемые ниже леммы дают простые условия  $v$ -интегрируемости композиций  $f * \phi$ , которые используются при проверке корректности определения функционала Шепли.

**Лемма 1** (см. [2]). Пусть  $f$  – произвольная  $\Sigma$ -измеримая функция из  $B$ , а  $\phi$  – непрерывная симметричная функция, заданная на  $n$ -мерном кубе  $[-\|f\|, \|f\|]^n$ . Тогда их композиция  $f * \phi$  является  $v$ -интегрируемой для любой функции  $v \in pV$ .

Прежде чем зафиксировать тот факт, что функционал  $Sh$  корректно определен, приведем другую формулу для частных сумм  $S_v(f, \eta, \tau_\eta)$ , задаваемых соотношениями (2.2). Такая формула, отражающая связь между значениями  $Sh(v, f)$  и  $v$ -интегралами усредняющих продолжений  $f$  на  $Q^{|\mathbb{N}|}$  дается следующей леммой (ниже  $\tau_\eta^\omega := \{t_i \in \tau_\eta \mid i \in \omega\}$ ).

**Лемма 2** (см. [2]). Для всех  $v \in V$  и  $f \in B$  справедлива формула

$$S_v(f, \eta, \tau_\eta) = \sum_{\omega \subseteq \Omega(\eta)} f_\sigma(\tau_\eta^\omega) v(\eta^\omega), \tag{2.4}$$

где

$$f_\sigma(\tau) := \sum_{t \in \tau} f(t) / |\tau|, \quad \tau \in Q^{|\mathbb{N}|}.$$

Леммы 1, 2 доказывают корректность определения функционала  $Sh$ .

**Теорема 2** (см. [2]). Функционал Шепли корректно определен для всех  $v \in pV$  и  $f \in B$ . При этом справедлива формула

$$Sh(v, f) = \int f_\sigma dv. \tag{2.5}$$

Как вытекает из формулы (2.4) для частных сумм  $S_v(f, \eta, \tau_\eta)$ , функционал Шепли линеен по каждому аргументу. Укажем некоторые дополнительные свойства этого функционала, обеспечивающие возможность построения на его основе искомого оператора  $\Phi_* : pV \rightarrow V^1$ , удовлетворяющего условиям А1–А3.

**Теорема 3** (см. [2]). Билинейный функционал  $Sh : pV \times B \rightarrow \mathbb{R}$ , задаваемый формулой (2.3), непрерывен на произведении пространств  $(pV, \|\cdot\|_0)$  и  $(B, \|\cdot\|)$ . Он удовлетворяет следующим условиям:

- Sh1.  $Sh(v, f) \geq 0, v \in pV_+ = pV \cap V_+, f \in B_+$ ;
- Sh2.  $Sh(v, \chi_R) = v(Q), v \in pV, R \in \text{Supp } v$ ;
- Sh3.  $Sh(\theta \circ v, f) = Sh(v, \theta^{-1} \circ f), v \in pV, \theta \in T, f \in B$ ;
- Sh4.  $|Sh(v, f)| \leq \|f\| \cdot \|v\|_0, v \in pV, f \in B$

(здесь и далее  $\theta \circ f(t) := f(\theta(t)), t \in Q$ ).

### 2.3. Функционал Шепли и оператор $\Phi_*$

Рассмотрим теперь отображение  $\Phi_* : pV \rightarrow \mathcal{V}$ , определяемое формулой

$$\Phi_*(v) = S(v), \quad v \in pV, \tag{2.6}$$

где  $S(v)$  – функция множества, представляющая собой сужение линейного функционала  $Sh(v, \cdot)$  на семейство всех индикаторных функций множеств из  $\Sigma$ . Так как функционал  $Sh$  непрерывен и билинеен, то  $\Phi_*$  – линейный оператор на  $pV$ ; при этом для каждого  $v \in pV$  функция множества  $S(v)$  – аддитивная мера ограниченной вариации на измеримом пространстве  $(Q, \Sigma)$ . Опираясь на теорему 3, можно установить, что линейный оператор  $\Phi_*$  удовлетворяет всем требованиям определения 6. Действительно, свойства А1, А2 и соотношения Sh1, Sh2 теоремы 3 идентичны. Что касается А3 (перестановочность  $\Phi_*$  с автоморфизмами  $\theta \in T$ ), то это свойство вытекает из цепочки равенств

$$\Phi_*(\theta \circ v) = S(v)(\theta^{-1} \circ \chi_e) = S(v)(\chi_{\theta(e)}) = \theta \circ \Phi_*(v)(e), \quad e \in \Sigma.$$

Подводя итоги и учитывая теоремы единственности для подпространств  $fV$  и  $pV \cap pNA = bv'NA \cap pV$ , вытекающие из соответствующих результатов [1] и [3], сформулируем вышесказанное в виде следующей теоремы.

**Теорема 4** (см. [2], [12]). *Оператор  $\Phi_*$ , определенный на пространстве  $pV$  формулой (2.6), удовлетворяет всем условиям А1–А3. Более того, если  $Q = [0,1]$ , а  $\Sigma = \mathfrak{B}$ , то каждый линейный оператор  $\Phi : pV \rightarrow V^1$ , для которого выполняются условия А1–А3, совпадает с  $\Phi_*$  на подпространствах  $fV$  и  $pV \cap pNA$ .*

### 3. ПОЛЯРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА ШЕПЛИ

#### 3.1. Полярная форма однородной кооперативной игры

Приведем некоторые понятия, необходимые для построения интересующего нас представления оператора  $\Phi_*$ . Прежде всего напомним, что функция  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется симметричной полиаддитивной функцией множества, если она аддитивна по каждому аргументу и, кроме того, для любых  $e_1, \dots, e_n \in \Sigma$  и  $\pi \in \Pi_n$  выполняется равенство

$$\psi(e_1, \dots, e_n) = \psi(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}),$$

где, как и ранее,  $\Pi_n$  – совокупность всех перестановок множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Выпуклый конус всех неотрицательных симметричных полиаддитивных функций  $\psi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  обозначим через  $\Psi_+^n$ , а векторное пространство, состоящее из функций, представимых в виде разности двух элементов из  $\Psi_+^n$  – через  $\Psi^n$ . Выделим класс полиаддитивных функций  $\psi \in \Psi^n$ , аналогичных однородным функциям множества из  $V^{(n)}$ . С этой целью каждому разбиению

$$\eta = \{e_i\}_1^n \in H_n(Q) := \{\xi \in H(Q) \mid |\Omega(\xi)| \geq n\}$$

сопоставим совокупность  $\Pi_n^\eta$  всех упорядоченных  $n$ -элементных подмножеств множества  $\Omega(\eta)$ . Зафиксируем  $\psi \in \Psi_+^n$  и определим обобщенную последовательность  $\{\psi_\eta\}_{\eta \in H_n(Q)}$ , где

$$\psi_\eta = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Pi_n^\eta} \psi(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}).$$

Учитывая неотрицательность и полиаддитивность  $\psi$ , нетрудно убедиться, что последовательность  $\{\psi_\eta\}_{\eta \in H_n(Q)}$  является монотонно возрастающей:

$$\eta' \geq \eta \Rightarrow \psi_{\eta'} \geq \psi_\eta.$$

Следовательно, для каждой функции  $\psi \in \Psi_+^n$  существует предел

$$\psi_{(n)}(Q) = \lim_{\eta \in H_n(Q)} \psi_\eta.$$

Обозначим  $\Psi_+^{(n)}$  совокупность функций из  $\Psi_+^n$ , для которых выполняется условие

$$\psi_{(n)}(Q) = \psi(Q, \dots, Q),$$

и положим  $\Psi^{(n)} = \Psi_+^{(n)} - \Psi_+^{(n)}$ .

**Определение 9** (см. [2]). Элементы векторного пространства  $\Psi^{(n)}$  будем называть *однородными полиаддитивными функциями множества*.

В приведенных обозначениях одно из главных понятий работы – понятие полярной формы однородной игры  $v$  – принимает следующий вид.

**Определение 10** (см. [2]). Функция  $\psi_v \in \Psi^{(n)}$  называется *полярной формой игры  $v \in V^{(n)}$* , если выполняется соотношение

$$v(e) = \psi_v(e, \dots, e) \quad \text{для всех } e \in \Sigma. \tag{3.1}$$

Другими словами, полиаддитивная функция  $\psi_v \in \Psi^{(n)}$  – полярная форма игры  $v \in V^{(n)}$ , если ее диагонализация (сужение  $\psi_v$  на диагональ

$$D = \{(e_1, \dots, e_n) \in \Sigma^n \mid e_1 = \dots = e_n\},$$

рассматриваемое как функция одного аргумента) совпадает с  $v$ .

Формулируемый ниже результат работы [2] показывает, что для любой однородной игры  $v \in V^{(n)}$  полярная форма  $\psi_v$  существует и единственна; кроме того, для каждого  $n \geq 1$  отображение  $v \mapsto \psi_v$  является линейным изоморфизмом векторных решеток  $V^{(n)}$  и  $\Psi^{(n)}$ , наделенных конусами  $V_+^{(n)}$  и  $\Psi_+^{(n)}$  соответственно.

**Теорема 5** (см. [2]). *Для каждого  $n \geq 1$  существует единственный линейный изоморфизм  $L_{(n)} : V^{(n)} \rightarrow \Psi^{(n)}$  такой, что*

L1.  $L_{(n)}(v)(e, \dots, e) = v(e), e \in \Sigma;$

L2.  $L_{(n)}(\theta \circ v) = \theta \circ L_{(n)}(v), \theta \in \mathcal{T};$

L3.  $L_{(n)}(V_+^{(n)}) = \Psi_+^{(n)},$

где  $\theta \circ \psi(e_1, \dots, e_n) = \psi(\theta(e_1), \dots, \theta(e_n))$  для всех  $e_1, \dots, e_n \in \Sigma$  и  $\theta \in \mathcal{T}$ .

Ясно, что условие L1 есть в точности требование (3.1), предъявляемое к полярной форме  $\psi_v$  игры  $v \in V^{(n)}$ . В качестве следствия теоремы 5 получаем следующую характеристику однородных функций из  $V$ , уточняющую соответствующий результат из [13].

**Следствие 1** (см. [2]). *Функция  $v$  принадлежит  $V^{(n)}$  тогда и только тогда, когда она является диагонализацией некоторой функции  $\psi$  из  $\Psi^{(n)}$ .*

Приведем один из основных результатов работы, устанавливающий связь между полярными формами однородных игр и линейным оператором  $\Phi_*$ .

**Теорема 6** (см. [2]). *Для каждого  $n \geq 1$  и  $v \in V^{(n)}$  выполняется соотношение*

$$\Phi_*(v)(e) = \psi_v(e, Q, \dots, Q), \quad e \in \Sigma, \tag{3.2}$$

где  $\psi_v$  – полярная форма игры  $v$ .

### 3.2. Вектор Шепли однородных неатомических игр

Рассматриваемые далее игры представляют собой линейные комбинации функций вида  $v = \prod_{i=1}^n \mu_i^{\alpha_i}$ , где  $\mu_1, \dots, \mu_n$  – произвольные конечные неотрицательные неатомические меры, определенные на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}$  единичного отрезка  $[0, 1]$ , а  $\alpha_i$  – произвольные натуральные числа. Используя приводимую ниже формулу для полиномиальных разностей произведения  $v_1 \cdot v_2$  функций  $v_1, v_2 \in V$ :

$$(v_1 \cdot v_2)(\eta) = \sum_{\omega_1 \times \omega_2 \mid \omega_1 \cup \omega_2 = \Omega(\eta)} v_1(\eta^{\omega_1}) \cdot v_2(\eta^{\omega_2}), \quad \eta \in H, \tag{3.3}$$

получаемую индукцией на основании равенств (1.1)–(1.3), легко проверить справедливость неравенства

$$\|v_1 \cdot v_2\|_0 \leq \|v_1\|_0 \cdot \|v_2\|_0. \tag{3.4}$$

Более того, если  $v_i \in V^{n_i}$  ( $i = 1, 2$ ), то, в силу (3.3), имеем  $w(e_1, \dots, e_{n+1}) = 0$  для любого разбиения  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\} \in H$ , где  $w = v_1 \cdot v_2$ ,  $n = n_1 + n_2$ . Следовательно (с учетом (3.3) и (3.4)), справедлива импликация

$$[v_i \in V^{n_i} \ (i = 1, 2)] \Rightarrow v_1 \cdot v_2 \in V^{n_1+n_2}. \tag{3.5}$$

Поэтому индукцией по  $n$  нетрудно убедиться, что интересующие нас функции  $v = \prod_{i=1}^n \mu_i^{\alpha_i}$  принадлежат  $V^{\alpha_1+\dots+\alpha_n}$ . Отметим, что аналог соотношения (3.5) для однородных функций множества справедлив (в общем случае) лишь при некоторых дополнительных условиях, касающихся функций  $v_i \in V^{(n_i)}$ . Например, при наличии непересекающихся носителей функций  $v_i$  использование формулы (3.3) и предложения 4 дает следующее уточнение соотношения (3.5):

$$[v_i \in V_+^{(n_i)}, i = 1, 2] \ \& \ [\exists R_i \in \text{Supp } v_i (R_1 \cap R_2 = \emptyset)] \Rightarrow v_1 \cdot v_2 \in V_+^{(n_1+n_2)}. \tag{3.6}$$

Подчеркнем, что для однородных вполне положительных функций  $v_1, v_2$  с конечными носителями  $R_1, R_2$  требование дизъюнктивности последних, аналогичное тому, что фигурирует в соотношении (3.6), является и необходимым условием однородности произведения  $v_1 \cdot v_2$ .

Оказывается, что для функций вида  $v = \prod_{i=1}^n \mu_i^{\alpha_i}$  с неатомическими счетно-аддитивными сомножителями  $\mu_i$  однородность имеет место без каких-либо дополнительных предположений. Приведем некоторые приложения теоремы 6 о полярном представлении вектора Шепли для однородных полиномиальных игр к вычислению этого вектора для полиномиальных игр, порожденных неатомическими мерами. Обозначим через  $cV_+^1 = cV_+^1(\mathcal{B})$  семейство неотрицательных конечных счетно аддитивных функций множества, заданных на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}$  единичного интервала  $[0, 1]$ . Применяя известную теорему Ляпунова о выпуклости множества значений векторзначной неатомической меры (см. [17]), можно убедиться в справедливости следующей леммы, описывающей широкий класс бесконечных однородных полиномиальных игр.

**Лемма 3** (см. [2]). *Если вероятностные меры  $\mu_1, \dots, \mu_n \in cV_+^1(\mathcal{B})$  неатомические, то функция  $v = \prod_{i=1}^n \mu_i$  является вполне положительной и однородной порядка  $n$ .*

**Доказательство.** Полиномиальность порядка  $n$  и вполне положительность функции  $v$  вытекают из неотрицательности и аддитивности функций  $\mu_i$  и тождества (3.3). Остается убедиться лишь в том, что для  $v$  выполняется критерий однородности ( $H_+$ ). С этой целью рассмотрим векторзначную меру  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ . На основании теоремы А.А. Ляпунова из [17] о выпуклости области значений неатомической векторзначной меры имеем: множество  $\mu(\Sigma) = \{(\mu_1(e), \dots, \mu_n(e)) \mid e \in \Sigma\}$  выпуклое. Поэтому для любого  $k \geq 1$  найдутся  $Q_1, \dots, Q_k \in \mathcal{B}$  такие, что  $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq \dots \subseteq Q_k = Q$ , и при этом  $\mu_i(Q_j) = j/k$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, k$ . Рассмотрим разбиение  $\xi_k = \{f_1, \dots, f_k\} \in H(Q)$ , определенное соотношениями

$$f_1 = Q_1, \quad f_j = Q_j \setminus Q_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots, k.$$

Ясно, что  $\mu_i(f_j) = 1/k$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  и  $j = 1, 2, \dots, k$ . Используя эти равенства и формулы (ниже  $\Pi_n^m$  – совокупность всех отображений  $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$  таких, что  $\pi(\{1, 2, \dots, n\}) = \{1, 2, \dots, m\}$ )

$$v(\eta) = \sum_{\pi \in \Pi_n^m} \prod_{i=1}^n \mu_i(e_{\pi(i)}), \quad \eta = \{e_1, \dots, e_m\} \in H, \quad m = 1, 2, \dots, n-1 \tag{3.7}$$

(полученные применением соотношений (1.3) и индукции по  $m$ ), оценим величину  $v[\xi_k] = \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\omega \in \Omega_\xi^{(m)}} v(\xi_k^\omega)$  при  $k \geq n$  (здесь, как и ранее,  $\Omega_\xi^{(m)} = \{\omega \subseteq \Omega(\xi) \mid |\omega| = m\}$ ). Эта оценка имеет вид

$$v[\xi_k] \leq \frac{1}{k^n} \sum_{m=1}^{n-1} C_k^m |\Pi_n^m|. \tag{3.8}$$

Учитывая, что  $k! \leq (k - m)!k^m$ , имеем  $C_k^m/k^n \leq 1/k^{n-m}$  для всех  $m = 1, 2, \dots, n - 1$ . Отсюда, принимая во внимание, что величины  $|\Pi_n^m|$  не зависят от  $k$ , получаем следующую модификацию оценки (3.8):

$$v[\xi_k] \leq \sum_{m=1}^{n-1} \frac{a_m}{k^{n-m}},$$

где положительные константы  $a_m$  не зависят от  $k$ . Учитывая соотношения (1.2), нетрудно убедиться, что последовательность  $\left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(m)}} \mu(\eta^\omega) \right\}_{H(Q)}$  является монотонно убывающей для любой вполне положительной функции  $u$ . Следовательно, ввиду равенства  $\lim_{k \rightarrow \infty} v[\xi_k] = 0$ , вытекающего из полученной модификации оценки (3.8), имеем требуемое: функция  $v$  удовлетворяет условию  $(H_+)$ . Лемма 3 доказана.

Использование леммы 3 и теоремы 6 позволяет предложить более конструктивный, по сравнению с [3], способ вычисления вектора Шепли для игр вида  $u = f \circ \mu$ , где  $f$  – полиномиальная функция  $n$  вещественных переменных, а  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  – неатомическая векторзначная мера. Эффективность предлагаемого способа базируется на достаточно простом строении полярных форм указанных игр.

**Лемма 4** (см. [2]). *Если меры  $\mu_1, \dots, \mu_n$  удовлетворяют условиям леммы 3, то полярная форма  $\psi_v$  функции  $v = \prod_{i=1}^n \mu_i$  имеет вид*

$$\psi_v(e_1, \dots, e_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_n} \prod_{i=1}^n \mu_i(e_{\pi(i)}), \quad e_1, \dots, e_n \in \Sigma, \tag{3.9}$$

где  $\Pi_n = \Pi_n^n$  – совокупность перестановок множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**Доказательство.** Соотношение  $v(e) = \prod_{i=1}^n \mu_i(e) = \psi_v(e, \dots, e)$ ,  $e \in \Sigma$ , как и полиаддитивность и симметричность функции  $\psi_v$ , определенной формулой (3.9), следуют непосредственно из ее построения. Для проверки включения  $\psi_v \in \Psi^{(n)}$  зафиксируем какое-нибудь разбиение  $\eta = \{e_1, \dots, e_r\} \in H(Q)$  ( $r \geq n$ ) и, используя формулу (3.7) и симметричность рассматриваемой функции  $\psi_v$ , выразим значения этой функции на цилиндрических множествах  $e_{i_1} \times \dots \times e_{i_n}$  через полиномиальные разности функции  $v$ . Соответствующие выражения имеют вид

$$\psi_v(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \frac{1}{n!} v(\eta^\omega)$$

для каждого  $n$ -элементного подмножества  $\omega = \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \Omega(\eta)$ . Отсюда, обозначая, как и ранее, через  $\Pi_n^\eta$  совокупность упорядоченных  $n$ -элементных подмножеств множества  $\Omega(\eta)$ , получаем: величина  $(\psi_v)_\eta := \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Pi_n^\eta} \psi_v(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$  равна сумме  $\sum_{\omega \in \Omega_\eta^{(n)}} v(\eta^\omega)$ . Следовательно, на основании леммы 3 и критерия однородности  $(H_+^*)$  (см. замечание 3) имеем  $\lim_{\eta \in H_n(Q)} (\psi_v)_\eta = v(Q)$ . Но тогда, в силу равенства  $v(Q) = \psi_v(Q, \dots, Q)$ , получаем  $\lim_{\eta \in H_n(Q)} (\psi_v)_\eta = \psi_v(Q, \dots, Q)$ , что и доказывает требуемое включение  $\psi_v \in \Psi^{(n)}$ . Лемма 4 доказана.

Приведем, наконец, несколько простых, но важных для общей теории вектора Шепли (см. [3]) результатов, являющихся прямым следствием лемм 3, 4 и теоремы 6 о представлении оператора  $\Phi_*$ .

**Предложение 5.** *Для любого набора неатомических мер  $\mu_1, \dots, \mu_n \in cV_+^1(\mathcal{B})$  справедлива формула*

$$\Phi_* \left( \prod_{i=1}^n \mu_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j \neq i} \mu_j(Q) \mu_i. \tag{3.10}$$

**Доказательство.** На основании леммы 3 функция  $v = \prod_{i=1}^n \mu_i$  является однородной порядка  $n$ . Используя формулу (3.2) из теоремы 6 и формулу (3.9) для полярной формы игры  $v$ , установленную в лемме 4, получаем искомое:

$$\Phi_*(v)(e) = \Psi_v(e, Q, \dots, Q) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n (n-1)! \left( \prod_{j \neq i} \mu_j(Q) \right) \mu_i(e) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j \neq i} \mu_j(Q) \right) \mu_i(e), \quad e \in \Sigma.$$

**Следствие 2.** Пусть  $v = f \circ \mu$ , где  $f$  – полиномиальная функция  $n$  вещественных переменных такая, что  $f(0) = 0$ , а  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  – векторзначная неатомическая мера, заданная на  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}$ . Тогда вектор Шепли игры  $v$  является линейной комбинацией мер  $\mu_1, \dots, \mu_n$ . В частности, если  $\mu_1, \dots, \mu_n$  – вероятностные неатомические меры, а  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} c_\alpha x^\alpha$  (здесь  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  – мультииндексы, определяющие степени соответствующих мономов  $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ , а  $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ), то справедлива формула

$$\Phi_*(v) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \frac{\alpha_i}{|\alpha|} c_\alpha \right) \mu_i. \tag{3.11}$$

Прямым следствием формулы (3.11) является довольно неожиданный результат.

**Следствие 3.** Пусть  $v = \sum_{i=1}^n c_i \mu^i$ , где  $\mu$  – неатомическая вероятностная мера на борелевской  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{B}$ . Если  $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ , то  $\Phi_*(v) = \mu$ .

### 3.3. О векторе Шепли конечных однородных игр

Подчеркнем, что условие неатомичности мер  $\mu_1, \dots, \mu_n$  в лемме 3 имеет принципиальное значение. Справедливость импликаций вида

$$\mu_1, \dots, \mu_n \in V^1 \Rightarrow \prod_{i=1}^n \mu_i \in V^{(n)}$$

имеет место, вообще говоря, лишь при достаточно сильных дополнительных предположениях относительно аддитивных функций  $\mu_i$ , включающих некоторые условия дизъюнктивности их дискретных составляющих. Вместе с тем в целом ряде случаев сами формулы вектора Шепли однородных игр вида  $\prod_{i=1}^n \mu_i$  с аддитивными сомножителями  $\mu_i$  вполне аналогичны соотношению (3.10). Не вдаваясь в технические детали, проиллюстрируем сказанное на примере игр из  $V(Q)$  с конечным множеством игроков  $Q = \{1, 2, \dots, q\}$  и  $\Sigma = 2^Q := \{e \mid e \subseteq Q\}$ . Для начала в терминах так называемых дивидендов Харшаньи дадим для таких игр более детальное описание некоторых величин и объектов, введенных в п. 1. Напомним (см. [4], [18]), что дивидендами Харшаньи  $v_e$  коалиций  $e \subseteq Q$  игры  $v \in V(Q)$  называются соответствующие коэффициенты разложения

$$v = \sum_{e \in \sigma_0} v_e u^e$$

функции  $v$  по базису  $\{u^e\}_{e \in \sigma_0}$  пространства  $V(Q)$ , состоящему из игр единогласия  $u^e$ . Последние для каждого  $e \in \sigma_0$  определяются формулой

$$u^e(f) = \begin{cases} 1, & \text{если } e \subseteq f; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(здесь, как обычно,  $\sigma_0 = \{e \subseteq Q \mid e \neq \emptyset\}$ ). О полноте и независимости функций  $u^e$  см. [1].

Нетрудно убедиться, что для пространства конечных игр  $V(Q)$  выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 u \geq_0 v &\Leftrightarrow \forall e \subseteq Q [u_e \geq v_e], \\
 V_+(Q) &= \{v \in V(Q) | v_e \geq 0 \text{ для всех } e \subseteq Q\}, \\
 V^m(Q) &= \{v \in V(Q) | v_e = 0 \text{ для всех } e \text{ при } |e| \geq m + 1\}, \quad m \in [1, q], \\
 V^{(m)}(Q) &= \{v \in V(Q) | v_e = 0 \text{ для всех } e \text{ при } |e| \neq m\}, \quad m \in [1, q], \\
 pV(Q) &= V(Q)
 \end{aligned}$$

(как и ранее, символ  $|e|$  обозначает мощность множества  $e$ ).

**Замечание 7.** Соотношение  $pV(Q) = V(Q)$ , показывающее, что все конечные игры являются полиномиальными, вытекает из того, что при  $|Q| = q$  все полиномиальные разности функции  $v \in V(Q)$  порядка  $m \geq q + 1$  равны нулю. Действительно, в рассматриваемой ситуации каждое разбиение  $\eta\{e_1, \dots, e_m\}$  порядка  $m \geq q + 1$  содержит, по крайней мере, одно пустое множество  $e_k$ . Но в этом случае, как нетрудно убедиться, из формулы (1.1) вытекает равенство  $v(\eta) = 0$ .

Что касается формулы вектора Шепли  $\Phi(v)$  конечной игры  $v \in V(Q)$ , то при использовании дивидендов Харшаньи  $v_e$  она принимает достаточно простой вид

$$\Phi(v)_i = \sum_{e \in \sigma_i} v_e / |e|, \quad i \in Q,$$

где  $\sigma_i = \{e \subseteq Q | i \in e\}$ ,  $i \in Q$  (см., например, [1]). Уточнение указанной формулы в случае однородных игр на основании вышеприведенного описания пространств  $V^{(m)}$  принимает форму

$$\Phi(v)_i = \frac{1}{m} \sum_{e \in \sigma_i} v_e, \quad v \in V^{(m)}(Q), \quad i \in Q, \quad m = 1, 2, \dots, q. \tag{3.12}$$

Наконец, из (3.12) очевидным образом вытекает следующая простая формула вектора Шепли для конечных однородных игр (уже не требующая вычисления их дивидендов Харшаньи):

$$\Phi(v)_i = \frac{1}{m} [v(Q) - v(Q \setminus i)], \quad v \in V^{(m)}(Q), \quad i \in Q, \quad m = 1, 2, \dots, q \tag{3.13}$$

(т.е. в случае однородности порядка  $m$  игры  $v \in V(Q)$  компоненты ее вектора Шепли, согласно (3.13), равны  $m$ -м долям соответствующих маргинальных вкладов  $v(Q) - v(Q \setminus i)$  ее игроков в “большую” коалицию  $Q$ ).

