

Том 64, Номер 11

ISSN 0044-4669

Ноябрь 2024



ФИЦ ИУ РАН

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 64, номер 11, 2024

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Метод мультиполей для некоторых смешанных краевых задач и его приложение к построению конформного отображения

А.О. Багаши, В.И. Власов

2007

Численно-аналитический метод для нелинейных уравнений типа Колмогорова—Петровского—Пискунова

С. И. Безродных, С. В. Пикулин

2019

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Оптимизационный подход к проблеме определения поля скоростей в задачах обработки изображений

Е. Д. Котина, Д. А. Овсянников, Д. С. Харченко

2046

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

К изучению различных представлений решений квазидифференциальных уравнений в виде сумм рядов и их некоторых применениях

М. Ю. Ватолкин

2058

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Дуализм в теории солитонных решений. II

Л. А. Бекларян

2077

Сингулярная часть электромагнитного поля в задачах дифракции на телах с ребрами для различных типов граничных условий

А.Н. Боголюбов, И.Е. Могилевский, М.М. Шушарин

2101

Математическая теория расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия

В. В. Веденяпин

2114

Интегральное представление решений и задача типа Римана—Гильберта для уравнения Коши—Римана с сильной особенностью в младшем коэффициенте в области с кусочно-гладкой границей

А.Б. Расулов, Н.В. Якивчик

2132

К вопросу о стационарных волнах на поверхности идеальной жидкости конечной глубины. Второй метод Стокса

А. И. Руденко

2143

Аналог формулы Пуассона для решения уравнения Гельмгольца

А. О. Савченко

2155

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Исследование устойчивости сверхзвуковых уединенных волн в упругом электропроводном микрополярном материале
И. Б. Бахолдин 2160
- Применение метода сопряженных градиентов к решению задач одностороннего дискретного контакта для упругого полупространства
А.А. Бобылев 2168
- Итерационные численные методы решения задачи определения коэффициента в модели динамики сорбции
А. М. Денисов, Чжу Дунцин 2184
- Оптимизация численно-статистического алгоритма оценки среднего потока частиц в случайной размножающей ограниченной среде
Г. З. Лотова, Г. А. Михайлов, С. А. Роженко 2194
- Представление Максвелла потенциала спутникового приближения. Об одном способе определения главных осей инерции твердого тела по параметрам его мультиполя второго порядка
Е. А. Никонова 2205

ИНФОРМАТИКА

- Ускоренные алгоритмы выращивания сегментов из областей изображений
Д.М. Мурашов 2212

МЕТОД МУЛЬТИПОЛЕЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ¹⁾

© 2024 г. А.О. Багапш^{1,*}, В.И. Власов^{1,**}

¹ 119991 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: a.bagapsh@gmail.com

**e-mail: vlasov@ccas.ru

Поступила в редакцию 16.07.2024 г.

Переработанный вариант 16.07.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Представлен аналитико-численный метод мультиполей решения некоторых смешанных краевых задач для уравнения Лапласа в плоских односвязных областях g сложной формы с приложением к построению конформного отображения таких областей. Метод позволяет с высокой точностью получать как само решение, так и его градиент вплоть до сложных участков границы вблизи сингулярностей, а также обеспечивает апостериорную оценку относительной погрешности δ в норме $C(\bar{g})$. Эффективность метода была подтверждена на примерах численной реализации метода для построения конформного отображения областей с криволинейной границей, содержащей входящие дуговые углы и узкие перешейки. При этом погрешность δ составила согласно апостериорной оценке величину не хуже 10^{-4} при использовании всего лишь около 100 аппроксимативных функций. Библ. 18. Фиг. 4.

Ключевые слова: плоские области сложной формы, смешанная краевая задача, метод мультиполей, конформное отображение, входящие углы, апостериорная оценка погрешности.

DOI: 10.31857/S0044466924110011, EDN: KHELRB

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Вводные замечания

Изложен вариант аналитико-численного метода мультиполей, который дает решение некоторых смешанных краевых задач для уравнения Лапласа в плоских односвязных областях g с кусочно-гладкой границей $\partial g = \gamma \cup \Gamma$ (см. фиг. 1а), когда на одной ее части, дуге γ , задано однородное смешанное условие типа Дирихле — Неймана, а на дополнительной дуге Γ — неоднородное условие Дирихле с граничной функцией h из $L_2(\Gamma)$. Решение разыскивается в подходящем пространстве типа Харди, в котором обеспечена однозначная разрешимость задачи. (Первоначальный вариант метода был предложен в [1], дальнейшее развитие он получил, в частности, в работах [2]–[13], а предшествующая теория аналогичных пространств типа Харди была дана в [4], [14], [15].)

Предлагаемый метод основан на использовании специальной аппроксимативной системы функций $\{\Omega_p\}$, $p \in \mathbb{Z}^+$ (где $\mathbb{Z}^+$ — множество целых неотрицательных чисел). Эти функции записываются в явном виде через конформное отображение $\mathcal{F}$ некоторого расширения G исходной области g через дугу Γ на каноническую область (см. фиг. 1). Функции Ω_p , родственные мультиполям из теории потенциала, тождественно удовлетворяют уравнению Лапласа в области g и заданному смешанному однородному граничному условию на γ , а кроме того, составляют полную и минимальную систему на Γ в пространстве L_2 .

Решение рассматриваемой задачи строится в виде предела последовательности приближенных решений, представляющих собой линейные комбинации мультиполей Ω_p , коэффициенты в которых находятся из условия минимума отклонения приближенного решения от граничной функции h на дуге Γ в норме L_2 . При этом полученная априорная оценка гарантирует сходимость приближенных решений к точному вместе с градиентом равномерно на любом компакте $\tilde{E} \subset (g \cup \tilde{\gamma})$, где $\tilde{\gamma}$ — дуга γ с исключенными точками ее неаналитичности

¹⁾ Работа Власова В.И. выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

и точками смены типа граничных условий. Кроме того, метод позволяет получать апостериорную оценку погрешности получаемого приближенного решения в норме $C(\bar{g})$ для случая, когда $h \in C(\Gamma)$.

Дано приложение метода к построению конформного отображения $\mathcal{P}: g \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ описанной выше области g на прямоугольник

$$\mathfrak{R} := \{w = u + iv : u \in (0, 1), v \in (0, L)\}, \quad (1.1)$$

см. фиг. 1в.

Реализация метода проведена на двух примерах построения такого отображения для областей с криволинейной границей, содержащей входящие дуговые углы и узкие перешейки. Апостериорная оценка погрешности в норме $C(\bar{g})$ для этих примеров показала, что погрешность не превышала 10^{-4} при использовании всего лишь около 100 мультиполей при машинном времени расчета 32 сек. на персональном компьютере средней производительности.

1.2. Постановка краевой задачи и пространство типа Харди

Опишем область (точнее, класс областей g), в которой ставится смешанная краевая задача.

Пусть g — жорданова область на комплексной плоскости $z = x + iy$ с границей ∂g , состоящей из двух дуг, $\partial g = \gamma \cup \Gamma$, из которых первая, кусочно—аналитическая дуга γ , образована тремя (непустыми) звеньями,

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3, \quad (1.2)$$

причем γ_2 соединяется с γ_1 и γ_3 соответственно в точках A и B , см. фиг. 1а. Вторая часть границы ∂g , т.е. дуга Γ , является кусочно—гладкой, а составляющие ее гладкие звенья стыкуются между собой под внутренними относительно g углами $\pi\alpha_q$, $q = \overline{1, Q-1}$, причем ее концевые звенья соединяются с дугой γ в точках C и D соответственно под углами $\pi\alpha_0$ и $\pi\alpha_Q$, и эти углы подчиняются включению

$$\alpha_q \in (0, 2), \quad q = \overline{0, Q}. \quad (1.3)$$

Тогда будем говорить, что область g удовлетворяет условиям (γ, Γ) .

Будем обозначать через z' точки дуги Γ , а через z — точки множества $g \cup \text{int } \gamma$, где $\text{int } \gamma$ — дуга γ без концевых точек.

Постановка рассматриваемой краевой задачи в области $g \in (\gamma, \Gamma)$ имеет вид

$$\Delta\psi(z) = 0, \quad z \in g, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu}(z) = 0, \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_3, \quad (1.5)$$

$$\psi(z) = 0, \quad z \in \gamma_2, \quad (1.6)$$

$$\psi(z') = h(z'), \quad z' \in \Gamma; \quad (1.7)$$

где $\partial/\partial\nu$ — производная по внешней нормали, а заданная на Γ граничная функция $h(z')$ полагается принадлежащей классу $L_2(\Gamma)$.

При такой граничной функции решение $\psi(z)$ этой задачи, очевидно, не является классическим и, следовательно, требует введения специального функционального пространства. Адекватным этой постановке, как показано ниже, является пространство $e_2(g, \Gamma)$ типа Харди, для которого дадим определение и описание некоторых основных свойств.

Определив полукруг $\mathbb{U}^+$ и полуокружность $\mathbb{T}^+$ по формулам

$$\mathbb{U}^+ := \{|\zeta| < 1, \text{Im } \zeta > 0\}, \quad \mathbb{T}^+ := \{|\zeta| = 1, \text{Im } \zeta > 0\}, \quad (1.8)$$

введем конформное отображение $z = \omega(\zeta)$ полукруга $\mathbb{U}^+$ на область $g \in (\gamma, \Gamma)$, переводящее $\mathbb{T}^+$ в дугу Γ , т.е.

$$\omega: \mathbb{U}^+ \xrightarrow{\text{conf}} g, \quad \omega(\mathbb{T}^+) = \Gamma. \quad (1.9)$$

Обозначим через Γ_r образ полуокружности $\mathbb{T}_r^+ := \{|\zeta| = r, \text{Im } \zeta > 0\}$ при отображении ω ,

$$\Gamma_r = \omega(\mathbb{T}_r^+). \quad (1.10)$$

Тогда $e_2(g, \Gamma)$ определяется как пространство гармонических в $g \in (\gamma, \Gamma)$ функций $\psi(z)$, обладающих следующей гладкостью

$$\psi \in C^1(g \cup \text{int } \gamma_1 \cup \text{int } \gamma_3) \bigcup C(g \cup \text{int } \gamma_2), \quad (1.11)$$

удовлетворяющих условиям

$$\psi(z) = 0, \quad z \in \gamma_2; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \nu}(z) = 0, \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_3, \quad (1.12)$$

и отвечающих ограничению

$$\exists a \in (0, 1), \quad \sup_{r \in (a, 1)} \int_{\Gamma_r} |\psi(z)|^2 |dz| < \infty. \quad (1.13)$$

Следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы Ф. Рисса [16] для классических пространств Харди H_p функций, аналитических в единичном круге, использует понятие следа на граничной дуге Γ как совокупности определенных почти всюду на Γ некасательных предельных значений (об этих значениях см. [17], [18]).

Теорема 1. *Функция $\psi(z) \in e_2(g, \Gamma)$ имеет на Γ след $\psi(z')$ из $L_2(\Gamma)$, и оператор взятия следа $\mathbb{S}$ устанавливает изометрический изоморфизм между пространствами $e_2(g, \Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$.*

Отсюда следует однозначная разрешимость задачи (1.4)–(1.7), сформулированная в следующей теореме.

Теорема 2. *Решение ψ задачи (1.4)–(1.7) с граничной функцией $h \in L_2(\Gamma)$ существует и единственно в пространстве $e_2(g, \Gamma)$; при этом равенство (1.7) понимается в том смысле, что след $\psi(z')$ совпадает с $h(z')$ почти всюду на Γ .*

Таким образом, введенное пространство $e_2(g, \Gamma)$ является подходящим для рассматриваемой задачи. Некоторые априорные оценки для функций из этого пространства дает следующая

Теорема 3. *Для решения $\psi(z)$ задачи (1.4)–(1.7) в пространстве $e_2(g, \Gamma)$ справедлива оценка*

$$\max_{z \in \mathcal{E}} |\psi(z)| \leq \frac{1}{\pi \delta} \left\| \frac{1}{\omega'} \right\|_{L_1(\mathbb{T}^+)}^{1/2} \|h\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (1.14)$$

где ω определяется в (1.9), $\mathcal{E}$ — компакт в $g \cup \text{int } \gamma$, δ — расстояние от $\omega^{-1}(\mathcal{E})$ до $\mathbb{T}^+$. А для градиента этого решения имеет место следующая оценка:

$$\max_{z \in \tilde{\mathcal{E}}} |\text{grad} \psi(z)| \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \max_{z \in \tilde{\mathcal{E}}} |\omega^{-1}'(z)| \left\| \frac{1}{\omega'} \right\|_{L_1(\mathbb{T}^+)}^{1/2} \|h\|_{L_2(\Gamma)}; \quad (1.15)$$

здесь $\tilde{\mathcal{E}}$ — компакт в $g \cup \text{int } \tilde{\gamma}$, где $\tilde{\gamma}$ — дуга γ с исключенными точками ее неаналитичности и точками A и B смены типа граничных условий, а δ — расстояние от $\omega^{-1}(\tilde{\mathcal{E}})$ до $\mathbb{T}^+$.

Отметим, что аналоги теорем 1–3 были доказаны в [4] и [15] для случая, когда дуга γ_2 пустая. Для случая же, рассматриваемого в теоремах 1–3, т.е. когда дуга γ_2 непустая, доказательства получаются путем модификации использованной ранее техники, причем оценки типа (1.15) можно сформулировать и для производных любого порядка.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть для области $g \in (\gamma, \Gamma)$, описанной в п. 1.2 (пример которой изображен на фиг. 1а), существует такая односвязная область G , что выполняются требования:

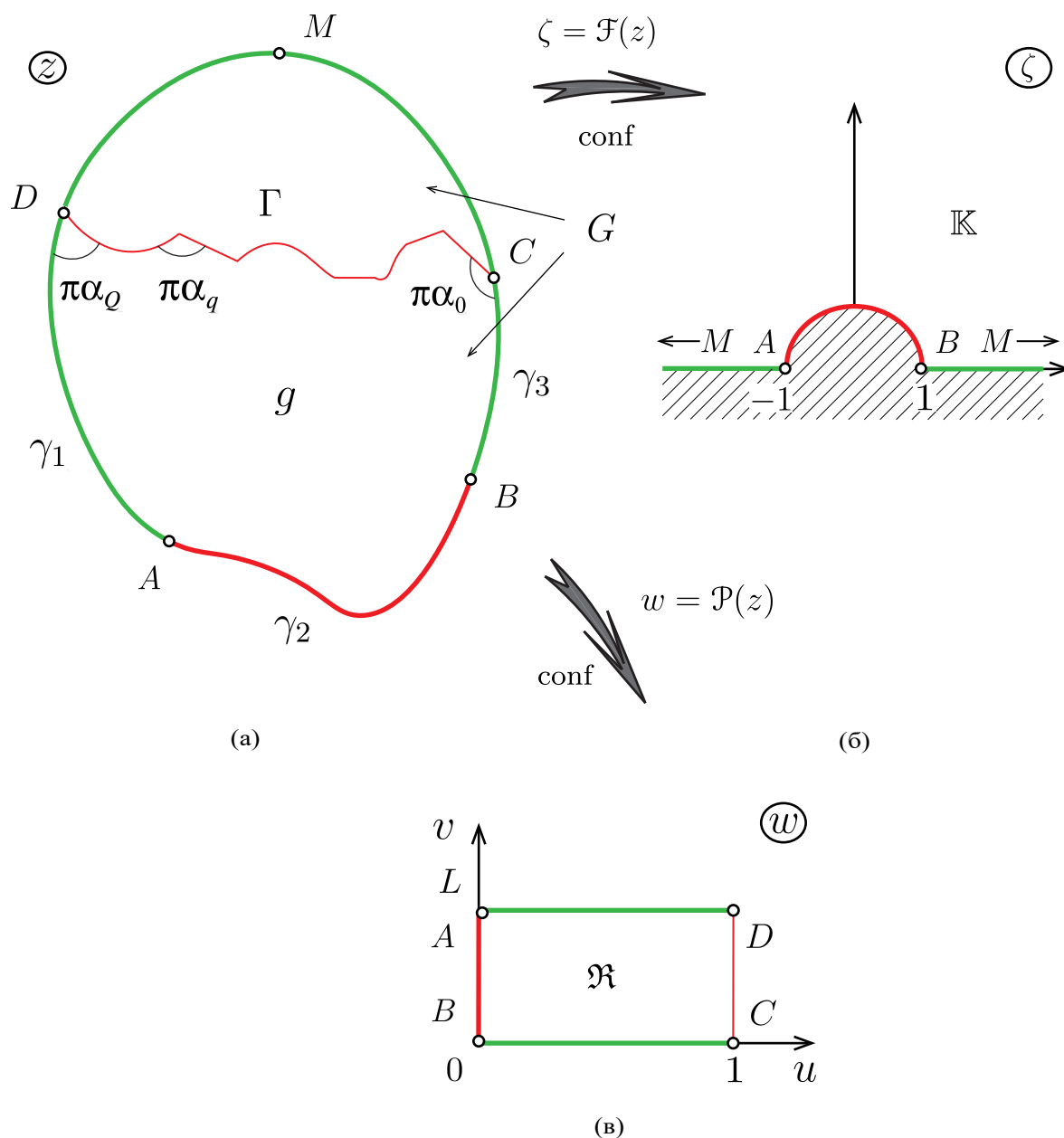
$$1) G \supset g, \quad 2) \partial G \supset \gamma, \quad 3) G \supset \text{int } \Gamma, \quad (2.1)$$

причем дуга $\partial G \setminus \text{int } \gamma$ в некоторых окрестностях ее концевых точек C и D является гладкой и образует с дугой γ в этих точках соответственно углы $\pi\beta_0$ и $\pi\beta_Q$, причем $\beta_0 > \alpha_0$, $\beta_Q > \alpha_Q$. Тогда об области G будем говорить, что она представляет собой расширение области g через дугу Γ , и будем писать $G \overset{\Gamma}{\supset} g$.

Базовую роль в описываемом методе решения задачи (1.4)–(1.7) играют мультиполи $\Omega_p(z)$, образующие необходимую аппроксимативную систему. Они определяются следующим образом.

Пусть для областей g и G выполняются условия $g \in (\gamma, \Gamma)$ и $G \overset{\Gamma}{\supset} g$, а $\mathbb{K}$ представляет собой верхнюю полу-плоскость с удаленным полукругом (см. фиг. 1б),

$$\mathbb{K} := \{\text{Im } \xi > 0, |\xi| > 1\}. \quad (2.2)$$



Фиг. 1.

Определим конформное отображение $\mathcal{F}: G \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{K}$ области G на $\mathbb{K}$ с однозначно определяющей его нормировкой

$$\mathcal{F}(A) = -1, \quad \mathcal{F}(B) = 1, \quad \mathcal{F}(M) = \infty, \quad (2.3)$$

где M — некоторая точка на $\partial G \setminus \gamma$, а точки A и B суть точки смены типа граничного условия на дуге γ ; они изображены на фиг. 1а. (Образы точек при конформном отображении часто будем обозначать теми же буквами, что и прообразы.)

Тогда требуемая аппроксимативная система функций $\{\Omega_p\}_{p=0}^{\infty}$ записывается через введенное отображение $\mathcal{F}$ по формулам

$$\Omega_0(z) = \pi^{-1} \operatorname{Re} \ln \mathcal{F}(z), \quad \Omega_p(z) := \operatorname{Re} \left\{ [\mathcal{F}(z)]^p - [\mathcal{F}(z)]^{-p} \right\}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Эти функции тождественно удовлетворяют уравнению Лапласа в области g и заданному смешанному однородному граничному условию на γ , т.е.

$$\Delta \Omega_p(z) = 0, \quad z \in G; \quad \Omega_p(z) = 0, \quad z \in \gamma_2; \quad \frac{\partial \Omega_p}{\partial \nu}(z) = 0, \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_3, \quad (2.5)$$

а кроме того, они обладают аппроксимативными свойствами, устанавливаемыми следующей теоремой.

Теорема 4. Система $\{\Omega_p(z)\}_{p \in \mathbb{Z}^+}$ является полной и минимальной в пространстве $e_2(g, \Gamma)$.

Отсюда и из теоремы 1 вытекает

Предложение 1. Мультиполи $\Omega_p(z)$ составляют полную и минимальную систему на дуге Γ в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Тогда решение задачи (1.4)–(1.7) будем искать в виде предела при $K \rightarrow \infty$ последовательности $\{\psi^K\}_K$ приближенных решений

$$\psi(z) = \lim_{K \rightarrow \infty} \psi^K(z), \quad \psi^K(z) := \sum_{p=0}^K a_p^K \Omega_p(z), \quad (2.6)$$

которые, в силу свойств (2.5) мультиполей, удовлетворяют первым трем условиям (1.4)–(1.6) постановки задачи (1.4)–(1.7) при любых коэффициентах a_p^K . А эти коэффициенты будем находить — в соответствии с предложением 1 — из требования минимума отклонения приближенного решения $\psi^K(z)$ от точного $\psi(z)$ на дуге Γ в норме $L_2(\Gamma)$,

$$\|\psi^K - \psi\|_{L_2(\Gamma)} = \min, \quad (2.7)$$

порожденной скалярным произведением

$$(a, b) := \int_{\Gamma} a(z') b(z') ds,$$

где ds обозначает дифференциал длины дуги.

Требование (2.7) (будучи условием минимума квадратичной функции) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_p^K . Эта система имеет вид

$$\sum_{q=0}^K c_{pq} a_q^K = h_p, \quad p = 1, \dots, K, \quad (2.8)$$

где

$$c_{pq} = (\Omega_p, \Omega_q) = \int_{\Gamma} \Omega_p(z') \Omega_q(z') ds, \quad h_p = (h, \Omega_p) = \int_{\Gamma} h(z') \Omega_p(z') ds. \quad (2.9)$$

Сходимость описанного метода устанавливает следующая

Теорема 5. Справедливы утверждения:

1) последовательность приближенных решений $\psi^K(z')$ сходится к граничной функции $h(z')$ по норме $L_2(\Gamma)$, т.е.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \|\psi^K - h\|_{L_2(\Gamma)} = 0;$$

2) последовательность $\{\psi^K(z)\}_K$ сходится к решению $\psi(z)$ равномерно на любом компакте $\mathcal{E} \subset (g \cup \gamma)$, т.е.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \max_{z \in \mathcal{E}} |\psi(z) - \psi^K(z)| = 0; \quad (2.10)$$

3) последовательность $\{\text{grad } \psi^K(z)\}_K$ сходится к $\text{grad } \psi(z)$ равномерно на любом компакте $\tilde{\mathcal{E}} \subset (g \cup \tilde{\gamma})$, где $\tilde{\gamma}$ — дуга γ с исключенными точками ее неаналитичности и точками A и B смены типа граничных условий:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \max_{z \in \tilde{\mathcal{E}}} |\text{grad } \psi(z) - \text{grad } \psi^K(z)| = 0. \quad (2.11)$$

Поскольку погрешность $\psi(z) - \psi^N(z)$, очевидно, принадлежит $e_2(g, \Gamma)$, то из неравенств (1.14), (1.15) вытекают следующие оценки в норме $C(\mathcal{E})$ для погрешности решения и его градиента через $L_2(\Gamma)$ — норму погрешности $h(z') - \psi^N(z')$ на Γ :

$$\max_{z \in \mathcal{E}} |\psi(z) - \psi^K(z)| \leq \frac{1}{\pi \delta} \left\| \frac{1}{\omega'} \right\|_{L_1(\mathbb{T}^+)}^{1/2} \|h(z') - \psi^K(z')\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (2.12)$$

где $\mathcal{E}$ — компакт в $g \cup \text{int } \gamma$, и

$$\max_{z \in \mathcal{E}} |\text{grad } \psi(z) - \text{grad } \psi^K(z)| \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \max_{z \in \mathcal{E}} |\omega^{-1'}(z)| \left\| \frac{1}{\omega'} \right\|_{L_1(\mathbb{T}^+)}^{1/2} \|h(z') - \psi^K(z')\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (2.13)$$

где компакт $\tilde{\mathcal{E}}$ определен в теореме 5. Заметим, что оценка типа (2.13) и равенство типа (2.11) могут быть сформулированы и для производных любого порядка.

Если функция $h(z')$ в граничном условии (1.7) непрерывна, то точное $\psi(z)$ и приближенное $\psi^K(z)$ решения задачи (1.4)–(1.7) являются гармоническими в g и непрерывными в $\bar{g}$, а значит, такой же является и их разность, и к ней применим принцип максимума. Отсюда получаем апостериорную оценку погрешности приближенного решения в норме $C(\bar{g})$:

$$\max_{z \in \bar{g}} |\psi(z) - \psi^K(z)| \leq \max_{z' \in \Gamma} |h(z') - \psi^K(z')|; \quad (2.14)$$

очевидно, что правая часть этого неравенства легко вычисляется после нахождения приближенного решения.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЕЙ К ПОСТРОЕНИЮ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

3.1. Задача о конформном отображении произвольной области $g \in (\gamma, \Gamma)$ на прямоугольник $\mathfrak{R}$

В качестве приложения метода мультиполей рассмотрим задачу о построении конформного отображения $\mathcal{P}: g \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ области $g \in (\gamma, \Gamma)$ на прямоугольник $\mathfrak{R}$, определенный в (1.1), со следующим соответствием граничных точек:

$$\mathcal{P}(A) = iL, \quad \mathcal{P}(B) = 0, \quad \mathcal{P}(C) = 1, \quad \mathcal{P}(D) = 1 + iL, \quad (3.1)$$

см. фиг. 1а, в. При заданной области g условия (3.1), как можно убедиться, однозначно определяют отображение $\mathcal{P}$ и высоту L прямоугольника $\mathfrak{R}$.

Из условий (3.1) с учетом введенных в п. 1.2 обозначений следует, что отображение $\mathcal{P}(z) = u(z) + iv(z)$ осуществляет следующее соответствие (см. также фиг. 1а) между дугами, составляющими границу ∂g , и сторонами прямоугольника $\mathfrak{R}$:

$$\mathcal{P}(\gamma_1) = [1 + iL, iL], \quad \mathcal{P}(\gamma_2) = [iL, 0], \quad \mathcal{P}(\gamma_3) = [0, 1], \quad \mathcal{P}(\Gamma) = [1, 1 + iL]. \quad (3.2)$$

Это соответствие означает, что функции $u(z)$ и $v(z)$ принимают на указанных дугах следующие значения:

$$u(z) = 0, \quad z \in \gamma_2; \quad u(z) = 1, \quad z \in \Gamma; \quad v(z) = 0, \quad z \in \gamma_3; \quad v(z) = L, \quad z \in \gamma_1. \quad (3.3)$$

Поскольку, согласно (3.3), функция $v(z)$ принимает на γ_1 и γ_3 постоянные значения, то из условий Коши — Римана вытекает, что на этих дугах обращается в ноль нормальная производная функции $u(z)$. Таким образом, для $u(z)$ имеем следующую смешанную краевую задачу:

$$\Delta u = 0, \quad z \in g; \quad u = 0, \quad z \in \gamma_2; \quad u = 1, \quad z \in \Gamma; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_3. \quad (3.4)$$

Эта постановка представляет собой частный случай задачи (1.4)–(1.7) с граничной функцией $h(z) = 1$. Применяя к этой задаче метод мультиполей, используя представление (2.6) и комплексифицируя его, получаем, что искомое отображение может быть найдено в виде

$$\mathcal{P}(z) = \lim_{K \rightarrow \infty} \mathcal{P}^K(z), \quad \mathcal{P}^K(z) := a_0^K \pi^{-1} \ln \mathcal{F}(z) + \sum_{p=1}^K a_p^K \left\{ [\mathcal{F}(z)]^p - [\mathcal{F}(z)]^{-p} \right\}. \quad (3.5)$$

Здесь вещественные коэффициенты a_p^K находятся из системы (2.8). При этом оказывается найденным и приближенное значение L^K ширины прямоугольника $\mathfrak{R}$:

$$L^K = \text{Im } \mathcal{P}^K(A) = a_0^K;$$

оно совпадает с нулевым коэффициентом разложения (3.5).

3.2. Построение конформного отображения серпообразной области

Конкретное применение метода мультиполей проведем на примере построения конформного отображения области g , изображенной на фиг. 2а, ограниченной контуром $\partial g = (z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5)$, состоящим из дуги окружности $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ радиуса R , соединяющейся в точках z_1 и z_4 с отрезками $[z_0, z_1]$ и $[z_4, z_5]$ мнимой оси под углами $\pi(\alpha + 1)$, и кусочно—гладкой дуги $(z_5 z_0)$, лежащей в правой полуплоскости $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. Форма области g определяется указанными на фиг. 2а параметрами $R > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$, а также конфигурацией дуги $(z_5 z_0)$.

Построим конформное отображение $\mathfrak{P}: g \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ области g на прямоугольник $\mathfrak{R}$, изображенный на фиг. 2б. Переобозначив точки z_2, z_3, z_5, z_0 соответственно через A, B, C, D , примем для этого отображения условия нормировки, аналогичные условиям (3.1), т.е.

$$\mathfrak{P}(A) = iL, \quad \mathfrak{P}(B) = 0, \quad \mathfrak{P}(C) = 1, \quad \mathfrak{P}(D) = 1 + iL, \quad (3.6)$$

а приняв в качестве граничных дуг $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и Γ соответственно дуги $(z_0 z_1 z_2)$, $(z_2 z_3)$, $(z_3 z_4 z_5)$ и $(z_5 z_0)$ границы ∂g , приходим в соответствии с п. 3.1 к краевой задаче (3.4) относительно вещественной части рассматриваемого конформного отображения, т.е. относительно гармонической функции $u(z) = \operatorname{Re} \mathfrak{P}(z)$.

Для построения необходимых для решения задачи (3.6) мультиполей $\Omega_p(z)$, соответствующих условиям задачи, выберем в качестве расширения $\mathfrak{G}$ исходной области g область, изображенную на фиг. 2в, получаемую "отбрасыванием" граничной кривой Γ области g и присоединением к этой области всей правой полуплоскости.

Тогда требуемое для построения мультиполей в нашем случае конформное отображение $\mathfrak{F}: \mathfrak{G} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{K}$ исходной области g на каноническую $\mathbb{K}$ (фиг. 2г), определяемую формулой (2.2), и подчиненное нормировке

$$\mathfrak{F}(A) = -1, \quad \mathfrak{F}(B) = 1, \quad \mathfrak{F}(M) = \infty, \quad (3.7)$$

аналогичной условиям (2.3) для общего случая, дается выражением

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(z) = & \left\{ [(z_2 - z_4)^\beta - (z_2 - z_1)^\beta]^{\frac{1}{2}} [(z_3 - z_1)^\beta (z - z_4)^\beta - (z_3 - z_4)^\beta (z - z_1)^\beta]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ & + [(z_3 - z_4)^\beta - (z_3 - z_1)^\beta]^{\frac{1}{2}} [(z_2 - z_1)^\beta (z - z_4)^\beta - (z_2 - z_4)^\beta (z - z_1)^\beta]^{\frac{1}{2}} \Big\}^2 \times \\ & \times [(z - z_4)^\beta - (z - z_1)^\beta]^{-1} [(z_2 - z_1)^\beta (z_3 - z_4)^\beta - (z_2 - z_4)^\beta (z_3 - z_1)^\beta]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\beta = 1/(1 + \alpha)$.

В соответствии с определением для общего случая, система мультиполей $\{\Omega_p\}_{p=0}^\infty$ в нашем случае определяется через отображение $\mathfrak{F}$ по формулам

$$\Omega_0(z) = \pi^{-1} \operatorname{Re} \ln \mathfrak{F}(z), \quad \Omega_p(z) := \operatorname{Re} \left\{ [\mathfrak{F}(z)]^p - [\mathfrak{F}(z)]^{-p} \right\}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Тогда, следуя изложению п. 3.1, получаем искомое конформное отображение $\mathfrak{P}: g \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ в виде

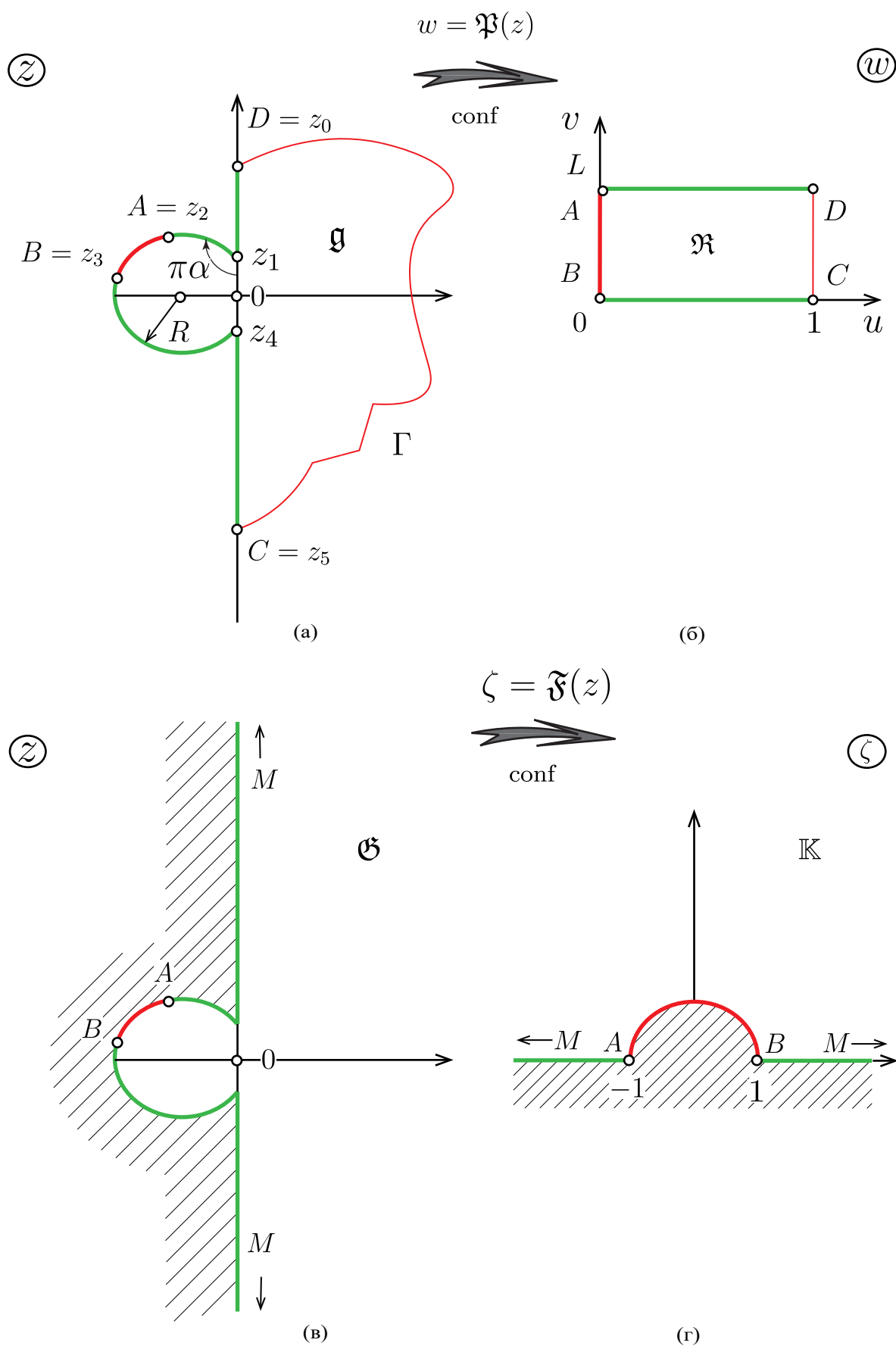
$$\mathfrak{P}(z) = \lim_{K \rightarrow \infty} \mathfrak{P}^K(z), \quad \mathfrak{P}^K(z) := a_0^K \pi^{-1} \ln \mathfrak{F}(z) + \sum_{p=1}^K a_p^K \left\{ [\mathfrak{F}(z)]^p - [\mathfrak{F}(z)]^{-p} \right\}, \quad (3.10)$$

где коэффициенты a_p^K получаются путем решения системы (2.8), (2.9) с функциями $\Omega_p(z)$, определенными по формулам (3.9).

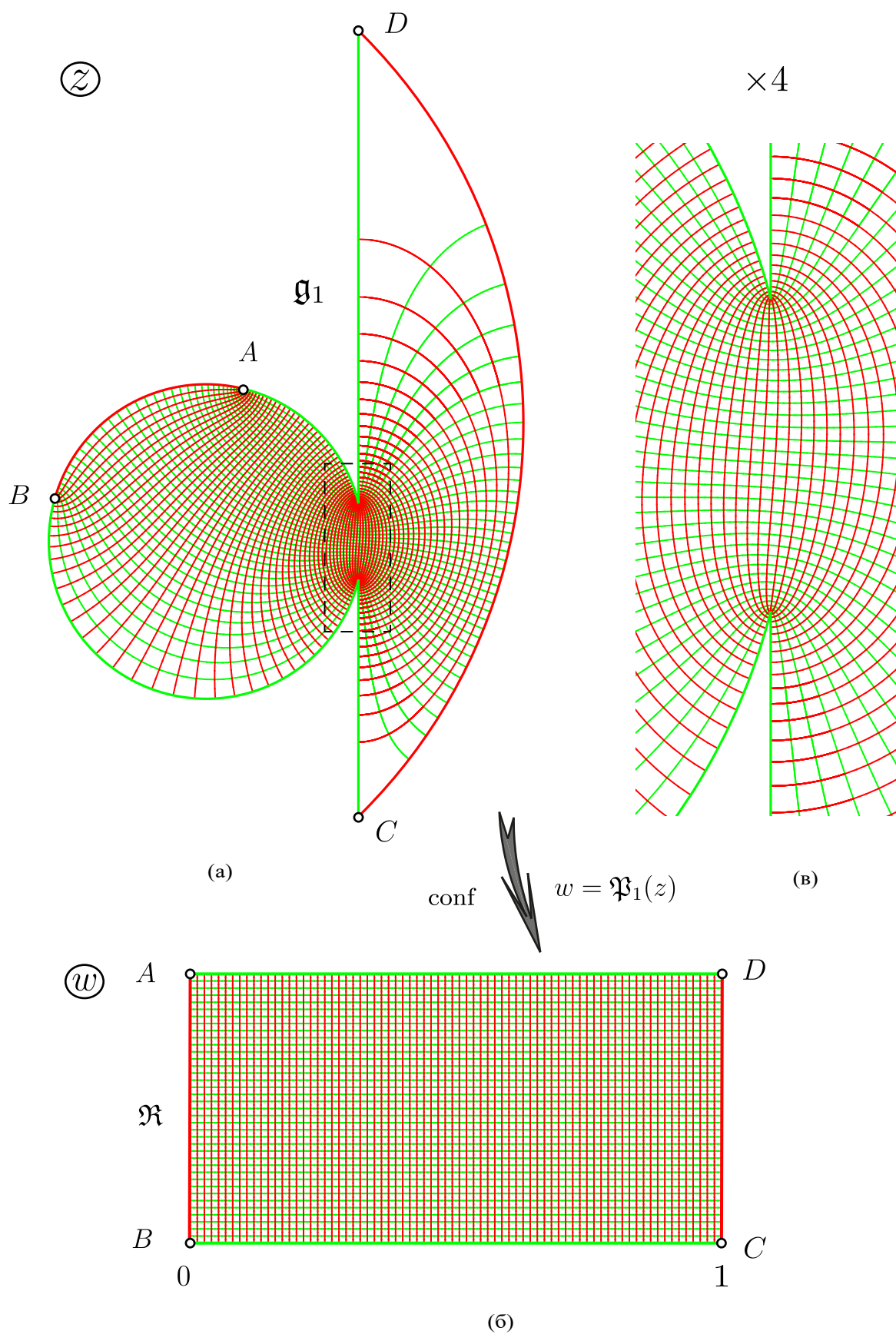
Численная реализация изложенного алгоритма построения конформного отображения $\mathfrak{P}: g \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ была выполнена для двух конкретных примеров области g .

На фиг. 3а изображен первый пример такой области, обозначенной через g_1 , представляющей собой серпообразную фигуру, для которой строилось конформное отображение $\mathfrak{P}_1: g_1 \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ на прямоугольник, представленный на фиг. 3б. Там же представлена конформная сетка в области g_1 и ее прообраз — декартова сетка в прямоугольнике $\mathfrak{R}$. На фиг. 3в дана увеличенная в 4 раза сетка в выделенном прямоугольнике серпообразной области g_1 . Вычисленная для этого решения апостериорная оценка погрешности в норме $C(\bar{g}_1)$ составила 10^{-7} при использовании 101-й аппроксимативной функции Ω_p .

На фиг. 4а изображен второй пример области, обозначенной через g_2 , также представляющей собой серпообразную фигуру с пилообразным лезвием, для которой также строилось конформное отображение

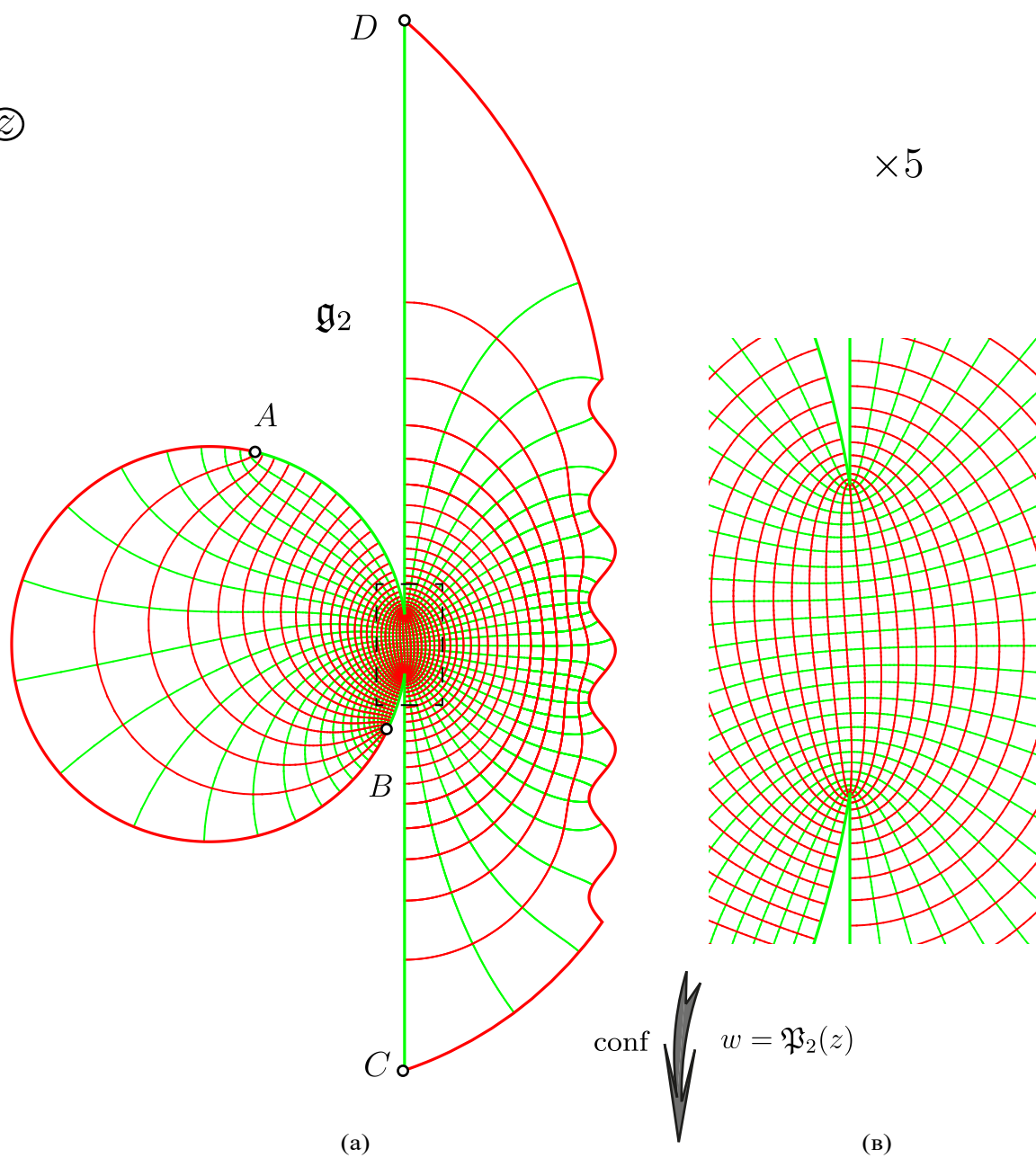


Фиг. 2.

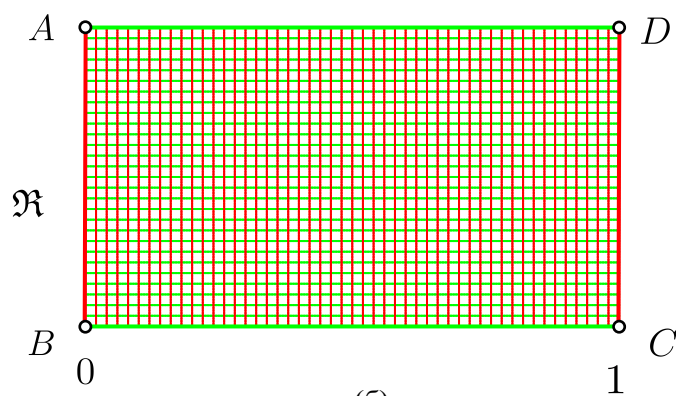


Фиг. 3.

⓪



⓪



Фиг. 4.

$\mathfrak{F}_2 : \mathfrak{g}_2 \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{K}$ на прямоугольник, представленный на фиг. 4б. Там же представлена конформная сетка в области $\mathfrak{g}_2$ и ее прообраз — декартова сетка в прямоугольнике $\mathfrak{K}$. На фиг. 4в дана увеличенная в 5 раз сетка в выделенном прямоугольнике серпообразной области $\mathfrak{g}_2$. Вычисленная для этого решения апостериорная оценка погрешности в норме $C(\bar{\mathfrak{g}}_2)$ составила 10^{-4} при использовании 251-й аппроксимативной функции Ω_p .

Авторы выражают благодарность С.И. Безродных и С.Л. Скороходову за ценные консультации и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В.И. Об одном методе решения некоторых плоских смешанных задач для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 5. С. 1012–1015.
2. Власов В.И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1987.
3. Власов В.И., Волков Д.Б., Рачков А.В. Численно-аналитический метод решения уравнения Пуассона в сложных областях // Сообщения по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
4. Власов В.И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
5. Власов В.И., Рачков А.В. Некоторые обобщения метода мультиполей // Сообщения по прикл. матем. М.: ВЦ РАН, 1994.
6. Власов В.И., Волков Д.Б. Метод мультиполей для решения уравнения Пуассона в областях со скругленным углом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 6. С. 867–892.
7. Vlasov V.I. Multipole method for solving some boundary value problems in complex-shaped domains // Z. Angew. Math. und Mech. 1996. V. 76. Suppl. 1. P. 279–282.
8. Власов В.И., Пальцев А.Б. О применении метода мультиполей к расчету электрического поля в лазере специальной конструкции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1221–1236.
9. Власов В.И., Пальцев А.Б. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях с узкой щелью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1786–1805.
10. Власов В.И. Метод решения краевых задач для уравнения Лапласа в областях с конусами // Докл. АН. 2004. Т. 397. № 5. С. 586–589.
11. Skorokhodov S.L., Vlasov V.I. The multipole method for certain elliptic equations with discontinuous coefficient // Belgorod State Univ. Sci. bull. Math. and Phys. 2009. № 14 (69). Issue 15. P. 89–100.
12. Безродных С.И., Власов В.И. Применение метода мультиполей к прямым и обратным задачам для уравнения Грэда–Шафранова с нелокальным условием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 619–685.
13. Безродных С.И., Власов В.И. Исследование дефектов и построение гармонических сеток в областях с углами и выемками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 12. С. 2096–2129.
14. Власов В.И. О решении задачи Дирихле посредством разложения в ряд Фурье // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 1. С. 19–22.
15. Vlasov V.I. Hardy spaces, approximation issues and boundary value problems // Eurasian Math. J. 2018. V. 9. № 3. P. 85–94.
16. Riesz F. Über die Randwerte einer analytischen Function // Math. Zeitschr. 1923. B. 18. S. 87–95.
17. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
18. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.

THE MULTIPOLE METHOD FOR SOME MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND ITS APPLICATION TO THE CONSTRUCTION OF A CONFORMAL MAPPING

A. O. Bagapsh*, V. I. Vlasov**

119991 Moscow, Vavilov str., 44, FRC CSC RAS

**e-mail: a.bagapsh@gmail.com*

***e-mail: vlasov@ccas.ru*

Received: 16.07.2024

Revised: 16.07.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. An analytical and numerical multipole method for solving some mixed boundary value problems for the Laplace equation in planar simply connected domains G of complex shape with application to the construction of conformal mapping of such domains is presented. The method allows obtaining both the solution itself and its gradient with high accuracy up to complex boundary sections near singularities, and also provides a posteriori estimate of the relative error δ in the norm $C(\bar{G})$. The effectiveness of the method was confirmed by examples of numerical implementation of the method for constructing a conformal mapping of regions with a curved boundary containing reentrant arc angles and narrow isthmuses. At the same time, the error of δ was, according to the a posteriori estimate, a value no worse than only about 10^2 approximative functions.

Keywords: flat areas of complex shape, mixed boundary value problem, multipole method, conformal mapping, reentrant angles, a posteriori error estimation.

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГОРОВА–ПЕТРОВСКОГО–ПISКУНОВА

© 2024 г. С. И. Безродных^{1,**}, С. В. Пикулин^{1,*}

¹ 119333 Москва, ГСП–1, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: spikulin@gmail.com

**e-mail: sbezrodnykh@mail.ru

Поступила в редакцию 15.05.2024 г.

Переработанный вариант 13.06.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Рассматривается вопрос об эффективном решении основных начально-краевых задач для пространственно одномерных нелинейных уравнений параболического типа, описывающих реакционно-диффузионные процессы. К таким уравнениям относятся уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова и Бюргерса. Для этих задач в работе предложен численно-аналитический метод, основанный на неявной дискретизации дифференциального оператора в сочетании с явной экстраполяцией Адамса–Бэшфорта для нелинейного члена уравнения. При этом для решения последовательности возникающих линейных задач разработан новый эффективный алгоритм, опирающийся на аналитические представления с использованием явного вида фундаментальной системы решений. Эффективность разработанного метода и его преимущества по сравнению с некоторыми традиционными алгоритмами продемонстрирована для ряда сложных модельных примеров. Библ. 70. Фиг. 13.

Ключевые слова: нелинейные параболические уравнения типа реакция–диффузия–адвекция, уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова, уравнение Бюргерса, сингулярное возмущение, эффективные численно-аналитические методы.

DOI: 10.31857/S0044466924110027, EDN: KGZLTS

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе предложен численно-аналитический метод решения нелинейных параболических задач для уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (1.1)$$

позволяющий эффективно находить решения достаточно широкого класса задач для таких уравнений. Отметим, что к виду (1.1) относятся, в том числе, уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова (см. [1]–[3])

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(u(x)) \quad (1.2)$$

и уравнение Бюргерса (см. [4], [5])

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.3)$$

Вычислительные методы решения нелинейных уравнений, как правило, опираются на сведение к последовательности линейных задач (см., например, [6]–[8]). Поэтому разработка соответствующих численных процедур должна включать подходящий для рассматриваемой задачи алгоритм аппроксимации нелинейного дифференциального оператора, а также, что весьма важно, эффективный метод решения получаемых линейных задач.

В настоящей работе применяется сочетание явной схемы для аппроксимации нелинейного члена $F(x, u, \partial_x u)$ уравнения (1.1) и неявной схемы приближения производных; здесь $\partial_x u$ и $\partial_{xx}^2 u$ означают частные

производные по координате x . Новизна предлагаемого численного алгоритма для уравнения (1.1) заключается в разработанном методе решения возникающих линейных задач. Такие задачи в настоящей работе решаются в два этапа. На первом из них строятся частные решения линейного уравнения отдельно на каждом из промежутков дискретизации по пространственной переменной. На втором этапе с их помощью строится решение неоднородной краевой задачи на всем отрезке интегрирования. Указанная процедура использует явный вид фундаментальной системы решений соответствующего линейного уравнения и имеет алгоритмическую сложность $O(N)$, где N — число отрезков пространственной дискретизации. Данный алгоритм описан в разд. 2. Аналогичный вычислительный алгоритм был предложен авторами ранее (см. [9]) для решения периодической начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса (1.3). Отметим также, что близкий подход использовался в работе [10] при решении сингулярно возмущенной краевой задачи, возникающей в теории полупроводниковых приборов (см. [11]).

Предложенный метод для уравнения (1.1) протестирован на задачах для уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова (1.2), точнее, для его частного случая при

$$F(u) = u(1 - u^\alpha), \quad \alpha > 0, \quad (1.4)$$

который называют обобщенным уравнением Фишера (см., например, [12, 13]), а также для уравнения Бюргерса (1.3), см. разд. 3. Проведенные вычислительные эксперименты продемонстрировали ряд преимуществ предложенного метода по сравнению с распространенными разностными методами. Подчеркнем, что применение разработанного в разд. 2 алгоритма решения линейных задач не ограничивается только рассмотренными конкретными примерами модельных задач для уравнений (1.2), (1.3). Можно ожидать, что алгоритм будет демонстрировать эффективность для линейных задач, возникающих при итерационном решении широкого круга нелинейных уравнений.

Уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова (1.2) и Бюргерса (1.3) выбраны в качестве примеров в связи с их прикладной значимостью, а также с тем, что они весьма популярны при тестировании различных вычислительных алгоритмов (см. далее разд. 1.1).

Предложенный метод для уравнения (1.1) сохраняет эффективность и в тех случаях, когда соответствующая начально-краевая задача является сингулярно возмущенной. Отметим, что разработке численных методов для решения сингулярно возмущенных задач посвящены работы многих известных специалистов (см. [14]–[17]), и это направление по-прежнему сохраняет актуальность (см. [10], [18], [19]).

1.1. Уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова и Бюргерса

Уравнение (1.2) было введено в работе [1] в связи с задачей о динамике распространения доминантного гена в пространственно распределенной популяции. Естественным предположением при этом является то, что искомая функция $u(x, t)$ принимает значения между нулем и единицей, а нелинейная функция $F(u)$ в правой части уравнения (1.2) удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F(u) > 0, \quad u \in (0, 1), \quad f_0 := F'_u(0) > 0. \quad (1.5)$$

При $F(u) = u(1 - u)$ уравнение (1.2) было рассмотрено и в работе [2] в связи с той же проблематикой, что и в [1]. Отметим, что в этом случае правая часть рассматриваемого уравнения имеет вид (1.4) при $\alpha = 1$.

Если выполнены условия (1.5), то, как известно, см. [1], уравнение (1.2) обладает семейством автомодельных решений типа бегущей волны

$$u(x, t) = \zeta(\eta(x, t)), \quad \eta(x, t) := x - \omega t, \quad \omega = \text{const} \geq \omega_0 := 2\sqrt{\lambda f_0}, \quad (1.6)$$

где параметр ω задает скорость ее распространения, а функция $\zeta(\eta)$ автомодельной переменной $\eta \in \mathbb{R}$ определяет форму профиля. Отметим, что семейство (1.6) содержит единственное устойчивое к возмущениям начальных данных решение, отвечающее минимальному значению параметра скорости $\omega = \omega_0$.

Уравнения и системы уравнений типа (1.2) нашли применение при изучении широкого класса автоволновых процессов в активных средах, в том числе, в моделях теории горения и взрыва (см. [3], [20], [21]), теории атомных реакторов (см. [22]), математической биологии (см. [23]–[25]), нейрофизиологии (см. [26]–[29]), кардиологии (см. [30]–[33]), химической кинетики (см. [34, 35]), теории тепломассопереноса (см. [36, 37]), материаловедения (см. [38]). Исследованию начально-краевых задач для уравнений типа (1.2) и разработке методов их решения, в том числе, построению автомодельных решений, посвящены многочисленные работы (см., например, монографии [3, 21, 35, 39] и статьи [13], [40]–[57]).

Уравнение Бюргерса (1.3) в гидродинамике служит модельным уравнением при изучении турбулентности и ударных волн (см. [7], [58], [59]), а также является основой для моделирования нелинейных акустических волн

(см. [60], [61]) и радиоволн (см. [62]). Замечательным свойством уравнения (1.3) служит то, что при помощи так называемой подстановки Коула–Хопфа (см. [5], [58], [63]) оно приводится к линейному уравнению теплопроводности, что, в том числе, позволяет получить большой запас решений в явном аналитическом виде для тестирования различных численных методов. В частности, в работе [9] построено периодическое по пространственной переменной явное решение уравнения (1.3), которое используется в разд. 3.2 настоящей статьи для иллюстрации разработанного численно-аналитического метода.

1.2. Постановка задачи

Будем рассматривать начально-краевые задачи в прямоугольнике $[0, L] \times [0, T]$ для квазилинейного параболического уравнения, заданного нелинейным оператором $\Xi[u](x, t)$, следующего вида:

$$\begin{aligned} \Xi[u](x, t) &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, & \lambda > 0, & \quad \sigma \in \mathbb{R}, \\ x \in [0, L], & \quad t \in [0, T], & L, T > 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $F(x, u, w)$ — некоторая заданная непрерывная функция. Для искомой функции $u(x, t)$ предполагается выполнение начального условия

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (1.8)$$

и одного из следующих трех граничных условий:

(i) условия Дирихле

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad u(L, t) = \varphi_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (1.9)$$

(ii) смешанные краевые условия

$$u(0, t) = \varphi_0(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \psi_1(t), \quad t \in (0, T), \quad (1.10)$$

(iii) условия периодичности

$$u(0, t) = u(L, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t), \quad t \in (0, T). \quad (1.11)$$

В дальнейшем, рассматривая начально-краевые задачи (1.7)–(1.11), будем считать, что при заданной функции $F(x, u, w)$, начальном условии (1.8) и одном из условий (1.9)–(1.11) решение этой задачи существует и единственно.

1.3. Общая схема вычислительного алгоритма

Численное решение нелинейной эволюционной задачи (1.7), (1.8) с краевыми условиями одного из типов (1.9)–(1.11) проведем на основе известной [42] трехслойной схемы приближения оператора Ξ , стоящего в левой части уравнения (1.7). Данная схема относится к классу явно- неявных схем аппроксимации (см. [42], [43], [64]), т.е. часть членов уравнения приближаются по явной схеме, а другая часть — по неявной. Рассмотрим эту схему подробнее.

Зададим равномерную дискретизацию временного отрезка $[0, T]$ с шагом $\tau = T/K$, $K \in \mathbb{N}$ и введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u_n(x) &\approx u(t_n, x), & x \in [0, L], & \quad t_n = n\tau, & \quad n = 0, \dots, K, \\ F_n(x) &:= F\left(x, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}\right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где $u_n(x)$ — искомое приближенное решение задачи (1.7)–(1.11) в момент времени $t = t_n$, причем функция $u_0(x)$ задана начальным условием (1.8). Будем вычислять приближения $u_n(x)$ последовательно при $n = 1, \dots, K$. Для получения функции $u_1(x)$ из $u_0(x)$ можно воспользоваться любой двухслойной вычислительной схемой, например, явно-неявной схемой на основе приближения Кранка–Николсон (см. [6], [7], [65]). В настоящей работе при сопоставлении численных результатов с явным решением в разд. 3 функция $u_1(x)$ и ее производные по x задаются в качестве известных величин наряду с начальными данными (1.8).

Предполагая, что приближенные значения $u(x, t)$ известны на первых n слоях, т. е. заданы функции

$$u_0(x), \quad u_1(x), \quad \dots, \quad u_n(x),$$

найдем приближение $u_{n+1}(x)$ на $(n+1)$ -м слое. Для этого будем использовать следующую аппроксимацию нелинейного дифференциального оператора $\Xi[u]$ уравнения (1.7), центрированную в точке $t = (t_n + \tau/2)$:

$$\begin{aligned} \Xi[u] &= \frac{\partial u}{\partial t} + \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \approx \\ &\approx \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau} + \frac{9}{16} \left(\sigma \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial x^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\sigma \frac{\partial u_n}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right) + \\ &+ \frac{1}{16} \left(\sigma \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2} \right) - \frac{3}{2} F_n(x) + \frac{1}{2} F_{n-1}(x). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Применяя к приближенному равенству (1.13) обозначение

$$\Omega[u](x, t) := \sigma \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.14)$$

и приравняв правую часть (1.13) к нулю, получаем следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $u_{n+1}(x)$:

$$\frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau} + \frac{9}{16} \Omega[u_{n+1}](x) + \frac{3}{8} \Omega[u_n](x) + \frac{1}{16} \Omega[u_{n-1}](x) - \frac{3}{2} F_n(x) + \frac{1}{2} F_{n-1}(x) = 0. \quad (1.15)$$

Аппроксимация (1.13) получается следующим образом. Приближим частную производную по t в левой части уравнения (1.7) соответствующей разностной производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau}. \quad (1.16)$$

Следуя работе [42], аппроксимируем линейные слагаемые в левой части уравнения (1.7), содержащие производные по пространственной переменной, по неявной модифицированной схеме Кранка–Николсон (см. [65], [66], [42]):

$$\Omega[u](x, t) \approx \frac{9}{16} \Omega[u_{n+1}](x) + \frac{3}{8} \Omega[u_n](x) + \frac{1}{16} \Omega[u_{n-1}](x), \quad (1.17)$$

а для нелинейного члена применим явную экстраполяцию Адамса–Бэшфорта (см. [7], [8], [67], [68]):

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \approx \frac{3}{2} F\left(x, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) - \frac{1}{2} F\left(x, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right) \equiv \frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x). \quad (1.18)$$

Подставляя приближения (1.16)–(1.18) в определение (1.7) оператора $\Xi[u]$, с учетом введенных обозначений (1.12), (1.14) получаем аппроксимацию (1.13) и уравнение (1.15).

Преобразуем уравнение (1.15) так, чтобы выделить в нем искомую функцию $u_{n+1}(x)$. Умножая обе части уравнения (1.15) на τ , запишем его в виде

$$\frac{9}{16} \tau \Omega[u_{n+1}](x) + u_{n+1}(x) = g_{n+1}(x), \quad (1.19)$$

где

$$g_{n+1}(x) = u_n(x) - \frac{3}{8} \tau \Omega[u_n](x) - \frac{1}{16} \tau \Omega[u_{n-1}](x) + \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right). \quad (1.20)$$

Используя уравнения вида (1.19), отвечающие индексам n , $n-1$, перепишем выражение (1.20) следующим образом:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= u_n(x) + \frac{2}{3} (u_n(x) - g_n(x)) + \frac{1}{9} (u_{n-1}(x) - g_{n-1}(x)) + \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right) = \\ &= \frac{5}{3} u_n(x) + \frac{1}{9} u_{n-1}(x) - \frac{2}{3} g_n(x) - \frac{1}{9} g_{n-1}(x) + \tau \left(\frac{3}{2} F_n(x) - \frac{1}{2} F_{n-1}(x) \right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Отметим, что правая часть (1.20) уравнения (1.19), зависит только от известных функций, уже вычисленных на предыдущих шагах алгоритма. Кроме того, форма (1.21) представления $g_{n+1}(x)$ исключает явную зависимость этой правой части от вторых производных функций $u_j(x)$, $j = 0, \dots, n-1$, хотя их первые производные могут входить в выражения (1.12) для нелинейных членов $F_n(x)$, $F_{n-1}(x)$.

Уравнение (1.19), (1.21) дополняется краевыми условиями одного из типов

(i')

$$u_{n+1}(0) = \varphi_0(t_{n+1}), \quad u_{n+1}(L) = \varphi_1(t_{n+1}), \quad (1.22)$$

(ii')

$$u_{n+1}(0) = \varphi_0(t_{n+1}), \quad \frac{du_{n+1}}{dx}(L) = \psi_1(t_{n+1}), \quad (1.23)$$

(iii')

$$u_{n+1}(0) = u_{n+1}(L), \quad \frac{du_{n+1}}{dx}(0) = \frac{du_{n+1}}{dx}(L) \quad (1.24)$$

в соответствии с условиями (1.9), (1.10) либо (1.11) исходной задачи.

Решая задачу (1.19), (1.21)–(1.24), получаем приближенное решение $u_{n+1}(x)$ на $(n+1)$ -м слое по времени и завершаем этим очередную итерацию алгоритма. Разд. 2 настоящей работы посвящен описанию нового численно-аналитического метода, позволяющего с высокой эффективностью и точностью получить решение указанной задачи (1.19), (1.21)–(1.24).

2. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Основу построения решения исходной нелинейной начально-краевой задачи (1.7), (1.8) с краевым условием одного из типов (1.9)–(1.11) составляет алгоритм решения задачи для уравнения (1.19), (1.21) с соответствующим краевым условием (1.22)–(1.24). Для того чтобы изложить этот алгоритм, переформулируем уравнение (1.19) в следующем более общем виде:

$$\mathcal{L}[y](x) \equiv k_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + k_1 \frac{dy}{dx} + k_0 y(x) = g(x), \quad k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad x \in [0, L], \quad (2.1)$$

$$k_2 < 0 < k_0, \quad (2.2)$$

где $g(x)$ — кусочно-непрерывная функция, заданная на отрезке $[0, L]$ и имеющая на нем только разрывы первого рода. Также краевые условия (1.22)–(1.24) запишем соответственно в виде

$$y(0) = \Phi_0, \quad y(L) = \Phi_1, \quad (2.3)$$

$$y(0) = \Phi_0, \quad \frac{dy}{dx}(L) = \Psi_1, \quad (2.4)$$

$$y(0) = y(L), \quad \frac{dy}{dx}(0) = \frac{dy}{dx}(L). \quad (2.5)$$

Решение $y(x)$ уравнения (2.1) с разрывной правой частью $g(x)$ ищется в классе $C^1[0, L]$ и понимается в смысле выполнения интегрального уравнения, эквивалентного (2.1) (см. [69]).

Условие (2.2) гарантирует, что корни характеристического уравнения $k_2 \varepsilon^2 + k_1 \varepsilon + k_0 = 0$, которые мы обозначим через μ и ρ , являются вещественными и имеют противоположные знаки:

$$\mu := \frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_0 k_2}}{2k_2} < 0 < \rho := \frac{k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_0 k_2}}{-2k_2}, \quad (2.6)$$

фундаментальная система вещественнозначных решений уравнения (2.1) может быть выбрана в виде пары экспонент

$$y_1(x) = e^{\mu x}, \quad y_2(x) = e^{\rho x}. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.1) с нулевой правой частью и однородными краевыми условиями любого из типов (2.3)–(2.5), т.е. при $g(x) \equiv 0$ и $\Phi_0 = \Phi_1 = 0$ либо $\Phi_0 = \Psi_1 = 0$, имеет только тождественно нулевое решение, поскольку

нетривиальная линейная комбинация функций (2.7) не может удовлетворять однородным краевым условиям. Из этого следует, что соответствующая краевая задача общего вида для уравнения (2.1) имеет единственное решение на отрезке $[0, L]$ при любых значениях параметров $L, \Phi_0, \Phi_1, \Psi_1$.

В разд. 2.1, 2.2 мы подробно рассмотрим алгоритм решения первой краевой задачи (2.1), (2.3). Смешанная краевая задача (2.1), (2.4) и периодическая задача (2.1), (2.5) рассматриваются аналогичным образом. В разд. 2.3, 2.4 мы, опуская подробные выкладки, приведем формулы, необходимые для получения решений этих задач. В разд. 2.5 описан ключевой этап построения решения линейной задачи — получение частных решений на отрезках разбиения промежутка $[0, L]$.

2.1. Представление решения первой краевой задачи

Рассмотрим пространственную сетку на отрезке $[0, L]$, вообще говоря, неравномерную, с узлами

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = L, \quad (2.8)$$

предполагая, что правая часть $g(x)$ уравнения (2.1) непрерывна на каждом из интервалов (ξ_{k-1}, ξ_k) , $k = 1, \dots, N$, и, возможно, имеет разрывы первого рода в узлах ξ_k разбиения (2.8).

Предположим также, что на каждом из отрезков $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ найдено частное решение $\tilde{y}_k(x)$ уравнения (2.1), т.е.

$$\mathcal{L}[\tilde{y}_k](x) = g(x), \quad x \in [x_{k-1}, x_k]. \quad (2.9)$$

Для того, чтобы построить решение задачи (2.1), (2.3), необходимо устранить разрывы первого рода кусочно гладкой класса C^1 функции

$$\tilde{y}(x) := \tilde{y}_k(x), \quad x \in (\xi_{k-1}, \xi_k), \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.10)$$

возникающие в узлах разбиения (2.8) и выражаемые разностями односторонних пределов функций $\tilde{y}_k(x)$ и их производных, для которых мы введем следующие обозначения:

$$p_k^{(m)} := \lim_{x \rightarrow \xi_k+} \frac{d^m \tilde{y}_{k+1}}{dx^m}(x) - \lim_{x \rightarrow \xi_k-} \frac{d^m \tilde{y}_k}{dx^m}(x), \quad k = 1, \dots, N-1, \quad m = 0, 1. \quad (2.11)$$

Положим также по определению

$$p_0^{(0)} := \tilde{y}_1(0) - \Phi_0, \quad p_N^{(0)} := \Phi_1 - \tilde{y}_N(L), \quad p_0^{(1)} = p_N^{(1)} = 0. \quad (2.12)$$

Следующее утверждение дает представление для функции $y(x)$ на отрезке $[0, L]$.

Теорема 1. Рассмотрим задачу (2.1), (2.3) с условием на коэффициенты (2.2), где правая часть уравнения $g(x)$ является кусочно непрерывной функцией. Предположим, что заданы частные решения уравнения (2.1) на отрезках $[\xi_{k-1}, \xi_k]$, $k = 1, \dots, N$, разбиения (2.8), в виде (2.10) как ограничения некоторой кусочно гладкой на отрезке $[0, L]$ функции $\tilde{y}(x)$, имеющей разрывы первого рода в узлах ξ_k , $k = 1, \dots, N-1$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Существует функция—строка

$$\mathbf{g}(x, \xi) \equiv (G_0(x, \xi), G_1(x, \xi)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \xi \in [0, L],$$

компоненты которой удовлетворяют условиям

$$\lim_{x \rightarrow 0-} G_m(x, \xi) = 0, \quad \xi \in [0, L], \quad m = 0, 1, \quad (2.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow L+} G_m(x, \xi) = 0, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{L}[G_m](x, \xi) = 0, \quad x \in (-\infty, \xi) \cup (\xi, +\infty), \quad (2.15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{d^l G_m}{dx^l}(x, \xi) - \lim_{x \rightarrow \xi-} \frac{d^l G_m}{dx^l}(x, \xi) = \begin{cases} -1, & l = m \\ 0, & l \neq m \end{cases}, \quad m, l = 0, 1. \quad (2.16)$$

2. Решение $y(x)$ задачи (2.1), (2.3) допускает представление

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \sum_{j=0}^N \sum_{m=0}^1 p_j^{(m)} G_m(x, \xi_j) \equiv \tilde{y}(x) + \sum_{j=0}^N \mathbf{g}(x, \xi_j) \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix}, \quad x \in [0, L], \quad (2.17)$$

где коэффициенты $p_j^{(m)}$, $j = 0, \dots, N$, $m = 0, 1$, заданы в виде (2.11), (2.12); знак $\times$ здесь и далее означает матричное умножение.

Доказательство. Построим функции $G_0(x, \xi)$, $G_1(x, \xi)$, удовлетворяющие условиям (2.15)–(2.16), следуя книге [70, гл. I, § 7]. Составим из функций фундаментальной системы решений (2.7) и их производных матрицу

$$\mathbf{D}(x) := \begin{pmatrix} e^{\mu x} & e^{\rho x} \\ \mu e^{\mu x} & \rho e^{\rho x} \end{pmatrix} = \mathbf{U} \times \text{diag}(e^{\mu x}, e^{\rho x}), \quad \mathbf{U} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mu & \rho \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

где diag означает диагональную матрицу с указанными элементами на главной диагонали.

Пользуясь тем, что определитель Вронского $|\mathbf{D}(x)|$ отличен от нуля, обратим матрицу (2.18) и запишем результат, заменяя независимую переменную x на ξ :

$$\mathbf{D}^{-1}(\xi) = \text{diag}(e^{-\mu \xi}, e^{-\rho \xi}) \times \mathbf{U}^{-1},$$

где

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{\rho - \mu} \begin{pmatrix} \rho & -1 \\ -\mu & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Тогда произведение

$$\mathbf{G}(x, \xi) := \mathbf{D}(x) \times \mathbf{D}^{-1}(\xi) = \mathbf{U} \times \text{diag}(e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \mathbf{U}^{-1} \quad (2.20)$$

обращается в единичную матрицу $\mathbf{I}$ при $x = \xi$, т. е.

$$\mathbf{G}(x, \xi) \Big|_{x=\xi} = \mathbf{I}, \quad x, \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Обозначим через $\mathbf{s}(x, \xi)$ верхнюю строку матрицы (2.20):

$$\mathbf{s}(x, \xi) \equiv (S_0(x, \xi), S_1(x, \xi)) = (e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \mathbf{U}^{-1}, \quad (2.22)$$

компоненты которой, т.е. функции

$$S_0(x, \xi) = \frac{\rho e^{\mu(x-\xi)} - \mu e^{\rho(x-\xi)}}{\rho - \mu}, \quad S_1(x, \xi) = \frac{e^{\rho(x-\xi)} - e^{\mu(x-\xi)}}{\rho - \mu}, \quad (2.23)$$

являются линейными комбинациями элементов системы (2.7) и, следовательно, решениями линейного уравнения, т. е.

$$\mathcal{L}[S_m](x, \xi) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1. \quad (2.24)$$

Введем в рассмотрение функцию-строку

$$\widehat{\mathbf{s}}(x, \xi) \equiv (\widehat{S}_0(x, \xi), \widehat{S}_1(x, \xi)) := \theta(\xi - x) \mathbf{s}(x, \xi) = \begin{cases} \mathbf{s}(x, \xi), & x \leq \xi, \\ (0, 0), & x > \xi, \end{cases} \quad (2.25)$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда. Из определения (2.25) вытекает, что функции $\widehat{S}_m(x, \xi)$, $m = 0, 1$, удовлетворяют однородному краевому условию

$$\widehat{S}_m(L, \xi) = 0, \quad \xi \in (0, L), \quad m = 0, 1, \quad (2.26)$$

а также, в силу (2.24), — линейному уравнению на каждом из промежутков, разделяемых точкой ξ :

$$\mathcal{L}[\widehat{S}_m](x, \xi) = 0, \quad x \in (-\infty, \xi) \cup (\xi, +\infty), \quad m = 0, 1. \quad (2.27)$$

По построению (2.18) матрицы $\mathbf{D}(x)$ и согласно определению (2.20) нижняя строка матрицы $\mathbf{G}(x, \xi)$ является производной по x ее верхней строки $\mathbf{s}(x, \xi)$. Из этого факта и из соотношения (2.21) следуют равенства

$$\lim_{x \rightarrow \xi+} \frac{d^l \widehat{S}_m}{dx^l} - \lim_{x \rightarrow \xi-} \frac{d^l \widehat{S}_m}{dx^l} = \begin{cases} -1, & l = m, \\ 0, & l \neq m, \end{cases} \quad m, l = 0, 1. \quad (2.28)$$

Свойства (2.26)–(2.28) отвечают требованиям (2.14)–(2.16) для компонент $G_0(x, \xi)$, $G_1(x, \xi)$ искомой функции–строки $\mathbf{g}(x, \xi)$. Для того чтобы обеспечить также выполнение краевых условий (2.13) при $x = 0$ и завершить построение строки $\mathbf{g}(x, \xi)$, рассмотрим функцию

$$h(x) := S_1(x, L), \quad (2.29)$$

обладающую свойствами $\mathcal{L}[h](x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, в силу (2.24), $h(L) = 0$ в силу (2.21) и $h(0) \neq 0$. Введем в рассмотрение функции

$$\mathbf{v}(x, \xi) := -\frac{1}{h(0)} h(x) \mathbf{s}(0, \xi), \quad \xi \in [0, L], \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{w}(x, \xi) := \mathbf{s}(x, \xi) + \mathbf{v}(x, \xi), \quad (2.31)$$

и, с учетом определения (2.25), положим

$$\mathbf{g}(x, \xi) \equiv (G_0(x, \xi), G_1(x, \xi)) := \widehat{\mathbf{s}}(x, \xi) + \mathbf{v}(x, \xi) = \begin{cases} \mathbf{w}(x, \xi), & x \leq \xi, \\ \mathbf{v}(x, \xi), & x > \xi. \end{cases} \quad (2.32)$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \mathbf{g}(x, \xi) = \mathbf{s}(0, \xi) - \frac{h(0)}{h(0)} \mathbf{s}(0, \xi) = (0, 0). \quad (2.33)$$

Из (2.33) и из (2.26)–(2.28) следует справедливость условий (2.13)–(2.16) для компонент $G_0(x, \xi)$, $G_1(x, \xi)$ функции–строки (2.32). Тем самым, искомая функция $\mathbf{g}(x, \xi)$ построена в виде (2.32), п. 1 теоремы 1 доказан.

Перейдем к обоснованию представления (2.17). Для этого обозначим через $Y(x)$ его правую часть, т.е.

$$Y(x) := \widetilde{y}(x) + \sum_{j=0}^N \mathbf{g}(x, \xi_j) \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix}, \quad x \in [0, L], \quad (2.34)$$

и докажем, что (2.34) является решением задачи (2.1), (2.3).

Сначала покажем, что функция $Y(x)$ принадлежит классу $C^1[0, L]$. Достаточно проверить ее гладкость в узлах разбиения (2.8).

Для удобства изложения запишем свойство (2.16) в следующем виде:

$$\lim_{x \rightarrow \xi_k+} \frac{d^l \mathbf{g}(x, \xi)}{dx^l} - \lim_{x \rightarrow \xi_k-} \frac{d^l \mathbf{g}(x, \xi)}{dx^l} = -(\delta_0^l, \delta_1^l), \quad \xi \in [0, L], \quad l = 0, 1, \quad (2.35)$$

где δ_m^l — символ Кронекера.

Зафиксируем индекс $k \in \{1, \dots, N-1\}$, значение $l \in \{0, 1\}$ и вычислим разность односторонних пределов $Y(x)$ в точке ξ_k , пользуясь гладкостью функций $\mathbf{g}(x, \xi_j)$ при $x = \xi_k$, $j \neq k$, определением (2.11) и равенством (2.35) при $x = \xi_k$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \xi_k+} \frac{d^l Y}{dx^l} - \lim_{x \rightarrow \xi_k-} \frac{d^l Y}{dx^l} &= \lim_{x \rightarrow \xi_k+} \frac{d^l \widetilde{y}_{k+1}}{dx^l} - \lim_{x \rightarrow \xi_k-} \frac{d^l \widetilde{y}_k}{dx^l} + \\ &+ \left[\lim_{x \rightarrow \xi_k+} \frac{d^l \mathbf{g}(x, \xi_k)}{dx^l} - \lim_{x \rightarrow \xi_k-} \frac{d^l \mathbf{g}(x, \xi_k)}{dx^l} \right] \times \begin{pmatrix} p_k^{(0)} \\ p_k^{(1)} \end{pmatrix} = p_k^{(l)} - p_k^{(l)} = 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Таким образом, функция $Y(x)$ и ее производная имеют устранимые точки разрыва в узлах ξ_k разбиения (2.8), $k = 1, \dots, N-1$.

Во внутренних точках промежутков (ξ_{k-1}, ξ_k) , $k = 1, \dots, N$, функция (2.34) принадлежит классу C^2 и, более того, удовлетворяет уравнению (2.1), поэтому из равенства (2.36) следует, что $Y(x)$ является решением уравнения (2.1) на отрезке $[0, L]$ в классе $C^1[0, L]$.

Проверим, что функция (2.34) удовлетворяет краевым условиям (2.3). В силу свойств (2.13) и (2.16) при $l = 0$ имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \mathbf{g}(x, 0) = (0, 0), \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \mathbf{g}(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \mathbf{g}(x, 0) - \lim_{x \rightarrow 0-} \mathbf{g}(x, 0) = (-1, 0),$$

откуда по определению (2.34), пользуясь условием (2.13) и непрерывностью при $x = 0$ функций $g(x, \xi_k)$, $k = 1, \dots, N$, находим

$$\lim_{x \rightarrow 0+} Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \tilde{y}_1(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} g(x, \xi_0) \times \begin{pmatrix} p_0^{(0)} \\ p_0^{(1)} \end{pmatrix} = \tilde{y}_1(0) - p_0^{(0)} = \tilde{y}_1(0) - (\tilde{y}_1(0) - \Phi_0) = \Phi_0,$$

таким образом, функция $Y(x)$ удовлетворяет первому из краевых условий (2.3), т. е. $Y(0) = \Phi_0$. Второе условие $Y(L) = \Phi_1$ проверяется аналогично. Следовательно, функция (2.34) является решением задачи (2.1), (2.3) и, в силу единственности такого решения, совпадает с $y(x)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Решение задачи (2.1), (2.3), удовлетворяющее однородным краевым условиям $\Phi_0 = \Phi_1 = 0$, допускает следующее интегральное представление в виде свертки правой части $g(x)$ уравнения (2.1) и соответствующей функции Грина $\mathcal{G}(x, \xi)$:

$$y(x) = \int_0^L \mathcal{G}(x, \xi) g(\xi) d\xi, \quad (2.37)$$

где $\mathcal{G}(x, \xi)$ отличается лишь умножением на числовую константу от функции $G_1(x, \xi)$ из теоремы 1, а именно,

$$\mathcal{G}(x, \xi) = -\frac{1}{k_2} G_1(x, \xi). \quad (2.38)$$

Замечание 2. Если правая часть $g(x)$ уравнения (2.1) является непрерывной функцией, то выражение в правой части формулы (2.17) принадлежит классу $C^2[0, L]$.

2.2. Коэффициенты представления для первой краевой задачи

Найдем в явном аналитическом виде разность $y(x) - \tilde{y}(x)$, представленную вторым слагаемым правой части представления (2.17). Для этого проведем вычисление функции—строки (2.32). Зафиксируем некоторое значение $\xi \in [0, L]$ и запишем функцию $h(x)$, определенную формулами (2.29) и (2.22), (2.19), следующим образом:

$$h(x) = \frac{1}{\rho - \mu} (e^{\mu(x-L)}, e^{\rho(x-L)}) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho - \mu} (e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \begin{pmatrix} -e^{\mu(\xi-L)} \\ e^{\rho(\xi-L)} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Подставляя $h(x)$ в виде (2.39) и $s(0, \xi)$ в виде (2.22) при $x = 0$ в формулу (2.32), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, \xi) &= -\frac{1}{h(0)} h(x) \mathbf{s}(0, \xi) = \\ &= -\frac{1}{(\rho - \mu) h(0)} (e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \begin{pmatrix} -e^{\mu(\xi-L)} \\ e^{\rho(\xi-L)} \end{pmatrix} \times (e^{-\mu\xi}, e^{-\rho\xi}) \times \mathbf{U}^{-1} = \\ &= (e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \mathbf{V}(\xi) \times \mathbf{U}^{-1}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где матрица

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\xi) &:= -\frac{1}{(\rho - \mu) h(0)} \begin{pmatrix} -e^{\mu(\xi-L)} \\ e^{\rho(\xi-L)} \end{pmatrix} \times (e^{-\mu\xi}, e^{-\rho\xi}) = \\ &= \frac{1}{e^{-\mu L} - e^{-\rho L}} \begin{pmatrix} -e^{-\mu L} & -e^{\mu(\xi-L)-\rho\xi} \\ e^{\rho(\xi-L)-\mu\xi} & e^{-\rho L} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \begin{pmatrix} -1 & -e^{(\mu-\rho)\xi} \\ e^{(\mu-\rho)(L-\xi)} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

имеет ранг 1, $\mathbf{U}^{-1}$ задано в виде (2.19).

Далее, из (2.31), (2.40), (2.22) получаем

$$\mathbf{w}(x, \xi) = \mathbf{s}(x, \xi) + \mathbf{v}(x, \xi) = (e^{\mu(x-\xi)}, e^{\rho(x-\xi)}) \times \mathbf{W}(\xi) \times \mathbf{U}^{-1}, \quad (2.42)$$

где с учетом (2.41) имеем

$$\mathbf{W}(\xi) = \mathbf{I} + \mathbf{V}(\xi) = \frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \begin{pmatrix} -e^{(\mu-\rho)L} & -e^{(\mu-\rho)\xi} \\ e^{(\mu-\rho)(L-\xi)} & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix} := \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix}, \quad j = 0, \dots, N, \quad (2.44)$$

$$\begin{pmatrix} a_j \\ c_j \end{pmatrix} := \mathbf{V}(\xi_j) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{V}(\xi_j) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

$$\begin{pmatrix} b_j \\ d_j \end{pmatrix} := \mathbf{W}(\xi_j) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{W}(\xi_j) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

тогда представление (2.17), записанное в форме

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \sum_{j=0}^N \mathbf{g}(x, \xi_j) \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

принимает с учетом формулы (2.32) и равенств (2.40), (2.42) и (2.45), (2.46) следующий вид на k -м промежутке разбиения (2.8):

$$\begin{aligned} y(x) - \tilde{y}(x) &= \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{v}(x, \xi_j) \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix} + \sum_{j=k}^N \mathbf{w}(x, \xi_k) \times \begin{pmatrix} p_j^{(0)} \\ p_j^{(1)} \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} (e^{\mu(x-\xi_j)}, e^{\rho(x-\xi_j)}) \times \begin{pmatrix} a_j \\ c_j \end{pmatrix} + \sum_{j=k}^N (e^{\mu(x-\xi_j)}, e^{\rho(x-\xi_j)}) \times \begin{pmatrix} b_j \\ d_j \end{pmatrix}, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Вводя обозначения

$$M_k := \sum_{j=0}^{k-1} a_j e^{\mu(\xi_{k-1}-\xi_j)} + \sum_{j=k}^N b_j e^{\mu(\xi_{k-1}-\xi_j)}, \quad (2.49)$$

$$R_k := \sum_{j=0}^{k-1} c_j e^{\rho(\xi_k-\xi_j)} + \sum_{j=k}^N d_j e^{\rho(\xi_k-\xi_j)}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.50)$$

перепишем (2.48) в виде

$$y(x) - \tilde{y}(x) = M_k e^{\mu(x-\xi_{k-1})} + R_k e^{\rho(x-\xi_k)}, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.51)$$

где коэффициенты M_k , R_k не зависят от x .

Отметим, что выполнено следующее равенство, получаемое вычитанием (2.45) из (2.46) с учетом (2.43):

$$\begin{pmatrix} b_j - a_j \\ d_j - c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix}, \quad j = 0, \dots, N. \quad (2.52)$$

Проверим, что справедливы следующие рекуррентные соотношения:

$$M_{k+1} = M_k e^{\mu(\xi_k-\xi_{k-1})} - m_k, \quad (2.53)$$

$$R_k = R_{k+1} e^{-\rho(\xi_{k+1}-\xi_k)} + r_k. \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (2.54)$$

В самом деле, с учетом (2.52) имеем

$$M_k e^{\mu(\xi_k-\xi_{k-1})} - m_k = \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j e^{\mu(\xi_{k-1}-\xi_j)} + \sum_{j=k}^N b_j e^{\mu(\xi_{k-1}-\xi_j)} \right) e^{\mu(\xi_k-\xi_{k-1})} - b_k + a_k = \quad (2.55)$$

$$= \sum_{j=0}^k a_j e^{\mu(\xi_k-\xi_j)} + \sum_{j=k+1}^N b_j e^{\mu(\xi_k-\xi_j)} = M_{k+1}, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (2.56)$$

откуда следует (2.53). Аналогичным путем проверяем формулу (2.54):

$$\begin{aligned} R_{k+1} e^{-\rho(\xi_{k+1}-\xi_k)} + r_k &= \left(\sum_{j=0}^k c_j e^{\rho(\xi_{k+1}-\xi_j)} + \sum_{j=k+1}^N d_j e^{\rho(\xi_{k+1}-\xi_j)} \right) e^{-\rho(\xi_{k+1}-\xi_k)} - c_k + d_k = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} c_j e^{\rho(\xi_k-\xi_j)} + \sum_{j=k}^N d_j e^{\rho(\xi_k-\xi_j)} = R_k, \quad k = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Вычислим значение M_1 , необходимое в качестве базы для получения коэффициентов M_k по рекуррентной формуле (2.53). Подставляя в выражение (2.49) коэффициенты a_0 в виде (2.45), (2.41) при $j = 0$, $\xi = \xi_0 = 0$, а также b_j в виде (2.46), (2.43) при $\xi = \xi_j$, с учетом равенства $\xi_N = L$ находим

$$\begin{aligned} M_1 &= a_0 + \sum_{j=1}^{N-1} b_j e^{-\mu \xi_j} + b_N e^{-\mu \xi_N} = \frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \left[(-1, -e^{(\mu-\rho)\xi_0}) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_0^{(0)} \\ p_0^{(1)} \end{pmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{N-1} e^{-\mu \xi_j} (e^{(\mu-\rho)L}, e^{(\mu-\rho)\xi_j}) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix} - e^{-\mu \xi_N} (e^{(\mu-\rho)L}, e^{(\mu-\rho)\xi_N}) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_N^{(0)} \\ p_N^{(1)} \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

откуда с учетом вытекающего из определения (2.19) равенства

$$(1, 1) \times \mathbf{U}^{-1} = (1, 0) \quad (2.57)$$

получаем

$$M_1 = -\frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \left[p_0^{(0)} + \sum_{j=1}^{N-1} (e^{\mu(L-\xi_j)-\rho L}, e^{-\rho \xi_j}) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix} + e^{-\rho L} p_N^{(0)} \right]. \quad (2.58)$$

Вводя обозначения

$$\mathcal{R} := p_0^{(0)} + \sum_{j=1}^{N-1} e^{-\rho \xi_j} r_j, \quad \mathcal{M} := p_N^{(0)} + \sum_{j=1}^{N-1} e^{\mu(L-\xi_j)} m_j, \quad (2.59)$$

находим из (2.58) коэффициент M_1 окончательно в виде

$$M_1 = -\frac{\mathcal{R} + e^{-\rho L} \mathcal{M}}{1 - e^{(\mu-\rho)L}}. \quad (2.60)$$

Аналогичным образом найдем значение R_N , необходимое в качестве начального для вычисления коэффициентов R_k по формуле (2.54). Подставляя $k = N$ в формулу (2.50) вместе с коэффициентами d_N в виде (2.46), (2.41) при $j = N$, $\xi = \xi_N = L$ и c_j в виде (2.45), (2.43) при $\xi = \xi_j$, с учетом равенств (2.57) и $\xi_0 = 0$ вычисляем R_N :

$$\begin{aligned} R_N &= \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{\rho(L-\xi_j)} + d_N = \frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \left[e^{\rho(L-\xi_0)} (e^{(\mu-\rho)(L-\xi_0)}, e^{(\mu-\rho)L}) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_0^{(0)} \\ p_0^{(1)} \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{N-1} e^{\rho(L-\xi_j)} (e^{(\mu-\rho)(L-\xi_j)}, e^{(\mu-\rho)L}) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix} + (e^{(\mu-\rho)(L-\xi_N)}, 1) \times \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_N^{(0)} \\ p_N^{(1)} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{1 - e^{(\mu-\rho)L}} \left[e^{\mu L} p_0^{(0)} + \sum_{j=0}^{N-1} (e^{\mu(L-\xi_j)}, e^{-\rho \xi_j + \mu L}) \times \begin{pmatrix} m_j \\ r_j \end{pmatrix} + p_N^{(0)} \right], \end{aligned}$$

что с использованием обозначений (2.59) дает

$$R_N = \frac{e^{\mu L} \mathcal{R} + \mathcal{M}}{1 - e^{(\mu-\rho)L}}. \quad (2.61)$$

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 решение $y(x)$ задачи (2.1), (2.3) допускает следующее представление на k -м отрезке разбиения (2.8):

$$y(x) = \tilde{y}(x) + M_k e^{\mu(x-\xi_{k-1})} + R_k e^{\rho(x-\xi_k)}, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (2.62)$$

где коэффициенты M_k, R_k находятся по рекуррентным формулам (2.53), (2.54), входящие в них числа m_k, r_k имеют вид (2.44), (2.19), начальные значения M_1, R_N , заданы в виде (2.60), (2.59) и (2.61), (2.59) соответственно.

Замечание 3. Дифференцируя представление (2.62) по x , получаем следующую формулу для производной решения задачи (2.1), (2.3) на k -м отрезке разбиения (2.8):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{dx} + \mu M_k e^{\mu(x-\xi_{k-1})} + \rho R_k e^{\rho(x-\xi_k)}, \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.63)$$

Замечание 4. Коэффициенты M_k, R_k могут быть также найдены как решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемых путем приравнивания левых и правых пределов искомого решения и его производной в узлах ξ_k , вычисленных на основе представлений (2.51), (2.63) с учетом краевых условий (2.3).

2.3. Представление решения смешанной краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (2.1) с краевыми условиями смешанного типа (2.4). Предположим, что на отрезках разбиения (2.8) заданы частные решения уравнения (2.1) в виде (2.10). Тогда с некоторыми модификациями остаются справедливыми утверждения теорем 1 и 2.

А именно, сохраняя обозначения (2.11), вместо (2.12) следует положить

$$p_0^{(0)} := \tilde{y}_1(0) - \Phi_0, \quad p_N^{(1)} = \Psi_1 - \frac{d\tilde{y}_N}{dx}(L), \quad p_0^{(1)} = p_N^{(0)} = 0,$$

в формулировке теоремы 1 — вместо условия (2.14) потребовать от функций $G_m(x, \xi)$

$$\lim_{x \rightarrow L+} \frac{dG_m}{dx}(x, \xi) = 0,$$

а при построении $G_m(x, \xi)$ — вместо (2.29) использовать в качестве $h(x)$ функцию

$$h^{\text{mix}}(x) := S_0(x, L).$$

Тогда представления (2.62) и (2.63), а также формулы (2.53), (2.54) вычисления их коэффициентов сохраняют силу, меняются лишь начальные значения (2.60) и (2.61) на следующие:

$$M_1 = M_1^{\text{mix}} \equiv -\frac{\rho \mathcal{R} + e^{-\rho L} \mathcal{M}^{\text{mix}}}{\rho - \mu e^{(\mu-\rho)L}}, \quad R_N = R_N^{\text{mix}} \equiv \frac{\mu e^{\mu L} \mathcal{R} + \mathcal{M}^{\text{mix}}}{\rho - \mu e^{(\mu-\rho)L}}. \quad (2.64)$$

где

$$\mathcal{R} := p_0^{(0)} + \sum_{j=1}^{N-1} e^{-\rho \xi_j} r_j, \quad \mathcal{M}^{\text{mix}} := p_N^{(1)} + \mu \sum_{j=1}^{N-1} e^{\mu(L-\xi_j)} m_j. \quad (2.65)$$

Аналогичным образом рассматриваются и другие типы смешанных краевых условий.

2.4. Представление решения периодической краевой задачи

В случае периодической краевой задачи для уравнения (2.1) с краевыми условиями (2.5) остаются справедливыми представления решения (2.62) и его производной (2.63), а также рекуррентные формулы (2.53), (2.54) для коэффициентов M_k, R_k . В этом случае в дополнение к формулам (2.11) вместо (2.12), (2.60), (2.61) следует положить

$$p_0^{(0)} = p_N^{(0)} = \tilde{y}_1(0) - \tilde{y}_N(L), \quad p_0^{(1)} = p_N^{(1)} = \frac{d\tilde{y}_1}{dx}(0) - \frac{d\tilde{y}_N}{dx}(L), \quad (2.66)$$

$$M_1 = M_1^{\text{per}} \equiv -\frac{1}{1 - e^{\mu L}} \sum_{j=1}^N e^{\mu(L-\xi_j)} m_j, \quad R_N = R_N^{\text{per}} \equiv \frac{1}{1 - e^{-\rho L}} \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\rho \xi_j} r_j, \quad (2.67)$$

где величины $m_j, r_j, j = 0, \dots, N$, заданы равенствами (2.44), (2.19), причем $m_0 = m_N, r_0 = r_N$ согласно определению (2.66) и условию периодичности (2.5).

2.5. Получение частных решений на отрезках разбиения

Рассмотрим вопрос о том, как получить частные решения $\tilde{y}_k(x)$ уравнения (2.9) на отрезках разбиения (2.8), $k = 1, \dots, N$. Ответ не является однозначным, поскольку краевые условия на концах отрезка $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ не заданы, и решение определено лишь с точностью до прибавления произвольного решения соответствующего однородного уравнения.

В зависимости от того, в каком виде представлена правая часть уравнения (2.9), могут оказаться удобными различные способы построения $\tilde{y}_k(x)$. Рассмотрим два таких способа.

2.5.1. Вычисление частных решений в кусочно полиномиальном случае. Если правая часть $g(x)$ уравнения (2.9) имеет кусочно полиномиальный вид, т.е. при заданном $k \in \{1, \dots, N\}$ ограничение $g(x)$ на отрезок $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ является полиномом степени $n \geq 0$, то частное решение $\tilde{y}_k(x)$ может быть также выбрано в виде многочлена и найдено в явном виде, например, по формуле

$$\tilde{y}_k(x) = P_n(x) + P_{n-1}(x) + \dots + P_0(x), \quad x \in [\xi_{k-1}, \xi_k], \quad (2.68)$$

где

$$P_n(x) = \frac{g(x)}{k_0}, \quad P_j(x) := -\frac{1}{k_0} \left(k_2 \frac{d^2 P_{j+1}}{dx^2} + k_1 \frac{d P_{j+1}}{dx} \right), \quad j = n-1, \dots, 0,$$

и $P_j(x)$ является многочленом степени не выше j . Справедливость формулы (2.68) устанавливается непосредственно путем подстановки в уравнение (2.9).

Особенно простой вид формула (2.68) принимает при $n = 1$, т.е. в случае кусочно-линейной функции $g(x)$. Такой способ аппроксимации правой части и построения частного решения применялся в работе [9] при численно-аналитическом решении периодической задачи для уравнения Бюргерса.

Линейный дифференциальный оператор $\mathcal{L}$, стоящий в левой части уравнения (2.9), определяет невырожденное линейное преобразование $(n+1)$ -мерного векторного пространства $\mathcal{P}_n$ полиномов степени не выше n , заданных на отрезке $x \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$. Решение этого уравнения в пространстве $\mathcal{P}_n$ заключается в том, чтобы применить к правой части $g(x) \in \mathcal{P}_n$ обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}$, действие которого дается формулой (2.68). При численном решении уравнения (2.9) удобно представить операторы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{-1}$ в матричном виде в некотором базисе пространства $\mathcal{P}_n$. В настоящей работе в качестве такого базиса применяется система полиномов Чебышёва первого рода, промасштабированных на отрезок $[\xi_{k-1}, \xi_k]$.

Отметим, что если правая часть $g(x)$ является не кусочно полиномиальной, но гладкой или кусочно гладкой функцией, то, тем не менее, ее можно приблизить кусочно полиномиальной функцией, построив интерполяционные многочлены на каждом из отрезков разбиения (2.8), например, по значениям функции $g(x)$ в узлах Чебышёва соответствующего отрезка.

2.5.2. Вычисление частных решений с помощью квадратур. Построим частное решение уравнения (2.9) на k -м отрезке разбиения (2.8) при помощи интегрального представления

$$\tilde{y}_k(x) = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} g(\xi) \mathcal{E}(x, \xi) d\xi, \quad (2.69)$$

аналогичного представлению (2.37), где фундаментальное решение $\mathcal{E}(x, \xi)$ имеет вид

$$\mathcal{E}(x, \xi) = \begin{cases} (k_2(\rho - \mu))^{-1} e^{\mu(x-\xi)}, & \xi \leq x, \\ (k_2(\rho - \mu))^{-1} e^{\rho(x-\xi)}, & \xi > x. \end{cases} \quad (2.70)$$

Найдем, чему равно решение $\tilde{y}_k(x)$ в концах рассматриваемого отрезка. Подставляя выражение (2.70) при $x = \xi_{k-1}$, $x = \xi_k$ в представление (2.69), находим

$$\tilde{y}_k(\xi_{k-1}) = -\frac{1}{k_2(\rho - \mu)} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} g(\xi) e^{\rho(\xi_{k-1}-\xi)} d\xi =: r_k, \quad (2.71)$$

$$\tilde{y}_k(\xi_k) = -\frac{1}{k_2(\rho - \mu)} \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} g(\xi) e^{\mu(\xi_k-\xi)} d\xi =: m_k, \quad (2.72)$$

Дифференцируя по x равенство (2.69), получим также значения производных:

$$\frac{d\tilde{y}_k}{dx}(\xi_{k-1}) = \rho r_k, \quad \frac{d\tilde{y}_k}{dx}(\xi_k) = \mu m_k. \quad (2.73)$$

Подставляя найденные значения (2.71)–(2.73) в формулы (2.11), (2.44), находим

$$\begin{aligned} p_k^{(0)} &:= r_{k+1} - m_k, & p_k^{(1)} &:= \rho r_{k+1} - \mu m_k, & k &= 1, \dots, N-1, \\ \begin{pmatrix} m_k \\ r_k \end{pmatrix} &:= \mathbf{U}^{-1} \times \begin{pmatrix} p_k^{(0)} \\ p_k^{(1)} \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1} \times \mathbf{U} \times \begin{pmatrix} -m_k \\ r_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_k \\ r_{k+1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

где матрица $\mathbf{U}$ задана формулой (2.18). Из (2.74) получаем значения m_k, r_k в виде

$$m_k = -m_k, \quad r_k = r_{k+1},$$

а затем, согласно теореме 2, вычисляем коэффициенты M_k, R_k представления (2.62) решения исходной задачи (2.1), (2.3).

При реализации численного алгоритма величины (2.71), (2.72) находятся приближенно при помощи квадратурных формул, например, формул Гаусса. Значения частного решения $\tilde{y}_k(x)$ во внутренних точках промежутка $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ можно аппроксимировать кубическим полиномом, имеющим заданные значения (2.71), (2.72) и производные (2.73) на концах данного отрезка.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Решение первой краевой задачи для линейного уравнения

Для того, чтобы проиллюстрировать работу численно-аналитического метода решения двухточечных краевых задач для уравнения (2.1), предложенного в разд. 2, рассмотрим несколько примеров. В этих примерах некоторая функция $y^{\text{ex}}(x)$, заданная в явном аналитическом виде на отрезке $[0, 1]$, подставляется в тестовое уравнение вида (2.1), находится правая часть

$$g(x) = k_2 \frac{d^2 y^{\text{ex}}}{dx^2} + k_1 \frac{dy^{\text{ex}}}{dx} + k_0 y^{\text{ex}}(x)$$

и значения

$$\Phi_0 = y^{\text{ex}}(0), \quad \Phi_1 = y^{\text{ex}}(1),$$

определяющие краевые условия (2.3) при $L = 1$. Затем на основе полученных таким образом данных $g(x), \Phi_0, \Phi_1$ находится численное решение $y(x)$ на единичном отрезке вместе с производной $y'(x)$ независимо несколькими из нижеперечисленных алгоритмов.

Алгоритм 3.1.1 (обозначение: $D(1)$). *разностный метод на основе прогонки с использованием центральной разностной производной искомого решения и аппроксимацией его второй производной по трем точкам.*

Алгоритм 3.1.2 (обозначение: $PT(m)$). *численно-аналитический метод, основанный на представлениях (2.62), (2.63) и использующий чебышёвские приближения (см. п. 2.5.1). В этом методе для правой части $g(x)$ уравнения (2.1) принимается кусочно полиномиальное приближение интерполяционными многочленами, построенными на каждом из отрезков разбиения (2.8) по m точкам — узлам Чебышёва в виде линейной комбинации полиномов Чебышёва степени не выше $m - 1$.*

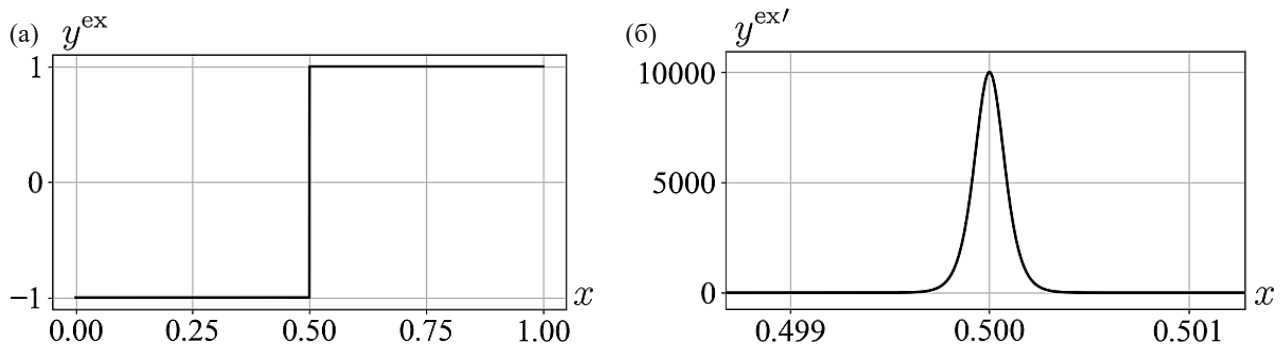
Алгоритм 3.1.3 (обозначение: $GQ(2)$). *численно-аналитический метод, основанный на представлениях (2.62), (2.63), с получением частных решений $\tilde{y}_k(x)$ на отрезках разбиения (2.8) с помощью квадратурной формулы Гаусса порядка 3 по двум точкам и интерполяцией результата кубическим полиномом (см. п. 2.5.2).*

Численное решение $y^{\text{an}}(x)$ задачи (2.1), (2.3), получаемое при помощи численно-аналитического алгоритма 3.1.2 либо 3.1.3, а также решение $y^{\text{diff}}(x)$ той же задачи, получаемое разностным методом 3.1.1, вычисляются на последовательности равномерных сеток (2.8) при $L = 1$ с возрастающим количеством N отрезков разбиения.

