

Том 64, Номер 10

ISSN 0044-4669

Октябрь 2024



ФИЦ ИУ РАН

# ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



НАУКА

— 1727 —

# СОДЕРЖАНИЕ

---

---

Том 64, номер 10, 2024

---

---

## ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Тестирование квадратурных формул для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя на границе тонкого тела  
*П.А. Крутицкий, И.О. Резниченко* 1783
- Решения некоторых обратных задач гравиметрии и магнитометрии с помощью алгоритма улучшения числа обусловленности матриц  
*А.С. Леонов, Д.В. Лукьяненко, А.Г. Ягола* 1795
- Обоснование метода Галеркина для решения сингулярных интегродифференциальных уравнений с производными дробного порядка  
*А.И. Федотов* 1809
- Разностная схема Рундсона третьего порядка точности для задачи Коши в случае уравнения переноса  
*Г.И. Шишкин, Л.П. Шишкина* 1826

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Решение задачи терминального управления для нелинейной стационарной системы в ограниченной области  
*А.Н. Квитко* 1836
- Поиск глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети  
*А. Ю. Крылатов* 1851
- Необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в одной ступенчатой задаче управления, описываемой разностным и интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерра  
*К.Б. Мансимов, А.В. Керимова* 1868
- Обратная задача для квазистационарных уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения  
*А.Ю. Чеботарев* 1881

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Конструирование регулятора в естественном базисе линейной системы  
*Л. Т. Ащепков* 1890

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

- Асимптотический анализ собственных значений при сближении концентрированных масс  
*С. А. Назаров* 1896

|                                                                                                                                                                           |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Локальная разрешимость и разрушение классического решения одной начально-краевой задачи для нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме<br><i>Е. А. Овсянников</i> | 1915 |
| Уравнения и системы типа М.М. Лаврентьева в обратной задаче реконструкции памяти вязкоупругой среды<br><i>М. Ю. Кокурин</i>                                               | 1931 |

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

|                                                                                                                                                                                                                                     |      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| О нестандартном методе возмущений для доказательства существования нелинеаризуемых решений в одной нелинейной задаче на собственные значения, возникающей в теории волноводов<br><i>Д. В. Валовик, А. А. Дюньдяева, С. В. Тихов</i> | 1949 |
| Верификация численного алгоритма на основе квазигидродинамических уравнений на примере моделирования задач термогравитационной конвекции<br><i>М.А. Кирюшина, Т.Г. Елизарова, А.С. Епихин</i>                                       | 1966 |
| Конвективное уравнение Кана—Хиллиарда—Ооно<br><i>А.Н. Куликов, Д.А. Куликов</i>                                                                                                                                                     | 1977 |
| Численное моделирование процесса двухфазной фильтрации с активной примесью<br><i>Т.С. Шарифуллина, А.А. Черевко, В.В. Остапенко</i>                                                                                                 | 1994 |

## ТЕСТИРОВАНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ПРЯМОГО ЗНАЧЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ НА ГРАНИЦЕ ТОНКОГО ТЕЛА<sup>1)</sup>

© 2024 г. П.А. Крутицкий<sup>1,\*</sup>, И.О. Резниченко<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

\*e-mail: biem@mail.ru

\*\*e-mail: io.reznichenko@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 17.03.2024 г.

Переработанный вариант 17.03.2024 г.

Принята к публикации 24.04.2024 г.

С помощью тестовых примеров, построенных на основе явного решения задачи о скачке, проведено сравнение квадратурных формул для прямого значения нормальной производной гармонического потенциала простого слоя на границе тонкого тела. Установлено, что погрешность вычислений по квадратурной формуле, основанной на численном интегрировании, в несколько раз больше, чем погрешность вычислений по улучшенной квадратурной формуле, основанной на аналитическом вычислении интегралов. Как показали численные тесты, улучшенная квадратурная формула обеспечивает приемлемую точность вычислений и в том случае, когда толщина тела существенно меньше диаметра разбиения поверхности, что позволяет достичь требуемой точности вычислений при меньшей стоимости. Полученные результаты могут использоваться для численного решения краевых задач в тонких телах и в слоистых средах методом потенциалов. Библ. 10. Фиг. 3. Табл. 5.