Легко проверить, что и описание порядка  $\geq_0$  на пространствах конечных однородных игр допускает существенное упрощение:

$$u \geq_0 v \Leftrightarrow \forall e \subseteq Q [u(e) \geq v(e)], \quad u, v \in V^{(m)}(Q), \quad m = 1, 2, \dots, q.$$

**Замечание 8.** Сравнивая выписанные выше соотношения с определениями и результатами, приведенными в разд. 1, 2, легко убедиться, что наиболее важные объекты и утверждения в общем случае имеют значительно более сложное описание, нежели для конечных игр (так обстоит дело, например, с общим определением однородности полиномиальной игры – определение 5). Главной причиной представляется отсутствие подходящего аналога дивидендов Харшаньи для общего случая игр с бесконечным числом участников. В конечном же случае следует отметить полезную роль указанных дивидендов и при анализе несимметричных аналогов вектора Шепли (см., например, [4], [18], [19]).

Используя приведенные описания конуса  $V_+(Q)$  и пространств  $V^m(Q)$ ,  $V^{(m)}(Q)$ , покажем, что для конечных игр  $v = \prod_{i=1}^n \mu_i$ , где  $\mu_i = (\mu_{ik})_{k \in Q}$  – ненулевые аддитивные меры из  $V_+^1(Q)$ , справедливо следующее утверждение.

**Предложение 6.** Конечная игра  $v = \prod_{i=1}^n \mu_i$  является однородной порядка  $n$  тогда и только тогда, когда носители мер  $\mu_i$  попарно дизъюнкты:

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \in V_+^{(n)}(Q) \Leftrightarrow Q_i \cap Q_j = \emptyset \quad \text{для всех } i \neq j,$$

где  $Q_i = \{k \in Q \mid \mu_{ik} \neq 0\}$  – (наименьший) носитель меры  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Доказательство.** Из формулы (3.3) сразу же вытекает, что игра  $v = \prod_{i=1}^n \mu_i$  принадлежит пространству  $V^n(Q)$ . Значит, согласно вышеприведенному описанию пространств  $V^n(Q)$ , выполняются равенства  $v_e = 0$  для всех коалиций  $e$  с числом игроков, превышающим величину  $n$ . Для завершения проверки включения  $\prod_{i=1}^n \mu_i \in V_+^{(n)}(Q)$  в случае попарной дизъюнктности носителей  $Q_i$  остается убедиться, что в указанной ситуации  $v_e = 0$  для любой коалиции  $e$  такой, что  $|e| < n$ . Но при  $|e| < n$  коалиция  $e$ , очевидным образом, не пересекается с одним из  $n$  непустых попарно дизъюнктивных носителей  $Q_i$ . То же самое справедливо и для любой части этой коалиции. Отсюда, в силу определения дивиденда  $v_e$ , получаем искомое:  $v_e = 0$ . Что касается обратной импликации

$$\prod_{i=1}^n \mu_i \in V_+^{(n)}(Q) \Rightarrow Q_i \cap Q_j = \emptyset \quad \text{для всех } i \neq j,$$

то здесь можно воспользоваться индукцией по  $n$  и достаточно просто проверяемым фактом, что из условия  $\prod_{i=1}^n \mu_i \in V_+^{(n)}(Q)$  вытекает справедливость включений  $\prod_{i \neq j} \mu_i \in V_+^{(n-1)}(Q)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  (устанавливаемых рассуждениями от противного). Указанные включения на основании индукционного предположения и дают требуемое:  $Q_i \cap Q_j = \emptyset$  для всех  $i \neq j$ . Предложение 6 доказано.

В заключение отметим, что формула для вектора Шепли конечной однородной игры  $\prod_{i=1}^n \mu_i \in V_+^{(n)}(Q)$  вполне аналогична той, которая найдена для неатомических игр в случае бесконечного числа игроков (см. предложение 5 из п. 3.2). Именно, справедливо соотношение

$$\Phi \left( \prod_{i=1}^n \mu_i \right)_k = \begin{cases} \frac{1}{n} \prod_{j \neq i} \mu_j(Q) \mu_{ik}, & k \in Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ 0, & k \in Q \setminus \bigcup_{i=1}^n Q_i. \end{cases} \quad (3.14)$$

Доказательство соотношения (3.14) при условии попарной дизъюнктности носителей  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , опирается на легко проверяемую в этом случае формулу для дивидендов Харшаньи функции  $v = \prod_{i=1}^n \mu_i$ :

$$v_e = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \mu_{ik_i} & \text{для коалиций } e = \{k_1, \dots, k_n\} \text{ таких, что } (k_1, \dots, k_n) \in \prod_{i=1}^n Q_i; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а также на вышеуказанную формулу (3.12) вектора Шепли однородной кооперативной игры из пространства  $V(Q)$ , использующую ее дивиденды Харшаньи.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки. М.: Мир, 1974.
2. Васильев В.А. Функционал Шепли и полярные формы однородных полиномиальных игр // Матем. тр. 1998. Т. 1. № 2. С. 24–67 (перевод: Vasil'ev V.A. The Shapley functional and the polar form of homogeneous polynomial games // Siberian Adv. Math. 1998. V. 8. N. 4. P. 109–150).
3. Ауман Р., Шепли Л. Значения для неатомических игр. М.: Мир, 1977.

4. *Dehez P.* On Harsanyi dividends and asymmetric values // Intern. Game Theory Rev. 2017. V. 19. № 3. P. 1–36.
5. *Васильев В.А.* О ядре и значении Шепли для регулярных полиномиальных игр // Сиб. матем. журнал. 2022. Т. 63. № 1. С. 77–94. (перевод: Vasil'ev V.A. On the core and Shapley value for regular polynomial games // Sib. Math. J. 2022. V. 63. № 1. P. 65–78).
6. *Marinacci M., Montrucchio L.* Stable cores of large games // Int. J. Game Theory. 2005. V. 33. № 2. P. 189–213.
7. *Вулих Б.З.* Введение в теорию полупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
8. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
9. *Aliprantis C.D., Border K.C.* Infinite Dimensional Analysis. Berlin: Springer-Ferlag, 1994.
10. *Васильев В.А.* Неаддитивное интегрирование и некоторые решения кооперативных игр // Математическая теория игр и ее приложения. 2021. Т. 13. № 1. С. 5–27. (перевод: Vasil'ev V.A. Nonadditive Integration and Some Solutions of Cooperative Games // Autom. Remote Control. 2022. V. 83. № 4. P. 635–648).
11. *Vasil'ev V.A.* Polar forms, p-values, and the core // In: Approximation, Optimization and Mathematical Economics (Lassonde M., ed.). 2001. Physica-Verlag: Heidelberg–New York. P. 357–368.
12. *Vasil'ev V.A.* Polar representation of Shapley value: nonatomic polynomial games // Contrib. Game Theory Management. 2013. V. VI. P. 434–446.
13. *Васильев В.А.* Общая характеристика полиномиальных функций множества // Оптимизация. 1974. № 14. С. 101–123.
14. *Васильев В.А.* Об одном пространстве неаддитивных функций множества // Оптимизация. 1975. № 16. С. 99–120.
15. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
16. *Васильев В.А.* Вектор Шепли для игр ограниченной полиномиальной вариации // Оптимизация. 1975. № 17. С. 5–26.
17. *Ляпунов А.А.* Вопросы теории множеств и теории функций. М.: Наука, 1979.
18. *Васильев В.А.* Об одном классе дележей в кооперативных играх // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 265–268. (перевод: Vasil'ev V.A. On a class of imputations in cooperative games // Soviet Math. Dokl. 1981. V. 23. № 1. P. 53–57).
19. *Vasil'ev V.A.* Cores and generalized NM-solutions for some classes of cooperative games // In: Russian Contributions to Game Theory and Equilibrium Theory (T.S.H. Driessen, G. van der Laan, V. Vasil'ev, and E. Yanovskaya, eds.). 2006. Springer-Verlag: Berlin–Heidelberg–New York. P. 91–149.

УДК 519.865

## ОБЗОР ТЕОРИИ СТАБИЛЬНЫХ ПАРОСОЧЕТАНИЙ И СИСТЕМ ДОГОВОРОВ<sup>1)</sup>

© 2023 г. В. И. Данилов<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> 117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН, Россия

\*e-mail: vdanilov43@mail.ru

Поступила в редакцию 22.06.2022 г.  
Переработанный вариант 10.07.2022 г.  
Принята к публикации 17.11.2022 г.

Приводится обзор работ по теории стабильных матчингов и, более общо, стабильных сетей договоров. Набор (сеть) договоров считается стабильным, если ни для какой коалиции нет доступного ей договора, который дает всем членам коалиции строго больше, чем предлагаемый набор. Это понятие в частном случае было введено в 1962 г. Гейлом и Шепли и с тех пор прошло значительный путь в своем развитии. Как в теоретическом плане (теоремы, структуры, алгоритмы), так и в области применений к задачам экономики, физики, биологии, математики. Библ. 181. Фиг. 2.

**Ключевые слова:** стабильный марьяж, стабильный руммэйт, сети договоров, феномен сельских больниц, решетка, манипулирование, лемма Скарфа, гиперграф, совершенный граф, функция выбора.

DOI: 10.31857/S0044466923030067, EDN: EBSLIE

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие стабильности (применительно к паросочетаниям) впервые появилось в работе Гейла и Шепли [81] 1962 г. Оно интенсивно изучалось и обобщалось и сейчас на эту тему написаны сотни работ. Обзору наиболее важных работ посвящена данная статья (см. также монографии [160], [89], обзоры [73], [116], [80], диссертации [32], [101], [172], а также [2], [169], [100].) Чтобы дать представление об этой тематике, затрагивающей многие области науки (экономику, информатику, биологию, физику, математику), начнем с самой простой постановки.

Представим, что имеется множество  $M$  мужчин и множество  $W$  женщин. И они хотят вступить в брак, т.е. образовать семейные пары (моногамные и гетеросексуальные). Собственно, такая матримонильная постановка выбрана именно потому, что брак обычно (хотя и не всегда) понимается именно так и дает почву интуиции. Формально говоря, речь идет о паросочетаниях, и такая тематика была очень популярна в теории графов (см. [3]). Там тоже занимались задачами о паросочетаниях (взять к примеру теорему Холла о свадьбах). Однако мы хотели бы подчеркнуть разницу между “графическим” подходом и “социальным”. Если Холла интересовало паросочетание, максимальное по размеру, то Гейл и Шепли задавались предпочтениями мужчин и женщин и искали такое паросочетание, которое в максимальной степени устраивало бы участников. Иначе говоря, при графовом подходе агенты были безмолвными пешками, а при социальном — активными лицами.

Однако надо сказать более точно, что же понималось под учетом интересов. Интересы задавались тем, что каждый мужчина ранжировал (линейно упорядочивал) женщин (по крайней мере тех, кто в принципе был ему доступен), и аналогично каждая женщина ранжировала мужчин по привлекательности. Представим, что как-то образовались пары (мы называем такое разбиение на пары *паросочетанием* или *матчингом*), стихийно ли или были предложены некоей свахой (matchmaker). И представим, что имеется мужчина  $m$  и женщина  $w$  такие, что  $m$  ранжирует  $w$  выше своей жены, а  $w$  ставит  $m$  выше своего мужа. Конечно, они будут неудовлетворены существующим положением и стремиться образовать новую пару, разрушив свои семьи. Такая пара называется *блокирующей* предложенный матчинг. Матчинг называется *стабильным*, если блокирую-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-010-00569-А).

щих пар нет. Иначе говоря, стабильность здесь понимается как устойчивость по отношению к подобному рода соблазнам.

Предыдущее определение было неполным, потому что мы не сказали про одиночек. Точные определения будут приведены позже, а пока этого достаточно, чтобы получить представление о стабильности. В этом состоял главный вклад Гейла и Шепли. Помимо введения понятия стабильности вклад Гейла и Шепли был в том, что они доказали существование стабильных марьяжей, фактически без всяких дополнительных ограничений. Более того, они предложили некоторый естественный алгоритм для нахождения стабильного матчинга.

Этим, однако, не исчерпывается содержание их короткой, но емкой статьи, давшей направление последующему развитию этой тематики. Во-первых, они рассмотрели чуть более общую модель, когда одна сторона (скажем, мужчины) могли заключать брак с несколькими женщинами. Если такая интерпретация возмущает ваши предрассудки, считайте (как Гейл и Шепли), что речь идет об учебных заведениях (колледжах), которые принимают студентов. При некоторых естественных предположениях стабильное распределение студентов среди школ также всегда существует.

Во-вторых, они понимали, что аналогичный вопрос можно ставить для произвольных графов (задача о *румэйте*), а не только двудольных, как выше. Однако они ограничились лишь примером, когда стабильных матчингов не существует, оставив это обобщение своим последователям.

Скажем теперь кратко про дальнейшее развитие этой тематики, останавливаясь только на ключевых работах. Некоторое время пионерская работа [81] оставалась без движения, если не считать мелких продвижений (см. [141], [179], [82]). В 1976 г. внимание к алгоритму Гейла–Шепли привлек Кнут [129], поставив несколько стимулирующих вопросов.

Реальное движение было начато работой Келсо и Кроуфорда [123], которые рассмотрели более общую задачу о найме фирмами рабочих (*many-to-one*). Похожая на задачу с колледжами, их постановка отличалась тем, что поведение фирм было более гибким, чем просто задание квоты в [81]. Фирма при приеме рабочих имела дело с “толпой” желающих и выбирала нужную ей группу рабочих среди этой толпы. Описание поведения такой фирмы задавалось уже не простым ранжированием работников, но функцией выбора. Ниже мы подробнее скажем о таких функциях. Важной заслугой Келсо и Кроуфорда было то, что они нашли “правильное” условие на функции выбора, которое обобщало “линейный” выбор Гейла–Шепли, и которое ранее появлялось в экономической науке как условие заменимости. (Позже выяснилось, что такое условие уже вводилось в теории выбора [152] под названием “независимости от пути”). Используя это условие, [123] показали, что алгоритм Гейла–Шепли работает и дает стабильное распределение рабочих по фирмам. В [88] понятие заменимости было использовано в ситуации с неделимыми товарами и привело к появлению серии статей на эту тему (см. [79], [51], [65], [103]). Двумя годами позже Рот [158] показал, что это же условие заменимости хорошо работает и в ситуации “*many-to-many*”, когда и фирмы могли нанимать многих работников, и работники могли работать в нескольких фирмах; см. [62]. Итоги этого направления были подведены в монографии [160].

Некоторое завершение тематика с двудольными графами получила в работе Флейнера [74]. Она состояла в том, что вместо просто спаривания (т.е. образования пар типа “фирма–рабочий”) речь шла про бинарные контракты. Иначе говоря, рабочий не просто принимался на работу в какой-то фирме, но конкретизировались дополнительные условия типа зарплаты, часов работы и т.п. Формально слово “контракт” было использовано в [94], хотя фактически контракты рассматривались в [123], а более явно – в [74]. Флейнер также интерпретировал стабильные системы контрактов как неподвижные точки некоторых естественных (навеянных алгоритмом Гейла–Шепли) отображений. Существование неподвижных точек устанавливалось с помощью теоремы Тарского.

Интересное направление в изучении двудольного случая указали Байю и Балинский в [25], [27]. Они стали рассматривать не просто контракты, но контракты с некоторой интенсивностью, промежуточной между 0 и 1 (между ‘нет’ и ‘да’). К примеру, рабочий мог наниматься не на целый день, но на несколько часов. Или вклад в банке можно открывать на некоторую сумму, меньше максимально допустимой. Формально это означало, что множество контрактов снабжалось структурой частичного порядка (посет). Это направление представлено в работах [19], [6], [53], [71], [131], [96], [98].

Стоит сказать еще об одном направлении в изучении стабильных матчингов в двудольной ситуации. Алгоритм Гейла–Шепли дает один конкретный стабильный матчинг. Уже Гейл и Шепли отметили, что этот матчинг является наилучшим для мужчин; если поменять роли, мы получим матчинг, наилучший для женщин. Это делает правдоподобным то, что мужчинам не выгодно ис-

кажать свои предпочтения (если действует механизм Гейла–Шепли), и это действительно так. Изучение вопросов манипулирования хорошо освещено в монографии [160].

В принципе множество стабильных матчингов может содержать много матчингов (об этом см. разд. 3). Оказывается (это было отмечено Кнутом), что это множество в некотором естественном смысле является решеткой, в которой наибольшим элементом является матчинг, продуцируемый как раз алгоритмом Гейла–Шепли.

Покинем на этом двудольные графы и обратимся к более общей постановке типа “руммэйта” (расселения по двуместным номерам). Когда каждый агент ранжирует потенциальных партнеров и речь идет о стабильных паросочетаниях. Как уже говорилось, стабильные матчинги могут не существовать (это связано с понятием совершенства графов, отдельной интересной темой, о которой мы скажем в разд. 6). В этой связи возникают два направления деятельности. Первое – поиск условий, когда стабильность все же есть. Важнейшая веха на этом пути – алгоритм, предложенный Ирвингом в [108]. Изобретательно модифицируя Гейла–Шепли, этот алгоритм при своем завершении либо дает стабильный матчинг, либо говорит, что стабильных матчингов не существует. Эта тематика отражена в монографии [89].

Второе направление деятельности занимается построением таких обобщений стабильности, которые существуют “всегда”. Тан в [173] предложил понятие *стабильного полуматчинга*, который существует всегда. Такой полуматчинг либо легко позволяет указать стабильный матчинг, либо сказать, что таких нет, см. разд. 5.

Наконец, про общие (не бинарные) контракты. На эту тему известно не слишком много. В работе [55] приводится конструкция, которая позволяет сводить случай с заменимыми функциями выбора к более обозримому случаю, когда предпочтения агентов задаются слабыми порядками. Там же вводится понятие метастабильной сети контрактов, которая существует “всегда”.

План обзора. В разд. 2 вводятся общие понятия для обсуждения теории стабильности, в частности, понятие плоттовских функций выбора, которыми описываются предпочтения агентов. В разд. 3 подробно обсуждается наиболее изученная ситуация, когда агенты делятся на две группы (условно мужчин и женщин), а предпочтения задаются самым простым способом с помощью линейных порядков. Фактически это ситуация, рассмотренная Гейлом и Шепли, но дополненная многими фактами, полученными позже. В разд. 4 рассматривается по-прежнему двудольная ситуация, но агенты могут заключать несколько договоров с несколькими агентами противоположной группы. Многие результаты из предыдущего раздела переносятся на эту более общую ситуацию или обстановку.

В разд. 5 происходит отказ от предположения двудольности, хотя договора остаются по-прежнему парными, или бинарными. Главная сложность тут в том, что стабильные сети договоров могут не существовать, о чем уже говорилось выше. В разд. 6 рассматривается самая общая ситуация, когда договора могут включать много участников. В заключительном разд. 7 рассказывается о применениях теории стабильности в различных дисциплинах: экономике, физике, биологии, математике, информатике.

## 2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА

Пойдем путем, обратным тому, как развивалась теория (см. Введение). А именно, начнем с самых общих понятий и самой общей модели ([97], [28], [21]). И в последующих разделах более подробно осветим наиболее исследованные частные случаи.

### 2.1. Основные понятия

Множество *участников (агентов)*, принимающих решение о сотрудничестве и заключении договоров, обозначается как  $I$ . Типичный элемент этого множества –  $i, j, \dots$ . Множество  $I$  предполагается конечным. Буквой  $C$  будет обозначаться множество доступных для заключения *договоров* (или контрактов; в [97], [28] говорят о венчурах); типичный контракт обозначается как  $c$ . Для простоты множество  $C$  тоже предполагается конечным.

Главная характеристика любого контракта  $c$  – это множество  $P(c) \subseteq I$  участников этого контракта, чье согласие (подпись) необходимо для заключения контракта. Для агента  $i \in I$  символ  $C(i)$  обозначает множество контрактов, участником которого является  $i$ ; так что  $i \in P(c) \Leftrightarrow c \in C(i)$ . Пару  $(I, C)$  можно понимать как гиперграф, понимая контракт  $c$  как (гипер)ребро, связывающее вершины из  $P(c)$ . Договор  $c$  называется *бинарным* (или парным), если

$P(c)$  состоит из двух участников. До недавнего времени существовавшая литература имела дело исключительно с бинарными контрактами (марьяжи, руммэйт, найм на работу, договора займов и депозитов и т.п.). В этом случае гиперграф  $(I, C)$  является просто графом. Подчеркнем, что две вершины могут связывать несколько ребер. Иначе говоря, мы не просто отмечаем, что пара вступила в брак, но подписала конкретный брачный договор, четко прописывающий права и обязанности сторон.

Договор с единственным участником называется *автаркическим*. Конечно, несколько странно называть его договором. Это просто указание на некую деятельность, которую агент может вести в одиночку (в марьяжной ситуации – остаться холостяком). В экономике говорят о “статус кво” или альтернативных возможностях. Мы предполагаем в дальнейшем, что у каждого участника имеется автаркический договор.

Произвольное подмножество  $S \subseteq C$  мы называем *сетью договоров*. Это либо реально заключенные договора, либо спущенные сверху (предложенные свахой).  $S(i) = S \cap C(i)$  – договора, подписанные агентом  $i$ . В принципе, каждый агент может заключить несколько договоров. Какие договора будут подписаны или заключены, а какие отвергнуты – зависит от “предпочтений” агентов. Это вторая главная структура модели.

Считается, что каждый агент  $i$  как-то оценивает доступные ему договора. Так как он может заключать несколько договоров, он должен оценивать и сравнивать между собой не только элементы множества  $C(i)$ , но и произвольные подмножества этого множества. Один из общих способов сделать это – использовать функции выбора.

*Функцией выбора* (далее – ФВ) на произвольном множестве  $X$  называется отображение  $f : 2^X \rightarrow 2^X$  такое, что  $f(A) \subseteq A$  для любого  $A \subseteq X$ . Интуитивно это означает, что имея доступ к множеству (“меню”)  $A \subseteq X$ , агент выбирает в нем подмножество  $f(A)$ . Считается, что при этом он руководствуется некими соображениями рациональности и выбирает “лучшие” варианты. Тематика рационального выбора выходит за рамки настоящего обзора (см., к примеру, книгу [1]), и мы ограничимся в основном примерами, нужными для дальнейшего. Гиперграф  $(I, C)$ , снабженный ФВ  $f_i$  на множестве  $C(i)$  для каждого  $i \in I$ , будем называть *оснащенным*. Можно даже считать, что ФВ  $f_i$  определены на всем  $C$ , полагая  $f_i(A) = f_i(A(i))$  для  $A \subseteq C$ .

**Замечание.** Хотя задание предпочтений агентов в форме ФВ выглядит достаточно общим, оно ограничительно в двух отношениях, которые стоит упомянуть. Во-первых, предполагается, что из заданного меню  $A$  агент выбирает ОДНО подмножество  $f_i(A)$ . В принципе несколько подмножеств могли бы оказаться для него “равноценными”. И второе. Неявно предполагается, что агенту безразлично, какие договора заключены без его участия. Поясним на примере. Когда фирма нанимает на работу группу рабочих, для нее важен состав этой группы. Но считается, что для рабочего не важно, кто (кроме него) будет принят на работу в этой фирме (и тем более, кто будет работать в других фирмах). Иначе говоря, здесь нет “экстерналий”. Конечно, можно развивать теорию и с учетом экстерналий [63], [157], но пока это направление находится в зачаточном состоянии.

## 2.2. Стабильность

Теперь можно сформулировать основное понятие.

**Определение.** Сеть договоров  $S \subseteq C$  называется *стабильной*, если выполнены два условия:

S1.  $f_i(S(i)) = S(i)$  для любого  $i \in I$ .

S2. Если  $c \in f_i(S(i) \cup c)$  для любого  $i \in P(c)$ , то  $c \in S$ . (Здесь и далее мы пишем  $X \cup x$  вместо  $X \cup \{x\}$ .)

В основе этого определения лежит предположение о добровольности и ненавязанности контрактов. Любой агент может отказаться от контракта, который кажется ему невыгодным. Это условие S1. И ничто не может помешать агентам подписать договор, который они единогласно хотят. Это условие S2. Если некоторый договор  $c$  нарушает условие S2 (т.е.  $c \in f_i(S(i) \cup c)$  для любого  $i \in P(c)$ , но  $c \notin S$ ), говорят, что договор  $c$  *блокирует* сеть  $S$ . Такой блокирующий договор вызывает соблазн заключить его (быть может, отказываясь от некоторых заключенных ранее договоров, как в ситуации с марьяжем) и тем самым разрушить предложенную сеть договоров  $S$ . Стабильная сеть договоров иммунна к такого рода соблазнам.

Заметим, что условие S2 может (и даже должно) быть сформулировано в более общем варианте S2+.

S2+. Если  $Z(i) \subseteq f_i(S \cup Z)$  для любого  $i \in P(Z)$ , то  $Z \subseteq S$ .

Иначе говоря, допускается возможность блокирования не отдельным договором, но некоторым пакетом договоров  $Z$ . В свое оправдание мы покажем ниже, что в большинстве случаев (более точно, в случае плоттовских ФВ) эти два варианта эквивалентны. И мы знаем только одну работу [157], где реально используется более общий вариант S2+.

Условие S1 называется *индивидуальной рациональностью*. Условие S2 можно понимать как нечто типа коалиционной рациональности (и даже коалиционного равновесия) из теории кооперативных игр. Вообще, понятие стабильной системы договоров близко по смыслу к понятию ядра. И в некоторых простых случаях типа марьяжа фактически совпадает с ядром. Но все же это разные вещи, как показывает следующий простой пример неоптимальности стабильной сети (более подробно связь с ядром обсуждается в [160], [168]).

**Пример 0.** Два участника, Анна и Борис. И два контракта,  $A$  и  $B$  между ними. Первый дает полезность 2 Анне и  $-1$  Борису. Второй дает 2 Борису и  $-1$  Анне. Если заключены оба контракта, каждый получает по 1. Автаркия понимается как отказ от заключения договоров и дает 0.

В этом примере пустая сеть стабильна. Но она не оптимальна по Парето, потому что доминируется системой  $\{A, B\}$ . Заметим, что множество  $Z = \{A, B\}$  не блокирует стабильную сеть  $S = \emptyset$ .

Помимо приведенного выше определения стабильности, в литературе встречаются и другие варианты стабильности: парная, множественная, сильная и т.п. Мы не будем на них отвлекаться, отсылая к работам [126], [23].

### 2.3. Агрегирование

Иногда удобно предпочтения всех участников представить как поведение одного, совокупного Агента (с большой буквы). И описывать его с помощью одного оператора  $F$ , который произвольно подмножеству  $A \subseteq C$  сопоставляет множество

$$F(A) = \{c \in C, c \in f_i(A \cup \{c\}) \text{ для любого } i \text{ из } P(c)\}.$$

Это уже не обязательно ФВ, так как этот оператор может как удалять элементы из  $A$ , так и добавлять новые. Его удобство в том, что с его помощью можно экономно переписать условия стабильности.

**Лемма 2.1.** Сеть  $S$  стабильна тогда и только тогда, когда  $S = F(S)$ .

**Доказательство.** В одну сторону очевидно: если  $S$  стабильна, то  $S = F(S)$ . Обратное, пусть  $S = F(S)$ . Проверим условие S1. Пусть  $s \in S(i)$ ; так как  $S(i) \subseteq S$ , то  $s \in S$  и поэтому выбирается любым участником из  $P(s)$ , включая  $i$ . Проверка S2 вообще тривиальна.

Похожая агрегация (в двудольном случае) производилась в [74], а в случае дополнительных контрактов – в [157]. Так что стабильные сети оказываются просто неподвижными точками оператора  $F$ . Поэтому для многих вопросов можно применять развитую теорию неподвижных точек. Имея какую-либо теорему о неподвижных точках, мы получаем соответствующую теорему о стабильных сетях. Есть три большие теории про неподвижные точки: сжимающие отображения полных метрических пространств, монотонные отображения в полных решетках (Тарский), и непрерывные отображения выпуклых компактов (Брауэр, Какутани, Скарф). Первая теория для нас не годится, вторая с успехом была применена в [74]. Мы увидим далее, что третья, наиболее глубокая теория также имеет применения к стабильности (полуматчинги, метастабильность).