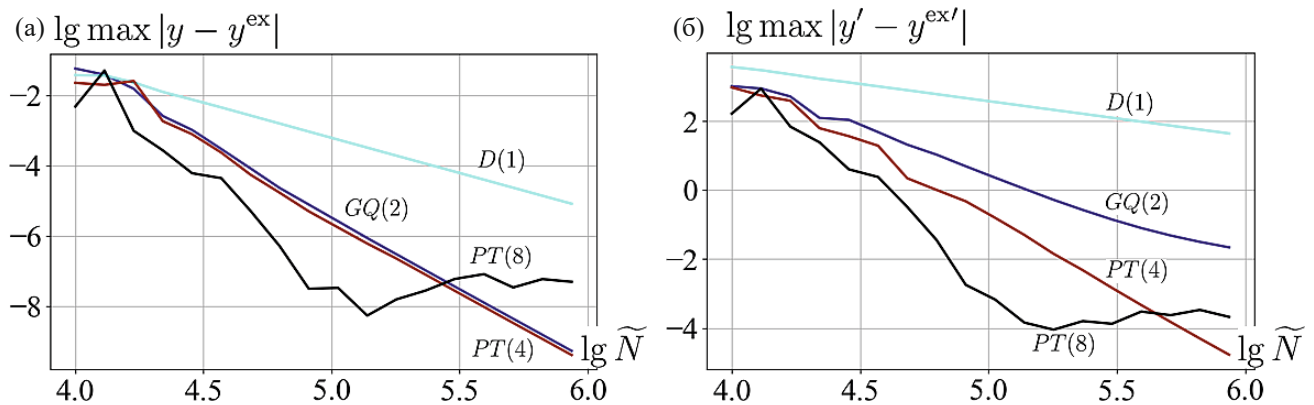
Погрешность численного решения $y^{\text{an}}(x)$ или $y^{\text{diff}}(x)$ находится как максимум модуля разности между этим решением и известным аналитическим решением $y^{\text{ex}}(x)$. Аналогичным образом вычисляется погрешность производной dy^{an}/dx либо dy^{diff}/dx .

В обозначениях $D(1), PT(m), GQ(2)$ алгоритмов 3.1.1–3.1.3 в скобках указано количество m точек на каждом из отрезков пространственной сетки (2.8), значения в которых правой части $g(x)$ уравнения (2.1) используются в работе соответствующего алгоритма. При сопоставлении численных результатов, полученных различными методами, учитывается точность, достигнутая при одном и том же полном числе узлов

$$\tilde{N} := mN. \quad (3.1)$$



Фиг. 1. Пример 3.1.1. (а) – График точного решения $y = y^{\text{ex}}(x)$ уравнения (3.2), (3.3). (б) – График производной $y^{\text{ex}'}(x)$.



Фиг. 2. Пример 3.1.1. (а) – Логарифмические графики абсолютной погрешности численного решения $y(x)$ в зависимости от полного числа узлов (3.1). Решения найдены при помощи алгоритмов 3.1.1, 3.1.3 и 3.1.2 при $m = 4$ и 8. (б) – Логарифмические графики абсолютной погрешности вычисления производной $y'(x)$.

На фиг. 2, 4, 6, 7 даны графики погрешности численного решения и его производной в логарифмической шкале, полученные для алгоритмов 3.1.1–3.1.3, в зависимости от полного числа (3.1) узлов расчетной сетки. Отметим, что каждый из алгоритмов 3.1.1–3.1.3 имеет линейную по N алгоритмическую сложность при $N \rightarrow \infty$.

Пример 3.1.1. Уравнение

$$k_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y(x) = g(x) \quad (3.2)$$

при

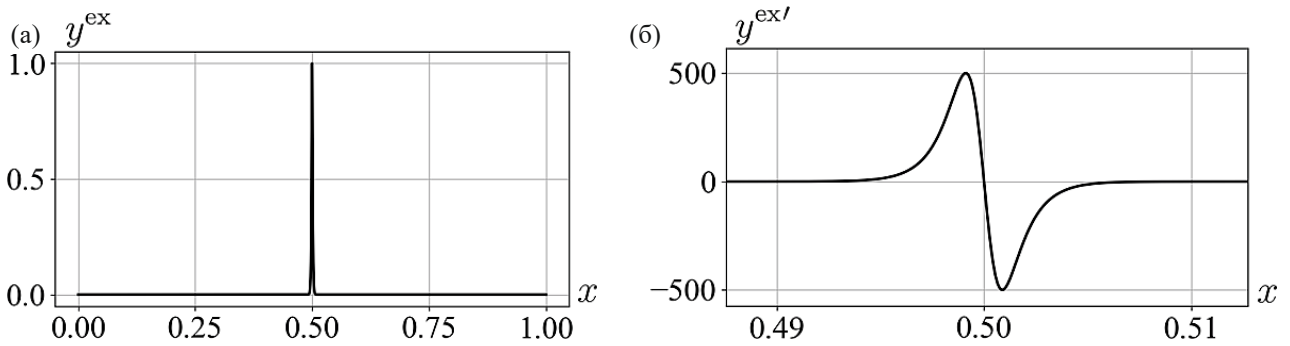
$$k_2 = -10^{-7}, \quad y^{\text{ex}}(x) = \text{th}(10^4(x - 0.5)), \quad x \in [0, 1]. \quad (3.3)$$

Графики решения $y^{\text{ex}}(x)$ и его производной $y^{\text{ex}'}(x)$ даны на фиг. 1 а,б. Логарифмические графики погрешности численного решения и производной в зависимости от полного числа $\tilde{N}$ отрезков расчетной сетки приведены на фиг. 2 а,б.

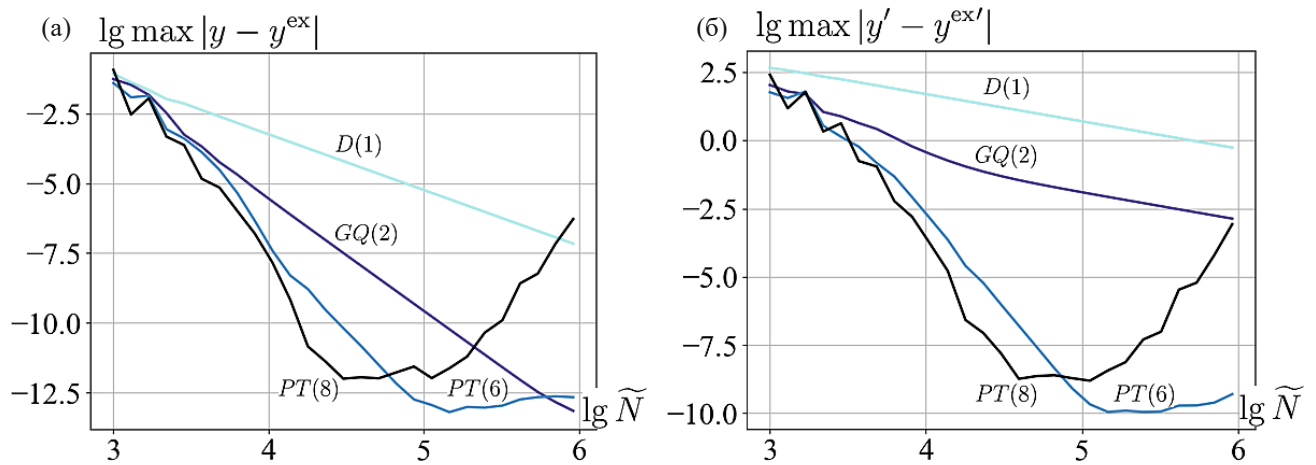
Пример 3.1.2. Уравнение (3.2) при

$$k_2 = -10^{-6}, \quad y^{\text{ex}}(x) = \frac{1}{\text{ch}(1000(x - 0.5))}, \quad x \in [0, 1]. \quad (3.4)$$

Графики решения $y^{\text{ex}}(x)$ и его производной $y^{\text{ex}'}(x)$ даны на фиг. 3 а,б. Логарифмические графики погрешности численного решения и производной в зависимости от полного числа $\tilde{N}$ отрезков расчетной сетки приведены на фиг. 4 а,б.



Фиг. 3. Пример 3.1.2. (а) – График точного решения $y = y^{\text{ex}}(x)$ уравнения (3.2), (3.4). (б) – График производной $y^{\text{ex}'}(x)$.



Фиг. 4. Пример 3.1.2. (а) – Логарифмические графики абсолютной погрешности численного решения $y(x)$ в зависимости от полного числа узлов (3.1). Решения найдены при помощи алгоритмов 3.1.1, 3.1.3 и 3.1.2 при $m = 6$ и 8 . (б) – Логарифмические графики абсолютной погрешности вычисления производной $y'(x)$.

Пример 3.1.3. Уравнение

$$-10^{-9} \frac{d^2 y}{dx^2} + 10^{-4} \frac{dy}{dx} + y(x) = g(x), \quad x \in [0, 1], \quad (3.5)$$

при

$$y^{\text{ex}}(x) = \sin \frac{\pi}{x + 0.01} \quad x \in [0, 1].$$

Графики решения $y^{\text{ex}}(x)$ и его производной $y^{\text{ex}'}(x)$ даны на фиг. 5 а,б. Логарифмические графики погрешности численного решения и производной в зависимости от полного числа $\tilde{N}$ отрезков расчетной сетки приведены на фиг. 6 а,б.

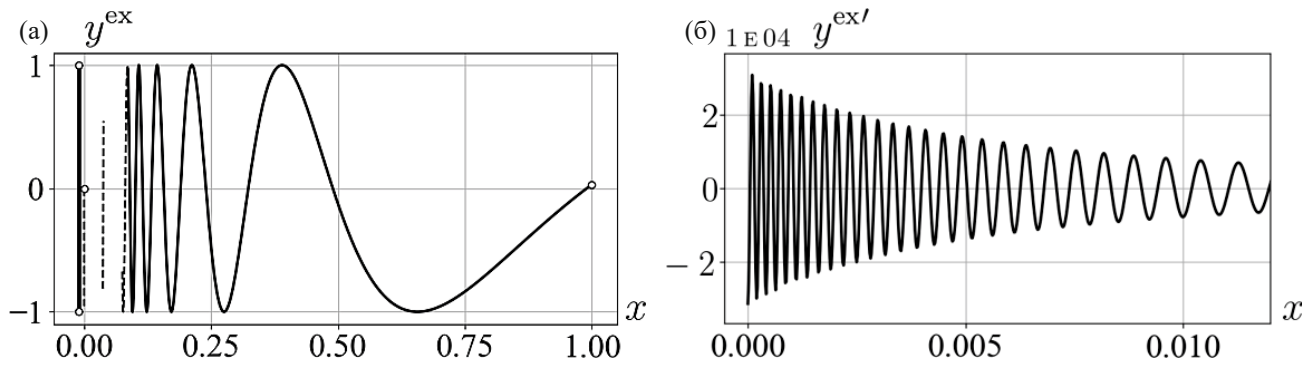
Пример 3.1.4. Уравнение

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y(x) = g(x), \quad (3.6)$$

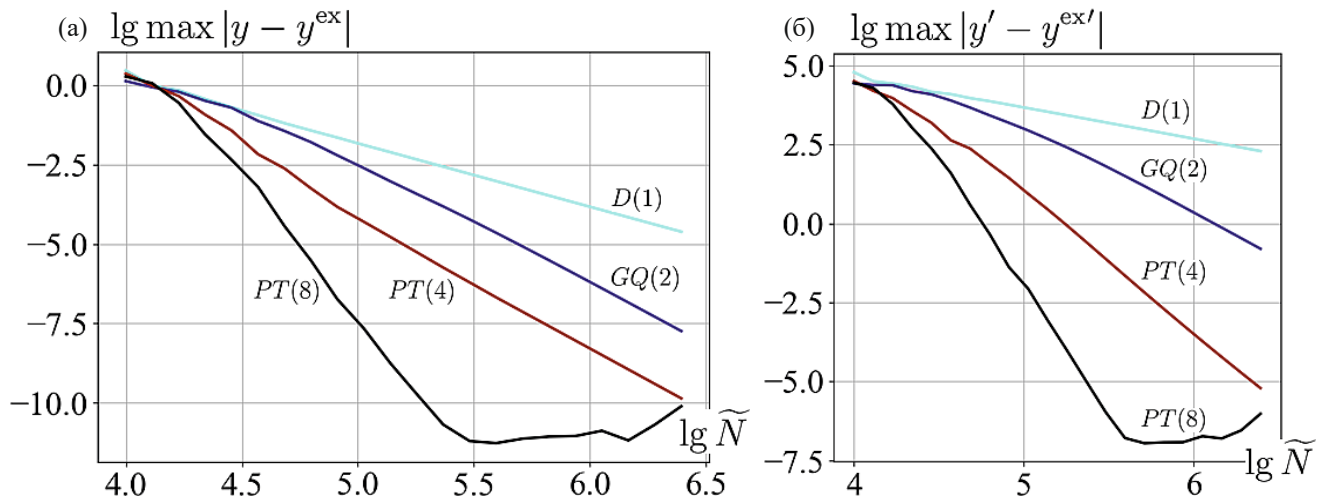
при

$$y^{\text{ex}}(x) = \sin(3\pi x), \quad x \in [0, 1]. \quad (3.7)$$

Логарифмические графики погрешности численного решения и его производной, найденные с помощью алгоритмов 3.1.1–3.1.3, приведены на фиг. 7 а,б.



Фиг. 5. Пример 3.1.3. (а) – График точного решения $y = y^{\text{ex}}(x)$ уравнения (3.5). (б) – График производной $y^{\text{ex}'}(x)$.



Фиг. 6. Пример 3.1.3. (а) – Логарифмические графики абсолютной погрешности численного решения $y(x)$ в зависимости от полного числа узлов (3.1). Решения найдены при помощи алгоритмов 3.1.1, 3.1.3 и 3.1.2 при $m = 4$ и 8 . (б) – Логарифмические графики абсолютной погрешности вычисления производной $y'(x)$.

3.2. Решение начально-краевых задач для сингулярно возмущенных квазилинейных параболических уравнений

Рассмотрим ряд примеров численного решения начально-краевых задач для сингулярно возмущенных нелинейных параболических уравнений. Для этого воспользуемся некоторыми известными в явном аналитическом виде решениями $u^{\text{ex}}(x, t)$ модельных уравнений вида (1.7), задавая начальное и краевые условия (1.8)–(1.10) с помощью функций

$$u_0(x) = u^{\text{ex}}(0, x), \quad \varphi_0(t) = u^{\text{ex}}(0, t), \quad \varphi_1(t) = u^{\text{ex}}(L, t), \quad \psi_1(t) = \frac{\partial u^{\text{ex}}}{\partial x}(L, t), \quad (3.8)$$

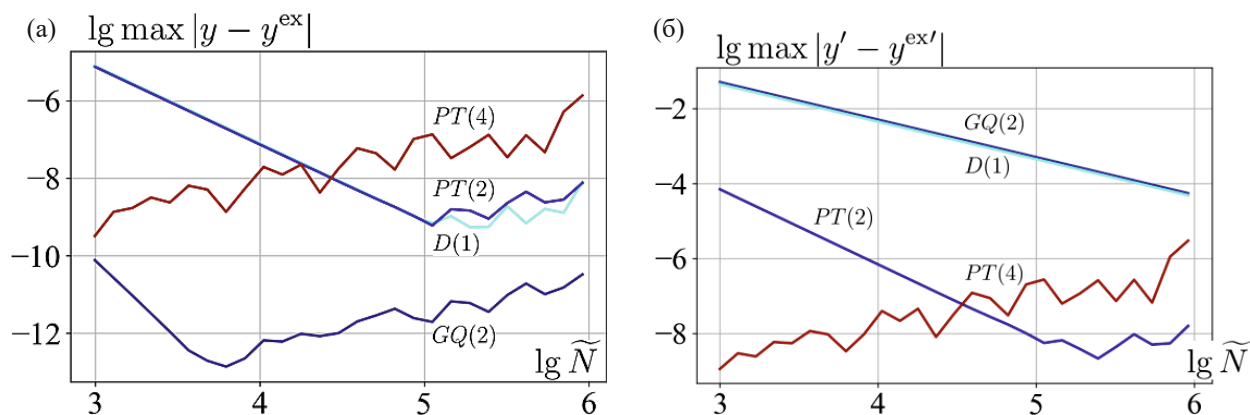
либо накладывая на искомое решение $u(x, t)$ условия периодичности (1.11).

Пример 3.2.1. Рассмотрим уравнение Бюргерса (1.3), которое является частным случаем уравнения (1.7) при

$$F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma = 0.$$

Известно (см., например, [9]), что уравнение (1.3) обладает периодическим по x решением с периодом 1, имеющим следующий явный аналитический вид:

$$u^{\text{ex}}(x, t) = V + \frac{4\pi\lambda \sin(2\pi(x_0 + x - Vt)) e^{-4\pi^2\lambda(t_0+t)}}{1 + \cos(2\pi(x_0 + x - Vt)) e^{-4\pi^2\lambda(t_0+t)}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$



Фиг. 7. Пример 3.1.4. (а) – Логарифмические графики абсолютной погрешности численного решения $y(x)$ уравнения (3.6) в зависимости от полного числа узлов (3.1). Решения найдены при помощи алгоритмов 3.1.1, 3.1.3 и 3.1.2 при $m = 2$ и 4. (б) – Логарифмические графики абсолютной погрешности вычисления производной $y'(x)$.

где $x_0, V \in \mathbb{R}, t_0 > 0$ — произвольные постоянные. Максимальное по x значение $U_0 > V$, достигаемое функцией (3.9) при $t = 0$, определяет параметр t_0 по следующей формуле:

$$t_0 = \frac{\ln(1 + (4\pi\lambda/(U_0 - V))^2)}{8\pi^2\lambda}.$$

Проведем численное решение начально-краевых задач для уравнения (1.3) с начальным условием (1.8) и краевыми условиями каждого из видов (1.9)–(1.11), заданными в виде (3.8), (3.9) при следующих значениях параметров:

$$\lambda = 10^{-3}, \quad V = 4, \quad U_0 = 6, \quad x_0 = 0.4 \quad t_0 \approx 0.0005, \quad (3.10)$$

следуя схеме, изложенной в разд. 1.3. Для этого зададим временной промежуток $t \in [0, T]$ и шаг τ по времени в виде

$$T = 0.009, \quad \tau = 10^{-5}.$$

Начально-краевую задачу (1.3), (1.8), (3.8), (3.9) с условиями периодичности (1.11) будем решать на единичном отрезке $x \in [0, L_1]$, т.е. при $L = L_1 = 1$. Аналогичную задачу со смешанными краевыми условиями (1.10) будем решать на более коротком отрезке $x \in [0, L_2]$, где $L_2 = 0.142$, чтобы получить из формулы (3.8) функции $\varphi_1(t)$ и $\psi_1(t)$ заметно отличающимися от тождественного нуля. Наконец, задачу с краевыми условиями Дирихле (1.9) рассмотрим независимо на обоих отрезках $x \in [0, L_1]$ и $x \in [0, L_2]$.

Следуя алгоритму из разд. 1.3, на $(n + 1)$ -й итерации этого алгоритма, т.е. при $t = t_{n+1} = (n + 1)\tau$, получаем относительно приближенного решения $u_{n+1}(x) \approx u(x, t_{n+1})$ линейную задачу для уравнения (1.19), (1.21), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$-\frac{9}{16}\tau\lambda\frac{d^2u_{n+1}}{dx^2} + u_{n+1}(x) = g_{n+1}(x), \quad (3.11)$$

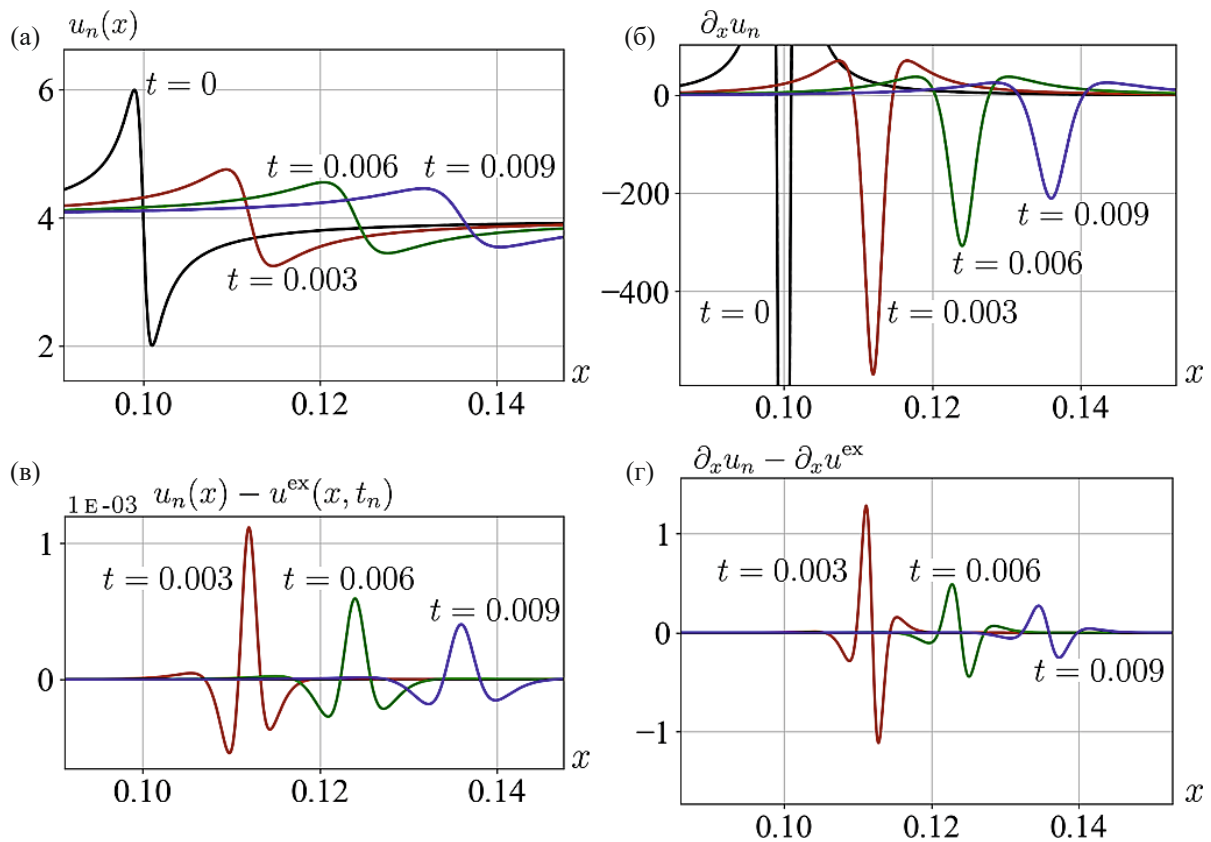
где правая часть определяется по формуле

$$g_{n+1}(x) = \frac{5}{3}u_n(x) + \frac{1}{9}u_{n-1}(x) - \frac{2}{3}g_n(x) - \frac{1}{9}g_{n-1}(x) - \tau\left(\frac{3}{2}u_n(x)\frac{du_n}{dx} - \frac{1}{2}u_{n-1}(x)\frac{du_{n-1}}{dx}\right), \quad (3.12)$$

на отрезке $x \in [0, L]$, где $L = L_1$ или L_2 , с краевыми условиями (1.22)–(1.24), отвечающими краевым условиям (1.9)–(1.11) исходной задачи, и принимающими с учетом (3.9) одну из форм

$$u_{n+1}(0) = u^{\text{ex}}(0, t_{n+1}), \quad u_{n+1}(L_j) = u^{\text{ex}}(L_j, t_{n+1}), \quad j = 1, 2, \quad (3.13)$$

$$u_{n+1}(0) = u^{\text{ex}}(0, t_{n+1}), \quad \frac{du_{n+1}}{dx}(L_2) = \frac{\partial u^{\text{ex}}}{\partial x}(L_2, t_{n+1}), \quad (3.14)$$



Фиг. 8. пример 3.2.1. (а) — Решение вида (3.9) периодической задачи для уравнения Бюргерса (1.3) при значениях параметров (3.10), найденное численно-аналитическим методом на основе представления (2.62), (2.53), (2.54), (2.67) в различные моменты времени. (б) — Производная решения, полученная из представления (2.63). (в) — Погрешность вычисленного решения. (г) — Погрешность вычисленной производной.

либо (1.24) соответственно. Линейную задачу (3.11)–(3.13) решаем с помощью численно-аналитического алгоритма 3.1.2 либо при помощи разностного алгоритма 3.1.1. Задачу (3.11), (3.12), (3.14) со смешанным краевым условием решаем с помощью алгоритма 3.1.2, где при вычислении коэффициентов представлений (2.62), (2.63) по формулам (2.53), (2.54) используются начальные значения (2.64), (2.65). Периодическую задачу (3.11), (3.12), (1.24) решаем также с помощью алгоритма 3.1.2 с учетом формул (2.67), (2.66).

При численной реализации алгоритма 3.1.2 используем пространственную дискретизацию (2.8) с равномерным распределением узлов ξ_k при $N = N_1$ для задачи на единичном отрезке $[0, L_1]$ и при $N = N_2$ для задач на отрезке $[0, L_2]$, где

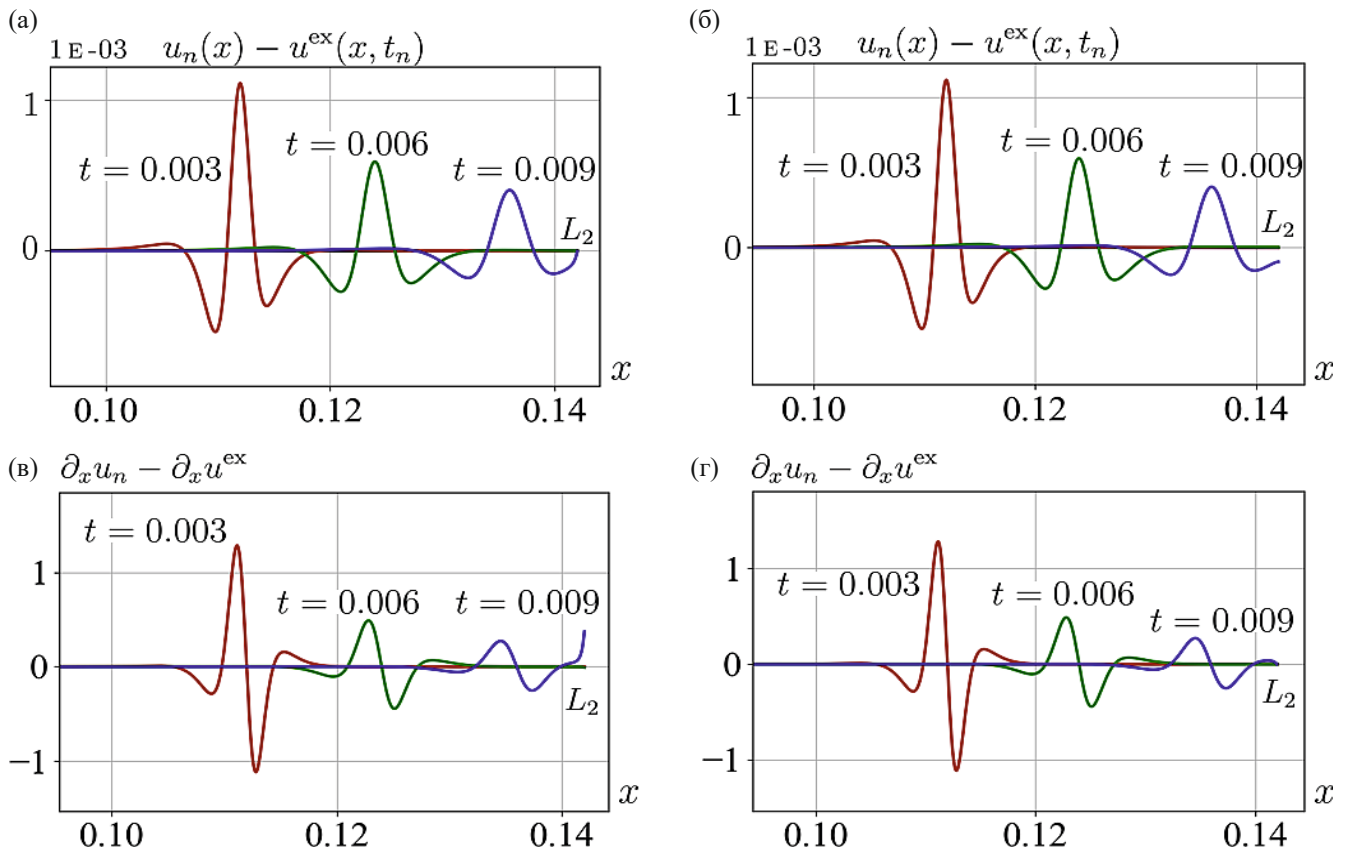
$$N_1 = 5000, \quad N_2 = 710$$

так, что $L_1/N_1 = L_2/N_2$.

Построение кусочно полиномиальной интерполяции правой части (3.12) уравнения (3.11), составляющее начальный этап работы алгоритма 3.1.2 в соответствии с п. 2.5.1, проведем по $m = 4$ узлам на каждом из N_1 либо N_2 промежутках разбиения (2.8).

На фиг. 8 а приведены графики численного решения $u_n(x)$ периодической начально-краевой задачи (1.3), (1.8), (3.8), (3.9), (1.11) на отрезке $[0, L_1]$ при значениях n , соответствующих четырем моментам времени t , полученные при помощи алгоритма 3.1.2; на фиг. 8 б даны графики производной решения $\partial_x u_n(x)$, вычисленной на основе представления (2.63), в те же моменты времени t_n . На фиг. 8 в показаны графики погрешности, найденной как разность между численным решением $u_n(x)$ и точным решением $u^{\text{ex}}(x, t_n)$ в соответствующие моменты t_n . На фиг. 8 г дана погрешность производной, вычисленная аналогичным образом как разность между численным и точным значением. Графики численного решения на фиг. 8 а и его производной на фиг. 8 б визуально совпадают с соответствующими графиками точного решения (3.9), а также с графиками численного решения задачи Дирихле (1.3), (1.8), (1.9), (3.8), (3.9) на отрезке $[0, L_1]$.

На фиг. 9 а, б даны графики погрешности численных решений, полученных с использованием алгоритма 3.1.2, задачи Дирихле (1.3), (1.8), (1.9), (3.8), (3.9) и смешанной начально-краевой задачи



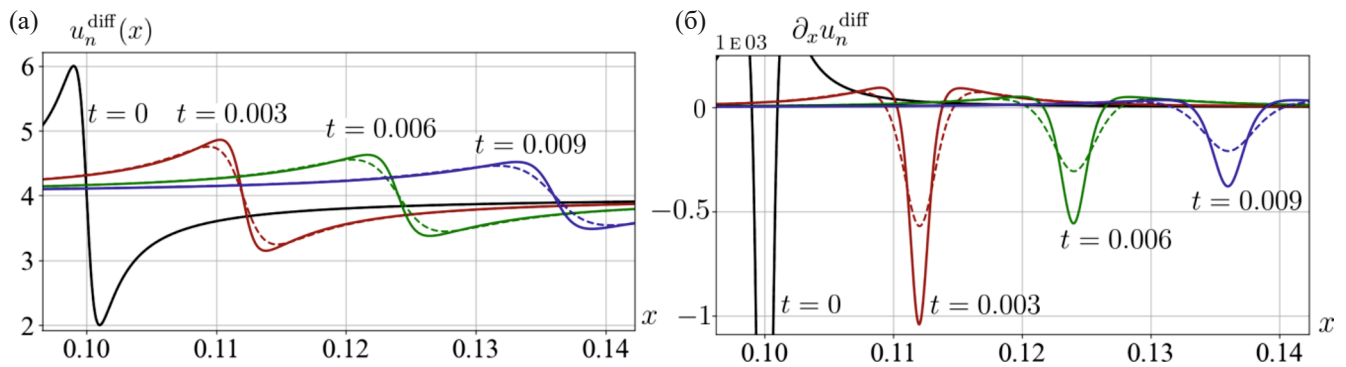
Фиг. 9. Пример 3.2.1. Графики погрешности численных решений начально-краевых задач для уравнения Бюргерса на отрезке $[0, L_2]$, $L_2 = 0.142$, полученных численно-аналитическим методом с использованием алгоритма 3.1.2 при $m = 4$ в различные моменты времени. (а) – Погрешность решения задачи Дирихле (1.3), (1.8), (1.9), (3.8), (3.9). (б) – Погрешность решения смешанной начально-краевой задачи (1.3), (1.8), (1.10), (3.8), (3.9). (в) – Погрешность вычисленной производной решения задачи Дирихле. (г) – Погрешность вычисленной производной решения смешанной начально-краевой задачи.

(1.3), (1.8), (1.10), (3.8), (3.9) на отрезке $[0, L_2]$. На фиг. 9 в, г) показаны соответствующие графики погрешности производной.

Отметим, что численные решения, полученные при помощи алгоритма 3.1.2, четырех указанных выше начально-краевых задач, т.е. периодической задачи (1.3), (1.8), (3.8), (3.9), (1.11) на отрезке $[0, L_1]$, смешанной начально-краевой задачи (1.3), (1.8), (3.8), (3.9), (1.10) на отрезке $[0, L_2]$ и задачи (1.3), (1.8), (3.8), (3.9) с условиями Дирихле (1.9) на отрезках $[0, L_1]$ и $[0, L_2]$, совпали с высокой точностью на общем промежутке определения, т.е. при $x \in [0, L_2]$, за исключением ближайшей окрестности точки L_2 , где наблюдалось небольшое расхождение (см. фиг. 8 в, г и фиг. 9 а–г), очевидно, связанное с различием в способе задания краевого условия.

Для работы алгоритма 3.1.1, использующего разностные схемы аппроксимации производных по пространственной переменной, при решении задачи (3.11)–(3.13) на отрезке $[0, L_1]$ применялась равномерная пространственная сетка, включающая $\tilde{N}_1 = (m N_1) = 20000$ промежутков, где $m = 4$ согласно сказанному выше. На фиг. 10 а сплошными линиями изображены графики численного решения $u_n^{\text{diff}}(x)$ начально-краевой задачи (3.8)–(3.10), (1.8), (1.9) на единичном отрезке, полученного по схеме из разд. 1.3 с решением линейной задачи (3.11)–(3.13) разностным алгоритмом 3.1.1. Пунктиром проведены соответствующие графики точного решения (3.9). На фиг. 10 б сплошными линиями даны графики производной $\partial_x u_n^{\text{diff}}(x)$ решения, найденной численно для тех же моментов времени, а также, пунктиром, графики точного значения производной $\partial_x u^{\text{ex}}(x, t)$, полученного дифференцированием по x формулы (3.9). Из этих графиков видно, что разностный метод дает существенно искаженный профиль решения, а ошибка вычисления производной при таком методе в момент $t = 0.003$ превышает 50% от истинного значения.

Отметим, что увеличение числа узлов $\tilde{N}$ не приводит к повышению точности метода, использующего разностный алгоритм 3.1.1. В то же время, для численно-аналитического метода на основе алгоритма 3.1.2 число $N = 5000$ промежутков равномерного разбиения (2.8) единичного отрезка может быть уменьшено без заметной потери точности по крайней мере в три раза. Иначе говоря, применение разностного метода 3.1.1 для решения



Фиг. 10. Пример 3.2.1. (а) – Решение вида (3.9) периодической задачи для уравнения Бюргерса (1.3) при значениях параметров (3.10), найденное разностным методом. Пунктиром обозначены соответствующие графики точного решения. (б) – Графики производной, найденной численно (сплошная линия) и ее точного значения в соответствующий момент времени (пунктир).

вспомогательной линейной задачи (3.11)–(3.13), (1.24) в условиях рассматриваемого примера создает ограничение на точность получаемого численного результата при любом значении N ; при использовании же алгоритма 3.1.2 и при $N > 1500$ точность построенного вычислительного алгоритма определяется явно-неявной схемой (1.13), имеющей второй порядок аппроксимации по τ .

Пример 3.2.2. Рассмотрим начально-краевую задачу для следующего обобщенного уравнения Фишера (см. [2], [12], [13]), т.е. для уравнения (1.2) с правой частью (1.4):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(x)(1 - u^\alpha(x)), \quad \alpha, \lambda > 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, T], \quad (3.15)$$

с условиями (1.8), (1.9), заданными в виде (3.8) хорошо известным (см., например, [12]) явным решением уравнения (3.15)

$$u^{\text{ex}}(x, t) = 2^{-2/\alpha} \left[1 - \text{th} \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\lambda(4+2\alpha)}} (x - \omega t) \right) \right]^{2/\alpha}, \quad \omega := \frac{4 + \alpha}{\sqrt{(4 + 2\alpha)/\lambda}}. \quad (3.16)$$

Численное решение начально-краевой задачи (3.15), (1.8), (1.9), (3.8), (3.16) проведем по схеме, изложенной в разд. 1.3 при следующих значениях параметров:

$$\lambda = 10^{-5}, \quad \alpha = 10, \quad \omega \approx 0.009 \quad (3.17)$$

с шагом по времени $\tau = 10^{-3}$ на промежутке $t \in [0, T]$ при $T = 100$.

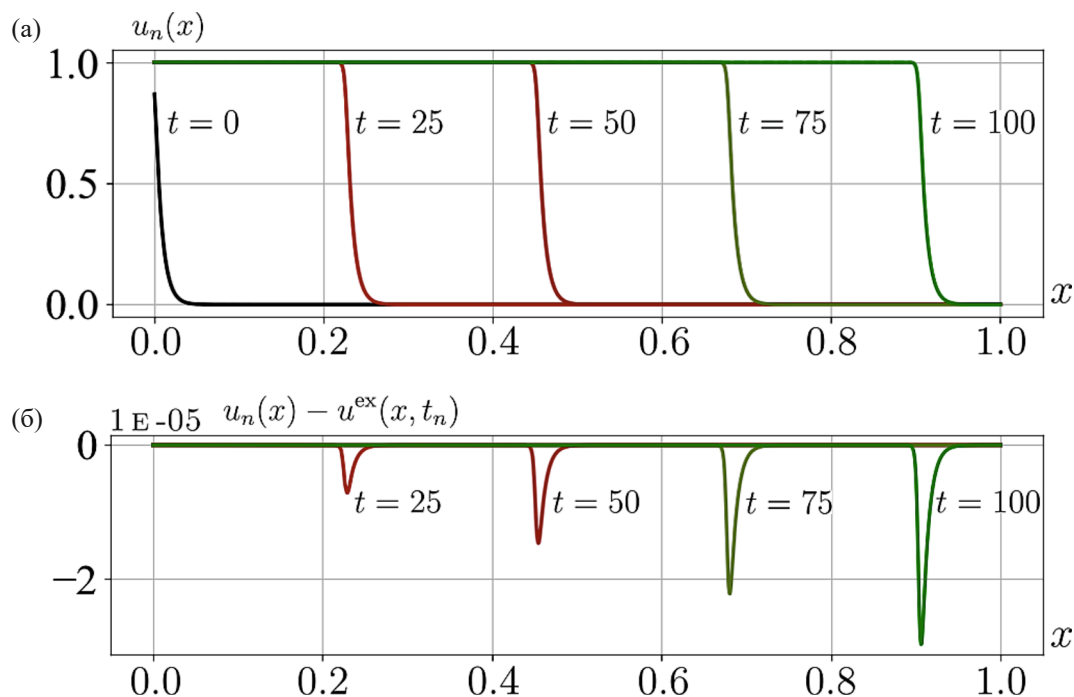
Следуя алгоритму из разд. 1.3, на $(n+1)$ -й итерации этого алгоритма, т.е. при $t = t_{n+1} = (n+1)\tau$, получаем относительно приближенного решения $u_{n+1}(x) \approx u(x, t_{n+1})$ линейную задачу на отрезке $x \in [0, 1]$ для уравнения (1.19), (1.21), которое в рассматриваемом случае принимает вид (3.11) с правой частью, определяемой по формуле

$$g_{n+1}(x) = \frac{5}{3} u_n(x) + \frac{1}{9} u_{n-1}(x) - \frac{2}{3} g_n(x) - \frac{1}{9} g_{n-1}(x) + \tau \left(\frac{3}{2} u_n(x) (1 - u_n^\alpha(x)) - \frac{1}{2} u_{n-1}(x) (1 - u_{n-1}^\alpha(x)) \right), \quad (3.18)$$

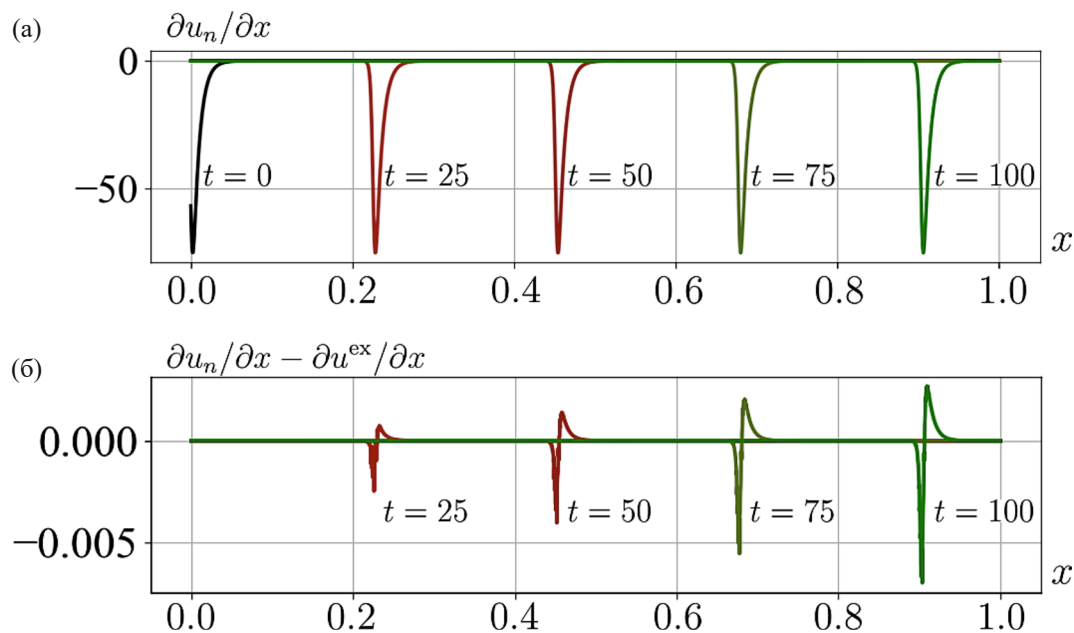
и граничными условиями

$$u_{n+1}(0) = u^{\text{ex}}(0, t_{n+1}), \quad u_{n+1}(L) = u^{\text{ex}}(L, t_{n+1}). \quad (3.19)$$

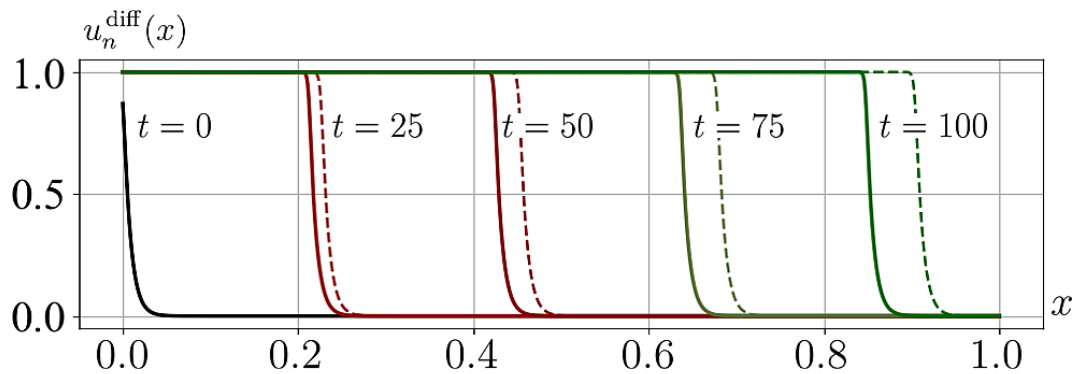
На каждом временном слое решение вспомогательной линейной задачи (3.11), (3.18), (1.22), (3.19), (3.16) построим численно-аналитическим методом, предложенным в разд. 2 и основанным на представлении (2.62), с использованием кусочно полиномиальной интерполяции правой части по $m = 6$ узлам на каждом из $N = 500$ отрезков равномерного разбиения промежутка $[0, 1]$ согласно п. 2.5.1. На фиг. 11 а даны графики численного решения $u_n(x)$ при значениях n , соответствующих различным моментам времени t , а на фиг. 11 б показаны



Фиг. 11. Пример 3.2.2. (а) – Решение типа бегущей волны (3.16) обобщенного уравнения Фишера (3.15), (3.17), найденное численно-аналитическим методом на основе представления (2.62), в моменты времени $t = 0, 25, 50, 75, 100$. (б) – Погрешность вычисленного решения.



Фиг. 12. Пример 3.2.2. (а) – Производная решения, графики которого приведены на фиг. 11 а, полученная численно-аналитическим методом на основе представления (2.63). (б) – Погрешность вычисленной производной.



Фиг. 13. Пример 3.2.2. Решение типа бегущей волны (3.16) обобщенного уравнения Фишера (3.15), (3.17), найденное разностным методом, в моменты времени $t = 0, 25, 50, 75, 100$. Пунктиром обозначены соответствующие графики точного решения.

графики погрешности в те же моменты времени. На фиг. 12 а,б приведены соответственно графики производной по x , вычисленной вместе с решением на основе представления (2.63), и погрешность этого вычисления. Отметим, что графики как самого приближенного решения на фиг. 11 а, так и его производной на фиг. 12 а визуально не отличимы от соответствующих графиков для точного решения (3.16), а относительная погрешность вычислений составляет $\sim 10^{-5}$ для решения и $\sim 10^{-4}$ для его производной.

На фиг. 13 представлены для сравнения графики численного $u_n^{\text{diff}}(x)$ и точного $u^{\text{ex}}(x, t_n)$ решений той же начально-краевой задачи (3.15)–(3.17), (1.8), (1.9), (3.8) при различных n по схеме, изложенной в разд. 1.3, где решение вспомогательной линейной задачи (3.11), (3.18), (1.22), (3.19), (3.16) проведено при помощи разностного алгоритма 3.1.1 на равномерной сетке из $\tilde{N} = (mN) = 3000$ узлов. Графикам точного решения соответствуют пунктирные линии.

Из сопоставления графиков на фиг. 13 видно, что численный метод, использующий разностные аппроксимации производной по пространственной переменной, демонстрирует существенно меньшую скорость распространения бегущей волны по сравнению с целевым значением ω , заданным формулой (3.16). Причиной такого эффекта, как показал проведенный анализ, является то, что разностный метод фактически “игнорирует” сингулярное возмущение, представленное дифференциальным слагаемым с малыми коэффициентами в уравнении (1.19). А именно, если правая часть уравнения (1.19) с достаточной точностью удовлетворяет краевым условиям задачи, то численное решение эквивалентного уравнения оказывается равным правой части.

Напротив, аналитико–численный метод решения линейной задачи, предложенный в разд. 2 настоящей работы, учитывает сингулярное возмущение корректным образом, обеспечивая численный результат с высокой точностью и имея при этом такую же алгоритмическую сложность $O(N)$, как и метод прогонки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов И.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Сек. А. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–25.
2. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eug. 1937. № 7. P. 355–369.
3. Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
4. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence / Ed. by Richard Von Mises, Theodore Von Karman. Elsevier, 1948. V. 1 of Advances in Applied Mechanics. P. 171–199.
5. Hopf E. The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure and Appl. Math. 1950. Vol. 3. № 3. P. 201–230.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
8. Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы. М.: Бином. Лаб. знаний, 2015.

9. *Безродных С.И., Пикунин С.В.* Численно—аналитический метод для уравнения Бюргерса с периодическим краевым условием // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2023. Т. 69. № 2. С. 208—223.
10. *Безродных С.И., Власов В.И.* Аналитико—численный метод расчета взаимодействия физических полей в полупроводниковом диоде // *Матем. моделирование.* 2015. Т. 27. № 7. С. 15—24.
11. *Безродных С.И., Власов В.И.* Краевая задача для моделирования физических полей в полупроводниковом диоде // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2004. Т. 44. № 12. С. 2220—2251.
12. *Wang X.Y.* Exact and explicit solitary wave solutions for the generalised Fisher equation // *Phys. Lett. A.* 1988. V. 131. № 4, 5. P. 277—279.
13. *Кудряшов Н.А.* О точных решениях уравнений семейства Фишера // *Теор. и матем. физ.* 1993. Т. 94. № 2. С. 296—306.
14. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1969. Т. 9. № 4. С. 841—859.
15. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // *Матем. заметки.* 1969. Т. 6. № 2. С. 237—248.
16. *Шишкин Г.И.* Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенного параболического уравнения реакции—диффузии с движущимся сосредоточенным источником // *Матем. моделирование.* 2003. Т. 15. № 2. С. 43—61.
17. *Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
18. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Численное моделирование задач с пограничным слоем // *Матем. моделирование.* 2015. Т. 27. № 11. С. 47—55.
19. *Тефера Д.М., Тирунх А.А., Дерезе Г.А.* Метод операторной подгонки с квадратурной формулой Гаусса для параболической сингулярно возмущенной задачи конвекции—диффузии // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2022. Т. 25. № 3. С. 315—328.
20. *Зельдович Я.Б., Франк-Каменецкий Д.А.* Теория теплового распространения пламени // *Журн. физ. химии.* 1938. Т. 12. № 1. С. 100—105.
21. *Худяев С.И.* Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит, 2003.
22. *Canosa J.* Diffusion in nonlinear multiplicative media // *J. Math. Phys.* 1969. V. 10. № 10. P. 1862—1868.
23. *Turing A.M.* The chemical basis of morphogenesis // *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B.* 1952. V. 237. P. 37—72.
24. *Murray J.D.* Mathematical Biology: I. An Introduction. Interdisciplinary Applied Mathematics 17. 3 ed. New York: Springer-Verlag, 2004.
25. *Тасевич А.Л., Бочаров Г.А., Вольперт В.А.* Уравнения реакции—диффузии в иммунологии // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 12. С. 2048—2059.
26. *Hodgkin A.L., Huxley A.F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. V. 117. № 4. P. 500—544.
27. *FitzHugh R.* Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane // *Bull. Math. Biophys.* 1955. V. 17. № 4. P. 257—278.
28. *Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon // *Proc. IRE.* 1962. V. 50. P. 2061—2070.
29. *Tuckwell H.C.* Introduction to theoretical neurobiology: nonlinear and stochastic theories. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1988. V. 2.
30. *Noble D.* A modification of the Hodgkin—Huxley equations applicable to Purkinje fibre action and pace—maker potentials // *J. Physiology.* 1962. V. 160. P. 317—352.

31. Zeeman E.C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse // Towards a Theoretical Biology. 1972. V. 4. P. 8–67.
32. Aliev R., Panfilov A. A simple two–variable model of cardiac excitation // Chaos, Solitons & Fractals. 1996. V. 7. № 3. P. 293–301.
33. Biktashev V.N. A simplified model of propagation and dissipation of excitation fronts // Inter. J. Bifurcation and Chaos in Appl. Sci. and Engineer. 2003. V. 12. № 13. P. 3605–3619.
34. Жаботинский А.М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974.
35. Aronson D.G., Weinberger H.F. Nonlinear diffusion in population genetics combustion and nerve pulse propagation. New York: Springer-Verlag, 1988.
36. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
37. Аллали К., Жунди Ю., Таук А., Вольперт В. Влияние естественной конвекции на тепловой взрыв в пористой среде // Физика горения и взрыва. 2017. Т. 53. № 2. С. 15–21.
38. Taylor J.E., Cahn J.W., Handwerker C.A. Overview No. 98 I—Geometric models of crystal growth // Acta Metallurgica et Materialia. 1992. V. 40. № 7. P. 1443–1474.
39. Volpert A., Volpert V., Volpert V. Traveling Wave Solutions of Parabolic Systems. Providence, Rhode Island: AMS, 2000. V. 140 of *Translations of mathematical monographs*.
40. Ablowitz M., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher’s equation for a special wave speed // Bulletin of Mathematical Biology. 1979. V. 41. № 6. P. 835–840.
41. Tang S., Weber R. O. Numerical study of Fisher’s equation by a Petrov–Galerkin finite element method // J. Australian Math. Soc. Ser. B. Appl. Math. 1991. V. 33. № 1. P. 27–38.
42. Ascher U.M., Ruuth S.J., Wetton B.T.R. Implicit–explicit methods for time-dependent partial differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 1995. V. 32. № 3. P. 797–823.
43. Ruuth S.J. Implicit–explicit methods for reaction-diffusion problems in pattern formation // J. Mathem. Biology. 1995. V. 34. № 2. P. 148–176.
44. Песин Я.Б., Юрченко А.А. Некоторые физические модели, описываемые уравнением реакции–диффузии, и цепочки связанных отображений // Успехи матем. наук. 2004. Т. 59. № 3(357). С. 81–114.
45. Olmos D., Shizgal B.D. A pseudospectral method of solution of Fisher’s equation // J. Comput. Appl. Math. 2006. V. 193. № 1. P. 219–242.
46. Bastani M., Salkuyeh D.K. A highly accurate method to solve Fisher’s equation // Pramana – J. Phys. 2012. V. 78. P. 335–346.
47. Kudryashov N.A., Zakharchenko A.S. A note on solutions of the generalized Fisher equation // Appl. Math. Lett. 2014. V. 32. P. 53–56.
48. Gasull A., Giacomini H. Explicit travelling waves and invariant algebraic curves // Nonlinearity. 2015. V. 28. № 6. P. 1597.
49. Hasnain S., Saqib M. Numerical study of one dimensional fishers kpp equation with finite difference schemes // Am. J. Comput. Math. 2017. V. 7. P. 70–83.
50. Пикулин С.В. О решениях типа бегущей волны уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 2. С. 244–252.
51. Khater M.M.A., Attia R.A.M., Lu D. Computational and numerical simulations for the nonlinear fractional Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov (FKPP) equation // Physica Scripta. 2020. V. 95. № 5. P. 055213.
52. Khater M.M.A., Attia R.A.M., Abdel-Aty A.-H. et al. Abundant analytical and numerical solutions of the fractional microbiological densities model in bacteria cell as a result of diffusion mechanisms // Chaos, Solitons & Fractals. 2020. V. 136. P. 109824.

53. *Lopez J.L.* On nonstandard chemotactic dynamics with logistic growth induced by a modified complex Ginzburg — Landau equation // *Studies in Appl. Math.* 2021. Access mode: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/sapm.12440>.
54. *Chemeda H. M., Negassa A. D., Merga F. E.* Compact finite difference scheme combined with Richardson extrapolation for Fisher's equation // *Math. Problems in Engineer.* 2022. Access mode: <https://doi.org/10.1155/2022/7887076>.
55. *Zhang W, X. Hu, Ling X., Li W.* Approximate analytical solution of the generalized Kolmogorov — Petrovsky — Piskunov equation with cubic nonlinearity // *Acta Math. Applicatae Sinica, English Series.* 2023. V. 2.
56. *Drabek P., Zahradnikova M.* Traveling waves for generalized Fisher — Kolmogorov equation with discontinuous density dependent diffusion // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2023. V. 46. № 11. P. 12064—12086.
57. *Wongsaijai B., Aydemir T., Ak T., Dhawan S.* Analytical and numerical techniques for initial-boundary value problems of Kolmogorov — Petrovsky — Piskunov equation // *Numer. Meth. Partial Differential Equations.* 2024. V. 40. № 1. P. e22693.
58. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
59. *Canuto C., Hussaini M., Quarteroni A., Zang T.* Spectral Methods in Fluid Dynamics. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.
60. *Солуян С.И. Хохлов Р.В.* Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде // *Вестник МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия.* 1961. № 3. С. 52—61.
61. *Руденко О.В., Солуян С.И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975.
62. *Хохлов Р.В.* К теории ударных радиоволн в нелинейных линиях // *Радиотехника и электроника.* 1961. V. 6. № 6. P. 917—925.
63. *Cole J.D.* On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // *Quarterly of Appl. Math.* 1951. V. 9. № 3. P. 225—236.
64. *Вабищевич П. Н., Васильева М. В.* Явно— неявные схемы для задач конвекции—диффузии—реакции // *Сиб. журн. вычисл. матем.* 2012. Т. 15. № 4. С. 359—369.
65. *Кобельков Г.М.* Численные методы. Ч.2. Мехмат МГУ, 2024. Доступно по адресу: https://vk.com/wall-215637188_162.
66. *Crank J., Nicolson P.* A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heatconduction type // *Math. Proceed. Cambridge Philosophic. Soc.* 1947. № 49. P. 50—67.
67. *Лыкосов В.Н., Глазунов А.В., Кулямин Д.В. и др.* Суперкомпьютерное моделирование в физике климатической системы. М.: МГУ, 2012.
68. *Чуа Л.О., Лин Пен-Мин.* Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы. М.: Энергия, 1980.
69. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
70. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

NUMERICAL AND ANALYTICAL METHOD FOR NONLINEAR KOLMOGOROV–PETROVSKY–PISKUNOV TYPE EQUATIONS

S. I. Bezrodnykh, S. V. Pikulsh*

*119333 Moscow, GSP-1, Vavilov str., 44, Federal Research Center
“Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Russia*

**e-mail: spikulin@gmail.com*

***e-mail: sbzrodnykh@mail.ru*

Received: 15.05.2024

Revised: 13.06.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The question of the effective solution of the basic initial boundary value problems for spatially one-dimensional nonlinear equations of the parabolic type describing reaction–diffusion processes is considered. Such equations include the Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov and Burgers equations. For these problems, a numerical analytical method based on implicit discretization of the differential operator in combination with explicit Adams–Bashforth extrapolation for the nonlinear term of the equation is proposed. At the same time, a new efficient algorithm based on analytical representations using an explicit form of a fundamental solution system has been developed to solve a sequence of emerging linear problems. The effectiveness of the developed method and its advantages over some traditional algorithms have been demonstrated for a number of complex model examples.

Keywords: nonlinear parabolic equations of the reaction–diffusion–advection type, Kolmogorov–Petrovsky–Piskunov equation, Burgers equation, singular perturbation, effective numerical and analytical methods.

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

© 2024 г. Е. Д. Котина^{1,*}, Д. А. Овсянников^{1,**}, Д. С. Харченко^{1,***}

¹199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербургский государственный университет, Россия

*e-mail: e.kotina@spbu.ru

**e-mail: d.a.ovsyannikov@spbu.ru

***e-mail: st098139@student.spbu.ru

Поступила в редакцию 18.03.2024 г.

Переработанный вариант 25.04.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

В статье рассматривается новый подход к построению поля скоростей, который основан на методах теории управления и оптимизации динамики ансамблей траекторий. Данный подход не исключает возможности, что яркость вдоль траекторий движения может изменяться. Это позволяет строить направленные методы оптимизации для определения оптических и неоптических потоков. Поле скоростей задается как некоторая функция, зависящая от вектора произвольных параметров, которые определяются в результате минимизации функционала, заданного на ансамбле траекторий, определяемом этим полем скоростей. Разработан алгоритм для решения задач восстановления поля скоростей с использованием аналитического представления вариации исследуемого функционала по параметрам, определяющим поле скоростей, и с учетом вариации по времени. В работе приведены результаты тестирования предложенного алгоритма, в том числе, с разбиением изображения на подобласти. Библ. 28. Фиг. 10.

Ключевые слова: поле скоростей, оптический поток, пучок траекторий, функционал качества, вариация функционала, оптимизация, обработка изображений.

DOI: 10.31857/S0044466924110035, EDN: KGVSNM

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема восстановления поля скоростей может возникать при решении различных теоретических и практических задач [1–6]. В задачах обработки изображений она известна, как проблема определения оптического потока между двумя последовательными изображениями [7–9], т.е. нахождения векторного поля, которое задает трансформацию первого изображения во второе. Различные подходы к построению оптического потока известны в литературе и широко используются на практике [7–12]. Ключевым предположением является предположение постоянства яркости (или другой характеристики изображения) вдоль траектории движения. Наиболее известные методы построения оптического потока — это методы Хорна–Шанка [7], Лукаса–Канаде [8], Фарнебака [9] и их модификации, методы, использующие аппарат фазового и корреляционного анализа [4–6]. Метод Лукаса–Канаде основывается на двух предположениях — о том, что яркость вдоль траекторий движения остается постоянной, и о том, что соседние пиксели смещаются одинаково. Вследствие второго предположения отыскание поля скоростей происходит для некоторой окрестности. Отыскание решения происходит путем минимизации целевого функционала методом наименьших квадратов. Данный метод хорошо справляется с поставленной задачей при малых смещениях, но в результате получается неплотный оптический поток. В методе Хорна–Шанка в качестве дополнительного условия рассматривается предположение о достаточной гладкости оптического потока на всем изображении. Отыскание поля скоростей происходит путем решения уравнений Эйлера–Лагранжа, которые сводятся к системе разностных уравнений большого порядка и решаются блочными итерационными методами [13]. В отличие от метода Лукаса–Канаде, данный метод позволяет строить плотный оптический поток, но является более чувствительным к шумам, а также требует постановки граничных условий. Метод Фарнебака основывается на аппроксимации окрестности каждого пикселя квадратичной формой, описывающей сигнал каждой окрестности. Отыскание параметров квадратичной формы,

описывающей поле скоростей, происходит с использованием взвешенного метода наименьших квадратов, где весовая функция обычно является гауссовой. Стоит также отметить, что корреляционные методы за счет развитых итерационных подходов позволяют получать достаточно точные оценки поля скоростей. Во всех подходах предполагаются малые смещения на рассматриваемых изображениях.

Задача построения поля скоростей в последнее время также решается при помощи подходов, основанных на использовании нейронных сетей [14–16], для обучения которых требуется достаточно большое количество данных.

В данной работе рассматривается принципиально новый подход, который основан на методах оптимизации и управления пучками траекторий [17, 18]. Предполагается, что яркость вдоль траекторий движения может изменяться. Поле скоростей задается как некоторая функция, зависящая от вектора произвольных постоянных. Предлагается алгоритм построения поля скоростей на основе аналитического представления градиента исследуемого функционала, с учетом вариации по времени и с разбиением изображения на подобласти, с тем, чтобы получить возможность искать поле скоростей для каждой области, определяемое отдельной системой. В этом случае появляется возможность более эффективно использовать линейную модель для построения поля скоростей.

2. ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Оптимизационный подход к определению поля скоростей (поля перемещений) в задачах обработки изображений, основанный на методах управления пучками траекторий [17, 18], был предложен в работах авторов статьи, как на основе непрерывных [19–21], так и на основе дискретных систем [22, 23].

В данной работе рассматривается математическая модель построения оптических и неоптических потоков на основе непрерывных систем. Рассматриваются общая модель движения на основе нелинейной системы и линейная модель. Предлагается алгоритм построения поля скоростей с учетом вариации исследуемого функционала по времени. Заметим, что данный подход может применяться не только для решения задач обработки изображений, но и для других прикладных задач, связанных с восстановлением поля скоростей, поэтому далее дается общая постановка задачи для n -мерного случая, а в случае планарных изображений, имеем $n = 2$.

Рассмотрим общую модель движения

$$\dot{x} = f(t, x, u). \quad (1)$$

Здесь $t \in [0, T]$ — время, $x \in R^n$ есть n -мерный вектор фазовых координат, $u \in U \subset R^r$ есть r -мерный вектор параметров, f — достаточно гладкая n -мерная вектор-функция.

Решение системы (1) обозначим через $x_t = x(t) = x(t, x_0, u)$, $t \in [0, T]$, $x_0 \in M_0$, M_0 — множество начальных значений. Предполагаем далее, что решение задачи Коши для системы (1) определено на интервале $[0, T]$ при произвольном управлении $u \in U$ и любом начальном условии $x_0 \in M_0$. Обозначим через $M_{t,u} = \{x(t, x_0, u), x_0 \in M_0\}$ сечение пучка траекторий в момент времени t при фиксированном векторе u [21].

Введем функцию $\rho = \rho(t, x)$, называемую плотностью распределения и характеризующую интенсивность распределения некоторых частиц в фазовом пространстве переменных $x_1, \dots, x_n$.

Пусть $\rho_0(x)$ есть некоторая заданная плотность распределения. Уравнение, описывающее изменение плотности распределения $\rho_0(x)$ в фазовом пространстве с течением времени в силу уравнений (1), имеет вид [17–19]

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial x} f(t, x, u) + \rho(t, x) \operatorname{div}_x f(t, x, u) = 0, \quad (2)$$

где $\operatorname{div}_x f(t, x, u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(t, x, u)}{\partial x_i}$.

При этом в начальный момент имеем

$$\rho(0, x) = \rho_0(x). \quad (3)$$

Заметим, что функция $\rho = \rho(t, x)$ может быть, в частности, количественной характеристикой (яркостью) изображения, определяемой, например, интенсивностью распределения радиофармпрепарата [19, 26]. Учитывая это будем далее трактовать ее, как яркость изображения.

Уравнение изменения яркости изображения вдоль траекторий системы (1) можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dt}|_{(1)} = -\rho \operatorname{div}_x f(t, x(t), u), \quad (4)$$

с начальным условием $\rho(0, x_0) = \rho_0(x_0)$, $x_0 \in M_0$.

Отметим, что в случае $\operatorname{div}_x f(t, x, u) = 0$ мы имеем оптический поток, в противном случае имеет место неоптический поток.

Пусть $\rho_0(x)$ — известная яркость некоторого изображения в момент $t = 0$. Пусть нам также известна яркость изображения $\hat{\rho}(x)$ при $t = T$. Предполагаем, что движение определяется системой (1), а изменение яркости определяется уравнением (2). Возникает следующая задача.

Необходимо найти вектор параметров u , который определит вектор-функцию $f(t, x, u)$, такую, что при $t = T$ яркость изображения (плотность распределения РФП), определяемая уравнением (2) при условии (3), совпала бы с яркостью изображения $\hat{\rho}(x)$:

$$\rho(T, x) = \hat{\rho}(x). \quad (5)$$

С этой целью рассмотрим задачу минимизации следующего функционала на решениях системы (1), (2):

$$J(u) = \int_{M_{T,u}} g(x_T, \rho(T, x_T)) dx_T, \quad (6)$$

где $g(x, \rho)$ — неотрицательная непрерывно-дифференцируемая по своим параметрам функция. В частности, мы можем положить $g(x, \rho) = q(x)(\rho(T, x(T, x_0, u)) - \hat{\rho}(x))^2$, где $q(x)$ — весовая функция, позволяющая выделить значимые области изображения. Например, можно рассматривать функцию $q = e^{-(x-\bar{x})^2}$, которая позволяет выделить центр изображения или области интереса, где $\bar{x}$ — координаты центра; также можно выделять центр тяжести множества [26].

Минимизируя функционал (6), мы определяем вектор параметров u и восстанавливаем функцию $f(t, x, u)$, таким образом, определяем поле скоростей, задаваемое (1).

Используя методы исследования функционалов типа (6), задаваемых на сечении пучка траекторий в момент T , и учитывая, что T не фиксировано, вариацию функционала (6) можно представить в виде [17–19]

$$\begin{aligned} \delta J = & - \int_0^T \int_{M_{t,u}} (\psi^*(t, x_t) \Delta_u f(t, x_t, u) + \lambda(t, x_t) \Delta_u \operatorname{div}_x f(t, x_t, u)) dx_t dt - \\ & - \Delta T \int_{M_{T,u}} H(T, x_T, \lambda(T, x_T), \psi(T, x_T), u) dx_T. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь и далее знак $*$ означает транспонирование вектора или матрицы,

$$H(t, x, \lambda, \psi, u) = \psi^*(t, x) f(t, x, u) + \lambda(t, x) \operatorname{div}_x f(t, x, u),$$

$$\Delta_u f(t, x_t, u) = f(t, x_t, u + \Delta u) - f(t, x_t, u),$$

$$\Delta_u \operatorname{div}_x f(t, x_t, u) = \operatorname{div}_x f(t, x_t, u + \Delta u) - \operatorname{div}_x f(t, x_t, u).$$

Вспомогательные вектор-функция $\psi(t, x)$ и скалярная функция $\lambda(t, x)$ удовлетворяют вдоль траекторий системы (1) уравнениям

$$\frac{d\psi}{dt} = - \left(\frac{\partial f(t, x(t), u)}{\partial x} + E \operatorname{div}_x f(t, x(t), u) \right)^* \psi - \lambda \left(\frac{\partial \operatorname{div}_x f(t, x(t), u)}{\partial x} \right)^*, \quad (8)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda \operatorname{div}_x f(t, x(t), u). \quad (9)$$

При конечных условиях

$$\psi^*(T, x(T)) = - \frac{\partial g(x(T), \rho(T, x(T)))}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\lambda(T, x(T)) = -g(x(T), \rho(T, x(T))) + \frac{\partial g(x(T), \rho(T, x(T)))}{\partial \rho} \rho(T, x(T)). \quad (11)$$

В формуле (8) и далее E — единичная матрица.

Выражения для компонент градиента функционала (6) имеют вид

$$\frac{\partial J}{\partial u} = - \int_0^T \int_{M_{t,u}} \left(\psi^*(t, x_t) \frac{\partial f(t, x_t, u)}{\partial u} + \lambda(t, x_t) \frac{\partial \operatorname{div}_x f(t, x_t, u)}{\partial u} \right) dx_t dt, \quad (12)$$

$$\frac{\partial J}{\partial T} = - \int_{M_{T,u}} H(T, x_T, \lambda(T, x_T), \psi(T, x_T), u) dx_t. \quad (13)$$

На основе выражений (12), (13) для компонент градиента функционала можно строить различные методы направленного поиска вектора параметров u . Заметим, что исследование функционалов с нефиксированным временем позволит восстанавливать оптические и неоптические потоки не только для случаев достаточно малых смещений, таким образом, появляется возможность реконструкции динамики исследуемых объектов, что отличает данный подход от имеющихся подходов.

Линейная модель. Рассмотрим линейную модель движения

$$\dot{x} = Ax + C. \quad (14)$$

Здесь A – квадратная матрица: $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, C – вектор: $C = \{c_i\}_{i=1}^n$. Таким образом, искомый вектор параметров будет состоять из компонент матрицы A и вектора C :

$$u = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}, c_1, \dots, c_n)^*.$$

Исходя из уравнения (4), можно записать выражение для изменения яркости вдоль траекторий движения

$$\rho(t, x(t, x_0, u)) = \rho_0(x_0) \exp \left[- \int_0^t \operatorname{div}_x f(\tau, x, u) d\tau \right] = \rho_0(x_0) e^{-sp(A)t}.$$

Здесь $sp(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ – след матрицы A .

Заметим, что для оптического потока из условия $\operatorname{div}_x f(t, x, u) = 0$ при использовании линейной модели для данного случая, следует выполнение равенства $sp(A) = 0$.

Выражения (12), (13) для компонент градиента функционала (6), когда поле скоростей, определяется системой (14), будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial a_{ii}} &= - \int_0^T \int_{M_{t,u}} [\psi_i x_i + \lambda] dx_t dt, \quad i = j, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial J}{\partial a_{ij}} &= - \int_0^T \int_{M_{t,u}} \psi_i x_j dx_t dt, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial J}{\partial c_i} &= - \int_0^T \int_{M_{t,u}} \psi_i dx_t dt, \quad i = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial J}{\partial T} &= - \int_{M_{T,u}} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j + c_i) \psi_i + sp(A) \lambda \right) dx_T. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (8), (9) примут следующий вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = -[A + sp(A)E]^* \psi, \quad (16)$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = -sp(A)\lambda \quad (17)$$

с конечными условиями (10), (11).

Полученные выражения (15) можно использовать для реализации оптимизационного алгоритма построения поля скоростей при рассмотрении линейной модели движения.

3. ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ

На основе предложенного оптимизационного подхода был разработан и численно реализован алгоритм построения поля скоростей. В силу полученного представления компонент градиента функционала в аналитическом виде, минимизация функционала проводилась градиентным методом.

Схема работы алгоритма.

Шаг 1. Ввод исходных данных ρ_0 и $\hat{\rho}$, задание конкретной модели (вида функции f), выбор начального приближения вектора параметров u_0 и времени T_0 , ввод неотрицательных констант, использующихся при задании условий остановки работы алгоритма. Номер итерации $k = 0$.

Шаг 2. Вычисление интегрального функционала $J(u_k, T_k)$ на основе формулы (6).

Шаг 3. Определение вспомогательных функций ψ и λ путем интегрирования уравнений (8), (9) при конечных условиях (10), (11); для линейного случая упрощенной системы (16), (17).

Шаг 4. Вычисление компонент градиента функционала $\frac{\partial J}{\partial u}|_{u=u_k}$ и $\frac{\partial J}{\partial T}|_{T=T_k}$ на основе выражений (12), (13), для линейной модели — формулы (15).

Шаг 5. Определение значений параметров на следующем итерационном шаге по формулам:

$$u^{k+1} = u^k - \alpha \frac{\partial J}{\partial u}|_{u=u_k},$$

$$T^{k+1} = T^k - \bar{\alpha} \frac{\partial J}{\partial T}|_{T=T_k},$$

$\alpha, \bar{\alpha}$ — параметры градиентного спуска.

Шаг 6. Проверка условий остановки (достижение заданной точности или заданного количества итераций):

условия остановки не выполнены — $k = k + 1$, возвращение на шаг 2;

условия остановки выполнены — переход на шаг 7.

Шаг 7. Построение поля скоростей, формула (1) — общий случай, (14) — для линейной модели.

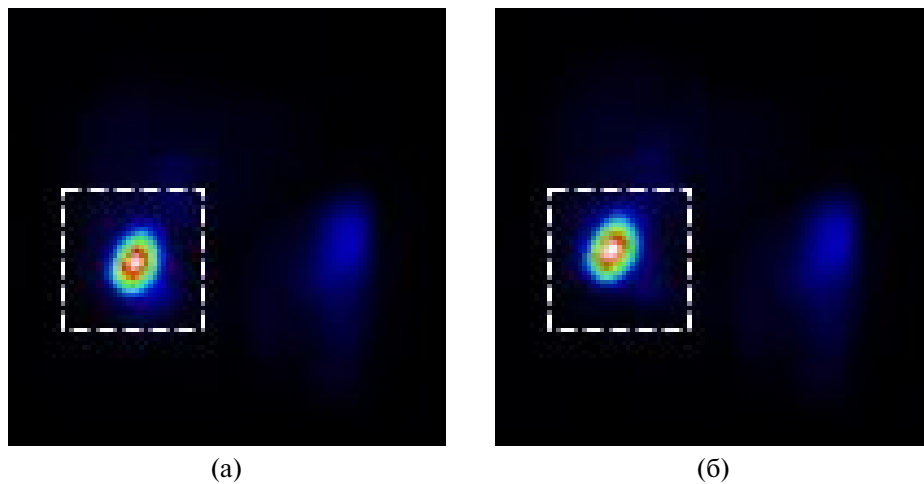
Приведенный выше алгоритм позволяет определить значения искомого вектора параметров u и времени T , и построить поле скоростей в каждой точке изображения по формуле (1) или для линейной модели по формуле (14). Заметим, что в данном подходе нет принципиальных ограничений на величину смещений.

Данный алгоритм был реализован для линейного случая. В основе нахождения вспомогательной вектор функции ψ на шаге 3 лежит метод Рунге-Кутты четвертого порядка, который определяет трудоемкость алгоритма интегрирования. Отметим, что выражение для скалярной функции λ в линейном случае, исходя из (17), (11), можно сразу записать в явном виде $\lambda = \lambda(T)e^{sp(A)(T-t)}$. Если говорить о производительности реализации предложенного алгоритма, то можно сказать, что скорость анализа составляет ~ 28 мкс на вектор скорости при размере области 64×64 пикселя на одну итерацию. Но стоит отметить, что скорость работы алгоритма может быть значительно увеличена путем использования параллельных вычислений, так как в рамках одной итерации используются данные только с прошлой итерации. Помимо этого, как и для случая с корреляционными алгоритмами [24], могут быть использованы вычисления с применением GPU.

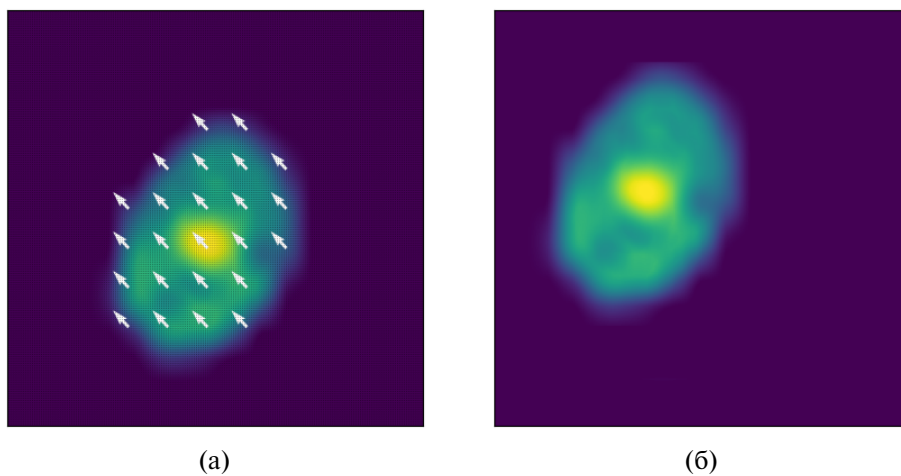
4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Алгоритм был апробирован на тестовых изображениях. В данном разделе приведены результаты работы алгоритма для различных модельных изображений, в частности, радионуклидных. В одном из численных экспериментов была рассмотрена пара изображений, на которых присутствует движение области интереса при проведении динамического радионуклидного исследования [25]. Исходные изображения с выделенными областями интереса представлены на фиг. 1а,б. Далее описан один из возможных алгоритмов для выделения соответствующих областей на изображениях с целью сокращения вычислений. Для выделенных областей был применен приведенный выше алгоритм построения поля скоростей (фиг. 2а).

Также были рассмотрены результаты работы алгоритма с учетом и без учета вариации по времени. На фиг. 3а–в. приведены графики изменения компонент градиента и график изменения компонент вектора C в зависимости от номера итерации без варьирования времени и с учетом вариации по времени.



Фиг. 1. Изображение подвижной области интереса: (а) — кадр 1, (б) — кадр 2.



Фиг. 2. Поле скоростей, построенное на выделенной области: (а) — кадр 1, (б) — кадр 2.

Здесь $\overline{c_1}, \overline{c_2}$ обозначены компоненты вектора C для случая, когда алгоритм учитывает вариацию по времени T , c_1, c_2 — без учета вариации по времени.

Таким образом, при учете вариации по времени для данной пары изображений необходимые параметры были определены уже на 8 итерации, в то время как без учета вариации по времени идентификация значений произошла только к 13 итерации.

4.1. Оптимизационный алгоритм с разбиением на подобласти

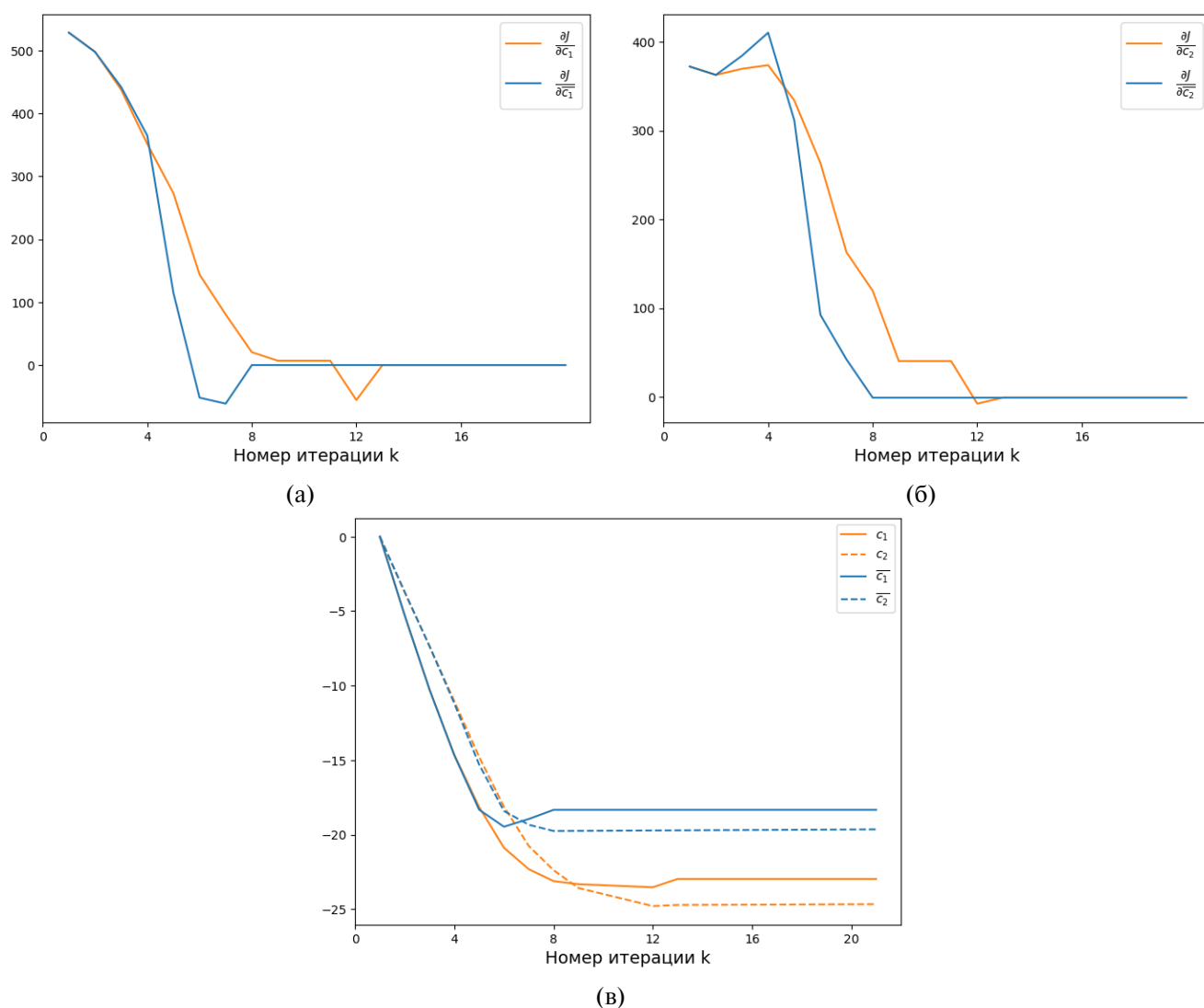
Как правило, описать поле скоростей одной системой для всего изображения бывает затруднительно в силу того, что на изображениях могут присутствовать сложные движения нескольких объектов. Разбивая изображения на подобласти, мы получаем возможность искать поле скоростей для каждой области, определяемое отдельной системой, что может существенно упростить решение задачи. Здесь продуктивно может использоваться линейная модель.

В качестве примера варианта выделения областей, был разработан алгоритм разбиения изображений на подобласти на основе морфологического подхода. Работу алгоритма можно кратко описать следующей блок-схемой, см. фиг. 4.

После выделения областей, в которых присутствует движение, к каждой из них может быть применен описанный выше алгоритм построения поля скоростей.

Данный алгоритм был протестирован на изображениях, на которых присутствует несколько движущихся объектов (фиг. 5а,б). Здесь пунктирными линиями выделены области, внутри которых есть движение между последовательными кадрами.

После того, как было произведено разбиение изображений, к каждой из подобластей был применен оптимизационный алгоритм построения поля скоростей. Результирующее поле скоростей приведено на фиг. 6.



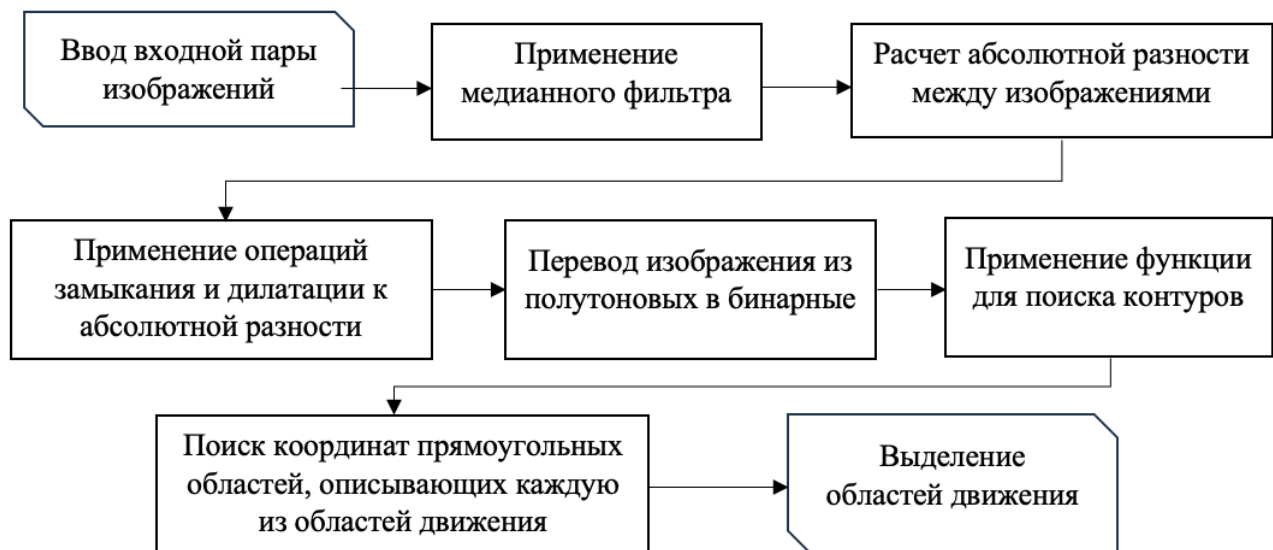
Фиг. 3. (а) — график изменения компоненты 1, (б) — компоненты 2, (в) — график изменения компонент вектора от номера итерации

4.2. Коррекция движения

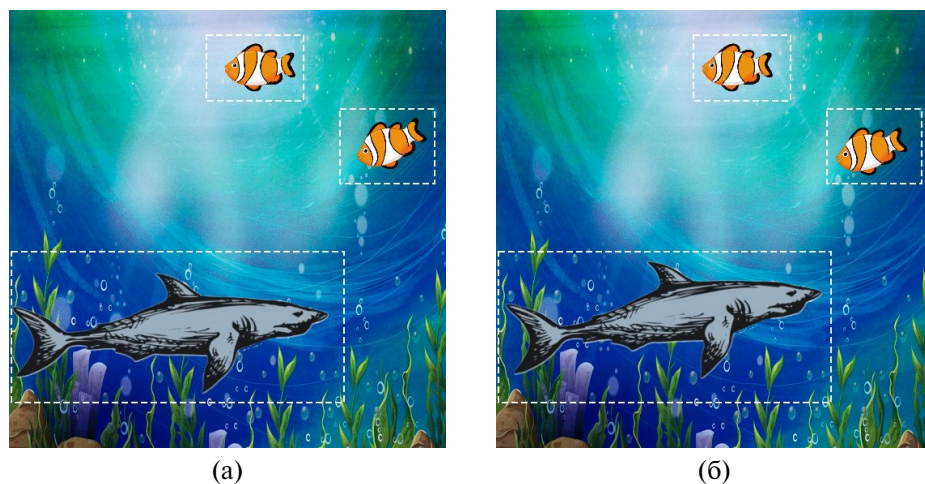
Одним из направлений применения алгоритма построения поля скоростей является диагностическая медицина. В процессе проведения радионуклидного исследования может иметь место движение пациента, что при анализе результатов может привести к их неправильной интерпретации. Поэтому требуется выполнить коррекцию движения для восстановления исходного положения, чтобы получить более точные результаты исследования. На фиг. 7 представлена иллюстрация коррекции движения при проведении динамического исследования головного мозга методом позитронно-эмиссионной томографии (ПЭТ) [27].

Вычисляя поле скоростей, мы можем определить характер и направление движения исследуемого объекта, что в дальнейшем позволит произвести коррекцию. В ходе численного эксперимента были рассмотрены модельные томосцинтиграммы, на которых присутствует движение между кадрами. Был применен алгоритм построения поля скоростей, после чего была выполнена соответствующая коррекция. На фиг. 8–10 приведены результаты работы алгоритма. Поле скоростей представлено на трансверсальном, сагиттальном и корональном срезах. Для каждого из срезов представлены изображения до выполнения коррекции движения, поле скоростей, в направлении которого требуется выполнить коррекцию, и изображение после коррекции.

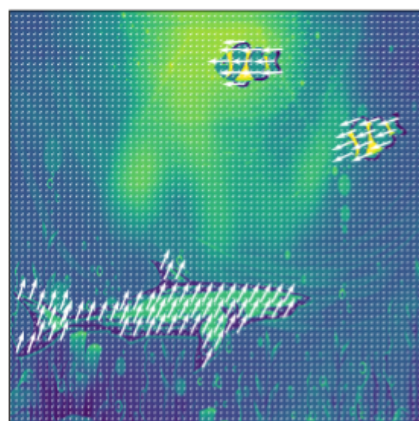
Таким образом, была произведена коррекция движения на модельных томосцинтиграммах в соответствии с полем скоростей, построенным с использованием предложенного в данной статье оптимизационного алгоритма.



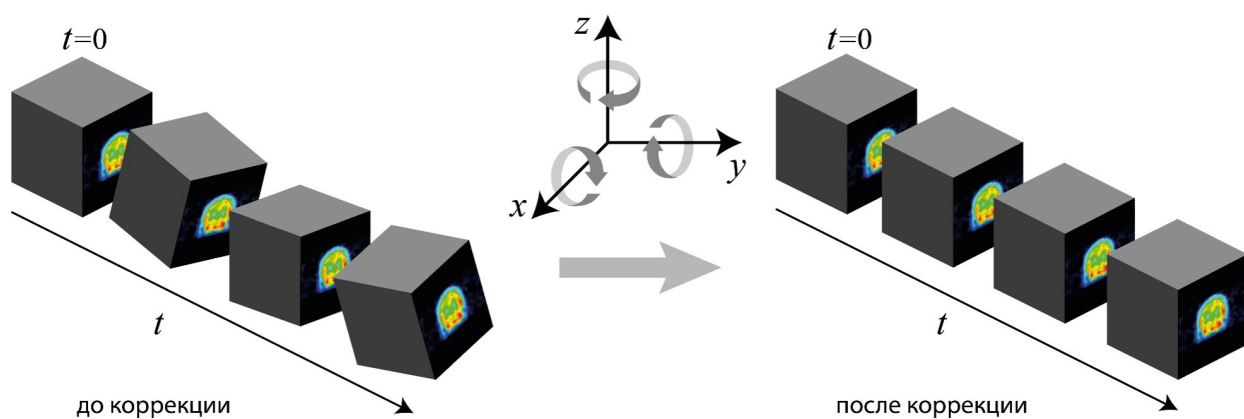
Фиг. 4. Блок-схема работы алгоритма разбиения изображений



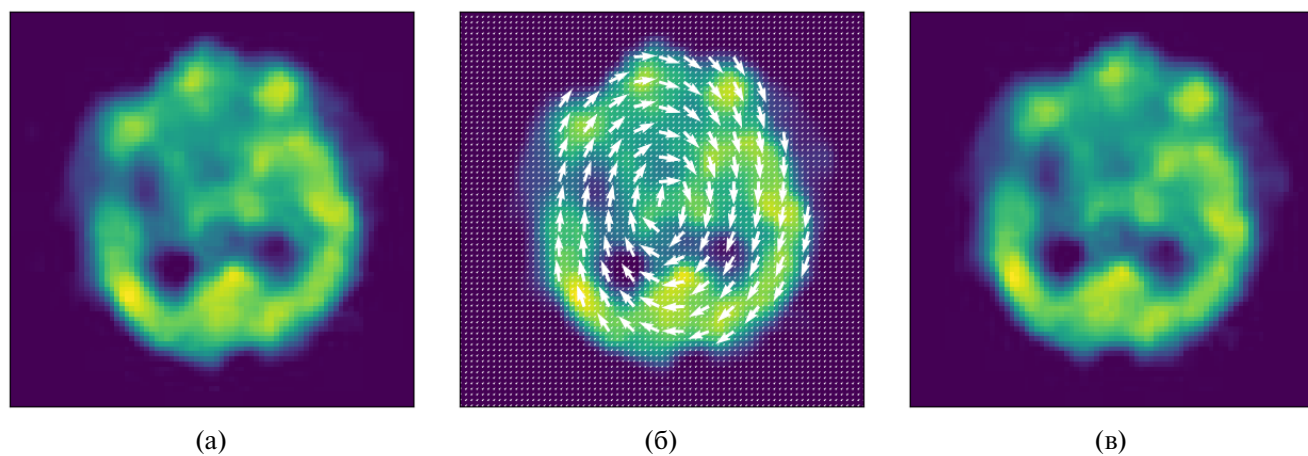
Фиг. 5. (а) — первый кадр с выделенными областями, (б) — второй кадр с выделенными областями.



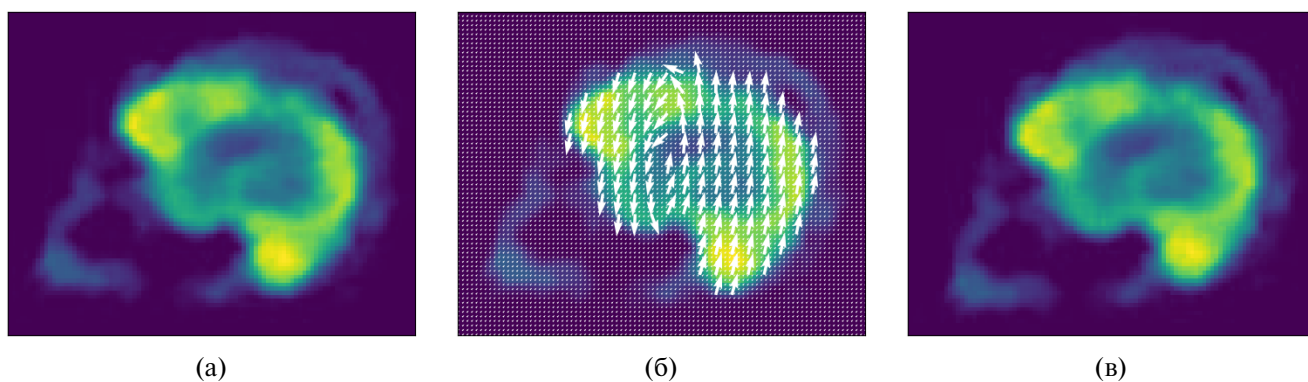
Фиг. 6. Поле скоростей.



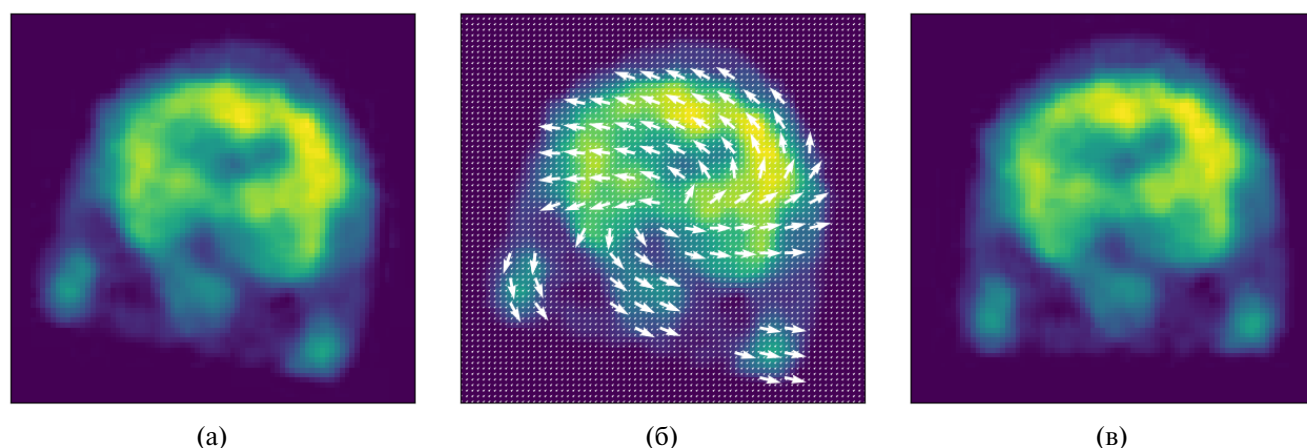
Фиг. 7. Иллюстрация коррекции движения.



Фиг. 8. (а) — трансверсальный срез-до выполнения коррекции, (б) — поле скоростей, (в) — трансверсальный срез-после выполнения коррекции.



Фиг. 9. (а) — сагиттальный срез-до выполнения коррекции, (б) — поле скоростей, (в) — сагиттальный срез-после выполнения коррекции.



Фиг. 10. (а) — корональный срез-до выполнения коррекции, (б) — поле скоростей, (в) — корональный срез-после выполнения коррекции.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение данного алгоритма может быть полезно в различных областях обработки изображений, для обнаружения движения и его коррекции, отслеживания траекторий движения, построения контуров на изображении, для анализа изображений. Особый интерес и развитие данный подход может иметь в радионуклидных исследованиях, для получения, как визуальной, так и количественной информации при обработке диагностических изображений. Реализован алгоритм определения поля скоростей на основе аналитического представления вариации исследуемого функционала. Впервые был реализован алгоритм с учетом вариации по времени, что позволяет проводить реконструкцию динамики и уменьшить время обработки. Реализован алгоритм с разбиением изображения на подобласти, с тем, чтобы получить возможность искать поле скоростей для каждой области, определяемое отдельной системой. В этом случае появляется возможность более эффективно использовать линейную модель. Для разбиения изображения использовался, в частности, алгоритм на основе морфологических операций [28], который отлично зарекомендовал себя при решении задач сегментации изображений.

Полученные результаты могут быть применены для обработки различных последовательностей изображений для определения и анализа изменений на кадрах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ovsyannikov D. A., Kotina E. D.* Reconstruction of velocity field // Proc. of ICAP2012, Rostock-Warnemunde, Germany. 2012. P. 256–258.
2. *Геча В.Я., Жиленев М.Ю., Федоров В.Б., Хрычев Д.А., Худак Ю.И., Шатина А.В.* Поле скоростей движения точек изображения при орбитальной съемке поверхности планеты // Russian Technological Journal. 2020. Т. 8. № 1. С. 97–109.
3. *Скляренко М.С., Фрик П.Г., Ястребов А.Г.* Реконструкция поля скорости по распределенным трассерам // Вычисл. методы и программирование. ВЦ МГУ. 2006. Т. 7. № 1. С. 45–50.
4. *Токарев М.П., Маркович Д.М., Бильский А.В.* Адаптивные алгоритмы обработки изображений частиц для расчета мгновенных полей скорости // Вычисл. технологии. 2007. Т. 12. № 3. С. 109–131.
5. *Зарипов Д.И., Токарев М.П., Лукьянов А.А., Маркович Д.М.* Бессеточный планарный метод Particle Image Velocimetry // Вычисл. методы и программирование. 2022. Т. 23. № 4. С. 328–338.
6. *Карчевский М. Н., Токарев М. П., Ягодницына А. А., Козинкин Л. А.* Корреляционный алгоритм расчета полей скорости в микроканальных течениях с высокой разрешающей способностью // Теплофиз. и аэромеханика. 2015. Т. 22. № 6. С. 775–784.
7. *Horn B.K.P., Schunck B.G.* Determining optical flow // Artificial Intelligence. 1981. № 17. P. 185–203.

8. *Lucas B. D., Kanade T.* An iterative image registration technique with an application to stereo vision // Proc. of Imaging Understanding Workshop. 1981. P. 121–130.
9. *Barron J., Fleet D.* Performance of optical flow techniques // Internat. Journal Computer Vision. 1994. V. 12. P. 43–77.
10. *Farneback G.* Two-Frame Motion Estimation Based on Polynomial Expansion // Lecture Notes in Computer Science. 2003. T. 2749. C. 363–370.
11. *Papenberg, N., Bruhn, A., Brox, T., Didas, S. and Weickert, J.* Highly Accurate Optic Flow Computation with Theoretically Justified Warping // Internat. Journal of Computer Vision. 2006. V. 67. № 2. P. 141–158.
12. *Bruhn, A., Weickert, J., Schnorr, C.* Lucas/Kanade Meets Horn/Schunck: Combining Local and Global Optic Flow Methods // Internat. Journal of Computer Vision. 2005. V. 61. № 3. P. 211–231.
13. *Котина Е. Д.* О сходимости блочных итерационных методов // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т. 3. С. 41–55.
14. *Bailer C., Varanasi K., Stricker D.* CNN-based patch matching for optical flow with thresholded hinge embedding loss // Proc. of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2017. C. 3250–3259.
15. *Fischer P., Dosovitskiy A., Ilg E., Hausser P., Hazrbas C., Golkov V.* FlowNet: Learning Optical Flow with Convolutional Networks // Proc. of the IEEE Internat. Conference on Computer Vision (ICCV). 2015.
16. *Lin Z., Liang T., Xiao T., Wang Y., Tang Z., Yang M.* FlowNAS: Neural Architecture Search for Optical Flow Estimation // Computer Vision and Pattern Recognition. 2022.
17. *Овсянников Д. А.* Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 228 с.
18. *Овсянников Д. А.* Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. 312 с.
19. *Kotina E., Ovsyannikov D., Elizarova M.* Optimization approach to the velocity field determining problem // Cybernetics and Physics. 2022. V. 11. № 3. P. 131–135.
20. *Bazhanov P., Kotina E., Ovsyannikov D., Ploskikh V.* Optimization algorithm of the velocity field determining in image processing // Cybernetics and Physics. 2018. V. 7. № 4. P. 174–181.
21. *Kotina, E., Bazhanov, P., Ovsyannikov, D.* Optimization Method of the Velocity Field Determination for Tomographic Images // Stability and Control Processes. SCP 2020. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. 2022. Springer, Cham.
22. *Котина Е.Д., Леонова Е.Б., Плоских В.А.* Обработка радионуклидных изображений с использованием дискретных систем // Вестн. Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15. № 4. С. 543–553.
23. *Kotina E. D., Leonova E. B., Ploskikh V. A.* Displacement Field Construction Based on a Discrete Model in Image Processing Problems // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 39. С. 3–16.
24. *Nazarov, N. A., Terekhov, V. V.* High level GPU-accelerated 2D PIV framework in Python // Computer Physics Communications. 2024. T. 295. № 109009.
25. *Kotina, E., Ploskikh, V., Shirikolobov, A.* Digital Image Processing in Nuclear Medicine. Physics of Particles and Nuclei. 2022. V. 53. № 2. P. 535–540.
26. *Овсянников Д. А., Котина Е. Д.* О некоторых задачах программного управления пучком траекторий. Часть I // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 46. С. 51–65.
27. *Бажанов П. В.* Исследование модели процесса сбора проекционных данных ПЭТ // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 276–281.

28. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. Издание 3-е, исправленное и дополненное. М.: Техносфера, 2012. 1104 с.

AN OPTIMIZATION APPROACH TO THE PROBLEM OF DETERMINING THE VELOCITY FIELD IN IMAGE PROCESSING PROBLEMS

E. D. Kotina*, D. A. Ovsyannikov**, D. S. Kharchenko***

199034 St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg State University

*e-mail: e.kotina@spbu.ru

**e-mail: d.a.ovsyannikov@spbu.ru

***e-mail: st098139@student.spbu.ru

Received: 18.03.2024

Revised: 25.04.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The article considers a new approach to the construction of the velocity field, which is based on the methods of control theory and optimization of dynamics of ensembles of trajectories. This approach does not exclude the possibility that the brightness along the trajectories may vary. This makes it possible to build directional optimization methods for determining optical and non-optical flows. The velocity field is defined as some function depending on the vector of arbitrary parameters, which are determined as a result of minimizing the functional set on the ensemble of trajectories defined by this velocity field. An algorithm has been developed to solve the problems of restoring the velocity field using an analytical representation of the variation of the functional under study according to the parameters determining the velocity field, and taking into account the variation in time. The paper presents the results of testing the proposed algorithm, including splitting the image into subdomains.

Keywords: velocity field, optical flow, trajectory beam, quality functional, functional variation, optimization, image processing.

К ИЗУЧЕНИЮ РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЙ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ВИДЕ СУММ РЯДОВ И ИХ НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ

© 2024 г. М. Ю. Ватолкин^{1,*}¹426069 Ижевск, ул. Студенческая, 7, Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, Россия

*e-mail: vmyu6886@gmail.com

Поступила в редакцию 17.02.2024 г.

Переработанный вариант 30.04.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

В теории матричного уравнения $\dot{X} = A(t)X$ большую роль играет известное представление решения в виде ряда. В случае скалярного уравнения n -го порядка также интересно получить представление решения в виде скалярного ряда, члены которого строятся по коэффициентам исходного уравнения. Изучаются различные представления фундаментальной системы решений однородного квазидифференциального уравнения n -го порядка в виде скалярных рядов, члены которых строятся по коэффициентам исходного уравнения. В качестве примера в виде таких рядов строятся представления элементов фундаментальной системы решений уравнения Бесселя, рассматриваемого на промежутке $[\vartheta, +\infty)$, где $\vartheta > 0$. Библ. 27.

Ключевые слова: квазидифференциальное уравнение, функция Коши, фундаментальная система решений, сумма ряда, начальные приближения, уравнение Бесселя.

DOI: 10.31857/S0044466924110041, EDN: KGSNLM

1. ВВЕДЕНИЕ

Квазидифференциальное уравнение является простым и в то же время достаточно эффективным обобщением понятия обыкновенного дифференциального уравнения. По-видимому, начало систематическому изучению неоднородного уравнения n -го порядка (с комплекснозначными коэффициентами) было положено работами Д. Ю. Шина (см. [1], [2]). Обстоятельства сложились таким образом, что его работы на долгое время были игнорированы и забыты, и только начиная с 1975 г. стали появляться работы А. Zettl, W.N. Everitt и их соавторов, посвященные этой тематике. Они же возродили интерес к работам Д. Ю. Шина. В настоящее время существует огромное количество работ по этой тематике и опубликованных в различных математических журналах в период с 1975 г. по настоящее время. В монографии [3] изучаются регулярные и сингулярные самосопряженные квазидифференциальные краевые задачи в гильбертовом пространстве функций, которое авторы связывают со сложными симплектическими пространствами, этот подход представляет собой эффективный метод для изучения квазидифференциальных операторов, рассматриваемых авторами в работе, а также для анализа и классификации самосопряженных краевых условий. В статье [4] авторы развивают теорию Вейля–Титчмарша для сингулярных квазидифференциальных операторов второго порядка, рассматриваемых на открытых интервалах вещественной оси, авторы вводят и изучают максимальный и минимальный операторы Штурма–Лиувилля, а также — их самосопряженные расширения. В этой работе рассматриваются самосопряженные граничные условия (разделенные и связанные) и строится резольвента самосопряженного расширения минимального оператора. Кроме того, в [4] строится и изучается сингулярная функция Вейля–Титчмарша–Кодайры, соответствующая любому самосопряженному расширению оператора Штурма–Лиувилля с разделенными граничными условиями, а также строится спектральная функция, соответствующая самосопряженному расширению такого оператора. В статье [5] изучается регулярное представление сингулярных квазидифференциальных выражений второго порядка. В работе [6] исследуются краевые задачи четвертого порядка с разрывными краевыми условиями. Доказано, что собственные значения непрерывно и гладко зависят от параметров в коэффициентах уравнения и граничных условиях, а также найдены формулы для производных собственных значений по параметрам. В статье [7] рассматривается косодиагональная постоянная матрица, удовлетворяющая условию

$C^{-1} = -C = C^*$, далее строятся самосопряженные области для регулярных C -симметричных дифференциальных операторов четного порядка с двухточечными граничными условиями. Монографии [8] и [9] представляют собой обзор основных известных результатов, полученных для задачи Штурма—Лиувилля, монография [9] содержит также обзор новых результатов для этой задачи. Например, в [9] доказывается, что некоторые специальные задачи Штурма—Лиувилля на собственные значения эквивалентны циклическим матричным задачам Якоби на собственные значения. В [9] разработан новый подход к решению задач Штурма—Лиувилля с периодическими краевыми условиями. В статье [10] исследуется дифференциальный оператор четвертого порядка с краевыми условиями, зависящими от спектрального параметра и других параметров, найдены выражения для производных собственных значений по параметрам. Обратим внимание также на известную монографию [11], посвященную теории обобщенных квазидифференциальных уравнений. В [11] рассматриваются различные концепции построения квазипроизводных и, кроме того, — векторные и матричные обобщенные квазидифференциальные уравнения.