**Ключевые слова:** уравнение Лапласа, теория потенциала, тонкое тело, квадратурные формулы.

**DOI:** 10.31857/S0044466924100016, **EDN:** KBCTMN

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Квадратурные формулы для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя используются при решении краевых задач для уравнения Лапласа методом интегральных уравнений [1]. В [2, Гл. 2] построены квадратурные формулы, основанные на численном интегрировании. В [3], [4] получены квадратурные формулы, основанные на приближенном аналитическом вычислении интегралов. Формула из [4] является улучшением формулы из [3] за счет более точного учета элементов подынтегральной функции при аналитическом вычислении интегралов.

При решении краевых задач в слоистых средах возникает необходимость использования квадратурных формул на границе тонкого тела. В настоящей работе изучается возможность использования различных квадратурных формул для прямого значения нормальной производной гармонического потенциала простого слоя в таких задачах. Для этого построены тестовые примеры, где известны явные выражения для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя на границе тонкого тела. Граница моделируется двумя эквидистантными сферами. Примеры получены на основе решения задачи о скачке для гармонических функций, которая изучалась в [5], [6] в трехмерном случае и в [7], [8] в двумерном случае. В результате численного тестирования квадратурных формул на границе тонкого тела установлено, что формула, основанная на численном интегрировании [2, Гл. 2], дает в несколько раз более высокую погрешность, чем квадратурные формулы, полученные в [3], [4] и основанные на аналитическом вычислении интегралов. Как показали численные тесты, формула [4] превосходит по точности формулу из [3]. Кроме того, формула из [4] позволяет проводить вычисления с высокой точностью и в том случае, когда толщина тела существенно меньше шага интегрирования, что позволяет уменьшить вычислительные затраты. Таким образом, квадратурная формула из [4] может эффективно использоваться при моделировании различных физических процессов в слоистых средах и тонких телах.

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке И.О. Резниченко Московским центром фундаментальной и прикладной математики по соглашению N 075-15-2022-283 с Минобрнауки РФ.

## 2. ЗАДАЧА О СКАЧКЕ

В декартовых координатах  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$  рассмотрим конечное число простых гладких замкнутых поверхностей класса  $C^2$ , не имеющих общих точек. Пусть каждая поверхность ограничивает объемно-односвязную внутреннюю область. Совокупность этих поверхностей обозначим через  $\Gamma$ . Будем считать, что на каждой поверхности выбрано непрерывное поле нормалей, единичную нормаль в точке  $x \in \Gamma$  обозначим через  $\mathbf{n}_x$ . Все поверхности, составляющие  $\Gamma$ , будем рассматривать как двусторонние. Через  $\Gamma^-$  обозначим ту сторону  $\Gamma$ , которую мы видим, глядя навстречу вектору нормали  $\mathbf{n}_x$ , а через  $\Gamma^+$  обозначим противоположную сторону.

Сформулируем задачу о скачке.

**Задача S.** Найти функцию  $u(x) \in C^0(R^3) \cap C^2(R^3 \setminus \Gamma)$ , равномерно стремящуюся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ , имеющую на  $\Gamma^+$  и на  $\Gamma^-$  правильную нормальную производную, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in R^3 \setminus \Gamma,$$

и граничному условию в виде скачка нормальной производной на  $\Gamma$

$$\left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^+} - \left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^-} = \mu(x) \in C^0(\Gamma). \quad (1)$$

Здесь  $\mu(x)$  — заданная функция, понятие правильной нормальной производной введено в [9, § 24.2].

**Теорема.** Решение задачи S существует, единственно и дается гармоническим потенциалом простого слоя с плотностью  $\mu(x)$

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y)}{|x-y|} ds_y. \quad (2)$$

**Доказательство.** 1. Существование. Гармонический потенциал простого слоя (2) удовлетворяет всем условиям задачи S. В частности, потенциал имеет правильную нормальную производную [9, § 24.2] на  $\Gamma^+$  и на  $\Gamma^-$  и удовлетворяет граничному условию на  $\Gamma$ , так как

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^+} - \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^-} = \mu(x), \quad (3)$$

согласно предельным формулам для нормальной производной потенциала простого слоя [9, § 27.7]. Тем самым, решение задачи S существует и дается функцией (2).