Стабильность системы договоров – вещь достаточно приятная. Такие системы стабильны (устойчивы) в том смысле, что ни у кого нет стимулов их разрушать. По крайней мере при имеющихся предпочтениях. Конечно, если предпочтения меняются или появляются новые участники или контракты, стабильность может нарушиться. Это понятно, это статическое понятие. Но даже в этом случае можно рассчитывать, что сеть изменится не слишком сильно, см. [16], [132].

Как бы то ни было, первый вопрос, которым приходится заниматься, это вопрос о существовании стабильных сетей. И близкий к нему вопрос о том, как их строить или находить. Вопросу о сравнении стабильных сетей, их структуре, тоже посвящено немало работ и мы постараемся это осветить тоже. Но, повторю, первый вопрос – о существовании. Обсуждать свойства объектов, которые неизвестно когда существуют (или не существуют вообще) – не слишком продук-

тивное занятие. Довольно легко понять, что если ФВ агентов произвольны, то на существование стабильных сетей рассчитывать не приходится. Вот простой пример.

**Пример 1.** Два участника, производитель  $F$  и покупатель  $B$ . И два товара  $a$  и  $b$ , которые может производить  $F$ . Покупатель предпочитает  $b$ , т.е. его ФВ  $f_B$  выбирает  $a$  из  $a, b$  из  $b$ , и  $b$  из  $\{a, b\}$ . Производителю не выгодно выпускать каждый продукт по отдельности, он хотел бы выпускать  $a$  и  $b$  вместе. Так что его ФВ  $f_F$  пуста на одноэлементных меню и равна  $\{a, b\}$  на  $\{a, b\}$ . Легко понять, что стабильных договоров тут нет.

Интуитивно ясно, что предпочтения покупателя достаточно рациональны. А вот поведение производителя хотя и объяснимо, но все же менее привычно. Для него товары  $a$  и  $b$  скорее дополнители, чем заменители. Ниже мы введем соответствующие понятия для ФВ.

**Пример 2.** Пусть у нас имеется одна женщина 0 и три претендента 1, 2 и 3. Каждый претендент хотел бы жениться на ней. Но ее предпочтения устроены так:  $1 < 2 < 3 < 1$ , т.е. “циклические”. Ясно, что стабильного брака тут нет. И объясняется это крайне вздорным, нерациональным характером предпочтений агента 0.

#### 2.4. Функции выбора Плотта

Посвятим некоторое время формулировке понятия “хорошей” или “рациональной” ФВ. Этой тематике посвящено много литературы (см. [1]); мы ограничимся нужным нам минимумом.

**Определение 1.** ФВ  $f$  называется *заменимой* (или *наследственной* в [1]), если выполнено следующее: пусть  $A \subseteq B$ ; тогда  $A \cap f(B) \subseteq f(A)$ .

Иначе говоря, если элемент  $a$  из меньшего множества  $A$  выбирается в большем множестве  $B$ , то он должен выбираться и в меньшем. Может быть это лучше понять на следующем примере. Пусть фирма из имеющегося меню рабочих  $B$  выбрала  $f(B)$ . И по каким-то причинам некоторый принятый работник  $b$  из  $f(B)$  стал недоступен. Тогда фирма вместо него может нанять других работников, но не станет увольнять уже принятых. Заметим также, что предпочтения в Примере 1 нарушали это свойство.

Еще одно условие рассматривается как несомненное свойство рациональности поведения.

**Определение 2.** ФВ  $f$  удовлетворяет условию *отбрасывания* (более развернуто – условию *независимости от отвергнутых альтернатив*), если  $f(B) \subseteq A \subseteq B$  влечет  $f(A) = f(B)$ .

Иначе говоря, если какие-то отвергнутые альтернативы исчезают из меню, то это не сказывается на выборе. Грубо говоря, это условие означает, что агент приписывает каждому подмножеству  $A \subset X$  некоторую полезность  $u(A)$  и выбирает из меню  $A$  подменю  $B \subseteq A$  с наибольшей полезностью  $u(B)$ .

**Определение 3.** ФВ называется *функцией Плотта*, если она обладает свойствами заменимости и отбрасывания. Такие ФВ характеризуются следующим свойством “независимости от пути”:

$$f(A \cup B) = f(f(A) \cup B).$$

Именно в такой форме они были введены Плоттом в [152]. Приводимые ниже примеры плоттовских ФВ часто использовались в литературе о стабильности.

**Пример 3.** Пусть  $<$  – линейный порядок на множестве  $X$ . Положим  $f(A)$  состоящим из наибольшего элемента в  $A$  относительно этого порядка. Очевидно, что  $f$  является функцией Плотта. Такие ФВ мы называем *линейными*. И большая часть литературы о стабильных матчингах имела дело именно с такими ФВ.

**Пример 4.** Пусть  $\leq$  – предпорядок на  $X$  (то есть рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на множестве  $X$ ). И пусть  $f(A)$  состоит из (всех) максимальных элементов в  $A$  относительно этого предпорядка. Это снова дает ФВ Плотта. Наиболее важный случай – когда  $\leq$  – слабый порядок (то есть полный предпорядок). Такие ФВ (и соответствующие оснащения) будем называть *слабо-порядковыми*. Многие работы по стабильности посвящены переносу результатов с линейных оснащений на слабо-порядковые (при этом говорят о *связках*, ties).

**Пример 5.** Менее тривиальные примеры плоттовских ФВ возникают в такой постановке. Снова  $<$  – линейный порядок, но в  $f(A)$  включают  $b$  наилучших элементов из  $A$ , где  $b$  – натуральное число (квота). Функции выбора такого вида будут называться *квотируемыми*. Уже в пионерской работе [81] использовались такие ФВ. Более интенсивное изучение стабильности с такими огра-

ничениями на “мощность” или капасити было проделано в работах [44], [75], [67], [113], [43], см. ниже.

Условие плоттовости ФВ в задачах стабильности – стандартное в литературе. Во всяком случае, оно гарантирует существование стабильных систем в двудольной ситуации. И мы, следуя литературе, также будем (кроме разд. 6) считать ФВ агентов плоттовскими. Иногда накладывались дополнительные условия на ФВ, такие как кардинальная монотонность, отзывчивость, сепарабельность.

Пусть  $f$  – функция Плотта на множестве  $X$ . Скажем, что элемент  $x \in X$  *неприемлем*, если  $f(x) = \emptyset$ . Легко понять из условия S1, что неприемлемые договора не могут входить в стабильные системы. По этой причине можно их исключить и считать всюду, что неприемлемых договоров в  $C$  нет. Кроме того, в плоттовской обстановке условие S2 эквивалентно сильной форме S2+. В самом деле, если  $Z$  не содержится в  $S$  и  $z \in Z - S$ , то из условия заменимости (и того, что  $Z(i) \subseteq f_i(S \cup Z)$  для любого  $i$  из  $P(z)$ ) видно, что  $z \in f_i(S \cup z)$ .

### 2.5. Оптимальность

Первый простой факт про стабильные сети – это оптимальность по Парето (ср. с Примером 0). Но как говорить об оптимальности на языке ФВ? Оказывается, можно, потому что с каждой плоттовской ФВ  $f$  (на множестве  $X$ ) можно связать естественным способом (Блэр, [37]) некий гиперпорядок  $\preceq_f$  (приставка “гипер” указывает на то, что это бинарное отношение на множестве  $2^X$ ), с помощью которого можно сравнивать подмножества в  $X$ . А именно, для  $A, B \subseteq X$  положим

$$A \preceq_f B, \text{ если } f(A \cup B) \subseteq B. \tag{1}$$

Заметим, что в этом случае  $f(A \cup B) = f(B)$ , так как  $f(B) = f(B \cup f(A \cup B)) = f(A \cup B \cup B) = f(A \cup B)$ . Гиперотношение  $\preceq_f$  рефлексивно (что очевидно) и транзитивно (см. [37], [54]). Кроме того, ФВ  $f$  однозначно восстанавливается по гиперотношению  $\preceq_f$ ; а именно,  $f(A)$  – это наименьшее подмножество в  $A$ , эквивалентное  $A$ . В принципе, мы могли бы формулировать стабильность в терминах гиперпорядка Блэра вместо плоттовских ФВ; нужные для этого свойства приведены в [54]. Например, условие стабильности S2 означает, что  $S \cup z$  не может быть строго лучше, чем  $S$ , для всех участников договора  $z$ .

**Предложение 2.2.** *Предположим, что предпочтения всех агентов заданы плоттовскими ФВ  $f_i$ , и пусть  $S$  – стабильная сеть. Пусть, далее,  $T$  – произвольное подмножество в  $C$ , удовлетворяющее условию S1 (то есть  $f_i(T) = T(i)$  для любого  $i$ ). Если для любого  $i \in I$  выполнено  $S(i) \preceq_i T(i)$ , то  $T = S$ .*

Приведем сравнительно простое доказательство. Если  $T(i) \subseteq S(i)$ , то  $S(i) = f_i(S) = f_i(S \cup T) = T(i)$ . Если же  $T(0)$  не содержится в  $S(0)$  для некоторого агента  $0$ , то возьмем произвольный контракт  $t$  из  $T(0) - S(0)$ . Пусть  $j$  – произвольный участник контракта  $t$ , так что  $t \in T(j)$ . Контракт  $t$  принадлежит  $T(j) = f_j(T(j) \cup S(j))$ , поэтому (в силу заменимости ФВ  $f_j$ )  $t \in f_j(S(j) \cup t)$  для любого  $j \in P(t)$ . В силу условия S2  $t \in S$ , вопреки предположению, что  $t \notin S(0)$ . Значит,  $S(i) = T(i)$  для любого участника, откуда  $S = T$ .

### 2.6. Теорема о редукции

Плоттовские ФВ замкнуты относительно операции объединения выборов. И замечательная теорема Айзермана и Малишевского [1] состоит в том, что любая функция Плотта может быть получена как объединение нескольких линейных ФВ. Используя этот факт, в [55] была доказана следующая теорема о сведении общего (Плоттовского) случая к слабопорядковому. Идея состоит в расщеплении каждого агента на “слабопорядковых” суб-агентов.

**Теорема 2.3.** *Пусть  $(I, C, (f_i))$  – гиперграф, оснащенный плоттовскими ФВ. Тогда существует другой гиперграф  $(I', C', (\leq_{i'})$ , оснащенный слабыми порядками  $\leq_{i'}$ , и отображение гиперграфов  $\pi : (I', C') \rightarrow (I, C)$ , обладающие следующими двумя свойствами:*

- а) для любой стабильной сети  $S'$  в  $C'$  ее образ  $S = \pi(S')$  стабилен в  $C$ ;

б) для любой стабильной сети  $S$  в  $C$  существует (и явно строится) стабильная сеть  $S'$  в  $C'$ , такая, что  $\pi(S') = S$ .

Грубо говоря, во многих вопросах о стабильных сетях можно ограничиться слабо-порядковыми оснащениями. По этой причине в дальнейших обсуждениях мы иногда будем предполагать, что предпочтения агентов задаются слабыми (или даже линейными) порядками. Впрочем, это не сильно помогает.

Повторим определение стабильности в случае, когда предпочтения участников задаются ФВ, порожденными слабыми порядками  $\leq_i$ . Это такая сеть  $S \subseteq C$ , что

S1'. Для любого агента  $i$  множество  $S(i)$  непусто и состоит из эквивалентных (относительно порядка  $\leq_i$ ) договоров;

S2'. Если для  $c \in C$  выполнены неравенства  $c \geq_i S(i)$  для любого  $i \in P(c)$ , то  $c \in S$ .

Иначе говоря, договор  $c$  блокирует сеть  $S$ , если  $c \notin S$  и  $c \geq_i S(i)$  для любого  $i \in P(c)$ . Заметим, что не во всех исследованиях блокирование понимается именно так. Приведенное выше понятие называется также *суперстабильностью*. Если все неравенства в определении блокирования строгие, мы получаем то, что называется *слабой стабильностью*. Наконец промежуточный случай дает *сильную стабильность*, см. [109], [113], [165]. И эти понятия реально различаются, как показывает следующий пример.

**Пример 6.** Двое мужчин  $m$  и  $m'$  и две женщины  $w$  и  $w'$ , см. фиг. 1.

Договора изображены ребрами; числа около ребер указывают их полезность для соответствующего агента. Обе женщины предпочитают  $m'$ , мужчина  $m$  предпочитает женщину  $w$ , а  $m'$  безразличен между  $w$  и  $w'$ .

Ниже на фиг. 2 слева нарисованы два слабо стабильных матчинга. Ни один из них не является строго стабильным: первый блокируется ребром  $m'w$ , второй — ребром  $m'w'$ . На правом рисунке изображена единственная стабильная сеть в нашем понимании.

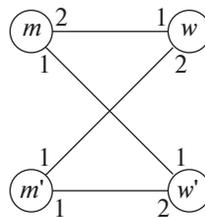
Нюанс здесь в том, что Ирвинг рассматривает только матчинги, а у нас может быть несколько договоров у одного агента; в нашем случае — у  $m'$ . Так что при рассмотрении матчингов со связками надо быть осторожным.

Еще более жестко определение стабильности выглядит в том случае, когда предпочтения всех агентов линейны. Тогда условия стабильности принимают следующий вид:

S1".  $S(i)$  состоит из одного элемента  $s(i)$ .

S2". Не существует такого договора  $c$ , что  $c >_i s(i)$  для всех участников  $c$ .

В частности, в этом случае коалиции  $P(s)$ ,  $s \in S$ , образуют разбиение  $I$ . Иначе говоря, каждый участник заключает один и только один (эксклюзивный) договор. *Матчингом* мы называем набор  $S \subseteq C$ , который однократно покрывает  $I$  (то есть для любого  $i \in I$  существует и при том



Фиг. 1



Фиг. 2

единственный договор  $s \in S$ , что  $i \in P(c)$ ). Именно так устроены стабильные сети договоров при линейных предпочтениях агентов.

### 3. КЛАССИЧЕСКИЙ МАРЬЯЖ

Даже если предпочтения всех участников линейные, стабильных сетей договоров может не существовать. В значительной степени это зависит от топологии гиперграфа  $(I, C)$ . Наиболее хорошо дела обстоят в том случае, когда гиперграф  $(I, C)$  является двудольным графом. И мы начнем изложение с простейшего случая *классического марьяжа*, когда граф договоров двудольный, а предпочтения линейные. Это вызвано двумя причинами. Первая — что теория начиналась именно с изучения этого случая, и для него получены наиболее полные результаты. Вторая — многие эти результаты в той или иной степени переносятся на более общий случай, когда предпочтения плоттовские (разд. 4) или когда граф произвольный (разд. 5).

Классическая задача марьяжа выглядит так. Все агенты делятся на две непересекающиеся группы (для наглядности можно говорить о “мужчинах”  $M$  и “женщинах”  $W$ ), и ребра-договора могут заключаться только между агентами различных групп. Впрочем, между  $m$  и  $w$  потенциально может иметься много договоров; кроме того, любой агент может остаться одиночкой (автаркия). Предпочтения агента  $i$  задаются линейным порядком  $<_i$  на множестве  $C(i)$  ребер, инцидентных  $i$ . Так как в стабильном матчинге никакой участник не может получить договор хуже автаркического, можно удалить все “неприемлемые” договора и считать, что автаркия — это самый плохой исход для любого агента.

#### 3.1. Существование

Следующий результат существования был установлен в пионерской работе [81].

**Теорема 3.1.** *В ситуации классического марьяжа стабильные матчинги всегда существуют.*

Есть много способов доказывать этот результат. Отметим только, что тривиальная идея — если есть блокирующая пара  $(m, w)$ , то поженить их — не проходит, потому что возможны зацикливания. Пример приводится в [129]. Впрочем, позже [163] было показано, что если “правильно” (или даже случайно) выбирать блокирующие пары, то эта тривиальная идея работает.

Начнем с конструкции Гейла и Шепли. Они строят стабильный матчинг алгоритмически, шаг за шагом. На каждом шаге некоторые женщины держат под рукой “ангажированного” мужчину; остальные мужчины “свободны”. Свободные мужчины делают предложения наилучшим для них женщинам (точнее, тем из них, которые им еще не отказали) либо остаются одиночками (и уже до конца). В результате каждая женщина получает несколько предложений и из них (плюс ангажированный мужчина) оставляет (ангажирует) наилучшего, отказывая остальным. На этом шаг завершается, и если остаются свободные мужчины, начинается новый этап процедуры. Процедура начинается с того, что все женщины одиночки, а все мужчины — свободны. И заканчивается тогда, когда нет свободных мужчин.

Процедура заканчивается через несколько шагов (потому что после отказа положение мужчины ухудшается). И легко понять, что результирующий матчинг стабилен. Самое главное — что согласие на брак дается не сразу, а только по окончании процедуры, почему эта процедура и носит название “отложенного принятия” (deferred acceptance).

Построенный этим алгоритмом матчинг (обозначим его  $S_M$ ) обладает многими замечательными свойствами, которые мы еще обсудим. Но в принципе стабильных матчингов может быть довольно много. Например, в книге [89] приводится пример с  $n = 32$ , который имеет 104 310 534 400 стабильных матчингов. Число стабильных матчингов может быть экспоненциально большим относительно размера популяции. Конечно, в очень специальных ситуациях стабильный марьяж один. В [25] утверждается, что в “общей ситуации” существует только один стабильный марьяж. В [64] приводятся условия единственности стабильного марьяжа. Что касается среднего числа стабильных матчингов (при большом размере популяции), то оно примерно равно размеру популяции при примерно равном числе мужчин и женщин, и стремится к 1, когда отношение полов стремится к бесконечности, см. [73] и более конкретные работы [59], [61], [121], [150], [149], [151], [176], [128]. Одним словом, кое-что известно, но не слишком много и точно. Ситуация с неопределенными линейными предпочтениями обсуждается в [22]. В [86] вводится расстояние от любого матчинга до стабильного и алгоритм его вычисления.

А раз стабильных матчингов много, можно ставить вопрос о выборе среди них какого-то особо интересного [34], [48], [49], [70], [84], [85], [117], [130], [41]. Как мы увидим, матчинг  $S_M$  дает большое преимущество мужчинам; “противоположный” матчинг  $S_W$  благоприятен для женщин. Можно искать в каком-то смысле “эгалитарный”, справедливый или “оптимальный”. Скажем об этом, приведя еще один способ конструкции стабильного матчинга.

Представим, что мы уже имеем стабильный матчинг. И “входит” новый мужчина  $m$  (вариант – входит женщина) вместе с букетом новых договоров. Некоторые женщины оценивают некоторые его договора как лучшие (по сравнению с имеющимися у них до этого) и сообщают ему об этом. Среди них  $m$  выбирает самый привлекательный для него договор с некоторой женщиной  $w$  и (снова временно) заключает его. Как правило, это приводит к тому, что  $w$  разрывает прежний договор (с мужчиной  $m'$ ), и теперь уже  $m'$  выступает в роли “новичка”. При удаче ему удастся заключить новый договор, и так далее. Положение женщин монотонно улучшается (новые возможности), чего нельзя сказать о мужчинах (появляется конкурент). Поэтому процесс заканчивается и дает стабильный матчинг.

Так вот, если мужчины и женщины будут входить вперемешку и более или менее равномерно, мы получим стабильный матчинг, одинаково благоприятствующий обеим сторонам, в каком-то смысле “эгалитарный”. Интересное в этом смысле утверждение сделано в [174]; они показали, что существует стабильный матчинг, при котором каждый участник получает “медианного” партнера, см. также [106].

### 3.2. Оптимальность и решетчатость

Вернемся к стабильному матчингу  $S_M$ , который дает алгоритм Гейла–Шепли. Он замечателен тем, что он дает наилучшие результаты ДЛЯ КАЖДОГО МУЖЧИНЫ в классе стабильных матчингов. Иначе говоря, верно следующее

**Предложение 3.2** (см. [81]). Пусть  $S$  – произвольный стабильный матчинг. Тогда для любого  $m \in M$  выполнено  $S(m) \leq_m S_M(m)$ . Для женщин выполнено противоположное неравенство.

Вообще, будем говорить, что матчинг  $S$  лучше матчинга  $T$  для мужчин, если  $T(m) \leq_m S(m)$  для любого  $m \in M$ ; это “мужское” отношение (частичный порядок) обозначается  $T \preceq_M S$ . Аналогичное “женское” отношение мы не будем рассматривать, потому что оно, как можно показать, противоположно “мужскому”.

Вскоре в [141] был обнаружен еще один интересный эффект. Представим, что женщин больше, чем мужчин. Тогда в стабильном (как и любом) матчинге некоторые женщины останутся незамужними. Теорема состоит в том, что *эти же женщины останутся незамужними в ЛЮБОМ стабильном матчинге*.

Рассуждение довольно простое и типичное. Пусть у нас есть два стабильных марьяжа,  $S$  и  $T$ . И пусть агент  $v_0$  одинок в  $S$ , но матчируется в  $T$  с другим агентом  $v_1$ . Ясно, что  $v_1$  не может быть одиночкой в  $S$  (потому что в таком случае пара  $v_0v_1$  блокирует  $S$ ). Значит,  $v_1$  в  $S$  матчируется с  $v_2$ . И с точки зрения  $v_1$  агент  $v_2$  лучше, чем  $v_1$  (если бы было наоборот, то снова пара  $v_0v_1$  блокировала бы  $S$ ).  $v_2$  не может быть одиночкой в  $T$  и, значит, соединяется в  $T$  с  $v_3$  (при этом по тем же причинам  $v_3$  лучше, чем  $v_1$ , для  $v_2$ ). И так далее без конца, что невозможно.

Это важное наблюдение говорит о том, что можно исключить из рассмотрения “нематчевых” агентов и считать, что  $M$  и  $W$  имеют одинаковые размеры.

Третье важное свойство (замеченное Конвеем и обнародованное Кнуттом [129]) состоит в том, что множество  $\mathbf{SM}$  стабильных матчингов с порядком  $\preceq_M$  является решеткой. При этом супремум (джойн)  $S \vee T$  двух стабильных матчингов  $S$  и  $T$  задается так:  $(S \vee T)(m) = \max(S(m), T(m))$ . Грубо говоря, мужчине  $m$  достается лучшая из женщин в этих двух матчингах. Для женщин – наоборот. Рассуждение тут напоминает приведенное выше и основано на сравнении двух матчингов. Аналогичная формула верна для любого числа стабильных матчингов. Естественно,  $S_M$  является наибольшим элементом этой решетки.

Отсюда можно увидеть, что решетка  $\mathbf{SM}$  дистрибутивна. Блэр [36] показал, что таким образом может получиться любая (конечная) дистрибутивная решетка; см. также [90], [142]. Что тоже говорит о том, что стабильных матчингов может быть много. Более тонкая структура приведена в [174], см. также [18].

### 3.3. Манипулирование

Еще одна тема интенсивно обсуждалась в литературе, посвященной стабильным марьяжам. Мы уже говорили, что алгоритм Гейла–Шепли (в котором предложения делают мужчины) дает стабильный матчнинг, наилучший с позиций мужчин. Поэтому интуитивно правдоподобно, что мужчинам невыгодно искажать свои предпочтения, пытаясь добиться лучшего матчнинга. И это действительно так. Напротив, женщины могут так манипулировать своими предпочтениями (т.е. так отвергать полученные предложения), что в результате они получают наилучший с позиции женщин матчнинг. Вот эти вопросы мы и хотим обсудить в этом подразделе.

Впервые к этому вопросу обратились Дубинс и Фридман в [60], см. также [82], [83]. Они рассматривали марьяжную обстановку (с линейными предпочтениями) и предполагали, что действует  $M$ -оптимальный механизм (алгоритм Гейла–Шепли с предложениями мужчин). Они показали, что для мужчин называть свои истинные предпочтения – это доминирующая стратегия. Иными словами, если некоторый мужчина будет называть другие (неистинные) предпочтения, он не получит более лучший результат. Более того, никакая коалиция мужчин не может получить в результате манипулирования своими стратегиями исход, который строго лучше для всех членов этой коалиции.

Напротив, при действии этого  $M$ -оптимального механизма женщины могут успешно манипулировать. Но может быть это было связано со спецификой именно механизма Гейла–Шепли? Назовем произвольный механизм назначения матчнинга *стабильным*, если он при получении на входе набора предпочтений всех агентов (мужчин и женщин) выдает в качестве результата стабильный (относительно этих предпочтений) матчнинг. Рот и Сотомайор [160] доказали следующее

**Предложение 3.3.** Пусть дан стабильный механизм. Если предпочтения участников марьяжа линейные и для них существует более чем один стабильный матчнинг, тогда некоторому агенту выгодно исказить свои предпочтения (предполагая, что остальные говорят правду).

Следующий результат устанавливает пределы успешной манипуляции.

**Теорема 3.4** (см. [58]). Пусть  $P$  – профиль предпочтений участников марьяжа, а профиль  $P'$  отличается от  $P$  только для участников некоторой коалиции  $K \subseteq M \cup W$ . И пусть  $S$  – некоторый матчнинг, стабильный при профиле  $P'$ . Тогда он не может быть лучше (для всех членов этой коалиции  $K$ ), чем любой стабильный матчнинг при профиле  $P$ .

Много других результатов такого сорта можно найти в [160], [175], см. также [125]. Однако мне кажется, что тема манипулирования чрезмерно педалируется. Дело в том, что для успешного манипулирования нужно очень точно знать предпочтения всех агентов (не говоря уже о трудностях вычислительного порядка). Проиллюстрируем это на простейшем примере.

**Пример 7.** Двое мужчин  $m$  и  $m'$  и две женщины  $w$  и  $w'$ . Мужчине  $m$  нравится  $w$ ,  $m' - w'$ . Но желания женщин противоположны:  $w$  хотела бы  $m'$ , а  $w' - m$ . При действии алгоритма Гейла–Шепли  $m$  обращается к  $w$ , а  $m' - k w'$ , и мы получаем стабильный марьяж, наилучший для мужчин и наихудший для женщин. Желая улучшить свое положение, женщина  $w$  могла бы отвергнуть предложение  $m$ ; и если аналогично поступит  $w'$ , они получат лучший матчнинг. Но для этого она должна точно знать предпочтение  $w'$ . Потому что в случае, если  $w$  отвергнет  $m$ , а  $w'$  любит  $m'$ , то  $w$  останется одиночкой, что для нее еще хуже.

### 3.4. Линейное программирование и дробные матчнинги

Параллельно задаче о стабильном марьяже Шепли и Шубик [166] рассмотрели задачу о стабильном назначении (assignment). Ее можно рассматривать как вариант марьяжа с “побочными платежами” (или с трансферабельной полезностью). Снова есть множество мужчин  $M$  и женщин  $W$ . Но вместо предпочтений относительно противоположного пола для каждой пары  $(m, w)$  указано число  $u(m, w)$ . Эти числа надо понимать как выигрыш (в денежной форме), который получается при образовании такой пары и который может быть произвольным способом перераспределен внутри этой пары. Кроме того, имеются “автаркические” выигрыши мужчин и женщин (если они остаются одиночками), которые без ущерба для общности можно считать равными 0.

Здесь тоже можно говорить о стабильных назначениях. Некоторое время эти две теории (стабильных матчнингов и стабильных назначений) развивались параллельно. Сходство результатов

бросалась в глаза, хотя применяемая техника была различной (“эклектичной” в случае матчингов и линейное программирование в случае назначений). Это вызывало желание строить унифицированную теорию. Представленная выше модель с контрактами включает обе теории. Мы не будем останавливаться на этом подробнее, отсылая к статьям [164], [178], [144], [15].