Квазидифференциальные уравнения используются во многих работах российских математиков. Тематика этих работ многогранна. Так, например, в статье [12] получены асимптотические представления для решений уравнения Штурма—Лиувилля второго порядка при больших значениях комплексного параметра λ в случае, когда в одном из коэффициентов уравнения имеется распределение первого порядка сингулярности. В работе [13] рассматривается класс операторов Штурма—Лиувилля, порожденных симметрическими (формально самосопряженными) квазидифференциальными выражениями второго порядка с локально интегрируемыми коэффициентами. Основной целью работы [13] является построение теории Титчмарша-Вейля для операторов типа Штурма—Лиувилля с коэффициентами-распределениями. Вопрос о дефектных числах оператора и об условиях на коэффициенты, обеспечивающих реализацию случая предельной точки или предельного круга Вейля, является центральным вопросом статьи [13]. Изучению асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений при различных предположениях относительно их коэффициентов и корректному определению дифференциальных уравнений в случае, когда производные понимаются в смысле теории распределений, посвящены работы [14] и [15]. В [15] получены асимптотические формулы для фундаментальной системы решений квазидифференциального уравнения нечетного порядка с комплексным параметром λ .

В настоящей статье квазидифференциальные уравнения изучаются на предмет представления их решений в виде сумм рядов, члены которых строятся по коэффициентам исходного уравнения. Насколько нам известно, такие представления ранее систематически не изучались.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИИ КОШИ

2.1. Определение квазидифференциального уравнения и известные формы представления его решений

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — открытый интервал, $P = (p_{ik})_0^n$ — нижняя треугольная матрица (функции $p_{ik}(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{R}$) такая, что $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а функции $1/p_{ii}(\cdot)$ ($i \in 1 : n-1$), $p_{ik}(\cdot)/p_{ii}(\cdot)$ ($i \in 1 : n$, $k \in 0 : i-1$) локально суммируемы в I . Определим квазипроизводные ${}_P^k x$ ($k \in 0 : n$) функции $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ равенствами

$${}_P^0 x \doteq p_{00}x, \quad {}_P^k x \doteq p_{kk} \frac{d}{dt} ({}_P^{k-1} x) + \sum_{v=0}^{k-1} p_{kv} ({}_P^v x) \quad (k \in 1 : n). \quad (1)$$

Линейным однородным квазидифференциальным называется уравнение

$$({}_P^n x)(t) = 0, \quad t \in I. \quad (2)$$

Его решением называется всякая функция $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные ${}_P^k x$ ($k \in 0 : n-1$) и почти всюду в I удовлетворяющая уравнению (2) (см. [16], [17]).

Линейным неоднородным квазидифференциальным называется уравнение

$$({}_P^n x)(t) \doteq ({}_P^n x)(t) = f(t), \quad t \in I \quad (f : I \rightarrow \mathbb{R}). \quad (3)$$

В монографии [18] рассматривается самосопряженное квазидифференциальное уравнение четного порядка $(-1)^m (p_0 x^{(m)})^{(m)} + (-1)^{m-1} (p_1 x^{(m-1)})^{(m-1)} + \dots + p_m x = f(t)$. Оно получается из уравнения (3) при

$$p_{kk} = 1 \quad (k \in 0 : m-1, \quad m+1 : n),$$

$$p_{i,n-i} = (-1)^i p_{i-m} \quad (i \in m : n), \quad p_{ik} = 0 \quad (i \in 1 : n, \quad k < i; \quad k \neq n - i).$$

Уравнение

$$\sum_{k=0}^n p_k(\ell_k x)(t) = f(t), \quad \ell_0 x \doteq p_0 x, \quad \ell_k x \doteq p_k \frac{d}{dt}(\ell_{k-1} x) \quad (k \in 1 : n),$$

изучавшееся в [19] (см. также [20]–[24] и [25]), можно записать в виде неоднородного квазидифференциального уравнения (3). В работах [26, 27] рассмотрена система уравнений первого порядка, которую тоже можно записать в виде неоднородного уравнения (3).

Решением уравнения (3) называется всякая функция $x(\cdot)$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные до порядка $n - 1$ включительно и удовлетворяющая (3) почти всюду в I . Если функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а функции

$$1/p_{vv}(\cdot) \quad (v \in 1 : n - 1), \quad p_{vk}(\cdot)/p_{vv}(\cdot) \quad (v \in 1 : n, \quad k \in 0 : v - 1), \quad f/p_{nn}(\cdot)$$

локально суммируемы в I , то задача Коши для уравнения (3) при начальных условиях $(\overset{k}{P}x)(a) = \gamma_k \quad (k \in 0 : n - 1, \quad a \in I, \quad \gamma_k \in \mathbb{R})$ эквивалентна задаче

$$\dot{z} = A(t)z + \tilde{f}(t), \quad z(a) = \gamma, \quad (4)$$

где $z(t) \doteq (\alpha_P x)(t) \doteq (\overset{0}{P}x(t), \dots, \overset{n-1}{P}x(t))^T$, $\tilde{f} \doteq (0, \dots, 0, f/p_{nn})^T$,

$$A = \begin{pmatrix} -p_{10}/p_{11} & 1/p_{11} & 0 & \dots & 0 \\ -p_{20}/p_{22} & -p_{21}/p_{22} & 1/p_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{p_{n-1,0}}{p_{n-1,n-1}} & -\frac{p_{n-1,1}}{p_{n-1,n-1}} & -\frac{p_{n-1,2}}{p_{n-1,n-1}} & \dots & \frac{1}{p_{n-1,n-1}} \\ -p_{n0}/p_{nn} & -p_{n1}/p_{nn} & -p_{n2}/p_{nn} & \dots & -p_{n,n-1}/p_{nn} \end{pmatrix},$$

$\gamma \doteq (\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})^T$, T – знак транспонирования.

Задача (4) однозначно разрешима, а с нею и исходная задача Коши для уравнения (3) имеет единственное решение, компоненты которого, квазипроизводные $\overset{k}{P}x \quad (k \in 0 : n - 1)$, локально абсолютно непрерывны в I (см. [16], [17]). Например (см. там же), пусть $n = 2$ и в матрице P положим

$$p_{00}(t) = p_{11}(t) = p_{22}(t) \doteq \sqrt[3]{t}, \quad p_{10}(t) \doteq t^{-3/5}, \quad p_{21}(t) = p_{20}(t) \doteq 0, \quad I = (-c, c), \quad \text{где } 0 < c < +\infty.$$

Тогда решением уравнения $(\overset{2}{P}x)(t) = 0, \quad t \in I$, удовлетворяющим начальному условию $(\overset{0}{P}x)(0) = 1$, является функция $x(t) = t^{-1/3} \exp(-15 \sqrt[15]{t})$. Согласно определениям квазипроизводных, имеем

$$\overset{0}{P}x(t) = \exp(-15 \sqrt[15]{t}), \quad \overset{1}{P}x(t) = t^{1/3} \left(\exp(-15 \sqrt[15]{t}) \right)' + t^{-3/5} \exp(-15 \sqrt[15]{t}).$$

Каждое из слагаемых в $\overset{1}{P}x(t)$ при $t = 0$ разрывно, а их сумма $\overset{1}{P}x(t) \equiv 0$ является абсолютно непрерывной функцией.

Для квазидифференциального уравнения справедливы основные утверждения общей теории обыкновенного дифференциального уравнения. Так, однородное квазидифференциальное уравнение имеет фундаментальную систему решений $\{u_v(\cdot)\}_0^{n-1}$, для которой определитель $W_P(t) \doteq \det(\overset{v}{P}u_k(t))_0^{n-1}$ не обращается в нуль ни в одной точке из I . Частное решение уравнения (3), удовлетворяющее нулевым начальным условиям $(\alpha_P u_*)(a) = 0$, имеет вид $u_*(t) = \int_a^t C(t, s) (f(s)/p_{nn}(s)) ds \quad (t \in I)$, где

$$C(t, s) = \begin{vmatrix} \overset{0}{P}u_0(s) & \dots & \overset{0}{P}u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\overset{n-2}{P}u_0)(s) & \dots & (\overset{n-2}{P}u_{n-1})(s) \\ u_0(t) & \dots & u_{n-1}(t) \end{vmatrix} / W_P(s)$$

есть функция Коши уравнения (2), она по аргументу t является его решением и удовлетворяет начальным условиям $\overset{k}{P}C(t, s)|_{t=s} = 0 \quad (k \in 0 : n - 2), \quad \overset{n-1}{P}C(t, s)|_{t=s} = 1$. Общее решение уравнения (3) дается формулой

$u = c_0 u_0 + c_1 u_1 + \dots + c_{n-1} u_{n-1} + u_*$, где c_v есть произвольные постоянные. Определитель $W_P(\cdot)$ локально абсолютно непрерывен, он удовлетворяет уравнению $dW_P/dt = - \sum_{v=0}^{n-1} (p_{v+1,v}(t)/p_{v+1,v+1}(t)) W_P(t)$. Имеет место аналог формулы Остроградского-Лиувилля

$$W_P(t) = W_P(a) \exp \int_a^t \left(- \sum_{v=0}^{n-1} (p_{v+1,v}(\tau)/p_{v+1,v+1}(\tau)) \right) d\tau.$$

Уравнение (3) обладает формально сопряженным в смысле Лагранжа уравнением (см. [16], [17])

$$(\ell^+ y)(t) \doteq (-1)^n ({}_R y)(t) = g(t), \quad t \in I \quad (g: I \rightarrow \mathbb{R}),$$

где $R = (r_{vk})_0^n$ — нижняя треугольная матрица,

$$r_{vk} = (-1)^{v+k} p_{n-k,n-v} p_{n-v,n-v}/p_{n-k,n-k} \quad (k \in 0 : v, v \in 0 : n). \quad (5)$$

Это означает, что имеет место почти для всех $t \in I$ тождество Лагранжа

$$\begin{aligned} y(t) (\ell x)(t) - x(t) (\ell^+ y)(t) &\equiv \frac{d}{dt} [x, y](t), \\ [x, y](t) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} ({}^{k-1}_P x)(t) ({}^{n-k}_R y)(t) \end{aligned}$$

(для всех функций $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, имеющих локально абсолютно непрерывные квазипроизводные до порядка $n-1$ включительно). Пусть $C^*(t, s)$ есть функция Коши сопряженного однородного уравнения. Имеет место соотношение ${}_P C(t, s) = (-1)^{n-1} {}_R C^*(s, t)$ (см. там же).

Уравнение (3), таким образом, общее, оно не обязательно четного порядка и не является, вообще говоря, самосопряженным, если этого заранее не предполагать. Поэтому общепринятые простые и лаконичные обозначения квазипроизводных (см. [18]) заменены в нашем случае на более сложные обозначения, так как при переходе к сопряженному уравнению, матрица, с помощью которой строятся квазипроизводные, меняется. Неоднородное квазидифференциальное уравнение (3) позволяет с единой точки зрения рассматривать различные уравнения, которые принято называть «обобщенными», «уравнениями с особенностями в коэффициентах» и т. п. Обыкновенное дифференциальное уравнение с локально суммируемыми коэффициентами и его формально сопряженное в смысле Лагранжа уравнение также представляют собой частные случаи квазидифференциального уравнения (3).

Квазидифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах в случае, если коэффициенты

$$p_{vk} = 0 \quad (k \in 0 : v-2, v \in 2 : n).$$

2.2. О представлении решений уравнения (2) в терминах функции Коши

Пусть $Lz \doteq \dot{z} - Az$, $B = (b_{vj})_1^n$, $b_{vj} = a_{vj} \delta_{v+1,j}$ ($v, j \in 1 : n$, δ_{vj} — символ Кронекера),

$$N = A - B, \quad Mz \doteq \dot{z} - Bz.$$

Система $Mz = 0$ эквивалентна квазидифференциальному уравнению

$$({}_Q^n x)(t) = 0, \quad t \in I, \quad Q \doteq \text{diag}(p_{00}, p_{11}, \dots, p_{n-1,n-1}, 1). \quad (6)$$

Фундаментальная система решений уравнения (6) такова

$$\begin{aligned} {}_Q^0 w_0(t) &= 1, \quad {}_Q^0 w_1(t) = \int_a^t ds/p_{11}(s), \\ {}_Q^v w_v(t) &= \int_a^t \frac{ds_0}{p_{11}(s_0)} \int_a^{s_0} \frac{ds_1}{p_{22}(s_1)} \cdots \int_a^{s_{v-2}} \frac{ds_{v-1}}{p_{vv}(s_{v-1})} \quad (v \in 2 : n-1). \end{aligned} \quad (7)$$

Пусть, далее, $\{u_v\}_0^{n-1}$ — фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая условиям $(\alpha_P u_v)(a) = (\alpha_Q w_v)(a)$ ($v \in 0 : n-1$), $C_L(t, s) = (c_{vj}(t, s))_1^n$ — матрица Коши однородной системы (4). Пусть

$$v_v \doteq \alpha_P u_v - \alpha_Q w_v.$$

Так как $v_v(a) = 0$ и $0 = L(\alpha_P u_v) = L(\alpha_Q w_v) + L v_v = M(\alpha_Q w_v) - N(\alpha_Q w_v) + L v_v$, т.е. $L v_v = N(\alpha_Q w_v)$, то

$$(\alpha_P u_v)(t) = (\alpha_Q w_v)(t) + \int_a^t C_L(t, s) N(\alpha_Q w_v)(s) ds \quad (v \in 0 : n-1). \quad (8)$$

Равенство (8) для первых координат имеет вид

$${}_0^0 u_v(t) = {}_Q^0 w_v(t) - \int_a^t \sum_{j=1}^n c_{1j}(t, s) \sum_{\mu=0}^{j-1} \frac{p_{j\mu}(s)}{p_{jj}(s)} {}_Q^\mu w_v(s) ds \quad (v \in 0 : n-1). \quad (9)$$

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$c_{1, n-j}(t, s) = (-1)^{n+j-1} {}_R^j C^*(s, t) \quad (j \in 0 : n-1),$$

где квазипроизводные в правой части берутся по первому аргументу.

Доказательство. Так как $C_L(t, s) = V(t)V^{-1}(s)$, где $V(\cdot)$ — фундаментальная матрица системы (4) ($\tilde{f}(t) \equiv 0$), то $c_{1j}(t, s)$ ($j \in 1 : n$) представляются в виде отношения двух определителей: знаменатель равен $\det({}_P^{v-1} u_{k-1}(s))_1^n$, а числитель получается из знаменателя заменой j -й строки строкой $({}_P^0 u_0(t), \dots, {}_P^0 u_{n-1}(t))$. Отсюда

$$c_{1n}(t, s) = {}_P^0 C(t, s) = (-1)^{n-1} {}_R^0 C^*(s, t),$$

так что утверждение леммы для $j = 0$ верно. Предположим его справедливость для некоторого j ($0 < j < n-1$).

Найдем $\left({}_R^j C^*(s, t)\right)_s'$, учитывая отмечавшееся выше представление для $c_{1j}(t, s)$, определения (5) матрицы R и квазипроизводных (1), и полагая для краткости записи $g(s) \doteq \frac{(-1)^{n+j-1}}{|V(s)|^2}$, $h(s) \doteq (-1)^j |V(s)|$:

$$\begin{aligned} \left({}_R^j C^*(s, t)\right)_s' &= (-1)^{n+j-1} (c_{1, n-j}(t, s))_s' = (-1)^{n+j-1} \times \\ &\times \left(\frac{1}{|V(s)|} \begin{vmatrix} {}_P^0 u_0(s) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(s) \\ {}_P^1 u_0(s) & \dots & {}_P^1 u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-j-2} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j-2} u_{n-1}(s) \\ {}_P^0 u_0(t) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(t) \\ {}_P^{n-j} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j} u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-1} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-1} u_{n-1}(s) \end{vmatrix} \right)_s' = g(s) \left(h(s) \begin{vmatrix} {}_P^0 u_0(s) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(s) \\ {}_P^1 u_0(s) & \dots & {}_P^1 u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-j-2} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j-2} u_{n-1}(s) \\ {}_P^{n-j} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j} u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-2} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-2} u_{n-1}(s) \\ ({}_P^{n-1} u_0(s))' & \dots & ({}_P^{n-1} u_{n-1}(s))' \\ {}_P^0 u_0(t) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(t) \end{vmatrix} \right)' + \\ &+ \begin{vmatrix} {}_P^0 u_0(s) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(s) \\ {}_P^1 u_0(s) & \dots & {}_P^1 u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-j-2} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j-2} u_{n-1}(s) \\ {}_P^{n-j} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j} u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-3} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-3} u_{n-1}(s) \\ ({}_P^{n-2} u_0(s))' & \dots & ({}_P^{n-2} u_{n-1}(s))' \\ {}_P^{n-1} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-1} u_{n-1}(s) \\ {}_P^0 u_0(t) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} ({}_P^0 u_0(s))' & \dots & ({}_P^0 u_{n-1}(s))' \\ {}_P^1 u_0(s) & \dots & {}_P^1 u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-j-2} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j-2} u_{n-1}(s) \\ {}_P^{n-j} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-j} u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}_P^{n-1} u_0(s) & \dots & {}_P^{n-1} u_{n-1}(s) \\ {}_P^0 u_0(t) & \dots & {}_P^0 u_{n-1}(t) \end{vmatrix} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(-1)^j \left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ {}^1_P u_0(s) & \dots & {}^1_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-j-2}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j-2}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j}_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-1}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-1}_P u_{n-1}(s) \\ {}^0_P u_0(t) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(t) \end{array} \right| \left(\left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ {}^1_P u_0(s) & \dots & {}^1_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ ({}^{n-1}_P u_0(s))' & \dots & ({}^{n-1}_P u_{n-1}(s))' \end{array} \right| + \dots \right) = \\
& = \frac{(-1)^{n-1}}{|V(s)|^2} \left(|V(s)| \left(- \sum_{\mu=0, \mu \neq j}^{n-1} \frac{p_{n-\mu, n-\mu-1}(s)}{p_{n-\mu, n-\mu}(s)} \times \right. \right. \\
& \quad \times \left. \left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & {}^0_P u_1(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ {}^1_P u_0(s) & {}^1_P u_1(s) & \dots & {}^1_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-j-2}_P u_0(s) & {}^{n-j-2}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j-2}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j}_P u_0(s) & {}^{n-j}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j}_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-1}_P u_0(s) & {}^{n-1}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-1}_P u_{n-1}(s) \\ {}^0_P u_0(t) & {}^0_P u_1(t) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(t) \end{array} \right| - \frac{p_{n, n-j-1}(s)}{p_{nn}(s)} \times \right. \\
& \quad \times \left. \left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-j-2}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j-2}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j}_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-2}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-2}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j-1}_P u_0(s) & \dots & {}^{n-j-1}_P u_{n-1}(s) \\ {}^0_P u_0(t) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(t) \end{array} \right| - \dots - \frac{p_{n-j+1, n-j-1}(s)}{p_{n-j+1, n-j+1}(s)} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{p_{n-j-1, n-j-1}(s)} \left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & {}^0_P u_1(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-j-3}_P u_0(s) & {}^{n-j-3}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j-3}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j-1}_P u_0(s) & {}^{n-j-1}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j-1}_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-1}_P u_0(s) & {}^{n-1}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-1}_P u_{n-1}(s) \\ {}^0_P u_0(t) & {}^0_P u_1(t) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(t) \end{array} \right| + \right. \\
& \quad \left. \left. + |V(s)| \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{p_{n-\mu, n-\mu-1}(s)}{p_{n-\mu, n-\mu}(s)} \left| \begin{array}{ccc} {}^0_P u_0(s) & {}^0_P u_1(s) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(s) \\ {}^1_P u_0(s) & {}^1_P u_1(s) & \dots & {}^1_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-j-2}_P u_0(s) & {}^{n-j-2}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j-2}_P u_{n-1}(s) \\ {}^{n-j}_P u_0(s) & {}^{n-j}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-j}_P u_{n-1}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^{n-1}_P u_0(s) & {}^{n-1}_P u_1(s) & \dots & {}^{n-1}_P u_{n-1}(s) \\ {}^0_P u_0(t) & {}^0_P u_1(t) & \dots & {}^0_P u_{n-1}(t) \end{array} \right| \right) = \\
& = (-1)^{n-1} (-1)^j \left(\sum_{\mu=0}^j \frac{p_{n-\mu, n-j-1}(s)}{p_{n-\mu, n-\mu}(s)} c_{1, n-\mu}(t, s) + \frac{c_{1, n-j-1}(t, s)}{p_{n-j-1, n-j-1}(s)} \right) = \\
& = (-1)^{n+j-1} \sum_{\mu=0}^j (-1)^{n+\mu-1} \frac{p_{n-\mu, n-j-1}(s)}{p_{n-\mu, n-\mu}(s)} {}^\mu_R C^*(s, t) + (-1)^{n+j-1} \frac{c_{1, n-j-1}(t, s)}{p_{n-j-1, n-j-1}(s)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеет место равенство

$$\left({}^j_R C^*(s, t) \right)'_s = \sum_{\mu=0}^j (-1)^{j+\mu} \frac{p_{n-\mu, n-j-1}(s)}{p_{n-\mu, n-\mu}(s)} {}^\mu_R C^*(s, t) + (-1)^{n+j-1} \frac{c_{1, n-(j+1)}(t, s)}{p_{n-(j+1), n-(j+1)}(s)},$$

отсюда получаем следующее соотношение $c_{1,n-(j+1)}(t, s) = (-1)^{n+(j+1)-1} {}^j_R C^*(s, t)$, т.е. справедливость утверждения леммы для $j + 1$. По индукции оно верно для любого $j \in 0 : n - 1$. Лемма доказана.

Из равенства (9) и леммы 1 следует представление

$${}_P^0 u_v(t) = {}_Q^0 w_v(t) + \int_a^t \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+j} {}^j_R C^*(s, t) \sum_{\mu=0}^{n-j-1} \frac{p_{n-j,\mu}(s)}{p_{n-j,n-j}(s)} {}^\mu_Q w_v(s) ds \quad (v \in 0 : n - 1). \quad (10)$$

3. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1. Представление решений уравнения (2) рядами в случае наиболее простого выбора начальных приближений

Пусть

$$A_{n-\mu-1,v}^0(t) \doteq {}^\mu_Q w_v(t) \quad (\mu \in 0 : n - 1), \quad (11)$$

$$a_{kv}^j(t) \doteq \sum_{\mu=0}^{n-k-1} \frac{p_{n-k,\mu}(t)}{p_{n-k,n-k}(t)} A_{n-\mu-1,v}^j(t) \quad (k \in 0 : n - 1), \quad (12)$$

$$A_{0v}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t a_{0v}^j(s) ds, \quad (13)$$

$$A_{kv}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t \left(a_{kv}^j(s) + \frac{A_{k-1,v}^{j+1}(s)}{p_{n-k,n-k}(s)} \right) ds \quad (14)$$

$$(k \in 1 : n - 1, v \in 0 : n - 1, j = 0, 1, 2, \dots).$$

Теорема 1. Фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая начальным условиям

$$({}^i_P u_v)(a) = \delta_{vi} \quad (v, i \in 0 : n - 1), \quad (15)$$

может быть представлена в виде

$${}_P^0 u_v(t) = \sum_{j=0}^m (-1)^j A_{n-1,v}^j(t) + \int_a^t \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n+m+j} {}^j_R C^*(s, t) a_{jv}^m(s) ds \quad (16)$$

$$(v \in 0 : n - 1, m = 0, 1, 2, \dots).$$

Доказательство. При $m = 0$ представление (16) следует из (10) и (11).

Пусть представление (16) имеет место для некоторого $m > 0$. Покажем, что тогда оно справедливо и для $m + 1$. Преобразуем второе слагаемое в (16) с помощью определений матрицы R и квазипроизводных (1), и используя интегрирование по частям

$$\begin{aligned} & \int_a^t {}^0_R C^*(s, t) a_{0v}^m(s) ds = - \int_a^t ({}^0_R C^*(s, t))'_s A_{0v}^{m+1}(s) ds = \\ & = - \int_a^t \frac{1}{p_{n-1,n-1}(s)} \left(p_{n-1,n-1}(s) ({}^0_R C^*(s, t))'_s - \frac{p_{n,n-1}(s)p_{n-1,n-1}(s)}{p_{nn}(s)} {}^0_R C^*(s, t) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{p_{n,n-1}(s)p_{n-1,n-1}(s)}{p_{nn}(s)} {}^0_R C^*(s, t) \right) A_{0v}^{m+1}(s) ds = \\ & = - \int_a^t \frac{p_{n,n-1}(s)}{p_{nn}(s)} {}^0_R C^*(s, t) A_{0v}^{m+1}(s) ds - \int_a^t {}^1_R C^*(s, t) \frac{A_{0v}^{m+1}(s)}{p_{n-1,n-1}(s)} ds. \end{aligned}$$

Аналогично, для $k \in 1 : n - 2$ получаем

$$\begin{aligned} & (-1)^k \int_a^t {}^k_R C^*(s, t) \left(a_{kv}^m(s) + \frac{A_{k-1,v}^{m+1}(s)}{p_{n-k,n-k}(s)} \right) ds = \\ & = \int_a^t \sum_{\mu=0}^k (-1)^{\mu+1} \frac{p_{n-1,n-k-1}(s)}{p_{n-\mu,n-\mu}(s)} {}^\mu_R C^*(s, t) A_{kv}^{m+1}(s) ds + \\ & + (-1)^{k+1} \int_a^t {}^{k+1}_R C^*(s, t) \frac{A_{kv}^{m+1}(s)}{p_{n-k-1,n-k-1}(s)} ds. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-1} \int_a^t {}^{n-1}_R C^*(s, t) \left(a_{n-1,v}^m(s) + \frac{A_{n-2,v}^{m+1}(s)}{p_{11}(s)} \right) ds = \\ & = (-1)^{n+1} A_{n-1,v}^{m+1}(t) + \int_a^t \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{\mu+1} \frac{p_{n-\mu,0}(s)}{p_{n-\mu,n-\mu}(s)} {}^\mu_R C^*(s, t) A_{n-1,v}^{m+1}(s) ds. \end{aligned}$$

Из доказанных равенств получаем

$$\int_a^t \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j {}^j_R C^*(s, t) a_{jv}^m(s) ds = (-1)^{n+1} A_{n-1,v}^{m+1}(t) - \int_a^t \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j {}^j_R C^*(s, t) a_{jv}^{m+1}(s) ds,$$

что и означает справедливость представления (16) для $m + 1$. По индукции утверждение теоремы справедливо для всех значений $m = 0, 1, 2, \dots$. Теорема доказана.

Доказанную теорему можно рассматривать как некий «квазидифференциальный» аналог формулы Тейлора с остаточным членом в форме интеграла.

Напомним, что в настоящей работе всюду предполагается, что функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а функции

$$1/p_{ii}(\cdot) \quad (i \in 1 : n - 1), \quad p_{ik}(\cdot)/p_{ii}(\cdot) \quad (i \in 1 : n, k \in 0 : i - 1)$$

локально суммируемы в I . Для краткости записи в формулировках нижеприводимых теорем 2 и 3 эти предположения повторно не оговариваются.

Теорема 2. Пусть $p_{vv}(t) > 0$ почти всюду в I ($v \in 1 : n - 1$), функции

$$1/p_{vv}(t) \quad (v \in 1 : n - 1), \quad p_{vk}(t)/p_{vv}(t) \quad (v \in 1 : n, k \in 0 : v - 1)$$

локально ограничены в существенном на I . Тогда фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая начальным условиям (15), представима в виде

$${}_P^0 u_v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{n-1,v}^j(t) \quad (t \in I, v \in 0 : n - 1). \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $v \in 0 : n - 1$. Формально продифференцируем ряд (17)

$$({}_P^0 u_v)' = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu (A_{n-1,v}^\mu)' = \frac{p_{10}}{p_{11}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} A_{n-1,v}^\mu + \frac{1}{p_{11}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu A_{n-2,v}^\mu,$$

откуда

$${}_P^1 u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu A_{n-2,v}^\mu(t).$$

Пусть при некотором m ($1 < m < n - 1$) выполняется равенство

$${}_P^m u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} A_{n-m-1,v}^{\mu}(t). \quad (18)$$

Формально продифференцируем равенство (18) с помощью определений (11)–(14)

$$\begin{aligned} ({}_P^m u_v)' &= \frac{p_{m+1,0}}{p_{m+1,m+1}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} A_{n-1,v}^{\mu} + \dots \\ &\dots + \frac{p_{m+1,m}}{p_{m+1,m+1}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu+1} A_{n-m-1,v}^{\mu} + \frac{1}{p_{m+1,m+1}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} A_{n-m-2,v}^{\mu}. \end{aligned}$$

Получим

$${}_P^{m+1} u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} A_{n-m-2,v}^{\mu}(t).$$

А это есть равенство (18) для $m + 1$. При $m = n - 1$ имеет место равенство

$${}_P^{n-1} u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} A_{0,v}^{\mu}(t).$$

Отсюда, после формального дифференцирования, получим что

$${}_P^n u_v(t) = 0 \quad (t \in I, \quad v \in 0 : n - 1). \quad (19)$$

Обоснуем теперь законность почленного дифференцирования рядов (17) и (18) при $m \in 1 : n - 1$. Пусть $[a, T] \subset I$, где $T > 0$, $T \in \mathbb{R}$. Для этого покажем, что ряды $\sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} A_{n-m,v}^{\mu}(t)$ ($m \in 1 : n$) и полученные из них почленным дифференцированием сходятся абсолютно и равномерно на $[a, T]$. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &\doteq 1 + \int_a^t \sum_{\mu=0}^{n-1} |p_{n,\mu}(s)| ds / p_{nn}(s), \\ \varphi_{n-k}(t) &\doteq 1 + \int_a^t \left(\sum_{\mu=0}^{n-k-1} |p_{n-k,\mu}(s)| + 1 \right) ds / p_{n-k,n-k}(s) \quad (k \in 1 : n - 1), \\ \varphi_0(t) &\doteq \sum_{\mu=0}^{n-1} A_{n-1,\mu}^0(t). \end{aligned}$$

Из определения (11) и формул (7) получаем, что

$$\begin{aligned} A_{n-1,0}^0(t) &= 1, \quad A_{n-1,1}^0(t) = \int_a^t ds / p_{11}(s), \\ A_{n-1,v}^0(t) &= \int_a^t \frac{ds_0}{p_{11}(s_0)} \int_a^{s_0} \frac{ds_1}{p_{22}(s_1)} \dots \int_a^{s_{v-2}} \frac{ds_{v-1}}{p_{vv}(s_{v-1})} \quad (v \in 2 : n - 1). \end{aligned} \quad (20)$$

Докажем справедливость оценки

$$|A_{n-m,v}^k(t)| \leq \varphi_0(t) \left(\prod_{\mu=1}^n \varphi_{\mu}(t) \right)^k (k!)^{-1} \quad (21)$$

$$(m = n, n - 1, \dots, 1; \quad v \in 0 : n - 1; \quad k = 0, 1, 2, \dots).$$

Для $k = 0, m = n, n - 1, \dots, 2$

$$A_{n-m,v}^0(t) = {}^{m-1}_Q w_v(t),$$

где ${}^{m-1}_Q w_v(t)$ либо тождественный нуль, либо одна из функций (20).

Из определения $\varphi_0(\cdot)$ и равенств (20) следует, что

$$A_{n-m,v}^0(t) \leq \varphi_0(t) \quad (m = n, n - 1, \dots, 2; v \in 0 : n - 1)$$

(для $m = 1$ справедливость такого неравенства следует из определения $\varphi_0(\cdot)$ и положительности всех функций в (20)). Таким образом, для $k = 0, m = n, n - 1, \dots, 1, v \in 0 : n - 1$, оценка (21) доказана.

Пусть для некоторого $k > 0$ и названных m и n неравенства (21) справедливы. Покажем их справедливость и для $k + 1$ при тех же m и n .

Индукцией по m можно показать, что

$$|A_{n-m,v}^{k+1}(t)| \leq \varphi_0(t) \left(\prod_{\mu=m}^n \varphi_\mu(t) \right)^{k+1} \left(\prod_{\mu=1}^{m-1} \varphi_\mu(t) \right)^k ((k+1)!)^{-1} \\ (m = n, n - 1, \dots, 1; v \in 0 : n - 1; t \in [a, T]).$$

Учитывая, что $\varphi_\mu(t) \geq 1$ ($\mu \in 0 : n$), усилим эту оценку до оценки (21) для $k + 1$. По индукции оценка (21) имеет место для всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Условия настоящей теоремы и оценка (21) согласно признаку Вейерштрасса обеспечивают равномерную сходимость рядов (17) и (18) для $m = 1, \dots, n - 1$, и полученных из них почленным дифференцированием. Таким образом, почленное дифференцирование их, обосновано.

Суммы рядов в правой части (17) удовлетворяют в точке $t = a$ тем же условиям, что и ${}_Q^0 w_v(\cdot)$ ($v \in 0 : n - 1$). Следовательно, эти суммы линейно независимы на $[a, T]$ и согласно уравнению (19) образуют фундаментальную систему решений уравнения (2). Теорема доказана.

3.2. Случай обыкновенного дифференциального уравнения при наиболее простом выборе начальных приближений

Рассмотрим случай обыкновенного дифференциального уравнения. Для обыкновенного дифференциального уравнения

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0 \quad (22)$$

условия теоремы 2 могут быть расширены, а определения (11)–(14) заменены более простыми. Пусть

$$A_v^0(t) \doteq (t - a)^v / v!, \quad (23)$$

$$a_v^j(t) \doteq \sum_{\mu=0}^{n-1} p_{n-\mu}(t) (A_v^j(t))^{(\mu)}, \quad (24)$$

$$A_v^{j+1}(t) \doteq \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} a_v^j(s) ds \\ (v \in 0 : n - 1, j = 0, 1, 2, \dots). \quad (25)$$

Замечание 1. (В. Я. Дерр) Пусть функции $p_k(\cdot)$ ($k \in 1 : n$) локально суммируемы в I . Тогда фундаментальная система решений уравнения (22) имеет вид

$$u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu A_v^\mu(t) \quad (v \in 0 : n - 1).$$

3.3. Представление решений уравнения (2) рядами в случае более сложного выбора начальных приближений

В настоящем пункте предлагается представление фундаментальной системы решений уравнения (2) в виде сумм других рядов, которые также сходятся к функциям ${}_P^0 u_i(t)$ ($t \in I, i \in 0 : n - 1$). Пусть сейчас $Q \doteq Q_1 + Q_2$, где

$$Q_1 \doteq \text{diag}(p_{00}, p_{11}, \dots, p_{n-1,n-1}, p_{nn}),$$

а матрица $Q_2 = (q_{ij})_0^n$ строится следующим образом: $q_{ij} \doteq p_{ij} \delta_{i,j+1}$ ($i, j \in 0 : n$). Известно, что фундаментальная система решений уравнения $(\frac{n}{Q}x)(t) = 0, t \in I$, удовлетворяющая начальным условиям $({}_P^0 w_i)(a) = \delta_{vi}$ ($v, i \in 0 : n - 1$), в этом случае имеет вид (см. [16], [17]) (ср. с равенствами (7))

$$\begin{aligned}
{}_Q^0 w_0(t) &= \exp \left(- \int_a^t \frac{p_{10}(\tau)}{p_{11}(\tau)} d\tau \right), \\
{}_Q^0 w_i(t) &= \int_a^t \frac{dt_1}{p_{11}(t_1)} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{p_{22}(t_2)} \cdots \int_a^{t_{i-1}} \frac{dt_i}{p_{ii}(t_i)} \exp \left(- \sum_{v=1}^{i+1} \int_{t_{v-1}}^{t_v} \frac{p_{v,v-1}(\tau)}{p_{vv}(\tau)} d\tau \right) \\
&\quad (t \in I, t_0 = t, t_n = a, i \in 1 : n-1).
\end{aligned} \tag{26}$$

Пусть сейчас (ср. с определениями (11)–(14))

$$A_{n-v-1,i}^0(t) \doteq {}_Q^v w_i(t) \quad (v \in 0 : n-2), \tag{27}$$

$$a_{ki}^0(t) \doteq \sum_{v=0}^{n-k-2} \frac{p_{n-k,v}(t)}{p_{n-k,n-k}(t)} A_{n-v-1,i}^0(t) \quad (k \in 0 : n-2), \quad a_{n-1,i}^0(t) \doteq 0, \tag{28}$$

$$a_{ki}^j(t) \doteq \sum_{\mu=0}^{n-k-1} \frac{p_{n-k,\mu}(t)}{p_{n-k,n-k}(t)} A_{n-\mu-1,i}^j(t), \quad \text{если } j \geq 1 \quad (k \in 0 : n-1), \tag{29}$$

$$A_{0i}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t a_{0i}^j(s) ds, \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
A_{ki}^{j+1}(t) &\doteq \int_a^t \left(a_{ki}^j(s) + \frac{A_{k-1,i}^{j+1}(s)}{p_{n-k,n-k}(s)} \right) ds \\
&\quad (k \in 1 : n-1, \quad i \in 0 : n-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots).
\end{aligned} \tag{31}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. Пусть $p_{vv}(t) > 0$ почти всюду в I ($v \in 1 : n-1$), функции

$$1/p_{vv}(t) \quad (v \in 1 : n-1), \quad p_{vk}(t)/p_{vv}(t) \quad (v \in 1 : n, k \in 0 : v-1)$$

локально ограничены в существенном на I . Тогда фундаментальная система решений уравнения (2), удовлетворяющая начальным условиям (15), представима в виде

$${}_P^0 u_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{n-1,i}^j(t) \quad (t \in I, i \in 0 : n-1). \tag{32}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2, за исключением одного момента, а, именно, равенства (20) необходимо заменить равенствами

$$\begin{aligned}
A_{n-1,0}^0(t) &= \exp \left(- \int_a^t \frac{p_{10}(\tau)}{p_{11}(\tau)} d\tau \right), \\
A_{n-1,v}^0(t) &= \int_a^t \frac{dt_1}{p_{11}(t_1)} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{p_{22}(t_2)} \cdots \int_a^{t_{v-1}} \frac{dt_v}{p_{vv}(t_v)} \exp \left(- \sum_{j=1}^{v+1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{p_{j,j-1}(\tau)}{p_{jj}(\tau)} d\tau \right) \\
&\quad (t_0 = t, t_n = a, v \in 1 : n-1).
\end{aligned} \tag{33}$$

И, далее, пройти по ходу доказательства теоремы 2, но заменяя везде ссылки на равенства (20) ссылками на равенства (33). Теорема доказана.

В силу более точного и соответственно более сложного (снова ср. с равенствами (7)) выбора начальных приближений к элементам фундаментальной системы решений уравнения (2), ряды, находящиеся в правых частях представлений (32), являются более быстро сходящимися к решениям уравнения (2), по сравнению с рядами в правых частях представлений (17). Представления (32) могут быть использованы, наряду с представлениями (17), например, для приближенного построения элементов фундаментальной системы решений исходного квазидифференциального уравнения (2).

3.4. Случай обыкновенного дифференциального уравнения при более сложном выборе начальных приближений

Снова рассмотрим случай обыкновенного дифференциального уравнения (22). Определим «вспомогательное» дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} = 0. \quad (34)$$

Пусть $\{A_0^0(t), \dots, A_{n-1}^0(t)\}$ — фундаментальная система решений уравнения (34), удовлетворяющая начальным условиям $(A_v^0(a))^{(i)} = \delta_{vi}$ ($v, i \in 0 : n-1$). Введем следующие обозначения (ср. с определениями (23)–(25)):

$$a_v^0(t) \doteq \sum_{\mu=0}^{n-2} p_{n-\mu}(t) (A_v^0(t))^{(\mu)}, \quad (35)$$

$$a_v^j(t) \doteq \sum_{\mu=0}^{n-1} p_{n-\mu}(t) (A_v^j(t))^{(\mu)}, \quad \text{если } j \geq 1, \quad (36)$$

$$A_v^{j+1}(t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} a_v^j(s) ds \quad (v \in 0 : n-1, j = 0, 1, 2, \dots). \quad (37)$$

Замечание 2. Пусть функции $p_k(\cdot)$ ($k \in 1 : n$) локально суммируемы в I . Тогда фундаментальная система решений уравнения (22) имеет вид

$$u_v(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu A_v^\mu(t) \quad (v \in 0 : n-1).$$

3.5. Пример к замечаниям 1 и 2

В качестве примера к замечаниям 1 и 2 приведем построение фундаментальной системы решений уравнения Бесселя, которое будем рассматривать не на всей вещественной оси, а на промежутке $[\vartheta, +\infty)$, т.е.

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right)x = 0, \quad t \in [\vartheta, +\infty), \quad \vartheta > 0. \quad (38)$$

Построим фундаментальную систему решений $\{u_0(t), u_1(t)\}$ уравнения (38), удовлетворяющую начальным условиям $u_0(\vartheta) = 1$, $(u_0(t))'|_{t=\vartheta} = 0$ и $u_1(\vartheta) = 0$, $(u_1(t))'|_{t=\vartheta} = 1$.

Уравнение (34) примет вид $x'' + \frac{1}{t}x' = 0$, $t \in [\vartheta, +\infty)$. Его фундаментальная система решений $\{A_0^0(t), A_1^0(t)\}$, удовлетворяющая начальным условиям $A_0^0(\vartheta) = 1$, $(A_0^0(t))'|_{t=\vartheta} = 0$ и $A_1^0(\vartheta) = 0$, $(A_1^0(t))'|_{t=\vartheta} = 1$ такова: $\{A_0^0(t) = 1, A_1^0(t) = \vartheta \ln(t/\vartheta)\}$.

Построим функцию $u_0(t)$. По формулам (35)–(37) найдем

$$\begin{aligned} a_0^0(t) &= 1 - \frac{v^2}{t^2}, \quad A_0^1(t) = \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) ds, \\ a_0^1(t) &= \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) ds + \frac{1}{t} \int_{\vartheta}^t \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) ds = \\ &= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) + \frac{1}{t} \right) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) ds, \\ A_0^2(t) &= \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) d\tau ds, \\ a_0^2(t) &= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) + \frac{1}{t} \right) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) d\tau ds, \end{aligned}$$

$$A_0^3(t) = \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mu^2} \right) d\mu d\tau ds$$

и так далее. Решение $u_0(t)$ уравнения (38) представимо в виде

$$\begin{aligned} u_0(t) &= A_0^0(t) - A_0^1(t) + A_0^2(t) - A_0^3(t) + \dots = \\ &= 1 - \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) ds + \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\tau^2} \right) d\tau ds - \\ &\quad - \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \times \\ &\quad \times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mu^2} \right) d\mu d\tau ds + \dots \end{aligned} \quad (39)$$

Построим функцию $u_1(t)$. По формулам (35)–(37) найдем

$$\begin{aligned} a_1^0(t) &= \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{t^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{t}{\vartheta} \right), \quad A_1^1(t) = \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) ds, \\ a_1^1(t) &= \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{t^2} \right) \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) ds + \frac{1}{t} \int_{\vartheta}^t \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) ds = \\ &= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{t^2} \right) + \frac{1}{t} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) ds, \\ A_1^2(t) &= \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\tau^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{\tau}{\vartheta} \right) d\tau ds, \\ a_1^2(t) &= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{t^2} \right) + \frac{1}{t} \right) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\tau^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{\tau}{\vartheta} \right) d\tau ds, \\ A_1^3(t) &= \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \times \\ &\quad \times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{\mu^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{\mu}{\vartheta} \right) d\mu d\tau ds \end{aligned}$$

и так далее. Решение $u_1(t)$ уравнения (38) представимо в виде

$$\begin{aligned} u_1(t) &= A_1^0(t) - A_1^1(t) + A_1^2(t) - A_1^3(t) + \dots = \\ &= \vartheta \ln \left(\frac{t}{\vartheta} \right) - \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{s^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{\tau}{\vartheta} \right) d\tau ds - \\
& \quad - \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \times \\
& \quad \times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(1 - \frac{v^2}{\mu^2} \right) \vartheta \ln \left(\frac{\mu}{\vartheta} \right) d\mu d\tau ds + \dots
\end{aligned} \tag{40}$$

Оценим сверху модуль четвертого слагаемого в правой части представления (40)

$$\begin{aligned}
|A_1^3(t)| & < \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 + \frac{v^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \times \\
& \times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 + \frac{v^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{\mu} \right) \left(1 + \frac{v^2}{\mu^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{\mu}{\vartheta} \right) \right) d\mu d\tau ds < \\
& < \int_{\vartheta}^t \left((t-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) \times \\
& \times \int_{\vartheta}^s \left((t-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{\tau^2} \right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(1 + \frac{v^2}{\tau^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{\tau}{\vartheta} \right) \right) \times \\
& \times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((t-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{\mu} \right) \left(1 + \frac{v^2}{\mu^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{\mu}{\vartheta} \right) \right) d\mu d\tau ds = \\
& = \left(\int_{\vartheta}^t \left((t-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^3 / 3!.
\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$|A_1^n(t)| < \left(\int_{\vartheta}^t \left((t-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^n / n!.$$

В ряде (40) оставим первые $n+1$ слагаемых, остальные слагаемые в ряде (40) отбросим и оценим сверху модуль остатка ряда (40), предполагая при этом, что вещественное положительное число T ($t \in [\vartheta, T]$) и натуральное число n таковы, что выполняется следующее неравенство

$$\left(\left(\int_{\vartheta}^T \left((T-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right) / (n+2) \right) < 1.$$

Итак, при всех значениях $t \in [\vartheta, T]$ оценим сверху модуль остатка ряда (40)

$$\begin{aligned}
& |(-1)^{n+1}(A_1^{n+1}(t) - A_1^{n+2}(t) + A_1^{n+3}(t) - A_1^{n+4}(t) + \dots)| < \\
& < \frac{\left(\int_{\vartheta}^T \left((T-\vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^{(n+1)}}{(n+1)!} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^{(n+2)}}{(n+2)!} + \dots < \\
& < \frac{\left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^{(n+1)}}{(n+1)!} \times \\
& \times \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^j / (n+2)^j \right) = \\
& = \left(\left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)^{(n+1)} / (n+1)! \right) \times \\
& \times \left((n+2) / \left((n+2) - \int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right) \right). \tag{41}
\end{aligned}$$

Из оценок (41) следует, что для любого сколь угодно большого вещественного положительного числа T можно всегда подобрать такое натуральное число n , что при всех значениях $t \in [\vartheta, T]$ соответствующий остаток ряда (40) по модулю не превзойдет любого наперед заданного сколь угодно малого положительного числа ε . Все вышесказанное относительно оценок и оценивания остаточного члена применимо и к членам ряда (39), за исключением того, что интеграл

$$\frac{\int_{\vartheta}^t \left((t - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds}{\left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) \left(1 + \vartheta \ln \left(\frac{s}{\vartheta} \right) \right) ds \right)}$$

необходимо заменить во всех оценках на интеграл

$$\int_{\vartheta}^t \left((t - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) ds \left(\int_{\vartheta}^T \left((T - \vartheta) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) + \frac{1}{s} \right) \left(1 + \frac{v^2}{s^2} \right) ds \right).$$

Второй элемент фундаментальной системы решений $\{u_0(t), u_1(t)\}$ уравнения (38), функция $u_1(t)$, удовлетворяющая начальным условиям $u_1(\vartheta) = 0$, $(u_1(t))' \Big|_{t=\vartheta} = 1$, допускает другое представление. Действительно по формулам (23)–(25) найдем

$$A_1^0(t) = t - \vartheta, \quad a_1^0(t) = \left(1 - \frac{v^2}{t^2} \right) (t - \vartheta) + \frac{1}{t},$$

$$A_1^1(t) = \int_{\vartheta}^t (t - s) \left(\left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) (s - \vartheta) + \frac{1}{s} \right) ds,$$

$$\begin{aligned}
a_1^1(t) &= \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(\left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) (s-\vartheta) + \frac{1}{s} \right) ds + \frac{1}{t} \int_{\vartheta}^t \left(\left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) (s-\vartheta) + \frac{1}{s} \right) ds = \\
&= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) + \frac{1}{t} \right) \left(\left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) (s-\vartheta) + \frac{1}{s} \right) ds, \\
A_1^2(t) &= \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \left(\left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) (\tau-\vartheta) + \frac{1}{\tau} \right) d\tau ds, \\
a_1^2(t) &= \int_{\vartheta}^t \left((t-s) \left(1 - \frac{v^2}{t^2}\right) + \frac{1}{t} \right) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \left(\left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) (\tau-\vartheta) + \frac{1}{\tau} \right) d\tau ds, \\
A_1^3(t) &= \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \times \\
&\times \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) + \frac{1}{\tau} \right) \left(\left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) (\mu-\vartheta) + \frac{1}{\mu} \right) d\mu d\tau ds
\end{aligned}$$

и так далее. Решение $u_1(t)$ уравнения (38) представимо также и в следующем виде (ср. с представлением (40))

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= A_1^0(t) - A_1^1(t) + A_1^2(t) - A_1^3(t) + \dots = (t-\vartheta) - \int_{\vartheta}^t (t-s) \left(\left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) (s-\vartheta) + \frac{1}{s} \right) ds + \\
&+ \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \left(\left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) (\tau-\vartheta) + \frac{1}{\tau} \right) d\tau ds - \\
&- \int_{\vartheta}^t (t-s) \int_{\vartheta}^s \left((s-\tau) \left(1 - \frac{v^2}{s^2}\right) + \frac{1}{s} \right) \int_{\vartheta}^{\tau} \left((\tau-\mu) \left(1 - \frac{v^2}{\tau^2}\right) + \frac{1}{\tau} \right) \times \\
&\times \left(\left(1 - \frac{v^2}{\mu^2}\right) (\mu-\vartheta) + \frac{1}{\mu} \right) d\mu d\tau ds + \dots
\end{aligned}$$

Все оценки также аналогично могут быть получены. Представление функции $u_0(t)$, удовлетворяющей условиям $u_0(\vartheta) = 1$, $(u_0(t))' \Big|_{t=\vartheta} = 0$, найденное по формулам (23)–(25), совпадает с представлением (39).

3.6. О представлении квадратур одного квазидифференциального уравнения специального вида в виде сумм рядов

Рассмотрим однородное квазидифференциальное уравнение произвольного порядка вида (2) такое, что в матрице P заполнены главная диагональ и первая поддиагональ, а все остальные ее элементы равны нулю. В этом случае определения квазипроизводных (1) примут вид

$${}_P^0 x \doteq p_{00} x, \quad {}_P^{k+1} x \doteq p_{k+1, k+1} \frac{d}{dt} \left({}_P^k x \right) + p_{k+1, k} \left({}_P^k x \right) \quad (k \in 0 : n-1).$$

Элементы фундаментальной системы решений $\{{}_P^0 u_i(t)\}_0^{n-1}$ уравнения (2), удовлетворяющие начальным условиям (15), выражаются в этом случае в виде квадратур (в отличие от рассмотренных в пп. 3.1–3.5 случаев). Как уже говорилось в пп. 3.3, они находятся по формулам (см. [16], [17])

$$\begin{aligned}
{}_P^0 u_0(t) &= \exp \left(- \int_a^t \frac{p_{10}(\tau)}{p_{11}(\tau)} d\tau \right), \\
{}_P^0 u_i(t) &= \int_a^t \frac{dt_1}{p_{11}(t_1)} \int_a^{t_1} \frac{dt_2}{p_{22}(t_2)} \dots \int_a^{t_{i-1}} \frac{dt_i}{p_{ii}(t_i)} \exp \left(- \sum_{j=1}^{i+1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{p_{j, j-1}(\tau)}{p_{jj}(\tau)} d\tau \right) \\
&\quad (t \in I, t_0 = t, t_n = a, i \in 1 : n-1).
\end{aligned} \tag{42}$$

Пусть матрица Q снова, как и в §2 (и в пп. 3.1 §3), является диагональной, т.е. она такова $Q \doteq \text{diag}(p_{00}, p_{11}, \dots, p_{n-1, n-1}, 1)$. Тогда определения (11)–(14) примут следующий вид (с учетом того, что сейчас все элементы, находящиеся ниже поддиагонали матрицы P , являются нулями)

$$A_{n-v-1, i}^0(t) \doteq {}^v_Q w_i(t) \quad (v \in 0 : n-1), \quad (43)$$

где функции ${}_Q^0 w_i(t)$ ($i \in 1 : n-1$) определяются по формулам (7),

$$a_{ki}^j(t) \doteq \frac{p_{n-k, n-k-1}(t)}{p_{n-k, n-k}(t)} A_{ki}^j(t) \quad (k \in 0 : n-1), \quad (44)$$

$$A_{0i}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t a_{0i}^j(s) ds, \quad (45)$$

$$A_{ki}^{j+1}(t) \doteq \int_a^t \left(a_{ki}^j(s) + \frac{A_{k-1, i}^{j+1}(s)}{p_{n-k, n-k}(s)} \right) ds \quad (k \in 1 : n-1, i \in 0 : n-1, j = 0, 1, 2, \dots). \quad (46)$$

Далее воспользуемся теоремой 2, с учетом определений (43)–(46), при этом в левые части представлений (17) подставим соответственно правые части равенств (42). Тогда получим, что имеют место следующие разложения интегралов, находящихся в правых частях равенств (42), в суммы сходящихся к ним рядов

$$\exp \left(- \int_a^t \frac{p_{10}(\tau)}{p_{11}(\tau)} d\tau \right) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{n-1, 0}^j(t) \quad (t \in I), \quad (47)$$

$$\int_a^t \frac{dt_1}{p_{11}(t_1)} \cdots \int_a^{t_{i-1}} \frac{dt_i}{p_{ii}(t_i)} \exp \left(- \sum_{v=1}^{i+1} \int_{t_{v-1}}^{t_v} \frac{p_{v, v-1}(\tau)}{p_{vv}(\tau)} d\tau \right) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j A_{n-1, i}^j(t) \quad (48)$$

$(t \in I, t_0 = t, t_n = a, i \in 1 : n-1).$

Таким образом, ряды в правых частях равенств (47) и (48), как бы независимо от исходного квазидифференциального уравнения (2), являются некоторыми представлениями (некими «квазидифференциальными» аналогами рядов Тейлора) функций, находящихся в левых частях равенств (47) и (48). Одним из применений представлений (47) и (48) может быть также приближенное построение элементов фундаментальной системы решений исходного квазидифференциального уравнения (2) (например, в случае, когда интегралы в левых частях равенств (47) и (48) не выражаются в элементарных функциях).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шин Д.Ю. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n -го порядка // Матем. сборник. 1940. Т. 7(49). №3. С. 479–532.
2. Шин Д.Ю. О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Матем. сборник. 1943. Т. 13(55). №1. С. 39–70.
3. Everitt W.N., Marcus L. Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators // Amer. Math. Soc. 1999. V. 61.
4. Eckhardt J., Gestezy F., Nichols R., Teschl G. Weyl–Titchmarsh theory for Sturm–Liouville operators with distributional potentials // Opuscula Mathematica. 2013. V. 33(3). P. 467–563.
5. Everitt W.N., Race D. The regular representation of singular second order differential expressions using quasi-derivatives // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. V. 65(2). P. 383–404.
6. Xiao xia Lv, Ji-jun Ao, Zettl A. Dependence of eigenvalues of fourth-order differential equations with discontinuous boundary conditions on the problem // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 456(1). P. 671–685.
7. Qinglan Bao, Jiong Sun, Xiaoling Hao, Zettl A. Characterization of self-adjoint domains for regular even order C-symmetric differential operators // Electronic J. of Qualitative Theory of Diff. Equat. 2019. V. 62. P. 1–17.

8. *Zettl A.* Sturm-Liouville Theory. Amer. Math. Soc., 2005.
9. *Zettl A.* Recent Developments in Sturm-Liouville Theory. Berlin, Boston: De Gruyter, 2021.
10. *Jianfang Qin, Kun Li, Zhaowen Zheng, Jinming Cai* Dependence of eigenvalues of discontinuous fourth-order differential operators with eigenparameter dependent boundary conditions // J. of Nonlinear Math. Phys. 2022. V. 29(4). P. 776–793.
11. *Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Мазуренко В.В., Власий О.О.* Обобщенные квазидифференциальные уравнения. Львов: ЛГУ БЖД, 2017.
12. *Владыкина В.Е., Шкаликов А.А.* Асимптотика решений уравнения Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами // Матем. заметки. 2015. Т. 98. №6. С. 832–841.
13. *Мирзоев К.А.* Операторы Штурма–Лиувилля // Тр. ММО. 2014. Т. 75. №2. С. 335–359.
14. *Конечная Н.Н., Мирзоев К.А.* Главный член асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями первого порядка // Матем. заметки. 2019. Т. 106. №1. С. 74–83.
15. *Конечная Н.Н., Мирзоев К.А.* Об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений нечетного порядка // Вестн. Моск. ун-та. 2020. Сер. 1. Матем., мех. №1. С. 23–28.
16. *Дерр В.Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Известия Института математики и информатики УдГУ. 1999. №1(16). С. 3–105.
17. *Дерр В.Я.* Об адекватном описании сопряженного оператора // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. №3. С. 43–63.
18. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
19. *Nehary Z.* Disconjugate linear differential operators // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 129. P. 500–516.
20. *Elias U.* The extremal solutions of the equation $Ly + p(x)y = 0$, II // J. of Math. Anal. and Appl. 1976. V. 55. P. 253–265.
21. *Everitt W.N.* Fourth order singular differential equation // J. Math. Anal. 1963. V. 142. P. 320–340.
22. *Kusano T., Naito M.* Oscillation criteria of general linear ordinary differential equations // Pacific J. Math. 1981. V. 92(2). P. 345–355.
23. *Trench W.F.* Canonical forms and principal systems for general disconjugate equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. 189. P. 319–327.
24. *Trench W.F.* Asymptotic theory perturbed general disconjugate equations // Hiroshima Math. J. 1982. V. 12. P. 43–58.
25. *Everitt W.N.* A note of linear ordinary quasi-differential equations // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. 1985. V. 101A. P. 1–14.
26. *Everitt W.N., Key J.D.* On some properties of matrices associated with linear ordinary quasi-differential equations // Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh. 1984. V. 96A. P. 211–219.
27. *Nicolson L.S.* Disconjugate systems of linear differential equation // J. of Differential Equat. 1970. 7. P. 570–583.

ON THE STUDY OF VARIOUS REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS OF QUASI-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE FORM OF SUMS OF SERIES AND THEIR SOME APPLICATIONS

M. Yu. Vatulkin*

426069 Izhevsk, Studencheskaya str., 7, M.T. Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Russia

*e-mail: vmyu6886@gmail.com

Received: 17.02.2024

Revised: 30.04.2024

Accepted: 28.06.2024

Abstract. In the theory of the matrix equation $\dot{X} = A(t)X$, the well-known representation of the solution in the form of a series plays an important role. In the case of an n -th order scalar equation, it is also interesting to get a representation of the solution in the form of a scalar series, the terms of which are constructed from the coefficients of the original equation. Various representations of the fundamental system of solutions of a homogeneous quasi-differential equation of the n -th order in the form of scalar series, the terms of which are constructed from the coefficients of the original equation, are studied. As an example, in the form of such series, representations of the elements of the fundamental system of solutions of the Bessel equation are constructed, considered in the interval $[\vartheta, +\infty)$, где $\vartheta > 0$.

Keywords: quasi-differential equation, Cauchy function, fundamental system of solutions, sum of the series, initial approximations, Bessel equation.

ДУАЛИЗМ В ТЕОРИИ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ. II¹⁾© 2024 г. Л. А. Бекларян^{1,*}¹ 117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН, Россия

*e-mail: lbeklaryan@outlook.com

Поступила в редакцию 03.05.2024 г.

Переработанный вариант 15.07.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Работа является продолжением одноименной работы Бекларян, Бекларян (2024). Приводится доказательство теоремы существования и единственности солитонных решений и соответствующих им решений функционально-дифференциального уравнения из дуальной пары “функция—оператор”, которая была сформулирована в отмеченной работе в виде гипотезы. Это позволило, в частности, изучить в модели транспортного потока на манхэттенской решетке солитонные решения с более сложными характеристиками, чем характеристики, задаваемые аддитивной циклической подгруппой группы $\mathbb{R}$. Библ. 4. Фиг. 1.

Ключевые слова: солитонные решения, функционально-дифференциальное уравнение, манхэттенская решетка.

DOI: 10.31857/S0044466924110051, EDN: KGSDFX

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение солитонных решений является одним из интенсивно развивающихся направлений (см. [1]–[23]). В предыдущей работе [1] был развит формализм, в рамках которого установлено соответствие между солитонными решениями и решениями функционально-дифференциального уравнения точечного типа из дуальной пары “функция—оператор”. Теорема существования и единственности солитонных решений и решений соответствующего функционально-дифференциального уравнения в наиболее общем случае, когда отклонения аргумента в функционально-дифференциальном уравнении задаются элементами конечно порожденной группы диффеоморфизмов прямой, была сформулирована в виде гипотезы, доказательство которой в частном случае, когда отклонения аргумента в функционально-дифференциальном уравнении задаются элементами циклической группы сдвигов на прямой, приводится в монографии [11]. В рамках разработанного формализма приводится доказательство этого общего утверждения. Это позволяет, в частности, рассмотреть модель транспортного потока на манхэттенской решетке с более сложными характеристиками солитонных решений, отличных от аддитивной циклической подгруппы группы $\mathbb{R}$.

2. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем ряд определений и результатов из работы [1]. Для определения солитонного букета там приводится хорошо известное определение условий Каратеодори, а также определяются условия Каратеодори в сильном смысле, которое необходимо для корректного определения элементов дифференциального и интегрального исчислений над бесконечномерными вектор-функциями.

Определение 1. Совокупность конструкций $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Upsilon | Q, g)$ называется *солитонным букетом* и однозначно определяется набором $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, где:

- 1) Υ — конечно порожденная группа с образующими $\{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_d\}$ и выделенными элементами $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$, а также соответствующее пространство

$$\mathcal{K}_\Upsilon^n = \overline{\prod_{\gamma \in \Upsilon} R_\gamma}, \quad R_\gamma = \mathbb{R}^n$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-11-00080).

бесконечных последовательностей $\varkappa = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \Upsilon}$, $x_\gamma \in \mathbb{R}^n$, $x_\gamma = (x_{\gamma 1}, \dots, x_{\gamma n})'$ со стандартной топологией полного прямого произведения;

- 2) $\mathbb{T}_\Upsilon = \{T_{\hat{\gamma}} : \hat{\gamma} \in \Upsilon\}$ – конечно порожденная группа сдвигов, действующих в пространстве $\mathcal{K}_\Upsilon^n$ по следующему правилу

$$T_{\hat{\gamma}}\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Upsilon} = \{x_{\gamma\hat{\gamma}}\}_{\gamma \in \Upsilon}, \quad \hat{\gamma} \in \Upsilon, \quad \{x_\gamma\}_{\gamma \in \Upsilon} \in \mathcal{K}_\Upsilon^n, \quad T_{\hat{\gamma}} \in \mathbb{T}_\Upsilon;$$

- 3) $\eta : \Upsilon \rightarrow Q$ – эпиморфизм, где Q – группа диффеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, т.е. $Q \subset \text{Diff}_+^{(1)}(\mathbb{R})$, и, соответственно, Q – конечно порожденная группа с образующими $\check{q}_j = \eta(\check{\gamma}_j)$, $j = 1, \dots, d$, и выделенными элементами $q_j = \eta(\gamma_j)$, $j = 1, \dots, s$;

- 4) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори;

- 5) оператор

$$G_\Gamma : \mathbb{R} \times \mathcal{K}_\Upsilon^n \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n, \quad \Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$$

такой, что координата $(G_\Gamma(t, \varkappa))_e$ бесконечномерной вектор-функции $G_\Gamma(t, \varkappa)$, соответствующая единичному элементу e группы Υ , зависит только лишь от конечного числа координат и равна

$$(G_\Gamma(t, \varkappa))_e = g(t, x_{\gamma_1}, \dots, x_{\gamma_s});$$

- 6) при почти каждом $t \in \mathbb{R}$ выполняются “почти перестановочные” соотношения

$$T_{\hat{\gamma}} G_\Gamma(t, \varkappa) = \frac{d}{dt} \eta(\hat{\gamma})(t) \cdot G_\Gamma(\eta(\hat{\gamma})(t), T_{\hat{\gamma}} \varkappa), \quad \forall \varkappa \in \mathcal{K}_\Upsilon^n, \quad \forall \hat{\gamma} \in \Upsilon.$$

Для солитонного букета $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ в фазовом пространстве $\mathcal{K}_\Upsilon^n$ с фазовой переменной $\varkappa \in \mathcal{K}_\Upsilon^n$ определим систему

$$\dot{\varkappa}(t) = G_\Gamma(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$\varkappa(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \varkappa(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \hat{\gamma} \in \Upsilon. \quad (2)$$

Производная в бесконечномерном дифференциальном уравнении (1) понимается как *производная по Гато*.

Вектор-функция $\varkappa : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n$,

$\varkappa(\cdot) = \{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \Upsilon}$ называется *слабо дифференцируемой* в точке $t \in [a, b]$, если для любого $\gamma \in \Upsilon$ функция $x_\gamma(\cdot)$ дифференцируема в точке t . Очевидно, что такая вектор-функция слабо дифференцируема в точке $t \in [a, b]$ тогда и только тогда, когда она дифференцируема по Гато. Вектор-функция $\varkappa : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n$, $\varkappa(\cdot) = \{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \Upsilon}$ называется *слабо абсолютно непрерывной (слабо измеримой)*, если для любого $\gamma \in \Upsilon$ функция $x_\gamma(\cdot)$ абсолютно непрерывна (измерима) на интервале $[a, b]$. *Решением системы (1)–(2)* называется всякая слабо абсолютно непрерывная вектор-функция $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n$, $\varkappa(\cdot) = \{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \Upsilon}$, почти всюду удовлетворяющая уравнению (1) и при любом $t \in \mathbb{R}$ ограничению (2). Нелокальные ограничения (2) означают, что для решений системы *сдвиг по пространству равен сдвигу по времени*. Решения такой системы называются *решениями типа бегущей волны (солитонные решения)*, а группа Q называется *характеристикой бегущей волны*.

В паре с системой (1)–(2) рассматривается индуцированное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{x}(t) = g(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t))), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Каждый солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ индуцирует дуальную пару $(G_\Gamma|Q, g)$ *функция-оператор*, а также *канонический солитонный букет* $(Q, d, s, \mathcal{I}, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$ с канонической дуальной парой $(G_\Gamma|Q, g)$, в которой $\mathcal{I}$ тождественный автоморфизм группы Q . Для заданных Q, g канонический солитонный букет выделяется наиболее простой структурой набора $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$ и, соответственно, оператора G_Γ .

Для солитонного букета $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ каждому решению $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3) соответствует решение $\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Upsilon}$, $t \in \mathbb{R}$, бесконечномерной системы (1)–(2) (солитонное решение) и наоборот. Такие решения связаны соотношениями $x_\gamma(t) = x_e(\eta(\gamma)(t))$, $x_e(t) = x(t)$, $\gamma \in \Upsilon$, $t \in \mathbb{R}$.

Так как пространство $\mathcal{K}_\Upsilon^n$ всего лишь метризуемо, то исследование пространства солитонных решений (пространства решений системы (1)–(2)) весьма затруднительно. Более продвинутое изучение требует локализации пространства солитонных решений, основанной на тех или иных представлениях, и, в частности, на учете асимптотики решений по пространству, как траекторий в бесконечномерном пространстве последовательностей $\mathcal{K}_\Upsilon^n$. На таком пути определим семейство подпространств $\mathcal{K}_{\Upsilon\mu h}^n$, $\mu \in (0, 1]$, $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, следующим образом:

$$\mathcal{K}_{\Upsilon\mu h}^n = \left\{ \varkappa : \varkappa \in \mathcal{K}_\Upsilon^n; \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_\gamma\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma)h} < +\infty \right\},$$

$$\|\varkappa\|_{\Upsilon\mu h} = \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_\gamma\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma)h},$$

где $l(\gamma)$ обозначает длину слова $\gamma \in \Upsilon$ в конечно порожденной группе Υ ([24]). Параметр h в таких банаховых пространствах задается по группе Q из рассматриваемого солитонного букета следующим образом:

$$h \geq \check{h}, \quad \check{h} = \max_{j \in \{1, \dots, d\}} h_{\check{q}_j}, \quad h_{\check{q}_j} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t - \check{q}_j(t)|, \quad j = 1, \dots, d,$$

где $\check{q}_j$, $j = 1, \dots, d$, — образующие группы Q .

Сформулируем дополнительные условия на функцию g в виде условий роста, а также условия для группы диффеоморфизмов Q из рассматриваемого солитонного букета:

(a*) функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори;

(b*) для любых $z_j, \bar{z}_j, j = 1, \dots, s$, и почти всех t имеет место условие роста типа

$$\|g(t, z_1, \dots, z_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_0(t) + M_1 \sum_{j=1}^s \|z_j\|_{\mathbb{R}^n}$$

и условие Липшица

$$\|g(t, z_1, \dots, z_s) - g(t, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_2 \sum_{j=1}^s \|z_j - \bar{z}_j\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$(M_0(t) = \|g(t, 0, \dots, 0)\|_{\mathbb{R}^n}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad M_1 = M_2);$$

(c*) существует $\mu^* \in (0, 1]$ такое, что

$$M_0(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R}), \quad \left(\mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) \mu^{|\cdot|} \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); \right\} \right)$$

(d*) задана группа диффеоморфизмов Q с системой образующих $\check{q}_1, \dots, \check{q}_d$ и выделенными элементами $q_1, \dots, q_s \in Q$, для любого $q \in Q$ величины

$$h_q = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t - q(t)|, \quad h_{\dot{q}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \dot{q}(t)$$

конечны, семейство величин $h_{\dot{q}}$, $q \in Q$, равномерно ограничены и поэтому величины

$$\check{h} = \max_{j \in \{1, \dots, d\}} \sup_{t \in \mathbb{R}} |t - \check{q}_j(t)|, \quad h_{\dot{Q}} = \sup_{q \in Q} h_{\dot{q}}$$

конечны.

Все перечисленные условия для функции g как правой части дифференциального уравнения являются стандартными в теории дифференциальных уравнений. Правая часть $g(\cdot)$ функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3) является элементом банахового пространства функций $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ с липшицевой нормой

$$V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n) = \{g(\cdot) : g(\cdot) \text{ удовлетворяет условиям } (a^*) - (d^*)\},$$

$$\|g(\cdot)\|_{Lip} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t, 0, \dots, 0)(\mu^*)^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ \sup_{(t, z_1, \dots, z_s, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s) \in \mathbb{R}^{1+2ns}} \frac{\|g(t, z_1, \dots, z_s) - g(t, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s)\|_{\mathbb{R}^n}}{\sum_{j=1}^s \|z_j - \bar{z}_j\|_{\mathbb{R}^n}}, \quad (4)$$

где параметр $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ совпадает с соответствующей константой из условия (c^*) .

В рамках дуализма между солитонными решениями и решениями соответствующего функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3) мы будем изучать решения последних, а также характеристики уравнения в параметрических семействах банаховых подпространств (пространства функций с весами) с параметром $\mu \in (0, 1]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}) &= \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\mu^{|\cdot|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}, \\ \mathcal{L}_\mu^n L_\infty(\mathbb{R}) &= \left\{ x(\cdot) : x(\cdot)\mu^{|\cdot|} \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \right\}, \end{aligned}$$

и нормой

$$\|x(\cdot)\|_\mu^{(0)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\mu^{|\cdot|}\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \|x(\cdot)\|_\mu = \text{vrai sup}_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\mu^{|\cdot|}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Опишем свойства оператора $G_{\Gamma \infty \mu h} = G_\Gamma|_{\mathbb{R} \times \mathcal{K}_{\Gamma \infty \mu h}^n}$ (условия роста и Липшица):

$$\begin{aligned} \|G_{\Gamma \infty \mu h}(t, \varkappa)\|_{\Gamma \infty \mu h} &\leq \mathcal{M}_0 \Upsilon_{\infty \mu h}(t) + \mathcal{M}_1 \Upsilon_{\infty \mu h} \|\varkappa\|_{\Gamma \infty \mu h}, \\ \|G_{\Gamma \infty \mu h}(t, \varkappa) - G_{\Gamma \infty \mu h}(t, \bar{\varkappa})\|_{\Gamma \infty \mu h} &\leq \mathcal{M}_2 \Upsilon_{\infty \mu h} \|\varkappa - \bar{\varkappa}\|_{\Gamma \infty \mu h}, \end{aligned}$$

действующего из пространства $\mathcal{K}_{\Gamma \infty \mu h}^n$ в себя, где

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 \Upsilon_{\infty \mu h}(t) &= h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} M_0(\eta(\gamma)(t)) \mu^{l(\gamma)h}, \quad \mathcal{M}_0 \Upsilon_{\infty \mu h}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R}), \\ \mathcal{P}_{\Gamma \mu h} &= \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h}, \quad \mathcal{M}_1 \Upsilon_{\infty \mu h} = h_{\dot{Q}} M_1 \mathcal{P}_{\Gamma \mu h}, \quad \mathcal{M}_2 \Upsilon_{\infty \mu h} = h_{\dot{Q}} M_2 \mathcal{P}_{\Gamma \mu h}. \end{aligned}$$

Для заданных $\mu \in (0, 1]$, $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, наряду с системой (1)–(2) в исходном фазовом пространстве $\mathcal{K}_\Upsilon^n$, в подпространстве $\mathcal{K}_{\Gamma \infty \mu h}^n$ рассматривается система

$$\frac{d\varkappa(t)}{dt} = G_{\Gamma \infty \mu h}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$\varkappa(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \varkappa(t) \quad \forall \hat{\gamma}, t, \quad \hat{\gamma} \in \Upsilon, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

в виде дифференциального уравнения (5) с нелокальными ограничениями (6). Здесь дифференциальное уравнение (5) понимается в сильной форме (производная по Фреше), а не в слабой форме (производная по Гато) как в (1). По лемме 3 работы [1] установлена сильная измеримость оператора $G_{\Gamma \infty \mu h}$. Поэтому для любой сильно измеримой (тем более непрерывной) вектор-функции $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Gamma \infty \mu h}^n$ суперпозиция $G_{\Gamma \infty \mu h}(t, \varkappa(t))$, $t \in \mathbb{R}$ является сильно измеримой и интегрируемой по Бохнеру вектор-функцией. Решением такого дифференциального уравнения с фазовым пространством $\mathcal{K}_{\Gamma \infty \mu h}^n$ называется всякая сильно абсолютно непрерывная вектор-функция $\varkappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (непрерывная вектор-функция, почти всюду дифференцируемая по Фреше, производная $\dot{\varkappa}(\cdot)$ интегрируема по Бохнеру и вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ однозначно восстанавливается по производной $\dot{\varkappa}(\cdot)$) почти всюду, удовлетворяющая этому уравнению. Для такого уравнения (5) справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши. Решения бесконечномерного дифференциального уравнения (5) имеет асимптотику по пространству, которая определяется параметром μ . Важной задачей является определение асимптотики решения системы (5)–(6) (солитонное решение) и по времени. На этом пути в предложении 1 работы [1] для решения $\varkappa(\cdot)$ бесконечномерного дифференциального уравнения (5) установлена асимптотика по времени, задаваемая вложением

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(R), \quad \rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Gamma \infty \mu h}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-\mathcal{M}_2 \Upsilon_{\mu h}}\}. \quad (7)$$

Если теорема 1 работы [1] устанавливает соответствие между всем пространством солитонных решений (решений системы (1)–(2)) и решениями функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3), то в теореме 2 той же работы уточняется это соответствие для подсемейства солитонных решений, как решений

системы (5)–(6), с решениями функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3) в терминах асимптотики по пространству и времени для первых, и асимптотики по времени для вторых. Каждому решению

$$x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R), \quad \mu \in (0, \mu^*], \quad (8)$$

функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3) соответствует солитонное решение $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$ с асимптотикой по времени вида

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(R), \quad \rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Gamma\infty\mu h}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Обратное. Каждому солитонному решению $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in (0, \mu^*]$ с асимптотикой по времени вида

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\bar{\mu}}^1 C^{(0)}(R), \quad \rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Gamma\infty\mu h}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \bar{\mu} \in (0, 1], \quad (10)$$

соответствует решение $x(\cdot) \in \mathcal{L}_{\bar{\mu}}^n C^{(0)}(R)$ функционально-дифференциального уравнения точечного типа (3). Одной из важных задач в отмеченном соответствии является уточнение диапазона изменения $\bar{\mu}$ в зависимости от μ .

С другой стороны, в теореме 4 той же работы установлено, что всякое решение системы (5)–(6) (солитонное решение) при любом фиксированном начальном значении $\bar{t} \in \mathbb{R}$ является решением бесконечномерной краевой задачи

$$\dot{\varkappa}(t) = G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) = T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\bar{t}) \quad k = 1, \dots, d, \quad (12)$$

и наоборот. Таким образом, изучение солитонных решений для системы (5)–(6) эквивалентно изучению сложной, но вполне понятной краевой задачи (11)–(12).

3. ОСНОВНАЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА. ОСНОВНОЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ, А ТАКЖЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . В фазовом пространстве $\mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$, $\mu \in (0, \mu^*]$, $h \in [\bar{h}, +\infty)$ при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ будем рассматривать основную бесконечномерную начально-краевую задачу

$$\dot{\varkappa}(t) = G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) = T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\bar{t}), \quad k = 1, \dots, d, \quad (14)$$

$$(\varkappa(\bar{t}))_{\bar{\gamma}} = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{\gamma} \in \Upsilon. \quad (15)$$

Для уравнения (13) понятие решения было дано в предыдущем разделе. Там же отмечалось, что в фазовом пространстве $\mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$ солитонные решения и только они являются решениями бесконечномерной краевой задачи (13), (14), а следовательно, и бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15).

Будем рассматривать соответствующее основное бесконечномерное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \varkappa(t) = & \left[\tilde{S}_{\infty\mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right] + \\ & + \int_{\bar{t}}^t G_{\Gamma\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (16)$$

где P_γ — проектор в банаховом пространстве $\mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$, для которого $Im P_\gamma$ совпадает с подпространством, порожденным координатой x_γ , а $\tilde{S}_{\infty\mu h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$ — оператор, действующий по правилу $(\tilde{S}_{\infty\mu h} \bar{x})_\gamma = \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \gamma \in \Upsilon$.

Определение 2. При заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) будем называть всякую непрерывную вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$, удовлетворяющую этому уравнению.

В этом разделе будет дано доказательство теоремы существования и единственности, а также непрерывной зависимости от параметров решения основного бесконечномерного интегрального уравнения (16). Это нам позволит в следующем разделе установить соответствие между решениями основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) и основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15).

Для пространства солитонных букетов существует ряд канонических преобразований. Определим одно из таких преобразований.

Определение 3. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Для диффеоморфизма $\theta(\cdot) \in Diff_+^{(1)}(\mathbb{R})$ типа сдвиг $\theta(t) = t + \xi$, $t \in \mathbb{R}$ определим солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta_\theta, G_{\Gamma_\theta}|Q_\theta, g_\theta)$ с $\Gamma_\theta = (\Upsilon, d, s, \eta_\theta, Q_\theta, g_\theta)$, в котором

$$g_\theta(t, z_1, \dots, z_s) = g(\theta^{-1}(t), z_1, \dots, z_s); \quad Q_\theta = \theta Q \theta^{-1}, \quad \forall q \in Q, \\ q_\theta = \theta q \theta^{-1}; \quad G_{\Gamma_\theta}(t, \varkappa) = G_\Gamma(\theta^{-1}(t), \varkappa), \quad \eta_\theta(\Upsilon) = \theta \eta(Q) \theta^{-1}.$$

Наряду с бесконечномерной начально-краевой задачей (13)–(15) будем рассматривать систему

$$\dot{\varkappa}(t) = G_{\Gamma_\theta \infty \mu_0 h_0}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

$$\varkappa(\eta_\theta(\tilde{\gamma}_k)(\bar{t}_\theta)) = T_{\tilde{\gamma}_k} \varkappa(\bar{t}_\theta), \quad k \in \{1, \dots, d\}, \quad (18)$$

$$(\varkappa(\bar{t}_\theta))_{\bar{\gamma}} = \bar{x}, \quad \bar{t}_\theta \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{\gamma} \in \Upsilon. \quad (19)$$

Лемма 1. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . При замене времени типа сдвиг $\theta(t) = t + \xi$ для солитонного букета $(\Upsilon, d, s, \eta_\theta, G_{\Gamma_\theta}|Q_\theta, g_\theta)$ с $\Gamma_\theta = (\Upsilon, d, s, \eta_\theta, Q_\theta, g_\theta)$ будут справедливы условия

$$\mu_\theta^* = \mu^*, \quad \check{h}_\theta = \check{h}, \quad h_{\dot{Q}_\theta} = h_{\dot{Q}}, \quad \mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu_0 h_0} = \mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h}, \\ \forall q \in Q, \quad l(q_\theta) = l(q),$$

и при заданных начальном моменте $\bar{t}_\theta = \theta(\bar{t})$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ для солитонного букета $(\Upsilon, d, s, \eta_\theta, G_{\Gamma_\theta}|Q_\theta, g_\theta)$ с $\Gamma_\theta = (\Upsilon, d, s, \eta_\theta, Q_\theta, g_\theta)$ основная бесконечномерная начально-краевая задача (17)–(19) в фазовом пространстве $\mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu_0 h_0}^n$, $\mu_0 = \mu$, $h_\theta = h$ может быть получена в результате замены времени $\theta(t)$ в основной бесконечномерной начально-краевой задаче (13)–(15) с фазовым пространством $\mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, $\mu \in (0, \mu^*]$, $h \in [\check{h}, +\infty)$, соответствующей солитонному букету $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$.

Доказательство. Доказательство можно получить с помощью прямой проверки.

В силу леммы 1, не нарушая общности, можем полагать, что в основной бесконечномерной начально-краевой задаче (13)–(15) начальный момент можно положить равным нулю, т.е. $\bar{t} = 0$.

В пространстве непрерывных вектор-функций $C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n)$ определим подпространство вектор-функций

$$C_\theta^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n) = \left\{ \varkappa(\cdot) : \varkappa(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n), \right. \\ \left. \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon \infty \mu h} \theta^{|t|} < +\infty \right\}$$

с нормой

$$\|\varkappa(\cdot)\|_{\Upsilon \infty \mu h C_\theta^{(0)}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon \infty \mu h} \theta^{|t|}.$$

Нас будут интересовать непрерывные вектор-функции $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, являющиеся решениями основного бесконечномерного интегрального уравнения (16). Очевидно, что всякое такое решение будет удовлетворять бесконечномерному дифференциальному уравнению (13). Как отмечалось в предыдущем разделе, решение $\varkappa(\cdot)$ такого бесконечномерного дифференциального уравнения имеет следующую асимптотику (справедливо вложение)

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(R), \quad \rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon \infty \mu h}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-\mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h}}\}, \quad (20)$$

т.е. принадлежит банаховому пространству непрерывных вектор-функций $C_{\mu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\infty\mu h}^n)$. Введем обозначение

$$\text{sign } \check{h} = \begin{cases} 1 & \text{при } \check{h} \neq 0, \\ 0 & \text{при } \check{h} = 0. \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\Gamma}|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . При заданных параметрах $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ параметр $\mu \in (0, 1]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \check{h} h \dot{Q} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} &< h \ln \mu^{-1} \quad \text{при } \check{h} \neq 0, \\ \mu &< \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\} \quad \text{при } \check{h} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

тогда и только тогда, когда найдется двойственный параметр $\vartheta \in (0, 1]$ (двойственная пара μ и ϑ) для которого справедлива двойственная система оценок

$$\begin{aligned} \mu^h &\leq \vartheta^{\check{h}}, \quad \vartheta < \hat{\mu}, \quad (1 - \text{sign } \check{h})\mu \leq (1 - \text{sign } \check{h})\vartheta, \\ \hat{\mu} &= \min\{\mu^*, e^{-M_2 \Upsilon_{\infty\mu h}}\}, \end{aligned} \quad (22)$$

из которой следуют оценка

$$\begin{aligned} \mu^{h/\check{h}} &< \hat{\mu} \quad \text{при } \check{h} \neq 0, \\ \mu &< \hat{\mu} \quad \text{при } \check{h} = 0, \end{aligned}$$

а также непрерывное вложение

$$C_{\mu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\infty\mu h}^n) \subset C_{\vartheta}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\infty\mu h}^n). \quad (23)$$

Более того, всякой двойственной паре μ и ϑ соответствует каноническая пара двойственных параметров μ и ν , связанных следующим образом

$$\nu = \begin{cases} \mu^{h/\check{h}} & \text{при } \check{h} \neq 0, \\ \mu & \text{при } \check{h} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Доказательство. Так как $M_2 \Upsilon_{\infty\mu h} = h \dot{Q} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h}$, то при $\check{h} = 0$ имеет место соотношение $M_2 \Upsilon_{\infty\mu h} = M_2 s$.

Пусть для параметра μ выполняются условия (21). Тогда для канонически двойственного параметра ν из (24) справедлива двойственная система оценок (22).

Обратное. Если для двойственного параметра $\vartheta \in (0, 1]$, справедлива двойственная система оценок (22), то из них непосредственно следуют условия (21). Вложение и оценка из (23) следуют из оценок (22).

В условиях леммы 2, в силу вложений из (20), (23), для каждого решения $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\mu \in (0, \mu^*]$ бесконечномерного дифференциального уравнения (13) справедлива асимптотика по времени вида

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\nu}^1 C^{(0)}(R), \quad \rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon_{\infty\mu h}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

что уточняет значения $\bar{\mu}$ в описанных соответствиях (8)–(10). В случае $h = \check{h}$ справедливо равенство $\nu = \mu$ и асимптотика решений бесконечномерного дифференциального уравнения (13) как по пространству, так и по времени задается параметром μ . Это приводит к обращению соответствия (8), (9).

В дальнейшем нам понадобится еще одно преобразование солитонного букета, основанное на перенормировке фазового пространства $\mathcal{K}_{\infty\mu h}^n$ в следующем виде: для заданного $r = 0, 1, \dots$ через $\mathcal{K}_{r\Upsilon_{\infty\mu h}}^n$ обозначается пространство $\mathcal{K}_{\infty\mu h}^n$ с нормой

$$\|\varkappa\|_{r\Upsilon_{\infty\mu h}} = \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_{\gamma}\|_{R^n} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh}.$$

Между такими пространствами имеет место естественный изоморфизм $\mathcal{K}_{r\Upsilon_{\infty\mu h}}^n \cong \mathcal{K}_{\Upsilon_{\infty\mu h}}^n$, а норма пространства $C_{\vartheta}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon_{\infty\mu h}}^n)$ обозначается через $\|\varkappa\|_{r\Upsilon_{\infty\mu h} C_{\vartheta}^{(0)}}$.

Определение 4. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q — условиям (d^*) . Для каждого заданного $r = 0, 1, \dots$ через $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)_r$ будем обозначать солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$.

Очевидно, что в результате перенормировки фазового пространства сама основная начально-краевая задача (13)–(15) не изменяется. При заданном $r \in \{0, 1, \dots\}$ соответствующая *основная бесконечномерная начально-краевая задача* имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\varkappa}(t) &= G_{r\Upsilon\infty\mu h}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \\ \varkappa(\eta(\tilde{\gamma}_k)(\bar{t})) &= T_{\tilde{\gamma}_k} \varkappa(\bar{t}), \quad k = 1, \dots, d, \\ (\varkappa(\bar{t}))_{\bar{\gamma}} &= \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{\gamma} \in \Upsilon, \end{aligned}$$

где индекс r означает, что фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$. Очевидно, что при $r = 0$ выполнены равенства $\mathcal{K}_{0\Upsilon\infty\mu h}^n = \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, $G_{0\Upsilon\infty\mu h} = G_{\Upsilon\infty\mu h}$, а также при всяком $r \in \{0, 1, \dots\}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) &= \mathcal{M}_{0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) \mu^{rh}, \quad \mathcal{M}_{r1\Upsilon\infty\mu h} = \mathcal{M}_{1\Upsilon\infty\mu h}, \\ \mathcal{M}_{r2\Upsilon\infty\mu h} &= \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h}. \end{aligned} \quad (25)$$

При заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$ будем рассматривать соответствующее *основное бесконечномерное интегральное уравнение*

$$\begin{aligned} \varkappa(t) &= \left[\tilde{S}_{\infty\mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right] + \\ &+ \int_{\bar{t}}^t G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (26)$$

а также определим операторы

$$A_r : \varkappa(\cdot) \longrightarrow \int_{\bar{t}}^t G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_r : \varkappa(\cdot) &\longrightarrow \left[\tilde{S}_{\infty\mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma [(A_r[\varkappa(\cdot), \bar{x}])(\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t}))] \right] + \\ &+ (A_r[\varkappa(\cdot), \bar{x}])(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (28)$$

действующие из пространства $C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя. Оператор A_r , $r \in \{0, 1, \dots\}$ получен из оператора A_0 , в котором фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$.

Лемма 3. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)_r$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$, функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q — условиям (d^*) . Если при заданных параметрах $\dot{h} \geq 0$, $h \in [\dot{h}, +\infty)$ для параметров $\mu \in (0, \mu^*]$, $\vartheta \in (0, \mu^*)$ выполняется оценка

$$\mu^h \leq \vartheta^{\dot{h}},$$

то при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$ оператор $\hat{A}_r$ из (28) является непрерывным оператором, действующим из пространства $C_\vartheta^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя.

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем полагать, что $\bar{t} = 0$. Этого мы можем добиться с помощью замены времени типа сдвиг для рассматриваемого солитонного букета.

Пусть $\varkappa(\cdot) \in C_\vartheta^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$. Тогда, учитывая вложение $\mathcal{M}_{0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R})$ и соотношения (25), получим

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\bar{t}}^{(\cdot)} G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_\vartheta^0} &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} \left\| \int_{\bar{t}}^t G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \leq \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} \left\| \int_{\bar{t}}^t G_{r\Upsilon\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h} d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} \left| \int_{\bar{t}}^t \left[\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\tau)\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \right] d\tau \right| \leq \\
 & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} \left| \int_{\bar{t}}^t \vartheta^{-|\tau|} \left[\vartheta^{|\tau|} \mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \vartheta^{|\tau|} \|\mathcal{Z}(\tau)\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \right] d\tau \right| \leq \\
 & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} \left| \int_{\bar{t}}^t \vartheta^{-|\tau|} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] d\tau \right| \leq \\
 & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \vartheta^{|t|} [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] |\vartheta^{-|t|} - \vartheta^{-|\bar{t}|}| \leq \\
 & \leq [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] \sup_{t \in \mathbb{R}} |1 - \vartheta^{(|t| - |\bar{t}|)}| = \\
 & = [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right]. \tag{29}
 \end{aligned}$$

Таким образом, третье слагаемое в операторе $\hat{\mathcal{A}}_r$ действует из пространства $C_{\vartheta}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty ph}^n)$ в себя.

Покажем, что в операторе $\hat{\mathcal{A}}_r$ величина в квадратных скобках является вектором пространства $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$. По определению величина $\tilde{S}_{\infty\mu h} \tilde{x}$ из квадратной скобки является вектором пространства $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$. Изучим второе слагаемое из квадратной скобки.

Для заданного элемента $\tilde{\gamma} \in \Upsilon$ и $\bar{t} = 0$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \mathcal{Z}(\tau)) d\tau \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \leq \\
 & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left\| \left(\int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \mathcal{Z}(\tau)) d\tau \right) \right\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} \|G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \mathcal{Z}(\tau))\|_{r\Upsilon\infty\mu h} d\tau \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} \left[\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\tau)\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \right] d\tau \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} \vartheta^{-|\tau|} \left[\vartheta^{|\tau|} \mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\tau) + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \vartheta^{|\tau|} \|\mathcal{Z}(\tau)\|_{r\Upsilon\infty\mu h} \right] d\tau \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})} \vartheta^{-|\tau|} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] d\tau \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] \times \\
 & \times \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \vartheta^{-|\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\bar{t})|} - \vartheta^{-|\bar{t}|} \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] \times \\
 & \times \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \vartheta^{-l(\gamma)\tilde{h}} \vartheta^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \vartheta^{-|\bar{t}|} - \vartheta^{-|\bar{t}|} \right| \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} = \\
 & = [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] \times \\
 & \times \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left| \left(\frac{\mu^h}{\vartheta^{\tilde{h}}} \right)^{l(\gamma)} \vartheta^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} - \mu^{l(\gamma)h} \right| \vartheta^{-|\bar{t}|} \mu^{rh} \leq \\
 & \leq \text{sign } \tilde{h} [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot)\|_{\vartheta}^{(0)} + \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\mathcal{Z}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\vartheta}^0} \right] \vartheta^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh}. \tag{30}
 \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $\hat{\mathcal{A}}_r$ действует из пространства $C_{\vartheta}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя.

Остается установить непрерывность оператора $\hat{\mathcal{A}}_r$. Повторяя действия, проведенные при оценках (29), (30), для $\varkappa(\cdot), \tilde{\varkappa}(\cdot) \in C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ получим

$$\begin{aligned} & \|(\hat{\mathcal{A}}_r[\varkappa(\cdot)](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_r[\tilde{\varkappa}(\cdot)](\cdot))(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}} \leq \\ & \leq \left\| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} [G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) - G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \tilde{\varkappa}(\tau))] d\tau \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h} + \\ & + \left\| \int_{\bar{t}}^{(\cdot)} [G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) - G_{r\Gamma\infty\mu h}(\tau, \tilde{\varkappa}(\tau))] d\tau \right\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}} \leq \\ & \leq \text{sign } \check{h} [\ln \bar{\mathfrak{t}}^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}} \bar{\mathfrak{t}}^{-l(\bar{\gamma})\check{h}} \mu^{rh} + \\ & + [\ln \bar{\mathfrak{t}}^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}} \leq \\ & \leq [\ln \bar{\mathfrak{t}}^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}} [1 + \bar{\mathfrak{t}}^{-l(\bar{\gamma})\check{h}} \mu^{rh} \text{sign } \check{h}] \end{aligned} \quad (31)$$

откуда и следует непрерывность оператора $\hat{\mathcal{A}}_r$. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\Gamma}|Q, g)_r$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$, функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Если при заданных параметрах $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ параметр $\mu \in (0, \mu^*]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} & \check{h} h_{\bar{Q}} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} < h \ln \mu^{-1} \quad \text{при } \check{h} \neq 0, \\ & \mu < \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\} \quad \text{при } \check{h} = 0, \end{aligned}$$

то при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$ оператор $\hat{\mathcal{A}}_r$ является непрерывным оператором, действующим из пространства $C_{\bar{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя.

Доказательство. Оценка $\mu^h \leq \hat{\mu}^{\check{h}}$ следует из условия (23) в лемме 2, а непрерывность оператора $\hat{\mathcal{A}}_r$, действующего из пространства $C_{\bar{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя, следует из леммы 3.

Теперь мы можем корректно переопределить понятие решения основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

Определение 5. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\Gamma}|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Если для параметров $\mu \in (0, \mu^*]$, $\bar{\mathfrak{t}} \in (0, 1]$, $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ выполняются оценки $\mu^h \leq \bar{\mathfrak{t}}^{\check{h}}$, $\bar{\mathfrak{t}} < \hat{\mu}$, то при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) будем называть всякую непрерывную вектор-функцию $\varkappa(\cdot) \in C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$, удовлетворяющую этому уравнению.

Покажем эквивалентность определений 2 и 5. Если непрерывная вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ удовлетворяет основному бесконечномерному интегральному уравнению (16), то она удовлетворяет бесконечномерному обыкновенному дифференциальному уравнению (25). В силу (7), имеет место включение $\varkappa(\cdot) \in C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$, а в силу условия $\bar{\mathfrak{t}} < \hat{\mu}$ имеет место вложение $C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n) \subset C_{\bar{\mathfrak{t}}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$. Поэтому определения 2 и 5 эквивалентны.

Покажем, что при достаточно больших $r \in \{0, 1, \dots\}$ оператор $\hat{\mathcal{A}}_r$ является сжимающим. Оператор $\hat{\mathcal{A}}_r$ состоит из трех слагаемых. Одним из слагаемых является оператор $\mathcal{A}_r$, который оказывается сжимающим при любом $r \in \{0, 1, \dots\}$. Две другие составляющие оператора $\hat{\mathcal{A}}_r$ складываются из постоянного вектора и слагаемого, определяемого координатой с индексом $\bar{\gamma}$. Вклад последнего слагаемого в операторе $\hat{\mathcal{A}}_r$ удастся уменьшить за счет перенормировки пространства, что и делает оператор $\hat{\mathcal{A}}_r$ при достаточно больших r сжимающим.

Лемма 4. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\Gamma}|Q, g)_r$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$, функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Если для заданных параметров $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ для параметров $\mu \in (0, \mu^*]$, $\bar{\mathfrak{t}} \in (0, 1]$ выполняются оценки

$$\mu^h \leq \bar{\mathfrak{t}}^{\check{h}}, \quad \bar{\mathfrak{t}} < \hat{\mu}, \quad (1 - \text{sign } \check{h}) \mu \leq (1 - \text{sign } \check{h}) \bar{\mathfrak{t}},$$

$$\hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-\mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h}}\}, \quad (32)$$

то при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$ оператор $\hat{A}_r$ является непрерывным оператором, действующим из пространства $C_{\bar{\gamma}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя, а при достаточно больших r является сжимающим оператором. Более того, оператор A_r при любом $r \in \{0, 1, \dots\}$ является сжимающим.

Доказательство. Непрерывность операторов $\hat{A}_r$, $r \in \{0, 1, \dots\}$ следует из леммы 3. Из оценок (31) для $\varkappa(\cdot)$, $\tilde{\varkappa}(\cdot) \in C_{\bar{\gamma}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ получим

$$\begin{aligned} & \|(\hat{A}_r[\varkappa(\cdot)](\cdot) - (\hat{A}_r[\tilde{\varkappa}(\cdot)](\cdot))(\cdot))\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\gamma}}^{(0)}} \leq \\ & \leq [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} [1 + \vartheta^{-l(\bar{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h}] \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\gamma}}^{(0)}}. \end{aligned}$$

Из условий (32) и леммы 2 следует справедливость условий (21), а из последних следует неравенство

$$[\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} < 1. \quad (33)$$

Поэтому, при достаточно больших r будет выполняться оценка

$$[\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} [1 + \vartheta^{-l(\bar{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h}] < 1$$

откуда и следует, что оператор $\hat{A}_r$ сжимающий.

Доказательство последнего утверждения леммы. В силу оценки для второго слагаемого из (31), для любого $r \in \{0, 1, \dots\}$ получим

$$\begin{aligned} & \| (A_r[\varkappa(\cdot)](\cdot) - (A_r[\tilde{\varkappa}(\cdot)](\cdot))(\cdot)) \|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\gamma}}^{(0)}} \leq \\ & \leq [\ln \vartheta^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\varkappa(\cdot) - \tilde{\varkappa}(\cdot)\|_{r\Upsilon\infty\mu h C_{\bar{\gamma}}^{(0)}}. \end{aligned}$$

В силу оценки (33), оператор A_r при любом $r \in \{0, 1, \dots\}$ является сжимающим.

Следствие 2. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\Gamma}|Q, g)_r$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ и $r = 0, 1, \dots$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$, функция $g : \mathbb{R} \times \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Если при заданных параметрах $\tilde{h} \geq 0$, $h \in [\tilde{h}, +\infty)$ параметр $\mu \in (0, \mu^*]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} & \tilde{h} h_{\tilde{Q}} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} < h \ln \mu^{-1}, \quad \text{при } \tilde{h} \neq 0, \\ & \mu < \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\}, \quad \text{при } \tilde{h} = 0, \end{aligned}$$

то для канонически двойственного параметра

$$\nu = \begin{cases} \mu^{h/\tilde{h}} & \text{при } \tilde{h} \neq 0, \\ \mu & \text{при } \tilde{h} = 0. \end{cases}$$

при заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ и $r \in \{0, 1, \dots\}$ оператор $\hat{A}_r$ является непрерывным оператором, действующим из пространства $C_{\bar{\gamma}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя, а также при достаточно больших r непрерывный оператор $\hat{A}_r$ является сжимающим оператором.

Доказательство. Оценки $\mu^h \leq \nu^{\tilde{h}}$, $\nu < \hat{\mu}$ следуют из леммы 2, непрерывность оператора $\hat{A}_r$, действующего из пространства $C_{\bar{\gamma}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя следует из леммы 3, а из леммы 4 следует, что при достаточно больших r он является сжимающим.

Замечание 1. Так как строгое неравенство $\hat{\mu} < \hat{\mu}$ неверно, то лемма 3 не может гарантировать того, что непрерывный оператор $\hat{A}_r$, действующий из пространства $C_{\bar{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя, является сжимающим.

Сформулируем теорему существования и единственности решения для основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

Теорема 1. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q - условиям (d^*) . Если при заданных параметрах $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ параметр $\mu \in (0, \mu^*]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \check{h} h_{\check{Q}} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} &< h \ln \mu^{-1} \quad \text{при} \quad \check{h} \neq 0, \\ \mu &< \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\} \quad \text{при} \quad \check{h} = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

то при любых заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ для основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) существует решение $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Такое решение является единственным. Для решения $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$ основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) асимптотика по переменной времени t в терминах функции $\rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon\infty\mu h}$, $t \in \mathbb{R}$ задается вложением $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\hat{\mu}}^1 C^{(0)}(R)$, $\hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-M_2 \Upsilon\infty\mu h}\}$, т.е. $\varkappa(\cdot) \in C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$. Более того, для параметра ν

$$\nu = \begin{cases} \mu^{\frac{h}{\check{h}}} & \text{при} \quad \check{h} \neq 0, \\ \mu & \text{при} \quad \check{h} = 0 \end{cases}$$

выполняется оценка $\nu < \hat{\mu}$, имеет место непрерывное вложение

$$C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n) \subset C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n),$$

а решение $\varkappa(\cdot)$ как элемент пространства вектор-функций $C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$ непрерывно зависит от начального значения $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Если вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16), то она будет решением бесконечномерного дифференциального уравнения (13). Тогда утверждения об асимптотике функции $\rho(\cdot) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon\infty\mu h}$, $t \in \mathbb{R}$, т.е. $\varkappa(\cdot) \in C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$, следует из предложения 1 работы [1]. Так как параметр μ удовлетворяет условиям (34), то по следствию 1 оператор $\hat{A}_0$ является непрерывным оператором из пространства $C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя. Если рассматривать солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)_r$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ с $r = 0, 1, \dots$, для которого фазовое пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ заменено на перенормированное фазовое пространство $\mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n$, то по следствию 2 при канонически двойственном параметре ν из (24) и любом $r = 0, 1, \dots$ оператор $\hat{A}_r$ является непрерывным оператором из пространства $C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя и, в частности, оператор $\hat{A}_0$ является непрерывным оператором из пространства $C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$ в себя. Более того, при достаточно больших r оператор $\hat{A}_r$ является сжимающим.

Интегральное уравнение (26) можно записать в следующем операторном виде:

$$\varkappa(t) \equiv (\hat{A}_r[\varkappa(\cdot)])(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Так как оператор $\hat{A}_r$ при достаточно большом r является сжимающим в пространстве $C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$, то основное бесконечномерное интегральное уравнение (26) имеет решение $\varkappa(\cdot) \in C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon\infty\mu h}^n)$ и такое решение единственное. Очевидно, что вектор-функции являющиеся решениями основного бесконечномерного интегрального уравнения (26) будут принадлежать также и пространству $C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$ и удовлетворять основному бесконечномерному интегральному уравнению (16) и наоборот. Следовательно для основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) существует, причем единственное, решение.

Остается показать, что существующее решение непрерывно зависит от начального значения $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$, в том смысле как сформулировано в теореме.

Операторы A_r и $\hat{A}_r$ по формулам (27), (28) определялись через отображения $G_{r\Gamma\infty\mu h}$, которые в свою очередь определялись функцией $g(\cdot)$. Чтобы указать зависимость операторов A_r , $\hat{A}_r$ от начального значения $\bar{x}$ и функции $g(\cdot)$ будем отображать их с индексами и параметрами $A_{rg}[\cdot, \bar{x}]$, $\hat{A}_{rg}[\cdot, \bar{x}]$.

Рассмотрим солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\tilde{\Gamma}}|Q, \tilde{g})_r$ с $\tilde{\Gamma} = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, \tilde{g})$ с функцией $\tilde{g}(\cdot)$ из малой окрестности функции $g(\cdot)$ в пространстве $V_{\mu^*}(R \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ и начальное значение $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ из окрестности начального значения $\bar{x}$. Для такой функции $\tilde{g}(\cdot)$ также будут выполняться условия теоремы 1. По доказанному в предыдущей части теоремы 1 существуют вектор-функции $\varkappa(\cdot)$, $\tilde{\varkappa}(\cdot) \in C_{\nu}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n)$, удовлетворяющие тождествам

$$\varkappa(t) \equiv (\hat{A}_{rg}[\varkappa(\cdot), \bar{x}])(t), \quad \tilde{\varkappa}(t) \equiv (\hat{A}_{r\tilde{g}}[\tilde{\varkappa}(\cdot), \tilde{x}])(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

Из тождеств (35) следует очевидная цепочка оценок

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{K}(\cdot) - \tilde{\mathcal{K}}(\cdot) \|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} = \| (\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \tilde{x}](t) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t)) \|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} \leq \\ & \leq \| (\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \tilde{x}](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot)) \|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} + \\ & + \| (\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot)) \|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (36) оценивается правой частью неравенства (31), в котором параметр $\mathfrak{h}$ заменен на канонически двойственный параметр v , и дополнительным слагаемым вида $\|\tilde{x} - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{rh}$.