2. Единственность. В силу линейности задачи S для доказательства того, что задача S имеет не более одного решения, достаточно показать, что однородная задача S имеет только тривиальное решение. Пусть  $u^0(x)$  — решение однородной задачи S, где  $\mu \equiv 0$ , тогда из граничного условия (1) получаем, что нормальная производная функции  $u^0(x)$  не имеет скачка при переходе через  $\Gamma$ :

$$\left. \frac{\partial u^0(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^+} = \left. \frac{\partial u^0(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^-}.$$

Поскольку сама функция  $u^0(x)$  непрерывна при переходе через  $\Gamma$  по условиям задачи S, то, используя третью формулу Грина для гармонических функций [9, § 24], можно показать, что функция  $u^0(x)$  аналитически продолжима через  $\Gamma$ . Следовательно, функция  $u^0(x)$  является гармонической во всем пространстве  $R^3$ , в том числе на  $\Gamma$ . Далее теорему можно доказывать двумя способами. Первый способ основан на использовании аналога теоремы Лиувилля для гармонических функций [9, § 24.9]. Поскольку функция  $u^0(x)$  — гармоническая во всем пространстве, то она по указанной теореме является гармоническим полиномом. Поскольку функция  $u^0(x)$  ограничена на бесконечности, то она является полиномом нулевой степени, т.е. константой. По условию на бесконечности функция  $u^0(x)$  равномерно стремится к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ , откуда следует, что эта константа равна нулю, поэтому  $u^0(x) \equiv 0$  в  $R^3$ . Другой способ доказательства единственности решения основан на использовании принципа максимума для гармонических функций [9, § 24.5]. Теорема доказана.

### 3. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ К ПОСТРОЕНИЮ ТЕСТОВЫХ ПРИМЕРОВ НА ГРАНИЦЕ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Рассмотрим функции

$$g_1(x, R_0) = \begin{cases} R_0 & \text{при } |x| < R_0, \\ \frac{R_0^2}{|x|} & \text{при } |x| > R_0, \end{cases} \quad g_2(x, R_0) = \begin{cases} \frac{|x| \cos \vartheta}{3} & \text{при } |x| < R_0, \\ \frac{R_0^3 \cos \vartheta}{3|x|^2} & \text{при } |x| > R_0; \end{cases}$$

$$g_3(x, R_0) = \begin{cases} \frac{|x| \cos \varphi \sin \vartheta}{3}, & \text{если } |x| < R_0, \\ \frac{R_0^3 \cos \varphi \sin \vartheta}{3|x|^2}, & \text{если } |x| > R_0, \end{cases} \quad g_4(x, R_0) = \begin{cases} \frac{|x| \sin \varphi \sin \vartheta}{3}, & \text{если } |x| < R_0, \\ \frac{R_0^3 \sin \varphi \sin \vartheta}{3|x|^2}, & \text{если } |x| > R_0, \end{cases}$$

где  $\varphi$  и  $\vartheta$  — азимутальный и зенитный углы в сферических координатах с центром в начале координат.