Для нас важно здесь появление “дробных” матчингов. *Дробный матчинг* задается неотрицательной функцией  $x : C \rightarrow \mathbb{R}_+$ , которая удовлетворяет линейным равенствам

$$\sum_{c \in C(i)} x(c) = 1 \quad (2)$$

для любого  $i \in I$ . Иначе говоря, вместо того, чтобы целиком отдаваться одному договору, участники “делят” себя между несколькими договорами. Еще лучше представлять, что каждый агент не является “индивидом” (неделимым), но представляет континуум одинаковых субагентов общей массой 1. И доля  $x(c)$  субагентов участвует в договоре  $x$ . Множество таких дробных матчингов образует выпуклый многогранник; а известно, что выпуклые задачи проще, чем целочисленные. Каждый “настоящий” матчинг  $S \subseteq C$  дает точку  $1_S$  (характеристический вектор подмножества  $S$ ) в этом политопе; на самом деле даже вершину политопа.

Нас, однако, больше интересуют стабильные дробные матчинги. Они удовлетворяют дополнительным линейным ограничениям, по одному для каждого ребра  $b \in C$ . Грубо говоря, каждое такое неравенство говорит, что это ребро неблокирующее. Более точно, для (бинарного) договора  $c$  (между участниками  $i$  и  $j$ ) пишем  $c \preceq b$ , если  $b \in C(i)$  и  $c \leq_i b$  или если  $b \in C(j)$  и  $c \leq_j b$ . Так вот, если  $S$  стабильный матчинг и  $x = 1_S$ , то выполнены неравенства

$$\sum_{b, c \preceq b} x(b) \geq 1 \quad (3)$$

для любого (бинарного) договора  $c \in C$  (“реберные неравенства”). В самом деле, это неравенство говорит, что для любого договора  $c$  выполнено одно из двух: либо  $c$  принадлежит  $S$ , либо  $c$  хуже некоторого  $s$  из  $S$  для одного из участников договора  $c$ . Что есть не что иное, как условие S2 стабильности.

Это побуждает рассмотреть выпуклый политоп (многогранник)  $P_{SM}$  стабильных дробных матчингов в  $\mathbb{R}_+^C$ , заданный “матчинговыми” равенствами (2) и “реберными” неравенствами (3). В [178] (см. также [164]) установлен такой принципиальный факт:

**Теорема 3.5.** *Политоп  $P_{SM}$  есть выпуклая оболочка множества векторов  $1_S$  для стабильных матчингов  $S$ .*

Доказательство можно разделить на две части. Первая часть говорит, что этот политоп непуст. Это утверждение носит общий характер и верно для любого графа (и даже гиперграфа); мы к нему еще вернемся. Вторая часть более проста и уже существенно использует двудольность, а точнее тот факт, что любой цикл в двудольном графе имеет четный размер.

В частности, любой дробный стабильный матчинг представляется как выпуклая комбинация стабильных матчингов; два канонических разложения такого рода строятся в [9]. Теорема 3.5 перебрасывает мостик между теорией стабильных матчингов в двудольных графах и теорией линейных задач. Потому что крайние точки (вершины) политопа  $P_{SM}$  — это фактически стабильные матчинги. Из этого описания сравнительно просто получаются многие приведенные выше факты, полученные “эклектичными” (т.е. комбинаторными) методами: существование, решеточность, одиночество, оптимальность.

Описание граней политопа  $P_{SM}$  приведено в [155]. См. также [164], [90], [142], [26], [33], [174], [56], [9], [42] и более недавний обзор [66].

### 3.5. Стабильные потоки и сети

Быть может, здесь стоит сказать про недавнее развитие теории стабильных матчингов в сетях. Начало этому направлению положила статья Байю и Балинского [25], которые ввели понятие стабильных потоков в ориентированных графах (сетях). Это направление было подхвачено в [146] и [77]; в последней работе эта задача сводилась к двудольному случаю. См. также [122]. Более экономическая постановка приводится в работах [99], [96], [78]; здесь используется вариант стабильности, называемый *стабильностью вдоль пути* (trail stability), или цепной стабильностью.

4. ОБЩИЙ ДВУДОЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Здесь структура договоров снова задается двудольным графом, но предпочтения участников (мы их по-прежнему называем мужчинами и женщинами [24], хотя более уместно было бы говорить о фирмах и рабочих) задаются плоттовскими ФВ. Предпочтения мужчин описываются плоттовскими ФВ  $f_m$ , женщин – тоже плоттовскими ФВ  $g_w$ . Основное отличие от предыдущего раздела в том, что каждый агент может заключить несколько договоров с агентами противоположной стороны (many-to-many). Главный вывод состоит в том, что многие результаты предыдущего раздела (с некоторыми оговорками) переносятся на этот более общий случай.

4.1. Существование

Удобно (см. разд. 2.3) агрегировать всех мужчин в одного агента  $M$  с ФВ  $F$ , которая определяется так: для  $A \subseteq C$

$$F(A) = \bigcup_m f_m(A \cap C(m)),$$

и аналогично агрегировать всех женщин в одного агента  $W$  с ФВ  $G$ , устроенной аналогично.  $F$  и  $G$  снова плоттовские ФВ. И как легко понять, стабильная сеть договоров в исходной задаче эквивалентна стабильной сети между двумя “агрегированными” агентами  $M$  и  $W$ . Иными словами, можно считать, что у нас всего два агента! Мы ничего не теряем в содержании, но экономим на записях.

Следующий результат о существовании стабильных сетей обобщает теорему Гейла–Шепли.

**Теорема 4.1.** *В описанной выше ситуации стабильные сети договоров существуют.*

Хотя эту теорему можно получить прямо из теоремы Гейла–Шепли с помощью теоремы о редукции, мы расскажем о другом подходе, связанном с теоремами о неподвижных точках.

Видимо, впервые идея о применении неподвижных точек к задачам о стабильности появилась в [72], [171]. Адачи [13] (в ситуации классического марьяжа) описал множество  $SM$  стабильных матчингов как множество неподвижных точек некоторого монотонного оператора. Применительно к общему случаю, о котором мы говорим, эту идею в наиболее полном виде реализовал Флейнер [74]. Ниже мы наметим эту идею в несколько ином (хотя и близком) исполнении.

Рассмотрим множество  $2^C \times 2^C$  пар  $(A, B)$ , снабженное следующим частичным порядком  $\leq$ :

$$(A, B) \leq (A', B'), \text{ если } A \subseteq B, \quad B' \subseteq A'.$$

А в нем рассмотрим множество  $SS$  т.н. полустабильных пар. Пара  $(Y, Z)$  называется *полустабильной*, если  $Y \cup Z = C$  и  $G(Y) \subseteq F(Z)$ . Заметим, что если  $G(Z) = F(Y)$ , то  $S = G(Z) = F(Y)$  является стабильным множеством. Так что такие стабильные пары можно отождествить со стабильными множествами.

Для каждой полустабильной пары  $(Y, Z)$  определим новую пару  $\Phi(Y, Z) = (Y', Z')$ , где

$$Y' = Y \cup F(Z), \quad Z' = (Z - F(Z)) \cup G(F(Z)) = Z - (F(Z) - G(F(Z))). \tag{4}$$

Очевидно, что  $Y \subseteq Y'$ , а  $Z' \subseteq Z$ . Можно показать, что для полустабильной пары  $(Y, Z)$  пара  $\Phi(Y, Z)$  тоже полустабильна, так что отображение  $\Phi$  задает монотонную динамику на множестве  $SS$  полустабильных пар.

**Лемма 4.2.** *Если полустабильная пара  $(Y, Z)$  неподвижна относительно оператора  $\Phi$ , то эта пара стабильна и тем самым дает стабильную сеть.*

В самом деле, равенство  $Z = Z'$  означает, что  $F(Z) = G(F(Z))$ , а равенство  $Y = Y'$  – что  $F(Z)$  содержится в  $Y$ . В частности,  $G(Y) \subseteq F(Z) \subseteq Y$ , откуда по свойству отбрасывания мы получаем  $G(F(Z)) = G(Y)$ . Таким образом,  $F(Z) = G(Y)$  и является стабильной сетью контрактов.

В частности, каждая максимальная полустабильная пара дает стабильную сеть. На самом деле, каждая неподвижная точка отображения  $\Phi$  дает стабильную сеть (и обратно). Это позволяет “строить” все стабильные сети. Надо начать с произвольной полустабильной пары  $P_0 = (Y, Z)$  и строить последовательные приближения  $P_{k+1} = \Phi(P_k)$ ; эта последовательность  $P_0, P_1, \dots$  стабилизируется через конечное число шагов (в силу монотонности) и застревает в неподвижной точке, которая фактически является стабильной сетью.

Отметим, что процесс  $\Phi$  фактически реализует идею, заложенную в оригинальном алгоритме Гейла–Шепли. Множество  $Y$  реализует все предложения, полученные  $G$ -агентом от  $F$ -агента, а  $Z$  – доступные к текущему моменту контракты для  $F$ -агента (Мужчины). Последний выбирает из  $Z$  самые хорошие для него  $F(Z)$  и добавляет их к  $Y$ , формируя  $Y'$ .  $G$ -агент (Женщина) из  $Y'$  оставляет наилучшие для нее  $G(Y')$  (равное, между прочим,  $G(Y \cup F(Z)) = G(G(Y) \cup F(Z)) = G(F(Z))$  в силу включения  $G(Y) \subseteq F(Z)$ ), отклоняя  $F(Z) - G(F(Z))$  и уменьшая тем самым  $Z$  до  $Z'$ .

Вспоминая общее описание стабильных сетей как неподвижных точек (раздел 2), можно сказать, что удача тут связана с тем, что удается “общий” оператор разложить на убывающую и возрастающую компоненты.

#### 4.2. Оптимальность и решеточность

Аналогичные факты имеют место и в общей ситуации (с плоттовскими ФВ). Здесь для оценки исходов мы будем использовать гиперпорядок Блэра  $\preceq_F (1)$ , ассоциированный с “мужской” ФВ  $F (= \bigcup_m f_m)$ . Вспомним динамику  $\Phi$ , использованную в доказательстве существования. Если мы начинаем процесс последовательного приближения с пары  $(\emptyset, C)$ , то процесс сходится к некоторому стабильному состоянию  $S_M$ . Утверждается, что это состояние не хуже (в смысле  $\preceq_F$ ), чем любое другое стабильное состояние  $T$ . Это утверждение получается по индукции с помощью следующей леммы.

**Лемма 4.3** (см. [54]). Пусть  $(Y, Z)$  – полустабильная пара,  $T$  – стабильное подмножество в  $C$ , и  $T \preceq_F Z$ . Тогда  $T \preceq_F Z'$ , где  $\Phi(Y, Z) = (Y', Z')$ , см. (4).

Таким образом, сеть  $S_M$  наилучшая для мужчин (среди стабильных). Напротив, она наихудшая для женской половины. Это видно из следующего утверждения.

**Предложение 4.4.** На множестве  $\mathbf{St}$  стабильных сетей “мужское” гиперотношение  $\preceq_F$  является гиперпорядком (то есть антисимметрично), причем противоположным “женскому” гиперпорядку  $\preceq_G$ .

Последнее утверждение Рот [158] называл ‘поляризацией интересов’.

В силу свойства противоположности мы ограничимся рассмотрением только порядка  $\preceq_F$  на множестве  $\mathbf{St}$ . То, что в этом посете (т.е. частично упорядоченном множестве) есть максимальный элемент  $S_M$  (и минимальный  $S_W$ ) намекает на то, что этот посет является решеткой. И это действительно так. Впервые на это обратил внимание Кнут, затем Рот; окончательную ясность внес Блэр [37], который именно для этой цели и ввел свой гиперпорядок. См. также [74], [54].

**Теорема 4.5.** Посет  $(\mathbf{St}, \preceq_F)$  является решеткой.

В общем случае решеточные операции  $\vee$  и  $\wedge$  устроены непросто. Однако при дополнительном требовании кардинальной монотонности можно описать их более явно.

ФВ  $f$  (на абстрактном множестве  $X$ ) называется кардинально монотонной (в [74] говорится о “возрастании”, а в [94] – о “законе агрегированного спроса”), если  $A \subseteq B$  влечет  $|f(A)| \leq |f(B)|$ . Это своего рода монотонность, но не теоретико-множественная, а численная. Если ФВ  $f$  к тому же заменяемая, то кардинальная монотонность влечет условие отбрасывания, так что такие ФВ являются плоттовскими. Чтобы более ясно увидеть различие (или усиление), представим, что мы из множества  $A$  удалили некоторый выбранный элемент  $a \in f(A)$ . Плоттовость влечет, что в этом случае все элементы  $f(A) - a$  останутся в выборе из  $A - a$ , и быть может добавится несколько новых элементов. Так вот кардинальная монотонность состоит в том, что добавиться может не более одного нового элемента.

Например, выбор с квотой (см. пример 5) удовлетворяет этому требованию. А вот выбор, рационализируемый предпорядком (пример 4), не всегда. При условии, что ФВ  $F$  и  $G$  кардинально монотонные (и заменяемые), верхняя грань стабильных сетей  $S$  и  $T$  устроена так:  $S \vee T = F(S \cup T)$ , а  $S \wedge T = G(S \cup T)$ .

Применительно к классическому марьяжу, матчинг  $S \vee T$  сопоставляет мужчине  $m$  лучшую для него женщину из матчингов  $S$  и  $T$ . Можно показать, что решетка стабильных сетей в случае кардинально монотонных ФВ тоже дистрибутивна.

### 4.3. Феномен сельских больниц

Речь идет о т.н. феномене “сельских больниц” (rural hospital). Представим себе, что мы используем алгоритм Гейла–Шепли для распределения студентов-медиков по больницам. И студентов меньше, чем вакансий. Довольно естественно ожидать, что недоукомплектованными окажутся больницы, находящиеся в сельской местности, в силу их меньшей привлекательности. Но быть может другая процедура получения стабильных распределений окажется более благосклонной к сельским больницам?

Вспомним, что в ситуации классического марьяжа не востребуемые агенты (одиночки) были одни и те же в любом стабильном матчинге. Оказывается, что аналогичное утверждение верно и в общем случае. Однако тут приходится требовать, чтобы ФВ агентов были не просто плоттовскими, но еще и кардинально монотонными. В этом случае верно

**Предложение 4.6** (см. [159], [74]). *Если ФВ мужчин и женщин кардинально монотонны, то в любой стабильной сети  $S$  размер  $S(m)$ , как и  $S(w)$ , один и тот же.*

Плоттовская ФВ  $f$  называется *заполняющей квоту* (quota-filling; в [43] используется термин acceptance), если для некоторого числа  $q$  выполнено свойство:  $f(A)$  содержит  $q$  элементов, если  $|A| \geq q$ . Можно показать (см. [127]), что такая ФВ кардинально монотонна, и что  $f(A) = A$ , если  $|A| \leq q$ .

**Предложение 4.7.** *Если предпочтения мужчин и женщин заполняют квоты, то множество  $S(a)$  для агента, не выбравшего квоту, одно и то же (не зависит от конкретной стабильной сети  $S$ ).*

В самом деле, пусть агент  $a$  не выбрал квоту  $q_a$ , а  $S$  и  $T$  — две стабильные сети. Тогда размеры  $S(a)$  и  $T(a)$  одинаковы (и равны, скажем,  $k < q_a$ ). И если эти множества различны, то размер  $S(a) \cup T(a)$  больше  $k$ , а значит и размер  $f_a(S(a) \cup T(a))$  больше  $k$ . Но мы знаем из предыдущего, что это множество равно  $(S \vee T)(a)$  для стабильной сети  $S \vee T$ , и поэтому его размер должен равняться  $k$ .

Это означает, что агенты стратифицируются на две “лиги” — “высшую” и “низшую”. Высшая лига составлена из укомплектованных больниц и принятых в них врачей. И внутри этой лиги прикрепление врачей к больницам может варьироваться. Больницы же из низшей лиги получают одних и тех же врачей тоже из низшей лиги. Феномен “сельских больниц” в ситуации “мэни-ту-мэни” (и нужные для ее выполнения области предпочтений) обстоятельно обсуждается в работе [127].

Алгоритмы для нахождения всех стабильных матчингов см. в [140], [56].

## 5. ОБЩИЕ БИНАРНЫЕ КОНТРАКТЫ

Теперь обсудим ситуацию со стабильностью, когда контракты произвольные бинарные (и задаются графом). Для начала мы разберем, что известно в том случае, когда предпочтения задаются линейными порядками (мы называем это *классическим руммэйтом*). Дело в том, что эта ситуация была исследована наиболее подробно. А затем обсудим общий случай, к которому внимание было обращено несколько позже.

### 5.1. Классический руммэйт

Ситуация классического руммэйта похожа на классический марьяж; различие лишь в том, что мы отказываемся от двудольности графа. Многие результаты переносятся, но главное отличие в том, что стабильные матчинги уже не всегда существуют. Это показывает уже простейший пример с тремя агентами, приведенный в [81]. В [10] утверждается, что существование стабильного руммэйта гарантировано только в двудольном случае. В связи с этим два направления деятельности представляются интересными. Первое — найти условия, когда стабильность имеет место. И второе — найти подходящее обобщение, которое существует уже всегда.

Собственно говоря, ситуация с руммэйтом двинулась с места после того, как Ирвинг в [108] предложил алгоритм (значительно более сложный, чем Гейла–Шепли), который по окончании своей работы либо выдавал некоторый стабильный матчинг, либо утверждал, что такого матчинга не существует. Мы не будем описывать этот алгоритм, отсылая к оригинальной статье.

После этого последовали статьи о разных релевантных постановках (предпочтения со связками и три разных понимания стабильности в этом случае, с ограниченными списками и т.п.):

[116], [107], [109], [112], [44], [137], [138], [139], [69], [57]. Многие успехи были подытожены в монографии [89]. См. также [69], [153], [47].

Алгоритмы – это хорошо, но они не всегда проясняют структуру. В 1991 г. Тан [173], основываясь на алгоритме Ирвинга, доказал существование некоторой структуры, названной им стабильным разбиением (stable partition), которая позволяет сразу и убедительно показать, существует стабильный матчинг или нет. Как пишет Тан, наличие “нечетной части” у этого разбиения позволяет просто убедиться в том, что стабильный матчинг невозможен. Тогда как подход Ирвинга требует понимания работы этого сложного алгоритма, предназначенного скорее для машинной проверки.

Хорошее изложение этого вопроса дано в [14]. Начнем с определения *стабильного разбиения*. Это некоторое подмножество  $S$  ребер графа  $C$ , которое обладает следующими тремя свойствами.

- 1) Связные компоненты графа  $S$  – циклы или ребра.
- 2) Каждая циклическая компонента может быть так циклически пронумерована, что для каждой вершины предыдущее ребро-договор хуже последующего (относительно линейного порядка  $<$  этой вершины-агента).
- 3) Для любого ребра  $c$ , не вошедшего в  $S$ , существует вершина-агент  $i$ , покрытый  $S$  и участвующий в  $c$  (так что  $C(i)$  содержит  $c$  и пересекается с  $S(i)$ ) и такой, что  $c <_i S(i)$ . (Последнее условие говорит, что  $c$  не может блокировать  $S$ ).

Тривиальное замечание состоит в том, что стабильный матчинг дает стабильное разбиение (вообще без циклических компонент); надо только удалить одиночек. Польза же этого понятия в том, что если нет нечетных циклических компонент, то стабильный матчинг существует. Надо всего лишь оставить каждое второе ребро в каждом (четном) цикле. С другой стороны, в [173], [14] доказано

**Предложение 5.1.** *У любого стабильного разбиения нечетные циклические компоненты одни и те же.*

Как следствие мы получаем, что стабильного матчинга нет, если стабильное разбиение содержит нечетную циклическую компоненту.

Однако все эти замечания повисали бы в воздухе, если бы не следующий принципиальный факт.

**Теорема 5.2** (см. [173]). *В ситуации классического руммэйта существует стабильное разбиение.*

Тан конструктивно доказывал это с помощью некоторой модификации алгоритма Ирвинга. Более изящное и короткое рассуждение приведено в [14] с апелляцией к лемме Скарфа. Рассмотрим “дробную” версию стабильного матчинга, как в разделе 3. Согласно лемме Скарфа, существует “стабильный дробный матчинг”, т.е. такой дробный матчинг  $x \in \mathbb{R}_+^C$ , что у каждого ребра  $c \in C$  имеется конец  $i \in P(i)$ , для которого  $\sum_{c <_i s} x(s) = 1$ . (Иначе говоря, договора агента  $i$ , которые хуже  $c$ , имеют нулевые веса.) В качестве  $S$  возьмем носитель  $x$ , т.е. ребра с положительным весом. Если  $x(s) = 1$ , мы имеем изолированное ребро. Поэтому далее мы будем считать, что веса отличны от 0 и 1. Такие ребра можно ориентировать так, что конец ребра – это вершина  $i$  с  $\sum_{c <_i s} x(s) = 1$ ; ясно, что такая вершина только одна. Причем если такая стрелка входит в вершину, то другая выходит, и наоборот. Отсюда следует, что  $S$  состоит из изолированных ребер и изолированных направленных циклов. Наконец, условие 3) определения стабильного разбиения выполнено в силу следующего замечания. Если  $c$  не принадлежит  $S$ , т.е.  $x(c) = 0$ , то возьмем тот его конец  $i$ , для которого  $\sum_{c <_i s} x(s) = 1$ , т.е.  $\sum_{t <_i c} x(t) = 0$ . Последнее равенство означает, что если  $s \in S(i)$ , то  $s$  лучше, чем  $c$ , для  $i$ .

Таким образом  $S$  действительно стабильное разбиение.

Подводя итог этому направлению, можно сказать, что все агенты разбиваются на три группы (или фракции). Первая (“лед”) состоит из одиночек, вторая (“ламинарная”) состоит из пар, а третья (“турбулентная”) состоит из нечетных циклов. Если мы удаляем третью часть, то оставшиеся агенты могут образовать стабильный матчинг, быть может, не один. Одиночки в этом матчинге также канонически определены, как показывает то же рассуждение, что и для марьяжа.

В [174] показано, что множество стабильных руммэйтов обладает естественной структурой медианы, слабой замены структуры решетки для марьяжей.

Так как в общей ситуации стабильного руммэйта может не существовать, несколько работ было посвящено поиску “почти стабильных” или “приблизительно” стабильных матчингов, см. [12], [91–93].

### 5.2. Общий случай

Теперь перейдем к общему случаю, когда предпочтения агентов задаются плоттовскими ФВ. Подмножества в  $C$  назывались иногда *сетями партнерств*, намекая, что партнеров может быть несколько. Хотя теорема о редукции говорит, что можно ограничиться слабо-порядковыми ФВ, наука развивалась не так. Первоначально внимание было уделено более частному (хотя и очень важному) случаю, когда предпочтения агентов были линейными с квотами. Иначе говоря, у каждого агента  $i$  есть линейный порядок  $<_i$  (на множестве  $C(i)$  доступных ему бинарных контрактов плюс автаркия), и есть квота  $q_i \geq 1$  на допустимое число контрактов.

На эту тему была статья [113], где сети партнерств назывались фикстюрами (fixture). Каждый агент заключает партнерство (контакты) с  $q_i$  другими агентами; стабильность понимается как обычно. Если квоты равны 1, мы получаем ситуацию классического руммэйта. В [113] было предложено обобщение алгоритма Ирвинга.

Близкая постановка была изучена в [44]. Авторы говорили об активностях (когда граф имел параллельные ребра), и о партнерстве, когда агенты могли заключать несколько договоров, число которых ограничивалось квотой. Авторы показывают, как общая задача такого рода сводится к классическому руммэйту. Делается это, грубо говоря, за счет клонирования агентов, примерно как в теореме 2.3 о редукции.

Еще интереснее работа Флейнера [76], где он предполагает, что предпочтения на  $C(i)$  задаются кардинально монотонными плоттовскими ФВ. Он вводит понятие стабильного полу-партнерства, обобщая понятие стабильного разбиения Тана. Основная его теорема, обобщающая Тана, утверждает, что такое полу-партнерство всегда существует, что нечетные циклы любого стабильного полу-партнерства одни и те же, и отсутствие нечетных циклов необходимо и достаточно для существования стабильного партнерства (стабильной сети).

Кроме этого Флейнер устанавливает интересный структурный результат в стиле “сельских больниц” из 4.3. Что при тех же условиях на предпочтения число партнерств для каждого агента  $i$  не зависит от выбора стабильной сети. А если ФВ квотируемые (см. пример 5), то партнеры у агента, не выбравшего квоту, одни и те же (его теорема 5.1). На самом деле, он доказывает даже более тонкое свойство. Пусть стабильные сети существуют. Тогда для любого агента  $i$  можно разбить множество  $C(i)$  на части  $C_0(i), C_1(i), \dots, C_{k(i)}$  (где  $k(i)$  – число партнерств  $i$  в любой стабильной сети) так, что для любой стабильной сети  $S$  пересечение  $S(i)$  с  $C_0(i)$  пусто, а пересечения  $S(i)$  с  $C_1(i), \dots, C_{k(i)}$  – одноэлементные. Это означает некоторое ранжирование партнеров (или договоров), и стабильная сеть дает каждому агенту по договору каждого ранга (исключая “совсем неприемлемые” из  $C_0$ ).

Одним словом, читайте и перечитывайте Флейнера!

## 6. ОБЩИЕ (НЕБИНАРНЫЕ) КОНТРАКТЫ

Мы осветили то, что относится к бинарным контрактам, т.е. случай, когда контрактная система представлена графом. Теперь остается сказать то немногое, что известно в случае произвольного гиперграфа. По-прежнему мы считаем, что предпочтения участников описываются плоттовскими ФВ. Согласно теореме о редукции, мы в принципе можем ограничиться более простым случаем, когда предпочтения задаются слабыми порядками.

### 6.1. Равновесие и стабильность

Итак, пусть  $(I, C)$  – гиперграф с множеством вершин-агентов  $I$  и множеством гиперребер-договоров  $C$ . У каждого агента  $i$  задан слабый порядок  $\leq_i$  на множестве  $C(i)$ , и выбор этого агента из меню  $A \subseteq C(i)$  состоит из всех максимальных (относительно  $\leq_i$ ) элементов. Вместо порядков  $\leq_i$  можно работать с функциями полезности  $u_i : C(i) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Напомним, что (в слабо-порядковой обстановке) сеть договоров  $S \subseteq C$  является стабильной, если

- 1) для любого агента  $i$  множество  $S(i)$  состоит из эквивалентных ( $\approx_i$ ) договоров;
- 2) если договор  $c$  обладает тем свойством, что  $S(i) \leq_i c$  для всех  $i \in P(c)$ , то  $c \in S$ .

Предполагая наличие автаркических договоров, мы видим из 2), что  $S(i)$  непусто для любого  $i$ . Обозначая  $u_i(S) = u_i(S(i))$ , мы получаем вектор  $u(S) = (u_i(S), i \in I)$  в  $\mathbb{R}^I$ , вектор *полезностей* при действии сети  $S$ . Этот вектор  $u = u(S)$  позволяет описать систему  $S$ : она состоит из таких договоров  $s$ , что  $u_i(s) = u_i$  для всех  $i \in P(s)$ . Такое описание наводит на мысль формулировать понятие стабильности в терминах вектора  $u \in \mathbb{R}^I$ . Скажем, что вектор  $u$  *равновесный*, если

- а) он достижим или обоснован: для любого  $i \in I$  существует договор  $c \in C(i)$ , что  $u_j \leq u_j(c)$  для любого  $j \in P(c)$ ;
- б) он недоминируем: если для договора  $c$  выполнено  $u_i \leq u_i(c)$  для всех  $i \in P(c)$ , то  $u_i = u_i(c)$  (снова для всех  $i$  из  $P(c)$ ).