Используя представления (27)–(28) для операторов A_r и $\hat{\mathcal{A}}_r$, оценим второе слагаемое в правой части неравенства (36)

$$\begin{aligned} & \| (\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot)) \|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} \leq \\ & \leq \| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \{ (A_{rg}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t}))) \|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} + \\ & + \| (A_{rg}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot)) \|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Пользуясь представлениями (27)–(28), определением нормы (4), а также воспроизводя логику оценок (29) и (30) с учетом условия $\bar{t} = 0$, первое слагаемое в правой части неравенства (37) можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} & \| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \{ (A_g[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})) - (A_{\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t}))) \|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} \leq \\ & \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} v^{|t|} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \| P_\gamma \{ (A_g[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})) - (A_{\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t}))) \|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \leq \\ & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} \left| \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} \| G_{r\Gamma \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) - G_{r\tilde{\Gamma} \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) \|_{r\Upsilon \infty \mu h} d\tau \right| \leq \\ & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \| G_{r\Gamma \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) - G_{r\tilde{\Gamma} \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) \|_{r\Upsilon \infty \mu h} \leq \\ & \leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \left\| \frac{d}{d\tau} \eta(\tilde{\gamma})(\tau) [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1\tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s\tilde{\gamma}}(\tau)) - \right. \\ & \left. - \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1\tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s\tilde{\gamma}}(\tau))] \|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} = \\ & = h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \| [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0) - \right. \\ & \left. - \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0)] \|_{\mathbb{R}^n} (\mu^*)^{\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} (\mu^*)^{-\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \right. \\ & + \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \| [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1\tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s\tilde{\gamma}}(\tau)) - \\ & \left. - \tilde{g}(\eta(\gamma)(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1\gamma}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s\gamma}(\tau))] - [g(\eta(\gamma)(\tau), 0, \dots, 0) - \right. \\ & \left. - \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0)] \|_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{j=1}^s \| \tilde{x}_{\gamma_j\tilde{\gamma}}(\tau) \|_{\mathbb{R}^n} \right]^{-1} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} \sum_{j=1}^s \| \tilde{x}_{\gamma_j\tilde{\gamma}}(\tau) \|_{\mathbb{R}^n} \right\} \leq \\ & \leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} (\mu^*)^{-\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \right. \\ & + \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} \sum_{j=1}^s \| \tilde{x}_{\gamma_j\tilde{\gamma}}(\tau) \|_{\mathbb{R}^n} \left. \right\} \leq \\ & \leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} (\mu^*)^{-l(\tilde{\gamma})h - |\tau|} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \right. \\ & + \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \| \tilde{x}_{\gamma_j\tilde{\gamma}}(\tau) \|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma_j\tilde{\gamma})h} \mu^{-l(\gamma_j\tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} \left. \right\} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} (\mu^*)^{-|\tau|} \mu^{rh} + \right. \\
&+ \left. \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \|\tilde{\mathcal{Z}}(\tau)\|_{r\Upsilon \infty \mu h} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j \tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \right\} \leq \\
&\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ (\mu^*)^{-|\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})|} \mu^{rh} + \right. \\
&+ \left. \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \|\tilde{\mathcal{Z}}(\tau)\|_{r\Upsilon \infty \mu h} \hat{\mu}^{|\tau|} \hat{\mu}^{-|\tau|} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j)h-l(\tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \right\} \leq \\
&\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \mu^{rh} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ (\mu^*)^{-l(\gamma)h-l(\tilde{\gamma})h-|\bar{t}|} \mu^{rh} + \right. \\
&+ \left. \|\tilde{\mathcal{Z}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \hat{\mu}^{-|\tau|} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j)h} \right\} \leq \\
&\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \mu^{rh} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} |\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})| \left\{ (\mu^*)^{-l(\gamma)h} (\mu^*)^{-l(\tilde{\gamma})h-|\bar{t}|} \mu^{rh} + \right. \\
&+ \left. \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{Z}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \sup_{\tau \in [\bar{t}, \eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})]} \hat{\mu}^{-|\tau|} \right\} \leq \\
&\leq \text{sign } \tilde{h} \ h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \mu^{rh} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \left[l(\gamma)h + l(\tilde{\gamma})h + |\bar{t}| \right] \\
&\left\{ (\mu^*)^{-l(\gamma)h} (\mu^*)^{-l(\tilde{\gamma})h-|\bar{t}|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-l(\gamma)h} \hat{\mu}^{-l(\tilde{\gamma})h-|\bar{t}|} \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{Z}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\}. \tag{38}
\end{aligned}$$

Для второго слагаемого имеем

$$\begin{aligned}
&\|(A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{Z}}(\cdot), \tilde{x}]) (\cdot) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{Z}}(\cdot), \tilde{x}]) (\cdot)\|_{\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} = \\
&= \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} \|\{(A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{Z}}(\cdot), \tilde{x}]) (t) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{Z}}(\cdot), \tilde{x}]) (t)\}\|_{\Upsilon \infty \mu h} \leq \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} \int_{\bar{t}}^t \|G_{r\Gamma \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{Z}}(\tau)) - G_{r\tilde{\Gamma} \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{Z}}(\tau))\|_{r\Upsilon \infty \mu h} d\tau \leq \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \|G_{r\Gamma \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{Z}}(\tau)) - G_{r\tilde{\Gamma} \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{Z}}(\tau))\|_{r\Upsilon \infty \mu h} \leq \\
&\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \left\| \frac{d}{d\tau} \eta(\tilde{\gamma})(\tau) [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1 \tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s \tilde{\gamma}}(\tau)) - \right. \\
&- \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1 \tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s \tilde{\gamma}}(\tau))] \|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} = \\
&= h_{\dot{Q}} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \left\{ \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \| [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0) - \right. \\
&- \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0)] \|_{\mathbb{R}^n} (\mu^*)^{\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} (\mu^*)^{-\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \\
&+ \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \| [g(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1 \tilde{\gamma}}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s \tilde{\gamma}}(\tau)) - \\
&- \tilde{g}(\eta(\gamma)(\tau), \tilde{x}_{\gamma_1 \gamma}(\tau), \dots, \tilde{x}_{\gamma_s \gamma}(\tau))] - [g(\eta(\gamma)(\tau), 0, \dots, 0) - \\
&- \tilde{g}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), 0, \dots, 0)] \|_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{j=1}^s \|\tilde{x}_{\gamma_j \tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \right]^{-1} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} \sum_{j=1}^s \|\tilde{x}_{\gamma_j \tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \right\} \leq \\
&\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} \mathbf{v}^{|t|} |t| \left\{ \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} (\mu^*)^{-\eta(\tilde{\gamma})(\tau)} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \right. \\
&+ \left. \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \sum_{j=1}^s \|\tilde{x}_{\gamma_j \tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{rh} \right\} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} v^{|t|} |t| \left\{ \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} (\mu^*)^{-l(\tilde{\gamma})h - |\tau|} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} + \right. \\
 &\quad \left. + \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \|\tilde{x}_{\gamma_j \tilde{\gamma}}(\tau)\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma_j \tilde{\gamma})h} \mu^{-l(\gamma_j \tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \mu^{rh} \right\} \leq \\
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} v^{|t|} |t| \left\{ \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} (\mu^*)^{-|\tau|} \mu^{rh} + \right. \\
 &\quad \left. + \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \|\tilde{x}(\tau)\|_{r\Upsilon \infty \mu h} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j \tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \right\} \leq \\
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} v^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \right. \\
 &\quad \left. + \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \|\tilde{x}(\tau)\|_{r\Upsilon \infty \mu h} \hat{\mu}^{|\tau|} \hat{\mu}^{-|t|} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j)h - l(\tilde{\gamma})h} \mu^{l(\tilde{\gamma})h} \right\} \leq \\
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} v^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \right. \\
 &\quad \left. + \|\tilde{x}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \hat{\mu}^{-|\tau|} \sum_{j=1}^s \sup_{\tilde{\gamma} \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j)h} \right\} \leq \\
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} v^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{x}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \sup_{\tau \in [\bar{t}, t]} \hat{\mu}^{-|\tau|} \right\} \leq \\
 &\leq h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} v^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-|t|} \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{x}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\}. \tag{39}
 \end{aligned}$$

Используя соотношения (36)–(39) получим оценку

$$\begin{aligned}
 &\|\mathcal{K}(\cdot) - \tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} = \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \bar{x}](t) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} \leq \\
 &\leq \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \bar{x}](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} + \\
 &+ \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \tilde{x}](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} \leq \\
 &\leq \|(\hat{\mathcal{A}}_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \bar{x}](\cdot) - (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\cdot))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} + \\
 &+ \left| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \{ (A_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t}))) \} \right\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} + \\
 &+ \|(A_{rg}[\mathcal{K}(\cdot), \tilde{x}](t) - (A_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} \leq \\
 &\leq [\ln v^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h} [1 + v^{-l(\bar{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \text{sign } \tilde{h}] \|\mathcal{K}(\cdot) - \tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} + \|\bar{x} - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{r\tilde{h}} + \\
 &+ \text{sign } \tilde{h} h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \left[l(\gamma)h + l(\bar{\gamma})h + |\bar{t}| \right] \\
 &\left\{ (\mu^*)^{-l(\gamma)h} (\mu^*)^{-l(\bar{\gamma})h - |\bar{t}|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-l(\gamma)h} \hat{\mu}^{-l(\bar{\gamma})h - |\bar{t}|} \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\} + \\
 &+ h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} v^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-|t|} \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Полученную оценку преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
 &\left\{ 1 - [\ln v^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h} [1 + v^{-l(\bar{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \text{sign } \tilde{h}] \right\} \|\mathcal{K}(\cdot) - \tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} \leq \\
 &\leq \text{sign } \tilde{h} h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \mu^{rh} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{l(\gamma)h} \left[l(\gamma)h + l(\bar{\gamma})h + |\bar{t}| \right] \\
 &\left\{ (\mu^*)^{-l(\gamma)h} (\mu^*)^{-l(\bar{\gamma})h - |\bar{t}|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-l(\gamma)h} \hat{\mu}^{-l(\bar{\gamma})h - |\bar{t}|} \mathcal{P}_{r\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\} + \|\bar{x} - \tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{r\tilde{h}} +
 \end{aligned}$$

$$+ h_{\dot{Q}} \|g(\cdot) - \tilde{g}(\cdot)\|_{Lip} \sup_{t \in \mathbb{R}} v^{|t|} |t| \left\{ (\mu^*)^{-|t|} \mu^{rh} + \hat{\mu}^{-|t|} \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_{\hat{\mu}}^{(0)}} \right\}. \quad (40)$$

Так как параметр μ удовлетворяет условиям (34), то выполняется неравенство (33). Поэтому при достаточно большом r будет выполняться неравенство

$$[\ln v^{-1}]^{-1} \mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h} [1 + v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h}] < 1 \quad (41)$$

и числовой коэффициент в левой части неравенства (40) является положительным. В силу оценок $\mu < \mu^*$, $\mu < \hat{\mu}$, $v \leq \mu$, при заданной вектор-функции $\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)$ величина правой части конечна. Если покажем, что для $\tilde{x}$ и $\tilde{g}$ из достаточно малой окрестности $\tilde{x}$ и g решения $\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)$ основного бесконечномерного интегрального уравнения (26) являются ограниченными в пространстве $C_v^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon \infty \mu h}^n)$, то установим факт непрерывной зависимости решения $\mathcal{K}(\cdot)$ как элемента пространства вектор-функций $C_v^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon \infty \mu h}^n)$ от начального значения $\tilde{x}$ и функции g .

Пусть вектор-функция $\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)$ является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (26). Тогда имеет место тождество

$$\tilde{\mathcal{K}}(t) \equiv (\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t)), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (42)$$

Следуя последовательности преобразований из (29), (30), а также учитывая тождество (42), получим цепочку оценок

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} &= \|(\hat{\mathcal{A}}_{r\tilde{g}}[\tilde{\mathcal{K}}(\cdot), \tilde{x}](t))\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^{(0)}} \leq \\ &\leq \left\| \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \int_{\tilde{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\tilde{\gamma})(\tilde{t})} G_{r\tilde{\Gamma} \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) d\tau \right\|_{r\Upsilon \infty \mu h} + \\ &+ \left\| \int_{\tilde{t}}^{(\cdot)} G_{r\tilde{\Gamma} \infty \mu h}(\tau, \tilde{\mathcal{K}}(\tau)) d\tau \right\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} + \|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\ &\leq [\ln v^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon \infty \mu h}(\cdot)\|_{\tilde{\Theta}}^{(0)} + \tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} \right] v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h} + \\ &+ [\ln v^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon \infty \mu h}(\cdot)\|_{\tilde{\Theta}}^{(0)} + \tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} \right] + \|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \\ &\leq [\ln v^{-1}]^{-1} \left[\|\mathcal{M}_{r0\Upsilon \infty \mu h}(\cdot)\|_{\tilde{\Theta}}^{(0)} + \tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} \right] \times \\ &\times \left[1 + v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h} \right] + \|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n}, \end{aligned}$$

принимая окончательный вид

$$\begin{aligned} &\left\{ 1 - [\ln v^{-1}]^{-1} \tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h} \left[1 + v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h} \right] \right\} \|\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)\|_{r\Upsilon \infty \mu h C_v^0} \leq \\ &\leq [\ln v^{-1}]^{-1} \|\mathcal{M}_{r0\Upsilon \infty \mu h}(\cdot)\|_{\tilde{\Theta}}^{(0)} [1 + v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h}] + \|\tilde{x}\|_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned} \quad (43)$$

Так как параметр μ удовлетворяет условиям (34), то при достаточно большом r будет выполняться неравенство (41). Так как $\tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h}$ из малой окрестности $\mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h}$, то будет справедливым соотношение

$$[\ln v^{-1}]^{-1} \tilde{\mathcal{M}}_{2\Upsilon \infty \mu h} [1 + v^{-l(\tilde{\gamma})\tilde{h}} \mu^{rh} \operatorname{sign} \tilde{h}] < 1$$

и числовой коэффициент в левой части неравенства (43) будет положительным. Более того, для $\tilde{x}$ и $\tilde{g}$ из достаточно малой окрестности $\tilde{x}$ и g числовой коэффициент в левой части неравенства (43) строго отделен от нуля. Тогда все решения $\tilde{\mathcal{K}}(\cdot)$, соответствующие таким начальным значениям $\tilde{x}$ и функциям $\tilde{g}$, в пространстве $C_v^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{r\Upsilon \infty \mu h}^n)$ ограничены. Теорема доказана.

4. ТЕОРЕМА О СООТВЕТСТВИИ РЕШЕНИЙ ОСНОВНОЙ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ОСНОВНОГО БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Установим соответствие между решениями основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15) и основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

Теорема 2. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma | Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q — условиям (d^*) . Заданы параметры $\check{h} \geq 0$, $h \in [\check{h}, +\infty)$, при которых параметр $\mu \in (0, 1]$, удовлетворяет условиям

$$\check{h} h \dot{Q} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} < h \ln \mu^{-1} \quad \text{при} \quad \check{h} \neq 0,$$

$$\mu < \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\} \quad \text{при} \quad \check{h} = 0.$$

Тогда при любых заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ сильно абсолютно непрерывная вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, являющаяся решением основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15), будет решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

Непрерывная вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, являющаяся решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16), будет сильно абсолютно непрерывной, а также решением основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15).

Доказательство. Пусть сильно абсолютно непрерывная вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$ является решением основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15). Для такой вектор-функции справедливо интегральное представление

$$\varkappa(t) = \varkappa(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau, \quad (44)$$

а также краевые условия (14). В силу теорем 3 и 4 работы [1], для такого решения $\varkappa(\cdot)$ при любых $t \in \mathbb{R}$ и $\gamma \in \Upsilon$ также справедливы соотношения $\varkappa(\eta(\gamma)(t)) = T_\gamma \varkappa(t)$ и, в частности, соотношения

$$\varkappa(\eta(\gamma)(\bar{t})) = T_\gamma \varkappa(\bar{t}) \quad \forall \gamma \in \Upsilon. \quad (45)$$

Используя интегральное представление (44) для представления $\varkappa(\eta(\gamma)(\bar{t}))$, соотношения (45) преобразуются к виду

$$\varkappa(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma)(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau = T_\gamma \varkappa(\bar{t}) \quad \forall \gamma \in \Upsilon.$$

В силу начального условия (15), имеют место равенства $\{T_\gamma \varkappa(\bar{t})\}_{\bar{\gamma} \gamma^{-1}} = \{\varkappa(\bar{t})\}_{\bar{\gamma}} = \bar{x} \quad \forall \gamma \in \Upsilon$, из которых с учетом соотношений (4) будет следовать система равенств

$$x_{\bar{\gamma} \gamma^{-1}}(\bar{t}) + \left\{ \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma)(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right\}_{\bar{\gamma} \gamma^{-1}} = \bar{x} \quad \forall \gamma \in \Upsilon. \quad (46)$$

Если член с интегралом перенести в правую часть и произвести переиндексацию координат, то получим равенства

$$x_\gamma(\bar{t}) = \bar{x} - \left\{ \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right\}_\gamma \quad \forall \gamma \in \Upsilon, \quad (47)$$

эквивалентные равенствам (46). Система равенств (47) в векторной форме примет вид

$$\varkappa(\bar{t}) = \tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_\gamma \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1}\bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau. \quad (48)$$

Если значение $\varkappa(\bar{t})$ из (48) подставить в интегральное представление (44), то мы получим, что вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

Доказательство второго утверждения теоремы. Пусть непрерывная вектор-функцию $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$ является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16), из которого следует, что вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ будет сильно абсолютно непрерывной и удовлетворять дифференциальному уравнению (13). Если в то же интегральное уравнение подставить значение $t = \bar{t}$, то получим равенство (48), в котором координата с индексом $\bar{\gamma}$ совпадает с начальным условием (15).

Остается показать, что вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ будет удовлетворять и краевым условиям (14). При каждом фиксированном $k \in \{1, \dots, d\}$ и элементе системы образующих $\check{\gamma}_k \in \Upsilon$ к обоим частям основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) применим оператор сдвига $T_{\check{\gamma}_k}$:

$$T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(t) = T_{\check{\gamma}_k} \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1} \bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right] + T_{\check{\gamma}_k} \int_{\bar{t}}^t G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau.$$

Используя равенство $T_{\check{\gamma}_k} \tilde{S}_{\infty \mu h} = \tilde{S}_{\infty \mu h}$, перестановочное соотношение $T_{\check{\gamma}_k} P_{\gamma} = P_{\check{\gamma}_k^{-1} \gamma} T_{\check{\gamma}_k}$, а также почти перестановочное соотношение (6) из определения солитонного букета, получим

$$T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(t) = \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\check{\gamma}_k^{-1} \gamma} \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1} \bar{\gamma})(\bar{t})} \frac{d}{dt} \eta(\check{\gamma}_k)(\tau) G_{\Gamma \infty \mu h}(\eta(\check{\gamma}_k)(\tau), T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\tau)) d\tau \right] + \\ + \int_{\bar{t}}^t \frac{d}{dt} \eta(\check{\gamma}_k)(\tau) G_{\Gamma \infty \mu h}(\eta(\check{\gamma}_k)(\tau), T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\tau)) d\tau.$$

Сделав замену времени $\xi = \eta(\check{\gamma}_k)(\tau)$ под знаками интеграла получим

$$T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(t) = \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\check{\gamma}_k^{-1} \gamma} \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\check{\gamma}_k \gamma^{-1} \bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\eta(\check{\gamma}_k^{-1})(\xi))) d\xi \right] + \\ + \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\check{\gamma}_k)(t)} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\eta(\check{\gamma}_k^{-1})(\xi))) d\xi. \quad (49)$$

Введя обозначение $\overline{\varkappa}(\xi) = T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\eta(\check{\gamma}_k^{-1})(\xi))$, переобозначив $\hat{\gamma} = \check{\gamma}_k^{-1} \gamma$ и использовав очевидное тождество $\check{\gamma}_k^{-1} \check{\gamma}_k = e$ перепишем соотношение (49)

$$\overline{\varkappa}(\eta(\check{\gamma}_k)(t)) = \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\hat{\gamma} \in \Upsilon} P_{\hat{\gamma}} \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\hat{\gamma}^{-1} \check{\gamma}_k^{-1})(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t}))} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, \overline{\varkappa}(\xi)) d\xi \right] + \\ + \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\check{\gamma}_k)(t)} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, \overline{\varkappa}(\xi)) d\xi.$$

Следовательно, сильно абсолютно непрерывная вектор-функция $\overline{\varkappa}(\cdot)$ при заданных начальном моменте $\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t}) \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и индексе координаты $\check{\gamma}_k^{-1} \in \Upsilon$ является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16).

С другой стороны, справедливо равенство

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(t)) = \varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) + \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\check{\gamma}_k)(t)} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, \varkappa(\xi)) d\xi.$$

Используя основное бесконечномерное интегральное уравнение (16), получим представление

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) = \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \int_{\bar{t}}^{\eta(\gamma^{-1} \bar{\gamma})(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right] + \\ + \int_{\bar{t}}^{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

которое с использованием очевидного тождества $\gamma_k \gamma_k^{-1} = e$ преобразуется к виду

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) = \tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\gamma^{-1} \check{\gamma}_k^{-1})(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t}))} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau.$$

Значение $\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t}))$ из (4) подставив в равенство (50), получим

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(t)) = \left[\tilde{S}_{\infty \mu h} \bar{x} - \sum_{\gamma \in \Upsilon} P_{\gamma} \int_{\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\gamma^{-1} \check{\gamma}_k^{-1})(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t}))} G_{\Gamma \infty \mu h}(\tau, \varkappa(\tau)) d\tau \right] +$$

$$+ \int_{\eta(\tilde{\gamma}_k)(\bar{t})}^{\eta(\tilde{\gamma}_k)(t)} G_{\Gamma \infty \mu h}(\xi, \kappa(\xi)) d\xi.$$

Следовательно, сильно абсолютно непрерывная вектор-функция $\kappa(\cdot)$ при заданных начальном моменте $\eta(\tilde{\gamma}_k)(\bar{t}) \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и индексе координаты $\tilde{\gamma}_k^{-1} \in \Upsilon$ также является решением основного бесконечномерного интегрального уравнения (16). В силу единственности решения основного бесконечномерного интегрального уравнения получим, что $\kappa(\xi) = \bar{\kappa}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Так как $\bar{\kappa}(\xi) = T_{\gamma_k} \kappa(\eta(\tilde{\gamma}_k^{-1})(\xi))$, то получим $\kappa(\xi) = T_{\gamma_k} \kappa(\eta(\tilde{\gamma}_k^{-1})(\xi))$, $\xi \in \mathbb{R}$. Сделав замену $\eta(\tilde{\gamma}_k^{-1})(\xi) = t$, получим соотношение $\kappa(\eta(\tilde{\gamma}_k)(t)) = T_{\gamma_k} \kappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$, что и доказывает выполнение краевых условий (14). Теорема доказана.

5. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ, А ТАКЖЕ НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ, РЕШЕНИЙ ОСНОВНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТОЧЕЧНОГО ТИПА

Пользуясь теоремой 2 о соответствиях между решениями основного бесконечномерного интегрального уравнения (16) и основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15), мы можем сформулировать теорему существования и единственности, а также непрерывной зависимости от параметров, для решений основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15). Такая теорема была сформулирована в работе [1] в виде гипотезы.

Теорема 3. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q – условиям (d^*) . Если при заданных параметрах $\tilde{h} \geq 0$, $h \in [\tilde{h}, +\infty)$ параметр $\mu \in (0, 1]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \tilde{h} h_{\dot{Q}} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h} &< h \ln \mu^{-1} \quad \text{при} \quad \tilde{h} \neq 0, \\ \mu &< \min\{\mu^*, e^{-M_2 s}\} \quad \text{при} \quad \tilde{h} = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

то при любых заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}$, индексе координаты $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ для основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15) существует решение $\kappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Такое решение является единственным. Для решения $\kappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$ основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15) асимптотика по переменной времени t в терминах функции $\rho(t) = \|\kappa(t)\|_{\Upsilon \infty \mu h}$, $t \in \mathbb{R}$, задается вложением $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu}^1 C^{(0)}(R)$,

$\hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-M_2 \Upsilon \infty \mu h}\}$, т.е. $\kappa(\cdot) \in C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n)$. Более того, для v

$$v = \begin{cases} \mu^{h/\tilde{h}} & \text{при} \quad \tilde{h} \neq 0, \\ \mu & \text{при} \quad \tilde{h} = 0 \end{cases}$$

выполняется оценка $v < \hat{\mu}$, имеет место непрерывное вложение

$$C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n) \subset C_v^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n), \quad (51)$$

а решение $\kappa(\cdot)$ как элемент пространства вектор-функций $C_v^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n)$ непрерывно зависит от начального значения $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Данное утверждение непосредственно следует из теоремы 1 и теоремы 2 о соответствиях.

Следствие 3. Пусть выполняются условия теоремы 3 и при $\tilde{h} \neq 0$ выполнено соотношение $h = \tilde{h}$. Тогда $v = \mu < \hat{\mu}$ и для решения $\kappa(\cdot)$ имеет место вложение $\kappa(\cdot) \in C_{\hat{\mu}}^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n)$.

Доказательство. Данное утверждение следует из вложения (51).

Сформулируем задачу Коши для уравнения (3)

$$\dot{x}(t) = g(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t))), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (52)$$

$$x(\hat{t}) = \bar{x}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \hat{t} \in \mathbb{R}. \quad (53)$$

В действительности, соответствия, которые описаны в теореме 2 работы [1], продолжают до соответствий между решениями основной бесконечномерной начально-краевой задачи (13)–(15) и решениями задачи Коши (52)–(53). Пользуясь дуализмом и, соответственно, теоремой 2 работы [1] о взаимосоответствиях, а также теоремой 3 применительно к каноническому солитонному букету $(Q, d, s, \mathcal{I}, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$, в которой положено $h = \check{h}$, мы можем переформулировать теорему 3 в терминах, применительных к функционально-дифференциальному уравнению точечного типа (52).

Теорема 4. Пусть функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(a^*) - (c^*)$, а группа диффеоморфизмов Q -условиям (d^*) . Если при $\mu \in (0, \mu^*]$ справедливо неравенство

$$h_Q M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(q_j)\check{h}} < \ln \mu^{-1}, \quad (54)$$

то для задачи Коши (52)–(53) существует решение $x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R)$. Такое решение является единственным, а также как элемент пространства $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R)$ непрерывно зависит от начального значения $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Формулировка и доказательство теоремы было приведено в работе [1] в предположении справедливости гипотезы из той же работы (теоремы 3 данной работы).

6. ПРИМЕР МАНХЭТТЕНСКОЙ РЕШЕТКИ С ХАРАКТЕРИСТИКАМИ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ ОТЛИЧНЫХ ОТ АДДИТИВНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ $\mathbb{R}$

Схема движения в манхэттонской решетке (группа $\mathbb{Z}^2$) такова, что из каждой точки узла решетки движение возможно в трех направлениях по основным магистралям (вперед, влево, вправо) и движение в обратном направлении через накопители. Как и в работе [1] рассмотрим агрегированную модель такого движения, при котором в каждом узле решетки наблюдаемой величиной является только лишь общий объем трафика без разделения его по направлениям движения.

Для группы $\Upsilon = \mathbb{Z}^2$ через $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ обозначим систему ее образующих, где $\gamma_1 = (1, 0)$, $\gamma_2 = (0, 1)$. Движение описывается одномерным конечно разностным аналогом параболического уравнения [1]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_\gamma(t) &= \sum_{l=1}^2 \alpha_{\gamma_l} x_{\gamma_l \gamma} - \sum_{l=1}^2 (\alpha_{\gamma_l} + \beta_{\gamma_l}) x_\gamma + \sum_{l=1}^2 \beta_{\gamma_l} x_{\gamma_l^{-1} \gamma} + \phi(x_\gamma), \\ x_\gamma &\in \mathbb{R}, \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}^2, \quad \text{п. в. } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (55)$$

Для каждого $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ (для каждого узла двумерной решетки) через x_γ обозначается величина стока транспортного потока в нем. Сток формируется в результате воздействий, состоящей из диффузионной и конвективной компонент. В диффузионной составляющей величины $\alpha_{\gamma_l} [x_{\gamma_l \gamma} - x_\gamma]$, $\beta_{\gamma_l} [x_{\gamma_l^{-1} \gamma} - x_\gamma]$, $l = 1, 2$, задают интенсивность изменения потока в узле γ в зависимости от разности значений величины потоков в узлах $\gamma, \gamma_l \gamma, \gamma_l^{-1} \gamma$, $l = 1, 2$, соответственно. При отрицательных значениях таких разностей происходит переток потока из узла γ в узлы $\gamma_l \gamma, \gamma_l^{-1} \gamma$, $l = 1, 2$, соответственно. При положительных значениях таких разностей происходит переток потока из накопителей в узел γ . Конвективную составляющую определяет потенциал ϕ и задается непрерывной функцией вида

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0] \cup [\Delta, +\infty), \\ \phi(t) > 0, & t \in (0, \Delta). \end{cases}$$

Уровень потока равный Δ является критическим для узла и определяется его техническими возможностями. При значениях величины потока меньших критического значения Δ происходит переток потока из накопителей в узел γ . При значениях величины потока больших критического значения Δ он остается в этом же узле. Это соответствует случаю, когда объемы накопителей для разгрузки узла малы. Ранее, в работе [12] рассматривался случай, когда объемы накопителей для разгрузки узла достаточны и происходит переток потока из узла γ в накопители, чему соответствовал отрицательный аффинный потенциал на полупрямой $(\Delta, +\infty)$.

Определение 6. Будем говорить, что решение $\{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$ системы (55), определенное для всех $t \in \mathbb{R}$ имеет тип бегущей волны (солитонное решение), если существуют $\tau_1, \tau_2 \geq 0$, не зависящие от t и γ , что при всех $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$x_\gamma(t + \tau_1) = x_{\gamma_1 \gamma}(t), \quad x_\gamma(t + \tau_2) = x_{\gamma_2 \gamma}(t). \quad (56)$$

Константы τ_1, τ_2 будем называть *характеристиками* бегущей волны.

Задача заключается в том, чтобы установить в каких диапазонах характеристик τ_1, τ_2 солитонные решения существуют, какова асимптотика таких решений и их зависимость от параметров системы. Среди солитонных решений выделяется важный класс ограниченных солитонных решений, как один из наиболее информативных классов решений.

Определим солитонный букет, порождающий рассматриваемую систему и представим систему (55), (56) в операторной форме. Пусть $\Upsilon = \mathbb{Z}^2$ двумерная решетка. Через $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2}^1$ обозначим пространство последовательностей с элементами $\varkappa = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$, $x_\gamma \in \mathbb{R}$, наделенной тихоновской топологией. Определим линейный оператор $\mathbb{A}$, нелинейный оператор $\mathbb{F}$ и группу операторов сдвига $\mathbb{T} = \{T_{\hat{\gamma}} : \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2\}$, действующие непрерывно из пространства $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2}^1$ в себя по следующему правилу: для любых $\gamma, \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2$, $\varkappa \in \mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2}^1$, $\varkappa = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$

$$(\mathbb{A}\varkappa)_\gamma = \sum_{l=1}^2 \alpha_{\gamma_l} x_{\gamma_l \gamma} - \sum_{l=1}^2 (\alpha_{\gamma_l} + \beta_{\gamma_l}) x_\gamma + \sum_{l=1}^2 \beta_{\gamma_l} x_{\gamma_l^{-1} \gamma}, \quad (\mathbb{F}(\varkappa))_\gamma = \phi(x_\gamma),$$

$$T_{\hat{\gamma}} \{x_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} = \{x_{\gamma \hat{\gamma}}\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}.$$

Рассмотрим группу $Q = \langle \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \rangle$, $\tilde{q}_1 = t + \tau_1$, $\tilde{q}_2 = t + \tau_2$, являющейся коммутативной группой сдвигов. Если τ_1, τ_2 соизмеримы, то группа $Q = \langle t + \tau_1, t + \tau_2 \rangle$ является циклической группой с образующей $t + \bar{\tau}$, т.е. $Q = \langle t + \bar{\tau} \rangle$. В противном случае, это группа с двумя образующими. Определим эпиморфизм $\eta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow Q$, где $\eta(\gamma_1) = \tilde{q}_1$, $\eta(\gamma_2) = \tilde{q}_2$ для образующих γ_l , $l = 1, 2$ группы $\mathbb{Z}^2$, а также отображение $g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$g(z_{01}, z_{10}, z_{00}, z_{-10}, z_{-01}) =$$

$$= \alpha_{\gamma_2} z_{01} + \alpha_{\gamma_1} z_{10} - (\alpha + \beta) z_{00} + \beta_{\gamma_1} z_{-10} + \beta_{\gamma_2} z_{-01} + \phi(z_{00}),$$

$$\alpha = \alpha_{\gamma_1} + \alpha_{\gamma_2}, \quad \beta = \beta_{\gamma_1} + \beta_{\gamma_2}.$$

Коэффициенты α_{γ_1} , α_{γ_2} , β_{γ_1} , β_{γ_2} являются неотрицательными. Зададим солитонный букет $(\mathbb{Z}^2, 2, 2, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\mathbb{Z}^2, 2, 2, \eta, Q, g)$, в котором оператор G_Γ имеет вид $G_\Gamma = \mathbb{A} + \mathbb{F}$. Система (55), (56) имеет следующее эквивалентное операторное представление:

$$\dot{\varkappa}(t) = G_\Gamma(\varkappa), \quad \text{п. в. } t \in \mathbb{R}. \quad (57)$$

$$\varkappa(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \varkappa(t) \quad \forall \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (58)$$

Рассмотрим индуцированное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{x}(t) = \alpha_{\gamma_2} x(t + \tau_2) + \alpha_{\gamma_1} x(t + \tau_1) - (\alpha + \beta) x(t) +$$

$$+ \beta_{\gamma_1} x(t - \tau_1) + \beta_{\gamma_2} x(t - \tau_2) + \phi(x(t)) \quad \text{п. в. } t \in \mathbb{R}. \quad (59)$$

Наряду с системой (57)–(58) будем рассматривать ее ограничение на банахово подпространство $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2 \infty \mu \tau}^1$, $\mu \in (0, 1)$, $\tau = \bar{h} = \max\{\tau_1, \tau_2\}$. Такая система имеет вид

$$\dot{\varkappa}(t) = G_{\Gamma \infty \mu \tau}(\varkappa) \quad \text{п. в. } t \in \mathbb{R}.$$

$$\varkappa(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \varkappa(t) \quad \forall \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Пусть потенциал ϕ удовлетворяет условию Липшица с константой L_ϕ . Рассмотрим трансцендентное уравнение относительно двух переменных $\tau \in (0, +\infty)$ и $\mu \in (0, 1)$

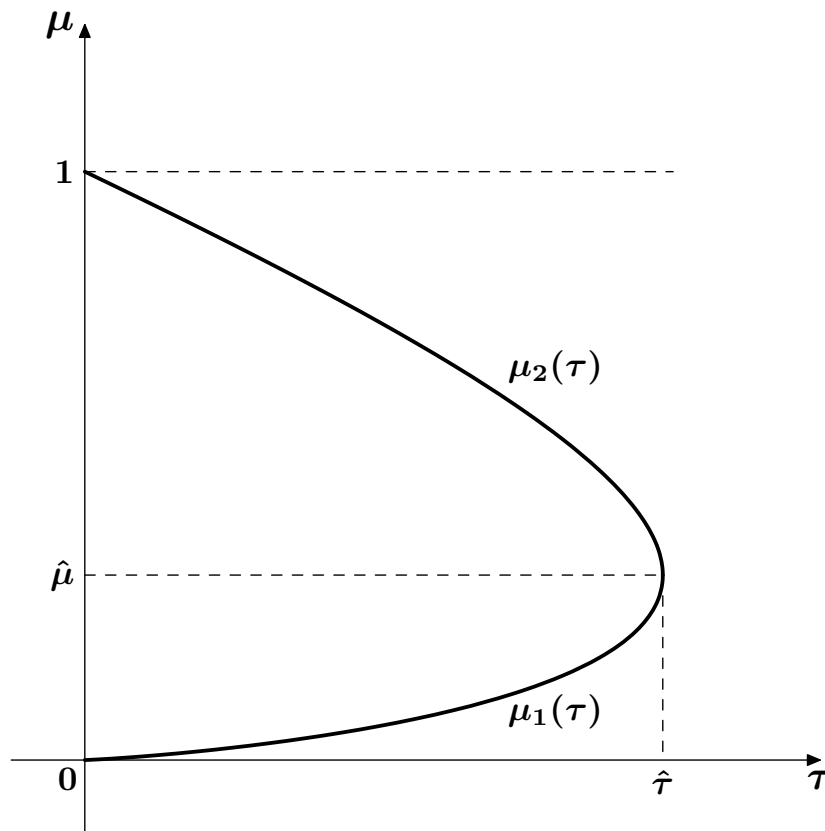
$$4C_\phi \tau \left(\mu^{-1} + \frac{1}{4} \right) = \ln \mu^{-1}, \quad C_\phi = \max \{ \alpha + \beta; L_\phi \}. \quad (60)$$

Левая и правая части трансцендентного уравнения (60) совпадают с левой и правой частями основного соотношения (54) для функционально-дифференциального уравнения (59), в котором положено $\tau = \bar{h}$ и произведена замена $\mu^\tau \rightarrow \mu$. Множество решений уравнения (60) описывается функциями $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau)$, заданными на фиг. 1.

Сформулируем теорему существования и единственности солитонных решений.

Теорема 5. Пусть потенциал ϕ удовлетворяет условию Липшица с константой L_ϕ . Тогда при любых начальных данных $\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}^2$, $a \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ и характеристике $\tau > 0$, $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$, удовлетворяющей условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$



Фиг. 1. Графики функций $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$.

для исходной бесконечномерной системы дифференциальных уравнений (55) существует единственное солитонное решение $\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$, $t \in \mathbb{R}$ (решение системы (55), (56)) с характеристиками τ_1, τ_2 такое, что оно удовлетворяет начальному условию $x_{\tilde{\gamma}}(\tilde{t}) = a$, для любого параметра μ , $\mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ значения вектор-функции

$$\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$$

при любом $t \in \mathbb{R}$ принадлежат пространству $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2 \infty \mu \tau}^1$, а асимптотика по переменной времени t для функции

$$\rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\mathbb{Z}^2 \infty \mu \tau}, \quad t \in \mathbb{R},$$

задается вложением

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R}), \quad \hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-\mathcal{M}_2 \tau \infty \mu h}\},$$

т.е. $\varkappa(\cdot) \in C_\mu^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\tau \infty \mu \tau}^n)$. Более того, имеет место оценка $\mu < \hat{\mu}$ и такое решение $\varkappa(\cdot)$, как элемент пространства вектор-функций $C_\mu^{(0)}(\mathbb{R}, \mathcal{K}_{\tau \infty \mu \tau}^n)$, непрерывно зависит от начального данного $a \in \mathbb{R}$, характеристики τ и потенциала $\phi(\cdot)$.

Доказательство. Условие $0 < \tau < \hat{\tau}$ совпадает с условием (50), в котором положено $\tau = h = \tilde{h} \neq 0$ и произведена замена $\mu^\tau \rightarrow \mu$. Поэтому доказываемое утверждение непосредственно следует из теоремы 3 и следствия 3.

Сформулируем теорему существования и единственности решения для индуцированного функционально-дифференциального уравнения (59).

Теорема 6. Пусть потенциал ϕ удовлетворяет условию Липшица с константой L_ϕ . Тогда при любых начальных данных $a \in \mathbb{R}$, начальном моменте $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ и характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

в пространстве $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R}) \quad \forall \mu, \mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ для функционально-дифференциального уравнения (59) существует и причем единственное решение $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$ такое, что оно удовлетворяет начальному условию $x(\tilde{t}) = a$. Такое решение, как элемент пространства $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$, непрерывно зависит от начального данного $a \in \mathbb{R}$, характеристики τ и потенциала $\phi(\cdot)$.

Доказательство. Как и в теореме 5 условие $0 < \tau < \hat{\tau}$ совпадает с условием (54), в котором положено $\tau = \tilde{h} \neq 0$ и произведена замена $\mu^\tau \rightarrow \mu$. Поэтому доказываемое утверждение для решений из пространства $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$ непосредственно следует из теоремы 4. Более того, так как правая часть функционально-дифференциального уравнения (59) является непрерывной функцией по всем переменным, то такие решения будут решениями из пространства $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(1)}(\mathbb{R})$.

6.1. Ограниченные солитонные решения

Среди солитонных решений особое место занимают ограниченные солитонные решения. В силу соответствия солитонных решений решениям функционально-дифференциального уравнения (59), ограниченными солитонными решениям соответствуют ограниченные решения индуцированного функционально-дифференциального уравнения и они принадлежат каждому из семейства пространств $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu \in (0, 1]$, а по теореме 6 в пространствах функций $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, $0 < \tau < \hat{\tau}$, справедливо утверждение о единственности для ограниченных решений.

Ограниченные солитонные решения могут быть построены буквальным повторением соответствующей процедуры из предыдущей работы [1]. Качественная картина графика таких решений также сохраняется. Таким образом, в случае усложнения характеристик солитонных решений, отличных от циклической аддитивной подгруппы группы $\mathbb{R}$ из работы [1], качественная картина поведения солитонных решений сохраняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бекларян Л.А., Бекларян А.Л. Дуализм в теории солитонных решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64. № 7. С. 1472–1490.
2. Френкель Я.И., Конторова Т.А. О теории пластической деформации и двойственности // ЖЭТФ. 1938. № 8. С. 89–97.
3. Toda M. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984. С. 262.
4. Мива Т., Джамбо М., Датэ Э. Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечные алгебры. М.: МЦНМО, 2005.
5. Пустыльников Л.Д. Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. № 3. С. 551–604.
6. Keener J.P. Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells // SIAM J. Appl. Math. 1987. V. 47. № 3. P. 556–572.
7. Zinner B. Existence of traveling wavefront solutions for the discrete nagumo equation // J. Different. Equat. 1992. 96. P. 1–27
8. Maller-Paret J. The global structure of traveling waves in spatially discrete dynamical systems. Brown Univer., August, 1997.
9. Maller-Paret J., Cahn J.W., Van Vleck E.S. Traveling wave solutions for systems of ODEs on two-dimensional spatial lattice // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 59. № 2. P. 455–493.
10. Maller-Paret J. The Fredholm alternative for functional-differential equations mixed type. Brown Univer., July, 1997.
11. Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Факториал Пресс, 2007. С. 286.
12. Beklaryan L.A., Beklaryan A.L., Akopov A.S. Soliton solutions for the Manhattan lattice // Inter. J. Appl. Math. 2023. V. 36. № 4.
13. Бекларян Л.А. Краевая задача для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 1. С. 19–22.
14. Бекларян Л.А. Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом как бесконечномерная динамическая система. М.: ВЦ АН СССР, 1989. С. 18.

15. Бекларян Л.А. Об одном методе регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 5. С. 1033–1038.
16. Бекларян Л.А. Групповые особенности дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и связанные с ними метрические инварианты // Итоги науки и техники. 1999. Т. 66. С. 161–182.
17. Beklaryan L.A. Equations of advanced-retarded type and solutions of traveling-wave type for infinite-dimensional dynamic systems // J. Math. Sci. 2004. V. 124. № 4.
18. Beklaryan L.A., Khachatryan N.K. Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Funct. Different. Equat. 2006. V. 13. № 2. P. 125–155.
19. Бекларян Л.А. О квазибегущих волнах // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 12. С. 1731–1775.
20. Бекларян Л.А., Хачатрян Н.К. Об одном классе динамических моделей грузоперевозок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 10. С. 1649–1667.
21. Бекларян Л.А. Квазибегущие волны как естественное расширение класса бегущих волн // Вестн. Тамбовского гос. ун-та. 2014. Т. 19. № 2. С. 331–340.
22. Бекларян Л.А., Бекларян А.Л. Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с сильно нелинейным потенциалом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 2024–2039.
23. Бекларян А.Л., Бекларян Л.А. Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с нелинейным потенциалом общего вида // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 6. С. 933–950.
24. Григорчук Р.И., Курчанов П.Ф. Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией. Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 58. М.: ВИНТИ, 1990. С. 191–256.

DUALISM IN THE THEORY OF SOLITON SOLUTIONS. II

L. A. Beklaryan*

117418 Moscow, Nakhimovsky Ave., 47, CEMI RAS, Russia

*e-mail: lbeklaryan@outlook.com

Received: 03.05.2024

Revised: 15.07.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The paper is a continuation of the work of the same name by Belkarian, Belkarian (2024). The proof of the theorem of the existence and uniqueness of soliton solutions and their corresponding solutions of the functionally differential equation from the dual pair “function-operator”, which was formulated in the noted work in the form of a hypothesis, is presented. This made it possible, in particular, to study soliton solutions with more complex characteristics in the model of traffic flow on the Manhattan lattice than the characteristics given by the additive cyclic subgroup of the group $\mathbb{R}$.

Keywords: soliton solutions, functional differential equation, Manhattan lattice.

СИНГУЛЯРНАЯ ЧАСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ТЕЛАХ С РЕБРАМИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

© 2024 г. А.Н. Боголюбов^{1,*}, И.Е. Могилевский^{1,**}, М.М. Шушарин^{1,***}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

*e-mail: bogan7@yandex.ru

**e-mail: imogilevsky@mail.ru

***e-mail: nirashush1999@gmail.com

Поступила в редакцию 21.05.2024 г.

Переработанный вариант 21.05.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

В статье рассматривается задача дифракции плоской электромагнитной волны на цилиндре произвольной формы сечения с ребром на границе. С помощью метода, впервые предложенного в работах В.А. Кондратьева, для случаев импедансного, идеально проводящего и диэлектрического цилиндров выделяется сингулярная часть решения в окрестности ребра. Библ. 9. Фиг. 2.

Ключевые слова: задача дифракции, особенность электромагнитного поля, ребра, асимптотическое разложение.

DOI: 10.31857/S0044466924110067, EDN: KGRJLD

ВВЕДЕНИЕ

Активное развитие численных методов в последние десятилетия дало возможность решать практически любые задачи электродинамики. Однако для ряда задач решение требует неосуществимо большого времени счета и хорошего начального приближения. Как известно, наличие ребер на границе области может привести к возникновению у электромагнитного поля особенности в их окрестности [1]–[4], что существенно ухудшит сходимость численных методов и увеличит время счета.

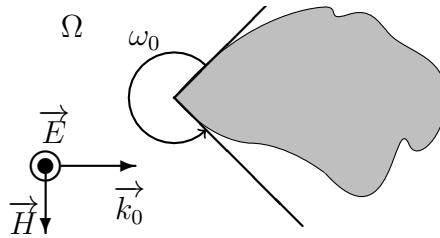
Одним из способов повышения скорости сходимости численных методов является теоретическое исследование поведения решения в окрестности ребра границы. Выделяя особенность электромагнитного поля в явном виде, удастся значительно повысить скорость и точность счета, так как задача сводится к аппроксимации гладкой части электромагнитного поля [5]–[7]. Чтобы построить асимптотику по гладкости для электромагнитного поля, а именно представить решение в виде суммы сингулярной части и гладкой добавки (не обязательно малой по сравнению с сингулярной частью), можно использовать метод, впервые предложенный в работах В.А. Кондратьева [8], и развитый С.А. Назаровым и Б.А. Пламеневским [9].

В данной статье рассматривается задача дифракции на цилиндре, граница которого в цилиндрической системе координат может быть задана зависимостью угловой координаты от радиальной с незначительными ограничениями на форму границы. При такой постановке метод выделения сингулярной части решения эллиптических уравнений для секториальных областей обобщается на случай сечения произвольной формы при весьма слабых ограничениях на границу области. Исследуется особенность решения в задачах дифракции на идеально проводящем, импедансном и диэлектрическом телах.

Метод, описанный в работе, может быть применен и для внутренних задач. При этом вид главной особенности электромагнитного поля зависит лишь от геометрии границы и одинаков как для внутренних задач, так и для внешних.

1. ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ИДЕАЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Рассмотрим задачу дифракции плоской гармонической электромагнитной волны на бесконечном цилиндре с ребром на границе. Пусть волна падает под углом ψ к ребру. Будем рассматривать установившиеся колебания с зависимостью $e^{-i\omega t}$ от времени. Начнем со случая дифракции на идеально проводящем теле.



Фиг. 1. Рассматриваемая задача.

В данном случае исходная задача может быть сведена к двум краевым задачам для уравнения Гельмгольца, соответствующим двум типам поляризации для вертикальных компонент электрического и магнитного полей.

Для вертикальной:

$$\begin{aligned}\Delta E + k^2 E &= 0, \\ E|_S &= 0, \\ \frac{\partial E_{\text{дифр}}}{\partial r} - ik E_{\text{дифр}} &= \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),\end{aligned}$$

Для горизонтальной:

$$\begin{aligned}\Delta H + k^2 H &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial n}|_S &= 0, \\ \frac{\partial H_{\text{дифр}}}{\partial r} - ik H_{\text{дифр}} &= \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right),\end{aligned}\tag{1}$$

где $k = \frac{\omega}{c} \sin \psi$.

Для этих задач справедливы теоремы существования и единственности обобщенного решения в пространстве $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

Для начала рассмотрим задачу дифракции в области в виде бесконечного сектора (дифракция на клине). Обозначим такую область через Ω' . Пусть на границе $\partial\Omega$ поставлены условия Дирихле (случай вертикальной поляризации). Условия на бесконечности заменяются на условие принадлежности решения пространству специального вида.

Перейдем в полярную систему координат с центром на ребре и, следуя методу, впервые предложенному в работах В.А. Кондратьева, введем семейство нормированных функциональных пространство $V_\gamma^l(\Omega')$ нормы которых определяются формулой:

$$\|f\|_{V_\gamma^l(\Omega')}^2 = \sum_{j+k \leq l} \iint_{\Omega'} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} f}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi < \infty.\tag{2}$$

В правую часть уравнения Гельмгольца перенесем слагаемое $k^2 E$ и переобозначим его за некоторую неизвестную функцию $f \equiv -k^2 E$. Предположим для начала, что $f \in V_\gamma^l(\Omega')$.

Заменой радиальной переменной $\tau = \ln \frac{1}{r}$ переведем сектор Ω' в бесконечную полосу Π . В новых координатах уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} = f e^{-2\tau} \equiv F.\tag{3}$$

Из принадлежности f к $V_\gamma^l(\Omega')$ следует оценка

$$\iint_{\Omega'} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} f}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi \leq \|f\|_{V_\gamma^l(\Omega')}^2 < \infty \quad \text{для } j+k \leq l.\tag{4}$$

Путем замены переменных в этом неравенстве получаем оценку на функцию F из правой части.

$$\iint_{\Pi} e^{2(1+l-\gamma)\tau} \left| \frac{\partial^{j+k} F}{\partial \tau^j \partial \varphi^k} \right|^2 d\tau d\varphi \leq C \|f\|_{V_\gamma^l(\Omega')}^2 < \infty \quad \text{для } j+k \leq l.\tag{5}$$

Вдоль полосы Π проведем преобразование Фурье по переменной τ :

$$\widehat{E}(\lambda, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\tau, \varphi) e^{-i\lambda\tau} d\tau.\tag{6}$$

Уравнение для фурье-образа решения примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \widehat{E}}{\partial \varphi^2} - \lambda^2 \widehat{E} = \widehat{F}. \quad (7)$$

Из свойств преобразования Фурье для правой части получаем оценки:

$$\int_0^{\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial^{j+k} F}{\partial \tau^j \partial \varphi^k} \right|^2 e^{2(1+l-\gamma)\tau} d\tau d\varphi = \int_0^{\omega_0} \int_{-\infty+i\hbar}^{+\infty+i\hbar} |\lambda|^{2j} \left| \frac{\partial^k \widehat{F}}{\partial \varphi^k} \right|^2 d\lambda d\varphi \quad (8)$$

$$\text{при } j+k \leq l, \quad \text{где } \hbar = -\gamma + l + 1,$$

$$\sum_{k=0}^l \int_{-\infty+i\hbar}^{+\infty+i\hbar} |\lambda|^{2k} \|\widehat{F}\|_{H^{l-k}(0, \omega_0)}^2 d\lambda \leq C \|f\|_{V_{\gamma}^l(\Omega')}^2. \quad (9)$$

Уравнение (7) допускает решение в виде ряда

$$\widehat{E}(\lambda, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\widehat{F}_n^s(\lambda)}{\lambda^2 + \left(\frac{\pi n}{\omega_0}\right)^2} \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0}, \quad (10)$$

где

$$\widehat{F}_n^s(\lambda) = \frac{2}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} F(\tau, \varphi) \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0} d\varphi.$$

Как несложно заметить, фурье-образ решения имеет полюсы на мнимой оси в точках:

$$\lambda_n = \pm i \frac{\pi n}{\omega_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Поскольку коэффициенты ряда имеют в знаменателе слагаемое λ^2 , фурье-образ решения интегрируем по прямой $\text{Im } \lambda = \hbar$ с большим весом, чем функция $\widehat{F}(\lambda, \varphi)$. Поэтому, если у решения нет полюсов на прямой $\text{Im } \lambda = \hbar$, то справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{l+2} \int_{-\infty+i\hbar}^{+\infty+i\hbar} |\lambda|^{2k} \|\widehat{E}\|_{H^{l-k+2}(0, \omega_0)}^2 d\lambda \leq C \|f\|_{V_{\gamma}^l(\Omega')}^2. \quad (12)$$

Из этой оценки следует, что интеграл, соответствующий обратному преобразованию Фурье, сходится на прямой $\text{Im } \lambda = \hbar$ на комплексной плоскости

$$R_E(\tau, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\hbar}^{+\infty+i\hbar} \widehat{E}(\lambda, \varphi) e^{i\lambda\tau} d\lambda. \quad (13)$$

Этот интеграл определяет функцию $R_E(\tau, \varphi)$, для которой справедливо:

$$\iint_{\Pi} \left| \frac{\partial^{j+k} R_E}{\partial \tau^j \partial \varphi^k} \right|^2 e^{-2(\gamma-l-1)\tau} d\tau d\varphi \leq C \|f\|_{V_{\gamma}^l(\Omega')}^2 \quad \text{для } j+k \leq l+2. \quad (14)$$

Переходя обратно в полярную систему координат, получаем

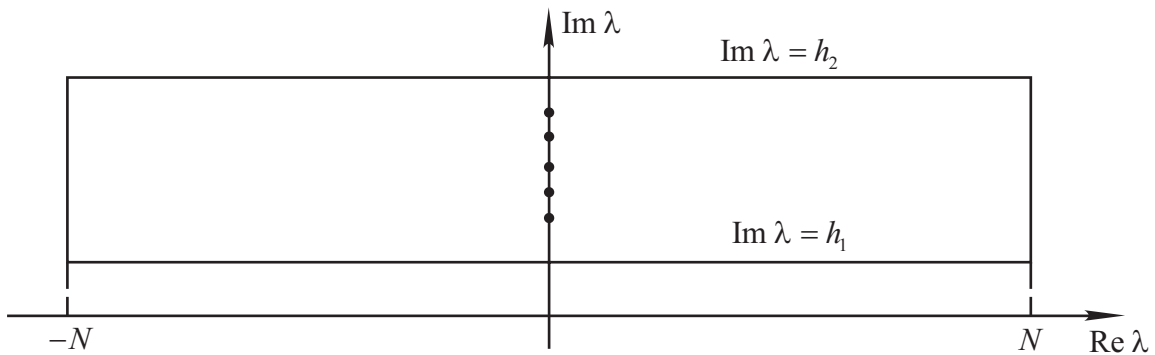
$$\|R_E(r, \varphi)\|_{V_{\gamma}^{l+2}(\Omega')} \leq C \|f\|_{V_{\gamma}^l(\Omega')}, \quad (15)$$

т.е. $R_E \in V_{\gamma}^{l+2}(\Omega')$. Таким образом, R_E является более гладкой, чем $f \in V_{\gamma}^l(\Omega')$ из правой части.

Для построения асимптотики решения предположим, что f принадлежит пересечению пространств $V_{\gamma_1}^l(\Omega') \cap V_{\gamma_2}^l(\Omega')$. Тогда $\widehat{F}(\lambda, \varphi)$ из правой части уравнения (7) для фурье-образа является мероморфной функцией в полосе $\hbar_1 < \text{Im } \lambda < \hbar_2$, где $\hbar_1 = 1 + l - \gamma_1$, а $\hbar_2 = 1 + l - \gamma_2$.

Используя основную теорему о вычетах, можно перейти от интегрирования по прямой $\text{Im } \lambda = h_1$ к интегрированию по $\text{Im } \lambda = h_2$:

$$E(\tau, \varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N+ih_1}^{+N+ih_1} \widehat{E} e^{i\lambda\tau} d\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-N+ih_2}^{+N+ih_2} \widehat{E} e^{i\lambda\tau} d\lambda + \right. \\ \left. + \int_{-N+ih_1}^{-N+ih_2} \widehat{E} e^{i\lambda\tau} d\lambda + \int_{+N+ih_1}^{+N+ih_2} \widehat{E} e^{i\lambda\tau} d\lambda \right) + \sqrt{2\pi} i \sum_{h_1 \leq \frac{\pi n}{\omega_0} \leq h_2} \text{Res} \left[e^{i\lambda\tau} \widehat{E}, \lambda_n \right]. \quad (16)$$



Фиг. 2. Контур, используемый при применении теоремы о вычетах.

При $N \rightarrow \infty$ интегралы по боковым сторонам прямоугольника стремятся к нулю:

$$E(\tau, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ih_2}^{+\infty+ih_2} \widehat{E}(\lambda, \varphi) e^{i\lambda\tau} d\lambda + \sqrt{2\pi} i \sum_{h_1 \leq \frac{\pi n}{\omega_0} \leq h_2} \text{Res} \left[e^{i\lambda\tau} \widehat{E}, \lambda_n \right], \quad (17)$$

где для вычетов справедливо

$$\text{Res} \left[e^{i\lambda\tau} \widehat{E}, i \frac{\pi n}{\omega_0} \right] = \text{Res} \left[\frac{e^{i\lambda\tau} \widehat{F}_n^s(\lambda)}{\lambda^2 + (\frac{\pi n}{\omega_0})^2}, i \frac{\pi n}{\omega_0} \right] \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0} = \frac{\widehat{F}_n^s(i \frac{\pi n}{\omega_0})}{2i \frac{\pi n}{\omega_0}} e^{-\frac{\pi n}{\omega_0} \tau} \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0}. \quad (18)$$

Делая обратную замену переменных $r = e^{-\tau}$, получаем асимптотическое представление для интеграла по нижней прямой $\text{Im } \lambda = h_1$:

$$E(r, \varphi) = \sum_{h_1 < \frac{\pi n}{\omega_0} < h_2} C_n r^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0} + R_E(r, \varphi), \quad (19)$$

где было введено обозначение

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ih_2}^{+\infty+ih_2} \widehat{E}(\lambda, \varphi) e^{i\lambda\tau} d\lambda \equiv R_E(r, \varphi). \quad (20)$$

Аналогично (15), получаем оценку на гладкую добавку R_E :

$$\|R_E\|_{V_{\gamma_2}^{l+2}(\Omega')} \leq C \|f\|_{V_{\gamma_2}^l(\Omega')}. \quad (21)$$

Подобным образом, можно получить ряд фурье-образа решения для горизонтальной поляризации:

$$\widehat{H}(\lambda, \varphi) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{F}_n^c(\lambda)}{\lambda^2 + (\frac{\pi n}{\omega_0})^2} \cos \frac{\pi n \varphi}{\omega_0}, \quad (22)$$

где $\widehat{F}_n^c(\lambda)$ — коэффициенты разложения $\widehat{F}$ в ряд Фурье.

При условиях Неймана появляется слагаемое $\widehat{H}_0(\lambda) = -\frac{\widehat{F}_0^c(\lambda)}{\lambda^2}$. Исследуя его поведение отдельно, до преобразования Фурье, можно получить оценку $H_0(r) \in V_\gamma^{l+2}(\Omega')$. Поэтому слагаемое $H_0(r)$ может быть внесено внутрь $R_H(r, \varphi) \in V_\gamma^{l+2}(\Omega')$.

Чтобы оценить правую часть введем срезающую функцию $\chi(r) \in C^\infty(\Omega')$:

$$\chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r \leq \frac{d}{2}, \\ 0 & \text{при } r > d. \end{cases} \quad (23)$$

Из условия Мейкснера следует, что $E \in H_{\text{loc}}^1(\Omega')$:

$$\|E\|_{H^1(\Omega)}^2 = \sum_{k+j \leq 1} \iint_{\Omega} r^{-2k} \left| \frac{\partial^{j+k} E}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi < \infty. \quad (24)$$

Используя лемму 4.4 из [1], получаем оценку

$$\|\chi E\|_{H^1(\Omega)}^2 \geq C \iint_{\Omega} r^{2\gamma} \left| \frac{\partial(\chi E)}{\partial r} \right|^2 r dr d\varphi \geq C(\gamma) \iint_{\Omega} r^{2\gamma-2} |(\chi E)|^2 r dr d\varphi. \quad (25)$$

Из нее для нормы E в пространстве V_γ^1 при $\gamma > 0$ следует

$$\begin{aligned} \|\chi E\|_{V_\gamma^1(\Omega)}^2 &= \sum_{j+k \leq 1} \iint_{\Omega} r^{2(\gamma-1+j)} \left| \frac{\partial^{j+k}(\chi E)}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi = \\ &= \iint_{\Omega} \left(r^{2\gamma} \left| \frac{\partial(\chi E)}{\partial r} \right|^2 + r^{2\gamma-2} \left| \frac{\partial(\chi E)}{\partial \varphi} \right|^2 + r^{2\gamma-2} |\chi E|^2 \right) r dr d\varphi \leq C \|\chi E\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, $\chi E \in V_\gamma^1(\Omega')$ для $\gamma \in (0, 2]$. Но так как между прямыми $\text{Im } \lambda = 2$ и $\text{Im } \lambda = 2 - \gamma$ при малых значениях γ нет полюсов функции $\chi \widehat{E}$, то $f \in V_2^1(\Omega') \cap V_0^1(\Omega')$.

Используя метод, описанный выше, получаем асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} E(r, \varphi) &= \chi \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < 2} C_{En} r^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \sin \frac{\pi n \varphi}{\omega_0} + R_E(r, \varphi), \\ H(r, \varphi) &= \chi \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < 2} C_{Hn} r^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \cos \frac{\pi n \varphi}{\omega_0} + R_H(r, \varphi), \end{aligned} \quad (27)$$

где $R_E, R_H \in V_0^3(\Omega)$.

Итак, решение в окрестности ребра представлено в виде суммы сингулярной части и гладкой добавки, для которой получена оценка через норму соответствующего функционального пространства. Для углов $\omega_0 > \pi$ уже первая производная сингулярной части стремится к бесконечности в окрестности ребра.

2. СИНГУЛЯРНОСТЬ В ОКРЕСТНОСТИ РЕБРА ЦИЛИНДРА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Пусть теперь граница $\partial\Omega = S$ задана зависимостью угловой координаты от радиальной:

$$\Omega = \{(r, \varphi) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi) : \varphi \in (\varphi_1(r), \varphi_2(r))\}, \quad (28)$$

Наложим на форму границы следующие ограничения:

$$\begin{aligned} \varphi_i &\in C^2(0, d] \cap C[0, d], \quad d > 0, \\ \varphi_1(0) &= 0, \quad \varphi_2(0) = \omega_0 \in (0, 2\pi), \\ \varphi_i' &= \underline{O}(r^{\alpha-1}), \quad \varphi_i'' = \underline{O}(r^{\alpha-2}) \text{ при } r \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Для условий Неймана потребуем чтобы $\alpha > 1$, а для Дирихле чтобы $\alpha > 0$. Сведем задачу с произвольной формой границы к задаче в бесконечном секторе, используя преобразование координат следующего вида:

$$R = r, \quad \Phi = \omega_0 \frac{\varphi - \varphi_1(r)}{\varphi_2(r) - \varphi_1(r)}. \quad (30)$$

Таким образом, переходим в область $\Omega' = (0, \infty) \times (0, \omega_0)$.

В новых координатах Лапласиан принимает следующий вид:

$$\Delta_{r\varphi} H = (H''_{RR} + 2H''_{R\Phi} \Phi'_r + H''_{\Phi\Phi} (\Phi'_r)^2 + H'_\Phi \Phi''_{rr}) + \frac{1}{R} (H'_R + H'_\Phi \Phi'_r) + \frac{1}{R^2} H''_{\Phi\Phi} (\Phi'_\varphi)^2, \quad (31)$$

где производные определяются выражениями

$$\Phi'_r = -\frac{\Phi(\varphi'_2 - \varphi'_1) + \varphi'_1 \omega_0}{\varphi_2 - \varphi_1}; \quad \Phi''_{rr} = -\frac{\Phi(\varphi''_2 - \varphi''_1) + \varphi''_1 \omega_0}{\varphi_2 - \varphi_1}; \quad \Phi'_\varphi = \frac{\omega_0}{\varphi_2 - \varphi_1}. \quad (32)$$

Якобиан перехода — ограниченная в нуле функция:

$$J = \frac{D(R, \Phi)}{D(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} R'_r & R'_\varphi \\ \Phi'_r & \Phi'_\varphi \end{vmatrix} = \Phi'_\varphi = \frac{\omega_0}{\varphi_2 - \varphi_1} \xrightarrow{R \rightarrow 0} 1. \quad (33)$$

Оценим гладкость решения в новых координатах. Покажем, что из $U \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$ следует, что $U \in H^1_{\text{loc}}(\Omega')$. Для этого проведем замену координат в выражении для нормы:

$$\begin{aligned} \|U\|_{H^1(\Omega')}^2 &= \iint_{\Omega'} \left(|U'_R|^2 + \frac{1}{r^2} |U'_\Phi|^2 + |U|^2 \right) R dR d\Phi = \\ &= \iint_{\Omega} \left(\left| U'_r - U'_\varphi \frac{\Phi'_r}{\Phi'_\varphi} \right|^2 + \frac{1}{r^2} |U'_\varphi (\Phi'_\varphi)^{-1}|^2 + |U|^2 \right) \Phi'_\varphi r dr d\varphi \leq \\ &\leq \iint_{\Omega} \left(|U'_r|^2 + |U'_\varphi|^2 \left(\frac{1+r^2 \Phi_r'^2}{r^2 \Phi_\varphi'^2} \right) + 2 |U'_\varphi| |U'_r| \left| \frac{\Phi'_r}{\Phi'_\varphi} \right| + |U|^2 \right) \Phi'_\varphi r dr d\varphi \leq \\ &\leq \iint_{\Omega} \left(|U'_r|^2 + |U'_\varphi|^2 \left(\frac{1+r^2 \Phi_r'^2}{r^2 \Phi_\varphi'^2} \right) + \left(|U'_\varphi|^2 \Phi_r'^2 + \frac{|U'_r|^2}{\Phi_\varphi'^2} \right) + |U|^2 \right) \Phi'_\varphi r dr d\varphi = \\ &= \iint_{\Omega} \left(|U'_r|^2 (1 + \Phi_\varphi'^{-2}) + |U'_\varphi|^2 \left(\frac{1+r^2 \Phi_r'^2}{r^2 \Phi_\varphi'^2} + \Phi_r'^2 \right) + |U|^2 \right) \Phi'_\varphi r dr d\varphi \leq \\ &\leq M \iint_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial U}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{r^2} \left| \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|^2 + |U|^2 \right) r dr d\varphi = M \|U\|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (34)$$

где в качестве M можно выбрать

$$M = \max \left\{ \max_{r \in (0, d)} (\Phi'_\varphi + \Phi_\varphi'^{-1}); \max_{r \in (0, d)} \frac{1+r^2 \Phi_r'^2 (1+\Phi_\varphi'^2)}{\Phi_\varphi'}; \max_{r \in (0, d)} \Phi'_\varphi \right\}. \quad (35)$$

Интеграл по области $r > d$ будет сходиться, так как в качестве U будет рассматриваться функция $U = \chi(r)H$, равная тождественно нулю $r > d$. Существование такого числа M следует из ограниченности в окрестности нуля функций Φ'_φ и $r\Phi'_r$. Итак, в новых координатах справедлива оценка $\chi H \in V_0^1(\Omega) \cap V_2^1(\Omega)$.

Перейдем к рассмотрению граничных условий Неймана. В полярной системе координат нормальная производная выглядит следующим образом:

$$\left. \frac{\partial H}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = \pm \frac{-r\varphi'_i H'_r + \frac{1}{r} H'_\varphi}{\sqrt{1 + (r\varphi'_i)^2}} \Big|_{\partial \Omega}. \quad (36)$$

В криволинейной системе координат (R, Φ) граничные условия примут вид

$$\left. \frac{\partial H}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = \pm \frac{-R\varphi'_i H'_R + H'_\Phi \left(-R\varphi'_i \Phi'_r + \frac{\Phi'_\varphi}{R} \right)}{\sqrt{1 + (R\varphi'_i)^2}} \Big|_{\partial \Omega} = 0. \quad (37)$$

Запишем граничные условия в виде неоднородных условий Неймана с неизвестной правой частью:

$$H'_\Phi = H'_R \left(\frac{\Phi'_\varphi}{R^2 \Phi'_i} - \Phi'_r \right)^{-1} = H'_R \frac{R^2 \Phi'^2_i}{R^2 \Phi'^2_i + \omega_0} \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\omega_0}. \quad (38)$$

Чтобы свести граничные условия к однородным, будем искать решение в виде:

$$H(R, \Phi) = g(R, \Phi) + \tilde{H}(R, \Phi), \quad (39)$$

где g удовлетворяет граничным условиям. Например, можно подобрать g следующим образом:

$$g(R, \Phi) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\omega_0} \int_0^\Phi H'_R \frac{R^2 s^2}{R^2 s^2 + \omega_0} d\tilde{\Phi}, \quad (40)$$

где $s(R, \Phi)$ — функция, обращающаяся в $\varphi'_i(R)$ на границе. Примем ее за линейную по Φ функцию:

$$s(R, \Phi) = \varphi'_1 + \frac{\Phi}{\omega_0} (\varphi'_2 - \varphi'_1). \quad (41)$$

Из условий на φ_i следует, что $s \in C^1(\overline{\Omega'})$. Поэтому при $R \rightarrow 0$ функция g будет вести себя как $g \sim R^{2\alpha} H'_R$. Опираясь на упомянутую ранее лемму 4.4 из [1], можно получить оценки для слагаемых из правой части уравнения на $\tilde{H}$:

$$H \in V^l_\gamma(\Omega') \Rightarrow \Delta g \in V^{l-1}_{\gamma-2\alpha+2}(\Omega'), g \in V^{l-1}_{\gamma-2\alpha}(\Omega'). \quad (42)$$

Оценим теперь слагаемые, появившиеся за счет перехода в криволинейную систему координат. После перехода в сектор уравнение принимает следующий вид:

$$\Delta_{R\Phi} \tilde{H} = -k^2 H + f - \Delta g = \tilde{f}, \quad (43)$$

где функция $f(R, \Phi)$ определяется выражением:

$$f = -2H''_{R\Phi} \Phi'_r - H'_\Phi \Phi''_{rr} - \frac{1}{R} H'_\Phi \Phi'_r + \frac{1}{R^2} H''_{\Phi\Phi} \left(1 - \Phi'^2_\varphi - R^2 \Phi'^2_r \right). \quad (44)$$

Можно оценить, что $H \in V^l_\gamma(\Omega') \Rightarrow f \in V^{l-1}_{\gamma+1-\alpha}(\Omega')$, исходя из

$$\Phi'^2_\varphi = 1 + \underline{O}(R^\alpha); \quad \Phi'_r = \underline{O}(R^{\alpha-1}); \quad \Phi''_{rr} = \underline{O}(R^{\alpha-2}). \quad (45)$$

Приходим к оценке на $\tilde{f}$ из правой части уравнения Пуассона для $\tilde{H}$:

$$H \in V^l_\gamma(\Omega') \Rightarrow \tilde{f} \in V^{l-1}_{\gamma+1-\alpha}(\Omega'). \quad (46)$$

В случае задачи Дирихле на $E(R, \Phi)$ оценка для правой части будет иметь такой же вид, а константа α принимать значения меньше единицы.

Наконец, асимптотическое представление в новых координатах может быть получено тем же методом, что и для случая бесконечного сектора. Однако, в силу ослабления оценки для правой части до $f \in V^{0}_{1-\alpha}(\Omega') \cap V^0_1(\Omega')$, в обратном преобразовании Фурье интегрирование будет производиться по прямой $\text{Im } \lambda = \alpha$. Из-за этого в сингулярную часть будет выделено меньше слагаемых, а оценка для гладкой добавки станет слабее. Итак, вблизи ребра справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned} E(R, \Phi) &= \chi \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < \alpha} C_{En} R^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \sin \frac{\pi n \Phi}{\omega_0} + R_E(R, \Phi), \\ H(R, \Phi) &= \chi \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < \alpha} C_{Hn} R^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \cos \frac{\pi n \Phi}{\omega_0} + R_H(R, \Phi), \end{aligned} \quad (47)$$

где $R_E, R_H \in V^2_{1-\alpha}(\Omega')$.

Чтобы получить решение в старых координатах, достаточно произвести обратное преобразование. В силу того, что $R \equiv r$, а $\Phi \xrightarrow{r \rightarrow 0} \varphi$, при заданных ограничениях на форму границы, главная особенность решения $r^{\frac{\pi}{\omega_0}} \sin \frac{\pi \varphi}{\omega_0}$ будет иметь такой же вид, что и для бесконечного клина того же угла раствора.

3. ЗАДАЧА ДЛЯ ДИЭЛЕКТРИКА

Рассмотрим теперь дифракцию на цилиндре из диэлектрика с диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ . Через Ω_e и Ω_i обозначим области вне и внутри цилиндра. В случае изотропного диэлектрика можно представить полное поле в виде суперпозиции полей электрического и магнитного типов. Таким образом, задача может быть сведена к двум задачам для вертикальной и горизонтальной поляризаций соответственно:

$$\begin{aligned} \Delta E^i + k_i^2 E^i &= 0, \text{ в } \Omega_i, & \Delta H^i + k_i^2 H^i &= 0, \text{ в } \Omega_i, \\ \Delta E^e + k_e^2 E^e &= 0, \text{ в } \Omega_e, & \Delta H^e + k_e^2 H^e &= 0, \text{ в } \Omega_e, \\ (E^e - E^i)|_S &= 0, & (H^e - H^i)|_S &= 0, \\ \left(\mu\beta \frac{\partial E^e}{\partial n} - \frac{\partial E^i}{\partial n} \right) \Big|_S &= 0, & \left(\epsilon\beta \frac{\partial H^e}{\partial n} - \frac{\partial H^i}{\partial n} \right) \Big|_S &= 0, \\ \frac{\partial E_{\text{дифр}}^e}{\partial r} - ik_e E_{\text{дифр}}^e &= \bar{\partial} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right), & \frac{\partial H_{\text{дифр}}^e}{\partial r} - ik_e H_{\text{дифр}}^e &= \bar{\partial} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \right), \end{aligned} \quad (48)$$

где $\beta = \frac{1 - \mu\epsilon \cos^2 \psi}{\sin^2 \psi}$, а волновые числа

$$k^2 = \begin{cases} k_e^2 = k_0^2 \sin^2 \psi & \text{в } \Omega_e, \\ k_i^2 = k_0^2 (\epsilon\mu - \cos^2 \psi) & \text{в } \Omega_i. \end{cases} \quad (49)$$

Рассмотрим задачу для вертикальной поляризации. Для горизонтальной, ввиду схожего вида граничных условий, справедливы аналогичные рассуждения.

Как и для идеального проводника, рассмотрим сперва задачу в области в виде бесконечного сектора. Область внутри сектора, соответствующую внутренней части цилиндра, назовем Ω'_i , ее дополнение — Ω'_e .

Введем семейство пространств Кондратьева $V_\gamma^l(\mathbb{R}^2)$ с нормами:

$$\|f\|_{V_\gamma^l(\mathbb{R}^2)}^2 = \sum_{j+k \leq l} \iint_{\Omega_i} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} f}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi + \sum_{j+k \leq l} \iint_{\Omega_e} r^{2(\gamma-l+j)} \left| \frac{\partial^{j+k} f}{\partial r^j \partial \varphi^k} \right|^2 r dr d\varphi. \quad (50)$$

Проведем замену $\tau = \ln \frac{1}{r}$ и преобразование Фурье по τ .

Задача для фурье-образа принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{E}^e}{\partial \varphi^2} - \lambda^2 \hat{E}^e &= \hat{F}^e \text{ при } \varphi \in (0, \omega_0), \\ \frac{\partial^2 \hat{E}^i}{\partial \varphi^2} - \lambda^2 \hat{E}^i &= \hat{F}^i \text{ при } \varphi \in (\omega_0, 2\pi), \\ \hat{E}^e \Big|_{\varphi=0} &= \hat{E}^i \Big|_{\varphi=2\pi}, \quad \hat{E}^e \Big|_{\varphi=\omega_0-0} = \hat{E}^i \Big|_{\varphi=\omega_0+0}, \\ \mu\beta \frac{\partial \hat{E}_z^e}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= \frac{\partial \hat{E}_z^i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi}, \quad \mu\beta \frac{\partial \hat{E}_z^e}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\omega_0-0} = \frac{\partial \hat{E}_z^i}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\omega_0+0}. \end{aligned} \quad (51)$$

Ее решение можно найти в виде ряда по собственным функциям соответствующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \eta^2 u &= 0 \text{ при } \varphi \in (0, 2\pi), \\ u \Big|_{\varphi=0} &= u \Big|_{\varphi=2\pi}, \quad u \Big|_{\varphi=\omega_0-0} = u \Big|_{\varphi=\omega_0+0}, \\ p \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=2\pi}, \quad p \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\omega_0-0} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\omega_0+0}, \end{aligned} \quad (52)$$

где $p = \mu\beta$ для вертикальной поляризации. Для горизонтальной поляризации $p = \epsilon\beta$.

Собственные функции могут быть представлены в виде:

$$u(\varphi) = \begin{cases} A_i \sin(\eta(\varphi - 2\pi)) + B_i \cos(\eta(\varphi - 2\pi)), & \varphi \in (\omega_0, 2\pi), \\ A_e \sin \eta\varphi + B_e \cos(\eta\varphi), & \varphi \in (0, \omega_0). \end{cases} \quad (53)$$

Подставляя такой вид собственных функций в условия сопряжения, получаем систему уравнений на коэффициенты:

$$\begin{aligned} B_e &= B_i, & pA_e &= A_i, \\ A_e \sin \omega_0 \eta + B_e \cos \omega_0 \eta &= A_i \sin (\omega_0 - 2\pi) \eta + B_i \cos (\omega_0 - 2\pi) \eta, \\ p(A_e \cos \omega_0 \eta - B_e \sin \omega_0 \eta) &= A_i \cos (\omega_0 - 2\pi) \eta - B_i \sin (\omega_0 - 2\pi) \eta. \end{aligned} \quad (54)$$

Условие существования решения - равенство нулю определителя системы:

$$(p-1)^2 \sin^2 (\omega_0 - \pi) \eta - (p+1)^2 \sin^2 \pi \eta = 0.$$

Итак, собственные значения можно найти из уравнений:

$$\sin \pi \eta \pm \frac{(p-1)}{(p+1)} \sin (\omega_0 - \pi) \eta = 0, \quad \eta \neq 0. \quad (55)$$

Для вертикальной поляризации обозначим их корни за η_n^E , а соответствующие собственные функции за $u_n^E(\varphi)$. Для горизонтальной обозначим их через η_n^H и $u_n^H(\varphi)$. Они отличаются лишь из-за того, что коэффициенты p из уравнения (55) различны, в зависимости от поляризации. Пусть собственные функции также удовлетворяют условию нормировки: $\int_0^{2\pi} u_n(\varphi) d\varphi = 1$. Тогда ряд для фурье-образа решения примет вид:

$$\hat{E}(\lambda, \varphi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{F}_n(\lambda)}{\lambda^2 + (\eta_n^E)^2} u_n^E(\varphi). \quad (56)$$

Итак, фурье-образ решения имеет полюсы, расположенные в точках $\lambda_n = i\eta_n^E$.

Начальная оценка $f \in V_0^1(\mathbb{R}^2) \cap V_2^1(\mathbb{R}^2)$ та же, что и для предыдущего случая. Поэтому, аналогично случаю идеальной проводимости, фурье-образ решения окажется мероморфной функцией в полосе $\text{Im } \lambda \in [0, 2]$.

Следовательно, при обратном преобразовании Фурье переходим от интегрирования по $\text{Im } \lambda = 0$ к интегрированию по $\text{Im } \lambda = 2$. Как и в случае условий идеальной проводимости, интеграл по верхней прямой $R_E \in V_0^3(\mathbb{R}^2)$ оказывается более гладкой функцией в окрестности нуля, чем интеграл по нижней. Поэтому вычеты в полюсах, лежащих между прямыми, передают сингулярную часть решения.

Пусть теперь форма боковых поверхностей цилиндра задается зависимостями $\varphi(r) = \varphi_i(r)$, на которые наложены те же ограничения, что и для условий Неймана, т.е. с константой $\alpha > 1$. Сделаем замену переменных по-отдельности в областях Ω_i и Ω_e :

$$R = r, \quad \Phi^e = \omega_0 \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}, \quad \Phi^i = \frac{\varphi(2\pi - \omega_0) + \omega_0(2\pi + \varphi_1) - 2\pi\varphi_2}{2\pi + \varphi_1 - \varphi_2}. \quad (57)$$

В условии на разрыв нормальной производной появятся новые слагаемые:

$$\mu\beta E_{\Phi^e}^{e'}|_S - E_{\Phi^e}^{e'}|_S = \left((\mu\beta - 1)s_1 E_R' + \mu\beta s_2^e E_{\Phi^e}^{e'} - s_2^i E_{\Phi^i}^{i'} \right)|_S, \quad (58)$$

где функции s_1, s_2^e, s_2^i имеют следующий вид:

$$s_1 = R^2 s; \quad s_2^e = 1 + R^2 s \Phi_r^{e'} - \Phi_\varphi^{e'}; \quad s_2^i = 1 + R^2 s \Phi_r^{i'} - \Phi_\varphi^{i'}; \quad (59)$$

где использовано обозначение:

$$s(R, \varphi) = \begin{cases} \Phi_1' + \frac{\Phi}{\omega_0}(\varphi_2' - \varphi_1'), & \Phi \in (0, \omega_0), \\ \varphi_2' + \frac{\Phi - \omega_0}{2\pi - \omega_0}(\varphi_1' - \varphi_2'), & \Phi \in (\omega_0, 2\pi). \end{cases} \quad (60)$$

Вновь ищем решение в виде $E = \tilde{E} + g$, где функция $g(R, \Phi)$ удовлетворяет неоднородным граничным условиям. Функцию g выберем следующим образом:

$$g = \begin{cases} (s_1 E_R^{e'} + s_2^e E_{\Phi^e}^{e'}) \frac{\Phi(\omega_0 - \Phi)}{\omega_0}, & \Phi \in (0, \omega_0), \\ (s_1 E_R^{i'} + s_2^i E_{\Phi^i}^{i'}) \frac{(\Phi - \omega_0)(\Phi - 2\pi)}{2\pi - \omega_0}, & \Phi \in (\omega_0, 2\pi). \end{cases} \quad (61)$$

Коэффициенты в выражении для g ведут себя в нуле не хуже, чем $s_1 \sim R^{1+\alpha}$, $s_2 \sim R^\alpha$. Поэтому справедливо:

$$E \in V_\gamma^l(\mathbb{R}^2) \Rightarrow g \in V_{\gamma-\alpha}^{l-1}(\mathbb{R}^2); \quad \Delta g \in V_{\gamma+2-\alpha}^{l-1}(\mathbb{R}^2). \quad (62)$$

Таким образом, для правой части выполнена оценка:

$$E \in V_\gamma^l(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \tilde{f} \in V_{\gamma+2-\alpha}^{l-1}(\mathbb{R}^2). \quad (63)$$

Исходя из начальной оценки для решения, правая часть $f \in V_{2-\alpha}^0(\mathbb{R}^2) \cap V_1^0(\mathbb{R}^2)$. Поэтому обратное преобразование Фурье будем производить вдоль прямой $\text{Im } \lambda = \alpha - 1 > 0$. Асимптотическое представление решения принимает вид:

$$\begin{aligned} E(R, \Phi) &= \chi \sum_{0 < \eta_n^E < \alpha-1} C_n R^{\eta_n^E} u_n^E(\Phi) + R_E(R, \Phi), \\ H(R, \Phi) &= \chi \sum_{0 < \eta_n^H < \alpha-1} C_n R^{\eta_n^H} u_n^H(\Phi) + R_H(R, \Phi), \end{aligned} \quad (64)$$

где $R_E, R_H \in V_{2-\alpha}^2(\mathbb{R}^2)$. Подобно случаю идеальной проводимости, главная особенность не изменится, если заменить боковые поверхности на касательные к ним на ребре плоскости.

4. ЗАДАЧА ДЛЯ ИМПЕДАНСНЫХ УСЛОВИЙ

Если проводимость σ среды велика, но приближение идеальной проводимости не дает достаточную точность, используют граничные условия Шукина-Леонтовича, также называемые импедансными условиями.

Рассмотрим задачу в области $\Omega = (\varphi_1, \varphi_2) \times (0, +\infty)$ с теми же требованиями, что и для условий Неймана, т.е. при $\alpha > 1$.

Введем в окрестности границы криволинейную ортогональную систему координат, базис которой обращается в тройку векторов $\mathbf{n}, \mathbf{s} = [\mathbf{e}_z, \mathbf{n}]$, $\mathbf{e}_z$ на границе. Импедансные условия в таких координатах принимают вид:

$$\begin{aligned} E_z \Big|_S &= w H_s \Big|_S, \\ E_s \Big|_S &= -w H_z \Big|_S, \end{aligned} \quad (65)$$

где $w = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$ — поверхностный импеданс, $\epsilon' = \epsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}$.

Используя уравнения Максвелла, импедансные условия можно свести к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial n} &= -\cos \Psi \frac{\partial H_z}{\partial s} - i \frac{k_0}{w} \sin^2 \Psi E_z, \\ \frac{\partial H_z}{\partial n} &= \cos \Psi \frac{\partial E_z}{\partial s} - i k_0 w \sin^2 \Psi H_z, \end{aligned} \quad (66)$$

где

$$\frac{\partial H_z}{\partial s} = s_x H'_x + s_y H'_y = \frac{H'_r + H'_\varphi \Phi'_i}{\sqrt{1 + (r\Phi'_i)^2}}. \quad (67)$$

Преобразуем координаты:

$$R = r, \quad \Phi = \omega \frac{\varphi - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}. \quad (68)$$

Пусть $E_z = E$, $H_z = H$. В граничные условия подставим выражения для производных в новых координатах. Приходим к следующему представлению граничных условий:

$$\begin{aligned} E'_\Phi &= R \cos \Psi H'_R + S_E(R), \\ H'_\Phi &= -R \cos \Psi E'_R + S_H(R). \end{aligned} \quad (69)$$

Через S_E и S_H обозначены функции:

$$\begin{aligned} S_E &= E'_\Phi (1 - \Phi'_\varphi + R^2 \Phi'_i \Phi'_r) + E'_R R^2 \Phi' + \\ &+ R (\Phi'_r + \Phi'_\varphi \Phi'_i) \cos \Psi H'_\Phi \pm i \frac{k_0}{w} R \sin^2 \Psi E \sqrt{1 + (R\Phi'_i)^2} = A_E \pm B_E; \\ S_H &= H'_\Phi (1 - \Phi'_\varphi + R^2 \Phi'_i \Phi'_r) + H'_R R^2 \Phi' - \\ &- R (\Phi'_r + \Phi'_\varphi \Phi'_i) \cos \Psi H'_\Phi \pm i k_0 w R \sin^2 \Psi H \sqrt{1 + (R\Phi'_i)^2} = A_H \pm B_H. \end{aligned} \quad (70)$$

Функции S разбиты на суммы A и B для упрощения вида формул. Продлим S_E и S_H на всю Ω , снова вводя функцию $s(R, \Phi) = \varphi'_1 + \frac{\Phi}{\omega_0}(\varphi'_2 - \varphi'_1)$.

Ищем решение в виде $E = \tilde{E} + g$, а функцию g , удовлетворяющую граничным условиям, выберем в виде

$$g = \cos \Psi \left(\int_{\delta}^{\Phi} R \frac{\partial H}{\partial R} d\tilde{\Phi} + C(R) \right) + \int_0^{\Phi} A_E d\tilde{\Phi} + \sin \frac{\pi \Phi}{\omega_0} \int_0^{\Phi} B_E d\tilde{\Phi}, \quad (71)$$

где $C(R)$ и δ будут подобраны ниже таким образом, чтобы $g \in V_Y^l(\Omega')$, $\Delta g \in V_Y^{l-1}(\Omega')$.

Функция $\tilde{E}(r, \varphi)$ удовлетворяет однородным условиям Неймана и уравнению:

$$\Delta \tilde{E} = -(\Delta g + k^2 E) + f = \tilde{f}. \quad (72)$$

Будем исследовать слагаемые, входящие в g по отдельности. Рассмотрим первое слагаемое и подберем подходящие $C(R)$ и δ :

$$\begin{aligned} \Delta \int_{\delta}^{\Phi} R \frac{\partial H}{\partial R} d\tilde{\Phi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \int_{\delta}^{\Phi} R \frac{\partial H}{\partial R} d\tilde{\Phi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} \int_{\delta}^{\Phi} H d\tilde{\Phi} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \int_{\delta}^{\Phi} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial H}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 H}{\partial \Phi^2} \right) d\tilde{\Phi} + \frac{\partial H}{\partial \Phi}(R, \delta) \right) = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \int_{\delta}^{\Phi} (-k^2 H) d\tilde{\Phi} + \frac{\partial H}{\partial \Phi}(R, \delta) \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Чтобы выполнялось равенство

$$\Delta C(R) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial C}{\partial R} \right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial H}{\partial \Phi}(R, \delta) \right), \quad (74)$$

подберем $C(r)$ в виде

$$C(r) = - \int_0^R \frac{1}{\tilde{R}} \frac{\partial H}{\partial \Phi}(\tilde{R}, \delta) d\tilde{R}. \quad (75)$$

Тогда имеем

$$\Delta \left(\int_{\delta}^{\Phi} R \frac{\partial H}{\partial R} d\varphi' + C(R) \right) \in V_Y^l(\Omega'). \quad (76)$$

Такой выбор $C(r)$ гарантирует гладкость первого слагаемого из выражения для Δg . Покажем, что существует δ такое, что $H(r, \delta) \in V_Y^l(\Omega')$ при $H(r, \varphi) \in V_Y^l(\Omega')$:

$$\begin{aligned} \|H\|_{V_Y^l(\Omega')}^2 &\geq \int_0^{\infty} \int_0^{\omega_0} \sum_{j=0}^l R^{2(\gamma-1+j)} \left| \frac{\partial^j H}{\partial R^j} \right|^2 d\Phi R dR = \\ &= \omega_0 \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^l R^{2(\gamma-1+j)} \left| \frac{\partial^j H}{\partial R^j} \right|_{\Phi=\delta}^2 R dR = \omega_0 \|H(R, \delta)\|_{V_Y^1(\Omega')}^2, \end{aligned} \quad (77)$$

где при переходе от интеграла по Ω' к интегралу по лучу $r \in [0, \infty)$, $\varphi = \delta$ использовалась теорема о среднем, где утверждается существование $\delta \in (0, \omega_0)$, что $\int_0^{\omega_0} f(\varphi) d\varphi = \omega_0 f(\delta)$ для любой непрерывной на $[0, \omega_0]$ функции.

Оценим оставшиеся слагаемые из S_E . Для этого рассмотрим коэффициенты, входящие в выражения для A_E и B_E :

$$\begin{aligned} 1 - \Phi'_{\varphi} + R^2 \Phi'_i \Phi'_r &= \underline{O}(R^{\alpha}); & R^2 \varphi' &= \underline{O}(R^{1+\alpha}); \\ R(\Phi'_r + \Phi'_{\varphi} \varphi'_i) &= \underline{O}(R^{\alpha}); & R \sqrt{1 + (R \varphi'_i)^2} &= \underline{O}(R). \end{aligned} \quad (78)$$

Исходя из этого можно заключить, что два последних слагаемых g принадлежат пространству $V_{\gamma-\alpha}^l(\Omega)$, а их лапласианы — пространству $V_{\gamma+1-\alpha}^{l-1}(\Omega)$. Оценка для первого слагаемого в g слабее, поэтому при $E, H \in V_{\gamma}^l(\Omega)$ справедливо $g \in V_{\gamma}^l(\Omega)$, $\Delta g \in V_{\gamma}^{l-1}(\Omega)$.

Исходя из начальной оценки $E, H \in V_0^1(\Omega')$, получаем оценку: $\tilde{f} \in V_0^0(\Omega') \cap V_1^0(\Omega')$ для правой части. Таким образом, приходим к асимптотическому представлению решения:

$$\begin{aligned}\tilde{E}(R, \Phi) &= \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < 1} C_{En} R^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \cos \frac{\pi n \Phi}{\omega_0} + R_E(R, \Phi), \\ \tilde{H}(R, \Phi) &= \sum_{0 < \frac{\pi n}{\omega_0} < 1} C_{Hn} R^{\frac{\pi n}{\omega_0}} \cos \frac{\pi n \Phi}{\omega_0} + R_H(R, \Phi),\end{aligned}\tag{79}$$

где $R \in V_0^2(\Omega')$.

Подставляя полученные выражения для $\tilde{E}, \tilde{H}$ в явное выражение для функции g , несложно убедиться, что в общем случае g имеет в нуле особенность того же порядка, что и функции $\tilde{E}, \tilde{H}$, а в случае ортогонального к ребру падения g является более гладкой функцией. Решение имеет такую же особенность в окрестности ребра, что и для случая идеальной проводимости.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено представление электромагнитного поля в окрестности ребра цилиндра, граница которого задается зависимостью угловой координаты от радиальной, в виде суммы сингулярной части и гладкой добавки, для которой получена оценка в норме соответствующего функционального пространства.

Для случаев идеальной проводимости и импедансных условий главные особенности имеют одинаковый порядок в окрестности ребра. Для диэлектрического случая показано, что поле имеет степенную особенность с показателем, определяемым из соответствующего алгебраического уравнения.

Строго доказано, что главная особенность электромагнитного поля в окрестности ребра цилиндра произвольной формы не изменится, если заменить угол между его боковыми поверхностями двугранным углом между касательными к ним плоскостями.

Полученное представление может быть использовано для повышения скорости сходимости численных методов при математическом моделировании объектов, содержащих ребра, в частности, при моделировании опорно-поворотного устройства в безэховой камере. Поскольку сингулярная часть поля, благодаря полученному представлению, может быть аппроксимирована точно, задача сводится к аппроксимации гладкой части.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е., Свешников А.Г. Асимптотическое представление электромагнитного поля диэлектрического волновода в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 3. С. 446.
2. Боголюбов А.Н., Могилевский И.Е. Математическое исследование особенности электромагнитного поля волновода в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости // ФОП. 2016. Т. 5. № 2. С. 72–79.
3. Bogolyubov A. N., Mogilevskiy I. E., Rovenko V. V. Mathematical problems of the diffraction theory on bodies with irregularly boundary // PIER Proc. 2017. IEEE Xplore [Piscataway, N.J.]. United States. 2017. С. 2102–210.
4. Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е. Сингулярность электромагнитного поля в окрестности диэлектрического ребра в задачах дифракции на телах сложной формы // Уч. записки физ. факультета МГУ. 2016. № 3.
5. Боголюбов А.Н., Ерохин А.И., Могилевский И.Е., Светкин М.И. Гибридный метод решения уравнения Пуассона в области с металло-диэлектрическими углами // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2017. № 1. С. 17–22.
6. Могилевский И. Е. Применение метода смешанных конечных элементов и оценки скорости сходимости для расчета электромагнитного поля волновода с входящими ребрами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 11. С. 2071–2079.

7. Боголюбов А. Н. , Ерохин А. И. , Могилевский И. Е. , Светкин М. И. Гибридный метод численного решения уравнения Пуассона в области с диэлектрическим углом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 8. С. 1321–1330.
8. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. ММО. 1967. Т. 16. С. 227–313.
9. Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.

THE SINGULAR PART OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN DIFFRACTION PROBLEMS ON BODIES WITH EDGES FOR VARIOUS TYPES OF BOUNDARY CONDITIONS

A. N. Bogolyubov*, I. E. Mogilevskiy**, M. M. Shusharin***

119991 Moscow, Leninskie Gory, 1, Lomonosov Moscow State University, Russia

**e-mail: bogan7@yandex.ru*

***e-mail: imogilevsky@mail.ru*

****e-mail: nirashush1999@gmail.com*

Received: 21.05.2024

Revised: 21.05.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The article considers the problem of diffraction of a plane electromagnetic wave on a cylinder of arbitrary cross-section shape with an edge at the boundary. Using the method first proposed in the works of V. A. Kondratiev, for the cases of impedance, ideally conductive and dielectric cylinders, a singular part of the solution is isolated in the vicinity of the edge.

Keywords: diffraction problem, electromagnetic field singularity, edges, asymptotic decomposition.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

© 2024 г. В. В. Веденяпин^{1,*}¹125047 Москва, Миусская пл., 4, ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия
*e-mail: vicveden@yahoo.comПоступила в редакцию 21.07.2023 г.
Переработанный вариант 11.07.2024 г.
Принята к публикации 26.07.2024 г.

В классических работах уравнения для полей гравитации и электромагнетизма предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей и анализ тензора энергии импульса в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна и рассматриваем космологические модели типа Милна–МакКри и Фридмана. Библи. 36.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Власова–Эйнштейна, уравнение Власова–Максвелла, уравнение Власова–Пуассона.

DOI: 10.31857/S0044466924110076, EDN: KGPFGE

1. ДЕЙСТВИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, массам $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$ и заряду $e \in \mathbb{R}$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ равно $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$. Отметим, что в теории вероятностей для этой величины используется термин плотности распределения, а мы пользуемся терминологией, устоявшейся в кинетической теории и статистической физике. Рассмотрим действие:

$$\begin{aligned} S[g_{\mu\nu}, A_\mu] = & -c \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d^3x d^3v dmdede t - \\ & - \frac{1}{c} \int e f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) A_\mu u^\mu d^3x d^3v dmdede t + \\ & + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4x + k_2 \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \end{aligned} \quad (1)$$

где c – скорость света. Здесь u – это четырехмерная скорость, нулевая компонента которой – это скорость света $u^0 = c$, а три другие совпадают с трехмерной, как это принято в теории относительности [1–4]: $u^i = v^i$ ($i = 1, 2, 3$) – трехмерная скорость, $x^0 = ct$ и x^i (латинские индексы $i = 1, 2, 3$) – координата, $g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ – метрика (греческие индексы $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \partial A_\nu(\mathbf{x}, t)/\partial x^\mu - \partial A_\mu(\mathbf{x}, t)/\partial x^\nu$ – электромагнитные поля, R – полная кривизна. Λ – лямбда-член Эйнштейна (или просто Лямбда Эйнштейна), $k_1 = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}$ и $k_2 = -\frac{1}{4\pi c}$ – константы [1–4], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идет суммирование. В действии (1) интегрирование ведется, как обычно, по всей области изменения параметров, т.е. по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, массам $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$, зарядам $e \in \mathbb{R}$ и времени $t \in \mathbb{R}$. Варьирование ведется обычным способом (см. [1]–[4]).

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_μ . Такой способ вывода уравнений Власова–Максвелла и Власова–Эйнштейна из действия (1) использовался в работах [5]–[10], [19]–[21]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна

$$k_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \int m \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}} u^\mu u^\nu d^3x d^3v dmdede + k_2 \left(-2F^{\beta\nu} F^{\alpha\mu} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}. \quad (2)$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению тензором энергии-импульса материи (оно выведено впервые в таком виде, видимо, в работах [9], [19]–[21]), второе (электромагнитная составляющая тензора энергии-импульса) известно (см. [1], [2]). Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова–Эйнштейна (см. [3]–[21]). Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется системой уравнений Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2} \int e u^\mu f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) v dm de. \quad (3)$$

Мы получили из действия (1) уравнения для полей (2)–(3). Чтобы получить замкнутые уравнения, нужно выписать уравнение на функцию распределения, которая появилась в уравнениях (2)–(3) из действия (1). Для этого нужно вывести уравнения движения частицы в заданных полях. Соответствующее действие хорошо известно (см. [1]–[4]). Отметим, что это действие для частиц можно получить, подставив в первых двух слагаемых действия (1) функцию распределения в виде δ -функции:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \delta\left(\mathbf{v} - \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right) \delta(m - m') \delta(e - e'). \quad (4)$$

Получаем, опуская штрихи, стандартное действие для частиц (см. [1]–[4]):

$$S[x(t)] = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu}(\mathbf{x}(t), t)} u^\mu u^\nu dt - \frac{e}{c} \int A_\mu(\mathbf{x}(t), t) u^\mu dt. \quad (5)$$

При такой подстановке подразумевается, что трехмерная скорость входит в четырехмерную $\mathbf{u}$, как и раньше, формулой $\mathbf{u} = (c, v^1, v^2, v^3)$, где c – скорость света. Кроме того предполагается, что трехмерная скорость есть производная координаты по времени $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, поэтому в левой части (5) стоит только эта координата, по которой и нужно варьировать, как положено, по Лагранжу. Обычное варьирование приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа, а потом к уравнениям для функции распределения. Таким образом, мы получим замкнутую систему уравнений, которая и называется системой уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна. Итак, мы имеем два действия – одно для вывода уравнений для полей (1), другое для вывода уравнений движения частиц в заданных полях (5) в полном соответствии с классическим выводом (см. [1]–[4]). Действия связаны формулой (4). Подстановка (4) хорошо известна для уравнения Власова. Н.Н. Боголюбов: “Особенно ценно то, что уравнения Власова обладают микроскопическими решениями”. Речь идет о том, что сумма дельта-функций (4) дает точные решения уравнения Власова, если аргументы дельта-функций удовлетворяют задаче N тел с любым N . Если мы в (4) возьмем сумму дельта-функций, то получим соответствующую сумму и в (5): это показывает единственность действия (1), так как любую функцию распределения (в широком классе) можно приблизить в слабом смысле суммой дельта-функций, увеличивая их число. Варьирование действия (5) было проведено нами в предыдущих работах и тщательно исследовано (см. [5]–[10], [19]–[21]) как для скоростей, так и для импульсов. Варьирование не совсем тривиально, и мы здесь не будем его воспроизводить, отсылая к этим работам, а здесь ниже проиллюстрируем эту схему в дальнейших примерах в более простых нерелятивистских и слабoreлятивистских случаях. В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной.

Постановка задачи о выводе уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия, рассматривалась с различной степенью проникновения. Обзор 1992 г. (см. [15]) по выводу уравнения Власова содержит 5 принципов наименьшего действия. Что касается европейских исследователей, то они работали в скоростях с использованием символов Кристффеля (см. [3], [4], [11], [12]), и уравнения были выведены только в работах [9], [19]–[21]. Таким образом, уравнения Власова–Эйнштейна оказались прекрасным тестом на схему вывода уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия. Отметим постоянные усилия Филиппа Моррисона (см. [14], [15]), который такую задачу поставил, использовал импульсы и вывел уравнения для частиц в заданных полях (уравнения Лиувилля) (см. [14]). Отметим, что до сих пор правильный вид уравнений Власова–Эйнштейна (и даже Эйнштейна) представляет трудности. Например, в недавних работах [11], [12] используются символы Кристффеля для уравнения Лиувилля (как часть системы Власова–Эйнштейна), но функция распределения зависит от импульсов. Так что этот гибрид требует уточнения. В скоростях система уравнения Власова–Эйнштейна (и Власова–Максвелла–Эйнштейна) была выведена только недавно в работах [5]–[10], и воспроизведена с сокращениями, улучшениями, объяснениями и критикой других выводов в [19]–[21], [26]–[32]. Если европейские ученые во Франции, Германии и Италии работали в скоростях, то в США конкурирующая школа Филиппа Моррисона работала в импульсах и близко подошла к правильной форме системы уравнений

Власова—Эйнштейна. Последняя работа Моррисона (см. [14]), содержащая попытку вывода системы Власова—Эйнштейна, дала правильное уравнение для частиц (уравнение Лиувилля), но правая часть уравнения Эйнштейна не далась: даже она почти правильная, с точностью до множителя. Работа Герхарда Рейна (см. [13]), многолетнего исследователя уравнений Власова—Эйнштейна, уже по части вывода следует линии Моррисона. Похоже, что единственный способ вывести уравнение Эйнштейна и уравнения Максвелла с правой частью дает только действие (1). Действия (1) и (5), таким образом, дает самый простой и прямой вывод замкнутой системы уравнений электродинамики и общей теории относительности (ОТО), упрощая всю ОТО и электродинамику использованием именно принципа наименьшего действия и уравнений Власова—Максвелла—Эйнштейна.

Дальнейший план статьи таков. В разд. 2 мы исследуем знак электромагнитной части действия (1). В разд. 3 покажем, как получаются космологические решения с помощью уравнений типа Власова в нерелятивистском случае. Этим мы обобщим решение Милна—МакКри (см. [22]). В разд. 4 рассмотрим нерелятивистский электростатический аналог электромагнитного тензора энергии-импульса и его обобщения. В разд. 5 получаются обобщения метода Милна—МакКри (см. [22]) на космологические решения при движении в заданной метрике с примерами метрик Фридмана—Леметра—Робертсона—Уокера, изотропной метрики и некоторых слабoreлятивистских случаев. Там мы столкнемся с вопросом, как определять постоянную Хаббла. Делается вывод, что обычный способ определять ее по полям, описанный во многих учебниках, некорректен, так как в телескопы наблюдается материя, а не метрика. Поэтому нужно рассматривать космологическое движение (это понятие мы введем, связав его с уравнениями типа Власова) материи в этой метрике, а константу Хаббла определять, как это делали Милн и МакКри (см. [22]).

2. АНАЛИЗ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА (2)

Мы получили кинетическую форму тензора энергии-импульса, но обычно используют его гидродинамическую форму, записывая ее в абстрактной форме (см. [1], [2])

$$T^{\mu\nu} = (p + E)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}.$$

Здесь — давление, — энергия, U — макроскопическая (гидродинамическая) скорость. Такое выражение появляется в кинетической теории из нерелятивистской формы первого слагаемого (2), но немного упрощенного

$$\int m f(t, x, v, m, e) u^\mu u^\nu d^3 v dm.$$

Сравнение явной формулы (2) с этим выражением показывает, что такое выражение получается после гидродинамической подстановки в правую часть формулы (2)

$$f(t, x, v, m, e) = \rho(x, t, m, e) \delta(v - V(t, x, m, e)),$$

где $U(t, x, m, e) = (c, V(t, x, m, e))$, а δ — дельта-функция Дирака. Кроме того, появился хороший кандидат вместо Лямбды Эйнштейна $\frac{k_2}{k_1}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})$. Введение лямбды Эйнштейн считал главной ошибкой своей жизни. Но сейчас эта лямбда стала основным способом объяснять ускоренное расширение Вселенной. Избавиться от лямбды или получить ее естественно есть основная задача тех, кто объясняет ускоренное расширение Вселенной (вводя для этого “темную энергию” или лямбду Эйнштейна). Наш анализ тензора энергии-импульса покажет, что введение лямбды хорошо работает в нерелятивистском случае. Но в разд. 5 постараемся найти способ вывода ее из действия (1) без лямбды.