Функции  $g_1(x, R_0), \dots, g_4(x, R_0)$  — гармонические вне сферы радиуса  $R_0$  с центром в начале координат, равномерно стремятся к нулю на бесконечности, непрерывны всюду в  $R^3$  и имеют на сфере радиуса  $R_0$  правильную нормальную производную извне и изнутри, поскольку их производные непрерывно продолжимы на указанную сферу извне и изнутри [9, § 24.2]. Каждая из функций  $g_1(x, R_0), \dots, g_4(x, R_0)$  имеет на сфере радиуса  $R_0$  скачок нормальной производной, и эти скачки даются выражениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0-0} - \frac{\partial g_1(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0+0} &= 1, \\ \frac{\partial g_2(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0-0} - \frac{\partial g_2(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0+0} &= \cos \vartheta, \\ \frac{\partial g_3(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0-0} - \frac{\partial g_3(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0+0} &= \cos \varphi \sin \vartheta, \\ \frac{\partial g_4(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0-0} - \frac{\partial g_4(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0+0} &= \sin \varphi \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Пусть совокупность поверхностей  $\Gamma$  состоит из 2-х сфер с центром в начале координат: сферы  $\Gamma_1$  единичного радиуса и сферы  $\Gamma_2$  радиуса  $\varrho > 1$ . Пусть через  $\mathbf{n}_x$  на сфере  $\Gamma_1$  обозначается внешняя нормаль, а на сфере  $\Gamma_2$  — внутренняя нормаль. Тогда  $\Gamma_1^+$  — внутренняя сторона единичной сферы, а  $\Gamma_1^-$  — ее внешняя сторона. Для сферы радиуса  $\varrho$  через  $\Gamma_2^+$  обозначается внешняя сторона, а через  $\Gamma_2^-$  — внутренняя сторона. Соответственно,  $\Gamma^\pm = \Gamma_1^\pm \cup \Gamma_2^\pm$ .

Рассмотрим функции

$$u_1(x) = g_1(x, 1) + g_1(x, \varrho), \quad (4)$$

$$u_2(x) = g_1(x, 1) + g_2(x, \varrho), \quad (5)$$

$$u_3(x) = g_1(x, 1) + g_3(x, \varrho), \quad (6)$$

$$u_4(x) = g_3(x, 1) + g_4(x, \varrho), \quad (7)$$

$$u_5(x) = g_2(x, 1) + g_3(x, \varrho). \quad (8)$$

Функция  $u_j(x)$  удовлетворяет задаче о скачке  $\mathbf{S}$  вне сфер  $\Gamma$  со следующим граничным условием на  $\Gamma$ :

$$\frac{\partial u_j(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma^+} - \frac{\partial u_j(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma^-} = \mu_j(x), \quad j = 1, \dots, 5,$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1(x)|_{|x|=1} &= 1, & \mu_1(x)|_{|x|=\varrho} &= 1, \\ \mu_2(x)|_{|x|=1} &= 1, & \mu_2(x)|_{|x|=\varrho} &= \cos \vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_3(x)|_{|x|=1} &= 1, & \mu_3(x)|_{|x|=q} &= \cos \varphi \sin \vartheta, \\ \mu_4(x)|_{|x|=1} &= \cos \varphi \sin \vartheta, & \mu_4(x)|_{|x|=q} &= \sin \varphi \sin \vartheta, \\ \mu_5(x)|_{|x|=1} &= \cos \vartheta, & \mu_5(x)|_{|x|=q} &= \cos \varphi \sin \vartheta.\end{aligned}$$

По теореме решение задачи о скачке  $\mathbf{S}$  дается потенциалом простого слоя (2) и единственно. В силу единственности решения задачи  $\mathbf{S}$  заключаем, что функции  $u_1(x), \dots, u_5(x)$ , дающие решение задачи  $\mathbf{S}$  вне сфер  $\Gamma$ , могут быть представлены в виде потенциалов простого слоя

$$u_j(x) = \mathcal{V}_0[\mu_j](x), \quad j = 1, \dots, 5. \quad (9)$$

Таким образом, для потенциалов простого слоя (9) имеем явные выражения (4) — (8). Прямое значение нормальной производной для потенциала простого слоя (2) на  $\Gamma$  можно найти по формуле [9, § 27.7]

$$\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma^+} + \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma^-} \right]. \quad (10)$$

Используя явные выражения для потенциалов  $\mathcal{V}_0[\mu_1](x), \dots, \mathcal{V}_0[\mu_5](x)$ , находим для них прямые значения нормальной производной на сферах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_1](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} &= -\frac{1}{2}, & \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_1](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=q} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{q^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_2](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} &= -\frac{1}{2} + \frac{\cos \vartheta}{3}, & \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_2](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=q} &= \frac{1}{q^2} + \frac{\cos \vartheta}{6}, \\ \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_3](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} &= -\frac{1}{2} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3}, & \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_3](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=q} &= \frac{1}{q^2} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6}, \\ \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_4](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} &= -\frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6} + \frac{\sin \varphi \sin \vartheta}{3}, & \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_4](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=q} &= \frac{2 \cos \varphi \sin \vartheta}{3q^3} + \frac{\sin \varphi \sin \vartheta}{6}, \\ \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_5](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} &= -\frac{\cos \vartheta}{6} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3}, & \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_5](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=q} &= \frac{2 \cos \vartheta}{3q^3} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6}.\end{aligned}$$

Тем самым на границе сферического слоя построены тестовые примеры с явными выражениями для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя.