Первое требование говорит, что претензии агента  $i$  на получение полезности  $u_i$  обоснованы. Второе означает отсутствие блокирующих договоров: договор  $c$  блокирует вектор  $u$ , если дает своим участникам не меньше, чем  $u$ , а некоторому даже строго больше.

**Предложение 6.1.** *Если сеть  $S$  стабильная, то вектор  $u(S)$  равновесный. Обратно, если  $u$  равновесный, то система  $S = \{s, u_i(s) = u_i \text{ для всех } i \in P(s)\}$  стабильна.*

**Доказательство.** Первое очевидно. Проверим второе. Начнем с условия 1). Пусть  $s$  и  $t$  принадлежат  $S(i)$ ; нужно поверить, что  $u_i(s) = u_i(t)$ . Так как  $s \in S$ , а  $i \in P(s)$ , то  $u_i(s) = u_i$ ; аналогично для  $t$ .

Проверим теперь условие 2). Пусть  $u_i \leq u_i(c)$  для всех  $i \in P(c)$ ; мы должны показать, что тут везде равенства и поэтому  $c \in S$ . Но это видно из условия б).

Как следствие получаем, что вместо стабильных сетей можно говорить о равновесных векторах. Что несколько проще. Особенно если заметить, что условия а) и б) “тянут” в разные стороны. Если вектор  $u$  удовлетворяет условию а), то и любой меньший (не строго) тоже удовлетворяет условию а). Напротив, если  $u$  удовлетворяет б), то и любой больший удовлетворяет. Так что мы имеем два подмножества  $A(C)$  и  $B(C)$  в  $\mathbb{R}^I$ ; первое состоит из векторов, удовлетворяющих а) и направленное “вниз”, тогда как второе — из удовлетворяющих б) и направленное “вверх”. Важно, что они не могут пересекаться по внутренним точкам. Потому что если вектор  $u$  — внутренняя точка  $A$  и  $B$ , то при малом  $\varepsilon > 0$  вектор  $u - \varepsilon$  (точнее,  $u - \varepsilon 1_I$ ) тоже принадлежит  $A$  и  $B$ . В силу а) (для любого  $i$ ) существует  $c \in C(i)$ , такой что  $c$  дает не меньше  $u$ . Но тогда этот же  $c$  дает строго больше, чем  $u - \varepsilon$ , что противоречит условию б) для  $u - \varepsilon$ .

Вывод такой:  $A$  и  $B$  могут пересекаться только по границе. И любые точки пересечения — это равновесные вектора. Но они могут вообще не пересекаться! Потому что мы знаем, что стабильных сетей может не быть. В этой связи видятся два пути или направления деятельности.

Первый — искать какие-то достаточные условия. Кстати, необходимое и достаточное условие универсального (т.е. при любых предпочтениях) существования стабильных сетей приводится в [28].

Второй — как-то разумно и осмысленно ослаблять условия стабильности, вводя понятия “полустабильности” или “ослабленной стабильности”.

## 6.2. Дробные системы договоров

Начнем с того, что условия “равновесности” очень напоминают условия, которые накладываются на элементы из ядра кооперативной игры. Условие а) — нечто типа достижимости вектора “платежей” или “выплат”. А условие б) — это условие недоминируемости. А в теории игр много занимались вопросами непустоты ядра. Там тоже вставляли эти два вопроса. И ответы на оба оказались тем или иным образом связаны с теоремой (леммой) Скарфа. А именно, при условии некоторой сбалансированности Скарф показал, что ядро непусто.

Вот в этом направлении мы и пойдём, заодно вспоминая про дробные матчинги и системы договоров. *Дробной системой договоров* будем называть отображение  $x : C \rightarrow \mathbb{R}_+$ , которое удовлетворяет линейным ограничениям

$$x(C(i)) := \sum_{c \in C(i)} x(c) = 1 \text{ для любого } i \in I. \quad (5)$$

(Образно говоря, каждый участник долей  $x(c)$  участвует с коалиции  $c$ .) Обозначим многогранник таких дробных договоров  $P(I, C)$ .

**Определение.** Пара  $(x, u)$  (где  $x$  – дробная система договоров, а  $u \in \mathbb{R}^I$  – вектор платежей) называется *равновесной*, если

а\*)  $u$  достижим в том смысле, что если  $x(c) > 0$ , то  $u|P(c) \leq u(c)$  (развернуто: для любого  $j \in P(c)$  выполнено  $u_j \leq u_j(c)$ );

б\*)  $u$  неблокируем в том смысле, что нет такого договора  $c$ , что  $u|P(c) \ll u(c)$  (строго меньше по всем компонентам).

Так вот, теорема Скарфа (в форме, приданной ей в работе [5]) утверждает, что такая равновесная пара всегда существует. Напрашивается положить  $S = \{c \in C, x(c) > 0\}$ , т.е. взять носитель  $x$ . Такая сеть договоров похожа на стабильную. Единственное, что не хватает до стабильности – возможное нарушение свойства индивидуальной рациональности. Эта сеть может давать агенту  $i$  несколько договоров  $S(i)$ , которые неравноценны для  $i$ . Вот здесь и начинается развилка.

Первый путь. Допустим, удалось найти подсистему  $T \subseteq S$ , которая даёт разбиение  $I$  (в том смысле, что каждый агент  $i$  входит в  $P(t)$  для единственного договора  $t \in T$ ). Тогда система  $T$  является стабильной в слабом смысле: нет договоров, которые давали бы их участникам строго больше.

Второй путь – отказаться от требования индивидуальной рациональности S1. Рассмотрим эти пути более подробно.

**6.2.1. Первый путь.** Теорема Скарфа говорит, что существуют равновесная пара  $(x, u)$  и соответственно система  $S = \text{supp}(x)$ . В принципе условие достижимости относится только к  $S$ , и мы могли бы рассмотреть многогранник тех  $x$ , которые являются дробными системами договоров и носитель которых лежит в  $S$ . В частности, интересоваться вершинами такого многогранника. И если эта вершина целая (т.е. значения  $x(c)$  равны 0 или 1), мы получали бы разбиение  $T$  множества  $I$ . Такая (“разбивающая”) система  $T$  была бы (слабо) стабильной системой договоров.

Существование целых вершин у многогранника  $P(I, C)$  тесно связано с совершенством графа  $\Gamma = L(I, C)$  в обозначениях [3]. Вершинами этого графа служат договора (так что  $V(\Gamma) = C$ ); договора  $c$  и  $c'$  соединены ребром, если  $P(c)$  и  $P(c')$  пересекаются (т.е. когда есть агент  $i$ , участвующий в обоих договорах). Так вот, если этот граф *совершенный* (определение см., например, в [3]), то многогранник  $P(I, C)$  имеет целые вершины. Поэтому такой гиперграф *универсально стабилен* (стабилен при любом слабо-порядковом оснащении).

Такие универсально стабильные гиперграфы (они называются также *нормальными*, см. [39], [136]) можно строить по совершенным графам. Пусть  $\Gamma = (V, E)$  – произвольный граф; *кликой* в нем называется (максимальный по включению) полный подграф в  $\Gamma$  (т.е. любые две вершины соединены ребром). Так вот, объявим клики агентами, а вершины графа – договорами. То есть образуем гиперграф  $H$  с вершинами-агентами  $K$  (множество клик в  $\Gamma$ ) и гиперребрами-договорами  $V$  (т.е.  $I = K, C = V$ ). Понятно, что  $L(H)$  вершинами имеет вершины из  $V$ , и эти вершины соседние, если лежат в одной клике графа  $\Gamma$ , то есть соседние в графе  $\Gamma$ . Так что  $L(H) = \Gamma$ . И если граф  $\Gamma$  был совершенным, то гиперграф  $H = (K, V)$  нормален и потому универсально стабилен.

В частности, двудольные графы совершенные и универсально стабильные; другой интересный универсально стабильный гиперграф – это гиперграф поддеревьев произвольного дерева. Подробнее об этом см. в [4], [39], [120], [124].

**6.2.2. Второй путь** предлагает понятие метастабильной системы договоров, см. [55].

**Определение.** Сеть договоров  $S \subseteq C$  называется *метастабильной* (при заданном семействе  $(u_i, i \in I)$  функций полезности агентов), если выполнены два условия:

MS1) Множество  $S(i)$  непусто для любого  $i \in I$ . И мы полагаем  $u(i) = \min\{u_i(s), s \in S(i)\}$ . Это как бы “гарантированный” уровень полезностей всех агентов.

MS2) Для любого договора  $c$  существует участник  $i$  этого договора, для которого  $u_i(c) \leq u(i)$ . Это условие типа отсутствия блокирования; договор  $c$ , дающий всем его участникам строго больше, чем  $u$ , явно блокирует гарантированный уровень полезности системы  $S$ .

В работе [55] доказываются существование метастабильных систем и обсуждается связь таких систем со стабильностью.

**6.2.3. Трехполые семьи.** Есть довольно много работ, посвященных исследованию стабильности для трехполых семей (т.е. трехдольных и  $m$ -дольных графов), см. [17], [20], [38], [52], [68], [102], [114], [143], [147], [50], [134], [170], [135].

**6.2.4. Дополнительность.** До сих пор мы предполагали, что ФВ, описывающие предпочтения агентов, заменимые (и даже Плотовские). Это потому что в большинстве работ на тему стабильности накладывались такие условия. И фактически есть лишь одна работа [157] (см. также [21], [104]), где накладывается в некотором смысле противоположное условие комплементарности (дополнительности). Поэтому стоит сказать об этой работе, упрощая в чем-то их модель, но оставляя главное.

Как и выше, мы имеем гиперграф  $(I, C)$  и ФВ  $f_i$  для каждого агента  $i$ . Назовем ФВ  $f$  *комплементарной* (дополнительной), если она монотонна, т.е. если  $A \subseteq B$  влечет  $f(A) \subseteq f(B)$ . Формально это условие тесно связано с заменимостью: если мы определим ФВ  $g$  равенством  $g(A) = A - f(A)$ , мы получим заменимую ФВ, и наоборот. Но если заменимость говорила, что при выбытии нанятого работника все остальные нанятые продолжают быть нанятыми (выбранными), то дополнительность допускает увольнение некоторых других нанятых работников и не позволяет брать новых. Так что предпочтения тут носят кардинально иной характер.

В работе [157] устанавливается существование (и даже единственность) стабильных сетей при условии дополнительности.

Казалось бы, замечательный результат. Однакостораживают две вещи. Первая — доказательство существования настолько тривиально, что указывает на некую неглубину результата. И второе. Если договора дополняют друг друга в том смысле, что их совместное использование значительно повышает привлекательность и пользу, то это подсказывает, что мы должны эту совокупность рассматривать как новый договор (см. пример 0 из разд. 2). Тем самым за счет некоторого естественного расширения договоров можно надеяться вернуться в старую обстановку с заменимыми договорами.

## 7. ПРИМЕНЕНИЯ

Теория стабильности искала применения и выходы в другие дисциплины. Точнее сказать, были попытки использовать понятия теории стабильности применительно к некоторым задачам. В экономике и социальных науках, в физике, в биологии, математике и информатике. Много было по существу, но много и притянуто за уши.

1. Экономика. Первое применение произошло еще до возникновения теории. Оказалось, что за 11 лет до появления статьи Гейла—Шепли этот алгоритм уже был изобретен и применен в самой жизненной ситуации. (Интересно, что и Гейл пришел к понятию стабильности, отталкиваясь от проблем с приемом в колледжи, см. [80].) А именно, при распределении интернов по больницам в США. Мы не будем здесь описывать эту захватывающую историю, отсылая к [160], а ограничимся главным. Суть дела была в том, что после окончания медицинского института выпускники должны были пройти интернатуру в реальных больницах. Мы получаем типичную ситуацию с колледжами (см. разд. 3). Поначалу это дело было пущено на самотек, что вызывало много суеты и неразберихи. Через некоторое время было понятно, что распределение надо централизовать, но не навязывать. То есть выпускники и больницы должны были быть уверены в том, что они не найдут лучшего. И со второй попытки была найдена (и потом успешно и многократно применена) процедура, эквивалентная алгоритму Гейла—Шепли.

Конечно, польза этой процедуры не ограничивается только интернами. Есть много подобных ситуаций, среди которой одной из важнейших является прием в ВУЗы (в нашей стране и не только). После введения ЕГЭ ВУЗы получили возможность дистанционно оценивать пригодность абитуриента для обучения данной специальности. Так что можно было бы централизованно организовать процедуру согласования пожеланий абитуриентов и потребностей ВУЗов. См. [7], [8].

Применительно именно к марьяжу процедура Гейла—Шепли выглядит более фантастической, так как трудно учесть формально все нюансы привлекательности женихов и невест. Но,

видимо, какие-то элементы теории уже используются в работе брачных агентств, см. [40], [133], [30], [31].

Задачи руммэйта в чистом виде вряд ли интересны, но в варианте множественных партнерств имеют отношение к образованию сетей знакомств или связей в интернете и других сетях, организации турниров и т.п. [29], [46], [132], [180]. Про обмен почками и другими органами см. [100], [110], [161], [162].

2. Физика. По поводу физики хочется отослать к “междисциплинарному обзору” [73], почти целиком посвященному этому вопросу. Правда, связи физики и стабильных матчингов слегка притянуты, потому что физиков больше интересуют матчинги, дающие максимальную пользу (или минимальную энергию), тогда как стабильность исходит из других соображений. Можно сказать, что тут происходит сравнение этих двух подходов — глобальной и локальной оптимальности.

Есть одна статья про применение в химии [177].

3. Биология. Есть статьи по биологии, например [115] про антитела, тоже притянутые. Пример из [87] — сообщества микроорганизмов, конкурирующие за питательные вещества. Здесь как бы матчинг между микробами и пищей. Но если со стороны микробов можно наблюдать “предпочтения” по отношению к пище, то со стороны пищи этого нет.

Так что скорее это “двудольная” задача, но когда предпочтения есть только у одной стороны. Такая задача — нечто промежуточное между задачей Гейла—Шепли и задачей Холла о марьяжах. Несомненно, она не менее интересна, чем эти обе. Но пока отсутствует главное — критерий. У Холла мы интересовались матчингом максимального размера. У Гейла—Шепли — стабильностью. А тут что взять за критерий? Возможно, просто оптимальность по Парето. На эту тему я нашел только [181].

4. Информатика. Здесь интерес связан с алгоритмами, оценкой сложности и NP-трудностью [156]. Тут много разнообразных результатов, но мне нечего сказать про них.

Я признателен Н.С. Кукушкину, уточнившему формулировку Предложения 2.2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т.* Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990.
2. *Алескеров Ф.Т., Кисельгоф С.Г.* Лауреаты Нобелевской премии — 2012: Ллойд Шепли и Элвин Рот // Экономический журнал ВШЭ. 2012. Т. 16. № 4. С. 433–443.
3. *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. М.: Мир, 1998. (Lovasz L. Plummer M. Matching theory. Budapest, 1986).
4. *Васин А.А., Гурвич В.А.* Примиримые наборы коалиций для игр в нормальной форме // В сб. “Численные методы оптимизации.” Иркутск: СЭИ. 1978.
5. *Данилов В.И.* О теореме Скарфа // Экономика и матем. методы. 1999. Т. 35 (3). С. 137–139.
6. *Данилов В.И.* Стабильные системы гибких договоров // Ж. новой экономической ассоциации. 2021. Т. 3 (51). С. 32–49.
7. *Кисельгоф С.Г.* Моделирование приемной кампании: вузы различного качества и абитуриенты с квадратичной функцией полезности // Проблемы управления. 2012. Т. 5. С. 33–40.
8. *Abdulkadiroglu A., Sonmez T.* School choice: A mechanism design approach // Amer Economic Review. 2003. V. 93. P. 729–747.
9. *Abeledo H.G., Blum Y., Rothblum U.G.* Canonical monotone decompositions of fractional stable matchings // Int. J. Game Theory. 1996. V. 25. P. 161–176.
10. *Abeledo H., Isaak G.* A characterization of graphs that ensure the existence of stable matchings // Mathematical Social Sciences. 1991. V. 22. P. 93–96.
11. *Abraham D., Biró P., Manlove D.* ‘Almost stable’ matchings in the roommates problem // In Approximation and online algorithms, volume 3879 of Lecture Notes in Comput. Sci. Springer. Berlin. 2006. P. 1–14.
12. *Ágoston K., Biró P., McBride I.* Integer programming methods for special college admissions problems // J. of Combinatorial Optimization. 2016. V. 32. P. 1371–1399.
13. *Adachi H.* On a characterization of stable matchings // Economics Letters. 2000. V. 68. P. 43–49.
14. *Aharoni R., Fleiner T.* On a lemma of Scarf // J. Combin. Theory Ser. B. 2003. V. 87 (1). P. 72–80.
15. *Aldershof B., Carducci O., Lorenc D.* Refined inequalities for stable marriage // Constraints. 1999. V. 4 (3). P. 281–292.
16. *Alimudin A., Ishida Y.* Matching-Updating Mechanism: A Solution for the Stable Marriage Problem with Dynamic Preferences // Entropy. 2022. V. 24. P. 263.
17. *Alkan A.* Nonexistence of stable threesome matchings // Math. Soc. Sci. 1988. V. 16 (2). P. 207–209.

18. *Alkan A., Gale D.* The core of the matching game // *Game and economic behavior*. 1990. V. 2. P. 203–212.
19. *Alkan A., Gale D.* Stable schedule matching under revealed preference // *J. Economic Theory*. 2003. V. 112 (2). P. 289–306.
20. *Atay A., Nuñez M.* Multi-sided assignment games on  $m$ -partite graphs // *UB Economics Working Papers* 2017/357.
21. *Azevedo E.M., Hatfield J.W.* Existence of Equilibrium in Large Matching Markets with Complementarities // Available at SSRN 3268884 (2018). <https://doi.org/10.2139/ssrn.3268884>
22. *Aziz H., Biró P., Gaspers S., de Haan R., Mattei N., Rastegari B.* Stable Matching with Uncertain Linear Preferences // *Algorithmica*. 2020. V. 82. P. 1410–1433.
23. *Aziz H., Klaus B.* Random matching under priorities: stability and no envy concepts // *Social Choice and Welfare*. 2019. V. 53(2). P. 213–259.
24. *Baïou M., Balinski M.* Many-to-many matching: stable polyandrous polygamy (or polygamous polyandry) // *Discrete Appl. Math.* 2000. V. 101 (1–3). P. 1–12.
25. *Baïou M., Balinski M.* The stable allocation (or ordinal transportation) problem // *Math. Oper. Res.* 2002. V. 27(3). P. 485–503.
26. *Balinski M., Gale D.* On the Core of the Assignment Game // In: *Game Theory and Applications. Economic Theory, Econometrics, and Mathematical Economics*. 1990. P. 373–374.
27. *Balinski M., Ratier G.* Graphs and Marriages // *The American Mathematical Monthly*. 1998. V. 105. № 5. P. 430–445.
28. *Bando K., Hirai T.* Stability and venture structures in multilateral matching // *J. of Economic Theory*. 2021. V. 196. 105292.
29. *Bansal V., Agrawal A., Malhotra V.S.* Stable marriages with multiple partners: efficient search for an optimal solution // *Proc. ICALP*. 2003. LNCS 2719. P. 527–542.
30. *Bhatnagar A., Gambhir V., Thakur M.* A new perspective to stable marriage problem in profit maximization of matrimonial websites // *J. Inform. Process. Syst.* 2018. V. 14 (4). P. 961–979.
31. *Benjamin A.T., Converse C., Krieger H.A.* How do I marry thee? Let me count the ways // *Discrete Applied Mathematics*. 1995. V. 59. P. 285–292.
32. *Biró P.* The stable matching problem and its generalizations: an algorithmic and game theoretical approach // *PhD Thesis*. Budapest 2007.
33. *Biró P., Fleiner T.* Fractional solutions for capacitated NTU-games, with applications to stable matchings // *Discrete Optimization*. 2016. V. 22. Part A. P. 241–254.
34. *Biró P., Klijn F.* Matching with couples: A multidisciplinary survey // *International Game Theory Review*. 2013. V. 15. 1340008.
35. *Biró P., Mc Dermid E.* Three-Sided Stable Matchings with Cyclic Preferences // *Algorithmica*. 2010. V. 58. P. 5–18.
36. *Blair C.* Every Finite Distributive Lattice is a Set of Stable Matchings // *J. of Combinatorial Theory, Series A*. 1984. V. 37. P. 353–356.
37. *Blair C.* The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners // *Math. Oper. Res.* 1988. V. 13 (4). 619–628.
38. *Boros E., Gurvich V., Jastar S., Krasner D.* Stable matchings in three-sided systems with cyclic preferences // *Discrete Mathematics*. 2006. V. 289. P. 1–10.
39. *Boros E., Gurvich V., Vasin A.* Stable families of coalitions and normal hypergraphs // *Mathematical Social Sciences*. 1997. V. 34. P. 107–123.
40. *Caldarelli G., Capocci A.* Beauty and distance in the stable marriage problem // *Physica A*. 2001. V. 300 (1–2) C. 325–331.
41. *Cantala D.* Matching Markets: The Particular Case of Couples // *Economics Bulletin*. 2004. V. 3. P. 1–11.
42. *Chambers C.P.* Consistency in the probabilistic assignment model // *J. of Mathematical Economics*. 2004. V. 40. P. 953–962.
43. *Chambers C.P., Yenmez M.B.* Choice and Matching // *American Economic Journal: Microeconomics*. 2017. V. 9 (3). P. 126–147.
44. *Cechlárová K., Fleiner T.* On a generalization of the stable roommates problem // *ACM Trans. Algorithms*. 2005. V. 1 (1). P. 143–156.
45. *Che Y.-K., Kim J., Kojima F.* Stable matching in large economies // *Econometrica*. 2019. V. 87 (1). P. 65–110.
46. *Chowdhury S.* Matching theory for cognitive radio networks: An overview // *ICT Express*. 2019. V. 5 (1). P. 12–15.
47. *Chung K.* On the Existence of Stable Roommate Matchings // *Games and Economic Behavior*. 2000. V. 33. P. 206–230.
48. *Celik O., Knoblauch V.* Marriage Matching with Correlated Preferences // *Working papers University of Connecticut, Department of Economics*. 2007. No 2007–16.

49. *Cooper F.* Fair and large stable matchings in the stable marriage and student-project allocation problems // Thesis for Doctor of Philosophy. 2020.
50. *Cui L., Jia W.* Cyclic stable matching for three-sided networking services // *Comput. Netw.* 2013. V. 57 (1). P. 351–363.
51. *Danilov V., Koshevoy G., Lang C.* Gross substitution, discrete convexity, and submodularity // *Discrete Applied Mathematics.* 2003. V. 131 (2). P. 283–298.
52. *Danilov V.I.* Existence of stable matchings in some three-sided systems // *Math. Social Sci.* 2003. V. 46 (2). P. 145–148.
53. *Danilov V.I.* Choice functions on posets // ВЫХОДИТ в Order, см. arXiv:2101.11965[math.CO].
54. *Danilov V.I., Koshevoy G.A.* Stable sets of contracts in two-sided markets // arXiv:2108.06786 [math.CO].
55. *Danilov V.I., Karzanov A.V.* Stable and metastable contract networks // arXiv:2202.13089 [math.CO].
56. *Dean B.C., Munshi S.* Faster Algorithms for Stable Allocation Problems // *Algorithmica.* 2010. V. 58. P. 59–81.
57. *Delorme M., Garcia S., Gondzio J., Kalcsics J., Manlove D., Pettersson W.* Mathematical models for stable matching problems with ties and incomplete lists // *European Journal of Operational Research.* 2019. V. 277. P. 426–441.
58. *Demange G., Gale D., Sotomayor M.* A further note on the stable matching problem // *Discrete Applied Mathematics.* 1987. V. 16. P. 217–222.
59. *Drgas-Burchardt E., Switalski Z.* A number of stable matchings in models of the Gale-Shapley type // *Discrete Appl. Math.* 2013. V. 161 (18). P. 2932–2936.
60. *Dubins L., Freedman D.* Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm // *Amer. Math. Monthly.* 1981. V. 88 (7). P. 485–494.
61. *M. Dzierzawa M., Oméro M.-J.* Statistics of stable marriages // *Physica A.* 2000. V. 287 (1-2). P. 321–333.
62. *Echenique F., Oviedo J.* A Theory of Stability in Many-To-Many Matching Markets // *Theoretical Economics.* 2006. V. 1. P. 233–273.
63. *Echenique F., Yenmez B.* A Solution to Matching with Preferences Over Colleagues // *Games and Economic Behavior.* 2007. V. 59. P. 46–71.
64. *Eeckhout J.* On the uniqueness of stable marriage matchings // *Economics Letters.* 2000. V. 69. P. 1–8.
65. *Eguchi A., Fujishige S., Tamura A.* A generalized Gale-Shapley algorithm for a discrete-concave stable-marriage model // In Algorithms and computation. volume 2906 of Lecture Notes in Comput. Sci. 2003. P. 495–504. Springer, Berlin.
66. *Eirinakis P., Magos D., Mourtos I., Miliotis P.* Polyhedral Aspects of Stable Marriage // *Mathematics of Operations Research.* 2014. V. 39 (3). P. 656–671.
67. *Eirinakis P., Magos D., Mourtos I.* The stable  $b$ -matching polytope revisited // *Discrete Appl. Math.* 2018. V. 250. P. 186–201.
68. *Eriksson K., Sjostrand J., Strimling P.* Threedimensional stable matching with cyclic preferences // *Mathematical Social Sciences.* 2006. V. 52. P. 77–87.
69. *Eriksson K., Karlander J.* Stable outcomes of the roommate game with transferable utility // *Internat. J. Game Theory.* 2000. V. 29 (4). P. 555–569.
70. *Everaere P., Morge M., Picard G.* Minimal concession strategy for reaching fair, optimal and stable marriages // in: Proc. of the 2013 International Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems. Citeseer. 2013. P. 1319–1320.
71. *Farooq R., Fleiner T., Tamura A.* Matching with partially ordered contracts // *Japan J. Industrial and Applied Mathematics.* 2012. V. 29. 401–417.
72. *Feder T.* A New Fixed Point Approach for Stable Networks and Stable Marriages // *J. of computer and system sciences.* 1992. V. 45. P. 233–284.
73. *Fenoaltea E., Baybusinov I., Zhao J., Zhou L., Zhang Y.-C.* The Stable Marriage Problem: An interdisciplinary review from the physicist's perspective // *Physics Reports.* 2021. V. 917. P. 1–79.
74. *Fleiner T.* A fixed-point approach to stable matchings and some applications // *Math. Oper. Res.* 2003. V. 28 (1). P. 103–126.
75. *Fleiner T.* On the stable  $b$ -matching polytope // *Math. Social Sci.* 2003. V. 46 (2). P. 149–158.
76. *Fleiner T.* The stable roommate problem with choice functions // *Algorithmica.* 2010. 58. P. 82–101.
77. *Fleiner T.* On stable matchings and flows // *Algorithms.* 2014. V. 7. P. 1–14.
78. *Fleiner T., Jagadeesan R., Janko Z., Teytelboym A.* Trading networks with frictions // *Econometrica.* 2019. V. 87. № 5. P. 1633–1661.
79. *Fujishige S., Tamura A.* A general two-sided matching market with discrete concave utility functions // *Discrete Appl. Math.* 2006. V. 154 (6). P. 950–970.
80. *Gale D.* The two-sided matching problem: origin, development and current issues // *International Game Theory Review.* 2001. V. 3. № 2-3. P. 237–252.
81. *Gale D., Shapley L.S.* College admissions and the stability of marriage // *Amer. Math. Monthly.* 1962. V. 69 (1). P. 9–15.