Итак, рассмотрим электромагнитную часть тензора энергии — импульса. Проверим знак второго слагаемого в уравнении Эйнштейна (2) для компоненты 00. Покажем, что это неотрицательная величина, что полностью согласуется с выражениями в классических учебниках [1]–[4] для случая метрики Минковского—Лоренца. Действительно, выражение

$$-2F^{\beta 0}F^{\alpha 0}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{00}$$

достаточно проверить на знак для диагональной метрики, приводя в точке метрику к диагональному виду. Имеем для этого выражения в случае диагональной метрики $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(g_0, g_1, g_2, g_3)$ с Лоренцевой сигнатурой $(+1, -1, -1, -1)$, (что задает знаки этих диагональных элементов) следующее:

$$\frac{1}{2}g_0^{-1}\Sigma(F_{ij}^2g_i^{-1}g_j^{-1}) - g_0^{-2}\Sigma(F_{0i}^2g_i^{-1}). \quad (6)$$

Это выражение положительно, так как $g_0 > 0$, $g_i < 0$. Я благодарен Я.Г. Батищевой за помощь в вычислениях. Значит, это выражение вносит тот же вклад, что и материя, и не годится для кандидата вместо лямбды

Эйнштейна, вообще говоря, для описания ускоренного расширения. Мы проверим частные случаи этого выражения в слабoreлятивистских случаях и в случае электростатики найдем подтверждение этого неравенства, а потом рассмотрим, какие типы лагранжианов дадут противоположный результат: это и будет возможными моделями знаменитого ускоренного расширения Вселенной (Нобелевская премия 2011 г.) (разд. 4). Но сначала приведем теорию Милна—МакКри космологических решений на основе уравнения Власова—Пуассона в нерелятивистском случае.

3. УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА—ПУАССОНА, КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА С ЛЯМБДА-ЧЛЕНОМ

Коротко воспроизведем простейшее нерелятивистское космологическое решение Милна—МакКри с добавкой лямбда-члена в форме уравнения Власова—Пуассона. Нерелятивистский случай соответствует действию (см. [1], [2], [5]–[9]):

$$S[U] = \int \left[\frac{mv^2}{2} - mU \right] f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) d\mathbf{x} d\mathbf{v} dm dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int ((\nabla U)^2 - 2\lambda U) d\mathbf{x} dt. \quad (7)$$

Варьируем по U , получая уравнения Пуассона с лямбда-членом:

$$\Delta U = 4\pi\gamma \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{v} dm de - \lambda. \quad (8)$$

Мы видим, что для получения замкнутой системы уравнений нужно получить уравнение для функции распределения, появившейся в уравнении Пуассона (8). Действие для одной частицы получается из первого слагаемого в (7) при выборе $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) = \delta(m - M) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}(t)) \delta\left(\mathbf{v} - \frac{d\mathbf{y}}{dt}\right)$. Это формальная подстановка — правило для получения правильных лагранжианов из действия (7) работает для вывода любых систем типа Власова, и мы широко пользовались этим и будем пользоваться в дальнейшем. Получаем стандартное действие:

$$S_1[y] = \int \left[\frac{My'^2}{2} - MU(\mathbf{y}) \right] dt.$$

Варьируем как обычно в механике и получаем уравнение Ньютона:

$$\mathbf{y}'' - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} = 0.$$

Переходим к уравнению Лиувилля для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned}$$

и тогда получаем уравнение на функцию распределения, дополняя уравнение (8)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0. \quad (9)$$

Система (8), (9) и есть система уравнений Власова—Пуассона для гравитации с лямбда-членом, который и призван описать ускоренное расширение. Мы провели подробный вывод уравнения Власова—Пуассона в простейшем случае, который иллюстрирует правильность вывода уравнений типа Власова и в более сложных релятивистских и слабoreлятивистских случаях. Этот способ вывода уравнений типа Власова отработывался в статьях [5]–[9], и является пока единственным способом получать в замкнутой форме уравнения электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. По сути он следует всем учебникам по теории поля (см., например, [1], [2]), где вводятся два действия для полей и для частиц. Наша небольшая добавка с уравнениями типа Власова (см. [5]–[9]) связала эти два действия (подстановкой дельта — функции в одну сторону и переход к интегрированию с помощью функции распределения в обратную аналогичен связи лагранжевых и эйлеровых координат). Это позволило заодно получать правые части в уравнениях для полей (тензор энергии-импульса в уравнениях Эйнштейна). Это поставило на математическую платформу общую теорию относительности, упрощая ее и давая замкнутую систему уравнений из принципа наименьшего действия (1), (3). Это упростило и сделало математически строгой и всю гравитацию и электродинамику именно с помощью

уравнения Власова. Правильность такой схемы вывода уравнений типа Власова была сначала проверена на уравнениях Власова—Пуассона и уравнениях Власова—Максвелла, где ответ был известен, хотя правые части уравнений для полей не были выведены, и только после этого схема вывода была перенесена на уравнение Власова—Эйнштейна. Это важно, потому что как зарубежные, так и наши исследователи брали тензор энергии-импульса с потолка, что приводило к заведомо неправильным уравнениям для полей. Более того, сравнение релятивистских действий с нерелятивистскими и слабoreлятивистскими позволил твердо установить все коэффициенты действия (1), а потому и для уравнений для полей. Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение.

Дальнейшая наша цель — получение космологических решений, И сейчас мы выведем уравнения Милна—МакКри (см. [22]) из уравнения Власова. Система (8), (9) имеет точное гидродинамическое следствие, так как допускается (согласно более общей теории) гидродинамический вид функции распределения (см. [5]–[9], [17]–[22]): $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) = \rho(t, \mathbf{x}, m) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m))$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) &= 0, \\ \frac{\partial w_k}{\partial t} + w_i \frac{\partial w_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_k} &= 0, \\ \Delta U &= 4\pi\gamma \int m \rho dm - \lambda.\end{aligned}$$

Это означает, что если $\rho(t, \mathbf{x}, m)$ и $\mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m)$ удовлетворяют этой системе уравнений, то $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) = \rho(t, \mathbf{x}, m) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m))$ удовлетворяет системе уравнений Власова—Пуассона (8)–(9).

Пусть $w_k(t, \mathbf{x}, m) = \frac{\partial W}{\partial x^k}$. Такая подстановка проходит, согласно общей теории [5–9, 17–22], и получается точное Гамильтон—Якобиево следствие системы Власова—Пуассона с лямбда-членом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \nabla W) &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{(\nabla W)^2}{2} + U &= 0, \\ \Delta U &= 4\pi\gamma \int m \rho dm - \lambda.\end{aligned}\tag{10}$$

Эта система уравнений обобщает систему Милна—МакКри (см. [22]) введением лямбды и зависимостью плотности и константы Хаббла от массы. Мы вывели эту систему из системы Власова—Пуассона, которую мы получили из принципа наименьшего действия: таким образом, мы обосновали и обобщили систему Милна—МакКри (см. [22]), которая признанным образом дает космологические решения в нерелятивистском случае.

Отметим, что если W есть функция только радиуса, то скорость дает как раз обобщенный разлет Хаббла: $w = \nabla W = W'(r) \frac{x}{r}$. Скорость разбегания $\frac{W'(r)}{r}$ называется постоянной Хаббла. Обратное тоже верно: любой разлет по Хабблу, если скорость пропорциональна расстоянию, означает, что скорость есть градиент некоторой функции. Этим космологическое расширение связывается с гидродинамическим и даже Гамильтон—Якобиевым следствием уравнения Власова—Пуассона. В космологических решениях плотность не зависит от пространственной координаты. Тогда из первого уравнения получаем $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -3H(m, t)$, а также $\Delta W = 3H(m, t)$. Мы покажем ниже, что $H(m, t) = \frac{W'(r)}{r}$ совпадает с постоянной Хаббла. Из третьего уравнения имеем уравнение: $\Delta U = 4\pi\gamma \int m \rho(m, t) dm - \lambda$. Решая два последних уравнения, имеем

$$W(r, m, t) = \frac{H(m, t)}{2} r^2 + \frac{A(m, t)}{r} + B(m, t) \quad \text{и} \quad U(r, t) = \frac{4\pi\gamma \int m \rho(m, t) dm - \lambda}{6} r^2 + \frac{C(t)}{r} + D(t).$$

Мы видим, дифференцируя $W(r, m, t)$, что $H(m, t) = \frac{W'(r)}{r}$, т.е. что это действительно постоянная Хаббла.

Здесь $A(m, t), B(m, t), C(t), D(t)$ — произвольные функции. Получаем, подставляя эти выражения во второе уравнение системы (13):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial t} r^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{H^2}{2} r^2 - \frac{2AH}{r} + \frac{A^2}{r^4} + \frac{4\pi\gamma \int m \rho(m, t) dm - \lambda}{6} r^2 + \frac{C}{r} + D = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при степенях радиуса (как это делали Милн и МакКри [22]), получаем:

$$A(m, t) = 0, \quad C(t) = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t} + D(t) = 0.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(m, t)}{\partial t} + 3H(m, t)\rho(m, t) &= 0, \\ \frac{\partial H(m, t)}{\partial t} + H^2 + \frac{4\pi\gamma}{3} \int m\rho(t, m) dm - \frac{\lambda}{3} &= 0.\end{aligned}\quad (11)$$

Так как скорость разбегания $\vec{w} = \nabla W = H\vec{r}$, имеем

1) Условие расширения Вселенной $H \geq 0$.

2) Условие ускоренного расширения $\frac{\partial H(m, t)}{\partial t} \geq 0$, т.е. $H^2 + \frac{4\pi\gamma}{3} \int m\rho(t, m) dm - \frac{\lambda}{3} \leq 0$.

Из второго условия видим определяющую роль лямбды для ускоренного расширения. Мы также видим: так как $\rho(m, t)$ обязано, вообще говоря, зависеть от массы, то и “постоянная” Хаббла $H(m, t)$, вообще говоря, зависит от массы. Мы получили систему уравнений (11), которая в принципе объясняет как изменение постоянной Хаббла так и ее “напряжения” (Constant Hubble Tension [25]) именно зависимостью от времени и от массы: уравнения (11) можно считать точным уравнением константы Хаббла с лямбда-членом в не релятивизме. Если, однако, $H(m, t)$ не зависит от массы, (что второе из уравнений (11) допускает, как это и предполагали Милн и МакКри в [22]) мы можем свести систему (11) к системе двух обыкновенных уравнений. Обозначим $K(t) = \frac{4\pi\gamma}{3} \int m\rho(t, m) dm$ и получим

$$\begin{aligned}\frac{dK(t)}{dt} + 3HK &= 0, \\ \frac{dH}{dt} + H^2 + K - \frac{\lambda}{3} &= 0.\end{aligned}\quad (12)$$

Первое из уравнений (12) есть в точности уравнение (4) Милна–МакКри (см. [22]), а второе из уравнений (12) – это их уравнение (7), (но с лямбда-членом), полученное без всяких предположений из принципа наименьшего действия как его точное следствие. Система (12) решается точно, но нам достаточно и фазового портрета, который исследовался в [19], [26]. Условия ускоренного расширения – это узкая область под параболой $H \geq 0, K \geq 0, H^2 + K - \frac{\lambda}{6} \leq 0$.

Система (11) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и в более общем случае, когда $H(m, t)$ кусочно-постоянна на конечном числе интервалов I_i . Пусть значение $H(m, t)$ на этом интервале равно $H(i, t)$, $i = 1, \dots, r$. Обозначая $m(i, t) = \frac{4\pi\gamma}{3} \int_{I_i} m\rho(t, m) dm$, получаем систему $2r$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dm(i, t)}{dt} + 3H(i, t)m(i, t) &= 0, \quad i = 1, \dots, r, \\ \frac{dH(i, t)}{dt} + H(i, t)^2 + \sum_{k=1, \dots, r} m(k, t) - \frac{\lambda}{3} &= 0.\end{aligned}$$

В литературе широко обсуждается натяжения константы Хаббла (Constant Hubble Tension [25]), оно выражает несоответствие постоянной Хаббла наблюдениям и вопросам, от чего она вообще может зависеть. Получение точного решения следствия действия (1) для постоянной Хаббла в принципе может убрать это несоответствие. Теперь исследуем тензор энергии-импульса для электростатики и соответствующие обобщения.

4. МЕТРИКА СЛАБОРЕЛЯТИВИСТСКАЯ И ОБОБЩЕННАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Теперь модифицируем нерелятивистское действие (7), добавив электростатику в случае слабoreлятивистской метрикой $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1)$, как это предписывается исходным релятивистским выражением (1)

$$\begin{aligned}S[U, \varphi] &= \int \left[\frac{mv^2}{2} - e\varphi - mU \right] f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{x}d\mathbf{v} dm dedt + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int \frac{(\nabla\varphi)^2}{\sqrt{1 + \frac{U}{c^2}}} d\mathbf{x}dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 d\mathbf{x}dt + \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma} \int U d\mathbf{x}dt.\end{aligned}\quad (13)$$

Варьируем по φ и по U , получая дважды уравнения Пуассона с модификацией:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{1+\frac{U}{c^2}}} &= -4\pi \int e f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{v} dm de + \frac{1}{2c^2} \frac{(\nabla\varphi, \nabla U)}{(1+\frac{U}{c^2})^{\frac{3}{2}}}, \\ \Delta U &= 4\pi\gamma \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{v} dm de - \frac{1}{2}c\Lambda^2 + \frac{\gamma(\nabla\varphi)^2}{4c^2(1+\frac{U}{c^2})^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\quad (14)$$

Мы получили выражение (14), где знак третьего слагаемого во втором из уравнений (14) согласуется с общим выражением (6) и не дает шанса объяснения ускоренного расширения Вселенной. Благодаря рецензента, помогшего уточнить первое из уравнений (14). Здесь мы в любом случае имеем источник “искажений константы Хаббла” (Hubble constant tension [22]). Однако этот пример может подсказать нам и возможный вид лагранжиана темной энергии. Если мы обобщим это действие, то получим и возможную модель темной энергии как аналог исходной электростатики

$$\begin{aligned}S[U, \eta] &= \int \left[\frac{mv^2}{2} - e\eta - mU \right] f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{x} d\mathbf{v} dm de dt + \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int (\nabla\eta)^2 \alpha(U) d\mathbf{x} dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 d\mathbf{x} dt + \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma} \int U d\mathbf{x} dt.\end{aligned}$$

Здесь поле η — поле темной энергии (аналог электрического потенциала φ , действительная функция), e теперь ее заряд, $\alpha(U)$ — это функция, условия на которую мы хотим выяснить, чтобы получалось желанное и необходимое ускоренное расширение. Получаем соответствующие уравнения

$$\begin{aligned}\alpha(U) \Delta\eta &= -4\pi \int e f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{v} dm de - (\nabla\eta, \nabla U) \frac{d\alpha}{dU}, \\ \Delta U &= 4\pi\gamma \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d\mathbf{v} dm de - \frac{1}{2}c\Lambda^2 - \frac{\gamma(\nabla\eta)^2}{2} \frac{d\alpha}{dU}.\end{aligned}$$

Если бы выражение $\frac{d\alpha}{dU}$ было бы больше нуля, то это и было бы возможным объяснением ускоренного расширения вселенной. Такие модели иногда изучаются, но хорошо было бы получить ускоренное расширения из уравнения Власова—Эйнштейна автоматически, без введения лямбды-члена или таких искусственных полей. Поэтому рассмотрим некоторые важные примеры, обобщая на релятивистский и слабoreлятивистский случаи подход Милна—МакКри (см. [22]), используя наши знания о его происхождении из уравнений типа Власова.

5. ПРИМЕРЫ

Примеры, рассмотренные здесь, структурированы следующим образом. В первом примере изучается, как движется материя в плоской метрике Фридмана, во втором — классическое решение из учебников. Делается вывод, что определять константу Хаббла просто на основе метрики нельзя, так как наблюдатель измеряет движение именно материи. В третьем примере мы получаем космологическое решение для движения материи в произвольной изотропной метрике. Пример 4 — это космологическое движение материи в метрике Фридмана—Леметра—Робертсона—Уокера. Пример 5 — космология слабого релятивизма.

Пример 1. Метрика диагональная Фридмана: уравнения движения частиц в космологической задаче (Веденияпин В.В., Бай А.А., В. М. Аушев, А. О. Гладков, Ю. А. Измайлова, А. А. Реброва [27]–[33]). Рассмотрим действие (частный случай общего действия (5))

$$S = -cm \int \sqrt{c^2 - a^2(t) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} dt + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4x = \int L dt + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4x = S_p + S_f,$$

где лагранжиан частиц $L = -cm \sqrt{c^2 - a^2(t) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2} = cm L_1$; S_p означает действие частиц; S_f означает действие полей. Варьирование действия S_p с учетом условия $\delta S_p = 0$ дает уравнения движения частиц:

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = -\frac{d}{dt} \left(cm \frac{a^2 \dot{x}_i}{L_1} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Получаем выражение для гамильтониана:

$$H = \sum p_i \dot{x}_i - L = \frac{c}{a} \sqrt{(mca)^2 + p^2}.$$

Этот же результат получаем из массового соотношения, из общей формулы. Гамильтоновы канонические уравнения $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$:

$$\dot{x}_i = \frac{c}{a} \frac{p}{\sqrt{(mca)^2 + p^2}}, \quad \dot{p} = 0,$$

приводят к уравнению Лиувилля на функцию распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ от пространственных переменных $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и импульсов $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(p, \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{c}{a} \frac{1}{\sqrt{(mca)^2 + p^2}} = 0.$$

Используя гидродинамическую подстановку $f(t, x, p, m, e) = \rho(x, t, m) \delta(p - P(t, x, m))$, получаем уравнение неразрывности и уравнение движения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial t} + V \frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

где

$$V = \left. \frac{\partial H}{\partial p} \right|_{p=P} = \frac{c}{a} \frac{P}{\sqrt{(mca)^2 + P^2}}.$$

Отсюда получаем после градиентной подстановки $P = \nabla W$ уравнение неразрывности и уравнение Гамильтона–Якоби в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{c}{a} \frac{\nabla W}{\sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2}} \rho \right) &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{c}{a} \sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2} &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим изотропный случай $W = W(r, t)$, который вместе с условием $\rho = \rho(t, m)$ дает космологические решения. Получаем выражения для импульсов и скоростей частиц

$$\nabla W = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial W}{\partial r}, \quad v = \frac{c}{a} \frac{\nabla W}{\sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2}} = \frac{c}{a} \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\frac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{(mca)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}} = \hat{\mathbf{r}} \phi(r).$$

Также считая, что $\rho = \rho(t, m)$, разделяем переменные в уравнении неразрывности:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\hat{\mathbf{r}} \phi(r)) = -3H(m, t).$$

Здесь $\hat{\mathbf{r}}$ — это единичный вектор $\hat{\mathbf{r}}^i = \frac{x^i}{r}$

$$\operatorname{div}(\hat{\mathbf{r}} \phi(r)) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \phi(r)) = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{r} \phi,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{r} \phi = 3H,$$

$$\phi = H(m, t)r + \frac{A(m, t)}{r^2}.$$

Получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} \frac{\frac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{(mca)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}} &= \phi, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{c}{a} \sqrt{(mca)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2} &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения выражаем $\frac{\partial W}{\partial r}$, берем положительный корень:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{a^2 c m \phi}{\sqrt{c^2 - a^2 \phi^2}},$$

Выражаем корень:

$$\sqrt{(mca)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2} = \frac{ac^2m}{\sqrt{c^2 - a^2\phi^2}}.$$

Подставляем во второе уравнение:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - a^2\phi^2}} = 0.$$

Получаем систему уравнений для определения $W(r, t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial r} &= \frac{a^2cm\phi}{\sqrt{c^2 - a^2\phi^2}}, \\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - a^2\phi^2}}.\end{aligned}$$

Кроме того, из условия $\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial r}$ имеем связь между функциями $a(t)$ и $\phi(r, t, m)$:

$$-a^2c^3m\phi\phi' = cma(\phi(2c^2 - a^2\phi^2)\dot{a} + c^2a\dot{\phi}).$$

После подстановки ϕ получаем

$$-c^3ma^2\left(\frac{A}{r^2} + rH\right)\left(-2\frac{A}{r^3} + H\right) = cma\left(\left(\frac{A}{r^2} + rH\right)\left(2c^2 - a^2\left(\frac{A}{r^2} + rH\right)^2\right)\dot{a} + c^2a\left(\frac{A}{r^2} + rH\right)\dot{H}\right).$$

Приравниваем коэффициенты при степенях r . Из выражений при отрицательных степенях r следует, что $A = 0$, и остается

$$-c^3ma^2rH^2 = cma(2c^2rH\dot{a} - r^3a^2H^3\dot{a} + c^2ra\dot{H}).$$

Из коэффициента при r^3 имеем $\dot{a} = 0$, то есть $a = \text{const}$. Приравниваем коэффициенты при r :

$$-c^3ma^2rH^2 = c^3ma^2r\dot{H},$$

откуда получаем

$$H^2 + \dot{H} = 0.$$

Вывод. Точное следствие уравнений движения частиц в метрике модели Фридмана в космологическом случае имеет независимо от уравнений для полей вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho H &= 0, \\ H^2 + \dot{H} &= 0, \\ a &= \text{const}.\end{aligned}\tag{15}$$

Из этих уравнений видно, что рассмотрение во всех учебниках модели Фридмана недостаточно, так как нужно рассматривать движение материи, и на основе этого определять уравнение для константы Хаббла, как это сделано здесь. Третье из уравнений (15) показывает, что первый из отзывов Эйнштейна (см. [35], [36]) оправдался, а не второй, как это следует при рассмотрении движения материи. Второе из уравнений (15) показывает, что мы движемся в правильном (см. [27]–[32]) направлении: уже устранено влияние притяжения, осталось только свободное движение, как это видно из уравнений Милна–Макри (13), и осталось только получить аналог лямбды в (13), при этом лямбда релятивистская из действия (1) здесь уже не участвует. Иными словами, имеет шанс получить лямбду нерелятивистскую (13) просто как следствие уравнений Власова–Эйнштейна, что и было бы триумфальным объяснением ускоренного расширения Вселенной из классического действия ОТО (1). Поэтому имеет особый смысл получить аналоги решений (15) в общем случае изотропной метрики. Это будет сделано в примере 3, а в примере 2 продолжим классические рассуждения модели Фридмана. Отметим также, что определение во многих руководствах постоянной Хаббла как отношение $\frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ неправомерно: в телескопы мы наблюдаем именно материю, а не метрику.

Пример 2. Оценка стандартной модели Фридмана с точки зрения предыдущих вычислений. Модель Фридмана сыграла выдающуюся роль, но необходимо оценить теперь ее с точки зрения точных выражений примера 1.

Уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

После подстановки полученных ранее выражений для компонент тензора кривизны имеем стандартные выражения для модели Фридмана

$$\Lambda + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00},$$

$$\Lambda a^2 + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{i,i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Выражение для тензора энергии-импульса имеет вид в стандартной модели Фридмана

$$T = \begin{pmatrix} c^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что на самом деле тензор энергии-импульса имеет точное выражение в уравнении (2), и хорошо видно, что там нет нулевых компонент. Это показывает, что метрика Фридмана не проходит как точное решение уравнений Эйнштейна. Тем не менее она и сейчас является способом получать простые модели, что мы и сделали в примере 1. В итоге имеем два уравнения Фридмана из учебников:

$$\Lambda + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2}\rho,$$

$$\Lambda a^2 + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a} = 0.$$

Если учесть, что $a = \text{const}$, (пример 1), то получим

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2}\rho,$$

$$\Lambda a^2 = 0.$$

Из второго уравнения получаем, что $a = 0$. Это понятный ответ. Модель Фридмана несовместима с правильным выражением тензора энергии-импульса, когда вселенная разбегается: там все компоненты при разбегании ненулевые. Поэтому программа должна выглядеть так: найти простейшую метрику, дающую точное космологическое решение уравнения Власова-Эйнштейна.

Выводы. Простота получения решений движения частиц в метрике Фридмана в космологическом случае наталкивает на мысль сделать то же самое в более общих изотропных случаях: это бы было первым точным космологическим решением уравнения Эйнштейна. В следующем пункте мы начнем вычисления в общем случае изотропной метрики.

Пример 3. Общая изотропная метрика: уравнения движения частиц и космологические решения. Изотропная метрика:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e(r,t) & a(r,t)x & a(r,t)y & a(r,t)z \\ a(r,t)x & b(r,t) + d(r,t)x^2 & d(r,t)xy & d(r,t)xz \\ a(r,t)y & d(r,t)xy & b(r,t) + d(r,t)y^2 & d(r,t)yz \\ a(r,t)z & d(r,t)xz & d(r,t)yz & b(r,t) + d(r,t)z^2 \end{pmatrix}.$$

Имеем (машинное) выражение для обратной метрики (А.О. Гладков, А.А. Руссков)

$$g_{\alpha\beta} = K \cdot \begin{pmatrix} b + d(x^2 + y^2 + z^2) & -ax & -ay & -az \\ -ax & g_{11} & \frac{a^2xy - edxy}{b} & \frac{a^2xz - edxz}{b} \\ -ay & \frac{a^2xy - edxy}{b} & g_{22} & \frac{a^2yz - edyz}{b} \\ -az & \frac{a^2xz - edxz}{b} & \frac{a^2yz - edyz}{b} & g_{33} \end{pmatrix},$$

$$K = \frac{1}{be - (a^2 - ed)(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$g_{11} = \frac{1}{b}(-a^2y^2 - a^2z^2 + eb + edy^2 + edz^2),$$

$$g_{22} = \frac{1}{b} (-a^2 x^2 - a^2 z^2 + eb + edx^2 + edz^2),$$

$$g_{33} = \frac{1}{b} (-a^2 x^2 - a^2 y^2 + eb + edx^2 + edy^2).$$

По массовому соотношению $g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = (mc)^2$ составим и решим квадратное уравнение относительно p_0 :

$$g^{00} p_0^2 + 2g^{i0} p_i p_0 + g^{ij} p_i p_j = (mc)^2.$$

Физический смысл имеет корень, взятый с минусом (см. [1]):

$$p_0 = \frac{1}{e} \left(-2a(p_1 x + p_2 y + p_3 z) - \sqrt{(a^2 - ed)(p_1 x + p_2 y + p_3 z)^2 + e((mc)^2 - bp^2)} \right).$$

Здесь использовано обозначение $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$.

Сделаем подстановку $p = \nabla W(r, t)$; $W_t = \frac{\partial W}{\partial t} = -H(x, p) = cp_0$ и выпишем уравнение Гамильтона–Якоби:

$$W_t = -H = \frac{c}{e} \left(-arW_r - \sqrt{W_r^2(a^2 r^2 - eb - dr^2 e) + e(mc)^2} \right). \quad (16)$$

Нам нужно еще посчитать скорости и уравнение неразрывности в изотропном случае, и мы докажем следующую лемму.

Лемма об изотропных гамильтонианах и уравнении неразрывности в космологических моделях. Пусть гамильтониан $H(p, x)$ зависит от этих аргументов через изотропные переменные p^2 и (p, x) : $H(p, x) = H((p, x), p^2)$. Тогда при Гамильтон–Якобиевой подстановке $p = \nabla W$ гамильтониан приобретает вид

$$H(p, x) = H((p, x), p^2) = H(rW_r, W_r^2).$$

1. Скорости имеют вид $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial W_r} \frac{x^i}{r}$.
 2. Уравнение неразрывности принимает вид $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho \frac{\partial H}{\partial p_i}) = 0$ или $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho \frac{\partial H}{\partial W_r} \frac{x^i}{r}) = 0$.
 3. В космологическом случае, когда плотность $\rho = \rho(m, t)$ не зависит от пространственной координаты, переменные разделяются, и появляется “постоянная” интегрирования $h(t)$, которая называется постоянной Хаббла:
- $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho h = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial H}{\partial W_r} \frac{x^i}{r} \right) = 3h.$$
4. Уравнение $\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial H}{\partial W_r} \frac{x^i}{r} \right) = 3h$ имеет следующее общее решение: $\frac{\partial H}{\partial W_r} = hr + \frac{A(t)}{r^2}$.
 5. В космологических моделях “постоянную” $A(t)$ можно положить равной нулю. При этом, подставляя это выражение для скоростей $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial W_r} \frac{x^i}{r}$ из п. 2, получаем $v^i = h(t)x^i$, что полностью соответствует общепризнанному представлению о “постоянной Хаббла”.

Используя эту лемму для гамильтониана (16), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3h\rho &= 0, \\ \frac{\mu \frac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{e(mc)^2 + \mu \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2}} &= R, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{c}{e} \frac{\partial W}{\partial r} ar + \frac{c}{e} \sqrt{e(mc)^2 + \mu \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\mu(r, t) = r^2(a^2 - de) - be$, $R(m, r, t) = (\frac{e}{c}h - a)r$ – безразмерный радиус-вектор r .

Эту систему уравнений следует дополнить уравнениями Эйнштейна для полей в изотропном случае, т.е. на метрические коэффициенты a, b, d, e . Но выведем следствия уравнений (17).

Решаем среднее уравнение системы (17) относительно W_r , получаем

$$W_r = Remc \cdot \sqrt{\frac{1}{e(\mu^2 - R^2\mu)}}.$$

Подставляя это выражение в нижнее уравнение (Гамильтона—Якоби), получаем

$$W_r = -mc^2 \sqrt{\frac{1}{e(\mu^2 - R^2\mu)}} \cdot (arR + \mu).$$

Получаем, как и в случае примера 1 для метрики Фридмана, уравнение на коэффициенты метрики, приравняв вторые частные производные (условие совместности):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial r}.$$

Перепишем выражения в удобном виде

$$W_t = mcT \sqrt{\frac{1}{Z}}, \quad W_r = mcQ \sqrt{\frac{1}{Z}}, \quad (18)$$

где $Z = e(\mu^2 - R^2\mu)$, $T = -c(arR + \mu)$. $Q = eR$, где $R = (\frac{e}{c}h - a)r$, $\mu(r, t) = r^2(a^2 - de) - be$. Здесь все компоненты метрики есть функции (r, t) радиус-вектора и времени, а постоянная Хаббла есть, вообще говоря, функция (m, t) времени и массы.

Получаем уравнение

$$2ZQ_t - QZ_t = 2ZT_r - TZ_r. \quad (19)$$

Это и есть общее соотношение на коэффициенты метрики в изотропном случае, которые дают космологические решения.

Все три функции этого уравнения есть полиномы по r , если коэффициенты метрики сами полиномы по r . Тогда можно приравнять коэффициенты при степенях r , что и будет обобщением метода Милна—МакКри.

Рассмотрим случай, когда метрика есть функции только от времени: $Z = z_4 r^4 + z_2 r^2 + z_0$, $T = t_2 r^2 + t_0$, $Q = q_1 r$. Получаем три уравнения при 5-й, третьей и первой степенях:

$$\begin{aligned} 2z_4 q_{1t} - z_{4t} q_1 &= 0, \\ 2z_2 q_{1t} - z_{2t} q_1 &= 2z_2 t_2 - 4z_4 t_0, \\ 2z_0 q_{1t} - z_{0t} q_1 &= 4z_0 t_2 - 2z_2 t_0. \end{aligned} \quad (20)$$

Первое уравнение интегрируется

$$\frac{q_1}{\sqrt{z_4}} = \text{const} = I(m), \quad \text{безразмерный интеграл,}$$

где $q_1 = \frac{e^2}{c}h - ae$, $z_4 = e(a^2 - de)^2 - e(a^2 - de)(\frac{e}{c}h - a)^2$.

Остальные коэффициенты в (20):

$$\begin{aligned} z_2 &= -2be^2(a^2 - de) + be^2 \left(\frac{e}{c}h - a \right)^2, \quad z_0 = e(be)^2, \\ t_2 &= -c(a^2 - de) - ca \left(\frac{e}{c}h - a \right) = cde - ca^2 - aeh + ca^2 = cde - aeh = e(cd - ah), \quad t_0 = cbe. \end{aligned}$$

Эти уравнения обобщают соотношения примера 1. Пример 1 (см. [33]) значительно обобщает и упрощает результаты работ [27]–[32], а также показывает, что первое [35], [36] из предположений Эйнштейна в отношении работы Фридмана [34] о тривиальности этой модели для космологических решений оказалось оправданным. Особый интерес представляет последнее из уравнений (20), так как оно содержит уравнение на постоянную Хаббла, имеющее вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h^2 = \lambda(a, b, d, e, h).$$

Отклонение от свободного движения (метрики Минковского и модели Фридмана) $\lambda(a, b, d, e, h)$ должно дать ускоренное расширение в терминах метрики, если оно положительно. Для следующего примера метрики, обобщающей ФРЛУ, $\lambda(a, b, d, e, h) = \frac{hb_e}{b}$. Итак, мы построили общую теорию движения материи в космологических решениях в изотропной метрике. Для окончания нужно еще движения полей в заданной метрике по уравнениям Эйнштейна. Рассмотрение частных случаев представляет значительный интерес: мы свели задачу к исследованию знака $\lambda(a, b, d, e, h)$.

Пример 4. Рассмотрим случай с произвольными $b(t)$ и $d(t)$, но с $e = 1$, $a = 0$.

Найдем обратную матрицу, обозначая ее соответствующие компоненты большими буквами, получим $E = 1$, $A = 0$, $D = \frac{-d}{b(b+dr^2)}$, $B = \frac{1}{b}$. Это обобщает случай Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (см. [1]–[4]). Мы видим, что если уравнения для полей описываются метрическим тензором с нижними индексами, которые входят в действие (1) (здесь это соответствует коэффициентам с большими буквами), то необходимые уравнения для материи – метрикой с верхними индексами. Получим для движения материи уравнения (20). $q_1 = \frac{h}{c}$, $z_4 = (d)^2 + d(\frac{h}{c})^2$, что дает первое из уравнений (20)

$$2\left((d)^2 + d\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)\left(\frac{h}{c}\right)_t - \left((d)^2 + d\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)_t\left(\frac{h}{c}\right) = 0$$

или $2d^2 h_t - h(d^2)_t - d_t(\frac{h}{c})^2 = 0$, где интеграл (21) дает связь $(\frac{h}{c})^2 = I^2(m)((d)^2 + d(\frac{h}{c})^2)$.

Во втором из уравнений (20) $z_2 = 2bd + b(\frac{h}{c})^2$, $t_2 = cd$, и оно превращается в

$$2\left(2bd + b\left(\frac{1}{c}h\right)^2\right)\left(\frac{h}{c}\right)_t - \left(2bd + b\left(\frac{1}{c}h\right)^2\right)_t\left(\frac{h}{c}\right) = 2\left(2bd + b\left(\frac{1}{c}h\right)^2\right)(cd) - 4\left((d)^2 + d\left(\frac{1}{c}h\right)^2\right)(cb)$$

или $4bd(\frac{h}{c})_t - (2bd)_t(\frac{h}{c}) - b_t\frac{h^3}{c^3} = -2b\frac{1}{c}(h)^2d$ или $4bdh_t - 2(bd)_th - b_t\frac{h^3}{c^2} + 2bd(h)^2 = 0$.

Наконец, третье уравнение $2z_0q_{1t} - z_{0t}q_1 = 4z_0t_2 - 2z_2t_0$ (20) дает при $z_0 = b^2$, $q_1 = \frac{1}{c}h$, $2b^2\frac{h_t}{c} - (b^2)_t\frac{h}{c} = 4b^2cd - 2(2bd + b(\frac{h}{c})^2)cb$. Или $bh_t - b_th + bh^2 = 0$. Система уравнений

$$\begin{aligned} 2d^2 h_t - h(d^2)_t - d_t\left(\frac{h}{c}\right)^2 &= 0, \\ 4bdh_t - 2(bd)_th - b_t\frac{h^3}{c^2} + 2bd(h)^2 &= 0, \\ bh_t - b_th + bh^2 &= 0. \end{aligned}$$

Условие ускоренного расширения из третьего уравнения дают ограничения на метрику: $\frac{hb_t}{b}$ больше нуля.

Отметим, что при $d = 0$ мы получаем ответ примера 1. Здесь же мы получили космологическое уравнение движения материи в метрике, обобщающей FLRU, но это лишь полдела. Чтобы замкнуть уравнения, нужно исследовать еще уравнения для полей Эйнштейна, а там тензор энергии-импульса навязывает неравенство нулю всех компонент тензора Эйнштейна. Это еще одно препятствие к получению точных решений уравнений Власова–Эйнштейна в космологической задаче. Однако из третьего уравнения видна принципиальная возможность получить ускоренное расширение Вселенной. Мы прикинули возможности и оценили трудности, но из развитой техники вычислений можно получить точно решаемый случай слабoreлятивистской метрики следующего примера.

Пример 5. Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слабoreлятивистской. Это пример с метрикой (см. [1]), зависящей не только от времени, но и от расстояния, когда нетривиален только коэффициент e метрики:

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag}\left(1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1\right).$$

При этом потенциал вносится в действие под корень:

$$S = -cm \int \sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + 2U dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int (\nabla U)^2 dx dt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma} \int U dx dt.$$

Действуя обычным способом гамильтоновой механики, получаем импульсы и гамильтониан (16)

$$H = -cp_0(x, p, t) = c\sqrt{((mc)^2 + p^2)\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)}$$

и систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (v^i (\nabla W) \rho) &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{((mc)^2 + (\nabla W)^2)} \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) &= 0, \\ \Delta U &= 4\pi\gamma \int M(m, U, \nabla W) \rho(m, t) dm - \frac{c^2\Lambda}{2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$v(p) = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{M'}, \quad \text{где } M(m, U, p) = \frac{\sqrt{(mc)^2 + p^2}}{\sqrt{(c)^2 + 2U}}.$$

Возьмем систему с нерелятивистской зависимостью от массы, когда $M = m$ в третьем уравнении. Этим мы упростили модель, но сделали ее точнорешаемой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho v^i(\nabla W)) &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \sqrt{((mc)^2 + (\nabla W)^2)} \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) &= 0, \\ \Delta U &= 4\pi\gamma \int m\rho(m, t)dm - \lambda. \end{aligned} \quad (22)$$

Первые два уравнения этой системы (21) или (22) можно рассматривать как систему (18), если

$$a = d = 0, \quad b = -1, \quad e = \frac{1}{1 + \frac{2U}{c^2}}.$$

Система (18) получается в виде $W_t = \frac{-emc^2}{\sqrt{e^3 - e^2 R^2}}$, $W_r = \frac{mce^{\frac{hr}{c}}}{\sqrt{e^3 - e^2 R^2}}$, где $R = e^{\frac{hr}{c}}$. Теперь преобразуем эти выражение, имея в виду в равенстве (19) использовать полиномы по r , и равенство

$$e^{-1} = 1 + \frac{2U}{c^2}, \quad W_t = \frac{-e^{-1}mc^2}{\sqrt{e^{-1} - \frac{h^2 r^2}{c^2}}}, \quad W_r = \frac{\frac{hr}{c}mc}{\sqrt{e^{-1} - \frac{h^2 r^2}{c^2}}}.$$

Третье уравнение (22) решается как обычно:

$$U(r, t) = J(t)r^2,$$

где

$$J(t) = \frac{4\pi\gamma}{6} \int m\rho(m, t)dm - \frac{\lambda}{6}.$$

При такой записи имеем в уравнении (19)

$$Z = z_0 + z_2 r^2 = 1 + \left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right)r^2, \quad T = t_0 + t_2 r^2 = -e^{-1}c = -c \left(\frac{2J}{c}\right)r^2, \quad Q = q_1 r = \frac{h}{c}r.$$

Уравнение (19) $2ZQ_t - QZ_t = 2ZT_r - TZ_r$ дает

$$2\left(1 + \left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right)r^2\right)\left(\frac{h_t}{c}r\right) - \left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right)_t r^2 \left(\frac{h}{c}r\right) = 2\left(1 + \left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right)r^2\right)\left(-4J\frac{r}{c}\right) - \left(\left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right)2r\right)\left(-c - \frac{2J}{c}r^2\right).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях и получаем

Степень = 1

$$2\frac{h_t}{c} = -4c\left(\frac{2J}{c^2}\right) + 2c\left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right), \quad \text{т.е. } h_t = -2J - h^2.$$

Степень = 3

$$2\left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right)\frac{h_t}{c} - \left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right)_t \frac{h}{c} = -4\left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right)\frac{2J}{c} + 2\left(\frac{2J}{c}\right)\left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right),$$

$$\text{т.е. } \frac{4J}{c^3}h_t - 2J_t \frac{h}{c^3} = -2\left(\frac{2J}{c}\right)\left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right), \quad \text{т.е. } 4Jh_t - 2J_th = -4(J)(2J - h^2).$$

Если мы учтем уравнение для степени 1, то получим

$$J_t = -4Jh.$$

Мы видим, что слабый релятивизм дает почти то же уравнение для постоянной Хаббла, что и не релятивизм и не дает ускоренного расширения вселенной, если лямбда Эйнштейна равна нулю. Выпишем полностью эту систему слабого релятивизма и сравним с полученной системой (13) в не релятивизме:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(m, t)}{\partial t} + 3H(m, t)\rho(m, t) &= 0, \\ \frac{\partial H(m, t)}{\partial t} + H^2 + \frac{4\pi\gamma}{3} \int m\rho(t, m) dm - \frac{\lambda}{3} &= 0.\end{aligned}$$

Получаем для действия (22)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho(m, t)}{\partial t} + 3H(m, t)\rho(m, t) &= 0, \\ \frac{\partial H(m, t)}{\partial t} + H^2 + \frac{4\pi\gamma}{3} \int m\rho(t, m) dm - \frac{\lambda}{3} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{2\pi\gamma}{3} \int m\rho(t, m) dm - \frac{\lambda}{6} \right) &= -4 \left(\frac{2\pi\gamma}{3} \int m\rho(t, m) dm - \frac{\lambda}{6} \right) H.\end{aligned}$$

Мы видим интересные изменения. Первые два уравнения совпадают, и появилось третье уравнение. Из него вытекает, что постоянная Хаббла есть функция только времени (не зависит от массы) и навязывается зависимость лямбды Эйнштейна от времени (обычно она полагается постоянной). Предполагая, что лямбда зависит от времени, можно свести систему к следующей:

$$\begin{aligned}\frac{dK}{dt} + 3H(t)K &= 0, \\ \frac{dH(t)}{dt} + H^2 + 2K - \frac{\lambda}{3} &= 0, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\lambda H + 6KH.\end{aligned}$$

Здесь мы обозначили $K(t) = \frac{2\pi\gamma}{3} \int m\rho(t, m) dm$.

Если лямбда не зависит от времени, то из третьего уравнения получаем $\lambda = 6K$. А это равенство дает нам как раз решение примера 1 метрики Фридмана и метрики Минковского (см. [29]–[31]). Прекрасное согласие всех моделей всех примеров. Отсюда делаем вывод, что переход к слабому релятивизму навязывает нам зависимость лямбды от времени. Отметим, что первые два уравнения в точности совпадают с решением Милна–МакКри. Поэтому систему можно рассматривать как хорошо согласующуюся с этим решением, если лямбда медленно меняется, а это медленное изменение описывается третьим уравнением.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили возможность выводить уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [3]–[15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получать и уравнения гравитации и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. А также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звёзд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики или гравитирующей газодинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Ранее система уравнений Власова Максвелла–Эйнштейна была получена для скоростей (см. [9]), и для импульсов (см. [19]–[21]), что дает возможность исследовать космологические решения переходом к уравнению Гамильтона–Якоби. Здесь мы исследовали важные слаборелятивистские примеры (см. [20]–[23]) – обобщения моделей типа Милна–МакКри. Отметим, что именно приводя модель Милна–МакКри на семинаре академика М.В. Келдыша, трижды герой соц. труда академик Я.Б. Зельдович привел глубокое философское следствие расширяющейся Вселенной: “Мы вернулись к библейскому взгляду на мир”. Мы – это ученые – астрофизики. Библейский взгляд на мир – это взгляд первой главы книги Бытия и Библии, который теперь согласуется с научным взглядом о развитии Вселенной: от безмассовых частиц (“Да будет свет”-фотоны) через спонтанное появление массы (механизм Хиггса – нобелевская премия 2014 г.), клетку и растения, появление животных и

человека (все по науке, по Дарвину). “Мы вернулись” когда? Когда Фридман получил нестационарные решения уравнений Эйнштейна, а Хаббл обнаружил расширение Вселенной, а к 50-м годам XX в. именно нестационарная версия стала общепринятой. “Мы вернулись” — значит, мы не были в “библейском взгляде”: со времен Коперника до Фридмана и Хаббла не было мысли о нестационарности Вселенной, и все противоречило Книге Бытия. Итак, мы получили согласование Библейского и научного взгляда, которое дает нам гигантские усложнения от элементарных частиц до клетки, животных, человека, а это противоречит росту энтропии. Мы имеем шанс получить естественнонаучное обоснование для основного вопроса философии. Это мне сказал другой выдающийся ученый, изобретатель стреловидного крыла, академик В.В. Струминский: “Ты ж понимаешь, что Бог есть. Ну да, ты же занимался вторым законом термодинамики”. Эти два высказывания двух академиков доставляют нам естественнонаучное решение основного вопроса философии на стыке кинетической теории и космологии. В работах [19]–[21] были получены космологические решения в нерелятивистском случае, где была выведена и обобщена модель Милна–МакКри (см. [20], [21]). На основе этого был обоснован потенциал Гурздяна $U(r) = -\frac{\gamma}{r} + ar^2$ (см. [24], [25]), где второе слагаемое связано с лямбда — членом Эйнштейна. Мы построили математическую теорию темной энергии двумя способами: 1) с лямбдой в нерелятивизме (разд. 3), обобщая модель Милна–МакКри, и 2) без обращения к лямбде Эйнштейна из принципа наименьшего действия, отождествив темную энергию с энергией взаимодействия гравитационного и гипотетического поля (разд. 4). Эти модели дают возможность описывать и космические аномалии или напряжения постоянной Хаббла (the Hubble constant tension). Мы проанализировали классические модели ФЛРУ и нашли, как в них движется материя в космологии, обобщая решение Милна–МакКри. Мы рассмотрели слабoreлятивистские модели, где нашли уравнение для лямбды Эйнштейна. Представляет значительный интерес продолжить исследование предложенных здесь моделей для оценки лямбды Эйнштейна и различных релятивистских и слабoreлятивистских приближений как аналитически и численно, так и в сравнении с экспериментами. Подход с помощью уравнений типа Власова и их гидродинамических и Гамильтон–Якобиевых следствий здесь наиболее адекватен именно в космологических моделях. Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.
2. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
3. Choquet-Bruhat Y. Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford, Univer. Press, 2015.
4. Cercignani C., Kremer G.M. The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. Berlin: Birkhauser, 2002.
5. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тожество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // СМФН 2013. Т. 47. С. 5–17; V.V. Vedenyapin, M.A. Negmatov, On derivation and classification of Vlasov type equations and equations of magnetohydrodynamics. The Lagrange identity, the Godunov form, and critical mass // J. Math. Sci. 2014. V. 202. P. 769–782.
6. Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. Метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка // Докл. АН. 2015. V. 461. P. 136–139.
7. Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Четкин В.М. Уравнение типа Власова–Максвелла–Эйнштейна и переход к слабoreлятивистскому приближению // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. С. 1883–1898. V.V. Vedenyapin, N.N. Fimin, V.M. Chechetkin, Equation of Vlasov–Maxwell–Einstein type and transition to a weakly relativistic approximation // Comput. Math. Math. Phys. 2019. V. 59. P. 1816–1831.
8. Веденяпин В.В., Негматов М.А. О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби // Докл. АН. 2013. Т. 449. С. 521–526.
9. Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Докл. АН. 2020. Т. 495. С. 9–139.
10. Vedenyapin V., Fimin N., Chechetkin V. The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models // Europ. Phys. J. Plus. 2020. V. 135. № 5. С. 400.

11. *Lars Andersson and Mikolaj Korzynski* Variational principle for the Einstein–Vlasov equations arXiv:1910.12152; (October 2019).
12. *Hakan Andreasson* The Einstein–Vlasov System/Kinetic Theory // Living Rev. Relativ. 2011. V. 14. P. 4; <https://doi.org/10.48550/arXiv.1106.1367>
13. *Rein G.* Stability and instability results for equilibria of a (relativistic) self-gravitating collisionless gas // Rev. Class. Quant. Grav. 2023. V. 40. 193001. DOI: 10.1088/1361-6382/acf436.
14. *Okabe T., Morrison P.J., Friedrichsen III J.E., Shepley L.C.* Hamiltonian dynamics of spatially-homogeneous Vlasov–Einstein systems // Phys. Rev. D. 2011. V. 84. 024011.
15. *Huanchun Ye and Morrison P.J.* Action principles for the Vlasov equations // Phys. Fluids B. 1992. V. 4. № 4. P. 771–777.
16. *Madelung E.* Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form) // Z Phys. 1926. V. 40. P. 322–326.
17. *Козлов В.В.* Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. 1983. № 6. С. 10–22.
18. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1998, 239 с.
19. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* The generalized Friedmann model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equation system // Europ. Phys. J. Plus. 2021. V. 136. №. 6.
20. *Веденяпин В.В., Парёнкина В.И., Свирицевский С.Р.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 6. С. 1016–1029.
21. *Веденяпин В.В.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона–Якоби и космологических решениях // Докл. АН. Матем., информ., проц. упр. 2022. Т. 504. С. 51–55.
22. *McCrea W.H., Milne E.A.* Quart. J. Math. 1934. V. 5. P. 73.
23. *Orlov Yu.N., Pavlotsky I.P.* BBGKY hierarchies and Vlasov’s equations in postgalilean aproximation // Physica A. 1988. V. 151. P. 318.
24. *Чернин А.Д.* Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.
25. *Capozziello S., Gurzadyan V.G.* Focus point on tensions in cosmology from early to late universe: the value of the Hubble constant and the question of dark energy // Europ. Phys. J. Plus. 2023. V. 138. №. 2. P. 184.
26. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* Hydrodynamic consequences of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and their cosmological applications // Gravit. Cosmol. 2023. V. 29. № 1. P. 1–9.
27. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* Gravitation and Cosmology. 2020. V. 26. № 2. P. 173–183.
28. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* Cosmological aspects of hydrodynamic treatment of the Einstein–Vlasov equations // Eur. Phys. J. Plus. 2022. V. 137. № 9. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03257-7>.
29. *Веденяпин В.В., Бай А.А., Петров А.Г.* О выводе уравнений гравитации из принципа наименьшего действия, релятивистских решениях Милна–МакКри и о точках Лагранжа // Докл. АН. Матем., информ., проц. упр. 2023. Т. 514. С. 69–73.
30. *Vedenyapin V.V., Bay A.A.* Least action principle for gravity and electrodynamics, the Lambda-term and the analog of Milne–McCrea solution for Lorentzian metric // Europ. Phys. J. Plus. 2024. V. 139. P. 111. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-024-04885-x>.
31. *Vedenyapin V.V., Bay A.A., Parenkina V.I., Petrov A.G.* Minimal action principle for gravity and electrodynamics, Einstein lambda, and Lagrange points // Markov Processes Relat. Field. 2023. V. 29. P. 515–532.

32. Ведыняпин В.В., Фимин Н.Н., Четкин В.М. Уравнения типа Власова–Максвелла–Эйнштейна и их следствия. Приложения к астрофизическим задачам // ТМФ. 2024. Т. 218. № 2. С. 258–279. DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf10551>.
33. Ведыняпин В.В., Аушев В.М., Гладков А.О., Измайлова Ю.А., Реброва А.А. Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия и модели Фридмана и Милна–МакКри // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 3. 28 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2024-3>. <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-3>
34. Фридман А.А. О кривизне пространства // УФН. 1963. Т. 80. № 3. С. 439–446. Журн. Русск. физ.-хим. о-ва, часть физ. 56 (1), 59 (1924). Работа впервые опубликована на нем. языке в Zs. Phys. 11, 377 (1922).
35. Эйнштейн А. Замечание к работе А. Фридмана “О кривизне пространства” // УФН. 1963. Т. 80. № 3. С. 453. A. E i n s t e i n , Bemerkung zu der Arbeit von A.Friedman “Über die Krümmung des Raumes”, Zs. Phys. 11, 326 (1922).
36. Эйнштейн А. К работе А. Фридмана “О кривизне пространства” // УФН. 1963. Т. 80. № 3. С. 453. A. E i n s t e i n , Notiz zu der Arbeit von A.Friedman “Über die Krümmung des Raumes”, Zs. Phys. 21, 228 (1923).

A MATHEMATICAL THEORY OF THE EXPANSION OF THE UNIVERSE BASED ON THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION

V. V. Vedenyapin*

125047 Moscow, Miusskaya pl., 4, FRC Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Russia

*e-mail: vicveden@yahoo.com

Received: 21.07.2023

Revised: 11.07.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. In classical works, equations for the fields of gravity and electromagnetism are proposed without subtracting the right-hand sides. Here we give the subtraction of the right-hand sides and the analysis of the momentum energy tensor in the framework of the Vlasov–Maxwell–Einstein equations and consider cosmological models of the Milne–McCree and Friedman types.

Keywords: Vlasov equation, Vlasov–Einstein equation, Vlasov–Maxwell equation, Vlasov–Poisson equation.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С СИЛЬНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ В ОБЛАСТИ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2024 г. А.Б. Расулов^{1,*}, Н.В. Якивчик^{1,**}

¹ 111250 Москва, Красноказарменная ул., 14, стр. 1, Национальный исследовательский университет “МЭИ”, Россия

*e-mail: rasulzoda55@gmail.com

**e-mail: YakivchikNV@mpei.ru

Поступила в редакцию 21.04.2024 г.

Переработанный вариант 09.07.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Целью настоящей работы является построение общего решения уравнения Коши–Римана с сильными особенностями в младшем коэффициенте и исследование краевой задачи Римана–Гильберта в области с кусочно-гладкой границей. Библ. 13.

Ключевые слова: уравнения Коши–Римана, сильные особенности в коэффициенте, оператор Помпейю–Векуа, кусочно-гладкая граница, задача Римана–Гильберта.

DOI: 10.31857/S00444466924110086, **EDN:** KGNVWW

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В конечной области D рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + a_0 u + b_0 \bar{u} = f_0.$$

Теория этого уравнения при $a_0, b_0, f_0 \in L^p(D)$, $p > 2$, где $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, решения которого $u \in W^{1,p}(D)$, построена И.Н. Векуа [1].

Коэффициенты и правая часть данного уравнения могут допускать слабые особенности с требованием их p -интегрируемости в области D . На необходимость изучения таких уравнений с коэффициентами, допускающими особенности не ниже первого порядка, впервые было указано И.Н. Векуа [1] и А.В. Бицадзе [2].

Для краткого обзора ранее полученных результатов относительно этого уравнения вводим класс функций $C_\lambda(\bar{D}, 0)$, где $0 \in D$ и $\lambda < 0$. Это пространство всех непрерывных в $\bar{D} \setminus \{0\}$ функций $\varphi(z)$ с точечной особенностью $z = 0$ и с поведением $O(|z|^\lambda)$ при $z \rightarrow 0$. Это пространство снабжается нормой $\|\varphi\| = \sup_{z \in D} |z|^{-\lambda} |\varphi(z)|$, относительно которой оно является банаховым.

Вопросам построения общего решения вышеприведенного уравнения с сингулярными коэффициентами $a_0 \in C_{-1}$ и $b_0 \in C_{-1}$ были посвящены многочисленные исследования (см., например, [3–5]).

В последнее десятилетие исследованию обобщенного уравнения Коши–Римана с коэффициентами $a_0 \in C_{-\alpha-1}$, где $\alpha \geq 0$, и $b_0 \in C_{-1}$ со специальными видами (т.е. когда $|z|^{\alpha+1} z^{-1} a_0(z)$, $|z|^m b_0(z) \in C(D)$, $0 < m < 1$) посвящен ряд работ (см., например, [6]).

В настоящей работе снято условие ограниченности с коэффициента $a_0(z)$, который ранее имел этот специальный вид. Для рассматриваемого уравнения (ниже — уравнения (1)) с сильными особенностями в коэффициенте $a_0(z)$ построено интегральное представление решений и рассмотрена краевая задача типа Римана–Гильберта в области с кусочно-гладкой границей, которая ранее не исследована.

Пусть односвязная область D ограничена простым кусочно-гладким ляпуновским контуром Γ , составленным из гладких дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ и ориентированным против часовой стрелки. Множество $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$ концов

этих дуг обозначим F . Контур Γ разбивает плоскость на «конечную» — D и «бесконечную» — D' области. Для определенности пусть $0 \in D$ и $D_0 = D \setminus \{0\}$, $D_\varepsilon = D \cap \{|z| > \varepsilon\}$ при $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $\infty \in D'$.

Рассмотрим в области D_0 уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{a(z)}{|z|^\alpha} u(z) = f(z) \quad (1)$$

с коэффициентом $a(z) \in C(D \cup \Gamma)$, который n раз непрерывно дифференцируем в достаточно малой окрестности нуля, где $\alpha \geq 1$, причем $n = [\alpha]$ — целая часть α . Функция f в правой части (1) принадлежит классу $L^p_{loc}(D_0)$, $p > 2$; здесь $L^p_{loc}(D_0) = \{f : f \in L^p(D_\varepsilon) \text{ для любого } \varepsilon > 0\}$.

Решение ищется в классе $W^{1,p}_{loc}(D_0)$ функций, принадлежащих $W^{1,p}(G)$ в любой области G , которая вместе со своим замыканием содержится в D_0 . Что касается правой части f , то она выбирается в классе $L^p(D)$.

Как сказано выше, в случае $0 < \alpha < 1$ теория уравнения (1) построена И.Н. Векуа [1] и называется теорией регулярных обобщенных аналитических функций. Случай $\alpha = 1$ исследован многими авторами (см., например, [3, 4] и др.). Заметим, что результаты, полученные в случае $\alpha \geq 1$, относятся к теории сингулярных обобщенных аналитических функций.

В настоящей работе найдено интегральное представление решения уравнения (1) с более общим коэффициентом $a(z)$ в областях D_0 и D' при $\alpha \geq 1$ и исследована задача Римана–Гильберта в классе функций, ограниченных в бесконечности и допускающих особенность порядка меньше единицы при $z \rightarrow \tau$ в точках $\tau \in F$.

Функция $u(z) \in W^{1,p}_{loc}(D_0)$, где $p > 2$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду, называется его *регулярным* решением.

2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ

В получении представления регулярного решения данного уравнения существенную роль играет интегральный оператор Помпейю–Векуа (см. монографию И.Н. Векуа [1], стр. 29)

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\xi) d_2 \xi}{\xi - z}, \quad z \neq 0, \quad (2)$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, где $p > 2$. Здесь и ниже $d_2 \xi$ означает элемент площади. В частности, оператор T компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\bar{D})$.

Утверждение 1. Если в уравнении (1) функции $A(z) = |z|^{-\alpha} a(z) \in L^p(D)$ и $f \in L^p(D)$, то $\Omega = TA \in W^{1,p}_{loc}(D)$ является решением уравнения $\Omega_{\bar{z}} - A = 0$.

Следовательно, для функции $V = e^{-\Omega} u$ имеем соотношение

$$V_{\bar{z}} = e^{-\Omega} u_{\bar{z}} - A e^{-\Omega} u = e^{-\Omega} f.$$

В результате приходим к представлению

$$u = e^{\Omega} [\phi + T(e^{-\Omega} f)]$$

с произвольной аналитической в D функцией $\phi \in C(\bar{D})$ [1].

Приведем некоторые определения и предложения из работ [7–9], необходимые для решения краевой задачи Римана–Гильберта в области с кусочно-гладкой границей. Напомним, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$, $F = \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$ и $\rho_\lambda = |z - \tau_1|^{\lambda_1} \dots |z - \tau_m|^{\lambda_m}$.

По определению дуга Γ радиальная по отношению к своему концу τ , если она допускает параметризацию вида

$$\gamma(r) = \tau + r e^{i\theta(r)}, \quad 0 \leq r \leq \rho,$$

где вещественная функция θ непрерывно дифференцируема на полуоткрытом интервале $(0, \rho]$ и допускает пределы $\lim_{r \rightarrow 0} \theta(r) = \theta(0)$ и $\lim_{r \rightarrow 0} r\theta'(r) = 0$ при $r \rightarrow 0$.

Рассмотрим функции, заданные на конечной радиальной дуге Γ с отмеченным концом $\tau \neq \infty$.

Определение 1. Весовое пространство $C^\mu_\lambda(\bar{D}, F)$, $0 < \mu < 1$, состоит из функций в D , для которых норма

$$|\varphi| = \sup_{z \in D} |\rho_{-\lambda} \varphi| + \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|(\rho_{-\lambda} \varphi)(z_1) - (\rho_{-\lambda} \varphi)(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu} \quad (3)$$

конечна. Относительно данной нормы это пространство банахово.

При $\lambda = 0$ оно состоит из ограниченных функций, а отображение $\phi \rightarrow \rho_\lambda \phi$ осуществляет изоморфизм $C_\lambda^\mu \rightarrow C_0^\mu$. Сама весовая функция ρ_λ принадлежит C_λ^μ и ее норма (3) равна 2, поскольку полунорма $[\rho_\mu]_\mu = 1$. Из этих же соображений функция $\rho_\lambda \in C_0^\mu$ при $\lambda > 0$ и $\tau \neq \infty$. Функция $\rho_\mu(z) = |z|^\mu$ в окрестности нуля, а в окрестности точек $\tau \in F$ она совпадает с $|z - \tau|^\mu$.

В работе [9] доказано

Утверждение 2. а) Пространство $C_0^\mu(\Gamma, F)$ является банаховой алгеброй по умножению, так что произведение функций как билинейное отображение ограничено $C_\lambda^\mu \times C_{\lambda'}^\mu \rightarrow C_{\lambda' \times \lambda}^\mu$.

б) Суперпозиция $f \circ \phi$ функции $\phi \in C_0^\mu$ с функцией f , которая задана на множестве значений ϕ и удовлетворяет условию Липшица, не выводит из класса $f \in C_0^\mu$.

с) Семейство банаховых пространств $C_\lambda^\mu(G, F)$ монотонно убывает (в смысле вложений) по каждому из параметров μ и λ_τ , $\tau \in F$. В частности, для любого $\varepsilon > 0$ имеют место вложения банаховых пространств $C_{\lambda+\varepsilon}^\mu(\Gamma, \tau) \subset C_\lambda^\mu(\Gamma, \tau)$ при $\tau \neq \infty$.

д) В частности, пространство $C_0^\mu(D)$ является банаховой алгеброй по умножению и монотонно убывает по μ , т.е. имеет место вложение

$$C_0^\nu(D, \tau) \subseteq C_0^\mu(D, \tau), \quad 0 < \mu < \nu.$$

В работе [10] доказан следующий факт: если граница области Γ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$, то имеет место

Утверждение 3. Пусть контур Γ составлен из гладких дуг $\Gamma_j \in C_{(1+0)}^{1,\mu}$, $1 \leq j \leq m$, причем все растворы α_τ криволинейных секторов S_τ , $\tau \in F$, положительны. Пусть функция $\zeta = \omega(z) \in C(\overline{D})$ отображает область D на единичный круг $D_0 = \{|\zeta| < 1\}$. Тогда оператор суперпозиции $\phi \rightarrow \phi \circ \omega$ ограничен $C_{\alpha\lambda}^\mu(D_0, F_0) \rightarrow C_\lambda^\mu(D, F)$, где $\alpha\lambda = (\alpha_\tau \lambda_\tau, \tau \in F)$, $F_0 = \omega(F)$, и семейство $(\lambda_{\omega(\tau)}, \tau \in F)$ обозначено также λ . В частности, этот оператор действует $C_{(+0)}^\mu(D_0, F_0) \rightarrow C_{(+0)}^\mu(D, F)$.

Основным инструментом исследования краевых задач для аналитических функций служат интеграл типа Коши

$$\varphi(z) = (I\phi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\phi(t) dt}{t - z}, \quad z \notin \Gamma, \quad (4)$$

и связанный с ним сингулярный интеграл Коши

$$(S\phi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\phi(t) dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma \setminus F. \quad (5)$$

Действие интегрального оператора типа Коши (4) в весовых пространствах Гёльдера (без конкретизации показателя μ) изучено в [7]. В пространствах C_λ^μ этот результат был уточнен в [8]. Сформулируем его отдельно.

Утверждение 4. Пусть кусочно-гладкая кривая $\Gamma = \sum_{j=1}^m \Gamma_j$ представлена с помощью ориентируемых гладких дуг Γ_j и $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Тогда интегральный оператор типа Коши I ограничен $C_\lambda^\mu(\Gamma, F) \rightarrow C_{\lambda(0)}^\mu(\widehat{D}, F)$, $-1 < \lambda < 0$, и справедливы формулы Сохоцкого–Племеля $2\varphi^\pm = \pm \phi + S\phi$, связывающие интегралы (4) и (5).

Обратно, если $\phi \in C_{\lambda(k)}^\mu(\widehat{D}, F)$, $-1 < \lambda < 0$, и $\phi = \varphi^+ - \varphi^-$, то $\phi = I\phi + p$ с некоторым многочленом $p \in P_k$, причем

$$\int_\Gamma \phi(t) q(t) dt = 0, \quad q \in P_{-k}. \quad (6)$$

Условия ортогональности в этой теореме следуют из разложения

$$(I\phi)(z) = \sum_{j \geq 0} c_j z^{-j-1}, \quad c_j = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \phi(t) t^j dt,$$

интеграла типа Коши в окрестности ∞ . Оно показывает, что неравенство $\deg(I\phi) \leq k - 1$ обеспечивается условиями $c_j = 0$ при $0 \leq j \leq -k - 1$, которые равносильны (6).

Утверждение 5. Если $\phi \in C_{(+0)}^\mu(\widehat{\Gamma}, F)$, то в секторе $S_{\tau,j}$ интеграл типа Коши $\varphi = I\phi$ представим в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{j=1}^{n_\tau} \sigma_{\tau,j} \phi(\tau_j) \right] \ln(z - \tau) + \phi_\tau(z), \quad \phi_\tau(z) \in C_{(+0)}^\mu(S_{\tau,j}, \tau),$$

где $\sigma_{\tau,j} = 1$ ($\sigma_{\tau,j} = -1$), если τ является правым (левым) концом дуги $\Gamma_{\tau,j}$.

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Напомним, что коэффициент уравнения (1), $a(z) \in C(\overline{D^+})$, n раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля, где $\alpha \geq 1$, $n = [\alpha]$ — целая часть α . Следовательно, функцию $a(z)$ в окрестности особой точки $z = 0$ можно разложить по формуле Тейлора

$$a(z) = p(z) + a_0(z), \quad \text{где } a_0(z) = o(z^n) \text{ при } z \rightarrow 0.$$

Здесь $p(z) = 2 \sum_{k \leq n} a_{k_1 k_2} \cdot z^{k_1} \bar{z}^{k_2}$ — ее главная часть, $k = (k_1, k_2)$, $a_{k_1 k_2}$ — коэффициенты ряда Тейлора, $a_0(z)$ — остаток в форме Пеано.

Область D^+ содержит точку $z = 0$ и ограничена простым кусочно-гладким ляпуновским контуром Γ , ориентированным против часовой стрелки. Пусть $D_\varepsilon^+ = D^+ \cap \{|z| > \varepsilon\}$ и оператор T_ε определяется как выше по отношению к D_ε^+ .

Введем сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon(a |\zeta|^{-\alpha}))(z) \equiv - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{D_\varepsilon^+} \frac{a(\zeta) d_2 \zeta}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)}, \quad (7)$$

где интегральный оператор T_ε определяется аналогично (2) по отношению к области D_ε^+ .

Лемма 1. Если $\alpha > 1$, то существует регулярное решение уравнения

$$\Omega_{\bar{z}} = |z|^{-\alpha} a(z),$$

представимое в виде

$$\Omega(z) = \omega(z) + h(z), \quad (8)$$

где

$$\omega(z) = \begin{cases} \frac{2}{|z|^\alpha} \sum_{k \leq n} a_{k_1 k_2} \cdot \frac{z^{k_1} \bar{z}^{k_2+1}}{2(k_2+1) - \alpha} + (T(|\zeta|^{-\alpha} a_0))(z) & \text{при } \alpha \neq 2(k_2+1), \\ \sum_{k \leq n} a_{k_1 k_2} \cdot z^{k_1-k_2-1} \ln \bar{z} + (T(|\zeta|^{-\alpha} a_0))(z) & \text{при } \alpha = 2(k_2+1), \end{cases} \quad (9)$$

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{j=1}^{n_\tau} \sigma_{\tau,j} \omega(\tau_j) \right] \ln(z - \tau) + \omega_\tau(z), \quad \omega_\tau(z) \in C_{(+0)}^\mu(S_{\tau,j}, \tau),$$

$\sigma_{\tau,j} = 1$ ($\sigma_{\tau,j} = -1$), если τ является правым (левым) концом дуги $\Gamma_{\tau,j}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция $|z|^{-\alpha}$ является многозначной; при разрезе расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ вдоль линии, соединяющей точки 0 и ∞ (например, луча $\arg z = \beta$), мы выбираем фиксированную ветвь данной функции, и этот выбор нужно учитывать при дифференцировании. В самом деле, $|z|^{-\alpha} = z^{-\alpha/2} \bar{z}^{-\alpha/2} = e^{-\frac{\alpha}{2} \ln z} e^{-\frac{\alpha}{2} \ln \bar{z}}$; при этом значения логарифма $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ и $\ln \bar{z} = \ln |z| - i \arg z$ комплексно сопряжены, так что значение функции остается положительным вещественным числом.

Напомним, что если $f(x, y)$ — аналитическая функция переменных x и y , то можно указать формулу, которая несколько упрощает вычисление интеграла Помпейю–Векуа Tf ([1], стр. 30). Сделав замену $x = 2^{-1}(z + \bar{z})$, $y = (2i)^{-1}(z - \bar{z})$ и вычислив неопределенный интеграл

$$F(z, \bar{z}) = \int f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) d\bar{z},$$

согласно формуле Бореля–Помпейю получим

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta) d_2 \zeta}{\zeta - z} = F(z, \bar{z}) - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{F(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Рассмотрим случай $\alpha \neq 2(k_2+1)$. Используя представление коэффициента $a(z) = p(z) + a_0(z)$, в вышеприведенных обозначениях (7)

$$\left(T_\varepsilon \frac{a}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) = \left(T_\varepsilon \frac{p}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) + \left(T_\varepsilon \frac{a_0}{|\zeta|^\alpha}\right)(z).$$

Отсюда

$$\left(T_\varepsilon \frac{a}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) = \left(T_\varepsilon \frac{a_0(z)}{|z|^\alpha}\right)(z) - \omega_1(z) + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

где обозначено $\omega_1(z) = (T(p|\zeta|^{-\alpha}))(z)$; или, что равносильно,

$$\left(T_\varepsilon \frac{a}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta| \leq \varepsilon} \frac{a_0}{|\zeta|^\alpha (\zeta - z)} d_2 \zeta - \omega(z) + \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad |z| > \varepsilon. \quad (10)$$

Убедимся, что функция $\Omega_\varepsilon(z) = (T_\varepsilon(a|\zeta|^{-\alpha}))(z)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно сходится к $\Omega(z) = (T(a|\zeta|^{-\alpha}))(z)$ и, в частности, справедливо равенство (9) при $\alpha \neq 2(k_2 + 1)$. В самом деле, используя неравенство Гёльдера, можно показать, что первый интеграл в правой части (10) по модулю не превосходит $CL_p(a_0|\zeta|^{-\alpha})\varepsilon^\delta$, $C = C(d)$ — постоянная (здесь d — диаметр области), $\delta = 1 - p^{-1}$, так что соответствующий интеграл равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим контурный интеграл по границе Γ . Заметим, что $\omega(t) \equiv (T(a|\zeta|^{-\alpha}))(t)$, $t \in \Gamma$, где $a|\zeta|^{-\alpha} \in H(\Gamma)$, в частности, $\omega \in C_{(+0)}^\mu(\widehat{\Gamma}, F)$. Следовательно, согласно утверждению 5, для

$$\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = h(z)$$

имеет место

Лемма 2. Если $\omega \in C_{(+0)}^\mu(\widehat{\Gamma}, F)$, то в секторе $S_{\tau,j}$ интеграл типа Коши $h = I\omega$ представим в виде

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{j=1}^{n_\tau} \sigma_{\tau,j} \omega(\tau_j) \right] \ln(z - \tau) + \omega_\tau(z), \quad \omega_\tau(z) \in C_{(+0)}^\mu(S_{\tau,j}, \tau), \quad (11)$$

где $\sigma_{\tau,j} = 1$ ($\sigma_{\tau,j} = -1$), если τ является правым (левым) концом дуги $\Gamma_{\tau,j}$.

Заметим, что в представлении $h(z)$ значение ω в точках τ_j непосредственно зависит от коэффициента $a(z)$ и степени сингулярности α , которая играет важную роль в формировании класса C_λ^μ , так как $\lambda = \lambda(a, \alpha, \tau) = \operatorname{Re} \omega(\tau_j)$.

При $\alpha = 2(k_2 + 1)$ доказательство леммы проводится аналогично.

Следовательно, при $\alpha \geq 1$

$$\exp \Omega = \exp\{\omega + \omega_\tau(z)\} \prod_{j=1}^{n_\tau} (z - \tau)^{\gamma_{\tau,j}}.$$

В обозначениях $\gamma_{\tau,j} = \sigma_{\tau,j} \omega(\tau_j) (2\pi i)^{-1}$ функция $(z - \tau)^{\gamma_{\tau,j}}$ является многозначной; при разрезе расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ вдоль линии, соединяющей точки τ и ∞ (например, луча $\arg z = \beta$) мы выбираем фиксированную ветвь данной функции.

Итак, на основе лемм 1, 2 и согласно предложению 1 может быть сформулирована

Теорема 1. Пусть число $\alpha \geq 1$ и функция Ω определена по формуле (2), а правая часть f удовлетворяет условию $e^{-\Omega} f \in L^p(D) = f_0$ с $p > 2$. Тогда любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде

$$u = e^\Omega [\phi + T f_0], \quad (12)$$

где $\phi \in C(\overline{D} \setminus F)$ — произвольная аналитическая в области D_0 функция, которая для заданного семейства $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ вещественных чисел подчиняется степенному поведению

$$\phi(z) = O((z - \tau)^{\lambda_\tau}) \quad \text{при } z \rightarrow \tau.$$

При этом регулярное решение $u(z)$ вблизи особой точки $z = 0$ и вблизи концов $\tau \in F$ контура Γ имеет поведение

$$u(z) = \begin{cases} O(e^{-\operatorname{Re} \Omega(z)}) & \text{при } z \rightarrow 0, \\ O((z - \tau)^{\gamma_\tau + \lambda_\tau}) & \text{при } z \rightarrow \tau. \end{cases} \quad (13)$$

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

В этом случае интегральный оператор Помпейю–Векуа T понимается по отношению к неограниченной области $D^- = \mathbb{C} \setminus (D \cup \Gamma)$. Если граница области Γ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$, то имеет место утверждение 3 (доказанное в работе [10]), и рассматриваемая область D отображается на единичный круг. Поэтому для наглядности исследование ведем в основном в областях $B = \{t : |t - z| \leq 1\}$ и $B' = \{t : |t - z| \geq 1\}$.

Хорошо известно [1], что если функция φ непрерывно дифференцируема и $\varphi(z) = O(|z|^\delta)$ при $z \rightarrow \infty$ с некоторым $\delta < -1$, то функция

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\xi) d_2 \xi}{\xi - z}, \quad \xi, z \in \mathbb{C}, \quad (14)$$

непрерывно дифференцируема и является решением уравнения (1) при $a = 0$ и $\varphi = f$.

Если функция

$$\varphi \in L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C}), \quad \text{где } 1 < q < 2 < p,$$

то, применяя неравенство Гёльдера к подынтегральному выражению в областях B и B' , убеждаемся, что интеграл (14) существует и справедлива оценка

$$|T\varphi|_{0,\mathbb{C}} \leq M(|\varphi|_{L^p} + |\varphi|_{L^q}), \quad (15)$$

где постоянная M зависит только от p и q . Здесь и ниже $|\varphi|_{0,G}$ означает $\sup$ -норму функции φ , заданной в некоторой области G .

Функции $\varphi \in C^\mu(\mathbb{C})$ могут осциллировать на бесконечности, оставаясь ограниченными. В противоположность этому обозначим $C_*^\mu(\mathbb{C})$ пространство функций φ , которые вместе с $\varphi(1/z)$ принадлежат $C^\mu(B)$ в единичном круге $B = \{|z| \leq 1\}$ (разумеется, при дополнительном требовании непрерывности φ в точках единичной окружности). Очевидно, эти функции имеют предел $\varphi(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z)$ на бесконечности и $\varphi(z) - \varphi(\infty) = O(|z|^{-\mu})$ при $z \rightarrow \infty$.

В монографии [1] И.Н. Векуа описал условие на функцию f , обеспечивающее принадлежность Tf классу $C^\mu(\mathbb{C})$ в терминах введенного им пространства $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$, где $p > 2$. Под $C^\mu(\mathbb{C})$ здесь понимается класс непрерывных функций $f(z)$, которые вместе с $f(1/z)$ принадлежат $C^\mu(B)$ в единичном круге $B = \{|z| \leq 1\}$. По определению пространство $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$ состоит из всех функций f , для которых $f(z)$ и $f_\nu(z) = |z|^{-\nu} f(1/z)$ принадлежат $L^p(B)$.

Для $\varphi \in L^{p,2}$ функция $T\varphi$ принадлежит классу $C^\mu(\mathbb{C})$ и обращается в нуль на бесконечности. В действительности имеет место следующий результат (см. теоремы 1.24, 1.25 в монографии [1]).

Теорема 2. *Оператор T ограничен $L^{p,2} \rightarrow C_*^\mu$, $\mu = 1 - 2/p$. В частности, для $\varphi \in L^{p,2}$ функция $(T\varphi)(z) = O(|z|^{-\mu})$ при $z \rightarrow \infty$.*

На основе теоремы 2, рассуждая аналогично тому, как при доказательстве теоремы 1, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть число $\alpha \geq 1$, функция Ω определена по формуле (2) и функция $f_0 = e^{-\Omega} f \in L^{p,2}(D^-)$, где $p > 2$. Тогда любое регулярное решение уравнения (1) с правой частью f представимо по формуле (12), где $\phi \in C(\overline{D^-} \setminus F)$ — произвольная аналитическая в области D^- функция, которая для заданного семейства $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ вещественных чисел подчиняется степенному поведению*

$$\phi(z) = O((z - \tau)^{\lambda_\tau}) \quad \text{при } z \rightarrow \tau;$$

кроме того, $e^{-\Omega} u(z) = o(|z|^{-2/p})$ при $|z| \rightarrow \infty$ и аналитическая функция ϕ также имеет аналогичное поведение $\phi(z) = o(|z|^{-2/p})$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Замечание 1. При $a(0) \neq 0$, как следует из поведения $e^{-\operatorname{Re} \Omega(z)} = O(|z|^{1-\alpha})$ при $z \rightarrow \infty$ и $(Tf)(z) = o(|z|^{\mu-1})$ при $z \rightarrow \infty$, условие

$$u(z) = O(e^{-\operatorname{Re} \Omega(z)})$$

при $z \rightarrow \infty$ равносильно тому, что в этом представлении функция ϕ в $z = \infty$ обращается в нуль и, следовательно, аналитична во всей области D^- .

5. СЛУЧАЙ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГЁЛЬДЕРА

В работе А.П. Солдатов [11] теорема 2 распространена на семейства весовых пространств. Эти пространства строятся исходя из соответствующего основного пространства X_0 функций $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, где символ X принимает значения L^p , C , C^μ , $C^{1,\mu}$. Мы ниже приведем и используем часть этих результатов [11] для получения интегрального представления решений уравнения (1) в различных весовых классах в неограниченной области.

Исходя из X_0 , весовое пространство $X_\lambda = X_\lambda(\mathbb{C}; 0, \infty)$, отвечающее паре $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ вещественных чисел, строится следующим образом. Введем весовую функцию

$$\rho_\lambda(z) = \begin{cases} |z|^{\lambda_0}, & |z| \leq 1, \\ |z|^{\lambda_1}, & |z| \geq 1. \end{cases}$$

При $\lambda_0 = \lambda_1 = \nu$ пару λ отождествляем с ν , так что в этом случае $\rho_\lambda(z) = |z|^\nu$. Тогда по определению пространство X_λ состоит из функций $\varphi = \rho_\lambda \varphi_0$, $\varphi_0 \in X_0$ и снабжается перенесенной нормой $|\varphi| = |\varphi_0|_{X_0}$.

В случаях C_0 , C^μ , $C^{1,\mu}$ определению пространств X_0 можно придать другую трактовку. С этой целью каждой функции φ на полуоси поставим в соответствие двустороннюю последовательность φ_k , $k = 0, \pm 1, \dots$, функций в кольце $K = \{1/2 \leq |z| \leq 2\}$ по формуле

$$\varphi_k(z) = \varphi(2^k z), \quad z \in K, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (16)$$

Тогда в обозначениях (16) для каждого из случаев $X = C$, C^μ , $C^{1,\mu}$ равенство

$$|\varphi| = \sup_{k=0, \pm 1, \dots} |\varphi_k|_{X(K)}$$

определяет в пространстве X_0 эквивалентную норму.

Заметим, что аналогично этому пространство $\tilde{L}_0^p$ может быть определено эквивалентной нормой

$$|\varphi| = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi_k|_{L^p(K)}^p \right)^{1/p}.$$

В этой связи удобно ввести пространство $X_0 = \tilde{L}_0^p$ с помощью нормы

$$|\varphi| = \sup_k |\varphi_k|_{L^p(K)}. \quad (17)$$

Легко видеть, что семейство весовых пространств X_λ монотонно убывает (в смысле вложения) по параметру λ_0 и возрастает по λ_1 . При фиксированном λ пространства C_λ^μ и $\tilde{L}_\lambda^p$ монотонно убывают по, соответственно, μ и p . Ясно также, что все пространства X_λ вложены в $\tilde{L}_\lambda^p$.

Естественным образом определяются весовые пространства $X_\lambda(B, 0)$ и $X_\lambda(B', \infty)$ с одной особой точкой по отношению к весовой функции $\rho_\lambda(z) = |z|^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что

$$\tilde{L}_\lambda^p(B, 0) \subseteq L^{p_0}(B), \quad \lambda \geq -2/p_0, \quad 1 \leq p_0 \leq p, \quad (18)$$

$$\tilde{L}_\lambda^p(B', \infty) \subseteq L^{p_1}(B'), \quad \lambda \leq -2/p_1, \quad 1 \leq p_1 \leq p. \quad (19)$$

При $0 < \lambda < 1$ удобно ввести пространство $C_{(\lambda)}^\mu(B, 0)$ всех функций $\varphi \in C(B)$, для которых $\varphi(z) - \varphi(0) \in C_{(\lambda)}^\mu(B, 0)$, снабженное соответствующей нормой. В частности, $C_{(\mu)}^\mu(B, 0) = C^\mu(B)$. При $\lambda \leq 0$ для единообразия полагаем $C_{(\lambda)}^\mu(B, 0) = C_\lambda^\mu(B, 0)$. Аналогичным образом при $-1 < \lambda < 0$ вводится и пространство $C_{(\lambda)}^\mu(B', \infty)$ условием $\varphi(z) - \varphi(\infty) \in C_{(\lambda)}^\mu(B', \infty)$, полагая для единообразия $C_{(\lambda)}^\mu(B', \infty) = C_\lambda^\mu(B', \infty)$ при $\lambda \geq 0$.

Обратимся к оператору T , определяемому интегралом (14) с плотностью $\varphi \in \tilde{L}_\lambda^p(\mathbb{C}; 0, \infty)$, $p > 2$, где $-2 < \lambda_0 < 0$ и $\lambda_1 < -1$. При $z \neq 0$ подынтегральное выражение с этой плотностью принадлежит $\tilde{L}_{\lambda_0, \lambda_1-1}^1(\mathbb{C}; 0, \infty)$, так что в соответствии с (18), (19) оно суммируемо на всей плоскости.

Теорема 4 (А.П. Солдатов [11]). Пусть $p > 2$, $-2 < \lambda_0 < 0$, $\lambda_0 \neq -1$ и $-2 < \lambda_1 < -1$. Тогда оператор T ограничен

$$\tilde{L}_\lambda^p \rightarrow C_{(\lambda_0+1), \lambda_1+1}^\mu, \quad C_\lambda^\mu \rightarrow C_{(\lambda_0+1), \lambda_1+1}^{1,\mu}, \quad (20)$$

где $\mu = 1 - 2/p$ для первой пары пространств L^p , C и $0 < \mu < 1$ для второй пары C^μ , $C^{1,\mu}$. В частности, для тех же значений μ оператор T ограничен $L_\lambda^p \rightarrow C_{(\lambda_0+1), \lambda_1+1}^\mu$ и $C_\lambda \rightarrow C_{(\lambda_0+1), \lambda_1+1}^\mu$.

На основе этой теоремы, полученной в работе [11], и на основе леммы 1 и формулы (2) можно сформулировать теорему об интегральном представлении решений уравнения (1) в весовых классах L_λ^p , C_λ^μ при $\mu = 1 - 2/p$ и C^μ , $C^{1,\mu}$ при $0 < \mu < 1$ в неограниченной области.

Теорема 5. Пусть в уравнении (1) число $\alpha \geq 1$, функция Ω определена по формуле (2) и функция $f_0 = e^{-\Omega} f$. Пусть $p > 2$, $-2 < \lambda_0 < 0$, $\lambda_0 \neq -1$ и $-2 < \lambda_1 < -1$. Тогда

$$Tf_0 : L_\lambda^p \rightarrow C_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}^\mu \quad \text{при } \mu = 1 - 2/p, \quad (21.a)$$

$$Tf_0 : C_\lambda^\mu \rightarrow C_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}^\mu \quad \text{при } \mu = 1 - 2/p, \quad (21.b)$$

а также

$$Tf_0 : C^\mu \rightarrow C_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}^\mu \quad \text{при } 0 < \mu < 1, \quad (22.a)$$

$$Tf_0 : C^{1,\mu} \rightarrow C_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1}^{1,\mu} \quad \text{при } 0 < \mu < 1. \quad (22.b)$$

Любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде (12) с произвольной аналитической функцией

$$\phi(z) \in \begin{cases} L_\lambda^p, C_\lambda^\mu & \text{при } \mu = 1 - 2/p, \\ C^\mu, C^{1,\mu} & \text{при } 0 < \mu < 1, \end{cases} \quad (23)$$

и с весовой функцией $e^{-\Omega}$ оно принадлежит классу

$$(e^{-\Omega} u)(z) \in \begin{cases} L_\lambda^p, C_\lambda^\mu & \text{при } \mu = 1 - 2/p, \\ C^\mu, C^{1,\mu} & \text{при } 0 < \mu < 1. \end{cases} \quad (24)$$

6. ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

Задача Римана–Гильберта исчерпывающим образом изучена в известных монографиях [1, 7, 12] в классе H^* интегрируемых функций ϕ , принадлежащих классу $C_\lambda^\mu(\overline{D}, F)$ с некоторыми $-1 < \lambda < 0$ и $0 < \mu < 1$, а также в классах H_ε почти ограниченных функций $H(\overline{D}, F)$ и ограниченных функций, принадлежащих соответственно классам $C_\lambda^\mu(\overline{D}, F)$, $0 < \lambda < 1$, и $C_{(+0)}^\mu(\overline{D}, F)$ с некоторым $0 < \mu < 1$. Однако, во-первых, различные приложения требуют исследования этой задачи в пространстве $C_\lambda^\mu(\overline{D}, F)$ для всех весовых порядков μ , во-вторых, для уравнения (1) краевые задачи в областях с кусочно-гладкими границами не исследованы.

Постановка задачи

Требуется найти регулярное решение $u(z)$ уравнения (1) в области D такое, что $e^{-\Omega} u \in C_\lambda^\mu(\overline{D}, F)$, предельные значения которого на контуре Γ удовлетворяют граничному условию

$$(\operatorname{Re} G_0 e^{-\Omega} u)(t) = g_0(t), \quad t \in \Gamma, \quad (25)$$

где $G_0(t), g_0(t) \in H(\Gamma, F)$, причем $G_0(t), G_0^{-1}(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$, включая односторонние пределы $G_0(\tau \pm 0)$.

При этом регулярное решение $u(z)$ вблизи особой точки $z = 0$ и вблизи концов $\tau = \tau_j \in F$ контура Γ имеет поведение

$$u(z) = \begin{cases} O(e^{-\operatorname{Re} \Omega(z)}) & \text{при } z \rightarrow 0, \\ O((z - \tau_j)^{\gamma_{\tau,j} + \varepsilon_j}) & \text{при } z \rightarrow \tau_j, \quad j = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (26)$$

где $\gamma_{\tau,j} \in \mathbb{C}$, $-1 < \varepsilon_j < 0$.

Решение задачи

На основе представления решений уравнения (1) в виде (12) задача (25) редуцируется к задаче: Найти аналитическую в области D функцию $\phi(z) \in C_\lambda^\mu(\overline{D}, F)$, которая на границе $\Gamma = \partial D$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} G_0 \phi|_{\Gamma_0} = g_0, \quad (27)$$

где функция $G \in H(\Gamma_0)$ всюду отлична от нуля, $g_0(\tau + 0) = g_0(\tau - 0)$, т.е. $g_0 \in H(\Gamma_0)$ (см. [7], стр. 18, 145).

Таким образом, задача (25) сводится к задаче Римана–Гильберта, которая была изучена в работах [10, 13].

Очевидно, задачу (25) можно представить в форме

$$\phi^+ = G\phi^- + g$$

с коэффициентом

$$G(t) = \overline{G_0(t)} G_0^{-1}(t) := \exp[2i \arg \overline{G_0(t)}] \quad \text{и} \quad \arg G(t) := \arg [\overline{G_0(t)}]$$

и правой частью $g = 2g_0(t) G_0^{-1}(t)$.

Введем индекс Коши функции G_0 , представляющий собой целое число

$$\kappa = \text{Ind}_\Gamma G_0 = \frac{1}{2\pi} [\arg G_0]_\Gamma,$$

следовательно, $\text{Ind}_\Gamma G = -2\kappa$.

Тогда дополнительные условия (26) переходят к условиям

$$\phi(z) = \begin{cases} O((z - \tau_j)^{\varepsilon_j}) & \text{при } z \rightarrow \tau_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad \text{где } -1 < \varepsilon_j < 0, \\ O(1) & \text{при } z \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Напомним некоторые свойства функции G и кусочно-гладкой кривой Γ . В дальнейшем предполагается, что кривая Γ удовлетворяет условиям утверждения 4, т.е. составлена из дуг Γ_j класса $C_{(1+0)}^{1,\mu}$, причем внутренние углы $\pi\alpha_\tau$ области D в точках $\tau \in F$ положительны. Относительно функции G также предполагаем, что ее сужение G_j на каждую дугу Γ_j принадлежит классу $C_{(+0)}^\mu(\Gamma_j, F_j)$, где F_j — двухточечное множество ее концов τ_j^0, τ_j^1 . Пусть в этой нумерации τ_j^0 является левым концом ориентированной дуги Γ_j , тогда комплексное число

$$\sum_{\tau \in F} [G(\tau - 0) - G(\tau + 0)] = \sum_{j=1}^m G_j|_{\Gamma_j}, \quad G_j|_{\Gamma_j} = G_j(\tau_j^1) - G_j(\tau_j^0),$$

можно назвать приращением $G|_\Gamma$ функции G на контуре Γ .

Пусть выбрана непрерывная ветвь аргумента $\arg G$ на каждой из дуг Γ_j ; она определена с точностью до кусочно постоянной функции, принимающей на Γ_j постоянное значение $2\pi k_j$ с некоторым целым k_j . С помощью утверждения 4 нетрудно убедиться, что и $\arg G_j \in C_{(+0)}^\mu(\Gamma_j, F_j)$. Положим

$$\pi a_\tau = (\arg G)(\tau + 0) - (\arg G)(\tau - 0), \quad \tau \in F. \quad (28)$$

Очевидно, a_τ зависит от выбора ветви аргумента и определено с точностью до четного целого числа, однако суммы

$$\sum_\tau a_\tau = -\frac{1}{\pi} (\arg G)|_\Gamma, \quad \sum_\tau [a_\tau],$$

где $[x]$ — целая часть числа, не зависят от выбора этой ветви.

Согласно утверждениям 4 и 5 и аналогично работе [10] получим представление для канонической функции.

Теорема 6. Пусть функция $\zeta = \omega(z) \in C(\overline{D})$ отображает область D на единичный круг D_0 , задано семейство целых чисел $s_\tau, \tau \in F$, и

$$\varkappa = 1 + \sum_\tau [a_\tau + s_\tau]. \quad (29)$$

Тогда существует единственная (с точностью до ненулевого множителя $c \in \mathbb{R}$) аналитическая в D функция

$$X(z) = A(z) \prod_{\tau \in F} (z - \tau)^{\delta_\tau}, \quad \delta_\tau = (a_\tau - [a_\tau] - s_\tau)/\alpha_\tau, \quad (30)$$

где коэффициент $A(z)$ принадлежит $C_{(+0)}^\mu(\overline{D}, F)$ и всюду отличен от нуля, удовлетворяющая краевому условию

$$[\omega(t)]^{\varkappa-1} G(t) X^+(t) + \overline{G(t)} X^+(t) = 0, \quad t \in \Gamma. \quad (31)$$

С помощью полученной канонической функции (см. [7, 10]) и утверждений 3–5 мы приходим к решению задачи (25):

Теорема 7. Пусть $a_\tau - \alpha_\tau \lambda_\tau \notin \mathbb{Z}$, $\tau \in F$, и в условиях теоремы 1 каноническая функция $X(z)$ построена по семейству целых чисел $s_\tau = [a_\tau - \alpha_\tau \lambda_\tau] - [a_\tau]$, так что

$$\varkappa = 1 + \sum_\tau [a_\tau + \alpha_\tau \lambda_\tau]. \quad (32)$$

Тогда при $\varkappa \leq 0$ задача (1) безусловно разрешима в классе $C_\lambda^k(\overline{D}, F)$, и все ее решения ϕ даются формулой

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \left(1 + \frac{[\omega(z)]^\varkappa}{[\omega(t)]^\varkappa} \right) \frac{g(t)}{G(t)} \frac{\omega'(t) dt}{X^+(t) \omega(t) - z} + X(z) p[\omega(z)], \quad p \in P_{-2\varkappa}^0. \quad (33)$$

При $\varkappa > 0$ для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы в обозначениях (28) ее правая часть g удовлетворяла условиям ортогональности

$$\int_\Gamma [X^+(t)]^{-1} g(t) q(t) |\omega'(t)| d_1 t = 0, \quad q \in P_{2\varkappa-2}^0,$$

где $d_1 t$ означает элемент длины дуги. При выполнении этих условий ее (единственное) решение определяется равенством

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)} \frac{\omega'(t) dt}{X^+(t) \omega(t) - z}. \quad (34)$$

При этом общее решение уравнения (1) определяется формулой (12), в которой аналитическая функция $\phi(z)$ согласно знаку индекса $\varkappa$ определяется при помощи одной из формул (33) или (34), причем

$$u(z) = \begin{cases} O(e^{-\operatorname{Re} \Omega}) & \text{при } z \rightarrow 0, \\ O((z - \tau_j)^{\gamma_{\tau_j} + \varepsilon_j}) & \text{при } z \rightarrow \tau_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad \text{где } -1 < \varepsilon_j < 0. \end{cases}$$

Авторы выражают искреннюю благодарность А.П. Солдатову за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
2. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
3. Михайлов Л.Г. Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Таджик НИИТИ, 1963.
4. Усманов З.Д. Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1993.
5. Раджабов Н.Р. Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992.
6. Расулов А.Б., Солдатов А.П. Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 637–650.
7. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
8. Солдатов А.П. Обобщенный интеграл типа Коши // Дифф. уравнения. 1991. Т. 27. № 2. С. 3–8.
9. Солдатов А.П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Функц. анализ, СМФН. 2017. Т. 63. № 1. С. 1–189.
10. Мещерякова Е.С., Солдатов А.П. Задача Римана–Гильберта в семействе весовых пространств Гёльдера // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 518–527.
11. Солдатов А.П. Об интеграле Помпею и некоторых его обобщениях // Вестник ЮУрГУ, ММП. 2021. Т. 14. № 1. С. 53–67.
12. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

13. Аверьянов Г.Н., Солдатов А.П. Задача линейного сопряжения для аналитических функций в семействе весовых пространств Гёльдера // Известия вузов. Математика. 2015. № 9. С. 56–61.

INTEGRAL REPRESENTATION OF SOLUTIONS AND RIEMANN–HILBERT TYPE PROBLEM FOR THE CAUCHY–RIEMANN EQUATION WITH STRONG SINGULARITY IN THE LOWER ORDER COEFFICIENT IN A DOMAIN WITH PIECEWISE SMOOTH BOUNDARY

A. B. Rasulov*, N. V. Yakivchik**

National Research University “Moscow Power Engineering Institute,” Moscow, 111250 Russia

**e-mail: rasulzoda55@gmail.com*

***e-mail: YakivchikNV@mpei.ru*

Received: 21.04.2024

Revised: 09.07.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The goal of this work is to construct the general solution of the Cauchy–Riemann equation with strong singularities in the lower order coefficient and to study the Riemann–Hilbert boundary value problem in a domain with a piecewise smooth boundary.

Keywords: Cauchy–Riemann equations, strong singularities in coefficient, Pompeiu–Vekua operator, piecewise smooth boundary, Riemann–Hilbert problem.

К ВОПРОСУ О СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ. ВТОРОЙ МЕТОД СТОКСА

© 2024 г. А. И. Руденко¹, *

¹236022 Калининград, Советский проспект, 1, ФГБОУ ВО «КГТУ», Россия

*e-mail: aleksej.rudenko75@bk.ru

Поступила в редакцию 15.05.2024 г.

Переработанный вариант 06.06.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Рассматривается классическая задача о стационарных волнах на поверхности идеальной несжимаемой однородной жидкости конечной глубины. Подход к решению задачи родственен второму методу Стокса, но имеет следующие отличия: благодаря полученному одномерному интегро-дифференциальному уравнению с кубической нелинейностью для профиля стационарной волны на поверхности жидкости конечной глубины исходная задача сведена к одномерной. Решение получено до седьмого приближения. Библ. 19. Фиг. 5.

Ключевые слова: оператор свертки, стационарная периодическая волна, потенциальное движение жидкости, профиль волны, след функции тока, второй метод Стокса.

DOI: 10.31857/S0044466924110096, EDN: KGKYKO

ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении волновых движений в жидкости принято выделять поверхностные гравитационные волны, природа которых обусловлена определяющей возвращающей силой и может быть описана структурой динамических уравнений и граничных условий, определяющих основную характеристику волны — дисперсионное соотношение. При решении задач возникают проблемы, связанные с нелинейностью граничных условий на свободной поверхности, которая представляет собой неизвестную функцию, требующую уточнения.

Визуальные наблюдения Джона Скотта Рассела за уединенной волной большой амплитуды повлияли на теоретические исследования Джорджа Габриеля Стокса, который предложил математическую постановку нелинейной краевой задачи о стационарной волне на поверхности идеальной жидкости, не имеющую точного аналитического решения. Стоксом было предложено два метода в решении поставленной задачи: суть первого метода заключалась в специальном варианте теории возмущений для случая жидкости бесконечной глубины; содержание второго метода состоит в том, что исходная нелинейная краевая задача отображается на полосу в плоскости комплексного переменного и тогда новая краевая задача остается нелинейной, но оказывается существенно проще исходной задачи, поскольку обе границы становятся прямолинейными [1–4].

Стационарные периодические волновые движения жидкости конечной глубины были определены на основе второго метода Стокса в работах Дэ и Сретенского [5, 6]. В монографии [5] для изучения нелинейной краевой задачи о строении и характеристиках стационарной нелинейной периодической волны использован лагранжев подход к описанию динамики жидкости, в [6] предложено усовершенствование второго метода путем сведения определения волн к решению бесконечной системы кубических уравнений.

В работе [7] найден ряд точных решений уравнений Эйлера со свободной поверхностью в присутствии сил гравитации, которые получены путем суммирования ряда Вайтинга; в статье [8] решение задачи ищется в виде ряда, первый член которого соответствует теории мелкой воды. Существенные результаты получены и в таких работах, как [9–18], но несмотря на это данная задача требует дополнительного рассмотрения.

Основной целью исследования является вывод и анализ приближенных выражений профиля волны и основных ее характеристик для случая жидкости конечной глубины. Для достижения цели пришлось видоизменить методику Стокса. Это сделано следующим образом. Введен след функции тока, с помощью которой исходная форма кинематического условия упрощена путем интегрирования. В свою очередь исходная форма динамического условия превращена в новую с помощью интеграла Бернулли–Коши, что позволило исключить

из рассмотрения гидродинамическое давление. Далее введен интегральный оператор типа свертки, благодаря которому существенно упрощена процедура решения нелинейной краевой задачи. Затем определены четыре функции одной переменной, основными из которых являются уровень волны (то есть форма свободной поверхности) и след функции тока на нулевом горизонте. Все выполненные действия позволили решение исходной двумерной задачи свести к решению трех систем одномерных уравнений. Получено решение этих систем и выполнен его анализ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О СТРОЕНИИ И ХАРАКТЕРИСТИКАХ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Предположим, что на свободной поверхности идеальной однородной несжимаемой жидкости конечной глубины h сформировалась система стационарных нелинейных волн, которая движется с некоторой постоянной скоростью. Рассматривается двумерный случай. Система отсчета движется вместе с системой волн, тогда движение можно приять за стационарное; ось x совместим с средним горизонтальным уровнем, ось y направим вертикально вверх. Горизонтальную и вертикальную компоненты скорости обозначим через $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Для профиля волны и среднего значения скорости течения введем следующую символику: $\eta = \eta(x)$, c .

Используя относительный потенциал скорости $u - iv = cw'(z)$, $z = x + iy$, $w = \varphi + i\psi$, где φ, ψ — относительные потенциал скорости и след функции тока, будем считать, что условие непротекания на дне имеет вид: $\psi = 0$ при $y = -h$. Значение следа функции тока на свободной поверхности, оно постоянно вдоль поверхности, обозначим величиной d . Пусть $d = Q/c$, Q — расход жидкости через каждую вертикаль. Отсюда вытекает, что кинематическое граничное условие на свободной поверхности имеет вид: $\psi = d$ при $y = \eta(x)$. Исходя из интеграла Бернулли—Коши, запишем динамическое условие: $2^{-1}(u^2 + v^2) + g\eta(x) = P$ при $y = \eta(x)$. Заметим, что P — постоянная величина.

В постановке задачи необходимо отдельно выделить, что в отсутствии волн $d = h$. Если принять во внимание волновые движения, то данное равенство нарушается, тогда величину d назовем динамической глубиной.

Следуя второму методу Стокса область течения с помощью относительного комплексного потенциала скорости конформно отображается на полосу (в случае жидкости конечной глубины) или полуплоскость (в случае жидкости бесконечной глубины); в случае жидкости конечной глубины образом этого отображения будет полоса $0 < \psi < d$.

Двумерная задача. Требуется определить вид непрерывной функции $\eta(\varphi)$ и вид гармонической функции $y = y(\varphi, \psi)$, которые удовлетворяют следующим граничным условиям (они являются следствием кинематического и динамического условий на свободной поверхности):

$$y(\varphi, 0) = -h, y(\varphi, d) = \eta(\varphi), \quad (1)$$

$$\left(\frac{2P}{c^2} - \frac{2g\eta(\varphi)}{c^2} \right) (y_\varphi^2(\varphi, d) + y_\psi^2(\varphi, d)) = 1, \quad (2)$$

а также условиям нулевого среднего: $\langle \eta(\varphi) \rangle = 0$, $\langle y(\varphi, \psi) \rangle - \psi = 0$.

Проведем предварительный этап в решении поставленной задачи, то есть рассмотрим случай линейных поверхностных волн. В качестве первого шага рассмотрим решение задачи в линейном приближении. Линеаризации потребует только динамическое условие (2) при условии, что $d = h$:

$$-\frac{2g\eta(\varphi)}{c_0^2} + \frac{2P}{c_0^2} (2y_\psi(\varphi, d) - 1) = 1, \quad (3)$$

c_0 — фазовая скорость линейных волн. Задача в линейном приближении сводится к решению уравнения Лапласа для функции $y(\varphi, \psi)$, которая удовлетворяет условиям (1), (3). Данное решение ищем в виде синусоидальной волны с симметричным профилем относительно точки $\varphi = 0$. Получаем

$$\eta(\varphi) = a \cos(k\varphi), \quad y(\varphi, \psi) = \psi - h + A \cos(k\varphi) \operatorname{sh}(k\psi), \quad (4)$$

k — волновое число, $a = A \operatorname{sh}(kh)$ — амплитуда основной гармоники. Решение (4) является основой выбора разложений характеристик нелинейных стационарных волн в виде частичных сумм рядов по степеням амплитуды основной гармоники.

В качестве второго подготовительного этапа рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью для профиля стационарной поверхностной волны $\eta(\varphi)$. Для этого выразим обе частные

производные $y_\varphi(\varphi, d)$ и $y_\psi(\varphi, d)$ в (2) через $\eta(\varphi)$. Первое выражение получим из (1):

$$y_\varphi(\varphi, d) = \eta'(\varphi). \quad (5)$$

Для определения $y_\psi(\varphi, d)$ введем соответствие $V : y(\varphi, 0) \rightarrow y_\psi(\varphi, 0)$, которое является интегродифференциальным оператором типа свертки [14]. При решении рассматриваемой задачи достаточно будет указать его действие на косинусы.

Далее построим гармоническую функцию $y(\varphi, \psi)$, удовлетворяющую двум граничным условиям: $y(\varphi, 0) = 0$, $y(\varphi, d) = \eta(\varphi) = a \cos(k\varphi)$. Такая функция будет иметь вид: $y(\varphi, \psi) = a \cos(k\varphi) \operatorname{sh}(k\psi) / \operatorname{sh}(kd)$. Откуда получаем, что $y_\psi(\varphi, 0) = V(a \cos(k\varphi)) = ak \operatorname{cth}(kd) \cos(k\varphi)$. Так, например, $V(\cos(k\varphi)) = k \operatorname{cth}(kd) \cos(k\varphi)$.

Учитывая тот факт, что $y(\varphi, \psi) = \psi^+$ — периодическая функция, то из свойств оператора V следует равенство $y_\psi(\varphi, 0) = 1 + V\eta(\varphi)$. После подстановки данного равенства и (5) в динамическое условие (2), получаем уравнение для профиля волны:

$$(2P - 2\eta(\varphi)) \left((1 + V\eta(\varphi))^2 + (\eta'(\varphi))^2 \right) = \frac{c^2}{g}. \quad (6)$$

К уравнению (6) присоединим уравнение, определяющее зависимость x от φ , которое получается из соотношения для сопряженных гармонических функций $x(\varphi, \psi)$ и $y(\varphi, \psi)$: $x_\varphi(\varphi, \psi) = y_\psi(\varphi, \psi)$, и имеет следующий вид:

$$x'(\varphi) = 1 + V\eta(\varphi). \quad (7)$$

В уравнениях (6) и (7) обозначения: c — скорость волны, P — константа интегрирования, g — ускорение свободного падения, φ — значение относительного потенциала скорости частиц жидкости на свободной поверхности, x — горизонтальная декартова координата.

Результатом проведения двух предварительных этапов является то, что двумерная задача о строении и характеристиках стационарных волн на поверхности идеальной несжимаемой однородной жидкости конечной глубины сведена к одномерной, в которой необходимо определить константы c , P и функцию $\eta(\varphi)$.

2. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Динамическое условие (6) для случая одномерной задачи можно переписать в следующем виде:

$$\left(2P - \frac{2g\eta(\varphi)}{c^2} \right) W(\varphi) = 1, \quad W(\varphi) = (1 + V\eta(\varphi))^2 + (\eta'(\varphi))^2. \quad (8)$$

Новая функция $W(\varphi)$ имеет следующий физический смысл: ее значение равно обратному квадрату скорости на поверхности жидкости. Решение системы (8) позволяет определить профиль стационарной волны и нелинейное дисперсионное соотношение. Новая математическая постановка одномерной задачи будет следующей.

Одномерная задача. Определить константы c , P и функции $\eta(\varphi)$, $W(\varphi)$, удовлетворяющие следующим уравнениям для профиля стационарной волны и ее характеристик:

$$(2P - 2\eta(\varphi)) W(\varphi) = \frac{c^2}{g}, \quad W(\varphi) = \left((1 + V\eta(\varphi))^2 + (\eta'(\varphi))^2 \right),$$

и условиям периодичности и нулевого среднего:

$$\eta(\varphi + L) = \eta(\varphi), \quad W(\varphi + L) = W(\varphi), \quad L = 2\pi/k, \quad \eta(\varphi) = 0.$$

Таким образом, решение двумерной краевой задачи сводится к решению системы двух дифференциально-алгебраических уравнений (8). Решение системы будем искать с точностью до седьмого приближения по степеням амплитуды основной гармоники.

Процедуру решения задачи начнем с того, что исходные представления для профиля волны $\eta(\varphi)$ и вспомогательной функции $W(\varphi)$ запишем в виде тригонометрических многочленов седьмой степени:

$$\eta(\varphi) = \eta_1 \cos(k\varphi) + \eta_2 \cos(2k\varphi) + \eta_3 \cos(3k\varphi) + \eta_4 \cos(4k\varphi) + \eta_5 \cos(5k\varphi) + \eta_6 \cos(6k\varphi) + \eta_7 \cos(7k\varphi),$$

$$W(\varphi) = W_0 + W_1 \cos(k\varphi) + W_2 \cos(2k\varphi) + W_3 \cos(3k\varphi) + W_4 \cos(4k\varphi) + W_5 \cos(5k\varphi) + W_6 \cos(6k\varphi) + W_7 \cos(7k\varphi).$$

Условия периодичности и нулевого среднего выполняются автоматически. Далее выполним подстановку тригонометрических многочленов в систему дифференциально-алгебраических уравнений (8), в результате получаем систему алгебраических уравнений для коэффициентов рядов:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{g} &= PW_0 - \sum_{j=1}^{+\infty} \eta_j W_j, \\ PW_n - \sum_{j=0}^{n-1} \eta_{n-j} W_j - \sum_{j=0}^{+\infty} (\eta_{n+j} W_j + \eta_{j+1} W_{j+n+1}) &= 0, \\ W_n &= \delta_{n0} + 2knR_n\eta_n + 2^{-1} (2 - \delta_{n0}) k^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j(j+n) (R_j R_{n+j} + 1) \eta_j \eta_{n+j} + \\ &+ 2^{-1} k^2 \sum_{j=1}^{n-1} j(n-j) (R_j R_{n-j} - 1) \eta_j \eta_{n-j}, \\ n &= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) расчетная формула для R_n имеет вид:

$$\begin{aligned} R_n &= \text{cth}(nkd) = ((R+1)^n + (R-1)^n) / ((R+1)^n - (R-1)^n), \quad n \in N, \\ R &= \text{cth}(kd). \end{aligned}$$

Решение (9), системы алгебраических уравнений для коэффициентов тригонометрических многочленов, будем искать в виде разложений по степеням (ka) с точностью до седьмого приближения.

Тогда частичные суммы для степенных рядов для констант c , P имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{g} &= (kR)^{-1} \left(c_0 + c_1(ka)^2 + c_2(ka)^4 + c_3(ka)^6 \right), \\ P &= (kR)^{-1} \left(P_0 + P_1(ka)^2 + P_2(ka)^4 + P_3(ka)^6 \right). \end{aligned}$$

Частичные суммы степенных рядов для коэффициентов рядов запишем в виде:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a = k^{-1} (ka), \\ \eta_2 &= k^{-1} \left(\eta_{20}(ka)^2 + \eta_{21}(ka)^4 + \eta_{22}(ka)^6 \right), \\ \eta_3 &= k^{-1} \left(\eta_{30}(ka)^3 + \eta_{31}(ka)^5 + \eta_{32}(ka)^7 \right), \\ \eta_4 &= k^{-1} \left(\eta_{40}(ka)^4 + \eta_{41}(ka)^6 \right), \\ \eta_5 &= k^{-1} \left(\eta_{50}(ka)^5 + \eta_{51}(ka)^7 \right), \\ \eta_6 &= k^{-1} \eta_{60}(ka)^6, \\ \eta_7 &= k^{-1} \eta_{70}(ka)^7, \\ W_0 &= W_{00} + W_{01}(ka)^2 + W_{02}(ka)^4 + W_{03}(ka)^6, \\ W_1 &= W_{10}(ka) + W_{11}(ka)^3 + W_{12}(ka)^5 + W_{13}(ka)^7, \\ W_2 &= W_{20}(ka)^2 + W_{21}(ka)^4 + W_{22}(ka)^6, \\ W_3 &= W_{30}(ka)^3 + W_{31}(ka)^5 + W_{32}(ka)^7, \\ W_4 &= W_{40}(ka)^4 + W_{41}(ka)^6, \\ W_5 &= W_{50}(ka)^5 + W_{51}(ka)^7, \\ W_6 &= W_{60}(ka)^6, \\ W_7 &= W_{70}(ka)^7. \end{aligned}$$

Часть степенного ряда для глубины жидкости h :

$$h = Fd, \quad F = F_0 + F_1(ka)^2 + F_2(ka)^4 + F_3(ka)^6. \quad (10)$$

В результате подстановки частичных сумм степенных рядов в систему уравнений для коэффициентов рядов (9) сначала получаем следующие значения коэффициентов степенных рядов:

$$c_0 = P_0 = \eta_{10} = W_{00} = 1, \quad W_{10} = 2R, \quad F_0 = 1. \quad (11)$$

Далее выпишем три системы уравнений для коэффициентов степенных рядов.

Система 1 уравнений для коэффициентов степенных рядов $c_1, P_1, \eta_{20}, W_{20}, W_{01}, W_{11}, F_1, R_2$:

$$-2R\eta_{20} + W_{20} = A_{20}, \quad -4R_2\eta_{20} + W_{20} = B_{20}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A_{20} &= R\eta_{10}W_{10}, \quad B_{20} = 2^{-1}(R^2 - 1)\eta_{10}^2, \quad W_{01} = 2^{-1}(R^2 + 1), \\ W_{11} &= 2(RR_2 + 1)\eta_{10}\eta_{20}, \quad c_1 = P_1W_{00} + W_{01} - R\eta_{10}W_{10}, \quad F_1 = (2kd)^{-1}R, \\ P_1 &= W_{01} - 2^{-1}R^{-1}W_{11} + 2^{-1}\eta_{20}W_{10} + 2^{-1}\eta_{10}W_{20}, \\ R_2 &= \left((R+1)^2 + (R-1)^2\right) / \left((R+1)^2 - (R-1)^2\right). \end{aligned}$$

Система 2 уравнений для коэффициентов степенных рядов $c_2, P_2, \eta_{30}, \eta_{21}, W_{30}, W_{21}, W_{02}, W_{12}, F_2, R_3$:

$$-2R\eta_{30} + W_{30} = A_{30}, \quad -6R_3\eta_{30} + W_{30} = B_{30}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A_{30} &= R\eta_{20}W_{10} + R\eta_{10}W_{20}, \quad B_{30} = 2(RR_2 - 1)\eta_{10}\eta_{20}, \\ -2R\eta_{21} + W_{21} &= A_{21}, \quad -4R_2\eta_{21} + W_{21} = B_{21}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{21} &= -P_1W_{20} + R\eta_{30}W_{10} + R\eta_{10}W_{30} + 2R\eta_{20}W_{01} + R\eta_{10}W_{11}, \quad B_{21} = 3(RR_3 + 1)\eta_{10}\eta_{30}, \\ W_{02} &= 2(R_2^2 + 1)\eta_{10}^2, \quad W_{12} = 2(RR_2 + 1)\eta_{10}\eta_{21} + 6(R_2R_3 + 1)\eta_{20}\eta_{30}, \\ F_2 &= (2kd)^{-1}R_2\eta_{20}^2, \quad G_3 = (3R_3 - R)^{-1}, \quad R_3 = \left((R+1)^3 + (R-1)^3\right) / \left((R+1)^3 - (R-1)^3\right), \\ c_2 &= P_2W_{00} + P_1W_{01} + W_{02} - R\eta_{20}W_{20} - R\eta_{10}W_{11}, \\ P_2 &= -2^{-1}R^{-1}P_1W_{11} + W_{02} - 2^{-1}R^{-1}W_{12} + 2^{-1}\eta_{21}W_{10} + 2^{-1}\eta_{30}W_{20} + 2^{-1}\eta_{20}W_{30} + 2^{-1}\eta_{20}W_{11} + 2^{-1}\eta_{10}W_{21}. \end{aligned}$$

Система 3 уравнений для коэффициентов степенных рядов $c_3, P_3, \eta_{40}, \eta_{31}, \eta_{22}, W_{40}, W_{31}, W_{22}, W_{03}, W_{13}, F_3, R_4$:

$$-2R\eta_{40} + W_{40} = A_{40}, \quad -8R_4\eta_{40} + W_{40} = B_{40}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} A_{40} &= R\eta_{30}W_{10} + R\eta_{20}W_{20} + R\eta_{10}W_{30}, \quad B_{40} = 2(R_2^2 - 1)\eta_{20}^2 + 3(RR_3 - 1)\eta_{10}\eta_{30}, \\ -2R\eta_{31} + W_{31} &= A_{31}, \quad -6R_3\eta_{31} + W_{31} = B_{31}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{31} &= -P_1W_{30} + R\eta_{40}W_{10} + R\eta_{21}W_{10} + R\eta_{10}W_{40} + 2R\eta_{30}W_{01} + R\eta_{20}W_{11} + R\eta_{10}W_{21}, \\ B_{31} &= 4(RR_4 + 1)\eta_{10}\eta_{40} + 2(RR_2 - 1)\eta_{10}\eta_{21}, \quad -2R\eta_{22} + W_{22} = A_{22}, \quad -4R_2\eta_{22} + W_{22} = B_{22}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{22} &= -P_1W_{21} - P_2W_{20} + R\eta_{31}W_{10} + R\eta_{40}W_{20} + R\eta_{20}W_{40} + 2R\eta_{21}W_{01} + \\ &+ R\eta_{30}W_{11} + R\eta_{10}W_{31} + R\eta_{20}W_{02} + R\eta_{10}W_{12}, \\ B_{22} &= 8(R_2R_4 + 1)\eta_{20}\eta_{40} + 3(RR_3 + 1)\eta_{10}\eta_{31}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{03} &= 4(R_2^2 + 1)\eta_{20}\eta_{21} + 2^{-1}3^2(R_3^2 + 1)\eta_{30}^2, \\
W_{13} &= 2(RR_2 + 1)\eta_{10}\eta_{22} + 6(R_2R_3 + 1)\eta_{21}\eta_{30} + 6(R_2R_3 + 1)\eta_{20}\eta_{31} + 3 \times 2^2(R_3R_4 + 1)\eta_{30}\eta_{40}, \\
c_3 &= P_3W_{00} + P_2W_{01} + P_1W_{02} + W_{03} - R\eta_{21}W_{20} - R\eta_{30}W_{30} - R\eta_{20}W_{21} - R\eta_{10}W_{12}, \\
P_3 &= -2^{-1}R^{-1}P_2W_{11} - 2^{-1}R^{-1}P_1W_{12} + W_{03} - 2^{-1}R^{-1}W_{13} + 2^{-1}\eta_{22}W_{10} + 2^{-1}\eta_{31}W_{20} + 2^{-1}\eta_{40}W_{30} + \\
&\quad + 2^{-1}\eta_{21}W_{30} + 2^{-1}\eta_{30}W_{40} + 2^{-1}\eta_{21}W_{11} + 2^{-1}\eta_{30}W_{21} + 2^{-1}\eta_{20}W_{31} + 2^{-1}\eta_{20}W_{12} + 2^{-1}\eta_{10}W_{22}, \\
F_3 &= (2kd)^{-1}R_2\eta_{20}\eta_{21} + 3(2kd)^{-1}R_3\eta_{30}^2, \\
R_4 &= \left((R+1)^4 + (R-1)^4\right) / \left((R+1)^4 - (R-1)^4\right).
\end{aligned}$$

В результате выполнения необходимых расчетов, решение систем (12)–(14), и в дополнении к значениям коэффициентов степенных рядов (11), получаем три сводки значений коэффициентов степенных рядов.

Сводка 1 значений коэффициентов степенных рядов c_1 , P_1 , η_{20} , W_{20} , W_{01} , W_{11} , F_1 и значений R_2 , G_2 , A_{20} , B_{20} :

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2^{-3}(9R^4 - 6R^2 + 5), \quad P_1 = 2^{-3}(3R^2 + 1)^2, \quad \eta_{20} = 2^{-2}R(3R^2 + 1), \\
W_{20} &= 2^{-1}R^2(3R^2 + 5), \quad W_{01} = 2^{-1}(R^2 + 1), \quad W_{11} = 2^{-2}R(R^2 + 3)(3R^2 + 1), \\
F_1 &= (2kd)^{-1}R, \quad R_2 = 2^{-1}R^{-1}(R^2 + 1), \quad G_2 = R, \quad A_{20} = 2R^2, \quad B_{20} = 2^{-1}(R^2 - 1).
\end{aligned}$$

Сводка 2 значений коэффициентов степенных рядов c_2 , P_2 , η_{30} , η_{21} , W_{30} , W_{21} , W_{02} , W_{12} , F_2 и значений R_3 , G_3 , A_{30} , B_{30} , A_{21} , B_{21} :

$$\begin{aligned}
c_2 &= 2^{-9}(3R^2 + 1)(27R^8 + 180R^6 + 306R^4 - 108R^2 + 43), \\
P_2 &= 2^{-9}(3R^2 + 1)(27R^8 + 324R^6 + 354R^4 + 4R^2 - 5), \\
\eta_{30} &= 2^{-6}(3R^2 + 1)(9R^4 + 14R^2 + 1), \\
\eta_{21} &= -2^{-7}R(27R^8 - 36R^6 - 70R^4 + 12R^2 + 3), \\
W_{30} &= 2^{-5}R(27R^6 + 147R^4 + 113R^2 + 1), \\
W_{21} &= -2^{-6}R^2(27R^8 - 36R^6 - 310R^4 - 340R^2 - 45), \\
W_{02} &= 2^{-5}(3R^2 + 1)^2(R^4 + 6R^2 + 1), \\
W_{12} &= 2^{-8}R(27R^{10} + 873R^8 + 2342R^6 + 1674R^4 + 207R^2 - 3), \\
F_2 &= 2^{-5}(2kd)^{-1}R(R^2 + 1)(3R^2 + 1)^2, \\
R_3 &= (3R^2 + 1)^{-1}R(R^2 + 3), \quad G_3 = 2^{-3}R^{-1}(R^2 + 1), \\
A_{30} &= 3R^3(R^2 + 1), \quad B_{30} = 2^{-2}R(R^2 - 1)(3R^2 + 1), \\
A_{21} &= 2^{-2}R^2(15R^4 + 22R^2 + 3), \\
B_{21} &= 3 \times 2^{-6}(R^4 + 6R^2 + 1)(9R^4 + 14R^2 + 1).
\end{aligned}$$

Сводка 3 значений коэффициентов степенных рядов c_3 , P_3 , η_{40} , η_{31} , η_{22} , W_{40} , W_{31} , W_{22} , W_{03} , W_{13} , F_3 и значений A_{40} , B_{40} , A_{31} , B_{31} , A_{22} , B_{22} , R_4 , G_4 :

$$\begin{aligned}
c_3 &= -2^{-15}(5R^2 + 1)^{-1}(10935R^{18} - 51273R^{16} - 693252R^{14} - 1627812R^{12} - 1123758R^{10} - 215054R^8 - \\
&\quad - 39348R^6 - 12180R^4 - 337R^2 + 143), \\
P_3 &= -2^{-15}(5R^2 + 1)^{-1}(3R^2 + 1)(3645R^{16} - 6966R^{14} - 319914R^{12} - 657390R^{10} - 378224R^8 - \\
&\quad - 15394R^6 + 6154R^4 + 70R^2 - 45), \\
\eta_{40} &= 2^{-7}(5R^2 + 1)^{-1}R(R^2 + 1)(135R^8 + 522R^6 + 328R^4 + 38R^2 + 1), \\
\eta_{31} &= -2^{-12}(5R^2 + 1)^{-1}(3R^2 + 1)(1215R^{12} + 648R^{10} - 6633R^8 - 5688R^6 + 477R^4 + 240R^2 + 13), \\
\eta_{22} &= 2^{-13}(5R^2 + 1)^{-1}R(3645R^{16} - 11826R^{14} + 14778R^{12} + 75030R^{10} + 45460R^8 - 6838R^6 - \\
&\quad - 1706R^4 + 210R^2 + 31), \\
W_{40} &= 2^{-6}R^2(5R^2 + 1)^{-1}(135R^{10} + 1557R^8 + 3730R^6 + 2406R^4 + 359R^2 + 5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{31} &= -2^{-11}(5R^2 + 1)^{-1}R(3645R^{14} + 12879R^{12} - 48627R^{10} - 180057R^8 - 138593R^6 - 26731R^4 - \\
 &\quad - 1385R^2 - 11), \\
 W_{22} &= 2^{-12}(5R^2 + 1)^{-1}R^2(3645R^{16} - 8586R^{14} + 41346R^{12} + 359166R^{10} + 646620R^8 + 407170R^6 + \\
 &\quad + 69230R^4 + 1290R^2 - 265), \\
 W_{03} &= -2^{-13}(567R^{14} - 6723R^{12} - 57297R^{10} - 89347R^8 - 41811R^6 - 4321R^4 + 237R^2 + 39), \\
 W_{13} &= 2^{-14}(5R^2 + 1)^{-1}R(3645R^{18} + 3969R^{16} - 980172R^{14} - 3964332R^{12} - 5210810R^{10} - 2614834R^8 - \\
 &\quad - 385244R^6 + 4644R^4 + 3109R^2 + 57), \\
 F_3 &= -2^{-13}(kd)^{-1}R(3R^2 + 1)(189R^{10} - 1629R^8 - 4606R^6 - 2938R^4 - 15R^2 + 39), \\
 R_4 &= 2^{-2}(R^2 + 1)^{-1}R^{-1}(R^4 + 6R^2 + 1), \\
 G_4 &= (5R^2 + 1)^{-1}R(R^2 + 1), \\
 A_{40} &= 2^{-4}R^2(45R^6 + 135R^4 + 75R^2 + 1), \\
 B_{40} &= 2^{-6}(R^2 - 1)(45R^6 + 63R^4 + 35R^2 + 1), \\
 A_{31} &= -2^{-8}(5R^2 + 1)^{-1}R(1215R^{12} - 3672R^{10} - 19545R^8 - 16792R^6 - 3491R^4 - 208R^2 - 3), \\
 B_{31} &= 2^{-4}(5R^2 + 1)^{-1}R(270R^{10} + 807R^8 + 694R^6 + 248R^4 + 28R^2 + 1), \\
 A_{22} &= 2^{-9}(5R^2 + 1)^{-1}R^2(405R^{14} + 3321R^{12} + 35517R^{10} + 75145R^8 + 51751R^6 + 8867R^4 + 135R^2 - 37), \\
 B_{22} &= -2^{-12}(5R^2 + 1)^{-1}(405R^{16} - 38394R^{14} - 269358R^{12} - 526130R^{10} - 368548R^8 - 77774R^6 - \\
 &\quad - 2786R^4 + 506R^2 + 31).
 \end{aligned}$$

Исходя из сводок 1–3 значений коэффициентов степенных рядов получим, например, нелинейное дисперсионное соотношение для стационарных поверхностных волн с точностью до седьмого порядка включительно.

$$\begin{aligned}
 \frac{c^2}{g} &= k^{-1}th(kd) \left(1 + 2^{-3}(9R^4 - 6R^2 + 5)(ka)^2 + 2^{-9}(3R^2 + 1)(27R^8 + 180R^6 + 306R^4 - \right. \\
 &\quad - 108R^2 + 43)(ka)^4 - 2^{-15}(5R^2 + 1)^{-1}(10935R^{18} - 51273R^{16} - 693252R^{14} - 1627812R^{12} - 1123758R^{10} - \\
 &\quad \left. - 215054R^8 - 39348R^6 - 12180R^4 - 337R^2 + 143)(ka)^6 \right).
 \end{aligned}$$

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И НЕЛИНЕЙНОГО ДИСПЕРСИОННОГО СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

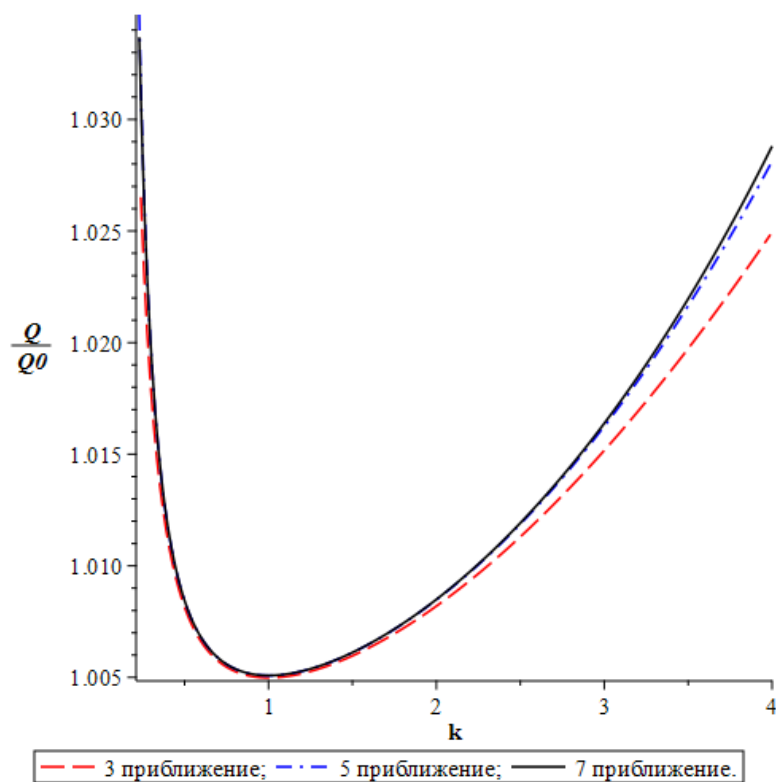
Анализ полученных результатов начнем с сравнения потока жидкости Q , переносимого через каждую вертикаль стационарными нелинейными волнами с потоком, который переносится линейными волнами Q_0 , для чего воспользуемся расчетной формулой (10):

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{cd}{c_0h} = \frac{c}{c_0}F.$$

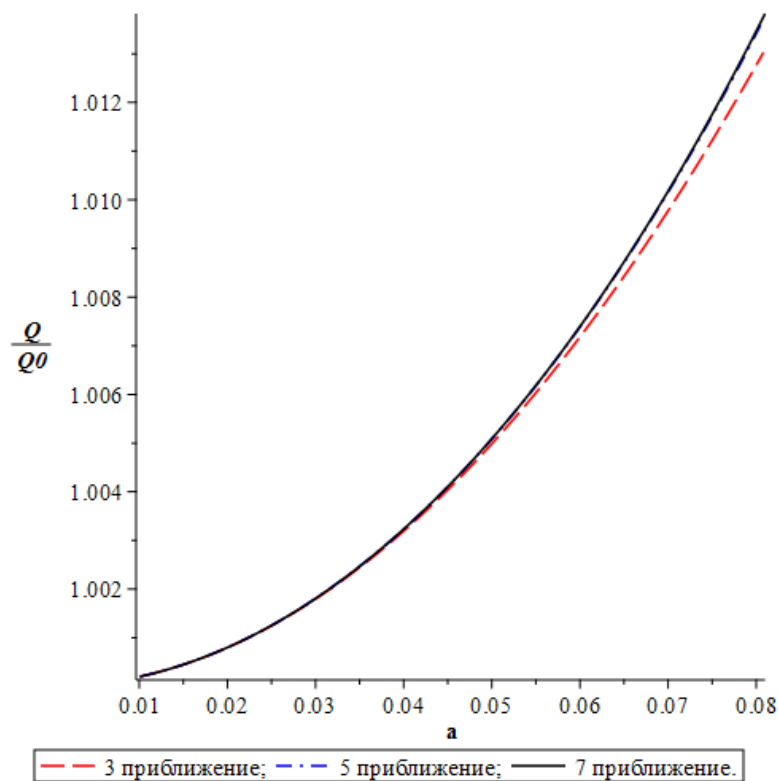
На фиг. 1 представлены графики зависимости относительного потока от волнового числа, построенные по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений, выполненных в пункте 2. Графики показывают, что поток жидкости существенно возрастает как в коротковолновом, так и в длинноволновом диапазонах, а в области промежуточных длин волн его возрастание незначительно.

На фиг. 2 представлены графики зависимости относительного потока от амплитуды основной гармоники в профиле нелинейной волны, построенный по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений. Они показывают естественный результат: с ростом амплитуды волны поток растет. По этим графикам можно судить о точности выбранных приближений.

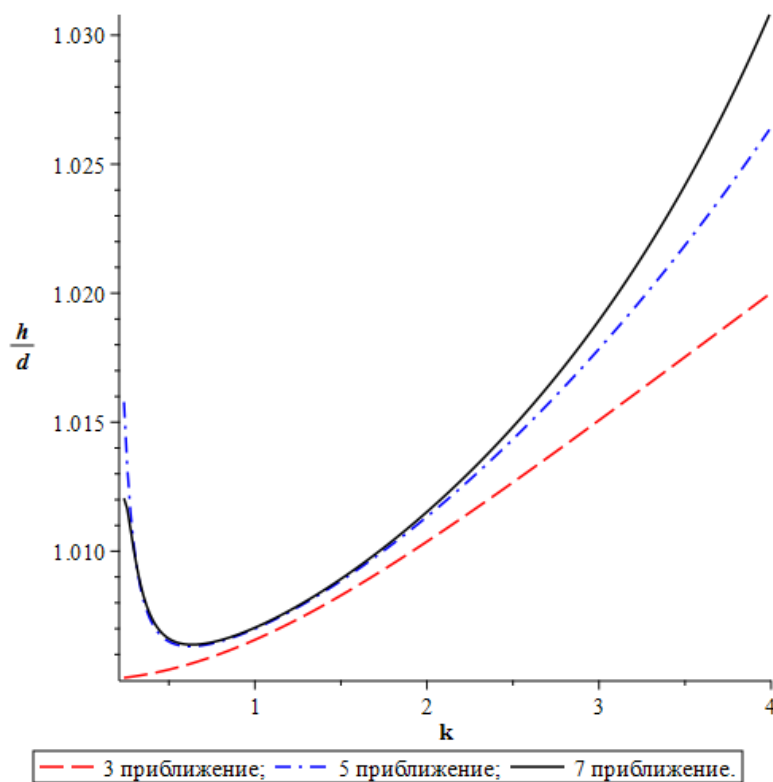
На фиг. 3 показан график отношения глубины жидкости к динамической глубине в зависимости от волнового числа (расчеты третьего, пятого и седьмого приближений); здесь нижняя кривая соответствует третьему приближению, средняя и верхняя — соответственно пятому и седьмому приближениям. Из графика видно, что динамическая глубина меньше глубины жидкости.



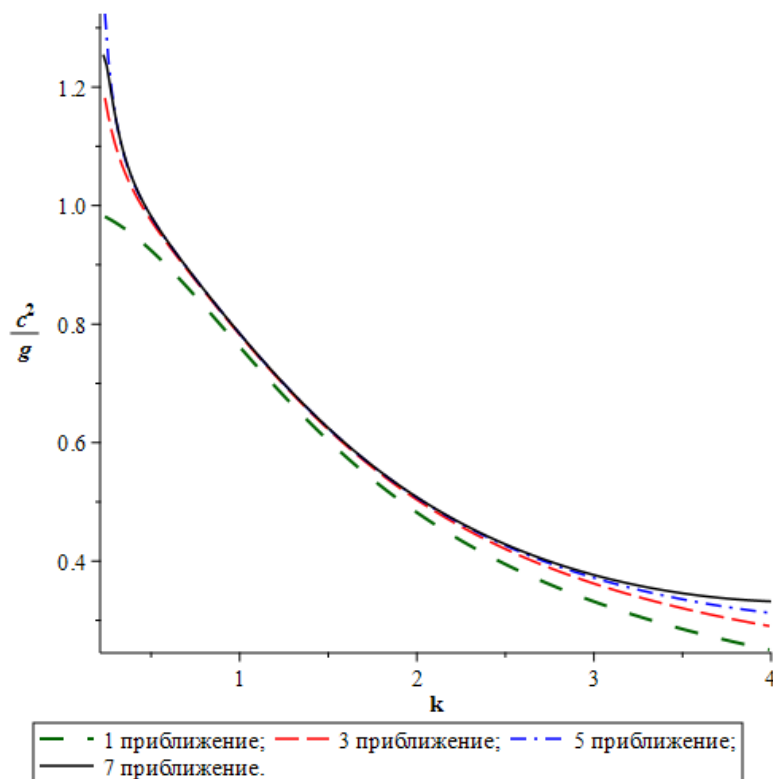
Фиг. 1. Графики зависимости относительного потока от волнового числа, построенный по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений ($d = 1$, $a = 0.5$).



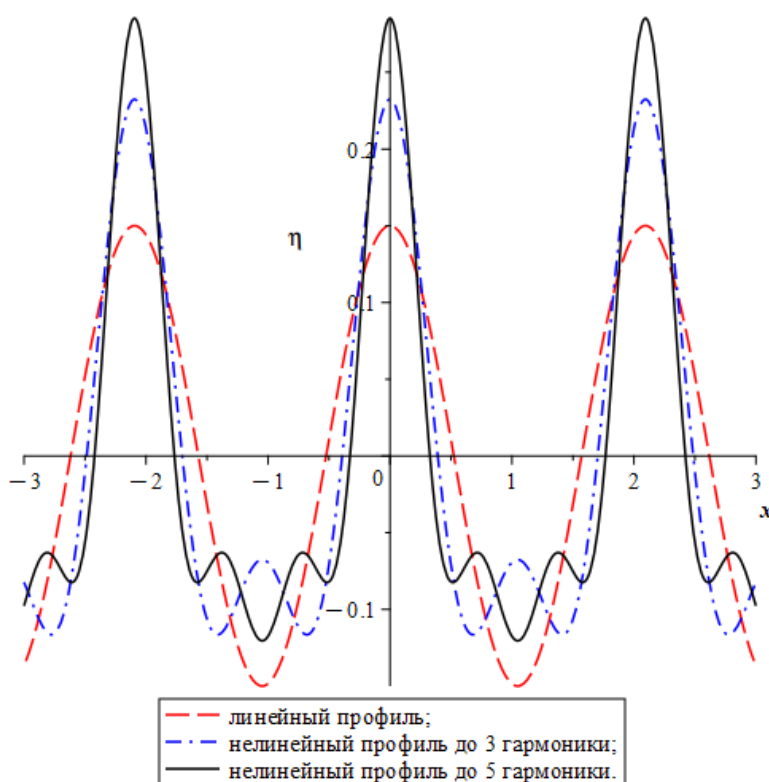
Фиг. 2. Графики зависимости относительного потока от амплитуды основной гармоники в профиле нелинейной волны, построенный по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений ($d = 1$, $k = 1$).



Фиг. 3. График отношения глубины жидкости к динамической глубине в зависимости от волнового числа, построенный по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений ($d = 1$, $a = 0.1$).



Фиг. 4. Графики линейного и нелинейного дисперсионных соотношений (по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений), ($d = 1$, $a = 0.1$).



Фиг. 5. Профили линейных и нелинейных волн, рассчитанных с промежуточной точностью до третьей и пятой гармоник ($d = 1$, $a = 0.15$, $k = 3$).

На фиг. 4 изображены графики линейного и нелинейного дисперсионного соотношений (расчеты третьего, пятого и седьмого приближений). Они показывают, что скорость нелинейных волн больше скорости линейных и в длинноволновом и коротковолновом диапазонах она возрастает. Достигнута достаточная степень точности.

На фиг. 5 изображены профили нелинейных волн; профиль нелинейной волны рассчитан с точностью до пятой гармоники. Из фиг. 5 видно, что с ростом амплитуды гребень волны заостряется, т.е. волна близка к волне предельной амплитуды.

Заметим, что когда волна приближается к предельной форме, которая характеризуется угловой точкой на вершине, то к ней будут стремиться гребни промежуточных волн. В натурных условиях данное явление можно наблюдать в случае набегания из открытого бассейна волн на монотонно возрастающую линию дна.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено приближенное решение задачи о строении и характеристиках стационарной слабонелинейной периодической волны на поверхности жидкости конечной глубины. Проанализированы выражения уровня волны и зависимости относительного потока от амплитуды основной гармоники в профиле нелинейной волны, а также нелинейное дисперсионное соотношение и динамическая глубина жидкости. Изучены случаи короткой и длинной волн.

Отличительным моментом при решении задачи является то, что двумерная задача была сформулирована через след функции тока, а не через потенциал скоростей, как в [2], а затем сведена к одномерной путем введения вспомогательных функций. Было введено понятие динамической глубины, как необходимой компоненты при решении, с целью дальнейшего сопоставления с реальной глубиной жидкости. Отмечено, что динамическая глубина меньше глубины жидкости во всем диапазоне длин волн.

Поскольку задача является классической, то она, естественно, рассматривалась во многих работах, например, в [19] значительная часть отведена преобразованиям нелинейных граничных условий, а процедура решения практически полностью отсутствует, что затрудняет дальнейший анализ. В работе [5] исследования проведены с точностью до пятого порядка включительно, что не вносит ясности применительно к скорости нелинейных волн как в длинноволновом, так и коротковолновом диапазонах. Однако, необходимо отметить, что численные результаты, приведенные в работе [5], согласуются с результатами, изложенными в данной статье.

В работе построены профили нелинейных волн, рассчитанных с точностью до третьей и пятой гармоник и показано, что волна приближается к волне предельной амплитуды, обозначенной Стоксом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scott Russel J.* Report on waves // Reports of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. London: John Murray. 1845. P. 311–390.
2. *Stokes, G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Cambr. Trans.* V. 8, 1847. P. 441–473.
3. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Mathematical and Physical Papers* 1. Cambridge. 1880. P. 197–229.
4. *Stokes G.G.* Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves // *Mathematical and Physical Papers* 1. Cambridge. 1880. P. 314–326.
5. *De S.C.* Contributions to the theory of stokes waves. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 51. 1955. P. 713–736.
6. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1984.
7. *Карabut Е.А.* О суммировании ряда Вайтинга в задаче об уединенной волне // *ПМТФ*. Т. 40. № 1. 1999. С. 44–54.
8. *Карabut Е.А.* Высшие приближения теории кноидальных волн // *ПМТФ*. Т. 41. № 1. 2000. С. 92–104.
9. *Бабенко К.И.* Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды // *Докл. АН СССР*. 1987. Т. 294. № 5. С. 1033–1037.
10. *Karabut E.A.* An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 372. P. 45–70.
11. *Fenton, J.D.* A high-order conidial wave theory // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 94. P. 129–161.
12. *Овсянников Л.В.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
13. *Захаров В. Е.* Интегрирование уравнений глубокой жидкости со свободной поверхностью // *ТМФ*. 2020. Т. 202. № 3. С. 327–338.
14. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков. С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука. 1980. 319 с.
15. *Красовский Ю.П.* Теория установившихся волн конечной амплитуды // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1961. Т. 1. С. 836–855.
16. *Тер-Крикоров А.М.* Существование периодических волн, вырождающихся в уединенную // *Прикладн. матем. и механ.* 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 622–636.
17. *McLean, J.W.* Instabilities of finite-amplitude gravity waves on water of finite depth // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 114. P. 331–341.
18. *Scott A.C., Chu F.Y.F., McLaughlin D.W.* // *Proc. IEEE*. 1973. V. 61. P. 1993.
19. *Сунь Цао.* Поведение поверхностных волн на линейно изменяющемся течении // *Исследования по механике*. М.: Оборонгиз. 1959. № 3. С. 66–84.

ON THE QUESTION OF STATIONARY WAVES ON THE SURFACE OF AN IDEAL LIQUID OF FINITE DEPTH. THE SECOND STOKES METHOD

A. I. Rudenko*

236022 Kaliningrad, Sovetsky Prospekt, 1, KSTU Federal State Budgetary Educational Institution, Russia

**e-mail: aleksej.rudenko75@bk.ru*

Received: 15.05.2024

Revised: 06.06.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The classical problem of stationary waves on the surface of an ideal incompressible homogeneous liquid of finite depth is considered. The approach to solving the problem is related to the second Stokes method, but has the following differences: due to the obtained one-dimensional integrodifferential equation with cubic nonlinearity for the profile of a stationary wave on the surface of a liquid of finite depth, the original problem is reduced to a one-dimensional one. The solution is obtained up to the seventh approximation.

Keywords: convolution operator, stationary periodic wave, potential fluid motion, wave profile, trace of current function, second Stokes method.

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ПУАССОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА¹⁾

© 2024 г. А. О. Савченко^{1,*}¹ 630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 6, ИВМ и МГ, Россия

*e-mail: savch@ommfao1.ssc.ru

Поступила в редакцию 16.05.2024 г.

Переработанный вариант 26.06.2024 г.

Принята к публикации 06.07.2024 г.

Получены аналоги формулы Пуассона решения внутренних и внешних краевых задач с граничными условиями Дирихле или Неймана на сфере для уравнения Гельмгольца, в которых ядра интегралов представлены в виде рядов. Библ. 5.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, сферические гармоники, краевые задачи для сферы, формула Лапласа.

DOI: 10.31857/S0044466924110106, EDN: KGKHKQ

ВВЕДЕНИЕ

Решение краевых задач Гельмгольца для сферы известно в виде разложения по сферическим гармоникам, для нахождения которых необходимо определить коэффициенты разложения функции граничного условия по сферическим функциям (см. [1], [2]).

В данной работе получены другие формулы решения внутренних и внешних краевых задач Дирихле и Неймана уравнения Гельмгольца для сферы. Эти формулы являются аналогом формулы Пуассона для уравнения Лапласа, в которых ядро интеграла представлено в виде ряда.

Полученные формулы значительно проще по виду и по применению при численном решении вышеуказанных задач. В отличие от известных формул, при численной реализации для получения приближенного решения не требуется вычисления коэффициентов Фурье от граничной функции, и достаточно вычислить интеграл только один раз, что значительно экономит вычислительные ресурсы при численном решении краевых задач для уравнения Гельмгольца.

1. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца внутри сферической области S , ограниченной сферой ∂S радиуса R :

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0, \quad \mathbf{r} \in S, \\ u(R, \theta, \varphi) &= f(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

и вне сферической области $\bar{S} = S \cup \partial S$:

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}, \\ u(R, \theta, \varphi) &= f(\theta, \varphi), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$. Здесь и далее предполагается, что функция f непрерывна и ее квадрат интегрируем по сфере ∂S , а коэффициент k является вещественным числом. Решение этих задач в сферических координатах следующий имеет вид (см. [1], [2]):

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r) Y_n(\theta, \varphi), \quad (3)$$

¹⁾ Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН FWNM- 2022-0001.

где

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^n f_{nm} Y_n^m(\theta, \varphi),$$

$Y_n(\theta, \varphi)$ — сферические гармоники, f_{nm} — коэффициенты Фурье функции $f(\theta, \varphi)$,

$$f_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^m\|^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta_0, \varphi_0) Y_n^m(\theta_0, \varphi_0) \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0,$$

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = \begin{cases} P_n(\cos \theta), & m = 0, \\ P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi, & m > 0, \\ P_n^{|m|}(\cos \theta) \cos m\varphi, & m < 0, \end{cases}$$

$$\|Y_n^m\|^2 = \frac{2\pi(1 + \delta_{0m})(n + |m|)!}{2n + 1 (n - |m|)!}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

$P_n(x)$ — многочлен Лежандра n -ой степени, $P_n^m(x)$ — присоединенная функция Лежандра.

При решении внутренней краевой задачи (1) функция $\Phi_n(r)$ в формуле (3) равна

$$\Phi_n(r) = \Phi_n^{D \text{ int}}(r) = \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{J_{n+1/2}(kR)}, \quad (4)$$

где $J_\nu(x)$ — функции Бесселя.

При решении внешней краевой задачи (2) функция $\Phi_n(r)$ в (3) равна

$$\Phi_n(r) = \Phi_n^{D \text{ ext}}(r) = \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(kr)}{H_{n+1/2}^{(1)}(kR)}, \quad (5)$$

где $H_{n+1/2}^{(1)}(x)$ — функции Ганкеля первого рода.

Получим другие, более простые формулы решения краевых задач Дирихле для уравнения Гельмгольца, являющиеся аналогами формулы Пуассона для уравнения Лапласа.

Из (3) следует, что

$$u(R, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(R) Y_n(\theta, \varphi).$$

Но, как следует из формул (4) и (5), $\Phi_n(R) = 1$ для любых значений индекса n как для внутренней (1) так и для внешней (2) краевой задачи. Поэтому

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi), \quad (6)$$

т.е. функция $f(\theta, \varphi)$ разлагается в ряд Фурье по сферическим гармоникам $Y_n(\theta, \varphi)$. Тогда для гармоник в разложении (6) справедлива формула Лапласа [2, 3]

$$Y_n(\theta, \varphi) = \frac{(2n+1)}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta_0, \varphi_0) P_n(\cos \gamma) \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0, \quad (7)$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (8)$$

где γ — угол между векторами $\vec{OM}$ и $\vec{OM}_0$, а точка O расположена в центре шара, $M = (r, \theta, \varphi)$, $M_0 = (R, \theta_0, \varphi_0)$.

Подставив формулу для гармоник (7) в формулу (3), получим

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta_0, \varphi_0) \Phi(M, M_0) \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0, \quad (9)$$

где

$$\Phi(M, M_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \Phi_n(r) P_n(\cos \gamma).$$

При решении внутренней краевой задачи (1) функция $\Phi_n(r)$ определена формулой (4), и

$$\Phi(M, M_0) = \Phi^{D \text{ int}}(M, M_0) = \sqrt{\frac{R}{r}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \gamma) \frac{J_{n+1/2}(kr)}{J_{n+1/2}(kR)}. \quad (10)$$

При решении внешней краевой задачи (2) функция $\Phi_n(r)$ определена формулой (5), и

$$\Phi(M, M_0) = \Phi^{D \text{ ext}}(M, M_0) = \sqrt{\frac{R}{r}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \gamma) \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(kr)}{H_{n+1/2}^{(1)}(kR)}. \quad (11)$$

Значения произведения k^2 , при которых знаменатель дроби в формуле (10) обращается в нуль, равны собственным значениям внутренней задачи Дирихле для сферы радиуса R с нулевым граничным условием. Действительно, собственными значениями являются $\lambda_{m,n}^D = \left(\frac{v_m^{(n)}}{R}\right)^2$, где $v_m^{(n)}$ – корни уравнения $J_{n+1/2}(x) = 0$ [1].

Поэтому коэффициент k должен удовлетворять неравенству $kR \neq v_m^{(n)}$, или $J_{n+1/2}(kR) \neq 0$.

Отметим, что при $x \rightarrow 0$ функция $J_\nu(x) \rightarrow 0$ как $\frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu$ при $\nu > 0$ [4]. По этой причине $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{J_{n+1/2}(kR)} = \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1/2}$. Тогда при $k = 0$ функция $\Phi_n^{D \text{ int}}(r)$ из (4) принимает вид $\Phi_n^{D \text{ int}}(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^n$ и формула (9) совпадает с решением внутренней задачи Дирихле на сфере для уравнения Лапласа при $R = 1$, приведенным в [3].

2. ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Гельмгольца внутри сферической области S , ограниченной сферой ∂S радиуса R :

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0, \quad \mathbf{r} \in S, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} &= f(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (12)$$

и вне сферической области $\bar{S} = S \cup \partial S$:

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{S}, \\ \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} &= f(\theta, \varphi), \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - i k u \right) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Будем искать решение этих задач в виде разложения по сферическим гармоникам (3). Выберем сферические гармоники $Y_n(\theta, \varphi)$ для решения задач (12) и (13) в виде (7), и перейдем к определению функций $\Phi_n(r)$.

Рассмотрим внутреннюю краевую задачу (12). Подставив выражение для искомой функции (3) в уравнение Гельмгольца и произведя разделение переменных, получим, с условием ограниченности решения при $r = 0$, что $\Phi_n(r) = A_n \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\sqrt{r}}$ [1]. Для нахождения коэффициентов A_n воспользуемся формулой [4]

$$\Psi'_\nu(x) = \Psi_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} \Psi_\nu(x), \quad (14)$$

где $\Psi_\nu(x)$ – любая из функций $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$. Тогда

$$\Phi'_n(r) = A_n \frac{1}{\sqrt{r}} \left(k J_{n-1/2}(kr) - \frac{n+1}{r} J_{n+1/2}(kr) \right).$$

Выберем коэффициенты A_n так, чтобы выполнялось граничное условие в уравнениях (12). Для этого определим их из условия

$$\Phi'_n(R) = 1, \quad (15)$$

откуда следует, что

$$A_n = \frac{\sqrt{R}}{\left(k J_{n-1/2}(kR) - \frac{n+1}{R} J_{n+1/2}(kR) \right)}.$$

Тогда

$$\Phi_n(r) = \Phi_n^{N \text{ int}}(r) = \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\left(k J_{n-1/2}(kR) - \frac{n+1}{R} J_{n+1/2}(kR)\right)}. \quad (16)$$

Решение задачи (12) имеет вид

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta_0, \varphi_0) \left[\sum_{n=0}^\infty (2n+1) \Phi_n^{N \text{ int}}(r) P_n(\cos \gamma) \right] \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0, \quad (17)$$

поскольку оно удовлетворяет граничному условию $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = f(\theta, \varphi)$ ввиду формул (3), (6) и $\Phi_n^{N \text{ int}}(R) = 1$.

Значения произведения k^2 , при которых знаменатель дроби в формуле (16) обращается в нуль, равны собственным значениям внутренней задачи Неймана для сферы радиуса R с нулевым граничным условием. Действительно, собственными значениями являются $\lambda_{m,n}^N = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}\right)^2$, где $\mu_m^{(n)}$ – корни уравнения [5]

$$2xJ'_{n+1/2}(x) - J_{n+1/2}(x) = 0. \quad (18)$$

Запишем уравнение (18), согласно формуле (14), в виде $xJ_{n-1/2}(x) - (n+1)J_{n+1/2}(x) = 0$. Если какой-либо корень этого уравнения равен kR , то для него справедливо $kR J_{n-1/2}(kR) - (n+1)J_{n+1/2}(kR) = 0$, и для таких значений произведения kR знаменатель дроби в (16) равен нулю. Поэтому коэффициент k должен удовлетворять неравенству $kR \neq \mu_m^{(n)}$ или

$$kJ_{n-1/2}(kR) - \frac{n+1}{R} J_{n+1/2}(kR) \neq 0.$$

Перейдем к решению внешней краевой задачи Неймана (13). Подставив выражение для искомой функции (3) в уравнение Гельмгольца и произведя разделение переменных, получим, с учетом последнего условия в

уравнениях (13), что $\Phi_n(r) = B_n \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(kr)}{\sqrt{r}}$ [1]. Из (14) следует, что

$$\Phi'_n(r) = B_n \frac{1}{\sqrt{r}} \left(k H_{n-1/2}^{(1)}(kr) - \frac{n+1}{r} H_{n+1/2}^{(1)}(kr) \right).$$

Так же, как и при нахождении решения внутренней краевой задачи, определим неизвестные коэффициенты B_n из условия $\Phi'_n(R) = 1$. Тогда

$$\Phi_n(r) = \Phi_n^{N \text{ ext}}(r) = \sqrt{\frac{R}{r}} \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(kr)}{\left(k H_{n-1/2}^{(1)}(kR) - \frac{n+1}{R} H_{n+1/2}^{(1)}(kR)\right)}.$$

Решение задачи (13) имеет вид

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta_0, \varphi_0) \left[\sum_{n=0}^\infty (2n+1) \Phi_n^{N \text{ ext}}(r) P_n(\cos \gamma) \right] \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0,$$

поскольку оно удовлетворяет граничному условию $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=R} = f(\theta, \varphi)$ ввиду формул (3), (6) и $\Phi_n^{N \text{ ext}}(R) = 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье получены аналоги формулы Пуассона для решения внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана на сфере для уравнения Гельмгольца. Обобщим полученные результаты. Для этого вынесем общий множитель у всех уравнений за знак интеграла и, в соответствие с этим, введем новые обозначения для функций $\Phi_n^{D \text{ int}}$, $\Phi_n^{D \text{ ext}}$, $\Phi_n^{N \text{ int}}$, $\Phi_n^{N \text{ ext}}$.

Решение краевых задач для сферы радиуса R для уравнения Гельмгольца имеет вид

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{R}{r}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta_0, \varphi_0) \Phi(M, M_0) \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi_0,$$

где

$$\Phi(M, M_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \Phi_n(r) P_n(\cos \gamma),$$

а $\cos \gamma$ определен в формуле (8).

При решении внутренней краевой задачи Дирихле (1) функции $\Phi_n(r)$ имеют вид

$$\Phi_n(r) = \Phi_n^{D \text{ int}}(r) = \frac{J_{n+1/2}(kr)}{J_{n+1/2}(kR)}.$$

При решении внешней краевой задачи Дирихле (2) функции $\Phi_n(r)$ имеют вид

$$\Phi_n(r) = \Phi_n^{D \text{ ext}}(r) = \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(kr)}{H_{n+1/2}^{(1)}(kR)}.$$

При решении внутренней краевой задачи Неймана (12) функции $\Phi_n(r)$ имеют вид

$$\Phi_n(r) = \Phi_n^{N \text{ int}}(r) = \frac{J_{n+1/2}(kr)}{\left(k J_{n-1/2}(kR) - \frac{n+1}{R} J_{n+1/2}(kR)\right)}.$$

При решении внешней краевой задачи Неймана (13) функции $\Phi_n(r)$ имеют вид

$$\Phi_n(r) = \Phi_n^{N \text{ ext}}(r) = \frac{H_{n+1/2}^{(1)}(kr)}{\left(k H_{n-1/2}^{(1)}(kR) - \frac{n+1}{R} H_{n+1/2}^{(1)}(kR)\right)}.$$

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2004.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
4. Oliver F.W., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W. NIST Handbook of mathematical functions. Cambridge Univer. Press, New York, 2010.
5. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г. и др. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964.

AN ANALOGUE OF THE POISSON FORMULA FOR SOLVING THE HELMHOLTZ EQUATION

A. O. Savchenko*

630090 Novosibirsk, 6, Akademika Lavrentieva Ave., ICM-MG, SB RAS, Russia

*e-mail: savch@ommfao1.ssc.ru

Received: 16.05.2024

Revised: 26.06.2024

Accepted: 06.07.2024

Abstract. Analogs of the Poisson formula for solving internal and external boundary value problems with Dirichlet or Neumann boundary conditions on a sphere for the Helmholtz equation are obtained, in which the kernels of integrals are represented as series.

Keywords: Helmholtz equation, spherical harmonics, boundary value problems for a sphere, Laplace formula.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СВЕРХЗВУКОВЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В УПРУГОМ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОМ МИКРОПОЛЯРНОМ МАТЕРИАЛЕ

© 2024 г. И. Б. Бахолдин^{1,*}¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, Россия

*e-mail: ibbakh@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.03.2024 г.

Переработанный вариант 18.03.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Исследуется устойчивость уединенных волн, являющихся решениями одного из вариантов уравнения Буссинеска. Уравнение описывает упругие волны при наличии электромагнитного поля. Применен метод функции Эванса и непосредственный численный расчет уравнения для выявления неустойчивости уединенных волн. Результаты, полученные обоими методами, совпали. Разработана методика выявления неустойчивости и методика расчета растущей со временем собственной функции посредством анализа численных решений уравнения в частных производных. Библ. 11. Фиг. 4.

Ключевые слова: уравнение Буссинеска, уединенная волна, устойчивость, метод функции Эванса, численные методы, упругость, электродинамика.

DOI: 10.31857/S0044466924110115, EDN: KGJYBU

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[3] приведено уравнение, описывающее упругие волны в электропроводной микрополярной среде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{I c_\phi^2 c_T^2}{4 \alpha c_0^4} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{I}{4 \alpha} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - \frac{I (c_\phi^2 + c_T^2)}{4 \alpha c_0^2} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{c_\tau^2}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $v(x, t)$ — перемещения, $c_0, c_\phi, c_\tau, I, \alpha$ — некоторые положительные константы, связанные со свойствами материала. Была использована трансформация физических переменных: $x \rightarrow c_0 x, v \rightarrow c_0 v$. Более удобная для исследования форма этого уравнения представляет собой один из вариантов уравнений типа Буссинеска:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{I c_\phi^2 c_T^2}{4 \alpha c_0^4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{I}{4 \alpha} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \frac{I (c_\phi^2 + c_T^2)}{4 \alpha c_0^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{c_\tau^2}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 = 0, \quad u = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.2)$$

Уравнение имеет решения в виде уединенных волн:

$$u(\xi) = \Phi_V = -\frac{3m_1}{2m_2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{-m_1}}{2} \xi \right), \quad \xi = x - Vt, \quad (1.3)$$

$$m_1 = \frac{4\alpha(V^2 - 1)}{IQ(V)}, \quad m_2 = \frac{4\alpha c_\tau^2}{I c_0^2 Q(V)}, \quad Q(V) = \left(V^2 - \frac{c_\phi^2}{c_0^2} \right) \left(V^2 - \frac{c_T^2}{c_0^2} \right).$$

Решения существуют при $m_1 < 1$. Устойчивость этих уединенных волн при $V > 1$ (сверхзвуковой случай) аналитически исследовалась методом функции Эванса в [3]. Общие теоретические основы метода Эванса изложены в работах [4]–[6]. Пример исследования устойчивости уединенных волн с помощью функции Эванса с применением численных методов для ее расчета в случае классического интегрируемого уравнения Буссинеска описан в [7].

Ранее был разработан численный метод для решения уравнений в частных производных, основанный на аппроксимации пространственных производных центральными разностями, временных производных — методом Рунге—Кутты [8]. Было показано, что метод устойчив в расчетах для широкого класса уравнений. Ниже производится численное исследование устойчивости уединенных волн методом функции Эванса и делается сравнение с непосредственным расчетом уравнения. Результаты, полученные обоими способами совпадают.

Анализ устойчивости уединенной волны помимо важности оценки возможности физического наблюдения такой волны актуален и для теории теории бездиссипативных разрывов [9]. В недиссипативных системах уравнений с дисперсией, в частности для уравнения (1.2), встречаются решения, названные солитонными структурами разрывов. Это расширяющиеся со временем волновые зоны, в которых первая волна со временем стремится к уединенной. Очевидно, в случае неустойчивости уединенной волны неустойчивыми становятся и солитонные структуры.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ЭВАНСА

Теоретические основы и обоснование применения метода функции Эванса к уединенным волнам уравнения (1.2) при $V > 1$ подробно изложены в [3]. Ограничимся здесь приведением формул, необходимых для дальнейшего численного исследования. Уравнение (1.2) можно линеаризовать относительно решений (1.3) подстановкой $u = \Phi_V + w$, w — малая величина, и использовать для исследования линейной устойчивости метод функции Эванса:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{I c_\Phi^2 c_T^2}{4\alpha c_0^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{I}{4\alpha} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} - \frac{I(c_\Phi^2 + c_T^2)}{4\alpha c_0^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{2c_\tau^2}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi_V w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.1)$$

Методом Эванса выявляется существование растущих со временем собственных функций $Y(\xi)$, $w = Y \exp \lambda t$, $\text{Re} \lambda > 0$, $Y \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Такая собственная функция существует тогда и только тогда, когда есть ноль функции Эванса $D(\lambda)$ в правой комплексной полуплоскости. Ограничимся здесь рассмотрением случая $W > 1$, сверхзвуковой случай согласно [3]. Функция Эванса строится следующим образом. Рассматриваются система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая собственную функцию, и сопряженная система

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' &= \mathbf{M}\mathbf{y}, \quad \mathbf{z}' = -\mathbf{z}\mathbf{M}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b + b_1 \Phi'_V & c + b_1 \Phi_V & d \end{pmatrix}, \\ a &= -\frac{c_0^4(4\alpha + I\lambda^2)\lambda^2}{r}, \quad b = \frac{4c_0^4\lambda V(2\alpha + \lambda^2 I)}{r}, \quad b_1 = \frac{8\alpha c_\tau^2 c_0^2}{r}, \\ c &= \frac{c_0^2(-4\alpha c_0^2(-1 + V^2) + I\lambda^2(c_\Phi^2 + c_T^2 - 6c_0^2 V^2))}{r}, \\ d &= -\frac{2Ic_0^2\lambda V(c_\Phi^2 + c_T^2 - 2c_0^2 V^2)}{r}, \quad r = I(c_\Phi^2 - c_0^2 V^2)(c_T^2 - c_0^2 V^2). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Штрихом обозначено дифференцирование по ξ . Рассматривается матрица

$$\mathbf{M}_\infty = \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathbf{M}.$$

Ищется собственное значение μ матрицы $\mathbf{M}_\infty$ такое, что $\text{Re} \mu < 0$, ищутся правый и левый собственные векторы матрицы $\mathbf{M}_\infty$

$$\mathbf{r}_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu^2 \\ \mu^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_1 = s \left(1, \frac{b}{a} + \frac{1}{\mu}, \frac{c}{a} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{b}{a\mu}, \frac{\mu}{a} \right), \quad s = \frac{a}{3a + 2b\mu + c\mu^2 + \mu^4}. \quad (2.3)$$

Ищутся некоторые вспомогательные решения уравнений (2.2), обладающие свойствами

$$e^{-\mu\xi} \mathbf{y}_0(\xi, \lambda) \rightarrow \mathbf{r}_1(\lambda), \quad \xi \rightarrow +\infty,$$

$$e^{\mu\xi} \mathbf{z}_0(\xi, \lambda) \rightarrow \mathbf{I}_1(\lambda), \quad \xi \rightarrow -\infty.$$

Функция Эванса на правой комплексной полуплоскости ($\text{Re} \lambda \geq 0$) определяется так:

$$D(\lambda) = \mathbf{z}_0(\xi, \lambda) \mathbf{y}_0(\xi, \lambda).$$

Результат умножения не зависит от ξ , поэтому значение ξ можно выбрать произвольным. Согласно формул (2.3), полученных аналитически, $\mathbf{I}_1 \mathbf{r}_1 = 1$. В случае иного выбора векторов функцию Эванса целесообразно поделить на $\mathbf{I}_1 \mathbf{r}_1$, чтобы $D \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Нули функции Эванса в области $\text{Re } \lambda > 0$ соответствуют неустойчивым собственным функциям с показателем роста $\text{Re } \lambda$.

В работе [3] расчет собственной функции не был осуществлен, но аналитически был найден полином, определяющий знак $D_{\lambda\lambda}(0)$:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{V}) = & -336\mathcal{V}^5 + \\ & + 8(29 + 73s_1 + 73s_2)\mathcal{V}^4 - 16(1 + 15s_1^2 + s_2(23 + 15s_2) + s_1(23 + 63s_2))\mathcal{V}^3 + \\ & + 24(s_1(1 + 5s_1) + s_2 + s_1(24 + 17s_1)s_2 + (5 + 17s_1)s_2^2)\mathcal{V}^2 - \\ & - 16s_1s_2(3 + 11s_2 + s_1(11 + 10s_2))\mathcal{V} + 8s_1s_2(s_1 + s_2 + 5s_1s_2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$s_1 = c_\phi^2/c_0^2, \quad s_2 = c_T^2/c_0^2, \quad \mathcal{V} = V^2.$$

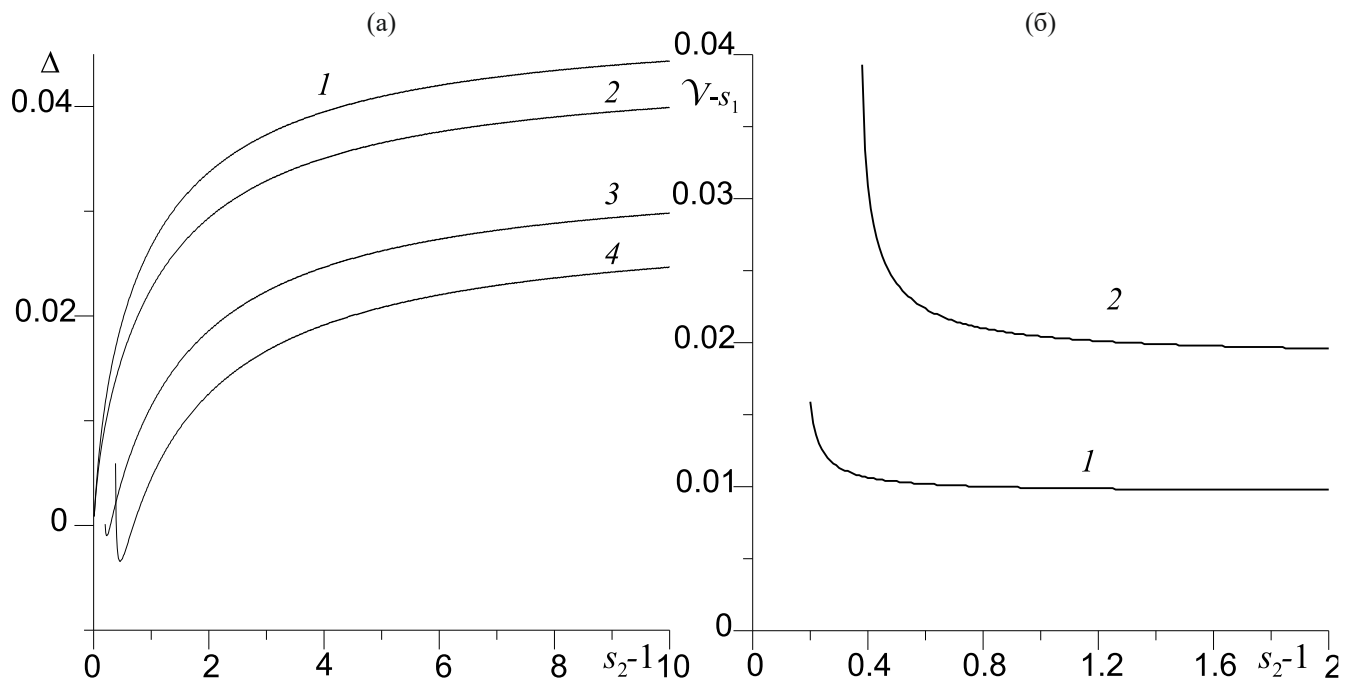
Утверждалось, что, поскольку $D(0) = 0$, при $P(\mathcal{V}) < 0$ имеется неустойчивая собственная функция. В виде таблиц были приведены границы интервалов отрицательных значений P для некоторых s_1 и s_2 . Ниже приводятся результаты исследований, полученных непосредственным вычислением функции Эванса, показавшие, что наоборот в этом случае уединенная волна устойчива, исследование текста работы [3] показало, что при выводе (2.4) был перепутан знак.

Сформулируем постановку задачи на получение функции Эванса в виде удобном для численных расчетов. Вначале находим значение μ . В данном случае это можно сделать, решив аналитически полиномиальное уравнение четвертого порядка. Однако была использована стандартная подпрограмма для поиска собственных значений и собственных векторов матриц произвольной размерности. Это позволяет использовать разработанную программу для более сложных случаев. В частности был сделан вариант программы для случая $V < 1$, где требуется использовать матрицу 6×6 . Получены результаты, аналогичные представленным в [7]. Нужное значение μ выбирается из списка найденных собственных значений как значение с минимальной действительной частью. Для нахождения левого собственного вектора с помощью стандартных средств матрицу $\mathbf{M}_\infty$ нужно предварительно транспонировать. Численный эксперимент показал, что более точные результаты получаются, если сначала найти μ , а затем найти собственные векторы посредством решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Далее находим вспомогательные функции и функцию Эванса так:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}'_0 &= (\mathbf{M} - \mu \mathbf{E}) \tilde{\mathbf{y}}_0, \quad 0 < \xi < \zeta, \quad \tilde{\mathbf{y}}_0(\zeta) = \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{y}_0 = e^{\mu \xi} \tilde{\mathbf{y}}_0, \\ \tilde{\mathbf{z}}'_0 &= -(\mathbf{M}^T - \mu \mathbf{E}) \tilde{\mathbf{z}}_0, \quad 0 > \xi > -\zeta, \quad \tilde{\mathbf{y}}_0(\zeta) = \mathbf{I}_1^T, \quad \mathbf{z}_0 = e^{-\mu \xi} \tilde{\mathbf{z}}_0^T, \\ D(\lambda) &= (\tilde{\mathbf{y}}_0(0), \tilde{\mathbf{z}}_0(0)) / (\tilde{\mathbf{r}}_1, \tilde{\mathbf{I}}_1^T). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичная матрица, $(*, *)$ — скалярное произведение векторов с комплексными компонентами, ζ — достаточно большая величина такая, что $\Phi_V(\zeta)$ близко к нулю. Обыкновенные дифференциальные уравнения решались методом Рунге—Кутты второго порядка. Проверяться сходимость результатов при изменении пространственного шага и величины ζ . Расчеты велись с двойной точностью. Есть вариант программы с учетверенной точностью, но он не показал существенных отличий при вычислении функции Эванса применительно к уединенным волнам умеренной амплитуды. Однако для очень растянутых уединенных волн при V близком к единице учетверенная точность может быть полезна, поскольку для расчета Φ_V требуется расчет экспонент с большим показателем.

Было исследовано полиномиальное уравнение $P(\mathcal{V}) = 0$. С математической точки зрения при перемене местами s_1 и s_2 значения корней не меняются, как не меняются и решения уравнения (1.2) и эти величины могут принимать произвольные значения при $m_1 < 0$. Однако следует учитывать, что согласно исходной физической модели $s_2 \geq 1$ (см. [2]); $s_2 = 1$ — формально физически допустимое значение для исходной системы уравнений, но вывести из них при этом уравнение (1.2) невозможно. Поэтому рассматриваются случаи $s_2 > \mathcal{V} > 1 > s_1$ и $s_2 > \mathcal{V} > s_1 > 1$ (или $s_1 > \mathcal{V} > s_2 > 1$). В первом случае есть уединенные волны малой амплитуды при $V \rightarrow 1$, они устойчивы, при увеличении квадрата скорости до некоторого значения $\mathcal{V}_2$ (и соответственно увеличения амплитуды) они становятся неустойчивыми. Неустойчивость сохраняется вплоть до $\mathcal{V} = s_2$. Численные исследования показывают, что точка перехода к неустойчивости хорошо описывается формулой $\mathcal{V} = 1 + 2(s_2 - 1)/3$. Можно проверить, что это асимптотическая формула при больших значениях s_2 и $\mathcal{V}$. Но она хорошо описывает корень полинома и при умеренных значениях, как видно из фиг. 1а, кривые 1, 2 соответствуют $s_1 = 0, 81, 0.9$. Показана величина $\Delta = 2(s_2 - 1)/3 - (\mathcal{V}_2 - 1)$. Графики $\mathcal{V}_2(s_2)$ представляют собой практически прямые линии, сливаются при разных значениях s_1 и поэтому не наглядны. Во втором случае уединенных волн сколь угодно



Фиг. 1.

малой амплитуды нет, а на обоих границах области допустимых значений $\mathcal{V}$ длина уединенной волны стремится к нулю, т.е. волны не описываются слабонелинейно-длинноволновым приближением, использованным при выводе уравнения (1.2). Возле этих границ волны неустойчивы, а на среднем интервале $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V} < \mathcal{V}_2$ волны устойчивы. Корень $\mathcal{V}_2$ здесь тоже неплохо описывается формулой $\mathcal{V} = 1 + 2(s_2 - 1)/3$, см. фиг. 1а, кривые 3, 4 соответствуют $s_1 = 1.1, 1.2$. Было обнаружено, что $\mathcal{V}_1$ стремится при $s_2 \rightarrow \infty$ к некоторой константе, зависящей от s_1 , см. фиг. 1б, кривые 1, 2 соответствуют $s_2 = 1.1, 1.2$.

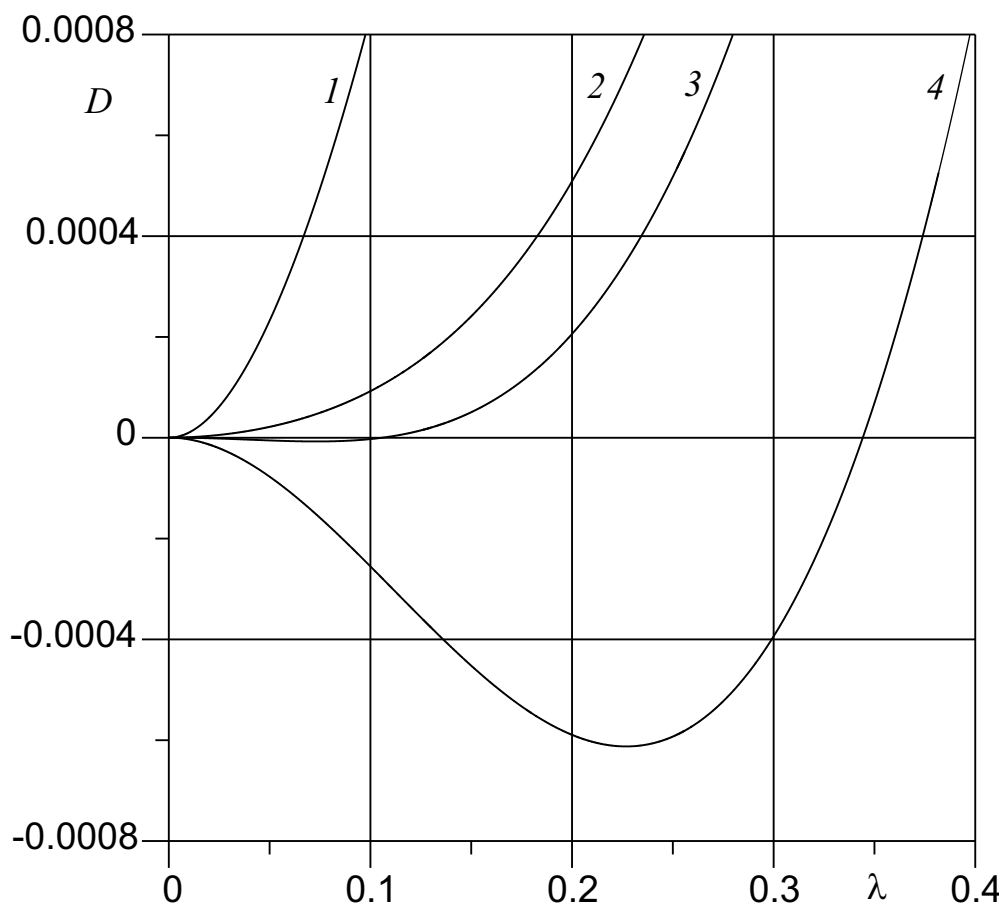
Наличие указанных выше точек переходов между устойчивыми и неустойчивыми волнами с хорошей точностью подтверждается непосредственным расчетом функции Эванса, см. фиг. 2, кривым 1, 2, 3, 4 соответствует $V = 1.35, 1.41, 1.42, 1.45$; показана функция Эванса на действительной оси. Наличие нуля на действительной оси свидетельствует о существовании при $V > 1.41$ растущей собственной функции. Здесь и для фигур разд. 3 набор констант следующий: $I = 1, c_\phi = 1.6, c_T = 0.9, \alpha = 1, c_\tau = 1, c_0 = 1$ ($s_1 = 0.81, s_2 = 2.56$). Функция Эванса — аналитическая функция в правой комплексной полуплоскости, стремящаяся к 1 при $\lambda \rightarrow \infty$. Применение принципа аргумента для подсчета числа нулей в правой комплексной полуплоскости [4] с исследованием функции Эванса на мнимой оси показывает, что других растущих собственных функций здесь нет.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ РАСЧЕТОМ УРАВНЕНИЯ

Преобразуем уравнение (1.2) к виду

$$\begin{aligned}\dot{u} &= u_1, \\ \dot{u}_1 &= u_2, \\ \dot{u}_2 &= u_3, \\ \dot{u}_3 &= -(u_2 - u_{xx} + Au_{xxxx} + Cu_{2xx} + D(u^2)_{xx})/B.\end{aligned}$$

Здесь A, B, C, D — коэффициенты при четырех последних членах уравнения (1.2). В соответствии с методикой, разработанной в [8] для широкого класса уравнений, временные производные аппроксимируются методом Рунге—Кутты четвертого порядка, а пространственные — методом центральных разностей второго порядка. Это позволяет получить корректную и малую схемную вязкость (пятого порядка по пространственным и временным шагам), и использовать в качестве условия устойчивости естественное условие Куранта для шагов по времени и пространству, $\tau < ch$, выявленное экспериментально. Как и в ранее исследованных моделях волн, трубы с упругими стенками, наполненные жидкостью или газом [8], [10], электромагнитная гидродинамика плазмы [11], скорость распространения волн здесь конечная, что и приводит к классическому условию

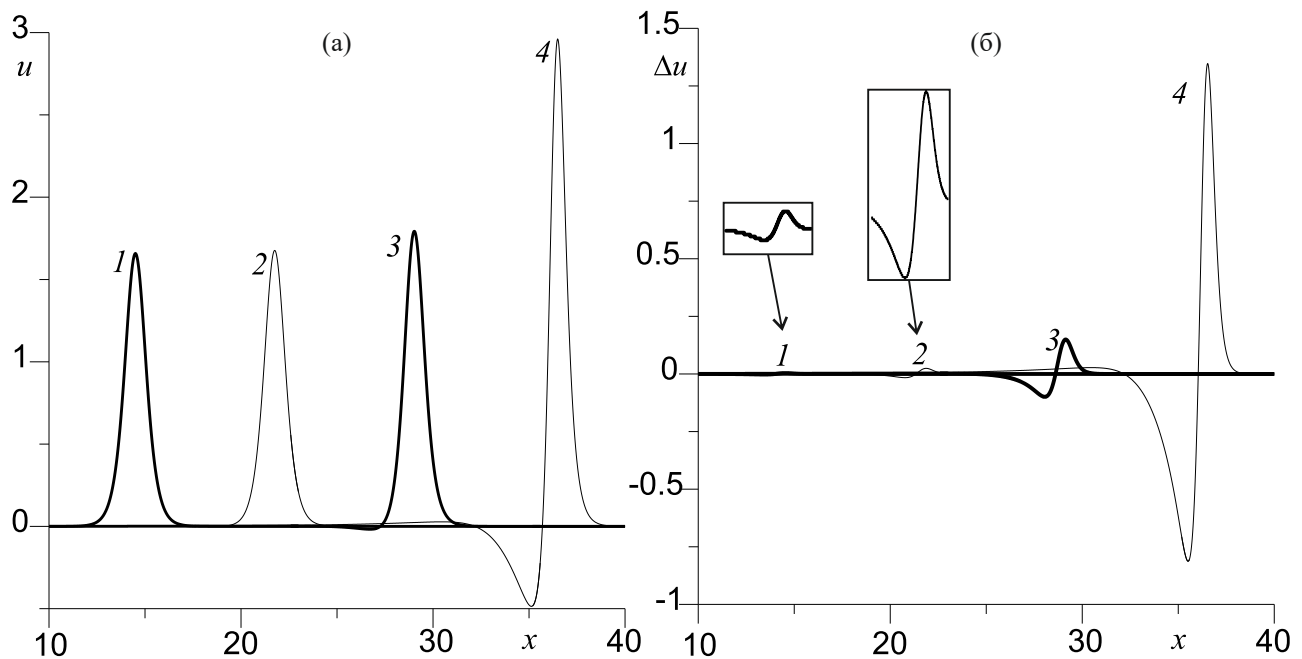


Фиг. 2.

Куранта. Напомним, что согласно [8] применение методов Рунге–Кутты 1–3 порядков тоже возможно, но при методах 1–2 порядков схемная вязкость некорректная, что приводит к неестественному условию устойчивости и невозможности продолжать длительные расчеты, особенно это чувствительно при методе первого порядка. При методе третьего порядка схемная вязкость корректна, но она имеет третий порядок по пространственным и временным шагам, в случае уравнений без диссипации лучше применять метод четвертого порядка для максимального исключения диссипативных искажений решений.

Ставились начальные данные $u = \Phi_V$, $u_1 = \dot{\Phi}_V$, $u_2 = \ddot{\Phi}_V$. На границах ставились условия нулевых значений u в трех краевых узлах численной схемы, математически это означает, что $u = u_x = u_{xx} = 0$ на границе. Расчет велся на достаточно протяженном пространственном отрезке, так что видимых взаимодействий волн с границами не было. На фиг. 3а показана эволюция решения со временем, кривым 1, 2, 3, 4 соответствует $t = 10, 15, 20, 25$, $V = 1.45$, а на фиг. 3б — эволюция разности расчетного и аналитического решений, $\Delta u = u - \Phi_V$. Фрагменты графиков при $t = 10, 15$, увеличенные по вертикали в 20 раз на фиг. 3б показаны в рамках. Видно, что развивается неустойчивость. Расчет завершается аварийной остановкой из-за вычислительного блоуапа, возможно связанного с нелинейным опрокидыванием волны. В случае конечной скорости распространения волн в обратимых системах с дисперсией могут образовываться как дисперсионные структуры разрывов, так и возникать опрокидывание волн, то есть может быть отсутствие классического решения [8], [11]. Таким образом, погрешность вычислений в неустойчивом случае со временем провоцирует формирование растущей собственной функции и никаких дополнительных действий по дестабилизации уединенной волны не требуется. Это дает метод выявления неустойчивости, независимый от исследования функции Эванса.

Ранее вычисление собственной функции способом исследования разности численного и теоретического решения проводилось для неустойчивой стоячей уединенной волны для уравнений волн в трубах с упругими стенками и контролируемым давлением [10]. Проводилось это как для полного варианта уравнений, так и для упрощенного варианта, представляющего собой классическое уравнение Буссинеска. Было показано, что для более точного расчета собственной функции можно использовать линеаризованное уравнение с начальными данными, получаемыми как разность между численным и теоретическим решением нелинейного уравнения на некотором начальном этапе. Поскольку уравнение линейное, то нелинейные эффекты не оказывают влияния

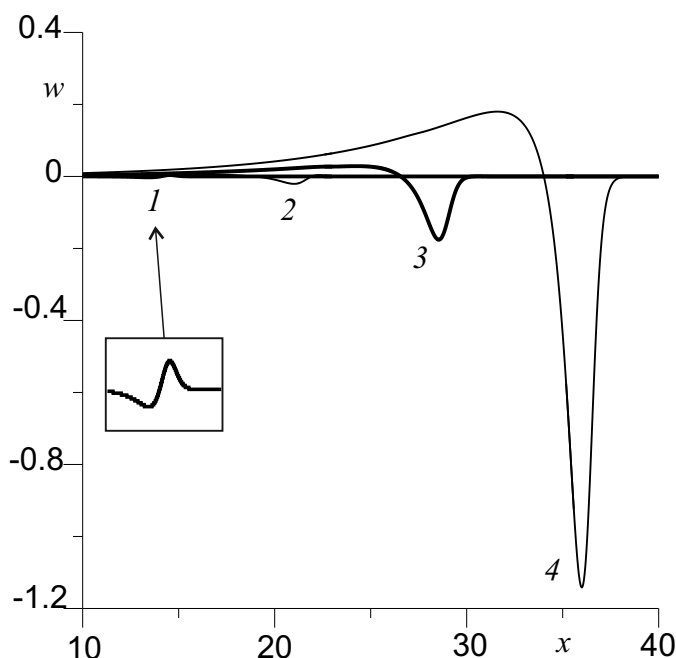


Фиг. 3.

на результаты и опрокидывание волны не происходит, расчет можно вести вплоть до достижения максимально допустимых для используемого языка программирования значений амплитуды. Это было осуществлено и в данном случае. На фиг. 4 показаны результаты решения уравнения (2.1) при $t = 10, 15, 20, 25$, $V = 1.45$, кривые 1, 2, 3, 4. Начальные данные при $t = 10$ брались в виде разности решения уравнения (1.2) и теоретического решения (1.3). Фрагмент графика начальных данных, увеличенный по вертикали в 20 раз показан в рамке. Рассчитанное по по изменению амплитуды значение λ совпало с тем, которое можно определить, рассматривая точку пересечения кривой 4 с прямой $D = 0$ на фиг. 2. В отличие от рассматриваемого здесь случая собственная функция в [10] была симметричной и качественных отличий в виде графиков разности и линейного решения не было. Здесь же качественные отличия значительные, это связано с тем, что решения несимметричны и скорость гребня рассчитываемой волны по прошествии времени заметно отличается от скорости волны в теоретическом решении (1.3).

Отметим, что и в устойчивом согласно анализу функции Эванса случае на графике Δu можно видеть некоторое подобие собственной функции, хотя ее амплитуда на несколько порядков меньше амплитуды уединенной волны, а рост максимальной амплитуды со временем близок к линейному. Это связано в основном с небольшим несовпадением скорости сеточной уединенной волны с теоретическим решением (1.3), поскольку наблюдаемый график Δu качественно сходен с графиком Φ'_V . А в случае расчета уравнения (2.1) на графике w можно видеть переход между двумя однородными состояниями, между которыми расположена локализованная волна, растущая со временем, т.е. некое подобие неустойчивой структуры разрыва. При приближении V к V_2 в обоих случаях возникают временные колебания максимальной амплитуды в решении, а в случае расчета уравнения (2.1) однородное состояние за структурой разрыва становится периодическим. Величины Δu и w при уменьшении пространственного шага в два раза уменьшаются в четыре раза, что указывает на то, что это связано с вычислительной погрешностью второго порядка, как и следовало ожидать от такой схемы. В неустойчивом согласно анализу функции Эванса случае это наблюдается только на начальном этапе, затем из-за экспоненциального роста собственной функции наблюдать это уже невозможно. Эти свойства решений позволяют отличить неустойчивую уединенную волну от устойчивой, не используя метод функции Эванса.

Отметим, что ранее [9] нередко при исследовании волн, движущихся со скоростью, близкой к постоянной, использовался расчет в системе координат наблюдателя, движущейся с этой скоростью. В данном случае решено было от этого воздержаться. При таком переходе в уравнении появятся дополнительные члены и уменьшится константа в условии устойчивости, поскольку тогда скорость волн, движущихся влево, увеличится примерно в два раза. А повышение точности расчета по времени здесь не является актуальной задачей, поскольку для временных производных используется аппроксимация высокого порядка.



Фиг. 4.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что при некотором выборе физических констант имеются устойчивые уединенные волны малой амплитуды, при увеличении амплитуды и скорости они становятся неустойчивыми. При некотором другом выборе констант волн малой амплитуды нет, но есть участок скоростей, при которых уединенные волны устойчивы. Исследования устойчивости уединенных волн методом анализа второй производной функции Эванса, методом расчета функции Эванса и методом непосредственного расчета уравнения (1.2) показали хорошее совпадение результатов. Это позволило разработать метод выявления неустойчивости и методику расчета растущей собственной функции посредством анализа численных решений уравнений в частных производных.

Отметим, что хотя формально в слабонелинейно-длинноволновом приближении интерес представляют только длинные уединенные волны малой амплитуды, исследование уединенных волн конечной амплитуды и конечной длины представляет здесь не только математический интерес. Уравнение (1.1) получено в [1], [2] из аналогичного скалярного “полного” уравнения отбрасыванием семи дополнительных нелинейно-дифференциальных членов, линейная часть и первый нелинейный член в полном уравнении такие же как и в (1.1). Можно предполагать, что в случае малости этих дополнительных членов уединенные волны конечной амплитуды будут только несколько модифицированы. При включении части дополнительных членов исследование модифицированного уравнения (1.2) методом расчета функции Эванса требует только изменений в виде численного расчета уединенных волн как решений уравнений бегущих волн, но при непосредственном расчете такого уравнения в частных производных принципиальной разницы нет. Но есть и два дополнительных члена, требующие исследования уравнения в перемещениях, т.е. модифицированного уравнения (1.1). Выбор уравнения (1.2) и $W > 1$ для исследования связан с необходимостью отработки численных методов на материале, где есть некоторый аналитический задел.

Устойчивость уединенных волн видимо имеет отношение к явлению “градиентная катастрофа”, наблюдаемому при расчете уравнений, в которых возможны обобщенные решения с разрывами. За счет недиссипативных дисперсионных схемных эффектов могут возникать колебания, амплитуда которых растет со временем, что приводит к аварийной остановке расчета. Но в некоторых случаях возникает расширяющаяся со временем схемная солитонная структура разрыва. Например, для быстрых магнитозвуковых волн в магнитной гидродинамике (эта модель не обладает дисперсией) с применением описанной выше численной схемы расчет может продолжаться сколь угодно долго [11]. Очевидно, что в данном случае схемная уединенная волна устойчива. Проведенное здесь исследование подсказывает, что при увеличении амплитуды разрыва неустойчивость может возникнуть.

Автор благодарит А.Т.Ильичева за предоставленную литературу и обсуждение результатов исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ерофеев В.И., Шеконян А.В., Белубикян М.В.* Пространственно-локализованные нелинейные магнитоупругие волны в электропроводящей микрополярной среде // Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81. № 4. С. 402–415.
2. *Erofeev V.I., Malkhanov A.O.* Spatially localized nonlinear magnetoelastic waves in an electrically conductive micropolar medium // *Z. Angew. Math. Mech.* 2023. V. 103. I. 4.
3. *Erofeev V.I., Il'ichev A.T.* Instability of supersonic solitary waves in a generalized elastic electrically conductive medium // *Continuum Mech. Thremodin.* 2023. <https://doi.org/10.1007/s00161-023-01249-1>
4. *Ильичев А.Т.* Устойчивость граничных состояний в бесконечных пространственных областях. Лекционные курсы НОЦ. Выпуск 32. Москва. МИАН. 2023.
5. *Evans J.V.* Nerve axon equations, III. Stability of the nerve impulse // *Indiana Univ. Math. J.* 1972. V. 22. P. 577–594.
6. *Pego R.L., Weinstein M.I.* Eigenvalues and instabilities of solitary waves // *Philos. Trans. R. Soc. Lond.* 1992. V. A340. P. 47–94.
7. *Alexander J.C., Sachs R.* Linear instability of solitary waves of a Boussinesq-type equation: a computer assisted computation. In: Lakshmikantham V., Hallam T.G. (eds.) *Nonlinear World 2*. P. 471–507. Berlin. Walter de Gruyter. 1995.
8. *Бахолдин И.Б.* Уравнения, описывающие волны в трубах с упругими стенками, и численные методы с низкой схемной диссипацией // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 7. С. 1224–1238.
9. *Бахолдин И. Б.* Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004. 318 с.
10. *Бахолдин И. Б.* Численное исследование уединенных волн и обратимых структур разрывов в трубах с контролируемым давлением // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2015. Т. 55. № 11. С. 1921–1936.
11. *Бахолдин И. Б.* Анализ уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики и структур разрывов в их решениях // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 68. № 3. С. 458–474.

INVESTIGATION OF STABILITY OF SUPERSONIC SOLITARY WAVES IN AN ELASTIC ELECTRICALLY CONDUCTIVE MICROPOLAR MATERIAL

I. B. Bakholdin*

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia

**e-mail: ibbakh@yandex.ru*

Received: 18.03.2024

Revised: 18.03.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. Stability of solitary waves that are solutions to one of the variants of the Boussinesq equation is investigated. This equation describes elastic waves in the presence of an electromagnetic field. The Evans function method and direct numerical solution of the equation are used to identify the instability of solitary waves. The results obtained by both methods coincided. A method for identifying instability and a method for calculating an eigenfunction that grows with time by analyzing numerical solutions of a partial differential equation are developed.

Keywords: Boussinesq equation, solitary wave, stability, method of Evans function, numerical methods, elasticity, electrodynamics.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОДНОСТОРОННЕГО ДИСКРЕТНОГО КОНТАКТА ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2024 г. А.А. Бобылев^{1,*}

¹119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

*e-mail: abobylov@gmail.com

Поступила в редакцию 15.03.2024 г.

Переработанный вариант 27.05.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Рассмотрены задачи одностороннего дискретного контакта упругого полупространства и жесткого штампа конечных размеров с поверхностным микрорельефом. Получена вариационная формулировка задач в виде граничного вариационного неравенства с использованием оператора Пуанкаре–Стеклова, отображающего на части границы упругого полупространства нормальные напряжения в нормальные перемещения. Приведена эквивалентная вариационному неравенству задача минимизации, в результате аппроксимации которой получена задача квадратичного программирования с ограничениями в виде равенств и неравенств. Для решения этой задачи предложен новый вычислительный алгоритм на основе метода сопряженных градиентов, включающий в расчет три уравнения равновесия штампа. Алгоритм относится к классу методов активного набора и учитывает специфику множества ограничений. Установлены некоторые закономерности контактного взаимодействия поверхностей с регулярным микрорельефом. Библ. 29. Табл. 4.

Ключевые слова: односторонний дискретный контакт, граничное вариационное неравенство, оператор Пуанкаре–Стеклова, задача квадратичного программирования, метод сопряженных градиентов.

DOI: 10.31857/S0044466924110125, EDN: KGEZZC

1. ВВЕДЕНИЕ

При контактном взаимодействии твердых тел область фактического контакта, как правило, дискретна. Размеры и положение пятен фактического контакта зависят от условий контактного взаимодействия, механических характеристик тел и их поверхностного микрорельефа. Для описания дискретного (множественного) контакта твердых тел предложены различные математические модели, учитывающие параметры макро- и микрогеометрии реальных поверхностей и условия их контактного взаимодействия [1]–[4]. Большинство этих моделей основано на классической теории контактного взаимодействия деформируемых тел [5], [6]. Подробный обзор современного состояния исследований в области механики дискретного контакта, включая основные подходы к постановке задач, методы аналитического и численного решения, конкретные результаты и области их практического использования, приведен в статье [7].

В настоящей работе рассматриваются задачи дискретного контакта упругого полупространства и жесткого штампа конечных размеров, основание которого имеет поверхностный микрорельеф. На поверхности возможного контакта полупространства со штампом задаются условия одностороннего контакта, трение на площадках контакта отсутствует. Отметим, что в рассматриваемых задачах дискретного контакта априори задается лишь предельно допустимая (номинальная) область контакта, которая включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и форма которых заранее неизвестны и подлежат определению.

Задачи одностороннего дискретного контакта являются нелинейными вследствие наличия в постановке граничных условий в виде неравенств. Для их численного решения требуется применение итерационных алгоритмов. Наиболее распространенный подход к построению вычислительных алгоритмов решения задач одностороннего контакта состоит в использовании вариационных методов [8]–[10]. Вариационные формулировки также применяются для исследования проблемы существования, единственности и регулярности решения контактных задач [11]–[13].

Используя математический аппарат преобразования вариационных задач [8], можно получить семейство вариационных формулировок. С вычислительной точки зрения наиболее эффективным является применение

граничных вариационных формулировок с использованием операторов Пуанкаре–Стеклова (ОПС), отображающих на части границы упругого тела, по которой возможен контакт, поверхностные силы в перемещения поверхности. В этом случае для дискретизации контактной задачи применяется метод граничных элементов, причем дискретизации подлежит не вся граница упругого тела, а лишь ее часть — область номинального контакта.

В результате аппроксимации граничных вариационных формулировок задач одностороннего контакта методом граничных элементов получают задачи квадратичного программирования, для решения которых в настоящее время наиболее эффективными считаются алгоритмы, разработанные на основе метода сопряженных градиентов (МСГ).

Впервые алгоритм решения задач квадратичного программирования на основе МСГ был предложен в работе [14]. Идея алгоритма состояла в использовании стратегии рабочего списка активных ограничений-неравенств (активного набора) и применении МСГ для нахождения минимума на текущем рабочем (аффинном) подпространстве. Была доказана теоретическая сходимость алгоритма за конечное число шагов. При практическом использовании алгоритма оказалось, что скорость его сходимости существенно зависит от количества и вида ограничений. Поэтому впоследствии были предложены различные модификации базового алгоритма, адаптированные для решения конкретных классов прикладных задач. Описание и анализ алгоритмов на основе МСГ для решения задач одностороннего контакта можно найти, например, в работах [15], [16].

Один из наиболее известных алгоритмов, приведенный в часто цитируемой статье [17], отличается от базового алгоритма [14] учетом специфики множества ограничений решаемой задачи квадратичного программирования, что позволило значительно повысить скорость работы алгоритма. Однако алгоритм [17] имеет существенное ограничение. В нем учитывается только одно уравнение равновесия штампа (для сил) и, следовательно, только поступательное движение штампа. Это не позволяет использовать алгоритм для решения контактных задач при внецентренном нагружении штампа, когда необходимо учитывать его повороты.

В [18] автором предложен иной алгоритм решения задач одностороннего контакта для упругой полуплоскости, разработанный на основе МСГ. Основная идея этого алгоритма состоит в применении линейного преобразования переменных, позволяющего свести ограничения в виде равенств, которые аппроксимируют уравнения равновесия штампа и содержат все переменные задачи, к простым ограничениям, содержащим только одну переменную. Такие ограничения несложно учесть в алгоритме МСГ. Этот прием позволяет рассматривать все уравнения равновесия штампа и задавать значение моментов внешних сил. В [19] этот алгоритм обобщен для пространственных контактных задач.

В настоящей работе на основе МСГ предложен новый алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для упругого полупространства, включающий в расчет три уравнения равновесия штампа. Алгоритм относится к классу методов активного набора и учитывает специфику множества ограничений. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что при решении рассматриваемого класса задач разработанный алгоритм требует меньших вычислительных затрат, чем алгоритмы [17] и [18].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть невесомое однородное изотропное упругое полупространство занимает область $\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \leq 0\}$ с границей Γ . Далее под $u(x)$, $\varepsilon(x)$, $\sigma(x)$ будем понимать соответственно значения вектора перемещений и тензоров деформации и напряжений в точке $x \in \Omega$. Предполагается, что деформации малы, а напряжения в недеформированном состоянии отсутствуют. Напряженно-деформированное состояние полупространства описывается системой уравнений:

$$\varepsilon = \text{def } u, \quad \sigma = S : \varepsilon, \quad \text{div } \sigma = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (1)$$

где $\text{def} \equiv 1/2(\text{grad} + \text{grad}^T)$, S — тензор модулей упругости.

В упругое полупространство вдавливаются гладкий жесткий штамп, основание которого имеет поверхностный микрорельеф. Часть поверхности Γ , по которой возможен контакт полупространства со штампом, обозначается Γ_p . Положение и предельные размеры Γ_p , т.е. номинальная область контакта, задаются априори, исходя из геометрических соображений. Без потери общности будем полагать, что область Γ_p является односвязной и конечной. При вдавливании штампа с поверхностным микрорельефом номинальная область контакта Γ_p включает в себя множество отдельных пятен фактического контакта, положение и форма которых заранее неизвестны.

Форма основания штампа и его поверхностный микрорельеф описываются функцией $\Phi(x_1, x_2)$, значение которой в точке $x \in \Gamma_p$ равно расстоянию от этой точки до поверхности штампа, измеренному вдоль направления внешней нормали к поверхности Γ_p . Расстояние $\Phi(x_1, x_2)$ отсчитывается относительно недеформированного состояния полупространства. Для определенности будем полагать, что $\min_{x \in \Gamma_p} \Phi(x_1, x_2) = 0$. Для штампа

с поверхностным микрорельефом функция $\Phi(x_1, x_2)$ является мультимодальной (многоэкстремальной). Положение штампа определяется векторами перемещений $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ и углов поворота $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ штампа как жесткого целого. Перемещения и углы поворота штампа предполагаются малыми. Главный вектор $F = (F_1, F_2, F_3)$ и главный момент $M = (M_1, M_2, M_3)$ внешних сил, приложенных к штампу, считаются заданными. В качестве центра приведения сил выбирается точка $x^c = (x_1^c, x_2^c, x_3^c)$. Далее рассматривается задача нормального контакта полупространства со штампом, поэтому будем полагать

$$F_1 = F_2 = 0, \quad -\infty < F_3 < 0, \quad |M_1| < \infty, \quad |M_2| < \infty, \quad M_3 = 0, \\ \delta_1 = \delta_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0. \quad (2)$$

Контактное взаимодействие полупространства со штампом описывается линеаризованными условиями одностороннего гладкого контакта:

$$u_3 \leq \Phi + \delta_3 + (x_2 - x_2^c)\varphi_1 - (x_1 - x_1^c)\varphi_2, \quad \sigma_{33} \leq 0, \quad \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0, \\ \sigma_{33} [u_3 - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2] = 0 \quad \text{на } \Gamma_p. \quad (3)$$

Остальная часть поверхности полупространства свободна от внешних нагрузок:

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 \quad \text{на } \Gamma \setminus \Gamma_p. \quad (4)$$

Уравнения равновесия жесткого штампа имеют вид:

$$\int_{\Gamma_p} \sigma_{33} d\Gamma_p = F_3; \quad \int_{\Gamma_p} (x_2 - x_2^c) \sigma_{33} d\Gamma_p = M_1; \quad \int_{\Gamma_p} (x_1 - x_1^c) \sigma_{33} d\Gamma_p = -M_2. \quad (5)$$

Следует отметить, что соотношения (5), по существу, представляют собой нелокальные граничные условия.

Для существования решения рассматриваемой контактной задачи далее будем предполагать, что внешние силы и моменты, приложенные к жесткому штампу, согласованы между собой таким образом, что существует распределение нормальных напряжений $\sigma_{33} \leq 0$ на Γ_p , удовлетворяющее уравнениям равновесия штампа (5).

Для единственности поля перемещений необходимо исключить смещения упругого полупространства как жесткого целого. Поэтому будем дополнительно предполагать, что полупространство закреплено в бесконечно удаленной точке:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \quad (6)$$

Задача (в дифференциальной постановке) состоит в определении полей перемещений $u(x)$, деформаций $\epsilon(x)$ и напряжений $\sigma(x)$, удовлетворяющих уравнениям (1), граничным условиям (3), (4), условиям равновесия штампа (5) и условию на бесконечности (6). Также необходимо найти смещение δ_3 и углы поворота φ_1 и φ_2 жесткого штампа. Подчеркнем, что в рассматриваемой задаче одностороннего дискретного контакта априори задается лишь номинальная область контакта Γ_p , положение и форма пятен фактического контакта заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Решение $u(x)$ контактной задачи (1)–(6), принадлежащее классу функций $[C^2(\Omega)]^3 \cap [C^1(\overline{\Omega})]^3$, является классическим решением. Переход к вариационной формулировке задачи позволяет определить обобщенное решение. Введем необходимые для этого функциональные пространства.

Поскольку область Γ_p является ограниченной, при сделанных выше допущениях (2) и (6) имеет место асимптотическое представление [6]

$$u_i(x) = O(|x|^{-1}) \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Поэтому компоненты вектора перемещений будем рассматривать как элементы функционального пространства Соболева с весами [20]:

$$H^1(\Omega; \varrho) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega) : \varrho v \in L_2(\Omega); \quad \partial v / \partial x_i \in L_2(\Omega), \quad i = 1, 2, 3\},$$

где $\mathcal{D}'(\Omega)$ — пространство распределений на Ω ; $L_2(\Omega)$ — пространство функций с интегрируемым квадратом по Ω ; $\varrho(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$ — весовая функция. Пространство $H^1(\Omega; \varrho)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(v, w)_{H^1(\Omega; \varrho)} = \int_{\Omega} \varrho^2 v w d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega.$$

Введем далее пространство вектор-функций

$$\mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega; \mathfrak{q}) = \left\{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in [H^1(\Omega; \mathfrak{q})]^3 : \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \in [L_2(\Omega)]^3 \right\}.$$

Это пространство является гильбертовым со скалярным произведением

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_{\mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega; \mathfrak{q})} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{[H^1(\Omega; \mathfrak{q})]^3} + (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}), \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{w}))_{[L_2(\Omega)]^3}.$$

Учитывая (7), можно показать, что при некоторых дополнительных предположениях относительно свойств гладкости функции $\Phi(x_1, x_2)$, описывающей форму штампа, классическое решение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ контактной задачи (1)–(6) принадлежит пространству $\mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega; \mathfrak{q})$.

Введем необходимые для построения граничной вариационной формулировки задачи пространства следов функций из $\mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega; \mathfrak{q})$.

Рассмотрим произвольную ограниченную подобласть $\Omega' \subset \Omega$ с границей Γ' класса $C^{1,1}$, примыкающую к границе Γ полупространства так, что

$$\Gamma_p \Subset \Gamma \cap \Gamma'. \quad (8)$$

Известно [21], что существуют линейные непрерывные операторы

$$\boldsymbol{\gamma}'_u : \mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega') \rightarrow [H^{1/2}(\Gamma')]^3, \quad \boldsymbol{\gamma}'_t : \mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega') \rightarrow [H^{-1/2}(\Gamma')]^3, \quad (9)$$

определяющие для полей перемещений из $\mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega') \equiv \mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega'; 1)$ соответственно векторные функции перемещений и напряжений на Γ' . Кроме того, существует линейный непрерывный оператор

$$\boldsymbol{\chi}'_t : [H^{-1/2}(\Gamma')]^3 \rightarrow \mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega') \quad (10)$$

такой, что для заданного $\mathbf{t} \in [H^{-1/2}(\Gamma')]^3$ можно построить функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega')$, обладающую свойством $\boldsymbol{\gamma}'_t \mathbf{v} = \mathbf{t}$.

Введем пространство сужений на Γ_p функций из $H^{1/2}(\Gamma')$

$$H^{1/2}(\Gamma_p) = \{v = w|_{\Gamma_p} : w \in H^{1/2}(\Gamma')\}$$

и оснастим его нормой:

$$\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_p)} = \inf_{w \in H^{1/2}(\Gamma')} \{\|w\|_{H^{1/2}(\Gamma')} : v = w|_{\Gamma_p}\}.$$

Имеет место вложение пространств $H^{1/2}(\Gamma_p) \subset L_2(\Gamma_p)$ [22]. Двойственным к пространству $H^{1/2}(\Gamma_p)$ является пространство $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ — пополнение $L_2(\Gamma_p)$ по норме

$$\|p\|_{\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)} = \sup_{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_p)}=1} |(p, v)_{L_2(\Gamma_p)}|,$$

т.е. отношение двойственности $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{1/2}(\Gamma_p)}$ порождено продолжением скалярного произведения на $L_2(\Gamma_p)$ и имеет место плотное вложение

$$L_2(\Gamma_p) \subset \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p). \quad (11)$$

Для упрощения обозначений указанное отношение двойственности будем обозначать как $\langle \cdot, \cdot \rangle$, иные отношения двойственности далее не рассматриваются.

Весовая функция $\mathfrak{q}(\mathbf{x})$ непрерывна и ограничена в ограниченной подобласти $\Omega' \subset \Omega$, поэтому сужения функций из $\mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega; \mathfrak{q})$ на Ω' принадлежат пространству $\mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega')$, для элементов которого определены операторы следа (9). Как следствие существуют линейные непрерывные операторы

$$\boldsymbol{\gamma}_u : \mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega; \mathfrak{q}) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_p), \quad \boldsymbol{\gamma}_t : \mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega; \mathfrak{q}) \rightarrow \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p). \quad (12)$$

Обратно, для любой функции $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega')$ существует функция $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega; \mathfrak{q})$ такая, что $\mathbf{v}$ является сужением $\tilde{\mathbf{v}}$ на Ω' . Поэтому с учетом (10) существует линейный непрерывный оператор

$$\boldsymbol{\chi}_t : \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) \rightarrow \mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega; \mathfrak{q}) \quad (13)$$

такой, что для заданного $p \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ можно построить функцию $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\operatorname{div}; \Omega; \mathfrak{q})$, обладающую свойством $\boldsymbol{\gamma}_t \mathbf{v} = p$.

Можно показать, что при выполнении условия (8) пространства $H^{1/2}(\Gamma_p)$ и $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, а также операторы следа (12) и оператор (13) не зависят от выбора области Ω' .

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Решение контактной задачи (1)–(6) можно представить в виде [6]

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_p} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \xi) q(\xi) d\Gamma_p(\xi), \quad (14)$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \xi)$ — поле перемещений, соответствующее решению задачи Буссинеска о действии сосредоточенной нормальной силы на границе упругого полупространства, $q \equiv \sigma_{33}$ — нормальные напряжения на Γ_p .

Из свойств решения задачи Буссинеска следует, что если $q \in L_2(\Gamma_p)$, то поле перемещений (14) удовлетворяет соотношениям (1), граничным условиям (3), (4) и условиям на бесконечности (6). Кроме того, оператор $\mathbf{G}_p : q \mapsto \mathbf{u}$, определяемый формулой (14), является непрерывным оператором из $L_2(\Gamma_p)$ в $\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega; \mathbb{Q})$. Учитывая плотность вложения (11), оператор $\mathbf{G}_p$ можно продолжить по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и с учетом (13) рассматривать как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в $\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega; \mathbb{Q})$.

Таким образом, использование оператора $\mathbf{G}_p$ в предположении, что $\Phi \in H^{1/2}(\Gamma_p)$, позволяет свести решение контактной задачи (1)–(6) к нахождению нормальных напряжений $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, удовлетворяющих следующей системе уравнений и неравенств:

$$q \leq 0 \text{ на } \Gamma_p, \quad (15)$$

$$u_3(q) \leq \Phi + \delta_3 + (x_2 - x_2^c)\varphi_1 - (x_1 - x_1^c)\varphi_2 \text{ на } \Gamma_p, \quad (16)$$

$$q[u_3(q) - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2] = 0 \text{ на } \Gamma_p, \quad (17)$$

$$\langle q, 1 \rangle = F_3, \quad \langle q, x_2 - x_2^c \rangle = M_1, \quad \langle q, x_1 - x_1^c \rangle = -M_2, \quad (18)$$

где условия (15) и (17) выполняются в смысле пространства $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, а условие (16) — в смысле пространства $H^{1/2}(\Gamma_p)$.

Перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{G}_p q$, соответствующие решению $q \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ системы (15)–(18), будем называть обобщенным решением задачи (1)–(6).