#### 4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ, ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Сфера единичного радиуса  $\Gamma_1$  задается параметрически уравнениями

$$y_1(\varphi, \vartheta) = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y_2(\varphi, \vartheta) = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad y_3(\varphi, \vartheta) = \cos \vartheta, \quad (11)$$

а сфера  $\Gamma_2$  радиуса  $q > 1$  определяется уравнениями

$$y_1(\varphi, \vartheta) = q \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y_2(\varphi, \vartheta) = q \sin \vartheta \sin \varphi, \quad y_3(\varphi, \vartheta) = q \cos \vartheta, \quad (12)$$

где  $\varphi$  и  $\vartheta$  — азимутальный и зенитный углы в сферических координатах с центром в начале координат. Пусть  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $\vartheta \in [0, \pi]$  для внутренней сферы  $\Gamma_1$  и  $\varphi \in [4\pi, 6\pi]$ ,  $\vartheta \in [0, \pi]$  для внешней сферы  $\Gamma_2$ . Прямоугольник  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$  отображается на сферу  $\Gamma_1$ , а прямоугольник  $[4\pi, 6\pi] \times [0, \pi]$  отображается на сферу  $\Gamma_2$ , и различным внутренним точкам этих прямоугольников соответствуют различные точки на каждой сфере.

Известно [10, Гл. 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного)  $\eta(y(\varphi, \vartheta)) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$  в точке  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$  выражаются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_{\varphi} & (y_3)_{\varphi} \\ (y_2)_{\vartheta} & (y_3)_{\vartheta} \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_{\varphi} & (y_1)_{\varphi} \\ (y_3)_{\vartheta} & (y_1)_{\vartheta} \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_{\varphi} & (y_2)_{\varphi} \\ (y_1)_{\vartheta} & (y_2)_{\vartheta} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Будем считать, что нормаль  $\eta(y)$  на  $\Gamma_1$  и на  $\Gamma_2$  выбрана внутренней по отношению к сферическому слою, т.е. на сфере  $\Gamma_1$  берется внешняя нормаль, а на сфере  $\Gamma_2$  — внутренняя. Следовательно, на внутренней сфере  $\Gamma_1$  имеем

$$\eta_1 = \cos \varphi \sin^2 \vartheta, \quad \eta_2 = \sin \varphi \sin^2 \vartheta, \quad \eta_3 = \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

На внешней сфере  $\Gamma_2$  имеем

$$\eta_1 = -\varrho^2 \cos \varphi \sin^2 \vartheta, \quad \eta_2 = -\varrho^2 \sin \varphi \sin^2 \vartheta, \quad \eta_3 = -\varrho^2 \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

Положим  $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$ , тогда  $|\eta(y)| = \sin \vartheta$  на  $\Gamma_1$  и  $|\eta(y)| = \varrho^2 \sin \vartheta$  на  $\Gamma_2$ . Отметим, что направление единичной нормали  $\mathbf{n}_x$  совпадает с направлением нормали  $\eta$ , так как вектор  $\mathbf{n}_x$  получается из  $\eta$  в результате нормировки.

Разобьем отрезок  $[0, 2\pi]$ , где меняется  $\varphi$  для внутренней сферы, на  $N_1$  отрезочков с длиной  $h_1 = 2\pi/N_1$ , а отрезок  $[4\pi, 6\pi]$ , где меняется  $\varphi$  для внешней сферы, на  $N_2$  отрезочков с длиной  $h_2 = 2\pi/N_2$ . Для внутренней сферы середины отрезков разбиения имеют координату  $\varphi_n = (n + 1/2)h_1$ , где  $n = 0, \dots, N_1 - 1$ . Для внешней сферы середины отрезков разбиения имеют координату  $\varphi_n = 4\pi + (n - N_1 + 1/2)h_2$ , где  $n$  меняется от  $N_1$  до  $N - 1$ , и  $N = N_1 + N_2$ .