82. Gale D., Sotomayor M. Ms. Machiavelli and the stable matching problem // Amer. Math. Monthly. 1985. V. 92 (4). P. 261–268.
83. Gale D., Sotomayor M. Some remarks on the stable matching problem // Discrete Appl. Math. 1985. V. 11 (3). P. 223–232.
84. Gelain M., Pini M. Rossi F., Venable K., Walsh T. Procedural fairness in stable marriage problems // Proc. of 10th Int. Conf. on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS 2011). Tumer, Yolum, Sonenberg and Stone (eds.). 2011. 2–6. Taipei. Taiwan. P. 1209–1210.
85. Giannakopoulos I., Karras P., Tsoumakos D., Doka K., Koziris N. An equitable solution to the stable marriage problem // in: 27th International Conference on Tools with Artificial Intelligence (ICTAI). IEEE. 2015. P. 989–996.
86. Gonczarowski Y., Nisan N., Ostrovsky R., Rosenbaum W. A stable marriage requires communication // Games and Economic Behavior. 2019. V. 118. Issue C. P. 626–647.
87. Goyal A., Dubinkina V., Maslov S. Multiple stable states in microbial communities explained by the stable marriage problem // ISME Journal. 2018. V. 12 (12). P. 2823–2834.
88. Gul F., Stacchetti E. Walras equilibrium with gross substitutes // J. of Economic Theory. 1999. V. 87. P. 95–124.
89. Gusfield D., Irving R.W. The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms. Boston: MIT Press. MA. 1989.
90. Gusfield D., Irving R., Leather P., Saks M. Every finite distributive lattice is a set of stable matchings for a small stable marriage instance // J. of Combinatorial Theory, Series A. 1987. V. 44. Issue 2. P. 304–309.
91. Halldórsson M.M., Irving R.W., Iwama K., Manlove D.F., Miyazaki S., Morita Y., Scott S. Approximability Results for Stable Marriage Problems with Ties // Theoretical Computer Science. 2003. V. 306. P. 431–447.
92. Halldórsson M.M., Iwama K., Miyazaki S., Yanagisawa H. Randomized approximation of the stable marriage problem // Theoretical Computer Science. 2004. V. 325. № 3. P. 439–465.
93. Halldórsson M.M., Iwama K., Miyazaki S., Yanagisawa H. Improved approximation results of the stable marriage problem // ACM Transactions on Algorithms. 2007. V. 3. Issue 3. Article No. 30.
94. Hatfield J., Milgrom P. Matching with Contracts // Amer. Econ. Rev. 2005. V. 95 (4). P. 913–935.
95. Hatfield J., Kojima F. Substitutes and stability for matching with contracts // Journal of Economic Theory. 2010. V. 145 (5). P. 1704–1723.
96. Hatfield J.W., Kominers S.D. Matching in Networks With Bilateral Contracts // American Economic Journal: Microeconomics. 2012. V. 4. P. 176–208.
97. Hatfield J.W., Kominers S.D. Multilateral Matching // J. of Economic Theory. 156. issue C. P. 175–206.
98. Hatfield J.W., Kominers S.D. Contract Design and Stability in Many-to-Many Matching // Games and Economic Behavior. 2017. V. 101. P. 78–97.
99. Hatfield W., Scott D., Nichifor A., Ostrovsky M., Westkamp A. Stability and competitive equilibrium in trading networks // J. of Political Economy. 2013. V. 121(5). P. 966–1005.
100. Henderson D. On marriage, kidneys and the Economics Nobel // Wall Street J. 2012. Oct. 15.
101. Hidakatsu J. Structure of the Stable Marriage and Stable Roommate Problems and Applications // Tesis. University of South Carolina. 2016.
102. Huang C.-C. Two’s company, three’s a crowd: Stable family and threesome roommates problems // in: European Symposium on Algorithms. Springer. 2007. P. 558–569.
103. Huang C. Stable matching: an integer programming approach // arXiv:2103.03418v1 [econ.TH].
104. Huang C. Unidirectional substitutes and complements // arXiv:2108.12572v1 [econ.TH].
105. Huang C.-C. Classified Stable Matching // Proceedings of the twenty-first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms. 2010. P. 1235–1253.
106. Irving R., Leather P., Gusfield D. An efficient algorithm for the “optimal” stable marriage // J. of the ACM. 1987. V. 34. № 3. P. 532–543.
107. Irving R., Manlove D., Scott S. The hospitals/residents problem with ties // in: Scandinavian Workshop on Algorithm Theory. Springer. 2000. P. 259–271.
108. Irving R. An efficient algorithm for the “stable roommates” problem // J. Algorithms. 1985. V. 6 (4). P. 577–595.
109. Irving R. Stable marriage and indifference // Discrete Applied Mathematics. 1994. V. 48. P. 261–272.
110. Irving R. The cycle roommates problem: a hard case of kidney exchange // Inform. Process. Lett. 2007. V. 103 (1). P. 1–4.
111. Irving R., Manlove D. The stable roommates problem with ties // J. Algorithms. 2002. V. 43 (1). P. 85–105.
112. Irving R., Leather P. The complexity of counting stable marriages // SIAM J. Comput. 1986. V. 15 (3). P. 655–667.
113. Irving R., Scott S. The stable fixtures problem – A many-to-many extension of stable roommates // Discrete Applied Mathematics. 2007. V. 155. P. 2118–2129.
114. Iwama K., Miyazaki S., Okamoto K. Stable roommates problem with triple rooms // Proc. 10th KOREA–JAPAN Joint Workshop on Algorithms and Computation (WAAC 2007). 2007. P. 105–112.

115. *Ishida Y.* Antibody-based computing: an application to the stable marriage problem // *Artif. Life Robot.* 2008. V. 12 (1-2). P. 125–128.
116. *Iwama K., Miyazaki S.* A survey of the stable marriage problem and its variants // in: *International Conference on Informatics Education and Research for Knowledge-Circulating Society. ICKS.* 2008. P. 131–136.
117. *Jackson M., Watts A.* Equilibrium Existence in Bipartite Social Games: A Generalization of Stable Matchings // *Article in Economics Bulletin.* 2008. V. 3. № 12. P. 1–8.
118. *Kamiyama N.* A New Approach to the Pareto Stable Matching Problem // *Mathematics of Operations Research.* 2014. V. 39. № 3. P. 851–862.
119. *Kanade V., Leonardos N., Magniez F.* Stable Matching with Evolving Preferences. // *In LIPICS (Leibniz International Proceedings in Informatics).* V. 60. P. 36:1–36:13.
120. *Kaneko M., Wooders M.H.* Cores of partitioning games // *Math. Soc. Sci.* 1982. V. 3 (4). P. 313–327.
121. *Karlin A., Gharan S., Weber R.* A simply exponential upper bound on the maximum number of stable matchings // in: *Proceedings of the 50th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing.* 2018. P. 920–925.
122. *Karzanov A.V.* On stable flows and preflows // *arXiv:2209.00614 [math.CO]* Sep 2022.
123. *Kelso A., Crawford V.* Job matching, coalition formation, and gross substitutes // *Econometrica.* 1982. V. 50. № 6. P. 1483–1504.
124. *Király T., Pap J.* Kernels, stable matchings, and Scarf's Lemma // *Egerváry Research Group, TR-2008-13,* 2008.
125. *Kisielgof S.* Matchings with interval order preferences: efficiency vs strategy-proofness // *Procedia Computer Science.* 2014. V. 31. P. 807–813.
126. *Klaus B., Walzl M.* Stable many-to-many matchings with contracts // *J. of Mathematical Economics.* 2009. V. 45. P. 422–434.
127. *Klijn F., Yazici A.* A Many-to-Many 'Rural Hospital Theorem' // *J. of mathematical economics.* 2014. V. 54. P. 63–73.
128. *Knoblauch V.* Marriage Matching: A Conjecture of Donald Knuth // *University of Connecticut. Working Paper* 2007-15.
129. *Knuth D.* *Mariages Stables.* Les Presses de L'Université de Montréal. 1976. (English translation: *Stable Marriage and its Relation to Other Combinatorial Problems.* Providence, R.I. : American Mathematical Society. 1997.)
130. *Kojima F.* Finding all stable matchings with couples // *J. of Dynamics and Games.* 2015. V. 2 (2). P. 321–330.
131. *Komornik V., Komornik Z., Viauroux C.* Stable schedule matchings by a fixed point method // *Acta Mathematica Hungarica.* 2012. V. 135. P. 67–79.
132. *Kujansuu E., Lindberg T., Mokinén E.* The stable roommates problem and chess tournament pairings // *Divulg. Mat.* 1999. V. 7 (1). P. 19–28.
133. *Lage-Castellanos A., Mulet R.* The marriage problem: From the bar of appointments to the agency // *Physica A.* 2006. V. 364. P. 389–402.
134. *Lam C.-K., Plaxton C.G.* On the Existence of Three-Dimensional Stable Matchings with Cyclic Preferences. // *Theory of Computing Systems.* 2022. V. 66 (2). P. 679–695.
135. *Lerner E.Yu., Lerner R.E.* Minimal instances with no weakly stable matching for three-sided problem with cyclic incomplete preferences // *arXiv:2101.08223 [math.CO]*.
136. *Lovász L.* Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture // *Discrete Math.* 1972. V. 2 (3). P. 253–267.
137. *Malhotra V.S.* On the stability of multiple partner stable marriages with ties // *Proc. ESA.* 2004. LNCS 3221. P. 508–519.
138. *Manlove D.F.* *Stable marriage with ties and unacceptable partners* // *University of Glasgow, Computing Science Department Research Report.* 1999. TR-1999-29.
139. *Manlove D., Irving R., Iwama K., Miyazaki S., Morita Y.* Hard variants of stable marriage // *Theoret. Comput. Sci.* 2002. V. 276 (1-2). P. 261–279.
140. *Martinez R., Masso J., Neme A., Oviedo J.* An algorithm to compute the full set of many-to-many stable matchings // *Math. Social Sci.* 2004. V. 47 (2). P. 187–210.
141. *McVitie D., Wilson L.* The stable marriage problem // *Commun. ACM.* 1971. V. 14 (7). P. 486–490.
142. *Neme P., Oviedo J.* A note on the lattice structure for matching markets via linear programming // *J. of Dynamics and Games.* 2021. V. 8. 1. P. 61–67.
143. *Ng C., Hirschberg D.* Three-dimensional stable matching problems // *SIAM J. Discrete Math.* 1991. V. 4 (2). P. 245–252.
144. *Nuñez M., Rafels C.* A survey on assignment markets // *J. of Dynamics and Games.* 2015. V. 2. Number 3–4. P. 227–256.
145. *Oméro M.-J., Dzierżawa M., Marsili M., Zhang Y.-C.* Scaling Behavior in the Stable Marriage Problem // *arXiv:cond-mat/9708181v1.* 1997.
146. *Ostrovsky M.* Stability in supply chain network // *Amer. Econ. Rev.* 2006. V. 98. P. 897–923.

147. *Ostrovsky R., Rosenbaum W.* It's not easy being three: The approximability of three-dimensional stable matching problems // 2014. ArXiv preprint arXiv:1412.1130.
148. *Panchal N., Sharma S.* An Efficient Algorithm for Three Dimensional Cyclic Stable Matching // International Journal of Engineering Research & Technology. 2014. V. 3. Issue 4. P. 2539–2544.
149. *Pittel B.* The “stable roommates” problem with random preferences // Ann. Probab. 1993. V. 21. № 3. P. 1441–1477.
150. *Pittel B.* The average number of stable matchings // SIAM J. Discrete Math. 1989. V. 2 (4). P. 530–549.
151. *Pittel B.* On likely solutions of the stable matching problem with unequal numbers of men and women // Math. Oper. Res. 2019. V. 44 (1). P. 122–146.
152. *Plott C.* Path independence, Rationality, and social choice // Econometrica. 1973. V. 41. P. 1075–1091.
153. *Prosser P.* Stable roommates and constraint programming // In: 11-th International Conference. CPAIOR. 2014. Cork. Ireland. P. 15–28.
154. *Pycia M.* Stability and preference alignment in matching and coalition formation // Econometrica. 2012. V. 80(1). P. 323–362.
155. *Ratier G.* On the stable marriage polytope // Discrete Mathematics. 1996. V. 148. P. 141–159.
156. *Ronn E.* NP-Complete stable matching problems // J. Algorithms. 1990. V. 11 (2). P. 285–304.
157. *Rostek M., Yoder N.* Matching with complementary contracts // Econometrica. 2020. V. 88 (5). P. 1793–1827.
158. *Roth A.* Stability and polarization of interests in job matching // Econometrica. 1984. V. 52. P. 47–57.
159. *Roth A.* On the allocation of residents to rural hospitals: a general property of two-sided matching markets // Econometrica. 1986. V. 54. P. 425–427.
160. *Roth A., Sotomayor M.* Two-sided Matching: A Study in Game-theoretic Modeling and Analysis. Cambridge: Cambridge University Press. 1991.
161. *Roth A., Sönmez T., Ünver M.* Kidney exchange // Quart. J. Econ. 2004. V. 119 (2). P. 457–488.
162. *Roth A., Sönmez T., Ünver M.* Pairwise kidney exchange // J. Economic Theory. 2005. V. 125 (2). P. 151–188.
163. *Roth A., Vande Vate J.* Random paths to stability in two-sided matching // Econometrica. 1990. V. 58. P. 475–1480.
164. *Roth A., Rothblum U.G., Vande Vate J.* Stable matchings, optimal assignments, and linear programming // Math. Oper. Res. 1993. V. 18. P. 803–828.
165. *Scott S.* A Study of Stable Marriage Problems with Ties // Ph.D. thesis. University of Glasgow, 2005.
166. *Shapley L., Shubik M.* The assignment game. I. The core // Internat. J. Game Theory. 1972. V. 1(2). P. 111–130.
167. *Shi G.-Y., Kong Y., Chen B., Yuan G., Wu R.* Instability in stable marriage problem: Matching unequally numbered men and women // Complexity. 2018. Article ID 7409397.
168. *Sotomayor M.* Three remarks on the many-to-many stable matching problem // Math. Soc. Sci. 1999. V. 38 (1). P. 55–70.
169. *Sotomayor M.* My encounters with David Gale // Games and Economic Behavior. 2009. V. 66. P. 643–646.
170. *Stuart H.* The supplier-firm-buyer game and its  $m$ -sided generalization // Mathematical Social Sciences. 1997. V. 34. P. 21–27.
171. *Subramanian A.* A new approach to stable matching problems // SIAM J. Comput. 1994. V. 23 (4). P. 671–700.
172. *Szestopalo M.* Properties of Stable Matchings // Thesis Waterloo, Ontario, Canada. 2010.
173. *Tan J.* A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching // J. Algorithms. 1991. 12(1). P. 154–178.
174. *Teo C.-P., Sethuraman J.* The geometry of fractional stable matchings and its applications // Mathematics of Operations Research. 1998. V. 23. № 4. P. 874–891.
175. *Teo C.-P., Sethuraman J., Tan W.-P.* Gale-Shapley stable marriage problem revisited: Strategic issues and applications // Manage. Sci. 2001. V. 47 (9). P. 1252–1267.
176. *Thurber E.* Concerning the maximum number of stable matchings in the stable marriage problem // Discrete Math. 2002. V. 248 (1–3). P. 195–219.
177. *Tong H., Liang H., Bai F.* The multi-dimensional stable marriage problem and its application in chemistry. 2015.
178. *Vande Vate J.* Linear programming brings marital bliss // Operations Research Letters. 1989. V. 8. Issue 3. P. 147–153.
179. *Wilson L.* An analysis of the stable marriage assignment algorithm // BIT Numer. Math. 1972. V. 12 (4). P. 569–575.
180. *Xu H., Li B.* Seen as stable marriages // in: 2011 Proceedings IEEE INFOCOM, IEEE. 2011. P. 586–590.
181. *Zhou L.* On a Conjecture by Gale about One-Sided Matching Problems // J. of Economic Theory. 1990. V. 52. P. 123–135.

УДК 519.86

## О СТАБИЛЬНЫХ ПОТОКАХ И ПРЕДПОТОКАХ

© 2023 г. А. В. Карзанов<sup>1,\*</sup><sup>1</sup> 117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН, Россия

\*e-mail: akarzanov7@gmail.com

Поступила в редакцию 11.08.2022 г.

Переработанный вариант 26.08.2022 г.

Принята к публикации 17.11.2022 г.

Предлагается новый алгоритм построения стабильного потока в сети с несколькими источниками и стоками. Он основан на идее *предпоток* (примененной в 1970-х годах для более быстрого решения классической задачи о максимальном потоке) и имеет временную сложность  $O(nm)$  для сети с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами. Полученные результаты затем распространяются на более широкий класс объектов – т.н. стабильные квазипотоки с ограниченными отклонениями от балансовых соотношений в нетерминальных вершинах. Библ. 12.

**Ключевые слова:** стабильный поток в сети, стабильное распределение, предпоток, квазипоток.

**DOI:** 10.31857/S0044466923030079, **EDN:** EBUSXU

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Область теоретических и прикладных задач о стабильных договорах явилась предметом интенсивного изучения в математической экономике, теории игр и комбинаторной оптимизации, и ей посвящены многочисленные работы нескольких последних десятилетий. Отправной точкой многих исследований послужила классическая работа Гейла и Шепли [1] о *стабильных marriage* (SM).

Согласно одной из распространенных формулировок этой задачи имеется двудольный граф  $G = (V, E)$ , и для каждой вершины  $v$  задан (строгий) линейный порядок  $<_v$  на инцидентных ребрах. (В [1] рассматриваются полные двудольные графы, но это не существенно. В популярной интерпретации ребра в  $G$  представляют возможные союзы персон разного пола, а порядок  $<_v$  – предпочтения персоны  $v$ : если для ребер  $e = vu$  и  $e' = vw$  выполняется  $e <_v e'$ , то  $v$  предпочитает союз с  $u$  союзу с  $w$ .) В задаче требуется найти паросочетание (matching)  $M \subseteq E$ , являющееся стабильным относительно всех этих порядков. Это означает, что для любого ребра  $e$  из  $E - M$  есть ребро  $e' \in M$  такое, что  $e$  и  $e'$  имеют общую вершину  $v$ , и при этом выполняется  $e' <_v e$ . Было показано, что стабильное паросочетание в двудольном графе всегда существует, и оно может быть построено комбинаторным алгоритмом с линейной верхней оценкой числа действий (*временной сложностью*)  $O(n + m)$ , где  $n$  и  $m$  – число вершин и ребер в  $G$  соответственно.

В последующих работах многих авторов были исследованы различные обобщения задачи SM. Укажем два направления обобщений, связанные с графами (оставляя в стороне постановки, в которых в договорах могут участвовать более двух агентов, или предпочтения агентов задаются другими способами). Одно из них – переход от двудольного к произвольному графу  $G$ . Соответствующий аналог задачи SM, известный под названием задачи о *стабильном размещении пар соседней по комнатам* (stable roommates problem), был исследован Ирвингом в работе [2], где был дан алгоритм линейной сложности для построения стабильного паросочетания в  $G$  либо доказательства его несуществования. Важные дополнительные структурные и алгоритмические результаты были представлены в [3].

Другой тип обобщений, который более важен для нас, оставляет граф  $G = (V, E)$  двудольным, но добавляет числовые параметры. Среди задач этого типа весьма общей выглядит задача о *стабильном распределении* (stable allocation problem – SA), введенная Бейу и Балински [4]. Здесь распределением считается назначение каждому ребру  $e \in E$  величины  $x(e) \geq 0$ , не превышающей предписанной пропускной способности  $c(e)$ , и при этом сумма назначений по ребрам, инцидентным вершине  $v \in V$ , не должна превышать предписанной “квоты”  $q(v)$ . (В случае задачи

SM, все  $c(e)$  и  $q(v)$  равны единице, а  $x(e)$  принимает значение 0 или 1. В общем случае задачи SA, число  $x(e)$  на ребре  $e = uv$  может пониматься, например, как размер участия “работника”  $u$  в “работе”  $v$ .) В [4] доказывается разрешимость SA при любых неотрицательных вещественных  $c, q$  (давая целочисленное  $x$  при целочисленных  $c, q$ ) и предложен сильно полиномиальный алгоритм решения, т.е. имеющий временную сложность, зависящую только от размеров графа и выражающуюся полиномом от  $n$  и  $m$ . Дин и Мунши [5] описали улучшенную версию алгоритма из [4], которая строит решение за время  $O(nm)$ ; более того, они показали, что можно добиться даже временной оценки  $O(m \log n)$ , если применить для ряда процедур мощные структуры данных, такие как динамические и самонастраивающиеся деревья Слейтора и Таржана [6], [7]. (Это дает теоретическое ускорение, но алгоритм такого рода громоздкий и едва ли может быть применен для практических целей.)

В свою очередь задача SA может быть представлена как частный случай задачи о *стабильном потоке* (SF). Последняя была сформулирована Флейнером в 2010-е годы в работе [8] (как обобщение задачи Островского [9] для ациклических сетей с единичными пропускными способностями ребер). В ней задана сеть, состоящая из ориентированного графа  $G = (V, E)$  с пропускными способностями  $c(e) \geq 0$  ребер  $e \in E$  и двумя выделенными вершинами (“терминалами”)  $s$  и  $t$ . Для каждой *внутренней* вершины  $v \in V - \{s, t\}$  заданы линейный порядок на входящих ребрах и линейный порядок на выходящих ребрах. (Допустимый) *поток* – это неотрицательная вещественная функция  $f$  на ребрах, удовлетворяющая верхним ограничениям по пропускным способностям и имеющая нулевые эксцессы для всех внутренних вершин, где под эксцессом в вершине  $v$  понимается разность  $ex_f(v)$  между общим потоком по входящим ребрам и общим потоком по выходящим ребрам в  $v$ . (Внутреннюю вершину можно интерпретировать как “игрока”, “торговца” или “агента”, который, получая некоторый объем однородного продукта по входящим ребрам, посылает его далее по выходящим ребрам, руководствуясь своей функцией полезности, зависящей от указанных порядков на ребрах.) Поток считается стабильным, если он не допускает локальных улучшений, использующих “ненасыщенные” пути; точное определение будет дано в разд. 2.

Между задачами SA и SF есть тесная связь. Задача SA с двудольным графом  $G = (V_1 \sqcup V_2, E)$  сводится к SF с графом, получаемым из  $G$  (с ребрами, ориентированными от  $V_1$  к  $V_2$ ) путем добавления терминалов  $s$  и  $t$ , ребер  $(s, u)$  с пропускными способностями  $q(u)$  для вершин  $u$  из доли  $V_1$ , и ребер  $(v, t)$  с пропускными способностями  $q(v)$  для вершин  $v$  из доли  $V_2$ .

С другой стороны, Флейнер [8] показал, что задача SF с графом  $G = (V, E)$  может быть сведена к задаче SA с графом, получаемым расщеплением вершин в  $G$  и добавлением  $O(|V|)$  новых ребер. В результате было установлено существование стабильного потока для любой сети (и целочисленного стабильного потока при целочисленном  $c$ ), и возможность построения такого потока при помощи алгоритмов для SA, получая временную сложность того же порядка.

Впоследствии появились прямые алгоритмы нахождения стабильного потока. Недавно Чех и Матушке [10] предложили прямой алгоритм для сети с одним источником и одним стоком, который имеет сложность  $O(nm)$  и основан на комбинации идей метода увеличивающих путей Форда и Фалкерсона для задачи о максимальном потоке и метода “отсроченных принятий” (deferred acceptance), восходящего к Гейлу и Шепли [1].

В настоящей работе предлагается альтернативный алгоритм построения стабильного потока в сети  $N = (G, S, T, c)$  с произвольными множествами источников  $S$  и стоков  $T$  при условии отсутствия ребер, входящих в источники или выходящих из стоков. Алгоритм прямой и чисто комбинаторный (не апеллирует к задаче SA и не использует сложных структур данных), он основан на методе предпотоков. Напомним, что *предпоток* в сети называется неотрицательная функция на ребрах, ограниченная пропускными способностями и имеющая неотрицательные эксцессы во всех внутренних вершинах. (Это понятие было введено в [11] и использовалось в алгоритме нахождения максимального потока в сети.) Заметим, что предпоток уже применялись ранее в работе [12] для построения стабильного потока в сети с целочисленными пропускными способностями за псевдополиномиальное время (линейно зависящее от суммы пропускных способностей ребер).

Алгоритм имеет базовую и модифицированную (ускоренную) версии. Обе начинаются с построения некоторого стабильного предпотока, и на каждой последующей итерации текущий стабильный предпоток перестраивается с целью избавления от положительных эксцессов во внутренних вершинах. Как только эксцессы всех внутренних вершин обнулятся, будет построен ис-

комый стабильный поток (причем целочисленный при целочисленном  $c$ ). Базовый алгоритм конечен при любых неотрицательных вещественных пропускных способностях  $c$ . Модифицированный алгоритм сильно полиномиальный; он использует дополнительные преобразования предпотоков и строит стабильный поток с временной сложностью  $O(nm)$  (подобно алгоритму в [10]).

Мы затем рассматриваем более общую задачу для сети  $N = (G, S, T, c)$ , в которой для каждой внутренней вершины  $v$  заданы два параметра  $\beta(v) \geq 0$  и  $\gamma(v) \geq 0$  и требуется найти стабильный “квазипоток”  $f$  с ограничениями вида  $-\beta(v) \leq \text{ex}_f(v) \leq \gamma(v)$ . (Это превращается в стабильный поток при  $\beta, \gamma = 0$ .) Показывается, что такой “квазипоток” существует и также может быть найден за время  $O(nm)$ . (В приложениях число  $\gamma(v)$  можно понимать как разрешение “агенту”  $v$  распоряжаться по своему усмотрению частью полученного продукта в размере, не превышающем  $\gamma(v)$ , а число  $\beta(v)$  – привлекать “со стороны” дополнительный продукт в размере не более  $\beta(v)$ .)

Данная статья организована следующим образом. В разд. 2 приводятся основные определения и точные формулировки задач SF и SA. В разд. 3 излагается базовый алгоритм нахождения стабильного потока в сети методом предпотоков и показывается его конечная сходимость (предложение 1). Модифицированная версия алгоритма, имеющая временную сложность  $O(nm)$ , описывается в разд. 4. Раздел 5 содержит обобщения полученных результатов на предпотоки и квазипотоки с ограниченными эксцессами (предложения 3 и 4). В заключительном разд. 6 обсуждаются три дополнительных свойства: 1) максимум величин (т.е. суммарных эксцессов в стоках) для стабильных предпотоков достигается на стабильном потоке; 2) стабильные потоки в фиксированной сети имеют одинаковые величины; и 3) стабильные потоки образуют решетку. (Свойства в п. 2 и 3 показываются в [8] через сведение к соответствующим свойствам в задаче SA; мы описываем прямые конструкции.)

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКИ

Мы рассматриваем сеть  $N = (G, S, T, c)$ , состоящую из *ориентированного* графа  $G = (V, E)$  (без петель и кратных ребер), выделенных непересекающихся подмножеств вершин  $S$  (*источники*) и  $T$  (*стоки*), называемых также *терминалами*, и функции  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  *пропускных способностей* ребер. (Здесь и далее  $\mathbb{R}_+$  и  $\mathbb{Z}_+$  – множества неотрицательных вещественных и неотрицательных целых чисел соответственно.) Для вершины  $v \in V$  обозначим через  $\delta^{\text{in}}(v)$  и  $\delta^{\text{out}}(v)$  множества ребер *входящих* в  $v$  и *выходящих* из  $v$  соответственно. Для большей простоты нашего изложения мы предполагаем, что выполняется

$$\delta^{\text{in}}(s) = \emptyset \quad \forall s \in S \quad \text{и} \quad \delta^{\text{out}}(t) = \emptyset \quad \forall t \in T. \tag{2.1}$$

**Определение 1.** Функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  называется *допустимой* (относительно  $c$ ), если она удовлетворяет ограничениям  $f(e) \leq c(e)$  для всех ребер  $e \in E$ . Определим *эксцесс* для  $f$  в вершине  $v \in V$  как

$$\text{ex}_f(v) := \sum_{e \in \delta^{\text{in}}(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{\text{out}}(v)} f(e).$$

Допустимая функция  $f$  называется *предпоток* в  $N$  (следуя терминологии в [11]), если каждая вершина  $v \in V - S$  имеет неотрицательный эксцесс:  $\text{ex}_f(v) \geq 0$ . *Поток* (из  $S$  в  $T$ ) – это предпоток  $f$  с нулевыми эксцессами всех *внутренних* (нетерминальных) вершин  $v \in V - (S \cup T)$ , а его *величиной*  $\text{val}(f)$  считается  $\text{ex}_f(T) := \sum_{t \in T} \text{ex}_f(t)$ .