5. ОПЕРАТОР ПУАНКАРЕ–СТЕКЛОВА

Введем ОПС $G_s : q \mapsto w$, отображающий посредством решения (14) нормальные напряжения $q(x_1, x_2) \equiv \sigma_{33}(x_1, x_2, 0)$ на части Γ_p границы упругого полупространства в нормальные перемещения $w(x_1, x_2) \equiv u_3(x_1, x_2, 0)$ на Γ_p . Из свойств решения задачи Буссинеска следует, что для $q \in L_2(\Gamma_p)$ сужение функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, определяемой формулой (14), на область Ω' принадлежит пространству $\mathbf{H}^1(\text{div}; \Omega')$. Учитывая определения пространств $H^{1/2}(\Gamma_p)$ и $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, а также существование операторов следа (9) и оператора (10), будем рассматривать G_s как оператор, действующий из $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ в $H^{1/2}(\Gamma_p)$.

Соответствующее решению (14) выражение для ОПС $G_s : q \mapsto w$ для $q \in L_2(\Gamma_p)$ имеет вид [6]:

$$w(x_1, x_2) = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \int_{\Gamma_p} \frac{q(\xi_1, \xi_2)}{((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2)^{1/2}} d\xi_1 d\xi_2, \quad (19)$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона полупространства.

Интегральный оператор со слабой особенностью (19) ограничен в $L_2(\Gamma_p)$ [23]. Учитывая плотность вложения (11), продолжим оператор (19) по непрерывности на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ и введем на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ билинейную форму

$$g_s(p, q) = \langle p, G_s q \rangle.$$

Из результатов [24] следует, что билинейная форма $g_s(\cdot, \cdot)$ и ОПС G_s являются положительно-определенными на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$.

6. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Для решения системы (15)–(18), содержащей уравнения и неравенства, используется вариационный подход [8], [11]. Образует множество статически допустимых нормальных напряжений на Γ_p

$$\Sigma = \{ p \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p) : q \leq 0, \quad \langle q, 1 \rangle = F_3, \quad \langle q, x_2 - x_2^c \rangle = M_1, \quad \langle q, x_1 - x_1^c \rangle = -M_2 \}. \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что множество Σ является замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$. Кроме того, в соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями это множество является непустым.

Пусть $q \in \Sigma$ — решение системы (15)–(18). Тогда для произвольного $p \in \Sigma$ получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \langle p - q, G_s q - \Phi \rangle &= \langle p - q, G_s q - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2 \rangle + \\ &+ \langle p - q, \delta_3 + (x_2 - x_2^c)\varphi_1 - (x_1 - x_1^c)\varphi_2 \rangle = \\ &= \langle p, G_s q - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2 \rangle - \\ &- \langle q, G_s q - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2 \rangle + \\ &+ \delta_3 \langle p, 1 \rangle + \varphi_1 \langle p, x_2 - x_2^c \rangle - \varphi_2 \langle p, x_1 - x_1^c \rangle - \\ &- \delta_3 \langle q, 1 \rangle - \varphi_1 \langle q, x_2 - x_2^c \rangle + \varphi_2 \langle q, x_1 - x_1^c \rangle = \\ &= \langle p, G_s q - \Phi - \delta_3 - (x_2 - x_2^c)\varphi_1 + (x_1 - x_1^c)\varphi_2 \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из (21) следует, что искомые нормальные напряжения $q \in \Sigma$ удовлетворяют граничному вариационному неравенству

$$g_s(p - q, q) - \phi(p - q) \geq 0, \quad (22)$$

где $\phi(\cdot)$ — определенная на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ линейная форма

$$\phi(p) = \langle p, \Phi \rangle.$$

Отметим, что неравенство (22) не содержит неизвестных смещения δ_3 и углов поворота φ_1 и φ_2 жесткого штампа. Как нетрудно видеть из преобразований (21), это является следствием того, что элементы множества статически допустимых нормальных напряжений Σ удовлетворяют уравнениям равновесия штампа (18).

Используя известные приемы [8], [21], можно доказать обратное утверждение: решение q вариационного неравенства (22) удовлетворяет системе уравнений и неравенств (15)–(18).

Учитывая, что билинейная форма $g_s(\cdot, \cdot)$ является положительно-определенной, а множество Σ — непустым замкнутым выпуклым множеством в $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$, вариационное неравенство (22) эквивалентно задаче минимизации граничного функционала: найти $q \in \Sigma$ такой, что

$$J(q) = \inf_{p \in \Sigma} \{J(p) = g_s(p, p)/2 - \phi(p)\}. \quad (23)$$

Кроме того, решение вариационного неравенства (22) и задачи минимизации (23) существует и единственно [8], [21].

Отыская нормальные напряжения $\sigma_{33} = q$ на Γ_p как решение задачи (23), можно определить напряженно-деформированное состояние всего упругого полупространства при помощи приведенного в [6] интегрального представления решения (14), сужением которого на Γ_p является (19).

7. АППРОКСИМАЦИЯ ЗАДАЧИ

Без потери общности будем полагать, что номинальная область контакта является прямоугольной:

$$\Gamma_p = \{0 \leq x_1 \leq d_1, 0 \leq x_2 \leq d_2, x_3 = 0\}. \quad (24)$$

Если из геометрических соображений следует, что область номинального контакта имеет иную форму, ее можно расширить до прямоугольника.

Построим на Γ_p регулярную (равномерную) сетку T_p , состоящую из $N = N_1 \times N_2$ одноузловых прямоугольных граничных элементов нулевого порядка размеров $d_1^e \times d_2^e$, где $d_i^e = d_i/N_i$, $i = 1, 2$. Узлы сетки обозначим t_n , $n \in I_N = \{1, \dots, N\}$. Далее векторы из арифметического пространства $\mathbb{R}^N$ и матрицы из пространства квадратных вещественных матриц $\mathbb{M}^N$ будем обозначать большими латинскими буквами, а их элементы — соответствующими малыми латинскими буквами.

Используя для аппроксимации задачи (23) метод Ритца, получим следующую задачу квадратичного программирования: найти сеточную функцию нормальных напряжений $\mathbf{Q}_p = (q(t_1), q(t_2), \dots, q(t_N)) \in \mathbb{R}^N$ такую, что

$$J_h(\mathbf{Q}_p) = \min_{\mathbf{Q} \in V} \{J_h(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} / 2 - \mathbf{B}^T \mathbf{Q}\}, \quad (25)$$

где $\mathbf{A} \in \mathbb{M}^N$ — матрица податливости упругого полупространства Ω , матрица Гессе минимизируемой функции $J_h(\mathbf{Q})$; $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^N$ — вектор обобщенных узловых параметров, характеризующих форму основания штампа; V — множество статически допустимых узловых нормальных напряжений.

Элементы матрицы A и вектора B вычисляются по формулам

$$a_{ij} = \int_{\Gamma_p} \psi_i G_s \psi_j d\Gamma_p, \quad b_i = \int_{\Gamma_p} \Phi \psi_i d\Gamma_p, \quad i, j \in I_N,$$

где ψ_i — базисная функция, соответствующая узлу t_i . Из положительной определенности ОПС G_s на $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_p)$ следует, что матрица A является симметричной положительно-определенной матрицей.

Допустимое множество V имеет вид

$$V = \{Q \in \mathbb{R}^N: q_n \leq 0, n \in I_N; CQ = D\}, \quad (26)$$

где C — матрица размерности $3 \times N$, элементы которой вычисляются по формулам:

$$c_{1n} = \int_{\Gamma_p} \psi_i d\Gamma_p, \quad c_{2n} = \int_{\Gamma_p} (x_2 - x_2^c) \psi_i d\Gamma_p, \quad c_{3n} = \int_{\Gamma_p} (x_1 - x_1^c) \psi_i d\Gamma_p, \quad n \in I_N;$$

$D = \{F_3, M_1, -M_2\}^T \in \mathbb{R}^3$. Нетрудно видеть, что множество V является замкнутым и выпуклым. Кроме того, в соответствии со сделанными при постановке задачи предположениями это множество непусто.

Учитывая, что матрица A является положительно-определенной, а множество V — непустым замкнутым и выпуклым множеством, решение задачи (25) существует и единственно.

Интегральное представление (19) ОПС G_s имеет разностное ядро. Вследствие этого при использовании для дискретизации области (24) регулярной сетки T_p матрица A является блочно-тёплицевой матрицей с тёплицевыми блоками. Учет структуры матрицы позволяет существенно сократить время ее формирования и затраты памяти на хранение. Используя известный прием вложения тёплицевой матрицы в циркулянтную, для матрицы A можно построить соответствующую блочно-циркулянтную матрицу с циркулянтными блоками [25]. При вычислении произведения последней на вектор используется двумерное быстрое преобразование Фурье (ДБПФ), что позволяет существенно сократить время счета [26].

8. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Задача минимизации (25) включает три ограничения в виде линейных равенств, каждое из которых содержит все N компонент вектора неизвестных, и N простых ограничений в виде неравенств. Разработанный алгоритм решения задачи (25), как и все алгоритмы решения задач квадратичного программирования на основе МСГ, относится к классу методов активного набора. Вводится рабочий список активных ограничений-неравенств, определяются правила его изменения и применяется МСГ для минимизации целевой функции с ограничениями-равенствами.

8.1. Множества индексов и матрицы

Введем необходимые для описания разработанного алгоритма множества индексов и матрицы.

Построим для произвольного $Q \in \mathbb{R}^N$ множества индексов:

$$I_0(Q) = \{i \in I_N: q_i = 0\}; \quad I_p(Q) = \{i \in I_N: q_i > 0\}.$$

Введем далее для произвольного $Q \in V$ множество индексов $I_a(Q) \subset I_N$, определяющее рабочий список — перечень ограничений-неравенств из (26), интерпретируемых в процессе решения задачи как равенства. Отметим, что имеет место включение $I_a(Q) \subset I_0(Q)$, при этом не все обращающиеся в равенства в точке Q ограничения-неравенства из (26) обязательно включаются в $I_a(Q)$. Дополнение $I_f(Q) = I_N \setminus I_a(Q)$ определяет подпространство, из которого выбирается направление поиска в точке Q . Обозначим $N_a = |I_a|$ и $N_f = |I_f| = N - N_a$. Можно показать, что если множество V непусто, то $N_a \leq N - 3$.

Построим для данного рабочего списка $I_a(Q)$ бинарную матрицу перестановок $R \in \mathbb{M}^N$, в каждой строке и столбце которой находится лишь один единичный элемент, такую, что $I_a(RQ) = \{N_f + 1, \dots, N\}$. Обратная перестановка выполняется с помощью матрицы $R^{-1} = R^T$. Используя матрицу перестановок, представим ограничения-равенства из (26) в виде:

$$CQ = CR^T RQ = [C_f \ C_a] \begin{bmatrix} Q_f \\ Q_a \end{bmatrix} = D, \quad (27)$$

где C_f и C_a — матрицы размеров $3 \times N_f$ и $3 \times N_a$ соответственно; Q_f и Q_a — векторы размерностей N_f и N_a соответственно. При программной реализации вычислительного алгоритма операции умножения на матрицы R и R^T сводятся к изменению последовательности дальнейшей обработки строк или столбцов матрицы-сомножителя. Для упрощения выкладок далее будем считать, что на каждом шаге алгоритма векторы и матрицы переупорядочены с помощью матрицы перестановок, соответствующей текущему рабочему списку.

Совокупность ограничений-равенств из (26) и рабочего списка представим в виде:

$$C_e Q = \begin{bmatrix} C_f & C_a \\ 0 & E_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_f \\ Q_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ 0_a \end{bmatrix} = D_e, \quad (28)$$

где E_a — единичная матрица порядка N_a ; 0_a — нулевой вектор размерности N_a . Совокупность равенств (28) определяет линейное многообразие (плоскость) V_e в $\mathbb{R}^N$.

Матрица C_e является прямоугольной матрицей размера $(N_a + 3) \times N$. Нетрудно показать, что $\text{rank } C_e = N_a + 3$. Образует подпространство L_a , натянутое на векторы-строки матрицы C_e , $\dim L_a = N_a + 3$. Матрица ортогонального проектирования (проектор) $P_a \in \mathbb{M}^N$ на это подпространство вычисляется по формуле [27]

$$P_a = C_e^T (C_e C_e^T)^{-1} C_e.$$

Используя (28), путем несложных преобразований получим

$$P_a = \begin{bmatrix} C_f^T (C_f C_f^T)^{-1} C_f & 0 \\ 0 & E_a \end{bmatrix}.$$

Произведение матриц $C_f^T (C_f C_f^T)^{-1} C_f$ является квадратной матрицей порядка N_f , а произведение $C_f C_f^T$ — квадратной матрицей порядка 3, обращение которой не составляет труда.

Проектор $P_f \in \mathbb{M}^N$ на ортогональное дополнение L_f подпространства L_a имеет вид:

$$P_f = E_N - P_a = \begin{bmatrix} E_f - C_f^T (C_f C_f^T)^{-1} C_f & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (29)$$

где E_N, E_f — единичные матрицы порядков N и N_f соответственно. Несложно показать, что выполняется равенство $P_f C_e = 0$, следовательно, подпространство L_f является направляющим пространством для линейного многообразия V_e .

Отметим, что матрицы C_e, C_f и C_a , линейное многообразие V_e , а также проекторы P_a и P_f перестраиваются при каждом изменении множества I_a .

Обозначим через $G(Q)$ градиент $\text{grad } J_h(Q) = A Q - B$. Представим проекцию градиента на подпространство L_f в виде $P_f G = G + C_e^T U$, где U — вектор множителей Лагранжа. Используя (28) и (29), получим

$$U = \begin{bmatrix} U_d \\ U_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(C_f C_f^T)^{-1} C_f G_f \\ (C_a)^T (C_f C_f^T)^{-1} C_f G_f - G_a \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_f \\ G_a \end{bmatrix}, \quad (30)$$

где $\dim U_d = 3$; $\dim U_a = N_a$; $\dim G_f = N_f$; $\dim G_a = N_a$.

Для того, чтобы точка $Q_p \in V$ была точкой минимума $J_h(Q)$ на V , необходимо и достаточно, чтобы $I_a(Q_p) = I_0(Q_p)$ и существовал вектор U такой, что $G(Q_p) + C_e^T U = 0$ и среди компонент U_a не было отрицательных [27].

8.2. Вычисление проекции текущего приближения

Пусть $Q^* \notin V$ — текущее приближение, а $I_a \subset I_0(Q^*)$ — множество индексов, задающее текущий рабочий список и соответствующее ему линейное многообразие V_e . Вычислим проекцию Q_{pr}^* точки Q^* на выпуклое множество $V \cap V_e$ как решение задачи:

$$s(Q_{pr}^*) = \min_{Q \in V \cap V_e} \{s(Q) = \|Q - Q^*\|_2 / 2\}.$$

Для этого используем вспомогательный итерационный алгоритм, формирующий дополнительное множество индексов I_r для расширения рабочего списка. Далее векторы, матрицы и множества на i -й итерации этого алгоритма будем обозначать верхним индексом i .

Алгоритм вычисления проекции Q_{pr}^* состоит из следующих шагов.

Шаг 0. Установим счетчик итераций $i = 0$. Положим $Q^i = Q^*$ и $I_r^i = I_p(Q^*)$.

Шаг 1. Положим $i := i + 1$, построим множество индексов $I_a^i = I_a \cup I_r^{i-1}$ и соответствующие ему матрицу C_e^i и вектор D_e^i , которые посредством соотношений (28) определяют линейное многообразие $V_e^i \subset V_e$.

Шаг 2. Используя проектор P_f^i , вычислим проекцию Q^i точки Q^* на V_e^i :

$$Q^i = \begin{bmatrix} Q_f^i \\ Q_a^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_f^* - (C_f^i)^T (C_f^i (C_f^i)^T)^{-1} (C_f^i Q_f^* - D) \\ 0_a \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Шаг 3. Построим множество индексов $I_p(Q^i)$. Если оно непусто, положим $I_r^i := I_r^{i-1} \cup I_p(Q^i)$ и перейдем к шагу 1.

Шаг 4. Проверим выполнение условий минимума функции $s(Q)$ на $V \cap V_e$ в точке Q^i . Полагая в (30) $G = \text{grad } s(Q^i) = Q^i - Q^*$, вычислим вектор множителей Лагранжа

$$U^i = \begin{bmatrix} U_d^i \\ U_a^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_f^i (C_f^i)^T)^{-1} (C_f^i Q_f^* - D) \\ Q_a^* - (C_a^i)^T (C_f^i (C_f^i)^T)^{-1} (C_f^i Q_f^* - D) \end{bmatrix}.$$

Если среди компонент U_a^i есть отрицательные, то номера соответствующих им ограничений исключим из множества индексов I_r^i и перейдем к шагу 1.

Шаг 5. Положим $Q_{pr}^* = Q^i$ и $I_a := I_a \cup I_r^i$.

8.3. Инициализация алгоритма

Установим счетчик итераций $k = 0$. Далее векторы и переменные, вычисляемые на каждой итерации, будем обозначать верхним индексом k . Определяющее рабочий список множество индексов I_a , соответствующие ему матрицы C_e , C_f , C_a , P_a и P_f , а также вектор Z , задающий направление предшествующего рестарта, могут сохранять свои значения на нескольких последовательных итерациях, поэтому дополнительным индексом обозначаться не будут.

Выберем произвольную точку $Q^* \in \mathbb{R}^N$ такую, что $q_n^* < 0, n \in I_N$. Тогда $I_a = \emptyset$, т.е. рабочий список пуст, а линейное многообразие V_e определяется соотношениями (27). В качестве начального приближения Q^0 выберем проекцию точки Q^* на множество $V \cap V_e$, вычисленную с помощью описанного выше алгоритма. Заметим, что при проектировании возможно расширение множества I_a .

Вычислим градиент G^0 и зададим направления поиска $S^0 = -P_f G^0$ и рестарта $Z = 0$.

8.4. Итерационный процесс

8.4.1. Вычисление следующего приближения. Аналогично некоторым вариантам метода проекции градиента [28] следующее приближение вычисляется в два этапа. На первом этапе производится поиск в линейном многообразии V_e :

$$Q^{k+1/2} = Q^k + \alpha^k S^k, \quad (32)$$

где

$$\alpha^k = -(S^k, G^k) / (S^k, AS^k). \quad (33)$$

На втором этапе производится проверка условия $Q^{k+1/2} \in V$. Если это условие выполняется, то полагаем $Q^{k+1} = Q^{k+1/2}$. В противном случае, используя описанный выше алгоритм, вычисляем проекцию $Q_{pr}^{k+1/2}$ точки $Q^{k+1/2}$ на $V \cap V_e$ и полагаем $Q^{k+1} = Q_{pr}^{k+1/2}$. Заметим, что в этом случае расширяется множество индексов I_a (рабочий список).

8.4.2. Вычисление градиента. Если в точке Q^{k+1} не расширяется рабочий список, т.е. $Q^{k+1} = Q^{k+1/2}$, то для вычисления градиента в этой точке используется рекуррентная формула $G^{k+1} = G^k + \alpha^k AS^k$, что сокращает объем вычислений, так как матрично-векторное произведение AS^k вычисляется ранее (см. формулу (33)). В противном случае градиент вычисляется стандартным образом: $G^{k+1} = AQ^{k+1} - B$.

8.4.3. Сокращение рабочего списка. Используя соотношения (30), вычислим в точке Q^k вектор множителей Лагранжа U^k . В качестве условия сужения множества индексов I_a принимается условие:

$$\|U_a^-\|_2 > \eta \|P_f G^k\|_2, \quad (34)$$

где $U_a^- = \min\{U_a^k, 0_a\}$; $\eta > 0$ — заданный параметр алгоритма. Если условие (34) выполняется, то индексы отрицательных компонент вектора U_a^k исключаются из множества I_a , т.е. производится сокращение рабочего списка. На основании многочисленных вычислительных экспериментов рекомендуется выбирать значения параметра η порядка единицы.

8.4.4. Вычисление направления поиска. Направление поиска в точке Q^k вычисляется по трехчленной формуле, используемой в алгоритмах с рестартами при безусловной минимизации неквадратичных функций [29]

$$S^k = -P_f G^k + \beta^k S^{k-1} + \gamma^k Z, \quad (35)$$

где

$$\beta^k = (P_f G^k, AS^{k-1}) / (S^{k-1}, AS^{k-1}); \quad \gamma^k = (P_f G^k, AZ) / (Z, AZ). \quad (36)$$

8.4.5. Рестарты алгоритма. При изменении рабочего списка (множества I_a) производится рестарт алгоритма МСГ.

Если в точке Q^k расширяется рабочий список, то перед вычислением направления поиска S^k по формуле (35) вычисляются проекции $S^{k-1} := P_f S^{k-1}$ и $Z := P_f Z$.

Если точка Q^{k-1} была точкой рестарта, то перед вычислением в точке Q^k направления поиска S^k по формуле (35) следует последовательно выполнить присваивания $Z := S^{k-1}$ и $S^{k-1} := 0$, т.е. после рестарта направление поиска S^k вычисляется по двухчленной формуле.

Если при вычислениях по формуле (33) получено $\alpha^k < 0$ или при вычислениях по формуле (36) получено $\beta^k < 0$, то производится рестарт алгоритма МСГ с направления проекции антиградиента $-P_f G^k$, т.е. полагается $Z := 0$ и $S^{k-1} := 0$.

8.4.6. Условие остановки алгоритма. В качестве условия остановки алгоритма можно использовать одно из условий:

$$\|Q^k - Q^{k-1}\| < \varepsilon_1 \|Q^k\| \quad (37)$$

или

$$\|P_f G^k\| < \varepsilon_2, \quad (38)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — параметры, определяющие погрешность приближенного решения; $\|\cdot\|$ — одна из гильбертовских норм: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ или $\|\cdot\|_\infty$. Проверка этих условий не производится при рестартах или если среди компонент вектора множителей Лагранжа U_a^k есть отрицательные, т.е. если не для всех активных ограничений-неравенств выполняются необходимые условия минимума. Учитывая немонокотонную сходимость алгоритма МСГ, целесообразно требовать выполнения условия (37) на нескольких последовательных итерациях при отсутствии рестартов.

8.5. Вычисление смещения и углов поворота штампа

Можно показать, что смещения и повороты штампа как жесткого целого выражаются через компоненты вектора множителей Лагранжа:

$$(\delta_3, \varphi_1, \varphi_2) = (U_d)^T. \quad (39)$$

8.6. Апостериорный анализ численного решения

Для оценки погрешности выполнения сеточных аппроксимаций условий (15)–(18) использовался следующий набор параметров:

$$\begin{aligned} \varepsilon_q &= \max_{1 \leq n \leq N} q_n / q_{nom}, \quad \varepsilon_{f3} = \left| \sum_{n=1}^N c_{1n} q_n - F_3 \right| / |F_3|, \\ \varepsilon_{m1} &= \left| \sum_{n=1}^N c_{2n} q_n - M_1 \right| / |M_1| \quad \text{для } M_1 \neq 0, \\ \varepsilon_{m2} &= \left| \sum_{n=1}^N c_{3n} q_n - M_2 \right| / |M_2| \quad \text{для } M_2 \neq 0, \\ \varepsilon_{zp} &= \min_{1 \leq n \leq N} z_n [q_n \geq 0]_a / |\delta_3|, \quad \varepsilon_{zm} = \max_{1 \leq n \leq N} |z_n| [q_n < 0]_a / |\delta_3|, \end{aligned}$$

где $q_{nom} = F_3 / (d_1 d_2)$ — средние (номинальные) контактные напряжения; $z_n = \Phi(x_1^n, x_2^n) + \delta_3 + (x_2^n - x_2^c) \varphi_1 - (x_1^n - x_1^c) \varphi_2 - w_n$ — конечный зазор (проникание) между упругим полупространством и штампом в узле t_n сетки T_p ; x_1^n, x_2^n — координаты узла t_n ; w_n — нормальное перемещение узла t_n ; $[\cdot]_a$ — скобка Айверсона (функция равная 1 для истинного аргумента и равная 0 в противном случае). Сеточная функция нормальных перемещений $W_p = (w_1, w_2, \dots, w_N)^T$, соответствующих решению Q_p задачи (25), вычисляется с помощью (19).

Таблица 1. Результаты решения тестовой задачи

Число ГЭ	Число итер.	Число МВП	Время счета	Относит. среднеквадрат. погрешности			
				Q_p	S	δ_3	φ_1
2^{12}	37	47	0.20	$61 \cdot 10^{-4}$	$10 \cdot 10^{-3}$	$62 \cdot 10^{-6}$	$90 \cdot 10^{-6}$
2^{14}	47	63	0.30	$26 \cdot 10^{-4}$	$36 \cdot 10^{-4}$	$15 \cdot 10^{-6}$	$15 \cdot 10^{-6}$
2^{16}	62	87	0.75	$14 \cdot 10^{-4}$	$24 \cdot 10^{-4}$	$35 \cdot 10^{-7}$	$56 \cdot 10^{-7}$
2^{18}	83	121	3.48	$73 \cdot 10^{-5}$	$10 \cdot 10^{-4}$	$10 \cdot 10^{-7}$	$12 \cdot 10^{-8}$
2^{20}	104	159	20.39	$36 \cdot 10^{-5}$	$53 \cdot 10^{-5}$	$25 \cdot 10^{-8}$	$62 \cdot 10^{-9}$
2^{22}	138	221	111.82	$18 \cdot 10^{-5}$	$29 \cdot 10^{-5}$	$61 \cdot 10^{-9}$	$38 \cdot 10^{-9}$
2^{24}	182	313	579.14	$91 \cdot 10^{-6}$	$13 \cdot 10^{-5}$	$15 \cdot 10^{-9}$	$18 \cdot 10^{-9}$

9. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Разработанный вычислительный алгоритм реализован на алгоритмическом языке FORTRAN с применением программного пакета для разработчиков NVIDIA HPC SDK. Для выполнения ДБПФ использовалась библиотека cuFFT. Вычисления производились на ПК с процессором Intel Core i7-7820X и видеокартой GeForce RTX 2080 Ti.

Все проведенные в данной работе расчеты выполнялись для упругого полупространства, модуль Юнга которого полагался равным $E = 10^5$ МПа, а коэффициент Пуассона — равным $\nu = 0.3$. Вычисления проводились с двойной точностью до выполнения условия (37) с нормой $\|\cdot\|_2$ и параметром $\varepsilon_1 = 10^{-8}$ на пяти последовательных итерациях при отсутствии рестартов.

При верификации алгоритма и разработанного программного обеспечения использовалась тестовая задача для штампа, форма основания которого описывается квадратичной функцией

$$\Phi^*(x_1, x_2) = \alpha_1 d_1 (2x_1/d_1 - 1)^2 + \alpha_2 d_2 (2x_2/d_2 - 1)^2. \quad (40)$$

Компоненты главного вектора и главного момента внешних сил, приложенных к штампу, задавались в виде:

$$F_3 = -f d_1 d_2 E, \quad M_1 = e_2 F_3 d_2, \quad M_2 = -e_1 F_3 d_1, \quad (41)$$

где $f > 0$ — безразмерный параметр; e_1, e_2 — безразмерные параметры, определяющие эксцентриситет равнодействующей внешней нагрузки относительно центра приведения $x^c = (d_1/2, d_2/2, 0)$.

В случае отсутствия эксцентриситета ($e_1 = e_2 = 0$) распределение контактного давления для рассматриваемого штампа описывается решением Герца [6]. Несложно показать аналитически, что при нагружении штампа с эксцентриситетом ($e_1 d, e_2 d$) относительно точки начального контакта x^c распределение контактного давления также будет описываться этим решением, смещенным вдоль осей координат Ox_1 и Ox_2 соответственно на $e_1 d$ и $e_2 d$, осадка штампа δ_3 уменьшится на $\alpha_1 d_1 e_1^2 + \alpha_2 d_2 e_2^2$, а сам штамп повернется на углы $\Delta\varphi_1 = -2\alpha_2 e_2$ и $\Delta\varphi_2 = 2\alpha_1 e_1$.

В табл. 1 для семи регулярных сеток, состоящих из одноузловых прямоугольных граничных элементов нулевого порядка, приведены относительные среднеквадратичные погрешности определения сеточной функции нормальных напряжений Q_p , площади фактического контакта S , осадки штампа δ_3 и угла его поворота φ_1 , а также данные о числе итераций, количестве матрично-векторных произведений (МВП) и времени счета в секундах. Расчеты выполнялись для квадратных в плане штампов ($d_1 = d_2 = 1.0$) при следующих значениях параметров: $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.3 \times 10^{-4}$, $f = 10^{-4}$, $e_1 = e_2 = 0.05$.

Также проведено сравнение численных решений задач, в которых область фактического контакта состояла из совокупности отдельных пятен контакта, с решениями, полученными с помощью алгоритмов [17] и [18]. Рассматривались задачи для гладких прямоугольных в плане штампов с регулярным поверхностным микрорельефом, состоящим из $K_1 \times K_2$ микровыступов. Номинальная область контакта Γ_p имела вид (24), а форма основания штампов задавалась функцией

$$\Phi(x_1, x_2) = \Phi_0(x_1, x_2) + \Psi_1(\xi_1)/K_1 + \Psi_2(\xi_2)/K_2, \quad (42)$$

где $\Phi_0(x_1, x_2)$ — выпуклая функция, определяющая макроформу штампа; $\Psi_1(\xi_1)$, $\Psi_2(\xi_2)$ — строго выпуклые функции, характеризующие форму микровыступов; $\xi_1 = \{K_1 x_1/d_1\}$, $\xi_2 = \{K_2 x_2/d_2\}$ — «быстрые» координаты, $\{\cdot\}$ — дробная часть числа.

Таблица 2. Количество итераций и МВП

$K_1 \times K_2$	Число ГЭ	Алгоритм 1		Алгоритм 2		Алгоритм 3	
		Итер.	МВП	Итер.	МВП	Итер.	МВП
1×1	4096	39	79	62	81	30	36
2×2	16384	49	99	89	124	40	50
4×4	65536	63	127	122	166	55	74
8×8	262144	88	177	205	313	70	95
16×16	1048576	133	267	218	315	97	139
32×32	4194304	289	579	415	646	138	213
64×64	16777216	699	1399	896	1540	191	313
128×128	67108864	1008	2017	1480	2646	264	438

Для заданной тройки функций $\{\Phi_0, \Psi_1, \Psi_2\}$ формула (42) определяет двухпараметрическое семейство штампов $\Xi(K_1, K_2)$, в качестве параметров которого выступают числа микровыступов K_1 и K_2 вдоль сторон штампа. Отдельные штампы этого семейства и относящиеся к ним величины будем обозначать мультииндексом $K = (K_1, K_2)$. Штампы, принадлежащие к одному семейству, имеют одинаковую макроформу, а поперечные сечения их микровыступов, параллельные соответствующим координатным плоскостям, являются подобными.

При проведении расчетов необходимое количество граничных элементов определялось путем сравнения решений, полученных на вложенных сетках при их двукратном последовательном измельчении. Приведенные далее численные решения для штампов семейства $\Xi(K_1, K_2)$ получены на сетках, в которых каждый микровыступ аппроксимировался 64×64 или 128×128 граничными элементами.

В табл. 2 приведены данные о числе итераций и количестве МВП для трех вычислительных алгоритмов — алгоритма 1 [17], алгоритма 2 [18] и алгоритма 3, предложенного в данной работе. Для сравнительной оценки вычислительной эффективности рассматриваемых алгоритмов следует использовать данные о количестве МВП, так как затраты на вычисление МВП составляют более 95% общего времени работы алгоритмов. Учитывая возможности алгоритма 1 при постановке тестовых задач использовалось лишь первое из уравнений равновесия штампа (5) и полагалось $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Расчеты выполнялись для семейства квадратных в плане штампов ($d_1 = d_2 = d$):

$$\begin{aligned}\Phi_0(x_1, x_2) &= 3 \times 10^{-5} d(2x_1/d - 1)^2 + 3 \times 10^{-5} d(2x_2/d - 1)^2, \\ \Psi_1(\xi_1) &= 10^{-4} d(2\xi_1 - 1)^4, \quad \Psi_2(\xi_2) = 10^{-4} d(2\xi_2 - 1)^4.\end{aligned}$$

Значения параметров в (41) принимались следующими: $e_1 = e_2 = 0$, $f = 2 \times 10^{-5}$. Выполненные расчеты показали, что относительные среднеквадратичные расхождения решений (сеточных функций нормальных напряжений Q_p) не превышают 10^{-7} для всех пар алгоритмов.

Аналогично [18] для оценки вычислительной эффективности разработанного алгоритма в качестве метрик использовались средние значения $\bar{\mu}_i$ и $\bar{\mu}_m$ отношений

$$\mu_i = n_i/N, \quad \mu_m = n_m/N,$$

где n_i — количество итераций; n_m — число МВП; N — число неизвестных задачи квадратичного программирования (25). Усреднение проводилось для одинаковых значений параметра N по всем проведенным расчетам (более тысячи) для штампов разной формы и различных условий их нагружения. Из данных, приведенных в табл. 3, следует, что с ростом числа неизвестных N значения $\bar{\mu}_i$ и $\bar{\mu}_m$ уменьшаются. Отметим, что приведенные данные о вычислительных затратах существенно меньше теоретических оценок, полученных для алгоритма [14].

Апостериорный анализ проводился для всех полученных численных решений. В результате установлено, что при проведении вычислений с двойной точностью во всех случаях $\epsilon_q = 0$, а для остальных параметров выполнялись неравенства: $\epsilon_f < 10^{-8}$, $\epsilon_m < 10^{-7}$, $\epsilon_{zp} < 10^{-10}$ и $\epsilon_{zm} < 10^{-8}$.

Установлен ряд закономерностей процесса вдавливания штампов семейства $\Xi(K_1, K_2)$ с плоским основанием ($\Phi_0 \equiv 0$) в упругое полупространство. Рассмотрим процесс вдавливания штампа $K = (K_1, K_2)$ при изменении в (41) безразмерного параметра внешней нагрузки f в интервале $[0, f^*]$ и проведем численный анализ

Таблица 3. Метрики для оценки вычислительной эффективности алгоритма

N	262144	1048576	4194304	16777216	67108864
$\bar{\mu}_i$	$0.438 \cdot 10^{-3}$	$0.150 \cdot 10^{-3}$	$0.514 \cdot 10^{-4}$	$0.177 \cdot 10^{-4}$	$0.619 \cdot 10^{-5}$
$\bar{\mu}_m$	$0.548 \cdot 10^{-3}$	$0.203 \cdot 10^{-3}$	$0.751 \cdot 10^{-4}$	$0.277 \cdot 10^{-4}$	$0.102 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4. Среднеквадратичные относительные отклонения $\tilde{\epsilon}_i = 10^5 \cdot \epsilon_i$

$\tilde{\epsilon}_i$	Номер семейства	Штамп $K = (K_1, K_2)$			
		(4, 4)	(8, 8)	(16, 16)	(32, 32)
$\tilde{\epsilon}_0$	1	1517	737	316	103
	2	1181	556	227	71
	3	1643	801	347	114
	4	2502	1266	562	190
$\tilde{\epsilon}_1$	1	2676	1197	497	162
	2	1210	531	217	70
	3	3400	1525	635	207
	4	11531	5227	2192	720
$\tilde{\epsilon}_3$	1	1180	528	219	71
	2	528	231	94	30
	3	1500	673	280	91
	4	5066	2299	965	317

зависимости от этого параметра следующих характеристик контактного взаимодействия: относительной фактической площади контакта

$$s \equiv \frac{1}{\text{meas } \Gamma_p} \int_{\Gamma_p} [\sigma_{33} < 0]_a d\xi_1 d\xi_2 = B_K^0(f),$$

углов поворота $\varphi_1 = B_K^1(f)$, $\varphi_2 = B_K^2(f)$ и осадки штампа $\delta_3 = B_K^3(f)$.

Введем на $[0, f^*]$ равномерную сетку $T_f = \{f_m = m\Delta f, \Delta f = f^*/M_f\}$ и сеточные функции $B_K^i = R_f B_K^i$, $i = 0, 1, 2, 3$, где R_f — оператор ограничения на сетку T_f . Для вычисления сеточных функций производилось пошаговое нагружение штампа. При проведении расчетов полагалось $M_f = 64$.

В ходе вычислительных экспериментов наблюдалась сходимость последовательностей сеточных функций $B_K^i, i = 0, 1, 2, 3$, при увеличении числа микровыступов. Далее приведены результаты расчетов для четырех семейств $\Xi(K_1, K_2)$ квадратных в плане штампов ($d_1 = d_2 = d$) с плоским основанием ($\Phi_0 \equiv 0$):

- 1) $\Psi_1(\xi_1) = a(2\xi_1 - 1)^2$, $\Psi_2(\xi_2) = a(2\xi_2 - 1)^2$;
- 2) $\Psi_1(\xi_1) = a(2\xi_1 - 1)^4$, $\Psi_2(\xi_2) = a(2\xi_2 - 1)^4$;
- 3) $\Psi_1(\xi_1) = a[1 - \cos(\pi(\xi_1 - 0.5))]$, $\Psi_2(\xi_2) = a[1 - \cos(\pi(\xi_2 - 0.5))]$;
- 4) $\Psi_1(\xi_1) = a[1 - \cos^2(\pi(\xi_1 - 0.5))]$, $\Psi_2(\xi_2) = a[1 - \cos^2(\pi(\xi_2 - 0.5))]$,

где $a = 10^{-4}d$. Параметры, определяющие эксцентриситет равнодействующей внешней нагрузки, принимались равными $e_1 = e_2 = 0.1$, вследствие чего $\varphi_1 = -\varphi_2$.

В табл. 4 указаны относительные среднеквадратичные расхождения

$$\epsilon_i = \|B_K^i - B_Q^i\|_2 / \|B_Q^i\|_2, \quad i = 0, 1, 3,$$

где $Q = (64, 64)$ — мультииндекс штампа с наибольшим числом микровыступов в серии расчетов. Значения параметра f^* для семейств штампов 1–4 выбирались таким образом, чтобы обеспечить полный контакт всех

штампов семейства с полупространством и полагались равными соответственно: 3.6×10^{-3} , 5.8×10^{-3} , 3×10^{-3} и 1.1×10^{-3} .

На основании результатов вычислительных экспериментов можно предположить существование для каждого из рассмотренных семейств штампов $\Xi(K_1, K_2)$ набора предельных кривых $s = B^0(f)$, $\varphi_1 = B^1(f)$, $\varphi_2 = B^2(f)$ и $\delta_3 = B^3(f)$.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный вычислительный алгоритм решения задач одностороннего дискретного контакта для упругого полупространства может быть также использован для решения других классов пространственных и плоских контактных задач, в которых удастся аналитически или численно построить ОПС, отображающий в номинальной области контакта нормальные напряжения в нормальные перемещения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. М.: Наука, 2001. 478 с.
2. Аргатов И.И., Дмитриев Н.Н. Основы теории упругого дискретного контакта. СПб: Политехника, 2003. 233 с.
3. Попов В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения. От нанотрибологии до динамики землетрясений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 352 с.
4. Barber J.R. Contact Mechanics. Cham: Springer, 2018. 585 p.
5. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.
6. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
7. Горячева И.Г., Цуканов И.Ю. Развитие механики дискретного контакта с приложениями к исследованию фрикционного взаимодействия деформируемых тел // Прикл. матем. и механ. 2020. Т. 84. № 6. С. 757–789.
8. Kravchuk A.S., Neittaanmaki P.J. Variational and Quasi-Variational Inequalities in Mechanics. Dordrecht: Springer, 2007. 329 p.
9. Wriggers P. Computational contact mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 2006. 518 p.
10. Yastrebov V.A. Numerical Methods in Contact Mechanics. New York: ISTE/Wiley, 2013. 416 p.
11. Eck C., Jarusek J., Krbec M. Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems. New York: CRC Press, 2005. 398 p.
12. Sofonea M., Matei A. Mathematical Models in Contact Mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2012. 280 p.
13. Caratina A. Variational Inequalities and Frictional Contact Problems. Cham: Springer, 2014. 235 p.
14. Поляк Б.Т. Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 807–821.
15. Dostal Z. Optimal Quadratic Programming Algorithms. With Applications to Variational Inequalities. New York: Springer, 2009. 284 p.
16. Dostal Z., Kozubek T., Sadowska M., Vondrak V. Scalable Algorithms for Contact Problems. New York: Springer, 2016. 340 p.
17. Polonsky I.A., Keer L.M. A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques // Wear. 1999. V. 231. № 2. P. 206–219.
18. Бобылев А.А. Применение метода сопряженных градиентов к решению задач дискретного контакта для упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2022. № 2. С. 154–172.
19. Бобылев А.А. Алгоритм решения задач дискретного контакта для упругого слоя // Изв. РАН. МТТ. 2023, № 2. С. 70–89.

20. *Amrouche C., Girault V., Giroire J.* Weighted Sobolev spaces for Laplace's equation in $\mathbb{R}^n$ // J. Math. Pures Appl. 1994. V. 73. № 6. P. 579–606.
21. *Хлуднев А.М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 252 с.
22. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* Boundary Integral Equations. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. 620 p.
23. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковицкий Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 448 с.
24. *McLean W.* Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. 357 p.
25. *Davis P.J.* Circulant matrices. New York: Wiley-Interscience, 1979. 250 p.
26. *Wang Q.J., Sun L., Zhang X., Liu S., Zhu D.* FFT-Based Methods for Computational Contact Mechanics // Front. Mech. Eng. 2020. V. 6. № 61. P. 92–113.
27. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М.* Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 320 с.
28. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
29. *Beale E.M.L.* A derivative of conjugate gradients // Numerical Methods for Nonlinear Optimization. London: Academic Press, 1972. P. 39–43.

APPLICATION OF THE CONJUGATE GRADIENT METHOD FOR SOLVING UNILATERAL DISCRETE CONTACT PROBLEMS FOR AN ELASTIC HALF-SPACE

A. A. Bobylev*

119991 Moscow, Leninskie Gory, Lomonosov Moscow State University, Russia

**e-mail: abobylov@gmail.com*

Received: 15.03.2024

Revised: 27.05.2024

Accepted: 25.07.2024

Abstract. The problems of unilateral discrete contact of an elastic half-space and a rigid punch of finite dimensions with a surface microrelief are considered. A variational formulation of the problems is obtained in the form of a boundary variational inequality using the Poincare-Steklov operator, which maps normal stresses into normal displacements on a part of the boundary of an elastic half-space. The minimization problem equivalent to the variational inequality is presented, as a result of approximation of which a quadratic programming problem with constraints in the form of equalities and inequalities is obtained. To solve this problem, a new computational algorithm based on the conjugate gradient method is proposed, which includes three equations of punch equilibrium in the calculation. The algorithm belongs to the class of active set methods and takes into account the specifics of the set of constraints. Some patterns of contact interaction of surfaces with regular microrelief have been established.

Keywords: unilateral discrete contact, boundary variational inequality, Poincare-Steklov operator, quadratic programming problem, conjugate gradient method.

ИТЕРАЦИОННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СОРБЦИИ¹⁾

© 2024 г. А. М. Денисов^{1,*}, Чжу Дунцин^{1,**}

¹ 119999 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия

*e-mail: den@cs.msu.ru

**e-mail: zhudq1002@163.com

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.

Переработанный вариант 21.05.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Рассматривается обратная коэффициентная задача для математической модели динамики сорбции. Обратная задача сводится к нелинейным операторным уравнениям относительно неизвестной функции. Эти уравнения используются для построения и обоснования сходимости итерационных методов решения обратной задачи. Приводятся примеры применения предложенных итерационных методов для численного решения обратной задачи. Библ. 29. Фиг. 2.

Ключевые слова: обратная задача, динамика сорбции, нелинейные операторные уравнения, итерационные методы.

DOI: 10.31857/S0044466924110135, **EDN:** KFUOVN

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование обратных задач для уравнений математической физики и разработка методов их решения является одним из активно развивающихся направлений современной прикладной математики. Многообразие обратных задач определяется различными типами уравнений, неизвестных функций, а также видом дополнительной информации, используемой для их поиска. К настоящему времени обратные задачи и методы их решения изучены в большом количестве работ (см., например, [1]–[8] и имеющуюся там библиографию). Среди разнообразных методов решения обратных задач можно выделить итерационные методы, успешно применяемые для решения как линейных, так и нелинейных обратных задач [9]–[14].

Математическое моделирование является одним из важных методов изучения процессов динамики сорбции и ионообмена [15]–[19]. Обратные задачи для математических моделей динамики сорбции возникают и при теоретическом анализе процессов переноса и поглощения вещества и при обработке и интерпретации результатов сорбционных экспериментов. Исследованию обратных задач динамики сорбции и разработке методов их решения посвящены публикации [20]–[27]. В работах [28], [29] были предложены итерационные методы решения обратных задач динамики сорбции с переменным кинетическим коэффициентом. В этой статье подобная обратная задача решается для другой математической модели динамики сорбции.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СОРБЦИИ

Рассмотрим следующую математическую модель процесса динамики сорбции:

$$u_x(x, t) + a_t(x, t) = 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$a_t(x, t) = \gamma(t)(\varphi(u(x, t)) - a(x, t)), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$a(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

где $u(x, t)$ — концентрация вещества в порах сорбента, $a(x, t)$ — концентрация вещества в сорбенте, $\mu(t)$ — входная концентрация, $\gamma(t)$ — кинетический коэффициент, $\varphi(s)$ — функция, характеризующая поглощающие свойства сорбента, $Q_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$.

Будем предполагать, что функции $\mu(t)$, $\gamma(t)$, $\varphi(s)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\mu, \gamma \in C[0, T], \quad \mu(t) > 0, \quad \gamma(t) > 0, \quad t \in [0, T]; \quad (5)$$

$$\varphi(s) \in C^1(R), \quad \varphi(0) = 0, \quad 0 < \varphi'(s) \leq \varphi_1, \quad s \in R, \quad (6)$$

где φ_1 — положительная постоянная.

Дадим определение решения задачи (1)–(4).

Определение 1. Решением задачи (1)–(4) будем называть пару функций $u(x, t)$, $a(x, t)$, таких, что u , a , u_x , $a_t \in Q_T$ и $u(x, t)$, $a(x, t)$ удовлетворяют (1)–(4).

Справедлива следующая лемма о существовании единственного решения задачи (1)–(4) и его свойствах.

Лемма 1. Пусть функции $\gamma(t)$, $\mu(t)$ и $\varphi(s)$ удовлетворяют условиям (5), (6). Тогда существует единственная пара функций $u(x, t)$, $a(x, t)$, являющихся решением задачи (1)–(4). Кроме того,

$$u(x, t) > 0, \quad (x, t) \in Q_T, \quad a(x, t) > 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t \leq T. \quad (7)$$

Доказательство. Предположим, что функции $u(x, t)$, $a(x, t)$ являются решением задачи (1)–(4). Интегрируя уравнение (2) с начальным условием (4), получим

$$a(x, t) = \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) \varphi(u(x, \tau)) d\tau, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (8)$$

Из уравнений (1), (2) и (7) следует, что

$$u_x(x, t) = -\gamma(t) \varphi(u(x, t)) + \gamma(t) \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) \varphi(u(x, \tau)) d\tau, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (9)$$

Интегрируя это уравнение с условием (3), получим интегральное уравнение для функции $u(x, t)$:

$$u(x, t) = \mu(t) - \gamma(t) \int_0^x \varphi(u(s, t)) ds + \gamma(t) \int_0^x \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) \varphi(u(s, \tau)) d\tau ds, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (10)$$

Следовательно, если функции $u(x, t)$, $a(x, t)$ являются решением задачи (1)–(4), то они удовлетворяют системе интегральных уравнений (8), (10).

Справедливо и обратное. Пусть функции u , $a \in C(Q_T)$ и удовлетворяют уравнениям (8), (10). Очевидно, что тогда u_x , $a_t \in C(Q_T)$ и $u(x, t)$, $a(x, t)$ являются решением задачи (1)–(4). Следовательно, для доказательства существования и единственности решения этой задачи достаточно доказать существование и единственность непрерывных решений $u(x, t)$, $a(x, t)$ системы интегральных уравнений (8), (10). Так как из уравнения (8) следует, что функция $a(x, t)$ однозначно определяется функцией $u(x, t)$, то достаточно доказать, что непрерывное решение $u(x, t)$ уравнения (10) существует и единственно. Для доказательства используем метод последовательных приближений.

Рассмотрим на Q_T последовательность функций $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, таких, что $u_0(x, t) = 0$,

$$u_n(x, t) = \mu(t) - \gamma(t) \int_0^x \varphi(u_{n-1}(s, t)) ds + \gamma(t) \int_0^x \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) \varphi(u_{n-1}(s, \tau)) d\tau ds. \quad (11)$$

Покажем, используя метод математической индукции, что справедлива оценка для всех $n \geq 1$

$$|u_n(x, t) - u_{n-1}(x, t)| \leq \|\mu\|_{C[0, T]} (2\varphi_1 \|\gamma\|_{C[0, T]})^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (x, t) \in Q_T. \quad (12)$$

При $n = 1$ оценка (12) справедлива. Предположим, что она верна при $n = m$ и докажем ее для $n = m + 1$. Так как

$$\begin{aligned} |u_{m+1}(x, t) - u_m(x, t)| &\leq \gamma(t) \int_0^x |\varphi(u_m(s, t)) - \varphi(u_{m-1}(s, t))| ds + \\ &+ \gamma(t) \int_0^x \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) |\varphi(u_m(s, \tau)) - \varphi(u_{m-1}(s, \tau))| d\tau ds \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|\gamma\|_{C[0,T]} \varphi_1 \int_0^x |u_m(s,t) - u_{m-1}(s,t)| ds + \\
&+ \|\gamma\|_{C[0,T]} \varphi_1 \int_0^x \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) |u_m(s,\tau) - u_{m-1}(s,\tau)| d\tau ds \leq \\
&\leq \|\gamma\|_{C[0,T]} \varphi_1 \|\mu\|_{C[0,T]} (2\varphi_1 \|\gamma\|_{C[0,T]})^{m-1} \int_0^x \frac{s^{m-1}}{(m-1)!} ds \left(1 + \int_0^t \gamma(\tau) e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} d\tau \right) \leq \\
&\leq \|\mu\|_{C[0,T]} (2\varphi_1 \|\gamma\|_{C[0,T]})^m \frac{x^m}{m!}, \quad (x,t) \in Q_T,
\end{aligned}$$

то оценка (12) справедлива при любом $n \geq 1$.

Из оценки (12) следует, что при $n \rightarrow \infty$ последовательность непрерывных функций $u_n(x,t)$ равномерно на Q_T сходится к непрерывной в Q_T функции $u(x,t)$. Переходя в формуле (11) к пределу при $n \rightarrow \infty$ получим, что $u(x,t)$ является решением уравнения (10). Таким образом существование решения задачи (1)–(4) доказано.

Докажем единственность. Предположим, что существует две пары функций $u_i(x,t)$, $a_i(x,t)$, $i = 1, 2$, являющихся решением задачи (1)–(4). Следовательно, функции $u_i(x,t)$ удовлетворяют интегральному уравнению (10). Тогда для $v(x,t) = |u_1(x,t) - u_2(x,t)|$ справедливо неравенство

$$v(x,t) \leq \varphi_1 \gamma(t) \int_0^x v(s,t) ds + \varphi_1 \gamma(t) \int_0^x \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) v(s,\tau) d\tau ds, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Из этого неравенства и леммы Гронуолла–Беллмана следует, что $v(x,t) = 0$ в Q_T . Тогда $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, $a_1(x,t) = a_2(x,t)$ в Q_T и единственность решения задачи (1)–(4) доказана.

Докажем неравенства (7). Из уравнения (2) и условий (3)–(6) следует, что $u(x,0) > \mu(0) \exp(-\gamma(0)\varphi_1 x) > 0$, $x \in [0,l]$. Покажем, что $u(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in Q_T$. Предположим противное. Тогда существует точка (x_1, t_1) , $0 < x_1 \leq l$, $0 < t_1 \leq T$, такая, что $u(x_1, t_1) = \min_{Q_T} u(x,t) < 0$. Тогда $u_x(x_1, t_1) \leq 0$.

Но положив в уравнении (9) $x = x_1$, $t = t_1$, имеем

$$\begin{aligned}
u_x(x_1, t_1) &= -\gamma(t_1)\varphi(u(x_1, t_1)) + \gamma(t_1) \int_0^{t_1} \exp\left(-\int_\tau^{t_1} \gamma(\theta) d\theta\right) \gamma(\tau)\varphi(u(x_1, \tau)) d\tau \geq \\
&\geq -\gamma(t_1)\varphi(u(x_1, t_1)) + \gamma(t_1) \int_0^{t_1} \exp\left(-\int_\tau^{t_1} \gamma(\theta) d\theta\right) \gamma(\tau)\varphi(u(x_1, t_1)) d\tau > 0.
\end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает неравенство $u(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in Q_T$. Из этого неравенства, положительности функции $u(x,0)$ и уравнения (8) следует положительность $a(x,t)$ при $0 \leq x \leq l$, $0 < t \leq T$. Таким образом, осталось показать строгую положительность $u(x,t)$ в Q_T . Если предположить существование точки (x_0, t_0) такой, что $u(x_0, t_0) = 0$, то из условия минимума имеем $u_x(x_0, t_0) \leq 0$, а из уравнения (2) $u_x(x_0, t_0) = -a_t(x_0, t_0) = \gamma(t_0)a(x_0, t_0) > 0$. Полученное противоречие доказывает строгую положительность $u(x,t)$ в Q_T и лемма доказана.

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА И ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Перейдем к постановке обратной задачи. Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1)–(4) от функции $\gamma(t)$ будем обозначать его $u(x,t;\gamma)$, $a(x,t;\gamma)$.

Сформулируем обратную **Задачу**. Пусть функции $\varphi(s)$ и $\mu(t)$ заданы, а $\gamma(t)$ неизвестна. Требуется определить $\gamma(t)$ по дополнительной информации о решении задачи (1)–(4)

$$u(l,t;\gamma) = g(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13)$$

где $g(t)$ — заданная положительная непрерывная функция.

Пусть $t_0 \in (0, T]$. Дадим определение решения обратной задачи на отрезке $[0, t_0]$.

Определение 2. Функция $\gamma(t)$ называется решением обратной задачи на отрезке $[0, t_0]$, если $\gamma \in C[0, t_0]$, $\gamma(t) > 0$, $t \in [0, t_0]$, $u(x,t;\gamma)$, $a(x,t;\gamma)$ удовлетворяют (1)–(4), (13) для $(x,t) \in Q_{t_0}$.

Покажем, что решение обратной задачи эквивалентно решению нелинейного операторного уравнения.

Введем функцию

$$\Phi(s) = \int_b^s \frac{d\xi}{\varphi(\xi)},$$

где b — заданная положительная постоянная, такая, что $b < \min\{\min_{[0,T]} \mu(t), \min_{[0,T]} g(t)\}$.

Пусть функция $\gamma(t)$ является решением обратной задачи на отрезке $[0, t_0]$. Тогда функция $u(x, t; \gamma)$ удовлетворяет уравнению (9). Поделив это уравнение на $\varphi(u(x, t; \gamma))$, проинтегрировав от 0 до x , используя введенную функцию $\Phi(s)$ и условие (3), получим

$$\Phi(u(x, t; \gamma)) - \Phi(\mu(t)) = -\gamma(t)x + \int_0^x \frac{\gamma(t)}{\varphi(u(s, t; \gamma))} \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) \varphi(u(s, \tau; \gamma)) d\tau ds, \quad (x, t) \in Q_{t_0}. \quad (14)$$

Положив в этом уравнении $x = l$ и используя условие (13), имеем

$$\Phi(g(t)) - \Phi(\mu(t)) = -\gamma(t)l + \int_0^l \frac{\gamma(t)}{\varphi(u(s, t; \gamma))} \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) \varphi(u(s, \tau; \gamma)) d\tau ds, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (15)$$

Таким образом, мы показали, что, если функция $\gamma(t)$ является решением обратной задачи на отрезке $[0, t_0]$, то она удовлетворяет уравнению (15).

Справедливо и обратное. Пусть функция $\bar{\gamma}(t)$ является непрерывным, положительным решением уравнения (15) на отрезке $[0, t_0]$. Тогда функция $u(x, t; \bar{\gamma})$ удовлетворяет уравнению (14). Полагая в уравнении (14) $x = l$ и учитывая уравнение (15), имеем $\Phi(u(l, t; \bar{\gamma})) = \Phi(g(t))$, $0 \leq t \leq t_0$. Следовательно, $u(x, t; \bar{\gamma})$ удовлетворяет условию (13) для $t \in [0, t_0]$, а значит, $\bar{\gamma}(t)$ является решением обратной задачи на отрезке $[0, t_0]$.

Уравнение (15) можно записать в виде следующего операторного уравнения:

$$\gamma(t) = (A_1\gamma)(t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (16)$$

где оператор $(A_1\gamma)(t)$ определяется в виде

$$(A_1\gamma)(t) = (\Phi(\mu(t)) - \Phi(g(t))) \times \left[l - \int_0^l \frac{1}{\varphi(u(s, t; \gamma))} \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) \varphi(u(s, \tau; \gamma)) d\tau ds \right]^{-1}. \quad (17)$$

Можно записать и другой вариант уравнения (15):

$$\gamma(t) = (A_2\gamma)(t), \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (18)$$

где оператор $(A_2\gamma)(t)$ определяется в виде

$$(A_2\gamma)(t) = \frac{\Phi(\mu(t)) - \Phi(g(t))}{l} + l^{-1} \int_0^l \frac{\gamma(t)}{\varphi(u(s, t; \gamma))} \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) \varphi(u(s, \tau; \gamma)) d\tau ds. \quad (19)$$

Очевидно, что положительное непрерывное решение уравнения (16) или (18) является решением обратной задачи.

4. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ И ИХ СХОДИМОСТЬ

Операторные уравнения (16) или (18) позволяют определить итерационные методы для их решения.

Рассмотрим вопрос о множестве на котором мы будем доказывать сходимость этих методов. Пусть функция $\gamma(t)$ является решением обратной задачи на отрезке $[0, t_0]$. Положив в уравнении (15) $t = 0$, имеем $\gamma(0) = \gamma_0 = (\Phi(\mu(0)) - \Phi(g(0)))l^{-1}$. Таким образом, значение искомого решения обратной задачи в нуле известно, а необходимым условием разрешимости обратной задачи является неравенство $\mu(0) > g(0)$.

Рассмотрим множество

$$\Gamma_0 = \{\gamma(t) : \gamma \in C[0, t_0], \quad \gamma_0/2 \leq \gamma(t) \leq 3\gamma_0/2, \quad t \in [0, t_0]\},$$

где $t_0 \in (0, T]$.

Определим итерационный процесс для решения операторного уравнения (16). Рассмотрим следующую последовательность функции $\gamma_0(t) = \gamma_0$:

$$\gamma_{n+1}(t) = (A_1\gamma_n)(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (20)$$

Установим сходимость этого итерационного процесса. Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 2. Пусть функции $\mu(t)$ и $\varphi(s)$ удовлетворяют следующим условиям: $\mu \in C[0, T]$; $\mu(t) > 0$, $t \in [0, T]$; $\varphi \in C^1(R)$, $\varphi(0) = 0$, $0 < \varphi'(s) \leq \varphi_1$, $s \in R$, $\varphi_1 = \text{const}$. Тогда для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0$ справедлива оценка

$$\max_{Q_{t_0}} |u(x, t, \gamma_1) - u(x, t, \gamma_2)| \leq c_1 \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{C[0, t_0]}.$$

Здесь и далее через c_i обозначаются постоянные, не зависящие от $t_0 \in (0, T]$ и $\gamma \in \Gamma_0$.

Доказательство. Докажем равномерную ограниченность $u(x, t; \gamma)$ на множестве Γ_0 . Из уравнения (10) следует неравенство

$$u(x, t; \gamma) \leq \mu(t) + \gamma(t) \int_0^x \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta} \gamma(\tau) \varphi(u(s, \tau; \gamma)) d\tau ds, \quad (x, t) \in Q_{t_0}. \quad (21)$$

Введем функцию $U(t) = \max_{[0, t]} |u(x, t; \gamma)|$. Учитывая неравенство (21), имеем

$$U(t) \leq \|\mu\|_{C[0, T]} + \frac{9}{4} \gamma_0^2 \varphi_1 l \int_0^t U(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Следовательно,

$$u(x, t; \gamma) \leq U(t) \leq c_2, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad \forall \gamma \in \Gamma_0, \quad (22)$$

где $c_2 = \|\mu\|_{C[0, T]} \exp\left(\frac{9}{4} \gamma_0^2 \varphi_1 l T\right)$.

Используя неравенство (22) и уравнение (8), получим оценку для функции $a(x, t; \gamma)$:

$$a(x, t; \gamma) \leq \varphi_1 c_2, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad \forall \gamma \in \Gamma_0. \quad (23)$$

Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0$. Введем функции

$$v(x, t) = u(x, t; \gamma_1) - u(x, t; \gamma_2), \quad w(x, t) = a(x, t; \gamma_1) - a(x, t; \gamma_2), \quad \hat{\gamma}(t) = \gamma_1(t) - \gamma_2(t).$$

Так как функции $u(x, t; \gamma_i)$, $a(x, t; \gamma_i)$, $i = 1, 2$, являются решениями задачи (1)–(4) с функциями $\gamma_i(t)$ соответственно, то $v(x, t)$, $w(x, t)$, $\hat{\gamma}(t)$ удовлетворяют следующим уравнениям и условиям:

$$v_x + w_t = 0, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad (24)$$

$$w_t = \hat{\gamma}(t)p(x, t) + q(x, t)v - \gamma_2(t)w, \quad (x, t) \in Q_{t_0}, \quad (25)$$

$$v(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_0, \quad (26)$$

$$w(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (27)$$

где

$$p(x, t) = \varphi(u_1(x, t; \gamma)) - a_1(x, t; \gamma),$$

$$q(x, t) = \gamma_2(t) \int_0^1 \varphi'(u_2(x, t) + \theta(u_1(x, t) - u_2(x, t))) d\theta.$$

Интегрируя уравнение (25) с условием (27), имеем

$$w(x, t) = \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma_2(\theta) d\theta} (\hat{\gamma}(\tau)p(x, \tau) + q(x, \tau)v(x, \tau)) d\tau, \quad (x, t) \in Q_{t_0}. \quad (28)$$

Из уравнений (24), (25), (28) и условия (26), следует, что

$$v(x, t) = \int_0^x e^{-\int_\xi^x q(\xi, t) d\xi} \gamma_2(t) \int_0^t e^{-\int_\tau^t \gamma_2(\theta) d\theta} (\hat{\gamma}(\tau)p(s, \tau) + q(s, \tau)v(s, \tau)) d\tau ds -$$

$$-\int_0^x e^{-\int_s^x q(\xi, t) d\xi} \hat{\gamma}(t) p(s, t) ds, \quad (x, t) \in Q_{t_0}. \quad (29)$$

Учитывая оценки (22), (23), имеем

$$|v(x, t)| \leq l\varphi_1 c_2 (3\gamma_0 T + 2) \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{C[0, t_0]} + \frac{9}{4} \gamma_0^2 \varphi_1 \int_0^x \int_0^t |v(s, \tau)| d\tau ds, \quad (x, t) \in Q_{t_0}.$$

Следовательно,

$$\max_{Q_{t_0}} |u(x, t, \gamma_1) - u(x, t, \gamma_2)| \leq c_1 \|\gamma_1 - \gamma_2\|_{C[0, t_0]},$$

где $c_1 = \varphi_1 c_2 l (3\gamma_0 T + 2) e^{\frac{9}{4} \gamma_0^2 l T}$, и лемма доказана.

Теорема 1. Пусть функция $\varphi(s)$ удовлетворяет условиям (6), а $\mu, g \in C[0, T]$, $\mu(t) > 0, g(t) > 0, t \in [0, T]$, $\mu(0) > g(0)$. Тогда существует $t_0 \in (0, T]$ такое, что последовательность функций $\gamma_n(t)$, определенных формулой (20), равномерно сходится на отрезке $[0, t_0]$ к решению обратной задачи.

Доказательство. Из принципа сжимающих отображений следует, что для доказательства теоремы достаточно показать, что существует $t_0 \in (0, T]$, при котором оператор A_1 отображает множество Γ_0 в себя и является сжимающим на этом множестве.

Найдем условие, при котором $A_1 \Gamma_0 \subseteq \Gamma_0$. Обозначим через μ_m минимум функции $\mu(t)$ на отрезке $[0, T]$. Из уравнений (1), (2), условия (3) и неравенств (7) следует, что

$$u(x, t; \gamma) \geq c_3 = \mu_m \exp(-3\gamma_0 \varphi_1 l / 2) \quad \forall \gamma \in \Gamma_0, \quad \forall (x, t) \in Q_T. \quad (30)$$

Используя неравенства (22), (30), имеем

$$\int_0^l \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta\right) \gamma(\tau) \frac{\varphi(u(s, \tau; \gamma))}{\varphi(u(s, t; \gamma))} d\tau ds \leq c_4 t_0 \quad \forall \gamma \in \Gamma_0, \quad \forall (x, t) \in Q_{t_0}, \quad (31)$$

где $c_4 = l 3\gamma_0 (2\varphi(c_3))^{-1} \varphi_1 c_2$.

Обозначим через $\omega_\mu(\delta)$ и $\omega_g(\delta)$ модули непрерывности функций $\Phi(\mu(t))$ и $\Phi(g(t))$ на отрезке $[0, T]$. Из определения оператора A_1 и неравенства (31) следует, что

$$\begin{aligned} |(A_1 \gamma)(t) - \gamma_0| &= |(A_1 \gamma)(t) - (A_1 \gamma)(0)| \leq \frac{|\Phi(\mu(t)) - \Phi(\mu(0)) - (\Phi(g(t)) - \Phi(g(0)))|}{l - c_4 t_0} + \\ &+ \frac{\Phi(\mu(0)) - \Phi(g(0))}{l(l - c_4 t_0)} \int_0^l \int_0^t \exp\left(-\int_\tau^t \gamma(\theta) d\theta\right) \gamma(\tau) \frac{\varphi(u(s, \tau; \gamma))}{\varphi(u(s, t; \gamma))} d\tau ds \leq \\ &\leq \frac{\omega_\mu(t_0) + \omega_g(t_0) + (\Phi(\mu(0)) - \Phi(g(0))) l^{-1} c_4 t_0}{l - c_4 t_0} \quad \forall \gamma \in \Gamma_0, \quad 0 \leq t \leq t_0. \end{aligned}$$

Таким образом, если некоторого $t_0 \in (0, T]$ выполнено неравенство

$$(\omega_\mu(t_0) + \omega_g(t_0) + (\Phi(\mu(0)) - \Phi(g(0))) l^{-1} c_4 t_0) (l - c_4 t_0)^{-1} \leq \gamma_0 / 2, \quad (32)$$

то оператор A_1 отображает множество Γ_0 в себя.

Найдем условие, при выполнении которого оператор A_1 будет сжимающим на множестве Γ_0 . Обозначим через Φ_M максимум модуля функции $\Phi(\mu(t)) - \Phi(g(t))$ на отрезке $[0, T]$. Из неравенства (31) следует, что для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0$ и $t \in [0, t_0]$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} |(A_1 \gamma_1)(t) - (A_1 \gamma_2)(t)| &\leq \Phi_M (l - c_4 t_0)^{-2} \times \\ &\times \int_0^l \int_0^t \left| \exp\left(-\int_\tau^t \gamma_1(\theta) d\theta\right) \gamma_1(\tau) \frac{\varphi(u(s, \tau; \gamma_1))}{\varphi(u(s, t; \gamma_1))} - \exp\left(-\int_\tau^t \gamma_2(\theta) d\theta\right) \gamma_2(\tau) \frac{\varphi(u(s, \tau; \gamma_2))}{\varphi(u(s, t; \gamma_2))} \right| d\tau ds. \end{aligned}$$

Используя лемму 2 и неравенство (30), имеем

$$\|A_1 \gamma_1 - A_1 \gamma_2\|_{C[0, T]} \leq \Phi_M (l - c_4 t_0)^{-2} l [(\varphi(c_3))^{-2} c_1 3\gamma_0 \varphi_1^2 c_2 / 2 + t_0 (\varphi(c_3))^{-1} 3\gamma_0 \varphi_1 c_2 / 2 +$$

$$+(\varphi(c_3))^{-1}\varphi_1c_2+(\varphi(c_3))^{-1}3\gamma_0\varphi_1c_1/2]t_0\|\gamma_1-\gamma_2\|_{C[0,T]} \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_0.$$

Следовательно, если t_0 таково, что

$$\begin{aligned} &\Phi_M(l-c_4t_0)^{-2}l[(\varphi(c_3))^{-2}c_13\gamma_0\varphi_1^2c_2/2+t_0(\varphi(c_3))^{-1}3\gamma_0\varphi_1c_2/2+ \\ &+(\varphi(c_3))^{-1}\varphi_1c_2+(\varphi(c_3))^{-1}3\gamma_0\varphi_1c_1/2]t_0 < 1, \end{aligned} \quad (33)$$

то оператор A_1 является сжимающим на множестве Γ_0 .

Очевидно, что существует $t_0 \in (0, T]$, для которого неравенства (32) и (33) выполнены. При этом t_0 оператор A_1 отображает множество Γ_0 в себя и является сжимающим на этом множестве. Теорема доказана.

Определим итерационный процесс для решения операторного уравнения (18). Рассмотрим последовательность функций $\gamma_0(t) = \gamma_0$,

$$\gamma_{n+1} = (A_2\gamma_n)(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (34)$$

Сходимость этого процесса обосновывается следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть функция $\varphi(s)$ удовлетворяет условиям (6), а $\mu, g \in C[0, T]$, $\mu(t) > 0, g(t) > 0, t \in [0, T]$, $\mu(0) > g(0)$. Тогда существует $t_0 \in (0, T]$ такое, что последовательность функций $\gamma_n(t)$, определенных формулой (34) равномерно сходится на отрезке $[0, t_0]$ к решению обратной задачи.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

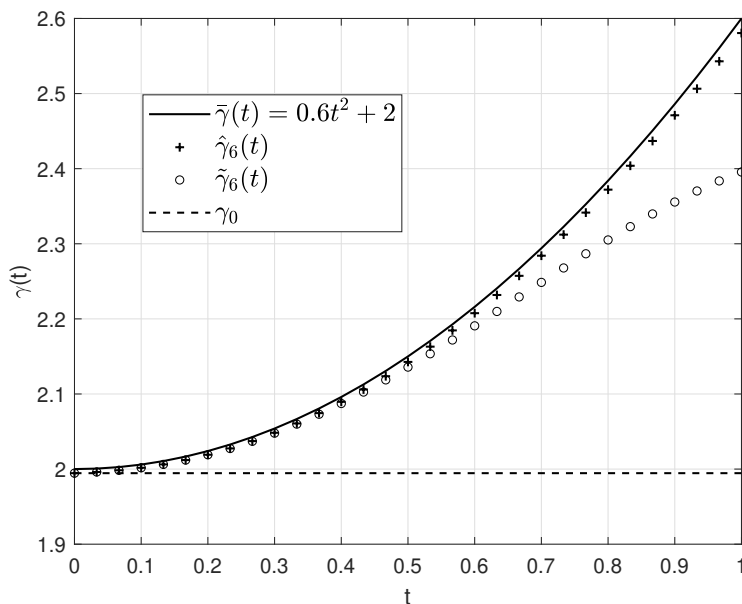
5. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Схема расчетов была такова. Задавались функции $\varphi(s)$, $\mu(t)$, $\bar{\gamma}(t)$, числа l и T . С ними итерационным методом (11) решалось уравнение (10), находилась функция $u(x, t; \bar{\gamma})$ и определялась $g(t) = u(l, t; \bar{\gamma})$. Затем с функцией $g(t)$ решалась обратная задача и результаты сравнивались с $\bar{\gamma}(t)$. Приведем численные примеры. Приближенные значения решений обратной задачи $\hat{\gamma}(t)$ и $\tilde{\gamma}(t)$ определялись в результате применения двух итерационных методов

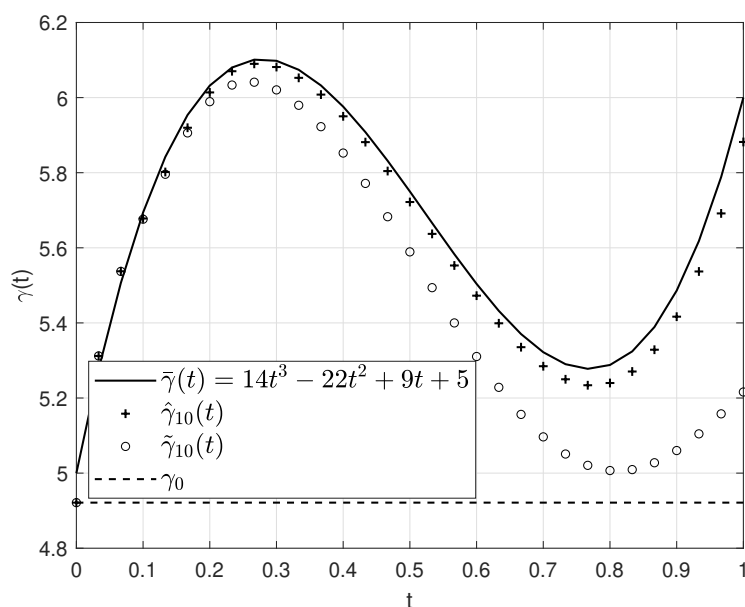
$$\gamma_{n+1}(t) = (A_1\gamma_n)(t), \quad \gamma_0(t) = \gamma_0; \quad \gamma_{n+1}(t) = (A_2\gamma_n)(t), \quad \gamma_0(t) = \gamma_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Расчеты проводились при $l = 1, T = 1, \mu(t) = t + 0.2, \varphi(s) = s(1 + s)^{-1}$. Число итераций N определялось из условия $\|\gamma_N(t) - \gamma_{N-1}(t)\|_{C[0, T]} \leq \varepsilon, \varepsilon = 0.001$.

На фиг. 1 изображены функция $\bar{\gamma}(t) = 0.6t^2 + 2$ и шестые итерации первого $\hat{\gamma}_6(t)$ и второго $\tilde{\gamma}_6(t)$ методов. Условие останова итераций в первом методе выполнено при $N = 9$, а во втором при $N = 25$. На фиг. 1 функции $\hat{\gamma}_9(t)$ и $\tilde{\gamma}_{25}(t)$ совпадают с $\bar{\gamma}(t)$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

На фиг. 2 изображены функция $\bar{\gamma}(t) = 14t^3 - 22t^2 + 9t + 5$ и десятые итерации первого $\hat{\gamma}_{10}(t)$ и второго $\tilde{\gamma}_{10}(t)$ методов. Условие останова итераций в первом методе выполнено при $N = 18$, а во втором при $N = 81$. На фиг. 2 функции $\hat{\gamma}_{18}(t)$ и $\tilde{\gamma}_{81}(t)$ совпадают с $\bar{\gamma}(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1987.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск.: Наука, 1969.
3. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
4. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
5. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.V. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.
6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: ЛКИ, 2009.
7. Кabanikhin С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008.
8. Hasanov A, Romanov V.G. Introduction to inverse problems for differential equations. New York: Springer, 2017.
9. Бимуратов С.Ш., Кabanikhin С.И. Решение одномерной обратной задачи электродинамики методом Ньютона–Канторовича // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1900–1915.
10. Monch L. A Newton method for solving inverse scattering problem for a sound-hard obstacle // Inverse problems. 1996. V. 12. № 3. P. 309–324.
11. Kabanikhin S.I., Scherzer O., Shichlenin M.A. Iteration method for solving a two-dimensional inverse problem for hyperbolic equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2003. V. 11. № 1. P. 1–23.
12. Гончарский А.В., Романов С.Ю. Итерационные методы решения обратной задачи ультразвуковой томографии // Вычисл. методы и программирование. 2015. Т. 6. № 4. С. 464–475.

13. *Баев А.В., Гаврилов С.В.* Итерационный метод решения обратной задачи рассеяния для системы уравнений акустики в слоисто-неоднородной среде с поглощением // Вестн. МГУ. Серия 15, Вычисл. матем. и кибернетика. 2018. № 2. С. 7–14.
14. *Денисов А.М.* Итерационный метод решения задачи определения коэффициента и источника в уравнении теплопроводности // Дифференц. ур-ния. 2022. Т. 58. № 6. С. 756–762.
15. *Тихонов А.Н., Жуховицкий А.А., Забезинский Я.Л.* Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала I // Ж. физ. химии. 1945. Т. 19. Вып. 6. С. 253–261.
16. *Дубинин М.М.* Кинетика и динамика физической адсорбции. М.: Наука, 1973.
17. *Венецианов Е.В., Рубинштейн Р.Н.* Динамика сорбции из жидких сред. М.: Наука, 1983.
18. *Денисов А.М., Лукин А.В.* Математические модели однокомпонентной динамики сорбции. М.: Изд-во МГУ, 1989.
19. *Коржов Е.Н.* Математическое моделирование процессов редокс-сорбции. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2016.
20. *Денисов А.М., Туйкина С.Р.* О некоторых обратных задачах неравновесной динамики сорбции // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 100–102.
21. *Lorenzi A., Paparoni E.* An inverse problem arising in the theory of absorption // *Applicable Analysis*. 1990. V. 36. № 3. P. 249–263.
22. *Muraviev D.N., Chanov A.V., Denisov A.M., Omarova F., Tuikina S.R.* A numerical method for calculating isotherms of ion exchange on impregnated sulfonate ion-exchangers based on data of dynamic experiments // *Reactive Polymers*. 1992. V. 17. № 1. P. 29–38.
23. *Denisov A.M., Lamos H.* An inverse problem for a nonlinear mathematical model of sorption dynamics with mixed-diffusional kinetics // *J. Inverse and Ill Posed Problems*. 1996. V. 4. № 3. P. 191–202.
24. *Щеглов А.Ю.* Метод решения обратной граничной задачи динамики сорбции с учетом диффузии внутри зерна // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 4. С. 580–590.
25. *Denisov A.M., Lorenzi A.* Recovering an unknown coefficient in an absorption model with diffusion // *J. Inverse and Ill Posed Problems*. 2007. V. 15. № 6. P. 599–610.
26. *Tuikina S.R., Solov'eva S.I.* Numerical solution of an inverse problem for a two-dimensional model of sorption dynamics // *Comput. Math. and Modeling*. 2012. V. 23. № 1. P. 34–41.
27. *Tuikina S.R.* A numerical method for the solution of two inverse problems in the mathematical model of redox sorption // *Comput. Math. and Modeling*. 2020. V. 31. № 1. P. 96–103.
28. *Денисов А.М., Чжу Дунцин.* Обратная задача для математической модели динамики сорбции с переменным кинетическим коэффициентом // Вестн. МГУ сер.15, Вычисл. матем. и кибернетика. 2022. № 4. С. 5–13.
29. *Денисов А.М., Чжу Дунцин.* Существование двух решений обратной задачи для математической модели динамики сорбции // Дифференц. ур-ния. 2023. Т. 59. № 10. С. 1433–1437.

ITERATIVE NUMERICAL METHODS FOR SOLVING THE PROBLEM OF DETERMINING THE COEFFICIENT IN THE MODEL OF SORPTION DYNAMICS

A. M. Denisov*, Zhu Dongqin**

119999 Moscow, Leninskie Gory, Moscow State University, Russia

**e-mail: den@cs.msu.ru*

***e-mail: zhudq1002@163.com*

Received: 02.04.2024

Revised: 21.05.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The inverse coefficient problem for a mathematical model of sorption dynamics is considered. The inverse problem is reduced to nonlinear operator equations with respect to an unknown function. These equations are used to construct and justify the convergence of iterative methods for solving the inverse problem. Examples of the application of the proposed iterative methods for the numerical solution of the inverse problem are given.

Keywords: inverse problem, sorption dynamics, nonlinear operator equations, iterative methods.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛЕННО-СТАТИСТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ОЦЕНКИ СРЕДНЕГО ПОТОКА ЧАСТИЦ В СЛУЧАЙНОЙ РАЗМНОЖАЮЩЕЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ¹⁾

© 2024 г. Г. З. Лотова^{1,2,*}, Г. А. Михайлов^{1,2,**}, С. А. Роженко^{1,***}

¹630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 6, ИВМиМГ СО РАН, Россия

²630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 1, НГУ, Россия

*e-mail: lot@osmf.sccc.ru

**e-mail: gam@sscc.ru

***e-mail: sergroj@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2024 г.

Переработанный вариант 16.05.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Изучаются аппроксимации случайных функций, численно моделируемые для исследования стохастического процесса переноса частиц, включая задачи о флуктуациях критичности процесса в случайных размножающих средах. Сформулирована простейшая сеточная модель изотропного случайного поля, воспроизводящая эффективную среднюю корреляционную длину, что обеспечивает высокую точность решения стохастических задач переноса при малом корреляционном масштабе. Предлагаемые алгоритмы апробированы при решении тестовой задачи оценки сверхэкспоненциального среднего потока частиц в случайной размножающей среде. Библ. 18. Фиг. 1. Табл. 6.

Ключевые слова: численное статистическое моделирование, случайная среда, поле Вороного, сеточная аппроксимация, поток частиц, сверхэкспоненциальная асимптотика, погрешность оценок, трудоемкость вычислений.

DOI: 10.31857/S0044466924110148, EDN: KFNRFZ

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. В ряде работ изучается поток частиц (квантов излучения), осредненный по реализациям рассеивающей и размножающей случайной среды (см., например, [1]–[5]). Это практически важно потому, что при выполнении соответствующего свойства эргодичности такое осреднение эквивалентно осреднению измеряемой величины (например, яркости) по поверхности достаточно протяженных детектора или источника частиц; необходимым также является изучение параметров критичности для случайно возмущенных размножающих сред. Исследования проводятся, в частности, для так называемых “мозаичных” моделей однородных изотропных случайных полей (сред) с известными корреляционными функциями, которые в значительной степени определяют осредненную вероятность прохождения частицы через слой вещества при заданном одномерном (т. е. одноточечном) распределении поля (см. [6]).

В работе [6] представлены две модели “мозаичных” случайных полей, которые строятся на основе специального разбиения пространства на ячейки со случайным выбором значения поля в каждой ячейке, согласно некоторому распределению (независимо от остальных ячеек).

Для построения модели, называемой мозаичным полем Пуассона, пространство разбивается на ячейки ансамблем базовых гиперплоскостей, в котором гиперплоскость определяется точкой пуассоновского точечного потока интенсивности τ_p во вспомогательном параметрическом пространстве. Точка этого пространства объединяет расстояние от заданного центра до базовой гиперплоскости и значение ее “внешней” нормали. Геометрические свойства таких разбиений детально изучены в [2] (см. также [4], [5], [7]). В работе [5] (см. также [8]) построено кусочно-постоянное двумерное мозаичное поле Пуассона и показано, что его корреляционная функция экспоненциальна. В работе [4] дано l -мерное обобщение такого поля, то есть построено l -мерное кусочно-постоянное экспоненциально коррелированное мозаичное поле. В [4] также показано, что мозаичное поле Пуассона является однородным и изотропным в “узком” смысле.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект FWNM-2022-0002).

Основная рассматриваемая здесь модель, называемая далее мозаичным полем Вороного, строится на основе пуассоновского точечного потока интенсивности τ_v , который определяет разбиение пространства на ячейки, каждая из которых является множеством точек наиболее близких к одной из точек потока (диаграмма Вороного).

Обозначим $\rho(\mathbf{r}; P)$ — мозаичное поле Пуассона, $\rho(\mathbf{r}; V)$ — мозаичное поле Вороного, $\mathbf{r} \in R^3$. Для реализации поля $\rho(\mathbf{r}; V)$ строится пуассоновский точечный поток в пространстве R^3 с параметром τ_v , а для $\rho(\mathbf{r}; P)$ — точечный поток в пространстве $R^+ \times S^{(3)}$ с параметром τ_p , где $S^{(3)}$ — единичная сфера в R^3 с центром в начале координат. Для обоих полей пространство R^3 разбивается на ячейки, как указано выше, и для каждой ячейки независимо выбирается случайное постоянное в ячейке значение поля $\rho(\mathbf{r})$, согласно некоторому распределению с конечной дисперсией. Отметим, что для поля Пуассона каждая подобласть полностью определяется (идентифицируется) набором

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_k, \dots), \quad \gamma_k = \text{sign}(F_k(\mathbf{r})),$$

где $F_k(\mathbf{r}) = (\mathbf{n}_k, (h_k \mathbf{n}_k - \mathbf{r})) = 0$ — уравнение соответствующей плоскости Γ_k , заданное скалярным произведением, h_k — расстояние от начала координат до гиперплоскости, $\mathbf{n}_k$ — значение “внешней”, т.е. направленной от начала координат, нормали к Γ_k , а $\mathbf{r}$ — произвольная точка подобласти. Алгоритм построения реализации трехмерного поля Пуассона более детально описан в [4] (см. также [9]).

Особую роль в прикладных исследованиях играет величина $L = \int_0^\infty K(r) dr$, где $K(r)$ — нормированная корреляционная функция, то есть коэффициент корреляции между $\rho(\mathbf{r})$ и $\rho(\mathbf{r}')$ при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r$. Эту величину иногда называют корреляционной длиной в связи с тем, что для простейшей “ступенчатой” аппроксимации $K(r) \approx K_h(r) = \chi(0, h)$ выполняется равенство $L = h$, где $\chi(a, b)$ — индикатор интервала (a, b) .

В случае изотропного поля величину L называют также радиусом корреляции. Для неизотропного однородного поля L зависит от направления вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Соответствующее осреднение дает возможность приближенного распространения результатов настоящей работы на слабо неизотропные поля.

Для мозаичных случайных полей $K(r) = P(A_r)$, где $P(A_r)$ — вероятность события, состоящего в том, что точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ при $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r$ находятся в одной ячейке. В [7] для поля Вороного фактически получено выражение $K(r)$, которое авторами настоящей работы было представлено в более удобном для вычислений виде:

$$K(r) = \int_0^\infty \int_{-1}^1 2\pi R^2 \tau_v \exp \left(\tau_v \left(-\frac{4}{3} \pi R^3 - V_s(R(1-s)) + V_s(r_1 + r - Rs) \right) \right) ds dR,$$

где функция $V_s(u) = \pi u (3R^2(1-s^2) + u^2) / 6$, а $r_1 = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rrs}$. Отсюда для этого поля корреляционная длина $L_v \approx 0.45915 \tau_v^{-1/3}$.

Для мозаичного поля Пуассона $P(A_r) = e^{-\pi \tau_p r}$ (см., например, [2], [4]), т.е. корреляционная функция является экспоненциальной. Следовательно корреляционная длина $L_p = 1/(\pi \tau_p)$. Хотя $K(r)$ для мозаичного поля Вороного не является экспоненциальной функцией [7], однако расчеты показали, что она близка к ней.

Поле Вороного является геометрически (и физически) более естественным и проще приближенно реализуется сравнительно с полем Пуассона в рассматриваемой ограниченной области D . Поэтому для верификации представленной далее компьютерно экономичной приближенной сеточной модели случайной функции была использована “мозаика” Вороного. При этом учитывалось, что вспомогательный пуассоновский точечный поток следует моделировать в несколько расширенной области, вводя пограничный слой толщины kL с соответствующей поправкой осредненной корреляционной длины. Такую модель назовем kL -усеченным полем Вороного.

2. СЕТОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ $\rho_h(\mathbf{r})$ ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ $\rho(\mathbf{r})$

2.1. Основанный на рандомизации алгоритма максимального сечения (см. [10]), сформулированный в [11] КР-алгоритм реализует вычислительную аппроксимацию процесса переноса. Он весьма экономичен, так как не требует реализации поля $\rho(\mathbf{r})$ в целом и двойной рандомизации. Однако этот алгоритм в основном эффективен для существенно анизотропного рассеяния при условии, что $L < 0.4/\sigma_{\max}$, где $\sigma_{\max}$ — параметр алгоритма такой, что для коэффициента $\sigma(\mathbf{r})$ ослабления излучения выполняется соотношение $\sigma(\mathbf{r}) \leq \sigma_{\max}$, $\mathbf{r} \in D$ [11]. Недостатком КР-алгоритма является также невозможность оценки физически значимой величины дисперсии $D(\zeta|\rho)$ вычисляемой оценки ζ за исключением бернуллиевой оценки с малым параметром $p = E\zeta$.

Эти соображения (см. [12]) определили мотивацию разработки компьютерно экономичной сеточной аппроксимации поля плотности $\rho_h(\mathbf{r})$, которая фактически представляет собой геометрически детерминированную

стохастическую мозаику, аналогичную полю Вороного и в определенном далее смысле аппроксимирующую его.

Сеточная аппроксимация (сеточная мозаика) $\rho_h(\mathbf{r})$ строится на основе разбиения пространства R^3 прямоугольной сеткой, т.е. на кубики $\{S_h\}$ со стороной h . Для каждого элемента S_h независимо реализуется случайное значение ρ соответственно заданному одномерному распределению поля $\rho(\mathbf{r})$. Осредненное значение l_h корреляционной длины для поля $\rho_h(\mathbf{r})$ строится по формуле

$$l_h = \frac{h^{-3}}{4\pi} \int \int_{S_h} l_{S_h}(\mathbf{r}, \omega) d\mathbf{r} d\omega,$$

где $l_{S_h}(\mathbf{r}, \omega)$ — расстояние от точки $\mathbf{r}$ до границы кубика S_h в направлении ω . Ясно, что выполняются равенства

$$L = l_h = hl_1, \quad h = L/l_1,$$

причем достаточно точные вычисления дали значение $l_1 = 0.448317$ с погрешностью, не превышающей 0.000001.

Трудоёмкость (сложность) мозаики $\rho_h(\mathbf{r})$ существенно меньше трудоёмкости мозаики Вороного, так как для определения значения поля в данной точке не требуется перебора значений ρ для всех элементов сетки. Номер элемента прямоугольной сетки, в которой находится точка $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ определяется очевидным образом с помощью стандартной встроенной функции вычисления целой части (например, $\text{floor}(x_i/h)$ в C++). Для экономии компьютерного времени можно реализовать сеточные значения $\rho_h(\mathbf{r})$ по мере необходимости, зануляя соответствующий массив данных в начале траектории частицы.

2.2. Известно (см., например, [13]), что трудоёмкость алгоритма метода Монте-Карло определяется величиной $S(\zeta) = T_\zeta D\zeta$, где T_ζ — среднее время моделирования на ЭВМ для получения одного выборочного значения ζ . Если для каждой реализации поля моделировать m условно-независимых траекторий частиц, то согласно “формуле полной дисперсии” (см., например, [13]), величину дисперсии соответствующего среднего значения ζ_m можно представить в виде

$$D = D\zeta_m = D_0 + \frac{D_1}{m}, \quad D_0 = DE(\zeta|\rho), \quad D_1 = ED(\zeta|\rho), \quad (2.1)$$

где D_0 — физически значимая дисперсия оценки по флуктуациям поля ρ , а D_1 — среднее значение условной дисперсии по траекториям Ω для фиксированной реализации поля ρ . Отметим, что здесь D — “элементарная” дисперсия (на одну траекторию). Выполняется очевидное соотношение для среднего времени реализации оценки ζ_m :

$$T_{\zeta_m} = T_0 + mT_1, \quad (2.2)$$

где T_0 — среднее время, затрачиваемое на реализацию случайного поля, а T_1 — среднее время, затрачиваемое на моделирование одной случайной траектории. Величина трудоёмкости $S(\zeta_m)$ в этом случае, как функция от m , имеет минимум в точке (см., например [13])

$$m_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{T_0 D_1}{T_1 D_0}}, \quad \text{и} \quad S(\zeta_{m_{\text{opt}}}) = \left(\sqrt{T_0 D_0} + \sqrt{T_1 D_1} \right)^2.$$

Значение m_{opt} можно оценить, сделав два предварительных расчета для $m = 1$ и $m > 1$, подставив полученные значения для $D\zeta_1, D\zeta_m$ в (2.1) и найдя решение системы из двух линейных уравнений для D_0, D_1 . Аналогичным способом определяются значения T_0, T_1 из (2.2) для полученных из расчетов значений T_{ζ_1}, T_{ζ_m} . Отметим еще раз, что D_0 — физически значимая дисперсия в то время, как D “элементарна”.

3. ЭФФЕКТИВНЫЙ КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ РАДИУС L_{eff} ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЫ

3.1. Здесь рассматриваются приближенно однородные изотропные случайные среды типа указанного в конце введения L -усеченного поля Вороного. Численное статистическое моделирование процесса переноса излучения в таких средах показало, что средние значения функционалов при этом в значительной степени определяются значениями L_{eff} осредненной корреляционной длины, которое для мозаичного поля оптической плотности в выпуклой области $\mathbf{D} \subset R^3$ вычисляется по формуле (см. [14])

$$L_{\text{eff}} = E \int_{\mathbf{D}} \int_{\Omega} \int_0^{\infty} I_S(\mathbf{r} + t\omega) f(\mathbf{r}, \omega) dt d\omega d\mathbf{r}. \quad (3.1)$$

Здесь $S \subset \mathbf{D}$ — элемент мозаики, содержащий точку $\mathbf{r}$, I_S — индикатор области S , $f(\mathbf{r}, \omega)$ — аппроксимация средней плотности потока частиц (если известна, иначе $f(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{D}|}$, т. е. $\mathbf{r}$ выбирается равномерно в $\mathbf{D}$, а направление ω изотропно).

Для мозаики с выпуклыми элементами (например, Вороного, Пуассона)

$$L_{\text{eff}} = E \int_{\Omega} \int_{\mathbf{D}} h_S(\mathbf{r}, \omega) f(\mathbf{r}, \omega) d\omega d\mathbf{r}, \quad (3.2)$$

где $h_S(\mathbf{r}, \omega)$ — расстояние от точки $\mathbf{r}$ до границы содержащего $\mathbf{r}$ элемента мозаики вдоль направления ω .

Формула (3.2) допускает простую геометрическую интерпретацию: L_{eff} — среднее расстояние от случайной точки до границы соответствующего элемента мозаики в случайном направлении. Именно на этой основе определяется значение L для однородного изотропного случайного поля (см., например, [7]). Такая интерпретация показывает, что при использовании усеченного мозаичного поля плотности для моделирования переноса излучения в ограниченной случайной среде следует определять L_{eff} путем осреднения расстояний $h_S(\mathbf{r}, \omega)$ (или более общих из (3.1) для “невыпуклой” мозаики) с учетом влияния границы области $\mathbf{D}$. Ясно, что это влияние ослабевает при $L \rightarrow 0$, однако пренебрегать им нецелесообразно, как показывает приведенное далее решение задачи об оценке динамики средней интенсивности односкоростного излучения в шаре со случайной плотностью. Заметим, что геометрическая интерпретация величины L_{eff} дает возможность построения сеточной аппроксимации однородного неизотропного поля с параметрами L_x, L_y, L_z .

3.2. Моделировался односкоростной процесс переноса частиц в шаре радиуса $R = 7.72043$ со случайной плотностью $\rho = \rho(\mathbf{r})$ и макроскопическими сечениями $\rho\sigma^{(0)}, \rho\sigma_s^{(0)}, \rho\sigma_f^{(0)}$, причем (см. [12])

$$\sigma^{(0)} = 1, \quad \sigma_s^{(0)} = 0.97, \quad \sigma_f^{(0)} = 0.03, \quad v = 2.5, v = 1.$$

Одномерное распределение поля $\rho(\mathbf{r})$ равномерно на отрезке $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$. При $\rho \equiv 1$ шар критичен: $\lambda = 0 \pm 10^{-7}$, где λ — параметр асимптотики полного потока: $J(t, \rho) \sim e^{\lambda(\rho)t}$.

Для построения эффективных алгоритмов метода Монте-Карло в сформулированную модель было введено поглощение с постоянным неслучайным коэффициентом σ_c/v , который приводит к замене $\lambda \mapsto \lambda - \sigma_c/v \forall \sigma(\mathbf{r}, v)$, как указано в [12]. Следовательно, получаемые асимптотические оценки необходимо преобразовывать по формулам: $\tilde{I}(t) := \tilde{I}(t)e^{\sigma_c t}$, $(\ln \tilde{I}(t))' := (\ln \tilde{I}(t))' + \sigma_c$, где $I(t) = EJ(t, \rho)$. Как и в [12] было использовано осреднение, состоящее в том, что моделировался процесс с константами $\sigma_s^* = 0$, $\sigma_f^* = \rho\sigma_s + \rho\sigma_f + \sigma_c$, $v^* = 1$, а вес в каждой точке физического столкновения домножался на величину

$$q^*(\rho) = \frac{\sigma_s + v\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c/\rho} \leq \frac{\sigma_s + v\sigma_f}{\sigma_s + \sigma_f + \sigma_c/(1 + \epsilon)} = 1$$

при $\sigma_c = \sigma_f(v - 1)(1 + \epsilon)$.

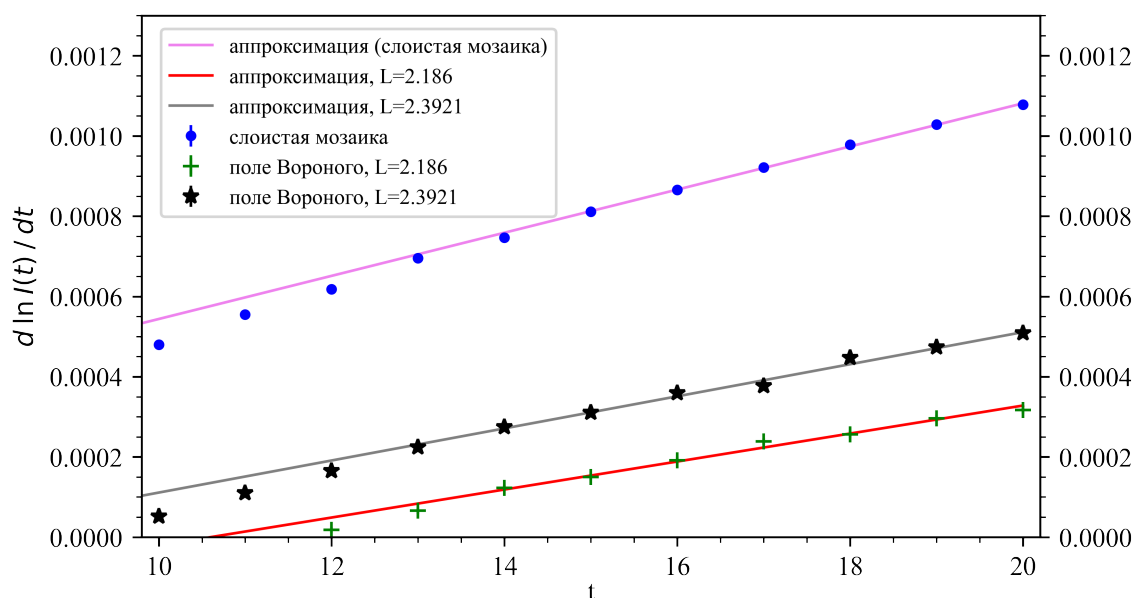
В расчетах был использован метод максимального сечения с $\sigma_{\max} = 1 + \epsilon + \sigma_c$, оценка по столкновениям $\xi = \sum_{n=0}^N Q_n q(\mathbf{r}_n, \omega_n)$ (см. [13]) и функция Грина по времени t для оценки функции $d \ln I(t)/dt$ с помощью двойной рандомизации полного потока (см. [12]).

Плотность распределения первых столкновений была взята в виде $f_0(\mathbf{r}, t) = 4t \exp(-2t)g(\mathbf{r})$, $t > 0$, $r = |\mathbf{r}| < R$, где $g(\mathbf{r}) = C \sin(\alpha r)/r$ — улучшенное диффузионное приближение к пространственной характеристической функции для $\sigma = 1$, $\alpha = 0.3739866$ (см. [16]). В каждой точке столкновения в зависимости от времени t определялась величина $q(\mathbf{r}, \omega) = q_1(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r}, v)$, где $q_1(\mathbf{r}) = \sin(\alpha r)/r$. При этом $E\xi = (\Phi, q)$, то есть вычислялся функционал от потока частиц $\Phi(\mathbf{r}, \omega)$. Расчеты показали, что использование таких функциональных параметров алгоритма существенно ускоряет исследуемую здесь асимптотическую сходимость функции $I(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Сформулированная таким образом задача предварительно решалась для двух вариантов случайного поля $\rho(\mathbf{r})$.

1) Сферическая слоистая мозаика, для реализации которой шар радиуса R разбивался на шесть равнообъемных слоев, в каждом из которых независимо выбиралось значение ρ равномерно в интервале $[1 - \epsilon, 1 + \epsilon]$ при $\epsilon = 0.3$. Соответствующее значение $L_{\text{eff}}^{(s)}$, вычисленное по формуле (3.1), оказалось равным 2.18605. Здесь и далее в качестве веса $f(\mathbf{r}, \omega)$ для вычисления L_{eff} использовано диффузионное приближение $g(\mathbf{r})$ к характеристической функции.

2) L -усеченное поле Вороного, для которого полагали $L = 2.186$, имея в виду, что шар достаточно большой и приближенно выполняется равенство $L_{\text{eff}}^{(V)} \approx L$.



Фиг. 1. Оценки логарифмической производной и линейная аппроксимация.

Таблица 1. Регрессионные оценки коэффициентов a и d^2

	Слоистая мозаика	Поле Вороного	
		$L = 2.3921$	$L = 2.186$
$\tilde{a} \times 10^5$	-0.36 ± 2.11	-28.9 ± 3.72	-36.6 ± 5.12
$\tilde{d}^2 \times 10^5$	5.44 ± 0.12	4.01 ± 0.21	3.51 ± 0.30

Полученные в [14] для этих вариантов, а также здесь для варианта с точным значением L_{eff} , результаты представлены графиками на фиг. 1 и в табл. 1. Они показывают некоторое, хотя и малое, различие оценок для разных вариантов поля ρ и целесообразность уравнивания величины L_{eff} при аппроксимации однородного изотропного поля в ограниченной области $\mathbf{D} \subset R^3$. В качестве погрешностей в табл. 1 и далее даны их среднеквадратические оценки (“одна сигма”).

3.3. С целью указанного уравнивания значений L_{eff} было определено значение параметра $L = 0.45915 \tau^{-1/3}$ для L -усеченного поля Вороного, которое обеспечивает равенство $L_{\text{eff}}^{(V)} = 2.18605$ для шара R (как и в сферической мозаике). Возможность оценки $L_{\text{eff}}^{(V)}$ по формуле (3.2) вытекает из следующего утверждения.

Лемма 3.1. Пусть $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$ — начальная часть базового пуассоновского точечного потока. Тогда соответствующий точке $\mathbf{r}_0$ выпуклый элемент мозаики Вороного ограничен совокупностью плоскостей (внутренняя часть ансамбля)

$$\left(\frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i}{2}, \mathbf{r}' \right) = \left(\frac{\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i}{2}, \frac{\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_i}{2} \right), \quad i = 1, \dots, m, \quad \mathbf{r}' \in R^3. \quad (3.3)$$

Доказательство. Для $m = 1$ утверждение леммы очевидно; далее доказательство строится по индукции, так как пересечение “ближайших” к точке $\mathbf{r}_0$ полупространств сохраняет это ее преимущество перед остальными точками и свойство выпуклости.

Таким образом, для выпуклой области $\mathbf{D}$ величина $h_S(\mathbf{r}, \omega)$ в (3.2) равна минимальному значению расстояний от $\mathbf{r}$ в направлении ω до поверхности $\mathbf{D}$, а также до плоскостей (3.3), которые определяются формулами вида:

$$t_i = \frac{d_i - ((\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i), \mathbf{r})}{((\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i), \omega)}, \quad d_i = \left((\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i), \frac{\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_i}{2} \right).$$

В данном случае оказалось, что $L_{\text{eff}}^{(V)} = 2.18605$ при $L = 2.3921$, т.е. для интенсивности базового пуассоновского потока $\tau = 0.00707173$. Результаты расчетов для такого варианта L -усеченного поля Вороного представ-

лены на фиг. 1. Они демонстрируют целесообразность уравнивания значений L_{eff} при построении аппроксимаций случайных полей.

4. “СЛОИСТЫЙ” АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛЯ ВОРОНОГО

4.1. Тестовая задача из предыдущего раздела решалась с использованием L -смещенного поля Вороного, которое строилось на основе базового точечного пуассоновского потока с интенсивностью τ в шаре $S_L = \{\mathbf{r} \in R^3 : |\mathbf{r}| \leq R + L\}$ с $L = 0.45915\tau^{-1/3}$. Для этого сначала выбиралось значение пуассоновской случайной величины η_Λ с параметром $\Lambda = \frac{4}{3}\pi(R+L)^3\tau$ (пуассоновская мера шара S_L), а затем моделировалось η_Λ независимых точек $\{\mathbf{r}_k\}$ равномерно в этом шаре.

Однако для сферической области $\mathbf{D}$ может быть более удобным следующий “слоистый”, фактически одномерный алгоритм моделирования поля Вороного, предложенный в [15].

4.2. “Слоистый” алгоритм построения поля Вороного в шаре S_L .

Обозначим $\{\mathbf{r}_i\}$ — пуассоновский поток, расставленный по возрастанию величины $r = |\mathbf{r}|$, $r_0 = 0$; $V(r)$ — объем шара радиуса r ; $\delta V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}) = V(r) - V(r_i)$, $r \geq r_i$; $k_i(r)$ — число точек потока в слое $(\mathbf{r}_i, \mathbf{r})$;

$$\mathcal{F}_r(x) = P(r < x|r_i) = 1 - P(r \geq x|r_i) = 1 - P(k_i(x) = 0) = 1 - \exp(-\tau \delta V(r_i, r)).$$

Отсюда $\delta V(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}) = -\ln \alpha / \tau$, где α — случайное число, равномерно распределенное в $(0, 1)$, и

$$r_{i+1}^3 = -\frac{3 \ln \alpha}{4\pi\tau} + r_i^3.$$

Построение реализации фактически закончено при $r_{i+1} > R + L$. Соответствующие точки $\{\mathbf{r}_i\}$ вычисляются по формулам $\mathbf{r}_i = \omega_i r_i$, где ω_i — реализация единичного изотропного вектора $(\omega_i^{(1)}, \omega_i^{(2)}, \omega_i^{(3)})$ [10]:

$$\omega_i^{(1)} = 1 - 2\alpha_1 = \mu, \quad \omega_i^{(2)} = \sqrt{1 - \mu^2} \sin(2\pi\alpha_2), \quad \omega_i^{(3)} = \sqrt{1 - \mu^2} \cos(2\pi\alpha_2).$$

В работе [15] также показано, что при моделировании траектории частицы методом максимального сечения слоистый алгоритм может дать “неурезанную” (статистически точную) реализацию поля Вороного, если выполняется следующее “правило остановки”. Введем обозначения: $\mathbf{r}_n^{(c)}$ — очередная точка столкновения, r — минимальное расстояние от $\mathbf{r}_n^{(c)}$ до точек $\{\mathbf{r}_k\}$, $k = 1, \dots, i$, уже реализованной части базового пуассоновского потока. Простые геометрические соображения показывают, что при $|\mathbf{r}_{i+1}| \geq r + |\mathbf{r}_n^{(c)}|$ значение r не изменится, т. е. величина r определяет “ячейку” Вороного и тем самым значение случайной плотности в точке $\mathbf{r}_n^{(c)}$; если же $|\mathbf{r}_{i+1}| < r + |\mathbf{r}_n^{(c)}|$, то “слоистая” выборка продолжается.