Разобьем отрезок  $[0, \pi]$ , где меняется  $\vartheta$  для внутренней сферы, на  $M_1$  отрезочков с длиной  $H_1 = \pi/M_1$ , а отрезок  $[0, \pi]$ , где меняется  $\vartheta$  для внешней сферы, на  $M_2$  отрезочков с длиной  $H_2 = \pi/M_2$ . На внутренней сфере середины отрезков разбиения имеют координату  $\vartheta_m = (m + 1/2)H_1$ , где  $m = 0, \dots, M_1 - 1$ . На внешней сфере середины отрезков разбиения имеют координату  $\vartheta_m = (m + 1/2)H_2$ , где  $m = 0, \dots, M_2 - 1$ .

Положим  $\mu_{nm} = \mu(y(\varphi_n, \vartheta_m))$ , где  $n = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ ,  $m = 0, 1, \dots, M_1 - 1$  — на внутренней сфере  $\Gamma_1$ , и  $n = N_1, N_1 + 1, \dots, N - 1$ ,  $m = 0, 1, \dots, M_2 - 1$  — на внешней сфере  $\Gamma_2$ .

Величина прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя для границы сферического слоя представляет собой сумму вкладов от двух сфер:  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma} &= \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma_1} + \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma_2} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x - y|} ds_y + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x - y|} ds_y, \quad x \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \end{aligned} \quad (14)$$

отсюда следует, что в рассматриваемом случае в квадратурных формулах для нормальной производной потенциала простого слоя [3], [4] вместо одной суммы будет две суммы, одна из них отвечает интегралу по  $\Gamma_1$ , а другая — интегралу по  $\Gamma_2$ . Стандартная квадратурная формула из [2, Гл. 2] (она также приводится в [4]) для нормальной производной гармонического потенциала простого слоя с плотностью  $\mu(y(\varphi, \vartheta)) \in \Gamma$  принимает вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x=y(\varphi_{\hat{n}}, \vartheta_{\hat{m}}) \in \Gamma} &\approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{\substack{n=N_1-1, m=M_1-1 \\ n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} |\eta(y(\varphi_n, \vartheta_m))| \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(\varphi_n, \vartheta_m) - x_j)}{|x - y(\varphi_n, \vartheta_m)|^3} h_1 H_1 + \\ &+ \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{\substack{n=N-1, m=M_2-1 \\ n=N_1, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} |\eta(y(\varphi_n, \vartheta_m))| \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(\varphi_n, \vartheta_m) - x_j)}{|x - y(\varphi_n, \vartheta_m)|^3} h_2 H_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\hat{n}, n = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ ;  $\hat{m}, m = 0, 1, \dots, M_1 - 1$  — на внутренней сфере  $\Gamma_1$ , и  $\hat{n}, n = N_1, N_1 + 1, \dots, N - 1$ ;  $\hat{m}, m = 0, 1, \dots, M_2 - 1$  — на внешней сфере  $\Gamma_2$ . Улучшенная квадратурная формула из [4] для нормальной производной гармонического потенциала простого слоя с плотностью  $\mu(y(\varphi, \vartheta)) \in \Gamma$  принимает вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x=y(\varphi_{\hat{n}}, \vartheta_{\hat{m}}) \in \Gamma} &\approx \frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{n}\hat{m}} \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} + \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{\substack{n=N_1-1, m=M_1-1 \\ n=0, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} T_{nm}(x) + \\ &+ \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{\substack{n=N-1, m=M_2-1 \\ n=N_1, m=0 \\ (n,m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} T_{nm}(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где функции  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  и  $T_{nm}(x)$  найдены в [4] в явном виде. Область изменения индексов  $\hat{n}, n$  и  $\hat{m}, m$  такая же, как в (15). Аналогично можно записать и квадратурную формулу из [3].

## 5. ТЕСТИРОВАНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ПРЯМОГО ЗНАЧЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ НА $\Gamma$

Тестирование проводилось с целью выяснить точность вычислений по квадратурным формулам на границе тонкого сферического слоя, в частности, когда толщина слоя может быть меньше шага интегрирования.

В тестах точное прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в узловых точках на  $\Gamma$  сравнивалось с приближенными значениями, вычисленными по квадратурным формулам — по улучшенной формуле (16), по стандартной формуле (15) и по формуле из [3]. В каждой узловой точке вычислялась абсолютная погрешность по трем формулам. Вычисления проводились в случае  $N_1 = N_2$  и  $M_1 = M_2$  для разных значений  $M_1$  и  $N_1$ . Значения шагов определяются формулами  $h = h_1 = h_2 = 2\pi/N_1$ ,  $H = H_1 = H_2 = \pi/M_1$ . Если  $N_1/2 = M_1 = 10$ , то  $h = H \approx 0.31$ ; если  $N_1/2 = M_1 = 20$ , то  $h = H \approx 0.16$ ; если  $N_1/2 = M_1 = 40$ , то  $h = H \approx 0.079$ .

В численных тестах, проведенных по методике, описанной выше, пары узловых точек, расположенные на разных сферах, лежат на одной нормали к обеим сферам, что обусловлено условием  $N_1 = N_2$  и  $M_1 = M_2$ . Поэтому численные тесты были проведены также и по другой методике, в которой при сохранении указанного условия узловые точки на внешней сфере сдвинуты относительно точек на внутренней сфере на  $h/2$  по углу  $\varphi$ , при этом все узловые точки на сферах лежат на разных нормалях к сферам.

В процессе тестирования квадратурных формул выяснилось, что максимальная погрешность стандартной квадратурной формулы (15) достигается в тестах без сдвига, тогда как максимальные погрешности двух других квадратурных формул достигаются в тестах со сдвигом.

Для каждого теста при разных значениях расстояния между сферами  $\varepsilon = \varrho - 1$  вычислялся максимум абсолютной погрешности по всем узловым точкам на обеих сферах для формул (15), (16) и для формулы из [3]. Причем максимум вычислялся как в тесте со сдвигом, так и без него. В таблицах для каждого теста приводится наибольшее значение из двух этих максимумов, т.е. в таблицах указана наибольшая абсолютная погрешность при разных способах вычислений. Для первого теста приводится также таблица с максимальной относительной погрешностью при разных способах вычислений (со сдвигом и без).

В первой строке таблицы для каждого теста указаны значения  $N_1, M_1$ , в последующих строках — максимальные погрешности для стандартной формулы (15), для формулы из [3] и для улучшенной формулы (16) при разных расстояниях между сферами.

Численные тесты получены на основе примеров, представленных в разд. 3.

**Тест 1.** Пусть  $\mu_1(x)|_{|x|=1} = 1$ ,  $\mu_1(x)|_{|x|=\varrho} = 1$ , тогда прямое значение нормальной производной гармонического потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu_1](x)$  на  $\Gamma$  имеет вид

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_1](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{1}{2}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_1](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=\varrho} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\varrho^2}.$$

**Тест 2.** Пусть  $\mu_2(x)|_{|x|=1} = 1$ ,  $\mu_2(x)|_{|x|=\varrho} = \cos \vartheta$ , тогда прямое значение нормальной производной гармонического потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu_2](x)$  на  $\Gamma$  имеет вид

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_2](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{1}{2} + \frac{\cos \vartheta}{3}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_2](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=\varrho} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{\cos \vartheta}{6}.$$

**Тест 3.** Пусть  $\mu_3(x)|_{|x|=1} = 1$ ,  $\mu_3(x)|_{|x|=\varrho} = \cos \varphi \sin \vartheta$ , тогда прямое значение нормальной производной гармонического потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu_3](x)$  на  $\Gamma$  имеет вид

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_3](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{1}{2} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_3](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=\varrho} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6}.$$