*Путь* в  $G$  – это последовательность  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$ , где  $e_i$  – ребро, соединяющее вершины  $v_{i-1}$  и  $v_i$ . Ребро  $e_i$  в  $P$  называется *прямым* (forward), если  $e_i = v_{i-1}v_i$ , и *обратным* (backward), если  $e_i = v_i v_{i-1}$ . (Мы обозначаем ребро, выходящее из  $u$  и входящее в  $v$  как  $uv$ , вместо обычного  $(u, v)$ ). Путь называется *ориентированным* (directed), если все его ребра прямые, и называется *простым* (simple), если все его вершины различны. Противоположный (обратный) путь  $(v_k, e_k, v_{k-1}, \dots, e_1, v_0)$  обозначается через  $P^{-1}$ . Путь из вершины  $u$  в вершину  $v$  может быть назван  *$u$ - $v$  путем*. Если не оговорено противное, то, говоря о пути, мы считаем его нетривиальным, т.е. имеющим по крайней мере одно ребро.

Для допустимой функции  $f$  ребро  $e$  с  $f(e) = c(e)$  ( $f(e) < c(e)$ ;  $f(e) = 0$ ) называется *насыщенным* (соответственно, *ненасыщенным*; *свободным* (от  $f$ )). Путь считается ненасыщенным, если таковы все его ребра.

В рассматриваемой нами задаче каждая внутренняя вершина  $v$  сети  $N$  снабжена линейным (полным строгим) порядком  $<_v^-$  на множестве  $\delta^{\text{in}}(v)$  и линейным порядком  $<_v^+$  на множестве  $\delta^{\text{out}}(v)$ . Они интерпретируются как “отношения предпочтения”, а именно,  $e <_v^- e'$  означает, что вершина (“агент”)  $v$  предпочитает ребро  $e$  ребру  $e'$ ; в этом случае мы также будем говорить, что  $e$  расположена в  $\delta^{\text{in}}(v)$  раньше или левее  $e'$ , а  $e'$  – позже или правее  $e$ . В соответствии с порядком  $<_v^-$  множество  $\delta^{\text{in}}(v)$  организуется в виде списка (double-linked list); таким образом, первый (последний) элемент в списке наиболее (соответственно, наименее) предпочтительный. И аналогично для порядка  $<_v^+$ .

**Определение 2.** Поток  $f$  в сети  $N$  с указанными порядковыми оснащениями для внутренних вершин называется *стабильным*, если каждый ненасыщенный ориентированный путь  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$  удовлетворяет по крайней мере одному из следующих двух условий (где допускается случай  $v_0 = v_k$ ):

$$\begin{aligned} &\text{начальная вершина } v_0 \text{ внутренняя, и } P \text{ доминируется в } v_0; \\ &\text{это означает, что каждое ребро } e \in \delta^{\text{out}}(v_0) \text{ позднее } e_1 \text{ свободно от } f; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} &\text{конечная вершина } v_k \text{ внутренняя, и } P \text{ доминируется в } v_k, \\ &\text{т.е. каждое ребро } e \in \delta^{\text{in}}(v_k) \text{ позднее } e_k \text{ свободно от } f. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В частности, нет ненасыщенного ориентированного пути из  $S$  в  $T$ . Предпоток  $f$  называется *стабильным* в аналогичном случае.

Нас интересует *задача о стабильном потоке* (SF): найти стабильный поток для сети  $N$ . Флейнер [8] установил, что эта задача всегда разрешима, а также имеет место свойство целочисленности: если сеть  $N = (G = (V, E), S, T, c)$  целочисленная (т.е.  $c \in \mathbb{Z}_+^E$ ), то существует целочисленный стабильный поток.

Это доказывалось путем редукции задачи SF для  $N$  к *задаче о стабильном распределении* (SA) на двудольном графе  $G' = (V', E')$  с весами  $c'(e) \geq 0$  ребер  $e \in E'$  и “квотами”  $q(v) \geq 0$  вершин  $v \in V'$ . (Строго говоря, в [8] рассматривался случай, когда  $|S \cup T| = 2$ , и условие (2.1) не накладывается, но указанные свойства верны и для нашего случая.) При этом редукция линейна по размерам, а именно:  $|V'| = 2|V|$  и  $|E'| < |E| + 2|V|$ , и сохраняет целочисленность:  $c'$  и  $q$  целочисленные при целочисленном  $c$ . Задача SA была введена и исследована в [4], где были доказаны ее разрешимость любой сети и свойство целочисленности и предложен сильно полиномиальный алгоритм решения.

Как было отмечено во введении, в [5] показано, что при использовании продвинутых структур данных, т.н. динамических и самонастраивающихся деревьев, задачу о стабильном распределении в графе с  $n$  вершинами и  $m$  ребрами можно решить с временной сложностью  $O(m \log n)$  (а без использования таких структур можно добиться оценки  $O(nm)$ ). Это, в силу указанной редукции, приводит к аналогичной оценке алгоритмической сложности и для задачи SF. Прямой алгоритм для SF в случае  $|S| = |T| = 1$ , предложенный в [10], имеет сложность  $O(nm)$ .

В настоящей работе предлагается альтернативный прямой алгоритм нахождения стабильного потока в произвольной сети  $N = (G, S, T, c)$  (при условии (2.1)), основанный на методе предпотоков. В следующем разделе мы описываем базовую версию алгоритма (конечную при любом  $c$ ), а в разд. 4 – модифицированную версию (с временной сложностью  $O(nm)$ ).

### 3. БАЗОВЫЙ АЛГОРИТМ

Алгоритм нахождения стабильного потока в сети  $N = (G = (V, E), S, T, c)$  состоит из последовательности итераций; как правило (но не всегда) итерация имеет две *фазы*: *балансирование* (balancing) и *достройка* (pushing) (подобно структуре этапа (большой итерации) в алгоритме построения максимального потока в [11]). Каждая итерация преобразует один блокирующий предпоток

в другой, и процесс завершается, когда текущий предпоток становится потоком. Подчеркнем, что термин “блокирующий” заимствован из языка в [11] и имеет иной смысл, чем тот, что обычно понимают в задачах о стабильности.

**Определение 3.** Для предпотока  $f$  в сети  $N$  скажем, что вершина  $v$  *эксцессная*, если  $ex_f(v) > 0$ . Предпоток  $f$  называется *блокирующим*, если каждый ориентированный путь из  $S$  в  $T$  имеет насыщенное ребро. Если к тому же всякий ориентированный путь, идущий из эксцессной внутренней вершины в  $T$  имеет насыщенное ребро, то мы называем  $f$  *полностью блокирующим*.

**Замечание 1.** Полностью блокирующий предпоток не обязательно стабильный, и наоборот. В то же время всякий стабильный поток является блокирующим (и автоматически полностью блокирующим). В целом уже в ранжированной ациклической сети построение стабильного потока выглядит более сложной задачей, чем построение блокирующего потока. Последняя решается на этапе алгоритма в [11] за время  $O(n^2)$ , что быстрее, чем  $O(nt)$  в алгоритме разд. 4 для SF.

### 3.1. Начальная итерация

На этой и последующих итерациях поддерживаются два списка Old и New, элементами которых являются эксцессные внутренние вершины текущего предпотока. Также для каждой внутренней вершины  $v$  указан элемент  $\tilde{e}(v)$ , который либо принимает пустое значение:  $\tilde{e}(v) = \{\emptyset\}$ , либо является выделенным ненасыщенным ребром в  $\delta^{\text{out}}(v)$ , называемым *активным* ребром. В начале полагается Old := New :=  $\emptyset$ , и для каждого  $v \in V - (S \cup T)$  активным полагается первое (самое предпочтительное) ребро в  $\delta^{\text{out}}(v)$ .

Начальная итерация состоит из одной фазы – достройки, которая начинается с тривиального блокирующего предпотока  $f$ , определяемого как  $f(e) := c(e)$  для всех ребер  $e \in \delta^{\text{out}}(s)$ ,  $s \in S$ , и  $f(e) := 0$  для остальных ребер  $e$ . Каждая вершина  $v$ , соединенная ребром  $e = sv$  с источником  $s \in S$ , заносится в список New (так как эксцесс в  $v$  становится положительным). Затем мы сканируем вершины текущего списка New.

Для очередной вершины  $v \in \text{New}$  мы изменяем  $f$  на  $\delta^{\text{out}}(v)$  так, чтобы либо свести эксцесс в  $v$  к нулю, либо насытить все ребра в  $\delta^{\text{out}}(v)$  (либо и то и другое). Более точно, ребра  $e \in \delta^{\text{out}}(v)$  обрабатываются в порядке  $<_v^+$  (“слева-направо”), начиная с активного ребра  $e = \tilde{e}(v)$ . Если текущий эксцесс  $\Delta := ex_f(v)$  еще ненулевой, назначаем  $f(e) := \min\{c(e), f(e) + \Delta\}$ . Если новый эксцесс обнулился (в случае  $c(e) \geq \Delta$ ), обработка  $v$  заканчивается; иначе (когда  $c(e) < \Delta$ ), переходим к следующему ребру в списке  $\delta^{\text{out}}(v)$ , и т.д. Также при изменении  $f$  на ребре  $e = vw$ , если вершина  $w$  (в которой происходит увеличение эксцесса) не фигурирует ни в Old, ни в New, то мы добавляем  $w$  в текущий список New.

При окончании работы с  $v$  эта вершина удаляется (быть может временно) из списка New, и если эксцесс в  $v$  все еще ненулевой,  $v$  заносится в список Old. Новым активным ребром  $\tilde{e}(v)$  становится самое левое ненасыщенное ребро, а если такого нет (в частности, когда  $ex_f(v) > 0$ ), то полагается  $\tilde{e}(v) := \{\emptyset\}$ . Затем переходим к обработке другой вершины в New, и т.д. Итерация заканчивается, когда New становится пустым.

Заметим, что в процессе итерации одна и та же внутренняя вершина  $v$  может несколько раз появляться и исчезать в New. Однако мы покажем позднее, что начальная (и каждая последующая) итерация всегда заканчивается. Можно видеть следующее.

При завершении начальной итерации полученная функция  $f$  является полностью блокирующим предпоток с тем свойством, что для каждой внутренней вершины  $v$ : если  $\tilde{e}(v) = \{\emptyset\}$ , то все ребра в  $\delta^{\text{out}}(v)$  насыщены, а если  $\tilde{e}(v) \neq \{\emptyset\}$ , то все ребра в  $\delta^{\text{out}}(v)$  раньше (левее)  $e$  насыщены, а все ребра после  $e$  свободны от  $f$ . При этом все эксцессные внутренние вершины  $v$  (и только они) включены в список Old, и для таких  $v$  выполняется  $\tilde{e}(v) = \{\emptyset\}$ . (3.1)

Из (3.1) легко заключить выполнение (2.2) для всех ненасыщенных ориентированных путей; следовательно, начальный предпоток  $f$  стабильный.

В оставшейся части этого раздела мы сначала описываем фазу балансирования для общей итерации. Затем уточняем условия, которым должен удовлетворять текущий предпоток перед началом фазы достройки. Наконец, мы описываем эту фазу для общей итерации.

### 3.2. Балансирование

Эта процедура производится, когда множество Old эксцессных внутренних вершин для текущего предпотока  $f$  непусто (в то время как  $New = \emptyset$ ). Она применяется к одной выбранной вершине  $v \in Old$ . Положим  $\Delta := ex_f(v) (> 0)$ , и пусть  $e$  – последнее (самое правое, наименее предпочтительное) ребро в  $\delta^{in}(v)$  с  $f(e) > 0$ . Уменьшим  $f$  в  $e$  на  $\min\{\Delta, f(e)\}$ . Если эксцесс в  $v$  стал нулевым (в случае  $\Delta \leq f(e)$ ), заканчиваем. Иначе (когда  $\Delta > f(e)$ ), берем последнее ребро  $e' \in \delta^{in}(v)$  с  $f(e') > 0$  для обновленного  $f$  и уменьшаем  $f$  в  $e'$  аналогичным образом. И так далее, пока эксцесс в  $v$  не станет нулевым.

Для каждого ребра  $e = uv$ , в котором при данном балансировании было уменьшение  $f$ , проверяем вершину  $u$ , и если она внутренняя и не содержится в Old, то добавляем ее в список New. (Таким образом, New – это множество новых эксцессных вершин  $u$ , образовавшихся в результате уменьшения  $f$  на ребрах  $uv$ .) Самое левое (хронологически последнее) ребро, где было уменьшение  $f$ , назовем *критическим* и обозначим через  $\hat{e} = \hat{e}(v)$ . Это ребро и все ребра  $e = uv$  в  $\delta^{in}(v)$  после (правее) него помечаются как *закрытые* (только для последующего увеличения!). При этом если такое  $e$  было активным ребром в  $\delta^{out}(u)$ , то новым активным ребром назначается первое после  $e$  незакрытое (при более ранних балансированиях) ребро в  $\delta^{out}(u)$ , а если такого нет, то полагается  $\tilde{e}(u) := \{\emptyset\}$ .

**Замечание 2.** Множества Old и New задаются в виде обычных двухсторонних списков. В процессе алгоритма надо поддерживать величины эксцессов для внутренних вершин (корректируя их за  $O(1)$  действий при каждом изменении  $f$ ).

Мы предполагаем (по индукции), что после балансирования в вершине  $v$  текущее  $f$  является предпоток, который не обязан быть полностью блокирующим, но для которого выполнены следующие три свойства.

(C1) Каждое ненасыщенное ребро в  $\delta^{out}(s)$ ,  $s \in S$ , закрытое.

(C2) Если для эксцессной внутренней вершины  $u$  множество  $\delta^{out}(u)$  содержит незакрытое ненасыщенное ребро, то  $u \in New$ .

(C3) Для каждой внутренней вершины  $u$  справедливо: а) если в  $\delta^{out}(u)$  есть активное ребро  $\tilde{e}(u) \neq \{\emptyset\}$ , то это ребро ненасыщенное и незакрытое, все ребра после него свободны от  $f$ , а каждое ребро до  $\tilde{e}(u)$  – насыщенное или закрытое (ставшее таковым при последнем или более раннем балансировании); б) если  $\tilde{e}(u) = \{\emptyset\}$ , то все ребра в  $\delta^{out}(u)$  насыщенные или закрытые; и в) если  $u$  когда-либо подвергалась балансированию, то  $\tilde{e}(u) = \{\emptyset\}$ , в свою очередь в  $\delta^{in}(u)$  есть критическое ребро  $\hat{e}(u)$ , это ребро ненасыщенное, а все ребра после него свободны от  $f$ .

### 3.3. Достройка (после балансирования в вершине $v$ )

Она состоит в увеличении текущего предпотока  $f$  на некоторых ребрах, чтобы сделать его полностью блокирующим; это схоже с построением начального предпотока, но имеет ряд особенностей. Достройка немедленно заканчивается, когда начальный список New пустой. Иначе она начинается с некоторой вершины  $u \in New$ , и мы стремимся максимально уменьшить эксцесс в  $u$ . Для этого сканируем ребра в  $\delta^{out}(u)$  в порядке  $\prec_u^+$ , пропуская закрытые ребра. Сканирование начинается с активного ребра  $\tilde{e}(u) \neq \{\emptyset\}$  (если  $\tilde{e}(u) = \{\emptyset\}$ , то вершина  $u$  просто переносится из New в Old, и работа с  $u$  заканчивается). Как и при начальной итерации, для очередного обрабатываемого ребра  $e = uw$  полагаем  $f(e) := \min\{c(e), f(e) + \Delta\}$ , где  $\Delta$  – текущий эксцесс в  $u$ , и одновременно добавляем вершину  $w$  в текущее множество New, если его еще не было в  $Old \cup New$ .

(так как эксцесс в  $w$  увеличивается). Если новый эксцесс в  $u$  все еще ненулевой, переходим к следующему незакрытому ребру в  $\delta^{\text{out}}(u)$ , и т.д. Если эксцесс обнулится, то работу с  $u$  заканчиваем и удаляем  $u$  из New. Если все ребра отсканированы, но эксцесс в  $u$  все еще ненулевой, то переносим  $u$  из New в Old. Окончив работу с  $u$  и соответственно скорректировав активное ребро  $\tilde{e}(u)$  в  $\delta^{\text{out}}(u)$  (получая  $\tilde{e}(u)$ , удовлетворяющее (С3)а,б), переходим к другой вершине в текущем New, и т.д. Заканчиваем процесс достройки, когда множество New становится пустым.

При завершении достройки (которая конечна согласно предложению 1 ниже) построенное  $f$  является предпоток, и можно видеть, что  $f$  имеет свойства (С1) и (С3), а (С2) заменяется на следующее свойство (ср. (С3)б).

(С2') Каждая эксцессная внутренняя вершина  $u$  содержится в Old, и  $\tilde{e}(u) = \{\emptyset\}$ .

**Лемма 1.** Предпоток  $f$ , полученный при достройке, является стабильным и полностью блокирующим.

**Доказательство.** Рассмотрим ненасыщенный ориентированный путь  $P = (u_0, e_1, u_1, \dots, e_k, u_k)$ . Предположим, что либо  $u_0 \in S$ , либо  $P$  не доминируется в  $u_0$  (когда  $u_0$  внутренняя). Тогда ребро  $e_1$  закрытое (ввиду (С1) и (С3)). Значит, вершина  $u_1$  подвергалась балансированию и перед этим была эксцессной. Применяя (С2') и (С3)б к вершине  $u_1$  и предпоток  $f'$  в момент перед тем балансированием, заключаем, что ребро  $e_2$  было закрытым в этот момент. Следовательно,  $e_2$  закрытое и для  $f$ . Рассуждая так и далее, заключаем, что ребра  $e_3, \dots, e_k$  — тоже закрытые. (Случай  $u_k \in T$  невозможен, так как в момент балансирования в вершине  $u_{k-1}$  эта вершина была эксцессной, и случай ненасыщенности  $e_k$  невозможен.) Так как  $e_k$  закрытое, оно должно встречаться в  $\delta^{\text{in}}(u_k)$  после критического ребра  $\hat{e}(u_k)$  либо совпадать с  $\hat{e}(u_k)$ . Тогда из (С3)в следует, что все ребра в  $\delta^{\text{in}}(u_k)$  после  $e_k$  свободны от  $f$ . Следовательно,  $P$  доминируется в  $u_k$ , и выполняется (2.3). Это означает, что  $f$  стабильный.

Тот факт, что  $f$  полностью блокирующий, выводится из (С1),(С3),(С2') при аналогичных рассуждениях. Лемма доказана.

Используя указанные выше свойства предпотока, полученного при достройке, можно заключить, что при балансировании на следующей итерации возникает предпоток со свойствами (С1)–(С3). Это обосновывает корректность алгоритма.

### 3.4. Сходимость алгоритма

Из леммы 1 получаем

**Следствие 1.** Если на очередной итерации для текущего предпотока  $f$  эксцессы всех внутренних вершин стали нулевыми, то  $f$  — стабильный поток.

В этом случае  $f$  — требуемое решение задачи, и работа алгоритма заканчивается. Поскольку при каждом балансировании или достройке число эксцессных внутренних вершин может как уменьшиться, так и увеличиться, то для установления конечности алгоритма нужен дополнительный анализ.

Для текущего  $f$  назовем ребро  $e$  *средним*, если оно несвободное и ненасыщенное:  $0 < f(e) < c(e)$ . Пусть  $\Gamma = (V_\Gamma, E_\Gamma)$  обозначает подграф в  $G$ , индуцированный средними ребрами. В частности,  $\Gamma$  содержит все несвободные критические ребра. Мы также добавим к  $\Gamma$  каждое *свободное* активное ребро (напомним, что активное ребро всегда незакрытое и ненасыщенное). Сделаем следующие наблюдения.

1. Для ребра  $e = uv$  момент его насыщения назовем *событием*  $S$ , а момент освобождения (перехода от положительного к нулевому  $f(e)$ ) — *событием*  $F$ . Изменения в  $e$  имеют “однопиковый” характер: вначале  $f(e)$  монотонно увеличивается при достройках в  $u$ , а при первом уменьшении  $f(e)$  ребро  $e$  становится закрытым и в дальнейшем  $f(e)$  может только уменьшаться (при балансировании в  $v$ ).

2. Ребро  $e$  может добавиться в граф  $\Gamma$  не более двух раз: первый раз — когда  $e$  становится активным, и второй раз — когда  $e$  становится критическим.

Пусть  $\alpha_S, \alpha_F, \alpha_M$  обозначают, соответственно, число событий  $S$ , число событий  $F$  и число событий  $M$ , состоящих в изменении графа  $\Gamma$ . Из наблюдений выше следует, что

$$\text{каждое из чисел } \alpha_S, \alpha_F, \alpha_M \text{ оценивается как } O(m). \quad (3.2)$$

Таким образом, для анализа сходимости алгоритма надо оценить число подряд идущих итераций, на которых не происходит событий  $S, F$  и  $M$ . Для этого заметим следующее.

3. В процессе алгоритма для каждой внутренней вершины  $v$  активное ребро в  $\delta^{\text{out}}(v)$  может сдвигаться только вправо (при достройках в  $v$ ), а критическое ребро в  $\delta^{\text{in}}(v)$  — только влево (при балансировании в  $v$ ); при этом статус таких ребер меняется: для старого активного ребра происходит событие  $S$  или ребро становится закрытым, а для старого критического ребра — событие  $F$ . В силу этого, обозначая  $E^+ = E^+(f)$  и  $E^- = E^-(f)$  множества активных и критических ребер в  $\Gamma$ , соответственно, получаем, что

$$\begin{aligned} &\text{в результате операции (балансирования или достройки) граф } \Gamma \\ &\text{сохраняется тогда и только тогда, когда сохраняются оба } E^+ \text{ и } E^-. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Можно также видеть, что эти множества дают разбиение  $E_\Gamma$ :

$$E^+ \cup E^- = E_\Gamma \quad \text{и} \quad E^+ \cap E^- = \emptyset$$

(учитывая (С3) и то, что критическое ребро  $e = uv$  делается закрытым и не может оставаться активным в  $\delta^{\text{out}}(u)$ ). Таким образом, при сохранении  $\Gamma$  вместе с сохранением фиксированного разбиения  $(E^+, E^-)$  на подряд идущих итерациях каждое изменение предпотока  $f$  состоит в его уменьшении в некотором критическом ребре или его увеличении в некотором активном ребре. Заметим также, что активное ребро может стать критическим, но не наоборот. Эти обстоятельства вместе со свойствами (3.2) и (3.3) позволяют установить следующее

**Предложение 1.** *Предложенный алгоритм нахождения стабильного потока в сети  $N = (G, S, T, c)$  конечный и при целочисленных пропускных способностях с находит целочисленный стабильный поток.*

**Доказательство.** Надо показать конечность последовательности итераций, на которых сохраняются  $E^+$  и  $E^-$ . Пусть  $\varepsilon$  — минимальный положительный эксцесс среди внутренних вершин в начале этой последовательности. Предположим по индукции, что перед началом очередного изменения предпотока  $f$  на итерации этой последовательности множество  $\text{Old} \cup \text{New}$  эксцессных вершин непусто, и (\*): каждая из них имеет эксцесс не менее  $\varepsilon$ . Если в этот момент производится балансирование в вершине  $v$ , то, поскольку  $E^-$  сохраняется, балансирование сводится только к уменьшению  $f$  на величину  $\Delta := \text{ex}_f(v) \geq \varepsilon$  в критическом ребре  $\hat{e}(v) = uv$ . Это обнуляет эксцесс в  $v$  и приводит к увеличению эксцесса в вершине  $u$  на ту же величину  $\Delta$ ; следовательно, свойство (\*) верно для нового  $f$  (в случае  $u \in S$  множество  $\text{Old} \cup \text{New}$  просто уменьшается на один элемент  $v$ ). Если же производится достройка во внутренней вершине  $u$  с активным ребром  $\tilde{e}(u) = uw \neq \emptyset$ , то ввиду сохранения  $E^+$ , достройка сводится к увеличению  $f$  в этом ребре  $\tilde{e}(u) = uw$  на величину  $\Delta := \text{ex}(u) \geq \varepsilon$ . Это обнуляет эксцесс в  $u$  и увеличивает эксцесс в вершине  $w$  на величину  $\Delta$ ; следовательно, свойство (\*) верно для нового  $f$  (в случае  $w \in T$  множество  $\text{Old} \cup \text{New}$  уменьшается на один элемент  $u$ ).

Таким образом, каждое изменение  $f$  состоит в его уменьшении на  $\geq \varepsilon$  в ребре в  $E^-$  либо увеличении на  $\geq \varepsilon$  в ребре в  $E^+$ . Значит, число итераций в данной последовательности не превосходит  $c(E^- \cup E^+)/\varepsilon$ , что дает конечность алгоритма.

При целочисленном  $c$  каждая операция изменяет предпоток в ребре на целое число, и, следовательно, результирующий стабильный поток целочисленный. Предложение доказано.

Несмотря на конечность алгоритма число итераций в нем может быть очень большим, как показывает следующий пример.

**Пример.** Пусть в  $G$  имеются вершины  $u, v, w$  и ребра  $uv, vw$  и  $uw$ , для которых  $uv <_u^+ uw$  и  $uw <_w^- vw$ . Предположим, ребро  $vw$  критическое в  $\delta^{\text{in}}(w)$ , ребро  $uv$  критическое в  $\delta^{\text{in}}(v)$ , а ребро  $uw$  активное в  $\delta^{\text{out}}(u)$ . Будем считать, что величины  $f(uv), f(vw)$  и  $c(uw) - f(uw)$  достаточно большие, эксцесс  $\Delta$  в  $w$  – положительный и достаточно малый, а эксцессы в  $u$  и  $v$  равны нулю. Работа алгоритма может проходить так: сначала  $f(vw)$  уменьшается на  $\Delta$ , затем  $f(uv)$  уменьшается на  $\Delta$ , затем  $f(uw)$  увеличивается на  $\Delta$ . И мы возвращаемся к начальной вершине  $w$  с прежним эксцесом  $\Delta$  (и при  $\text{ex}(u) = \text{ex}(v) = 0$ ) и снова движемся по тому же циклу  $w \rightarrow v \rightarrow u \rightarrow w$ , и так много раз.

В следующем разделе мы расскажем, как модифицировать алгоритм, чтобы он приводил к более быстрому решению.

#### 4. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ

В изложенном выше базовом алгоритме число итераций, на которых граф  $\Gamma$  не меняется, может быть очень большим (как показывает пример в разд. 3); для удобства здесь и далее мы включаем разбиение  $(E^+, E^-)$  в описание  $\Gamma$ . В этом разделе мы описываем модифицированную версию, для которой число изменений предпотока  $f$  при постоянном  $\Gamma = (V_\Gamma; E^+, E^-)$  имеет порядок  $O(n)$ . Это эквивалентно тому, что  $O(n)$  изменений  $f$  приводят к событию  $S, F$  или  $M$  (включая тот случай, когда некоторое активное ребро закрывается и становится критическим).