В заключение этого раздела отметим, что с помощью сформулированных алгоритмов были вычислены значения $L_{\text{eff}}^{(V)}$ для задачи из предыдущего раздела, причем для второго из них использовался длиннопериодный датчик случайных чисел по методу вычетов (см. [17]), а для первого — хорошо известный датчик Mersenne twister. Они оба дали значение 2.01079 с погрешностью порядка 0.00001. Таким образом, был реализован многомерный тест моделирования трехмерного случайного поля Вороного.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА СРЕДНЕГО ПОТОКА ЧАСТИЦ

ПРИ $\sigma(\mathbf{r}, v) \leq \sigma_{\max} < +\infty$

5.1. В условиях задачи из разд. 3 предполагается, что коэффициент ослабления $\sigma(\mathbf{r}, v) = \sigma_r(\mathbf{r}, v)$ — однородное изотропное случайное поле (при $\mathbf{r} \in R^3$), причем отношения σ_s/σ , σ_f/σ фиксированы. Далее в этом разделе символом σ обозначается введенное таким образом случайное поле $\sigma(\mathbf{r}, v)$.

Как и в [12] полагаем, что $J(t, \sigma) \sim e^{\lambda(\sigma)t}$ при $t \rightarrow \infty$. Соответственно этому, предполагая гауссовость случайной величины $\lambda(\sigma)$ и равномерность (по σ) предельного перехода $J(t, \sigma) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C(\sigma)e^{\lambda(\sigma)t}$, можно оценить асимптотику функции $EJ(t, \sigma) = I(t)$ в некотором интервале ($T_\lambda < t < T^*$):

$$I(t) \approx \frac{C}{\sqrt{2\pi d}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(tu) \exp\left(-\frac{(u-a)^2}{2d^2}\right) du \approx C \exp\left(\frac{d^2}{2}t^2 + at\right), \quad (5.1)$$

где $a = E\lambda(\sigma)$, $d^2 = D\lambda(\sigma)$. При этом также предполагается, что множители $C(\sigma)$ и $e^{\lambda(\sigma)t}$ в асимптотике слабо коррелированы и, следовательно, $C \approx EC(\sigma)$.

Определяемый формулой (5.1) закон роста среднего числа частиц можно назвать “суперэкспоненциальным”. Отметим, что формула (5.1) может служить основой для численных исследований конкретных вариантов задачи при $t < T^* < +\infty$ [12]. Эти исследования позволяют эвристически приближенно выделить следующие интервалы времени:

- $(0, T_\lambda)$ – доасимптотический интервал влияния начальной плотности;
- (T_λ, T^*) – интервал суперэкспоненциальной асимптотики типа (5.1);
- $(T^*, +\infty)$ – интервал перехода к предельной асимптотике $(\ln I(t))' \sim \lambda_{\max}$.

Здесь $\lambda_{\max} = \lambda(\sigma_{\max})$. Интервал (T_λ, T^*) был, в частности, определен для сферически слоистой случайной мозаики (см. разд. 3), которая позволила достаточно точно оценить величины $a \approx E\lambda(\sigma)$ и $d^2 \approx D\lambda(\sigma)$ (см. [12]). В связи с исследованием суперэкспоненты в [12] доказана (для специальной сеточной модели σ) теорема о необходимости при этом гауссовской асимптотике распределения величины $\lambda(\sigma)$.

Интервал $(T^*, +\infty)$ определяется в [12] и далее для задачи с ограниченным случайным полем. Возможность реализации такого интервала показывает следующее (см. [12]) утверждение.

Лемма 5.1. Пусть для $0 < \varepsilon < \sigma_{\max}$ с вероятностью $p(\varepsilon) > 0$ выполняются соотношения $\sigma \geq \sigma_{\max} - \varepsilon$ и, соответственно, $\lambda(\sigma) \geq \lambda_{\max} - \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) > 0$ – монотонно убывающая непрерывная функция, причем $\delta(0) = 0$. Тогда

$$\frac{d \ln I(t)}{dt} \sim \lambda_{\max}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Сказанное выше и анализ результатов численного моделирования (см. разд. 3 и [12]) показывают целесообразность сформулированной в [12] асимптотической аппроксимации (см. далее (5.2)).

5.2. Для предварительного исследования “ближней” асимптотики функции $\lambda_s(t) = d \ln I(t)/dt$ в тестовой задаче в случае сеточной аппроксимации расчеты были продолжены до $t < T_1 = 150$, причем $T^* \approx 20$. В табл. 2 представлены статистические оценки этой функции (N – число траекторий), соответствующие оценки среднеквадратической погрешности δ (“одна сигма”), а также для сравнения значения функциональной оценки асимптотики логарифмической производной (см. [12]):

$$\tilde{\lambda}_s(t) = \lambda_s(t_0) \frac{1 - \exp(-\beta t^{1-\alpha})}{1 - \exp(-\beta t_0^{1-\alpha})} \quad (5.2)$$

при $t_0 = 40$, $\alpha = 0.2$. Значение $\beta = 0.00199$ было вычислено на основе леммы 5.1 и оценки $\lambda_{\max} = 0.022$, полученной с помощью дополнительного расчета при $\sigma = \sigma_{\max}$ с использованием функции Грина по времени. Отметим, что (5.2) практически не меняется при замене $t_0 = 40$ на $t_0 = 30$, что подтверждает значимость этой оценки (которая таким образом получена по значениям $\lambda_s(30)$ и $\lambda_s(40)$).

Удовлетворительное совпадение оценок в табл. 2 связано с тем, что коэффициент β в (5.2) определялся с использованием леммы 5.1, что подтверждает ее реальность, как и результаты расчетов (см. табл. 3). Отметим, что график на фиг. 1 демонстрирует суперэкспоненциальную сходимость $I(t)$ в интервале $10 < t < 20$.

Таблица 2. Значения оценки: $\lambda_s(t) \pm \delta$ при $N = 216 \times 10^9$, $L = 2.186$

t	Сеточная аппроксимация	$\tilde{\lambda}_s(t)$
10	-0.000086 ± 0.000003	0.000276
30	0.000640 ± 0.000005	0.000659
50	0.000989 ± 0.000009	0.000984
70	0.001280 ± 0.000014	0.001279
90	0.001574 ± 0.000022	0.001554
110	0.001782 ± 0.000035	0.001813
130	0.002106 ± 0.000056	0.002060
150	0.002458 ± 0.000089	0.002296

Таблица 3. Сеточная модель с $L_{\text{eff}}, \sigma_c = 0.012, N = 10^{10}$

t	L -Усеченное поле Вороного			Сеточная модель с L_{eff}			I_g/I_{VL}
	$I_{VL}(t)$	$\delta(t), \%$	$(\ln I)'$	$I_g(t)$	$\delta(t), \%$	$(\ln I)'$	
250	1.7019	0.012	0.0037	1.7023	0.010	0.0036	1.00
500	6.2293	0.039	0.0066	6.0404	0.038	0.0064	0.97
1000	532.41	0.232	0.0109	423.73	0.203	0.0103	0.80
2000	3.83×10^8	5.508	0.0155	1.14×10^8	2.762	0.0141	0.30

6. ИССЛЕДОВАНИЕ “ДАЛЬНЕЙ” АСИМПТОТИКИ ПОТОКА В ТЕСТОВОЙ ЗАДАЧЕ

6.1. В начале отметим, что в разд. 3, как и в [12] с целью исследования типа асимптотики функции $I(t)$ моделировался поток частиц со специальными функциональными параметрами: $f_0(t)$ — гладкая, сосредоточенная в начальный момент времени функция; “вес” точки столкновения $q(\mathbf{r}, v) = g(\mathbf{r})/\sigma(\mathbf{r}, v)$, где $g(\mathbf{r})$ — указанное выше диффузионное приближение к характеристической функции. Это дало возможность в рамках “оценки по столкновениям” использовать рандомизированную функцию Грина по времени и на этой основе вычислять несмещенные оценки производной среднего потока, причем переход к пределу по t ускорялся использованием “функции ценности столкновений” $g(\mathbf{r})$. При этом значения параметра T_λ и тем самым параметра T^* эффективно уменьшались, сравнительно с использованной далее расчетной методикой, более близкой к прямому моделированию процесса переноса.

В настоящем разделе работы расчеты величины $I(t)$ проводились для $f_0(t) = \delta(t)$ до $t = T = 2000$ путем прямого подсчета числа частиц в заданные моменты времени $\{t_i\}$, то есть фактически для физической модели односкоростного процесса переноса.

Для повышения вычислительной эффективности вводилось поглощение с коэффициентом σ_c и с компенсирующим весом $e^{\sigma_c t_i}$, как и в [12], причем вместо поглощения частица приобретала вспомогательный вес, который в точке рассеяния равнялся

$$v^* = \frac{\rho(v\sigma_f + \sigma_s)}{\rho\sigma + \sigma_c} = \frac{1.045\rho}{\rho + \sigma_c} > 1. \quad (6.1)$$

С использованием простого осреднения (см. разд. 3) для случайного значения плотности $\rho \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0.3$ моделировался односкоростной ветвящийся процесс с изотропным рассеянием и константами $\sigma^* = \sigma_f^* = \rho\sigma + \sigma_c = \rho + \sigma_c$, $\sigma_s^* = \sigma_c^* = 0$, v^* .

Для уменьшения дисперсии оценок осуществлялась статистически эквивалентная рандомизация (см. [10]) множителя (6.1) — вместо использования веса частицы v^* моделировалось ветвление со случайным числом v_0 ветвей единичного веса, таким что $Ev_0 = v^*$ с минимальной возможной при этом дисперсией Dv_0 . В результате элементарных исследований оказалось, что v_0 можно моделировать по формуле

$$v_0 = [v^* + \alpha], \quad (6.2)$$

где скобки $[]$ обозначают целую часть числа, α — случайное число, равномерно распределенное в $(0, 1)$. Здесь $Ev_0 = v^*$ и величина Dv_0 минимальна в классе целочисленных случайных величин со средним значением v^* . Соответственно (6.2) выполняются соотношения

$$P(v_0 = [v^*]) = 1 - (v^* - [v^*]), \quad P(v_0 = [v^*] + 1) = v^* - [v^*], \quad Dv_0 = (v^* - [v^*])(1 - (v^* - [v^*])).$$

Минимальность величины Dv_0 для такого распределения доказана в [18].

Дополнительно отметим, что согласно правилу двойной рандомизации все ветви на одной траектории моделировались с одними значениями ρ .

6.2. Рассматриваемые далее численные результаты получены для L -усеченного поля Вороного с помощью слоистого алгоритма методом максимального сечения (см. [12]) с $\sigma_{\text{max}} = \sigma(1 + \varepsilon) + \sigma_c$ при $\varepsilon = 0.3$. С целью более эффективного использования компьютерного времени значения плотности $\rho \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ в ячейках поля моделировались по мере необходимости, причем соответствующий выборочный массив занулялся в начале построения очередной ветвящейся траектории. Одновременно были проведены сравнительные расчеты для сеточной аппроксимации с тем же значением $L_{\text{eff}} = 2.02079$, которому соответствует значение $h = 4.9571$.

Таблица 4. Сеточная модель с параметром L , $\sigma_c = 0.012$, $N = 10^{10}$

t	Сеточная модель с L			I_{gL}/I_{VL}
	$I_{gL}(t)$	$\delta(t)$, %	$(\ln I)'$	
250	1.6667	0.010	0.0035	0.98
500	5.6387	0.039	0.0062	0.91
1000	374.83	0.208	0.0100	0.65
2000	7.17×10^7	3.222	0.0139	0.19

Таблица 5. Смещение результатов L -усечением, $\sigma_c = 0.012$, $N = 10^{10}$

t	Поле Вороного		I_V/I_{VL}	I_V/I_{VLeff}
	$I_V(t)$	$\delta(t)$, %		
250	1.6830	0.012	0.99	1.01
500	5.9905	0.039	0.96	1.02
1000	460.21	0.222	0.86	1.02
2000	2.03×10^8	3.692	0.53	0.75

Далее используются следующие обозначения средних потоков: I_{VL} — для L -усеченного поля Вороного, I_V — для точного поля Вороного с параметром L , I_g — для сеточной аппроксимации с L_{eff} , I_{gL} — для сетки с параметром L , $I_{g/2}$ — для сеточной модели с L_{eff} после замены L на $L/2$.

Результаты расчетов представлены в табл. 3 и 4, где $(\ln I)' = d \ln I/dt$, а символом $\delta(t)$ обозначена относительная среднеквадратическая погрешность оценки среднего потока частиц в процентах для момента времени t ; даны статистические оценки изучаемых величин для $N = 10^{10}$ реализованных ветвящихся траекторий при $\sigma_c = 0.012$. Дополнительные расчеты показали, что это значение σ_c близко к оптимальному для сеточной модели, так как при этом оценки трудоемкости $\tilde{S}(\sigma_c) = \tilde{T}(\sigma_c) D\tilde{I}(\sigma_c)$, где $\tilde{T}$ — среднее число пробегов частицы, а $\tilde{I}$ — оценка потока для $t = 2000$, оказались равными

$$\tilde{S}(0.01) = 1.56 \times 10^{25}, \quad \tilde{S}(0.012) = 1.13 \times 10^{25}, \quad \tilde{S}(0.014) = 2.0 \times 10^{25}.$$

Были проведены также расчеты для исследования смещения оценок L -усечением поля Вороного. При этом поле Вороного моделировалось точно с использованием изложенного в разд. 4 “правила останова” слоистого моделирования. Полученные таким образом оценки приведены в табл. 5.

Приведенные в табл. 3 и 4 результаты показывают практическую эффективность здесь сеточной модели при равенстве L_{eff} для разных вариантов расчета до $t \approx 500 - 1000$, причем время t можно определять средним числом пробегов частицы, т.к. среднее время пробега здесь равно единице. Дополнительный расчет показал, что использование L_{eff} существенно уменьшает смещение результатов L -усечением (I_V/I_{VLeff} в табл. 5).

Можно особо отметить относительно малое смещение оценки величины $d \ln I(t)/dt$ при переходе к сеточной аппроксимации, которое можно объяснить на основе леммы 5.1, справедливой и для сеточного поля.

Для численной иллюстрации эвристически очевидной сходимости рассматриваемого смещения оценок при $L \rightarrow 0$ были проведены аналогичные расчеты для корреляционного радиуса $L/2$. Полученные результаты даны в табл. 6.

Приведенные в табл. 6 оценки с учетом оценок из табл. 3 подтверждают уменьшение смещения при $L \rightarrow 0$. Время расчетов для L -усеченного поля Вороного оказалось примерно в 2.5 раза больше для параметра $L/2$, сравнительно с L . Ясно, что асимптотически при $L \rightarrow 0$ это время растет, как $A + BL^{-3}$, а для сеточной модели практически не изменяется.

В заключение отметим, что проведенные расчеты показывают возможность достаточно точной оценки влияния мелкомасштабной стохастичности среды на перенос излучения с помощью сеточной аппроксимации оптической плотности за ограниченное компьютерное время.

Таблица 6. Оценка среднего потока для параметра $L/2$

t	Поле Вороного, $L/2$			Сеточная модель, $(L/2)_{\text{eff}}$			$I_{g/2}/I_{VL/2}$
	$I_{VL/2}(t)$	$\delta(t), \%$	$(\ln I)'$	$I_{g/2}(t)$	$\delta(t), \%$	$(\ln I)'$	
250	1.0703	0.012	0.00041	1.0625	0.012	0.00036	0.99
500	1.2703	0.054	0.00096	1.2376	0.054	0.00088	0.97
1000	2.6168	0.796	0.00192	2.4210	0.827	0.00168	0.93

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазов Г.Н., Тумов Г.А. Статистические характеристики коэффициента ослабления в разорванной облачности. I. Модель с шарами одинакового радиуса // Вопросы лазерного зондирования атмосферы. Новосибирск, 1976. С. 126–139.
2. Serra J. Image analysis and mathematical morphology. London: Academic press, 1982. 610 p.
3. Larmier C., Zoia A., Malvagi F., Dumonteil E., Mazzolo A. Monte Carlo particle transport in random media: The effects of mixing statistics // J. Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 2017. V. 196. P. 270–286.
4. Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. Statistical modelling of the exponentially correlated multivariate random field // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. 2011. V. 26. № 3. P. 213–232.
5. Switzer P. A random set process in the plane with a Markovian property // Ann. Math. Statist. 1965. V. 36. P. 1859–1863.
6. Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. New algorithms of numerical-statistical modelling of radiative transfer through stochastic mediums and radiation models homogenization // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling 2014. V. 29. № 6. P. 331–339.
7. Gilbert E.N. Random subdivisions of space into crystals // Ann. Math. Statist. 1962. V. 33. P. 958–972.
8. Пригарин С.М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005. 259 с.
9. Амбос А.Ю. Вычислительные модели мозаичных однородных изотропных случайных полей и задачи переноса излучения // Сиб. журн. вычисл. матем. 2016. Т. 19. № 1. С. 15–28. Ambos A. Yu. Numerical models of mosaic homogeneous isotropic random fields and corresponding problems of radiative transfer // Numer. Analysis. Appl. 2016. V. 9. № 1. P. 12–23. <https://doi.org/10.1134/S199542391601002X>
10. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: учеб. пособие для студ. вузов. М: Изд. центр “Академия”, 2006. 367 с.
11. Medvedev I.N., Mikhailov G.A. New correlative randomized algorithms for statistical modelling of radiation transfer in stochastic medium // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. 2021. V. 36. № 4. P. 219–225.
12. Лотова Г. З., Михайлов Г. А. Исследование сверхэкспоненциального роста среднего потока частиц в случайной размножающей среде // Сиб. журн. вычисл. матем. 2023. Т. 26. № 4. С. 401–413.
13. Марчук Г.И., Михайлов Г. А., Назаралиев М.А., Дарбинян Р.А., Каргин Б.А., Елепов Б.С. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. Новосибирск: Наука, 1976. 283 с.
Marchuk G. I., Mikhailov G. A., Nazareliev M. A., Darbinjan R. A., Kargin B. A., Elepov B. S. The Monte Carlo methods in Atmospheric Optics. Springer-Verlag, 1980.
14. Lotova G.Z., Mikhailov G.A. Estimation of the average particle flux in a stochastically homogeneous medium by Monte Carlo method // Rus. J. Numer. Anal. Math. Model. 2022. V. 37. № 6. P. 363–371.
15. Роженко С.А. Моделирование и оценка корреляционной функции поля Вороного // Марчуковские научные чтения-2022: Тез. Междунар. конф., 3–7 октября 2022 г. — ИВМиМГ СО РАН, 2022. С. 58. (<https://conf.icmmg.nsc.ru/event/1/>) DOI: 10.24412/cl-35065-2022-1-00-64

16. Романов Ю.А. Точные решения односкоростного кинетического уравнения и их использование для расчета диффузионных задач (усовершенствованный диффузионный метод) // Исследование критических параметров реакторных систем. М.: Госатомиздат, 1960. С. 3–26.
17. Marchenko M.A. Parallel pseudorandom number generator for largescale Monte Carlo simulations. In: Malyshkin, V. (Ed.) PaCT 2009. LNCS, V. 4671. P. 276–282. 2007.
18. Михайлов Г.А., Медведев И.Н. Оптимизация весовых алгоритмов статистического моделирования. Новосибирск: Омега принт, 2011. 302 с.

OPTIMIZATION OF A NUMERICAL AND STATISTICAL ALGORITHM FOR ESTIMATING THE AVERAGE PARTICLE FLUX IN A RANDOM MULTIPLYING BOUNDED MEDIUM

G. Z. Lotova^{a,b,*}, G. A. Mikhailov^{a,b,**}, S. A. Rozhenko^{a,***}

^a 630090 Novosibirsk, Akad Lavrentiev Ave., 6, ICM-MG, SB RAS, Russia

^b 630090 Novosibirsk, Pirogova str., 1, NSU, Russia

*e-mail: lot@osmf.ssc.ru

**e-mail: gam@sscc.ru

***e-mail: sergroj@mail.ru

Received: 16.05.2024

Revised: 16.05.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. Approximations of random functions are studied, numerically modeled to study the stochastic process of particle transport, including problems of fluctuations in the criticality of the process in random breeding media. The simplest grid model of an isotropic random field is formulated, reproducing the effective average correlation length, which ensures high accuracy in solving stochastic transfer problems at a small correlation scale. The proposed algorithms have been tested in solving the test problem of estimating the overexponential average particle flux in a random multiplying medium.

Keywords: numerical statistical modeling, random environment, Voronoi field, grid approximation, particle flow, overexponential asymptotics, estimation error, computational complexity.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА ПОТЕНЦИАЛА СПУТНИКОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ. ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО ПАРАМЕТРАМ ЕГО МУЛЬТИПОЛЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. Е. А. Никонова^{1,*}

¹119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com

Поступила в редакцию 29.05.2024 г.

Переработанный вариант 19.06.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Подход Максвелла к представлению однородных гармонических функций в виде суперпозиции производных по направлениям, разработанный им в рамках исследования задач электростатики, применяется к представлению потенциала спутникового приближения. Указанное представление определяется двумя единичными векторами, располагающимися в плоскости, ортогональной средней оси инерции тела. При этом ось инерции тела, отвечающая его наименьшему моменту инерции, является биссектрисой угла, образованного этими векторами. Установлен геометрический смысл векторов: они ортогональны круговым сечениям эллипсоида инерции тела, построенного для центра масс тела. Выше сказанное позволяет предложить подход к отысканию главных осей инерции тела по представлению Максвелла его потенциала спутникового приближения. Библ. 22.

Ключевые слова: потенциал спутникового приближения, представление Максвелла однородных гармонических функций, эллипсоид инерции, круговые сечения трёхосного эллипсоида, конфокальные эллипсоиды.

DOI: 10.31857/S0044466924110152, EDN: KFNPCB

1. ВВЕДЕНИЕ

В небесной механике используют разложение потенциала сил ньютоновского притяжения в виде ряда по естественному малому параметру — отношению характерного размера притягивающихся тел к расстоянию между ними — вплоть до слагаемых второго порядка малости, которое зачастую оказывается достаточным для описания и предсказания основных динамических эффектов, обусловленных взаимным притяжением (см. [1]–[5]). Представление ньютоновского потенциала в главных центральных осях инерции тела в виде слагаемых вплоть до второго порядка малости в отечественной литературе носит название *потенциала спутникового приближения* (см. [1]), в зарубежной литературе такое представление называется *формулой Маккуллаха* (см. [6]).

Подход Максвелла к представлению шаровых функций в виде суперпозиции производных по направлениям, применявшийся им при исследовании вопросов электростатики (см. [7], а также [8]), успешно применяется как в вопросах земного магнетизма (см. [9], [10]), так и при изучении гравитационного поля Земли (см. [11], [12]) и малых небесных тел (см. [13], [14]). Описание гравитационного потенциала в виде суммы шаровых функций различных порядков можно интерпретировать как совокупность потенциалов гравитационных полей, каждое из которых порождается некоторым распределением масс в гравитирующем теле. Подход Максвелла позволяет изучать источники этих полей (см. [11], [12]).

Топологическое толкование подхода Максвелла разработано В.И. Арнольдом (см. [15]), где также приводится любопытное историческое замечание, касающееся рассматриваемого вопроса (см. также [8]).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть B — твердое тело массы m_B и центром инерции O . Жестко свяжем с телом систему координат $Ox_1x_2x_3$, направляющие векторы e_1, e_2, e_3 которой сонаправлены главным осям инерции тела. Тогда потен-

циал спутникового приближения имеет вид

$$U = -G \left(\frac{m_B}{r} + \frac{1}{2} \frac{A+B+C}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2}{r^5} \right), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (1)$$

где G — гравитационная постоянная, а A, B, C — главные центральные моменты инерции тела B . В формуле (1) выделяются две группы слагаемых, определяющих гармонические однородные функции — так называемые шаровые функции (см. [8]):

$$U_0 = \frac{m_B}{r}, \quad U_2 = \frac{1}{2} \frac{A+B+C}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2}{r^5}.$$

Пусть Δ — оператор Лапласа, тогда для любого $\kappa > 0$

$$\Delta U_0 = 0, \quad U_0(\kappa x_1, \kappa x_2, \kappa x_3) = \kappa^{-1} U_0(x_1, x_2, x_3),$$

$$\Delta U_2 = 0, \quad U_2(\kappa x_1, \kappa x_2, \kappa x_3) = \kappa^{-3} U_2(x_1, x_2, x_3).$$

В рамках исследования задач электростатики [7] Максвелл предложил представлять шаровые функции в следующем виде

$$U_n = (-1)^n \frac{p_n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \mathbf{h}_1 \partial \mathbf{h}_2 \dots \partial \mathbf{h}_n} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial \mathbf{h}_k}$ — дифференцирование вдоль единичного вектора $\mathbf{h}_k$, а величина p_n — положительная постоянная. Функция (2) определяет потенциал так называемого мультиполя n -го порядка — специального точечного объекта, располагающегося в начале системы координат. Постоянную p_n называют моментом мультиполя, векторы $\mathbf{h}_k$ — его осями (см. [7, 8]). Ставится задача отыскания момента мультиполя второго порядка и его осей для функции U_2 , определяющей потенциал спутникового приближения (1).

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА ПОТЕНЦИАЛА СПУТНИКОВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Шаровая функции U_0 в представлении Максвелла имеет практически прежний вид

$$U_0 = \frac{p_0}{r}, \quad p_0 = m_B.$$

Для представления Максвелла функции U_2 необходимо знать величину p_2 и единичные векторы $\mathbf{h}_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)^T$, $i = 1, 2$, такие, чтобы имело место равенство

$$\frac{A+B+C}{r^3} - 3 \frac{Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2}{r^5} = p_2 \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{h}_1 \partial \mathbf{h}_2} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях переменных x_1, x_2, x_3 , приходим к системе нелинейных уравнений

$$\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma), \quad (3)$$

$$p_2(2\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 - \gamma_1 \gamma_2) = -2A + B + C, \quad (\alpha, \beta, \gamma), \quad (A, B, C), \quad (4)$$

где (α, β, γ) и (A, B, C) одновременный циклический сдвиг величин $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha$ и $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ соответственно.

Систему уравнений (3)–(4) следует дополнить условиями единичности векторов $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \quad (5)$$

и неравенством

$$p_2 > 0. \quad (6)$$

Исследование соотношений (3) сводится к изучению векторных произведений пар векторов

$$(\sigma_1 \alpha_1, -\sigma_1 \beta_1, 0)^T \text{ и } (\alpha_2, \beta_2, 0)^T,$$

$$(\sigma_2 \alpha_1, 0, -\sigma_2 \gamma_1)^T \text{ и } (\alpha_2, 0, \gamma_2)^T,$$

$$(0, \sigma_3 \beta_1, -\sigma_3 \gamma_1)^T \text{ и } (0, \beta_2, \gamma_2)^T,$$

где $\sigma_i = \pm 1, i = 1, 2, 3$. Анализ условий, при которых эти векторные произведения одновременно дают нулевые векторы в совокупности с соотношениями (4)–(5) позволяет сформулировать следующее

Утверждение 1.

Система уравнений (3)–(6) имеет два семейства решений:

- Векторы $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ противоположно направлены и одновременно коллинеарны некоторой одной и той же главной оси инерции, т.е. выполняется одно из следующих условий $\alpha_1 = -\alpha_2 = \pm 1$, или $\beta_1 = -\beta_2 = \pm 1$, или $\gamma_1 = -\gamma_2 = \pm 1$. При этом, тело непременно является динамически симметричным с осью динамической симметрии соответствующей ненулевой компоненте α_i , или β_i , или γ_i .

Если для моментов инерции выполнено соотношение $C > B = A$, то одно из возможных решений имеет вид

$$\mathbf{h}_1 = (0, 0, 1)^T, \quad \mathbf{h}_2 = (0, 0, -1)^T, \quad p_2 = C - A.$$

- Векторы $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$ одновременно ортогональны некоторой одной и той же главной оси инерции, то есть выполняется одно из следующих условий $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ или $\beta_1 = \beta_2 = 0$, или $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Эта ось отвечает среднему моменту инерции тела, а ось, отвечающая наименьшему моменту инерции тела, является биссектрисой угла между $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$.

Если для моментов инерции выполнено неравенство $C > B > A$, то одно из возможных решений имеет вид

$$\mathbf{h}_1 = (\alpha, 0, \gamma)^T, \quad \mathbf{h}_2 = (\alpha, 0, -\gamma)^T, \quad p_2 = C - A, \quad \alpha = \sqrt{\frac{B-A}{C-A}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{C-B}{C-A}}. \quad (7)$$

Соотношение (7) позволяет выписать представление Максвелла потенциала спутникового приближения

$$U = -G \left(\frac{p_0}{r} + \frac{p_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{h}_1 \partial \mathbf{h}_2} \left(\frac{1}{r} \right) \right). \quad (8)$$

Полагая ψ — угол между векторами $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$, имеет место соотношение

$$\cos \psi = 2(B - A)/(C - A) - 1,$$

и для потенциала спутникового приближения можно указать еще одно представление, а именно

$$U = -G \left(\frac{p_0}{r} + \frac{1}{2} \frac{p_2}{r^5} \left(\frac{\cos \psi + 3}{2} x_1^2 - \cos \psi x_2^2 + \frac{\cos \psi - 3}{2} x_3^2 \right) \right), \quad (9)$$

зависящее, если принять во внимание $p_0 = m_B$, фактически от двух Максвелловых постоянных p_2 и ψ .

4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НАПРАВЛЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Укажем геометрический смысл векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ из (7). Для этого рассмотрим эллипсоид инерции тела B , который в системе координат $Ox_1x_2x_3$ имеет следующий вид

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 = m_B \varepsilon^4, \quad (10)$$

где ε — постоянная величина, имеющая размерность длины.

Известно (см. [16]), что среди всех плоскостей, проходящих через среднюю ось трехосного эллипсоида имеются две такие плоскости, которые в пересечении с эллипсоидом дают круговые сечения. Для эллипсоида инерции (10) такие плоскости $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$ задаются уравнениями

$$\mathcal{P}_{\pm}: x_3 = \pm x_1 \sqrt{\frac{B-A}{C-B}}.$$

Ортогональным между собой векторам

$$\mathbf{a} = \left(\sqrt{C-B}, 0, \sqrt{B-A} \right)^T \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_2,$$

принадлежащим плоскости $\mathcal{P}_+$, ортогонален вектор $\mathbf{h}_2$ из (7). Векторам

$$\mathbf{b} = \left(-\sqrt{C-B}, 0, \sqrt{B-A} \right)^T \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_2$$

принадлежащим плоскости $\mathcal{P}_-$ и также ортогональным друг другу, ортогонален вектор $\mathbf{h}_1$ из (7). Таким образом, векторы $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$, определяющие представление Максвелла (8) потенциала спутникового приближения (1), ортогональны круговым сечениям эллипсоида инерции, построенного в центре масс тела.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ ТЕЛА ЧЕРЕЗ ОСИ МУЛЬТИПОЛЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В декартовой системе координат, оси которой сонаправлены с главными осями инерции тела, его матрица инерции имеет диагональный вид, а функция $r^5 \cdot U_2$ записывается в каноническом виде

$$r^5 \cdot U_2 = \Lambda_1 x_1^2 + \Lambda_2 x_2^2 + \Lambda_3 x_3^2,$$

где коэффициенты Λ_i , $i = 1, 2, 3$, следуя, например, (9), записываются как

$$\Lambda_1 = \frac{p_2}{4}(\cos \psi + 3), \quad \Lambda_2 = -\frac{p_2}{2} \cos \psi, \quad \Lambda_3 = \frac{p_2}{4}(\cos \psi - 3).$$

Выражения для осей мультиполя второго порядка из (7), а также их геометрическая интерпретация позволяют ставить обратную задачу, а именно: для твердого тела в связанной с ним произвольной декартовой системе координат по векторам $\mathbf{h}_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)^T$, $i = 1, 2$, считающимся заданными, определить главные оси инерции тела.

Формула (2) позволяет выписать общий вид функции U_2 , имеем:

$$r^5 \cdot U_2 = \Lambda_{11}x_1^2 + \Lambda_{22}x_2^2 + \Lambda_{33}x_3^2 + 2\Lambda_{12}x_1x_2 + 2\Lambda_{13}x_1x_3 + 2\Lambda_{23}x_2x_3, \quad (11)$$

$$\Lambda_{11} = \frac{p_2}{2}(3\alpha_1\alpha_2 - \cos \psi), \quad \Lambda_{22} = \frac{p_2}{2}(3\beta_1\beta_2 - \cos \psi), \quad \Lambda_{33} = \frac{p_2}{2}(3\gamma_1\gamma_2 - \cos \psi),$$

$$\Lambda_{12} = \frac{3p_2}{4}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1), \quad \Lambda_{13} = \frac{3p_2}{4}(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2\gamma_1), \quad \Lambda_{23} = \frac{3p_2}{4}(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1).$$

Характеристическое уравнение для квадратичной формы (11) имеет вид

$$-\lambda^3 + \frac{3p_2^2}{16}(\cos^2 \psi + 3)\lambda - \frac{p_2^3}{32}(\cos \psi^2 - 9) \cos \psi = 0,$$

а его корни записываются как

$$\lambda_1 = \frac{p_2}{4}(\cos \psi + 3), \quad \lambda_2 = -\frac{p_2 \cos \psi}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{p_2}{4}(\cos \psi - 3).$$

Собственным значениям отвечают следующие собственные векторы

$$\begin{aligned} \lambda_1 : \mathbf{f}_1 &= \pm (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)^T, \\ \lambda_2 : \mathbf{f}_2 &= \pm (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^T, \\ \lambda_3 : \mathbf{f}_3 &= \pm (\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2, \gamma_1 - \gamma_2)^T. \end{aligned} \quad (12)$$

Анализ формул (12) позволяет сделать следующие выводы.

- Векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_3$ лежат в плоскости векторов $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$.
- Вектор $\mathbf{f}_1$ лежит на биссектрисе угла ψ между векторами $\mathbf{h}_1$ и $\mathbf{h}_2$. Вектор $\mathbf{f}_3$ лежит на биссектрисе угла $\pi - \psi$.
- Векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_3$ ортогональны, а вектор $\mathbf{f}_2$ взаимно ортогонален им.

Совпадение направлений собственных векторов квадратичной формы (11) с главными осями инерции тела, позволяет применить формулы (12) для определения главных осей инерции тела относительно связанной с ним декартовой системы координат, а также заключить, что оси наибольшего и наименьшего моментов инерции тела всегда лежат в плоскости осей его мультиполя второго порядка. При этом, ось наименьшего момента инерции является биссектрисой угла между осями мультиполя, а остальные две оси инерции дополняют первую до тройки взаимно ортогональных векторов.

Описанный подход находит свое применение при отыскании системы главных осей инерции малых небесных тел. В работе [17], см. также [14], предложен опирающийся на теорему Сильвестра о существовании системы вещественных полюсов сферической функции [8] подход к отысканию параметров мультиполей различных порядков через интегралы инерции соответствующих порядков изучаемого гравитирующего тела. В [14] этот способ применяется для вычисления мультиполей вплоть до четвертого порядка для астероида (16) Психея.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Потенциал спутникового приближения, нашедший широкое использование в задачах динамики космического полета, представлен в форме Максвелла. Определены два единичных вектора, задающих это представление. Эти векторы располагаются в плоскости, ортогональной средней оси инерции тела, симметрично относительно наибольшей и наименьшей его оси, и зависят от попарных разностей главных центральных моментов инерции тела. Показано, что векторы ортогональны круговым сечениям эллипсоида инерции тела, построенного для его центра масс. Предложен подход к определению главных осей инерции тела по осям его мультиполя второго порядка.

Замечание 1. Согласно (8) или (9) потенциал спутникового приближения зависит от разностей моментов инерции тела, о чем непросто заключить исходя из более привычной формулы (1). Следовательно для тел одинаковой массы, у которых моменты инерции отличаются на одно и тоже слагаемое, потенциал спутникового приближения один и тот же. Это имеет место, например, для семейства однородных конфокальных эллипсоидов одинаковой массы. Действительно, согласно, например, [18], семейство конфокальных эллипсоидов задается соотношением

$$\frac{x_1^2}{a^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{b^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{c^2 + \lambda} = 1, \quad \lambda \geq 0. \quad (13)$$

Оси системы координат, в которой записано соотношение (13), являются главными центральными осями инерции любого эллипсоида из (13), если масса сосредоточенного в нем вещества распределена равномерно. Согласно, например, [19], см. также [20–22], главные центральные моменты инерции однородного эллипсоида массы m , поверхность которого задается формулой (13), имеют вид

$$A_\lambda = \frac{m}{5} (b^2 + c^2 + 2\lambda), \quad B_\lambda = \frac{m}{5} (a^2 + c^2 + 2\lambda), \quad C_\lambda = \frac{m}{5} (a^2 + b^2 + 2\lambda).$$

Различные разности этих моментов не зависят от параметра λ , поэтому потенциал спутникового приближения однородных конфокальных эллипсоидов равной массы одинаковый.

Замечание 2. Соотношение (8) позволяет выписать представление Максвелла для силы тяготения. Этот вектор имеет вид

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U = (f_1, f_2, f_3)^T,$$

где

$$f_i = G \left(-p_1 \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{e}}_i} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{p_3}{6} \frac{\partial^3}{\partial \tilde{\mathbf{e}}_i \partial \mathbf{h}_1 \partial \mathbf{h}_2} \left(\frac{1}{r} \right) \right), \quad p_1 = p_0, \quad p_3 = 3p_2, \quad \tilde{\mathbf{e}}_i = -\mathbf{e}_i.$$

Момент силы относительно центра масс тела также может быть представлен в виде максвеллова представления:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = G \left(\frac{p_2^1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{e}_2 \partial \mathbf{e}_3} \left(\frac{1}{r} \right), \frac{p_2^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\mathbf{e}}_1 \partial \mathbf{e}_3} \left(\frac{1}{r} \right), \frac{p_2^3}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{e}_1 \partial \mathbf{e}_2} \left(\frac{1}{r} \right) \right)^T, \\ p_2^1 = 2(C - B), \quad p_2^2 = 2(C - A), \quad p_2^3 = 2(B - A).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
2. Maciejewski A.J. Regular precessions in the restricted problem of the rotational motion // Acta Astronomica. 1994. V. 44. P. 301–316.
3. Elpe A., Vallejo M. On the attitude dynamics of perturbed triaxial rigid bodies // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2001. V. 81. P. 3–12.
4. Celletti A. Stability and Chaos in Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 2010.
5. Newman W.I. Rotational kinematics and torques for triaxial bodies // Icarus. 2013. V. 223. Iss. 1. P. 615–618.
6. MacCullagh J. On the attraction of ellipsoids // Transactions of the Royal Irish Academy. 1853. V. XXII. P. 379–397.
7. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism Vol I, Oxford: Clarendon Press. 1873.

8. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. Перевод с англ. С.В. Фомина, М.: ИЛ, 1952. 476 с.
9. Тихонов А.А., Петров К.Г. Мультипольные модели магнитного поля Земли // Космич. исслед. 2002. Т. 40. № 3. С. 219–229.
10. Антипов К.А., Тихонов А.А. Мультипольные модели геомагнитного поля: построение N-го приближения // Геомагнетизм и аэрономия. 2013. Т. 53. № 2. С. 271–281.
11. Мещеряков Г. А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. М.: Наука, 1991.
12. Chao B.F., Shih S.A. Multipole Expansion: Unifying Formalism for Earth and Planetary Gravitational Dynamics // Surveys in Geophysics. 2021. V. 42. P. 803–838.
13. Dobrovolskis A.R., Korycansky D.G. The quadrupole model for rigid-body gravity simulations // Icarus. 2013. V. 225. № 1. P. 623–635.
14. Nikonov V. I. Multipole Representation of the Gravitational Field of the Asteroid (16) Psyche // Comput. Math. and Math. Phys. 2023. V. 63. № 12. P. 2572–2579.
15. Arnold V. Topological content of the Maxwell theorem on multipole representation of spherical functions // Topological Meth. in Nonlinear Analys. 1996. V. 7. № 2. P. 205–217.
16. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. Пер. с нем. С.А. Каменецкого. М.-Л.: ОНТИ, 1936. 304 с.
17. Буров А.А., Никонов В.И. Вычислительные задачи теории гравитационного потенциала. Учебное пособие. М.: Белый ветер, 2023. 64 с.
18. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. Перевод с англ. В.Н. Рубановского, под ред. В.В. Румянцева. М.: МИР, 1973. 288 с.
19. Dobrovolskis A. R. Inertia of Any Polyhedron // Icarus. 1996. V. 124. № 2. P. 698–704.
20. Dobrovolskis A. R. Classification of ellipsoids by shape and surface gravity // Icarus. 2019. V. 321. P. 891–928.
21. Буров А.А., Никонова Е.А. Производящая функция компонент тензора Эйлера-Пуансо // Докл. РАН. Физика, технические науки. 2021. Т. 498. С. 53–56.
22. Burov A.A., Nikonova E.A. Generating function of the inertial integrals for small celestial bodies // Celestial Mech. and Dynamic. Astron. 2022. V. 134. № 4. ArtNo. 37.

MAXWELL'S REPRESENTATION OF THE SATELLITE APPROXIMATION POTENTIAL. ON ONE METHOD FOR DETERMINING THE MAIN AXES OF INERTIA OF A SOLID BODY USING THE PARAMETERS OF ITS SECOND-ORDER MULTIPOLE

E. A. Nikonova*

119333 Moscow, Vavilov str., 44, FRC CSC RAS

**e-mail: nikonova.ekaterina.a@gmail.com*

Received: 29.05.2024

Revised: 19.06.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. Maxwell's approach to the representation of homogeneous harmonic functions in the form of a superposition of derivatives in directions, developed by him within the framework of the study of problems of electrostatics, is applied to the representation of the potential of satellite approximation. The specified representation is determined by two unitary vectors located in a plane orthogonal to the intermediate axis of inertia of the body. In this case, the axis of inertia of the body corresponding to its smallest moment of inertia is the bisector of the angle formed by these vectors. The geometric meaning of the vectors is established: they are orthogonal to the circular sections of the body inertia ellipsoid constructed for the center of mass of the body. The above makes it possible to propose an approach to finding the main axes of inertia of a body based on Maxwell's representation of its satellite approximation potential.

Keywords: satellite approximation potential, Maxwell's representation of homogeneous harmonic functions, ellipsoid of inertia, circular sections of a triaxial ellipsoid, confocal ellipsoids.

УСКОРЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫРАЩИВАНИЯ СЕГМЕНТОВ ИЗ ОБЛАСТЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ

© 2024 г. Д.М. Мурашов^{1,*}¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: d_murashov@mail.ru

Поступила в редакцию 08.04.2024 г.

Переработанный вариант 15.05.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

В работе предлагаются новые алгоритмы объединения суперпиксельных областей в сегменты. Основная идея состоит в том, чтобы при объединении суперпикселей, во-первых, использовалась стратегия, при которой сегмент выращивается из соседних областей до тех пор, пока выполняются условия объединения, и, во-вторых, при объединении областей применяемая информационная мера качества не должна возрастать. Предлагается три алгоритма на основе указанной стратегии, которые отличаются условиями принятия решения об объединении суперпикселей. Проведен вычислительный эксперимент на тестовых изображениях. Эксперимент показал, что предлагаемые алгоритмы позволяют ускорить процесс сегментации по сравнению с применявшейся процедурой при допустимых потерях информационных мер качества полученных разбиений. Библ. 25. Фиг. 8. Табл. 2.

Ключевые слова: сегментация изображений, информационная избыточность, вариация информации, выращивание сегментов, объединение сегментов, суперпиксель.

DOI: 10.31857/S0044466924110164, EDN: KFMQVQV

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье предлагаются алгоритмы выращивания сегментов из малых областей в задаче сегментации цифровых изображений. Один из известных подходов к решению задачи сегментации состоит в разбиении входного изображения на достаточно большое количество элементарных областей (или сегментов, или суперпикселей) и объединении их в более крупные сегменты, соответствующие объектам на оригинальном изображении, минимизируя при этом некоторый функционал качества.

Задача формулируется следующим образом. Пусть задано изображение U как некоторая область пространства $\mathbb{Z}^2$. Пусть из заданного изображения U с помощью некоторого алгоритма получено разбиение V_0 на K_0 непересекающихся однородных сегментов:

$$V_0 = \bigcup_{k=1}^{K_0} S_k^{V_0}, \quad S_i^{V_0} \cap S_j^{V_0} = \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots, K_0, \quad j = 1, 2, \dots, K_0, \quad k = 1, 2, \dots, K_0.$$

Выполняя последовательно операцию объединения сегментов $S_m^{V_{q+1}} = S_k^{V_q} \cup S_l^{V_q}$, $k = 1, 2, \dots, K_q$, $l = 1, 2, \dots, K_q$, $0 < K_q < K_0$ и формируя разбиения $V_{q+1} = (V_q \setminus S_k^{V_q} \setminus S_l^{V_q}) \cup S_m^{V_{q+1}}$, где $m \in [1, K_{q+1}]$ и $K_{q+1} = K_q - 1$, необходимо получить разбиение $V_{q \min}$, минимизирующее заданную меру качества $M(U, V_q)$:

$$V_{q \min} = \arg \min_{V_q} [M(U, V_q)]. \quad (1.1)$$

Вид полученного разбиения зависит от выбранной меры качества, а также порядка и условия принятия решения об объединении сегментов.

В литературе опубликовано достаточно большое количество методов, реализующих указанный подход. При объединении использовались различные правила, критерии и признаковые описания областей изображений.

Так, например, в работе [1] были предложены алгоритмы объединения областей в сегменты по пороговым правилам в зависимости от величины евклидова расстояния между точками, описывающими области изображения в цветовом пространстве HSI. Комбинированное условие объединения областей по степени однородности и близости значений признаков представлено в статье [2]. В [3] авторы предложили алгоритм адаптивного слияния областей по критериям на основе геометрических, гистограммных, текстурных и контурных характеристик. В работе [4] критерием объединения суперпикселей является тест на унимодальность распределения признаков, извлекаемых из отдельных суперпикселей, и сегмента, полученного при их слиянии. Пороговый метод слияния суперпиксельных областей по значениям градиента интенсивности, показателя однородности, отношений длин перепадов интенсивности и общей границы между объединяемыми областями предложен в работе [5]. В [6] разработан подход к сегментации цифровых изображений, обобщающий модель Мамфорда—Шаха (Mumford—Shuh model) слияния множеств пикселей изображения и включающий дополнительную операцию коррекции. Этот подход позволяет сформировать кусочно—постоянные приближения (разбиения) с минимальными среднеквадратичными отклонениями усредненных по сегментам значений пикселей этих приближений от значений пикселей соответствующих областей оригинального изображения.

Ряд исследователей решали задачу сегментации методами объединения областей на основе многоуровневых иерархических моделей [7–10]. В [7] иерархическая модель применялась для получения разбиения, состоящего из суперпикселей, однородных относительно минимума дисперсии интенсивности. Далее соседние суперпиксели объединялись по пороговому критерию сходства распределений интенсивности в каналах цветового пространства CIE Lab. Метод малочувствителен к шуму и обеспечивает хорошее совпадение разбиений с эталонами, однако необходимо подбирать значение порога критерия сходства для объединения суперпикселей. В работе [8] применялась итерационная древовидная иерархическая модель слияния суперпикселей на основе прогнозирования функции правдоподобия с использованием ансамбля классификаторов границ. Иерархический алгоритм выращивания сегментов, использующий критерий близости точек в объединенном пространстве яркостных, цветовых и текстурных признаков, разработан в [9]. Для оценки текстурных признаков изображения предложен метод на основе многомасштабной ориентированной локальной вариации и локальной осцилляции градиента. В [10] предложен метод на базе древовидной кластеризации однородных по яркости областей пикселей и формировании множества кратномасштабных кластерных образов исходного изображения. В методе производится также поиск избыточных границ однородных областей и объединение соседних однородных по яркости кластеризованных областей.

Известен ряд работ, в которых при объединении областей применяются информационные функционалы качества. В [11] разработаны алгоритмы объединения областей по значениям дивергенции Кульбака—Лейблера и коэффициента Бхаттачарья (Bhattacharyya coefficient). В работах [12–14] предложены методы выращивания областей изображения на основе минимизации потерь взаимной информации между оригинальным и сегментированным изображением (метод информационного “бутылочного горлышка” (information bottleneck), см. [15]).

При сегментации изображений в задаче дистанционного зондирования [16] объединение примитивных сегментов выполнялось с помощью модели глубокого обучения, которая применялась для измерения степени сходства “примитивных сегментов” изображений. Сходство областей оценивалось евклидовым расстоянием в пространстве признаков, включающим среднее значение и среднеквадратическое отклонение яркости пикселей сегмента в каждом спектральном диапазоне, среднее значение яркости по всем спектральным диапазонам, индикаторы компактности, формы и границ сегментов.

Большинство рассмотренных выше методов требуют настройки параметров, таких как значения порогов, количество итераций и др., что осложняет их применение. В работах [17–19] был предложен метод решения сформулированной выше задачи сегментации на основе принципа минимизации информационного функционала качества. С помощью суперпиксельного алгоритма SLIC [20] и процедуры объединения суперпикселей при различных значениях параметра порождалось множество разбиений оригинального изображения на сегменты. Из множества полученных разбиений оригинального изображения с разным числом сегментов выбиралось разбиение, которое минимизировало заданный функционал качества [17] в виде меры информационной избыточности. Этот метод позволил получить оптимальное в смысле меры информационной избыточности разбиение. При этом для решения задачи требуется задать только границы изменения и шаг параметра. Эти величины определяют мощность множества разбиений, из которых выбирается оптимальное. Описанный выше алгоритм достаточно трудоемкий, и возникает необходимость ускорить получение карт сегментации.

Целью настоящей работы является разработка ускоренных алгоритмов объединения суперпикселей в сегменты, которые представляют объекты, зафиксированные на изображении. Основная идея состоит в том, чтобы при объединении суперпиксельных областей, во-первых, использовалась стратегия, при которой сегмент выращивается из соседних областей до тех пор, пока выполняются условия объединения, и, во-вторых, мера качества не должна возрастать. Предлагается три алгоритма на основе указанной стратегии, которые отлича-

ются условиями принятия решения об объединении суперпикселей. Предлагаемые алгоритмы являются модификациями алгоритма, описанного в работах [17, 18].

2. ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ СЕГМЕНТАЦИИ

В работах [17–19] было предложено использовать для описания операции сегментации модель информационного канала. Эта модель будет использована и в представляемой работе. Предполагается, что оригинальное полутоновое изображение и сегментированное изображение являются входом и выходом стохастической информационной системы. Значения уровней яркости изображений описываются дискретными случайными переменными U и V со значениями u и v . Тогда можно представить операцию сегментации следующей моделью:

$$V = F(U + \eta, t), \quad (2.1)$$

где U — сигнал на входе канала, V — выход канала; F — функция преобразования; t — параметр; η — шум канала, переменные U и η независимы. В работах [17–19] задача сегментации была сформулирована следующим образом. Пусть из заданного входного изображения U с помощью алгоритма сегментации (2.1) получено множество Q разбиений $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_q, \dots, V_Q\}$ при различных значениях параметра t . Разбиение

$$V_q = \bigcup_{k=1}^{K_q} S_k^{V_q}, \quad S_i^{V_q} \cap S_j^{V_q} = \emptyset, \quad k = 1, 2, \dots, K_q, \quad i = 1, 2, \dots, K_q, \quad j = 1, 2, \dots, K_q,$$

состоит из K_q сегментов. В работах [17–19] применялся функционал качества в виде меры информационной избыточности,

$$R(U, V_q) = 1 - \frac{I(U; V_q)}{H(V_q)} = \frac{H(U, V_q) - H(U_q)}{H(V_q)} = \frac{H(V_q|U)}{H(V_q)}, \quad (2.2)$$

где $I(U; V_q)$ — средняя взаимная информация между входным изображением U и картой сегментации V_q , $H(U, V_q)$ — совместная энтропия, $H(U)$ и $H(V_q)$ — энтропии входа и выхода, $H(V_q|U)$ — условная энтропия выхода при условии, что вход равен U .

Задача формулируется следующим образом. Требуется найти разбиение $V_{q_{\min}}$, обеспечивающее минимум меры качества $R(U, V_{q_{\min}})$:

$$V_{q_{\min}} = \arg \min_{V_q} [R(U, V_q)], \quad q = 1, 2, \dots, Q. \quad (2.3)$$

3. АЛГОРИТМЫ ФОРМИРОВАНИЯ КАРТ СЕГМЕНТАЦИИ МЕТОДОМ ВЫРАЩИВАНИЯ СЕГМЕНТОВ

Рассматривается алгоритм формирования разбиений V_q , применявшийся в работах [17, 18], который в представляемой работе рассматривается как базовый алгоритм. Задача сегментации методом выращивания сегментов была сформулирована во введении.

Ниже приводится базовый алгоритм формирования разбиений изображения методом выращивания сегментов, формулируется задача ускоренного выращивания сегментов и предлагается три алгоритма для ее решения.

3.1. Базовый алгоритм формирования карт сегментации

В работах [17, 18] начальным приближением V_0 изображения V при формировании карт сегментации является суперпиксельное разбиение, полученное алгоритмом SLIC [20]:

$$V_0 = \bigcup_i S_i^{V_0}, \quad S_i^{V_0} \cap S_j^{V_0} = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \dots, K_0, \quad j = 1, 2, \dots, K_0,$$

где $S_i^{V_0}$, $S_j^{V_0}$ — сегменты разбиения V_0 с номерами i и j , K_0 — число сегментов разбиения V_0 . Ниже будет рассмотрен базовый алгоритм объединения суперпикселей изображения V_0 для формирования множества Q разбиений $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_q, \dots, V_Q\}$. Основная идея алгоритма состоит в следующем. При выбранном значении параметра t модели (2.1) выполняется перебор центров $\mathbf{C}_i = (c_i^1, c_i^2, c_i^3)^T$ всех суперпикселей изображения V_0 , полученного на выходе алгоритма SLIC, и проверяется условие близости соседних суперпикселей. Формируется матрица сходства Px , соответствующим элементам которой присваивается единица, если выполняется условие близости, и ноль в противном случае. После завершения формирования матрицы Px выполняется объединение суперпикселей, которые соответствуют ненулевым элементам этой матрицы, в сегменты, и генерируется новое разбиение V_1 . Эти операции повторяются для различных значений параметра t , и, таким образом, порождается множество разбиений $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_q, \dots, V_Q\}$.

Базовый алгоритм

- Шаг 1.** Выбирается разбиение $V = V_0$. С числом сегментов $K = K_0$. Задается значение параметра $t = t_0$.
- Шаг 2.** Выбирается суперпиксель S_i^V с номером $i = 1$ разбиения V и соседний суперпиксель S_j^V с номером $j = i + 1$, $\partial S_i^V \cap S_j^V \neq \emptyset$, $\partial S_j^V \cap S_i^V \neq \emptyset$, где ∂S_i^V и ∂S_j^V — границы суперпикселей S_i^V, S_j^V .
- Шаг 3.** Проверяется условие
- $$d_e(C_i, C_j) \leq \rho t, \quad (3.1)$$
- где C_i, C_j — векторы координат центров соседних суперпикселей в выбранном цветовом пространстве, $C_i = (c_i^1, c_i^2, c_i^3)^T$; c_i^{ch} — координаты центров; $ch = 1, 2, 3$ — номер компоненты используемого цветового пространства; $d_e(C_i, C_j)$ — евклидово расстояние между центрами суперпикселей S_i^V и S_j^V , ρ — константа, t — параметр модели (2.1).
- Шаг 4.** Формируется матрица сходства Px размера $K \times K$, элементы которой $Px_{ij} = 1$, если выполняется условие (6), и $Px_{ij} = 0$ в противном случае.
- Шаг 5.** Если $j \leq K$, то $i = i + 1$ и переход к шагу 2, иначе переход к шагу 6.
- Шаг 6.** После завершения формирования матрицы Px выполняется объединение суперпикселей, которые соответствуют ненулевым элементам этой матрицы, в сегменты: $S_m^{V_{q+1}} = S_i^V \cup S_j^V$. Полученное разбиение V_{q+1} оригинального изображения сохраняется.
- Шаг 7.** Выбирается новое значение параметра $t = t + \Delta t$, $q = q + 1$, $V = V_{q+1}$. Если $t < t_{\max}$, переход к шагу 2, иначе переход к шагу 8.
- Шаг 8.** Из полученного множества разбиений $\mathcal{V} = \{V_0, V_1, \dots, V_q, \dots, V_Q\}$ выбирается разбиение $V_{q_{\min}}$ согласно (2.3), на котором функционал качества (2.2) достигает минимума.

3.2. Задача ускоренного формирования карт сегментации

Описанный в п. 3.1 алгоритм достаточно трудоемкий, и возникает необходимость разработки более быстрых способов получения карт сегментации без значительных потерь качества в смысле функционала (2.2). Для этого предлагается реализовать процедуру выращивания сегментов из областей (суперпикселей) непосредственно в процессе сканирования изображения V_0 . В задаче сегментации (2.1), (2.2) мера качества (2.2) применялась только на этапе выбора оптимального разбиения $V_{q_{\min}}$ из множества разбиений $\mathcal{V}$. В представляемой работе предлагается: (а) выращивать каждый сегмент из соседних суперпикселей, не переходя к следующему до тех пор, пока выполняются условия объединения; (б) использовать условие невозрастания меры избыточности $R(U, V_q)$ (2.2) для объединения сегментов при формировании разбиения V_{q+1} из разбиения V_q . Задача формулируется следующим образом.

Пусть из изображения U получено суперпиксельное изображение V_0 . Выращиванием сегментов из суперпикселей

$$S_k^{V_{q+1}} = S_k^{V_q} \cup S_l^{V_q}, \quad V_{q+1} = \bigcup_i S_i^{V_{q+1}}, \quad V_q = \bigcup_j S_j^{V_q}$$

необходимо сформировать разбиение $V_{q_{\min}}$ так, что выполняется условие (3.1) для соседних суперпикселей $S_k^{V_q}$ и $S_l^{V_q}$ в выбранном цветовом пространстве, или (и) выполняется условие

$$R(U, V_{q_{\min}}) \leq \dots \leq R(U, V_{q+1}) \leq R(U, V_q) \leq \dots \leq R(U, V_0). \quad (3.2)$$

В следующем подразделе будет предложено три ускоренных алгоритма формирования карт сегментации, которые являются модификациями базового алгоритма.

3.3. Модификации базового алгоритма

В предлагаемых модификациях описанного выше базового алгоритма объединение суперпикселей выполняется непосредственно в процессе сканирования разбиения V_0 . Пусть Ω_k — множество суперпикселей, соседних с суперпикселем $S_k^{V_m}$ с центром C_k ,

$$\Omega_k = \{S_l^{V_m}\}, \quad l = 1, 2, \dots, L, \quad \partial S_k^{V_m} \cap S_l^{V_m} \neq \emptyset, \quad \partial S_l^{V_m} \cap S_k^{V_m} \neq \emptyset,$$

где V_m — разбиение V_0 на шаге объединения m , $\partial S_k^{V_m}$ и $\partial S_l^{V_m}$ — границы суперпикселей $S_k^{V_m}, S_l^{V_m}$. Алгоритмы включают следующие операции.

Шаг 1. Назначается начальное значение параметра $t = t_0$ и $V_m = V_0$, $m = 0$.

Шаг 2. Выбирается суперпиксель $S_k^{V_m}$ изображения V_m с центром C_k .

Шаг 3. Проверяется условие объединения суперпикселя $S_k^{V_m}$ с центром C_k с соседним суперпикселем $S_l^{V_m} \subset \Omega_k$ с центром C_l (3.1) или (и) (3.2).

Шаг 4. Если условие объединения выполняется, то суперпиксель $S_k^{V_m}$ объединяется с суперпикселем $S_l^{V_m} \subset \Omega_k$:

$$S_{kl} = S_k^{V_m} \cup S_l^{V_m}, \quad 1 \leq k \leq K_m, \quad 1 \leq l \leq L,$$

где $K_m = |V_m|$ - число суперпикселей разбиения V_m . Объединенному суперпикселю $S_{kl}^{V_m}$ присваивается номер k , $S_k^{V_m} = S_{kl}^{V_m}$, и пересчитывается вектор координат центра C_k .

Шаг 5. $K_m = K_m - 1$, $l = l + 1$, $m = m + 1$.

Шаг 6. Если условие объединения не выполняется и $l < L$, то $l = l + 1$ и переход к шагу 3.

Шаг 7. Если $l > L$, то выбирается следующий суперпиксель $k = k + 1$, переход к шагу 3.

Шаг 8. Если $k > K_m$, разбиение $V_q = V_m$ сохраняется, меняется параметр $t = t + \Delta t$, и выполняется переход к шагу 2.

В предлагаемых алгоритмах используются три различных условия объединения. В первом из предлагаемых алгоритмов применяется условие (3.1), наложенное на расстояние в цветовом пространстве между центрами объединяемых объектов.

Во втором алгоритме необходимо, чтобы в результате слияния суперпикселей не возрастала информационная мера качества (2.2):

$$\Delta R = R(U, V_{m+1}) - R(U, V_m) \leq 0, \quad (3.3)$$

где V_m — разбиение изображения U на шаге объединения m .

В третьем алгоритме условием слияния суперпикселей является комбинация (логическое “И”) условий (3.1) и (3.3). Так как второй и третий алгоритм обеспечивают невозрастание меры качества (2.2), то на выходе алгоритма будет получено разбиение с минимумом (не обязательно глобальным) меры. При этом не требуется формировать большого числа разбиений для всего диапазона значений параметра t как для базового алгоритма и его модификации с условием (3.1), что обусловило более высокое быстродействие. Если в алгоритме используется только условие объединения (3.1), то решением будет разбиение, удовлетворяющее условию (2.3). Если применяется условие (3.2), то алгоритм выполняется до достижения стабильности или минимально допустимого количества сегментов $K_m = 2$.

Для проверки условий объединения, в которых используется мера информационной избыточности (2.2), применяются следующие формулы вычисления ее приращения:

$$\Delta R = R(U, V_{m+1}) - R(U, V_m) = \frac{H(U, V_{m+1}) - H(U)}{H(V_{m+1})} - \frac{H(U, V_m) - H(U)}{H(V_m)}.$$

Прогнозируемые совместные и маргинальные энтропии на шаге $m + 1$ вычисляются по формулам:

$$H(U, V_{m+1}) = H(U, V_m) + \sum_{i=1}^{L_U} \left(\frac{n_{ik}}{N} \log \frac{n_{ik}}{n_{ik} + n_{il}} \right) + \sum_{i=1}^{L_U} \left(\frac{n_{il}}{N} \log \frac{n_{il}}{n_{ik} + n_{il}} \right),$$

$$H(V_{m+1}) = H(V_m) + \left(\sum_{i=1}^{L_U} \frac{n_{ik}}{N} \right) \log \left(\sum_{i=1}^{L_U} n_{ik} / \sum_{i=1}^{L_U} (n_{ik} + n_{il}) \right) + \left(\sum_{i=1}^{L_U} \frac{n_{il}}{N} \right) \log \left(\sum_{i=1}^{L_U} n_{il} / \sum_{i=1}^{L_U} (n_{ik} + n_{il}) \right),$$

где N — количество пикселей в изображениях U , V_m и V_{m+1} , L_U — количество уровней яркости изображения U ; k и l — метки сегментов разбиения V_m ; n_{ik} , n_{il} — частоты встречаемости пикселей с уровнем яркости i и метками сегментов k и l в совместной гистограмме яркости изображений U и V_m .

4. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА АЛГОРИТМОВ СЕГМЕНТАЦИИ

При оценивании результатов сегментации желательно знать теоретически достижимые граничные значения показателей качества для анализируемых изображений. В работе [21] для задачи классификации данных была найдена нижняя граница соотношения между наименьшей средней взаимной информацией и вероятностью ошибки, которая дает нижнюю оценку вероятности ошибки классификации на заданном множестве объектов при любом фиксированном значении средней взаимной информации. В работе [12] из неравенства Фано [22] было получено соотношение, связывающее вероятность ошибки сегментации изображений и среднюю взаимную информацию между гистограммой яркости сегментируемого изображения и его разбиением на сегменты.

Одной из широко применяемых оценок качества сегментации является вариация информации [23, 24], которая характеризует информационное различие между двумя изображениями. При решении практических задач сегментации важно оценить наименьшее возможное информационное различие между заданным входным изображением U и полученным разбиением V . Зная нижнюю границу вариации информации для оригинала U и его некоторого идеального разбиения, можно оценить качество полученного разбиения V и, соответственно, качество используемого алгоритма сегментации. Оценку нижней границы вариации информации дает следующее

Утверждение. Минимально возможная величина вариации информации между изображением U и его разбиением V определяется соотношением

$$VI_{\min}(U, V) = H(U) - \log K, \quad (4.1)$$

где $H(U)$ — энтропия изображения U , K — число сегментов разбиения V , а минимально возможная величина нормированной вариации информации — соотношением

$$VI_n(U, V) = 1 - \frac{\log K}{H(U)}. \quad (4.2)$$

Доказательство. По определению величина вариации информации между изображениями U и V равна [23]:

$$VI(U, V) = H(U) + H(V) - 2I(U; V), \quad (4.3)$$

где $H(U)$ и $H(V)$ — энтропии оригинального изображения U и его разбиения V , $I(U; V)$ — средняя взаимная информация между U и V . Максимальное значение взаимной информации в (4.3) равно энтропии разбиения V , т.е. $I_{\max}(U; V) = H(V)$ и $H(V|U) = 0$. Это возможно в том случае, если пиксели изображения U с определенными уровнями яркости будут находиться только в одном сегменте. Тогда минимальное значения вариации информации будет равно разности энтропий:

$$VI_{\min}(U, V) = H(U) - H(V). \quad (4.4)$$

Максимальное значение энтропии $H(V)$ соответствует разбиению V изображения U , состоящему из сегментов одинаковой площади (т.е. включающих равное количество пикселей). В этом случае

$$H_{\max}(V) = - \sum_{k=1}^K \frac{1}{K} \log \frac{1}{K} = \log K, \quad (4.5)$$

где K — число сегментов разбиения V . Тогда, подставляя (4.5) в (4.4), получаем выражение, определяющее нижнюю границу вариации информации (4.1) между оригинальным изображением U и его разбиением V :

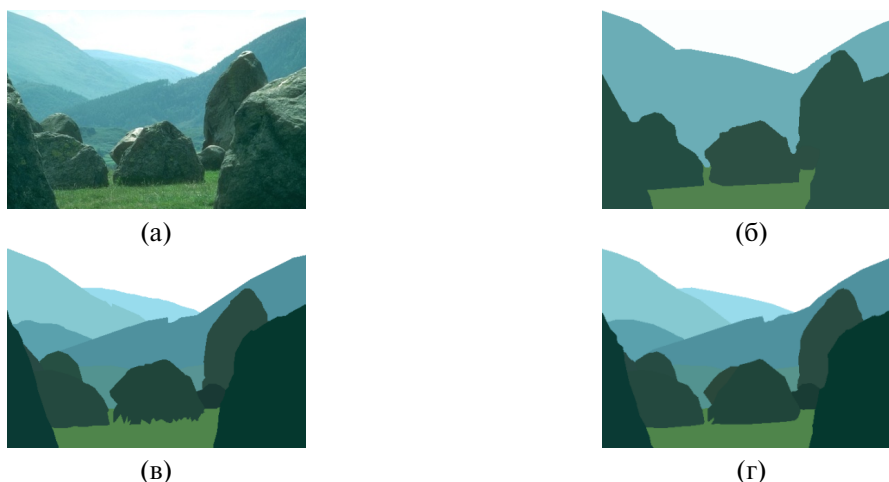
$$VI(U, V) \geq VI_{\min}(U, V) = H(U) - H_{\max}(V) = H(U) - \log K.$$

Нормированная вариация информации определена в виде:

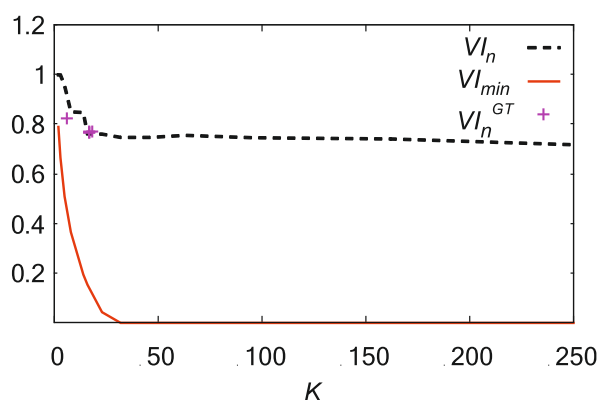
$$VI_n(U, V) = \frac{H(U) + H(V) - 2I(U; V)}{H(U, V)} = \frac{H(U) + H(V) - 2I(U; V)}{H(U) + H(V) - I(U; V)}. \quad (4.6)$$

С учетом максимально возможных значений энтропии выхода и средней взаимной информации, из (4.6) получим оценку нижней границы нормированной вариации информации (4.2):

$$VI_n(U, V) \geq VI_{n \min}(U, V) = \frac{H(U) - H_{\max}(V)}{H(U)} = 1 - \frac{\log K}{H(U)}.$$



Фиг. 1. Изображение 241004.jpg из базы BSDS500 [24, 25] (а) и его эталонные разбиения: (б) — на 6 сегментов; (в) — на 17 сегментов; (г) — на 18 сегментов.



Фиг. 2. Графики нормированной вариации информации (штриховая линия) $VI_n(U, V_q)$ для разбиений с различным числом сегментов и изображения, показанного на фиг. 1а, оценки нижней границы $VI_{n \min}(U, V)$ (сплошная линия) и нормированной вариации информации эталонных разбиений, показанных на фиг. 1б–г (отмечены символом “+”).

Таким образом, нижняя граница вариации информации (а также нормированной вариации информации) между оригинальным изображением U и его разбиением V имеет вид кривой, зависящей от энтропии U и количества сегментов K разбиения V . Так как согласно свойствам метрики вариация информации неотрицательна, то значения $VI_{\min}(U, V)$ и $VI_{n \min}(U, V)$ в формулах (4.1) и (4.2) ограничиваются условиями $VI_{\min}(U, V) \geq 0$ и $VI_{n \min}(U, V) \geq 0$.

Пример графика оценки нижней границы нормированной вариации информации для тестового изображения и его разбиений, показанных на фиг. 1, приведен на фиг. 2. На фиг. 1 представлено изображение 241004.jpg из базы BSDS500 [24, 25] и его эталонные разбиения на 6, 17 и 18 сегментов, соответственно. На фиг. 2 показан график нижней границы (сплошная линия), график нормированной вариации информации (штриховая линия) для разбиений, полученных базовым алгоритмом сегментации, с различным числом сегментов K , и точки, соответствующие эталонным разбиениям (отмечены символом “+”).

Из фиг. 2 следует, что разбиения, полученные базовым алгоритмом, имеют малое информационное различие с эталонными разбиениями из базы BSDS500. Эталонным разбиениям с малым числом сегментов $K = 6$ на графике соответствуют точки, расположенные ближе к нижней границе вариации информации, чем точки, соответствующие разбиениям с 17 и 18 сегментами. Разбиение $V_{q \min}$, порожденное базовым алгоритмом и соответствующее минимуму меры избыточности, состоит из 16 сегментов.

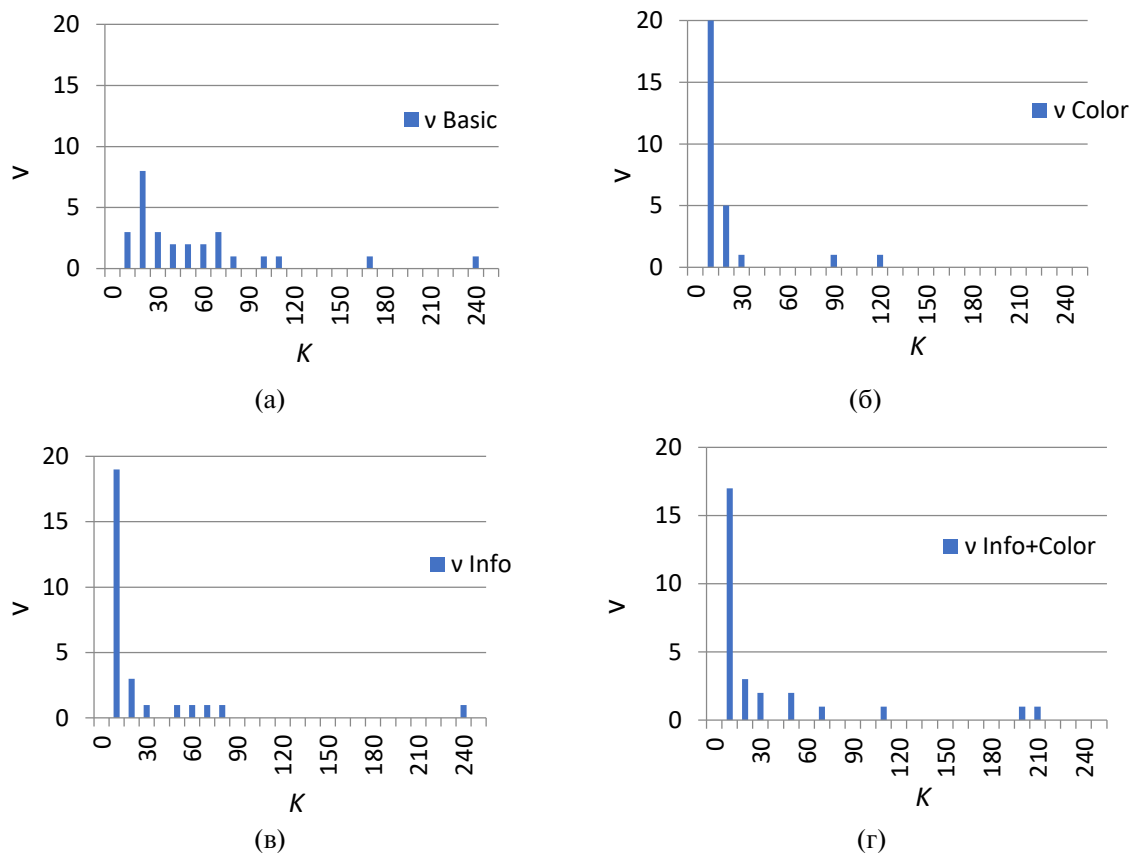
В следующем разделе будет описан вычислительный эксперимент, позволяющий оценить характеристики предложенных алгоритмов.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

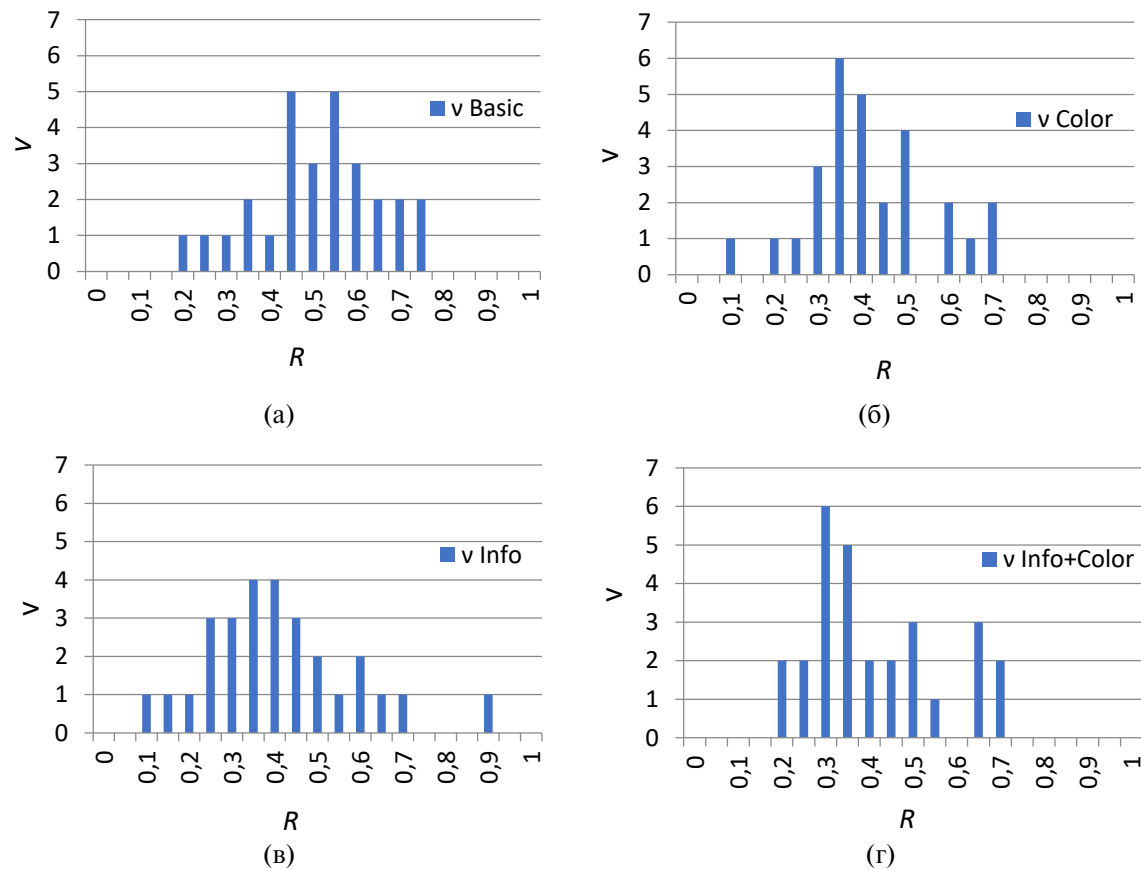
Вычислительный эксперимент, позволяющий оценить характеристики предложенных алгоритмов, проводился на наборе из 28 тестовых изображений из базы BSDS500 [24, 25] и 140 эталонных разбиений с использованием персонального компьютера с процессором Intel Core i5-2410M, 2.3GHz, 4GB оперативной памяти и операционной системой Windows. Эксперимент состоял из трех частей. В первой части были вычислены информационные меры, с помощью которых проведено сравнение разбиений полученных базовым алгоритмом и тремя новыми алгоритмами. Во второй части эксперимента оценивалось информационное различие полученных разбиений с эталонными картами сегментации из базы BSDS500. В третьей части оценивалось быстроедействие предложенных алгоритмов.

Чтобы применить информационные меры к цветным изображениям, значения меры избыточности R (2.2) и вариации информации VI_n (4.6) для разных цветовых каналов взвешивались соответствующими энтропиями (см. [17–19]).

В первой части эксперимента из 28 тестовых изображений U_i , $i = 1, 2, \dots, 28$, получены разбиения V_i^j , $j = 1, 2, \dots, 4$, с использованием четырех алгоритмов формирования сегментов (базового алгоритма и трех его модификаций, описанных в разд. 3). Для каждого разбиения вычислено значение меры избыточности $R(U_i, V_i^j)$ и нормированной вариации информации $VI_n(U_i, V_i^j)$. Кроме того, для каждого из тестовых изображений получены оценки минимально возможного значения вариации информации $VI_{n \min}(U_i, V_i^j)$ для количества сегментов K в разбиении V_i^j , и вычислены разности $\Delta VI_n^j = VI_n(U_i, V_i^j) - VI_{n \min}(U_i, V_i^j)$, характеризующие избыточность вариации информации для полученных карт сегментации изображений U_i относительно минимально возможного значения. Для каждого из четырех исследуемых алгоритмов вычислены частоты ν и построены гистограммы значений количества сегментов K в разбиениях V_i^j , информационной избыточности $R(U_i, V_i^j)$ и избыточности вариации информации ΔVI_n^j , показанные на фиг. 3–5. Для оценки различия разбиений, полу-



Фиг. 3. Частота ν количества сегментов K в разбиениях, полученных разными алгоритмами: (а) — базовым; (б) — с условием объединения сегментов по расстоянию в цветовом пространстве (3.1); (в) — с информационным условием объединения сегментов (3.3); (г) — с комбинацией условий (3.1) и (3.3).



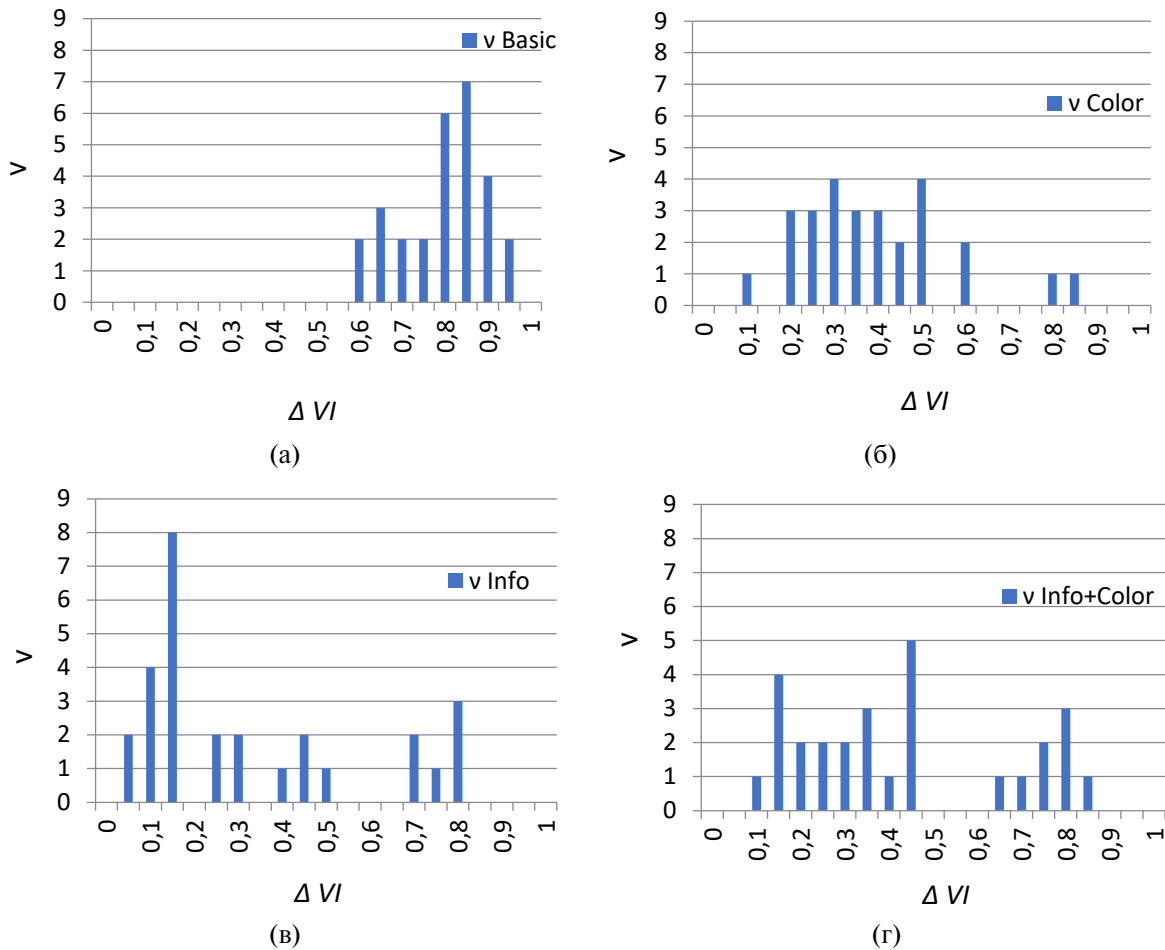
Фиг. 4. Частота v значений меры избыточности $R(U_i, V_i^j)$ для разбиений, полученных алгоритмами: (а) — базовым; (б) — с условием объединения сегментов по расстоянию в цветовом пространстве (3.1); (в) — с информационным условием объединения сегментов (3.3); (г) — с комбинацией условий (3.1) и (3.3).

Таблица 1. Значения информационных мер качества для разбиений, полученных разными алгоритмами

Алгоритм/условие объединения	Среднее число сегментов	Среднее/СКО $R(U_i, V_i^j)$	Среднее/СКО $\Delta V I_i^j$	Среднее/СКО $V I_n(V_i^j, V_i^{kGT})$	Среднее/СКО $V I_n(U_i, V_i^j)$
Базовый	48	0.488/0.145	0.767/0.102	0.559/0.109	0.85/0.067
Ускоренный/условие (3.1)	15	0.393/0.145	0.43/0.384	0.551/0.129	0.878/0.06
Ускоренный/условие (3.3)	22	0.383/0.176	0.303/0.260	0.608/0.143	0.882/0.07
Ускоренный/комбинация (3.1) и (3.3)	30	0.39/0.147	0.405/0.242	0.617/0.15	0.863/0.059

ченных исследуемыми алгоритмами, и эталонных карт сегментации V_i^{kGT} , $k = 1, 2, \dots, 5$, из базы изображений BSDS500, вычислены величины нормированной вариации информации $V I_n(V_i^j, V_i^{kGT})$. Результаты представлены в виде четырех гистограмм на фиг. 6. Средние значения и величины среднеквадратического отклонения информационных характеристик полученных карт сегментации даны в табл. 1.

На рисунках введены следующие обозначения: значения частот количества сегментов и информационных мер для разбиений тестовых изображений, полученных базовым алгоритмом, имеют метку Basic, алгоритмом с условием слияния суперпикселей (3.1) помечены как Color, алгоритмом с условием (3.3) — Info, а алгоритмом с комбинацией условий (3.1) и (3.3) — Info+Color.

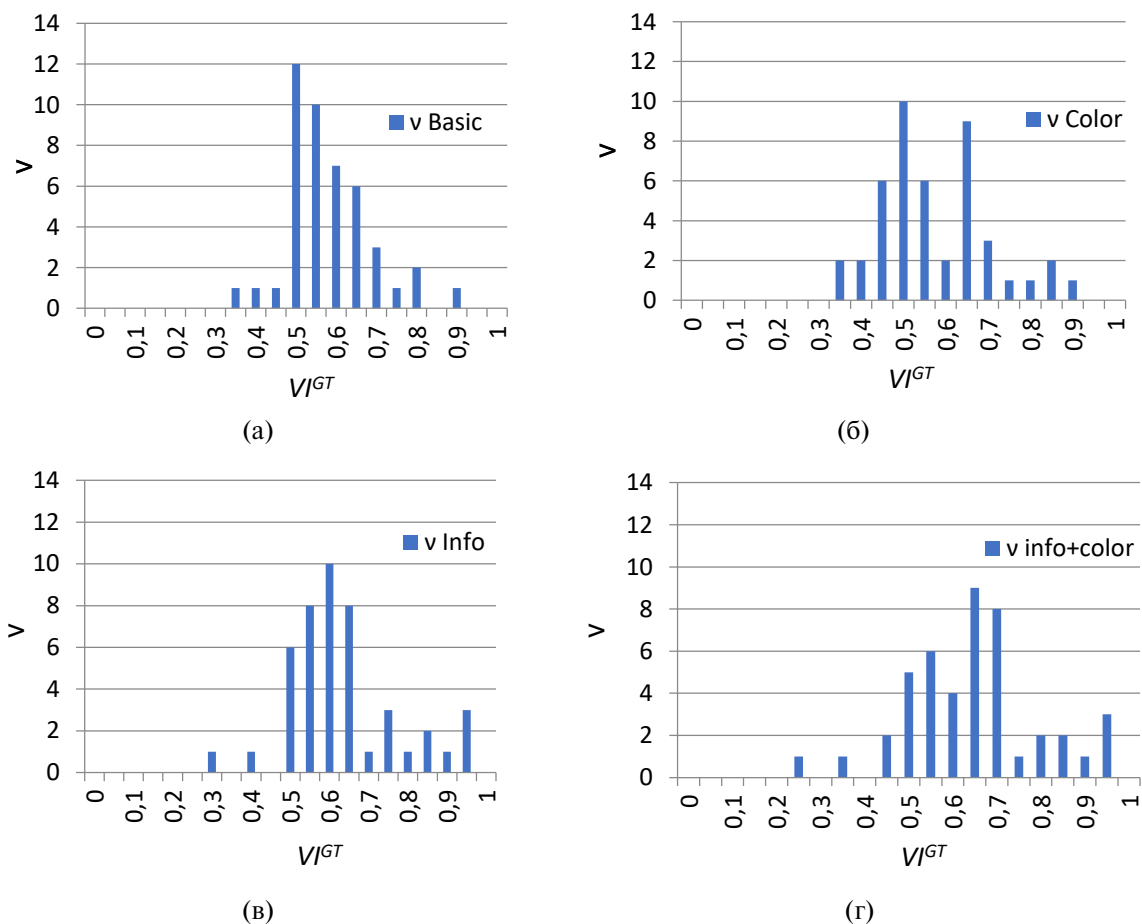


Фиг. 5. Частота v значений избыточности вариации информации ΔVI_i^j для разбиений, полученных алгоритмами: (а) — базовым; (б) — с условием объединения сегментов по расстоянию в цветовом пространстве (3.1); (в) — с информационным условием объединения сегментов (3.3); (г) — с комбинацией условий (3.1) и (3.3).

Из фиг. 3–6 можно заключить следующее. Гистограммы, представленные на фиг. 3, показывают, что количество сегментов в разбиениях, полученных тремя предложенными алгоритмами, меньше, чем в разбиениях, которые порождает базовый алгоритм. Сокращение количества сегментов в разбиениях приводит к снижению величины меры избыточности $R(U_i, V_i^j)$ (см. фиг. 4) и избыточности вариации информации относительно минимально возможного значения ΔVI_i^j (см. фиг. 2 и 5). Так, например, среднее значение избыточности ΔVI_i^j для базового алгоритма составило 0.488, для модифицированного алгоритма с условием объединения сегментов (3.1) — 0.393, для алгоритма с информационным условием объединения (3.3) — 0.383, а для алгоритма с комбинированным условием — 0.39 при среднеквадратическом отклонении (СКО), равном 0.144–0.147 для алгоритмов с условием (3.1) и 0.176 для алгоритма с информационным условием (3.3). При этом данные из последнего столбца табл. 1 показывают, что разбиения V_i^j , сформированные новыми алгоритмами, демонстрируют большее информационное отличие $VI_n(U_i, V_i^j)$ от оригинала U_i , чем разбиения, порожденные базовым алгоритмом.

Одновременно наблюдается более высокое информационное различие между эталонными картами сегментации и разбиениями, полученными новыми алгоритмами, особенно алгоритмами, в которых работает информационное условие объединения суперпикселей (см. фиг. 6 и табл. 1). Так величина среднего значения вариации информации $VI_n(V_i^j, V_i^{kGT})$ для базового алгоритма составляет 0.559 при СКО, равным 0.11; для модификации с условием объединения по евклидову расстоянию в цветовом пространстве — 0.551 при СКО 0.13; для модификации с информационным условием (3.3) — 0.608 и СКО, равным 0.14; для модификации с комбинированным условием — 0.617 при СКО 0.15.

Результаты работы четырех исследуемых алгоритмов проиллюстрированы на фиг. 7 и 8. На этих рисунках показаны тестовые изображения (фиг. 7а и 8а), суперпиксельные изображения (фиг. 7б и 8б), полученные ал-



Фиг. 6. Частота v значений информационного различия (средней нормированной вариации информации $V_I^{GT} = V_{In}(V_i^j, V_i^{kGT})$) между эталонными разбиениями V_i^{kGT} и разбиениями тестовых изображений V_i^j , полученных разными алгоритмами: (а) — базовым; (б) — с условием объединения сегментов по расстоянию в цветовом пространстве (3.1); (в) — с информационным условием объединения сегментов (3.3); (г) — с комбинацией условий (3.1) и (3.3).

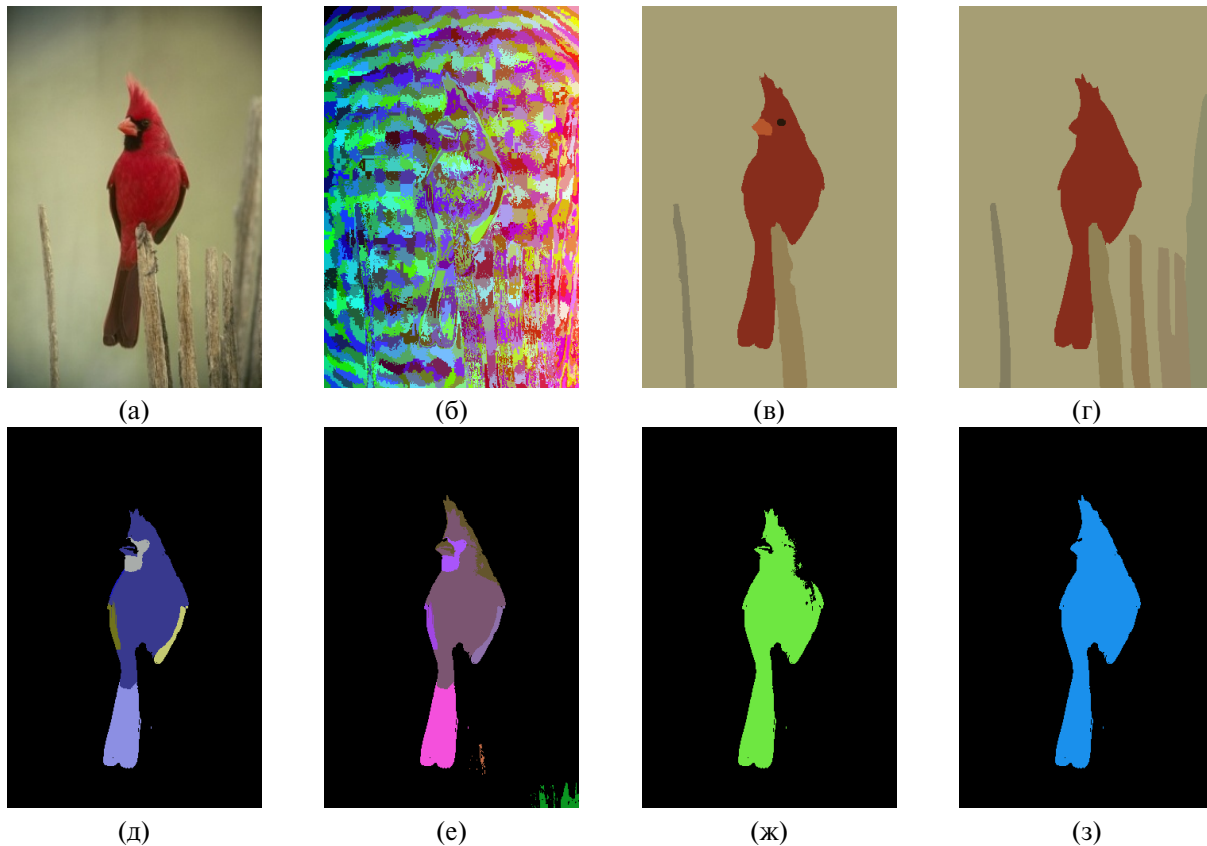
Таблица 2. Время работы алгоритмов

Алгоритм/условие объединения	Время работы алгоритма, с
Базовый	34.97
Ускоренный/условие (3.1)	27
Ускоренный/условие (3.3)	4.34
Ускоренный/комбинация условий (3.1) и (3.3)	28.08

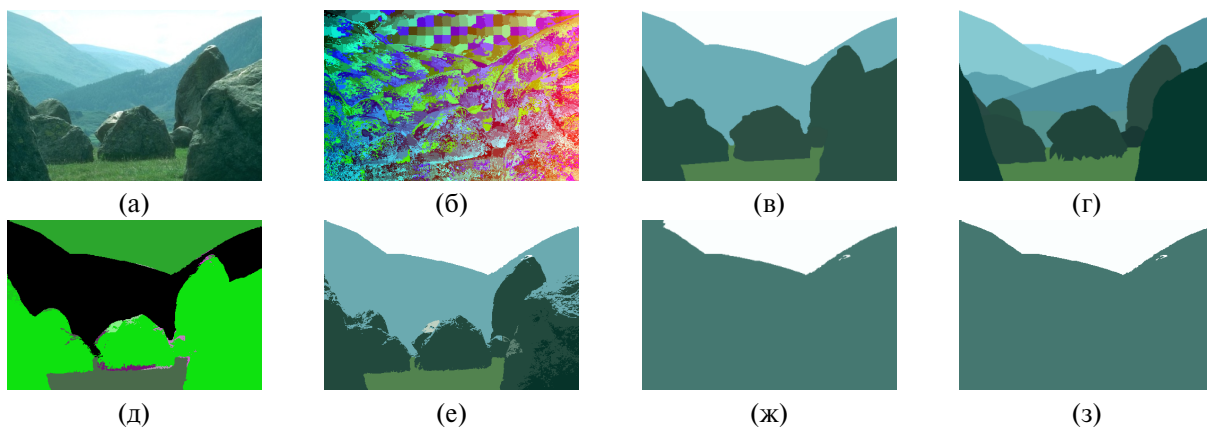
горитмом SLIC, и по два из эталонных разбиения из базы BSDS500 (фиг. 7в, 7г и 8в, 8г. На фиг. 7д–з, 8д–з показаны разбиения, полученные с помощью четырех алгоритмов объединения суперпикселей. Фиг. 7 и 8 демонстрируют, что число сегментов в разбиениях, полученных тремя новыми алгоритмами меньше, чем в разбиениях, порожденных базовым алгоритмом.

В третьей части тестирования получены экспериментальные оценки затрат времени разными алгоритмами. Результаты представлены в табл. 2. Базовым алгоритмом затрачено на формирование разбиения в среднем 34.97 с, ускоренным алгоритмом с условием объединения (3.1) — 27 с, алгоритмом с условием (3.3) — 4.34 с, а алгоритмом с комбинированным условием — 28.08 с. Из результатов эксперимента следует, что информационные характеристики разбиений тестовых изображений, полученные алгоритмом с информационным условием объединения суперпикселей (3.3), близки к характеристикам разбиений, полученных алгоритмом с комбинированным условием (3.1), (3.3) (см. фиг. 3–8) при меньших почти в 7 раз затратах времени.

Эксперимент также показал, что алгоритмы, в которых условия объединения включают информационное условие (3.3), позволяют получить приемлемые карты сегментации не для всех тестовых изображений (см., на-



Фиг. 7. Тестовое изображение 196027.jpg из базы BSDS500 — (а); суперпиксельное изображение — (б); эталонные разбиения на 7 и 8 сегментов — (в) и (г) соответственно. Карты сегментации, полученные различными алгоритмами слияния суперпикселей: (д) — базовым алгоритмом, 8 сегментов; (е) — алгоритмом с условием по расстоянию в цветовом пространстве (3.1), 10 сегментов; (ж) — алгоритмом с условием минимизации информационной меры (3.3), 2 сегмента; (з) — алгоритмом с условием в виде комбинации расстояния в цветовом пространстве и информационной меры, 2 сегмента.



Фиг. 8. Тестовое изображение 241004.jpg из базы BSDS500 (а); суперпиксельное изображение — (б); эталонные разбиения на 6 и 17 сегментов — (в) и (г) соответственно. Карты сегментации, полученные различными алгоритмами слияния суперпикселей: (д) — базовым алгоритмом, 16 сегментов; (е) — алгоритмом с условием по расстоянию в цветовом пространстве (3.1), 7 сегментов; (ж) — алгоритмом с условием минимизации информационной меры (3.3), 2 сегмента; (з) — алгоритмом с условием в виде комбинации расстояния в цветовом пространстве и информационной меры, 2 сегмента.

пример, фиг. 8). Для получения карт сегментации, которые будут в большей мере соответствовать оригинальным изображениям, целесообразно использовать меру качества, включающую не только меру избыточности, но и вариацию информации. Такая мера позволит найти компромисс между условиями минимизации количества выделенных информационно важных сегментов и минимизации информационного различия между оригинальным изображением и полученным разбиением.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложены ускоренные модификации разработанного ранее алгоритма выращивания областей в задаче сегментации изображений, использующие различные условия объединения областей пересегментированных изображений. В первом из предлагаемых алгоритмов применяется пороговое условие, наложенное на расстояние в цветовом пространстве между центрами объединяемых областей. Второй алгоритм основан на условии невозрастания меры избыточности в результате слияния областей. В третьем алгоритме условием слияния областей является комбинация двух условий. Предлагаемые алгоритмы позволяют ускорить процесс сегментации по сравнению с применявшимся ранее алгоритмом при некотором допустимом ухудшении информационных характеристик полученных разбиений. Наибольшее быстроедействие обеспечивается алгоритмом с информационным условием объединения суперпикселей. Предложенные алгоритмы универсальны в том смысле, что не накладывают ограничений на способ получения пересегментированных изображений, из которых формируются разбиения. Дальнейшие исследования будут направлены на повышение точности сегментации за счет применения в алгоритмах комбинированной меры качества, включающей не только меру избыточности, но и вариацию информации. Такая мера позволит получать карты сегментации, обеспечивающие компромисс между условиями минимизации количества выделенных информационно важных сегментов и минимизации информационного различия между оригинальным изображением и полученным разбиением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ikonatakis N., Plataniotis K. N., Zervakis M., Venetsanopoulos A. N.* Region growing and region merging image segmentation // Proc. of 13th Internat. Conference on Digital Signal Proc., Santorini, Greece. 1997. Vol. 1. P. 299–302. doi: 10.1109/ICDSP.1997.628077.
2. *Peng B., Zhang L., Zhang D.* Automatic Image Segmentation by Dynamic Region Merging // IEEE Transactions on Image Proc.. 2011. Vol. 20(12). P. 3592–3605. doi: 10.1109/TIP.2011.2157512.
3. *Ko H.Y., Ding J.J.* Adaptive growing and merging algorithm for image segmentation // 2016 Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference (APSIPA), Jeju, Korea (South). 2016. P. 1–10. doi: 10.1109/APSIPA.2016.7820762.
4. *Chamalis T., Likas A.* Region merging for image segmentation based on unimodality tests // 2017 3rd Internat. Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR), Nagoya, Japan. 2017. P. 381–384. doi: 10.1109/ICCAR.2017.7942722.
5. *Tang R., Song W., Guan X., Ge H., Kong D.* Dam Burst: A region-merging-based image segmentation method // ArXiv. 2020. abs/2003.04797. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.04797>.
6. *Kharinov M.* Stable Segmentation of Digital Image // arXiv preprint arXiv:1208.2655. 2012.
7. *Shuanhu Di, Miao Liao, Yuqian Zhao, Yang Li, Yezhan Zeng.* Image superpixel segmentation based on hierarchical multi-level LI-SLIC // Optics & Laser Technology. 2021. Vol. 135. 106703. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106703>.
8. *Liu T., Seyedhosseini M., Tasdizen T.* Image Segmentation Using Hierarchical Merge Tree // IEEE Transactions on Image Proc. 2016. Vol. 25(10). P. 4596–4607. doi: 10.1109/TIP.2016.2592704.
9. *Чочиа П.А.* Сегментация изображений на основе анализа расстояний в пространстве признаков // Автометрия. 2014. №4. С. 97–110.
10. *Альмияхи О.М., Цветков В.Ю., Конопелько В.К., Гусева О.В.* Адаптивное двухпороговое квантование и сегментация изображений на основе разделения и слияния областей // Докл. БГУИР. 2016. №7(101). С. 183–187.

11. *Calderero F., Marques F.* Region Merging Techniques Using Information Theory Statistical Measures // IEEE Transactions on Image Proc. 2010. Vol. 19(6). P. 1567–1586. doi: 10.1109/TIP.2010.2043008.
12. *Rigau J., Feixas M., Sbert S.* An information theoretic framework for image segmentation // 2004 Internat. Conference on Image Proc. ICIP '04. Singapore. 2004. Vol. 2. P. 1193–1196. doi: 10.1109/ICIP.2004.1419518.
13. *Bardera A., Rigau J., Boada I., Feixas M., Sbert S.* Image Segmentation Using Information Bottleneck Method // IEEE Transactions on Image Processing. 2009. Vol. 18(7). P. 1601–1612. doi: 10.1109/TIP.2009.2017823.
14. *Mirsadeghi S. E., Royat A., Rezaatofghi H.* Unsupervised Image Segmentation by Mutual Information Maximization and Adversarial Regularization // IEEE Robotics and Automation Letters. 2021. Vol. 6(4). P. 6931–6938. DOI: 10.1109/LRA.2021.3095311.
15. *Tishby N., Pereira F. C., Bialek W.* The information bottleneck method // Proc. of the 37th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing. 1999. P. 368–377.
16. *Ly X., Persello C., Huang X., Ming D., Stein A.* DeepMerge: Deep Learning-Based Region-Merging for Image Segmentation // arXiv preprint arXiv:2305.19787v2[cs.CV]. – 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2305.19787>
17. *Murashov D.* Theoretical-information quality model for image segmentation // Procedia Engng. 2017. Vol. 201. P. 239–248.
18. *Murashov D.* Application of Information Redundancy Measure To Image Segmentation. In: Strijov V., Ignatov D., Vorontsov K. (eds) Intelligent Data Processing. IDP 2016. Communications in Computer and Information Science. Springer, Cham. 2019. Vol. 794. P. 125–139. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-35400-8_9
19. *Murashov D.M.* An Information Model for Digital Image Segmentation // Pattern Recognit. Image Anal. 2021. Vol. 31. P. 632–645.
20. *Achanta R., Shaji A., Smith K., Lucchi A., Fua P., Susstrunk S.* SLIC superpixels compared to state-of-the-art superpixel methods // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 2012. Vol. 34(11). P. 2274–2282.
21. *Ланге А.М., Ланге М.М., Парамонов С.В.* О соотношении взаимной информации и вероятности ошибки в задаче классификации данных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 7. С. 1192–1205.
22. *Cover T.M., Thomas J.A.* Elements of Information Theory. Wiley Series in Telecommunications. 2-nd ed. John Wiley & Sons, Inc. 2006. 774 P.
23. *Meila M.* Comparing clusterings: an axiomatic view // In: Proc. of the 22nd Int. Conf. on “Machine learning (ACM, 2005)”, Bonn, Germany, August 7 – 11 2005. ACM, New York, NY, USA. 2005. P. 577–584.
24. *Arbelaez P., Maire M., Fowlkes C., Malik J.* Contour Detection and Hierarchical Image Segmentation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2011. Vol. 33(5), P. 898–916. DOI: 10.1109/TPAMI.2010.161
25. *Martin D., Fowlkes C., Tal D., Malik J.* A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics // Proc. “8th Int. Conf. on Comput. Vis. (ICCV 2001)”, Vancouver, BC, Canada, 07–14 July 2001. IEEE. 2001. Vol. 2. P. 416–423.

ACCELERATED ALGORITHMS FOR GROWING SEGMENTS FROM IMAGE REGIONS

D. M. Murashov*

119333 Moscow, 44, Vavilov str., FRC CSC RAS

**e-mail: d_murashov@mail.ru*

Received: 08.04.2024

Revised: 15.05.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The paper proposes new algorithms for combining superpixel regions into segments. The main idea is that when combining super pixels, firstly, a strategy is used in which the segment is grown from neighboring areas as long as the conditions for combining are met, and secondly, when combining areas, the applied information quality measure should not increase. Three algorithms based on this strategy are proposed, which differ in the conditions for making a decision on combining superpixels. A computational experiment was carried out on test images. The experiment showed that the proposed algorithms make it possible to speed up the segmentation process compared to the procedure used, with acceptable losses of information quality measures of the obtained partitions.

Keywords: image segmentation, information redundancy, information variation, growing segments, combining segments, superpixel.