Путь в  $\Gamma$  назовем *правильным*, если все активные ребра в нем прямые, а все критические ребра обратные. Последовательность итераций с постоянным  $\Gamma$  назовем *большой итерацией*. Она начинается с выбора эксцессной вершины  $v_0$  в  $(G, f)$ , и порядок обработки вершин уточняется следующим образом (полагая, что  $v_0$  принадлежит  $\Gamma$ ).

(А) Если при балансировании очередной эксцессной вершины  $v$ , состоящем в уменьшении  $f$  в критическом ребре  $uv$  (которое сохраняется в  $\Gamma$ ), выясняется, что вершина  $u$  внутренняя и имеет пустое активное ребро (и тогда все ребра в  $\delta^{\text{out}}(u)$  насыщенные или закрытые (ср. (С3)б), ввиду чего достройка в  $u$  невозможна), то переходим к балансированию в вершине  $u$ .

(В) Если при достройке в вершине  $u$ , состоящей в увеличении  $f$  в активном ребре  $e = uw$  выясняется, что вершина  $w$  внутренняя и имеет непустое активное ребро  $wz$ , то далее производится достройка в  $w$ , а если  $\check{e}(w) = \{\emptyset\}$ , то переходим к балансированию в  $w$ . При этом балансировании, если критическим ребром становится то же самое ребро  $e = uw$ , то оно закрывается и перестает быть активным в  $u$ , в результате чего граф  $\Gamma$  изменяется, и большая итерация заканчивается.

Из этих уточнений следует, что последовательность обрабатываемых вершин и ребер образует правильный путь  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i, \dots)$ . Для очередной вершины  $v_k$  в  $P$  возможны следующие особые ситуации:

(Q1)  $v_k$  совпадает с ранее пройденной вершиной  $v_i$ ;

(Q2)  $v_k$  является терминалом.

Рассмотрим эти ситуации более подробно. В результате изменения  $f$  на  $e_1, \dots, e_k$  эксцессы всех вершин в  $P$ , кроме  $v_k$ , обнуляются.

1. В случае (Q1) выделяем правильный простой цикл  $C = (v_i, e_{i+1}, \dots, v_k)$ . Подобно тому, как это делается для ротаций в алгоритмах для стабильных  $b$ -матчингах, распределениях, и др., мы изменяем  $f$  вдоль  $C$  на максимальную возможную величину  $\Delta$ , равную минимуму величин  $f(e)$  для  $e \in E_C \cap E^-$  и величин  $c(e') - f(e')$  для  $e' \in E_C \cap E^+$ , увеличивая  $f$  на  $\Delta$  в прямых ребрах и уменьшая на  $\Delta$  в обратных ребрах цикла  $C$ . В результате некоторое ребро в  $C$  насыщается или освобождается, и происходит событие  $M$  (вместе с  $S$  или  $F$ ), завершая большую итерацию. При этом эксцессы всех вершин сохраняются, и можно видеть, что предпоток  $f$  продолжает быть стабильным и полностью блокирующим.

2. В случае (Q2) мы запоминаем  $P$  (где теперь эксцессы всех внутренних вершин нулевые) и, в предположении сохранения  $\Gamma$ , продолжаем большую итерацию, выбирая новую эксцессную

вершину  $v'_0$  в  $(G, f)$  и строя новый правильный путь  $P' = (v'_0, e'_1, v_1, \dots)$ . Рассмотрим возможные варианты.

а) Если путь  $P'$  закичивается, то действуем, как указано в 1, и заканчиваем большую итерацию.

б) Если  $P'$  встречает предыдущий путь  $P$  (ведущий в терминал) в вершине  $v'_r = v_r$ , то объединяем  $P'$  с  $P$ , получая дерево  $\mathcal{T}$  (с корнем в некотором источнике  $s \in S$  или “антикорнем” в стоке  $t \in T$ ); при этом все внутренние вершины в  $\mathcal{T}$ , кроме  $v'_r$ , имеют нулевой эксцесс. Продолжаем большую итерацию с новой эксцессной вершиной  $v'_0$  в  $(G, f)$ .

в) Если же  $P'$  попадает в терминал, отличный от терминала в  $P$ , то запоминаем  $P'$  (помимо  $P$ ) и продолжаем с новой эксцессной вершиной.

г) В общем случае каждый новый построенный путь, если он не закичивается и не попадает в новый терминал, встречается либо с деревом  $\mathcal{T}$  с корнем в  $S$ , либо с деревом  $\mathcal{T}'$  с антикорнем в  $T$ , и мы добавляем этот путь к данному дереву.

В результате при сохранении  $\Gamma$  (в частности, при отсутствии закичивания) получаем следующее: в  $\Gamma$  построены несколько непересекающихся правильных деревьев  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$  с корнями в  $S$  и деревьев  $\mathcal{T}'_1, \dots, \mathcal{T}'_\ell$  с антикорнями в  $T$ , и все внутренние вершины в  $G$ , не лежащие в этих деревьях, имеют нулевые эксцессы.

При этом число изменений предпотока  $f$  равно  $|E_{\mathcal{T}_1}| + \dots + |E_{\mathcal{T}_k}| + |E_{\mathcal{T}'_1}| + \dots + |E_{\mathcal{T}'_\ell}| \simeq O(n)$ . Осталось объяснить, как избавляться от этих деревьев.

Предположим  $\ell \neq 0$ , и обозначим  $Z$  множество эксцессных вершин в  $\mathcal{T}'_1$  (это в точности множество точек ветвления в  $\mathcal{T}'_1$ ). Обойдя  $\mathcal{T}'_1$ , выделим в нем минимальное поддереву  $W$  с антикорнем в  $t \in T$ , содержащее  $Z$ , и перенумеруем ребра в  $W$  в топологическом порядке  $w_1, \dots, w_p$  (так, что если  $w_j$  лежит на пути, соединяющем  $w_i$  с  $t$ , то  $i < j$ ). Перебирая ребра в этом порядке, изменяем  $f$  в них естественным образом, получая одно из двух: либо (i) эксцессы всех вершин в  $\mathcal{T}'_1 - \{t\}$  становятся нулевыми, либо (ii) некоторое промежуточное ребро становится насыщенным или свободным, что заканчивает большую итерацию.

Аналогично действуем и с другими деревьями  $\mathcal{T}'_i$  и  $\mathcal{T}'_j$ .

Таким образом, общая работа с деревьями осуществляется за время  $O(n)$  и заканчивается либо событием  $M$  (вместе с  $S$  или  $F$ ), либо избавлением от всех эксцессных внутренних вершин в  $G$ , и, следовательно, получением стабильного потока  $f$ . В течение большой итерации каждое ребро в  $\Gamma$  рассматривается не более  $O(1)$  раз. Поэтому временная сложность большой итерации –  $O(n)$ . Этот факт вместе с (3.2) приводят к следующему результату.

**Предложение 2.** Модифицированный алгоритм находит стабильный поток  $f$  в сети  $N = (G = (V, E), S, T, c)$  за время  $O(nt)$  (причем  $f$  целочисленный при целочисленном  $c$ ).

**Замечание 3.** С достаточной уверенностью можно сказать, что данный алгоритм может быть ускорен до формальной временной оценки  $O(m \log n)$  путем применения структур данных как в [6], [7] для операций на графе  $\Gamma$  (таких как выделение и перестройку компонент и циклов в  $\Gamma$ , агрегированное изменение предпотока на циклах и деревьях, и др.), в том же духе, как подобного рода процедуры для подграфа “слабых ребер” ускоряются в алгоритме [5]. Мы оставляем проработку этих технических деталей за рамками данной статьи, сохраняя достаточную простоту и практическую применимость изложенного выше метода.

## 5. ОБОБЩЕНИЯ

Задача о стабильном потоке в сети  $N = (G = (V, E), S, T, c)$  может быть обобщена путем введения для каждой внутренней вершины  $v$  верхней границы  $\gamma(v) \in \mathbb{R}_+$  разрешенного эксцесса в  $v$ . (Как и прежде мы предполагаем условие (2.1).)

**Определение 4.** Предпоток  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  в  $N$  назовем  $\gamma$ -предпотоком, если он допустимый (т.е.  $f \leq c$ ) и удовлетворяет ограничениям

$$0 \leq \text{ex}_f(v) \leq \gamma(v) \quad \text{для всех } v \in V - (S \cup T). \quad (5.1)$$

В прикладных интерпретациях можно понимать ограничения в (5.1) как разрешение “агенту”  $v$  не передавать далее весь продукт, доставленный по входящим ребрам-каналам  $e \in \delta^{\text{in}}(v)$ , а откладывать в запас (или отправлять “на сторону”) часть полученного продукта в размере, не превышающем  $\gamma(v)$ .

Мы называем  $\gamma$ -предпоток *стабильным*, если для каждого ненасыщенного ориентированного  $u-v$  пути  $P$  верно по крайней мере одно из двух: а) вершина  $v$  внутренняя, и  $P$  удовлетворяет (2.3) (при  $v_k = v$ ), т.е.  $P$  доминируется в  $v$ ; или б) вершина  $u$  внутренняя, и  $P$  *сильно доминируется* в  $u$ , что означает выполнение (2.2) (при  $v_0 = u$ ) и отсутствие эксцесса в  $u$ :  $\text{ex}_f(u) = 0$ . При  $\gamma = 0$  это превращается в определение стабильного потока.

Обобщение полученных выше результатов на  $\gamma$ -предпоток выглядит так.

**Предложение 3.** Для сети  $N = (G = (V, E), S, T, c)$  и вектора  $\gamma \in \mathbb{R}_+^{V-(S \cup T)}$  стабильный  $\gamma$ -предпоток существует и может быть найден за время  $O(nt)$ .

**Доказательство.** Данная задача сводится к задаче о стабильном потоке в расширенной сети  $N'$  с графом  $G' = (V, E')$ , полученным из  $G$  добавлением для каждой внутренней вершины  $v$  ребра  $vt$  пропускной способности  $c(vt) := \gamma(v)$ , которое ставится в конец порядка на  $\delta^{\text{out}}(v)$ , а именно,  $e <_v^+ vt$  для всех  $e \in \delta_G^{\text{out}}(v)$ . Здесь  $t$  – выделенный сток в  $T$ . Пусть  $f'$  – стабильный поток для  $N'$ , и  $f$  – его ограничение на  $G$ . Тогда  $f$  – это  $\gamma$ -предпоток, и его стабильность следует из стабильности  $f'$ . (Действительно, если  $P$  – ненасыщенный ориентированный  $u-v$  путь в  $G$ , который, будучи рассмотрен как путь в  $G'$ , доминируется в  $u$ , то выполняется  $f'(ut) = 0$ , и мы получаем  $\text{ex}_f(u) = 0$ .) Предложение доказано.

Мы можем обобщить задачу далее, вводя для каждой внутренней вершины  $v$ , помимо  $\gamma(v)$  как выше, границу  $\beta(v) \in \mathbb{R}_+$  для величины  $-\text{ex}(v)$ . Иначе говоря, мы рассматриваем допустимую (по  $c$ ) функцию  $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , удовлетворяющую

$$-\beta(v) \leq \text{ex}_f(v) \leq \gamma(v) \quad \text{для всех } v \in V - (S \cup T). \tag{5.2}$$

Такое  $f$  назовем  $(\beta, \gamma)$ -квазипотоком. Можно понимать ограничение  $-\beta(v) \leq \text{ex}_f(v)$  в (5.2) как разрешение “агенту”  $v$  брать из запаса или привлекать со стороны продукт в размере не более  $\beta(v)$  для передачи далее вместе с продуктом, доставленный по входящим ребрам-каналам (при этом, как и прежде, “агенту” разрешается отложить в запас или отправить на сторону часть, не превышающую  $\gamma(v)$ ). Проще говоря, для  $(\beta, \gamma)$ -квазипотока  $f$ , если величина  $\Delta(v) := \text{ex}_f(v)$  положительная, то “агент”  $v$  запасает  $\Delta(v)$  единиц продукта, а если отрицательная – берет из запаса  $-\Delta(v)$  единиц.

Назовем  $(\beta, \gamma)$ -квазипоток *стабильным*, если для каждого ненасыщенного ориентированного  $u-v$  пути  $P$  верно по крайней мере одно из двух: а) вершина  $u$  внутренняя, и  $P$  *сильно доминируется* в  $u$  (относительно  $\gamma$ ) в том смысле, что выполняется (2.2) (при  $v_0 = u$ ), и эксцесс в  $u$  неположительный (и не менее  $-\beta(u)$ ); или б) вершина  $v$  внутренняя, и  $P$  *сильно доминируется* в  $v$  (относительно  $\beta$ ), что означает выполнение (2.3) (при  $v_k = v$ ) и неотрицательный эксцесс в  $v$  (не более  $\gamma(v)$ ). При  $\beta = \gamma = 0$  получаем определение стабильного потока.

Для данного обобщения справедливо

**Предложение 4.** Для сети  $N = (G = (V, E), S, T, c)$  и векторов  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^{V-(S \cup T)}$  стабильный  $(\beta, \gamma)$ -квазипоток существует и может быть найден за время  $O(nt)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим задачу о стабильном потоке в расширенной сети  $N'$  с графом  $G' = (V', E')$ , полученным из  $G$ : а) расщеплением каждой внутренней вершины  $v$  на две копии  $v'$  и  $v''$ , где  $v'$  наследует входящие ребра из  $\delta^{\text{in}}(v)$ , а  $v''$  – выходящие ребра из  $\delta^{\text{out}}(v)$  (с теми же пропускными способностями и порядками на них); б) добавлением ребра  $v'v''$  большой пропускной способности; и в) добавлением ребра  $v't$  пропускной способности  $c(v't) := \gamma(v)$  и ребра  $sv''$  пропускной способности  $c(sv'') := \beta(v)$ , где  $v't$  и  $sv''$  полагаются менее приоритетными, чем ребро  $v'v''$ , и где  $s$  и  $t$  – выделенные источник и сток соответственно. Пусть  $f'$  – стабильный поток для  $N'$ , и  $f$  – его “образ” в  $G$ . Можно проверить, что  $f$  – это  $(\beta, \gamma)$ -квазипоток в  $N$ , и его стабиль-

ность следует из стабильности  $f'$ . Здесь существенен тот факт, что для каждой внутренней вершины  $v \in V$  по крайней мере одно из значений  $f'(sv'')$  и  $f'(v't)$  должно быть нулевым (что следует из рассмотрения ненасыщенного пути  $(v', v'v'', v''')$ ). Предложение доказано.

## 6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этом заключительном разделе указываются три дополнительных интересных свойства стабильных потоков и предпотоков. Как и выше, мы рассматриваем ориентированную сеть  $N = (G = (V, E), S, T, c)$  с линейными порядками на  $\delta^{\text{in}}(v)$  и  $\delta^{\text{out}}(v)$  для внутренних вершин  $v \in V - (S \cup T)$  (и при условии (2.1)).

**I.** Для предпотока  $f$  в сети  $N = (G, S, T, c)$  будем считать величиной  $f$  суммарный эксцесс в стоках:  $\text{val}(f) := \text{ex}_f(T) (= \sum_{t \in T} \text{ex}_f(t))$ . Справедливо следующее свойство:

для стабильного предпотока  $f$  в  $N$  найдется стабильный поток  $f'$  в  $N$  такой, что  $f(e) \leq f'(e)$  для всех ребер, входящих в  $T$ , и, следовательно, (6.1)  
выполняется  $\text{val}(f) \leq \text{val}(f')$ .

Действительно, если  $f$  не является потоком (т.е. имеет эксцессную внутреннюю вершину), то  $f$  перестраивается в стабильный поток  $f'$  применением последовательности итераций базового алгоритма. Каждое балансирование не изменяет значений в ребрах, входящих в  $T$ , а достройка может только увеличивать эти значения, что дает требуемое свойство (6.1).

**II.** Что касается величин стабильных потоков, то, обобщая классические результаты для стабильных марьяжей, стабильных двудольных  $b$ -матчингов и др., Флейнер [8, Sec. 4] установил, что:

для любых стабильных потоков  $f$  и  $g$  в сети  $N$  значения  $f(e)$  и  $g(e)$  совпадают для каждого ребра  $e$ , инцидентного терминалу. (6.2)

Как следствие,  $\text{val}(f) = \text{val}(g)$ . Свойство (6.2) доказывалось в [8] (где рассматривались двух-полюсные сети и допускались произвольные ребра, инцидентные терминалам) путем сведения к соответствующему свойству для стабильных распределений. Для наших сетей можно дать прямое и наглядное доказательство.

А именно, свяжем с функцией  $f - g$  соответствующее разложение по путям и циклам. Более точно, поскольку  $f$  и  $g$  не имеют эксцессных внутренних вершин, можно образовать семейство  $\mathcal{C}$ , состоящее из простых путей и циклов  $C$  с весами  $\Delta(C) > 0$  так, чтобы выполнялось следующее:

(i) для каждого  $C \in \mathcal{C}$  его прямые ребра  $e$  удовлетворяют  $f(e) > g(e)$ , а обратные ребра  $e'$  удовлетворяют  $f(e') < g(e')$ ;

(ii) для каждого ребра  $e \in E$  сумма весов  $\Delta(C)$  по путям/циклам  $C$ , содержащим  $e$ , равна  $|f(e) - g(e)|$ ;

(iii) каждый путь в  $\mathcal{C}$  соединяет два разных терминала, а каждый цикл содержит не более одного терминала.

Предположим,  $f$  и  $g$  не совпадают на некотором ребре  $e$ , инцидентном терминалу, и рассмотрим случай, когда  $e$  выходит из источника  $s \in S$  (т.е.  $e \in \delta^{\text{out}}(s)$ ). Для определенности положим  $f(e) > g(e)$ . Тогда имеется  $C \in \mathcal{C}$ , содержащее  $e$  (как прямое ребро); при этом либо а)  $C$  – путь из  $s$  в  $t \in T$ , либо б)  $C$  – путь из  $s$  в  $s' \in S$  (возможно,  $s' = s$ ).

В случае а) имеется последовательность  $s = v_0, v_1, \dots, v_k = t$  вершин в  $C$  (где  $k$  нечетное), для которой часть  $C$  от  $v_{i-1}$  до  $v_i$  имеет только прямые ребра при нечетном  $i$ , и только обратные ребра при четном  $i$ . Тогда

при нечетном  $i$  имеется ориентированный путь  $P_i$  из  $v_{i-1}$  в  $v_i$ , на ребрах которого  $f$  превосходит  $g$ , и, следовательно,  $P_i$  ненасыщенный для  $g$  и не содержит ребер, свободных от  $f$ ; в свою очередь, при четном  $i$  имеется ориентированный (6.3) путь  $Q_i$  из  $v_i$  в  $v_{i-1}$ , на ребрах которого  $g$  превосходит  $f$ , и, следовательно,  $Q_i$  ненасыщенный для  $f$  и не содержит ребер, свободных от  $g$ .

(Такие пути фигурируют в конкатенации  $P_1 \cdot Q_2^{-1} \cdot P_3 \cdot Q_4^{-1} \cdot \dots \cdot Q_{k-1}^{-1} \cdot P_k$  для  $C$ , где  $Q^{-1}$  обозначает путь, обратный пути  $Q$ .) Обозначим  $p_i$  ( $p'_i$ ) первое (соответственно, последнее) ребро в  $P_i$ , и обозначим  $q_j$  ( $q'_j$ ) первое (соответственно, последнее) ребро в  $Q_j$ . Можно видеть, что

$$p'_i, q'_{i+1} \in \delta^{\text{in}}(v_i) \text{ при нечетном } i < k, \text{ и } q_i, p_{i+1} \in \delta^{\text{out}}(v_i) \text{ при четном } i. \quad (6.4)$$

Теперь применим (6.3) и (6.4), двигаясь шаг за шагом по последовательности путей  $P_1, Q_2, P_3, \dots$ . Так как  $P_1$  начинается в источнике  $v_0 = s$  и является ненасыщенным для  $g$ , и так как выполняется  $g(q'_2) > 0$ , то из стабильности  $g$  следует, что  $q'_2 <_{v_1}^- p'_1$ . Тогда из стабильности  $f$ , ненасыщенности  $Q_2$  для  $f$ , неравенства  $f(p_3) > 0$ , и свойства, что  $Q_2$  не доминируется в  $v_1$  (в силу  $f(p'_1) > 0$ ), получаем  $p_3 <_{v_2}^+ q_2$ . И так далее. Дойдя до пути  $Q_{k-1}$ , получаем  $p_k <_{v_{k-1}}^+ q_{k-1}$ . Но тогда последний путь  $P_k$  (который заканчивается в стоке  $v_k = t$  и является ненасыщенным для  $g$ ) не доминируется в начальной вершине  $v_{k-1}$ , вопреки стабильности  $g$ .

В случае б) рассуждения схожи. Здесь мы имеем дело с конкатенацией путей вида  $P_1, Q_2^{-1}, \dots, P_{k-1}, Q_k^{-1}$  (при четном  $k$ ). При этом последний путь  $Q_k$  начинается в источнике  $v_k = s'$ , является ненасыщенным для  $f$ , и не доминируется в концевой вершине  $v_{k-1}$  (в силу  $f(p'_{k-1}) > 0$  и  $q'_k <_{v_{k-1}}^- p'_{k-1}$ ), что противоречит стабильности  $f$ . По соображениям симметрии, случаи несовпадений  $f$  и  $g$  в ребре, входящем в  $T$ , также невозможны. Этим заканчивается доказательство (6.2).

**III.** Предыдущая конструкция может быть продолжена. А именно, рассмотрим два стабильных потока  $f$  и  $g$  в сети  $N = (G, S, T, c)$ . Пусть  $H$  – подграф в  $G$ , порожденный ребрами в  $A := \{e : f(e) > g(e)\}$  и  $B := \{e : g(e) > f(e)\}$ , и назовем ребрам  $e$  в  $H$  веса  $\alpha(e) := |f(e) - g(e)|$ . Согласно (6.2),  $H$  не содержит терминальных вершин. Более того,  $\omega$  раскладывается в неотрицательную линейную комбинацию характеристических функций простых правильных циклов (и тем самым  $\omega$  может рассматриваться как “циркуляция”).

Здесь мы говорим, что (не обязательно простой) цикл  $C$  в  $H$  является *правильным*, если все прямые ребра в нем принадлежат  $A$ , а обратные принадлежат  $B$ . Для вершины  $v$  в таком цикле обозначим  $\Pi_C(v)$  множество пар подряд идущих ребер, инцидентных  $v$  и следующих в направлении цикла. Назовем пару  $\pi \in \Pi_C(v)$  *особой*, если  $\pi$  содержит ребро как из  $A$ , так и из  $B$  (эквивалентно, оба ребра в  $\pi$  либо входят в  $v$ , либо выходят из  $v$ ). В этом случае скажем, что пара  $\pi = (e, e')$  *левая*, если  $e$  предпочтительнее для  $v$ , чем  $e'$ ; иначе пара называется *правой*. Рассуждая как при доказательстве (6.2), из стабильности  $f$  и  $g$  можно заключить, что

$$\text{для любого правильного цикла } C \text{ особые пары ребер для всех вершин в } C \text{ имеют одинаковую ориентацию: либо все левые, либо все правые.} \quad (6.5)$$

Это свойство распространяется на компоненты связности  $K$  в  $H$ : все особые пары ребер, встречающиеся в правильных циклах в  $K$ , одновременно либо левые, либо правые (это следует из того, что две такие пары  $\pi, \pi'$  можно включить в один правильный (не обязательно простой) цикл в  $K$ ). В соответствии с этим выделим четыре типа компонент  $K$ . А именно, скажем, что  $K$  имеет: *тип A* (*тип B*), если все ребра в  $K$  принадлежат множеству  $A$  (соответственно,  $B$ ); и имеет

$\min L$  ( $\min R$ ), если  $K$  имеет ребра в обоих множествах  $A$  и  $B$  (в этом случае назовем компоненту  $K$  богатой), и ориентации всех особых пар в  $K$  левые (соответственно, правые). Эквивалентно, богатая компонента  $K$  имеет тип  $L$ , если для любой особой вершины  $v$  в  $K$  в множестве  $\delta^{\text{in}}(v)$  ребра из  $A$  предшествуют ребрам из  $B$ , а в множестве  $\delta^{\text{out}}(v)$  ребра из  $B$  предшествуют ребрам из  $A$ ; в случае типа  $R$  ситуация противоположная. (6.6)

Пользуясь этим, можно явно описать множество стабильных потоков в  $N$  в виде решетки (что делается в [8] путем сведения к задаче о стабильном распределении и апелляции к соответствующему результату в [4]). А именно, определим следующие функции  $h, \ell$  на  $E$ :

$h$  совпадает с  $f$  на компонентах типа  $A$  и  $R$  и совпадает с  $g$  на компонентах типа  $B$  и  $L$ , а  $\ell$  определяется противоположным образом; (6.7)  
на остальных ребрах  $e$  полагается  $h(e) := \ell(e) := f(e) = g(e)$ .

Можно видеть, что  $h$  и  $\ell$  являются потоками. А также для каждой внутренней вершины  $v$  поток  $h$  доминирует потоки  $f, g$  на множестве  $\delta^{\text{out}}(v)$ , и доминируется этими потоками на множестве  $\delta^{\text{in}}(v)$ , в то время как  $\ell$  ведет себя противоположным образом. (Здесь для числовых функций  $a, b$  на упорядоченном множестве  $(S, <)$  считаем, что  $a$  доминирует  $b$ , если либо  $a = b$ , либо имеется  $e \in S$  такое, что  $a(e) > b(e)$ ,  $a(e') \geq b(e')$  при  $e' < e$ , и  $a(e'') \leq b(e'')$  при  $e < e''$ .)

Из вышесказанного можно получить (мы опускаем подробности), что  $h$  совпадает с указанным в [8, Sec. 4] потоком  $f \vee g$ , а  $\ell$  совпадает с потоком  $f \wedge g$ ; в частности, оба  $h, \ell$  стабильные.

Автор выражает благодарность рецензенту за анализ начальной версии статьи и указание работ [10], [12], не известных автору при ее написании.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gale D., Shapley L.S. College admissions and the stability of marriage // Amer. Math. Monthly. 1962. V. 69. № 1. P. 9–15.
2. Irving R.W. An efficient algorithm for the “stable roommates” problem // J. Algorithms. 1985. V. 6. P. 577–595.
3. Tan J. A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching // J. Algorithms. 1991. V. 12. P. 154–178.
4. Baiou M., Balinski M. Erratum: the stable allocation (or ordinal transportation) problem // Math. Oper. Res. 2002. V. 27. № 4. P. 662–680.
5. Dean B.C., Munshi S. Faster algorithms for stable allocation problems // Algorithmica. 2010. V. 58. № 1. P. 59–81.
6. Sleator D.D., Tarjan R.E. A data structure for dynamic trees // J. Computer and System Sciences. 1983. V. 26. № 3. P. 362–391.
7. Sleator D.D., Tarjan R.E. Self-adjusting binary search trees // J. ACM. 1985. V. 32. № 3. P. 652–686.
8. Fleiner T. On stable matchings and flows // Algorithms. 2014. V. 7. P. 1–14.
9. Ostrovsky M. Stability in supply chain networks // Amer. Econ. Rev. 2006. V. 98. P. 897–923.
10. Cseh Á., Matuschke J. New and simple algorithms for stable flow problems // Algorithmica. 2019. V. 81. № 6. P. 2557–2591.
11. Карзанов А.В. Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215. С. 49–52. (English translation in: Soviet Math. Dokl. 1974. V. 15. № 2. P. 434–437.)
12. Cseh Á., Matuschke J., Skutella M. Stable flows over time // Algorithms. 2013. V. 6. P. 532–545.