**Тест 4.** Пусть  $\mu_4(x)|_{|x|=1} = \cos \varphi \sin \vartheta$ ,  $\mu_4(x)|_{|x|=\varrho} = \sin \varphi \sin \vartheta$ , тогда прямое значение нормальной производной гармонического потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu_4](x)$  на  $\Gamma$  имеет вид

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_4](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6} + \frac{\sin \varphi \sin \vartheta}{3}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_4](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=\varrho} = \frac{2 \cos \varphi \sin \vartheta}{3\varrho^3} + \frac{\sin \varphi \sin \vartheta}{6}.$$

**Тест 5.** Пусть  $\mu_5(x)|_{|x|=1} = \cos \vartheta$ ,  $\mu_5(x)|_{|x|=\varrho} = \cos \varphi \sin \vartheta$ , тогда прямое значение нормальной производной гармонического потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu_5](x)$  на  $\Gamma$  имеет вид

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_5](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{\cos \vartheta}{6} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_5](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=\varrho} = \frac{2 \cos \vartheta}{3\varrho^3} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6}.$$

**Таблица 1.**  $q = 1 + \varepsilon$ . Максимальные погрешности квадратурных формул в тесте 1. Первое число в ячейках таблицы — погрешность стандартной формулы (15), второе — погрешность формулы из [3], третье число — погрешность формулы (16).

| $\varepsilon$ | $N_1/2 = M_1 = 10; h = H = 0.31,$ | $N_1/2 = M_1 = 20; h = H = 0.16,$ | $N_1/2 = M_1 = 40; h = H = 0.079,$ |
|---------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1             | 0.046; 0.0095; 0.0061;            | 0.024; 0.0057; 0.0042;            | 0.012; 0.0031; 0.0025;             |
| 0.5           | 0.046; 0.019; 0.0069;             | 0.024; 0.0085; 0.0042;            | 0.012; 0.0039; 0.0023;             |
| 0.3           | 0.062; 0.037; 0.012;              | 0.024; 0.015; 0.0044;             | 0.012; 0.0057; 0.0023;             |
| 0.2           | 0.13; 0.057; 0.017;               | 0.025; 0.026; 0.0049;             | 0.013; 0.0091; 0.0024;             |
| 0.15          | 0.26; 0.071; 0.023;               | 0.034; 0.038; 0.0065;             | 0.015; 0.014; 0.0026;              |
| 0.1           | 0.68; 0.081; 0.039;               | 0.086; 0.058; 0.0097;             | 0.021; 0.024; 0.0029;              |
| 0.08          | 1.12; 0.081; 0.053;               | 0.16; 0.068; 0.012;               | 0.027; 0.033; 0.0032;              |
| 0.04          | 4.9; 0.15; 0.15;                  | 1.01; 0.078; 0.027;               | 0.14; 0.065; 0.0063;               |

Максимальная абсолютная погрешность.

|      |                       |                        |                        |
|------|-----------------------|------------------------|------------------------|
| 1    | 0.091; 0.013; 0.0082; | 0.047; 0.0076; 0.0056; | 0.024; 0.0044; 0.0034; |
| 0.5  | 0.093; 0.031; 0.014;  | 0.047; 0.009; 0.0044;  | 0.024; 0.0041; 0.0031; |
| 0.3  | 0.12; 0.06; 0.023;    | 0.047; 0.019; 0.0065;  | 0.024; 0.0052; 0.0028; |
| 0.2  | 0.26; 0.084; 0.035;   | 0.051; 0.04; 0.0097;   | 0.024; 0.0098; 0.0025; |
| 0.15 | 0.51; 0.095; 0.047;   | 0.067; 0.061; 0.013;   | 0.024; 0.019; 0.0034;  |
| 0.1  | 1.35; 0.097; 0.071;   | 0.17; 0.091; 0.019;    | 0.026; 0.041; 0.005;   |
| 0.08 | 2.25; 0.091; 0.09;    | 0.33; 0.1; 0.024;      | 0.034; 0.057; 0.0063;  |
| 0.04 | 9.79; 0.18; 0.18;     | 2.03; 0.11; 0.05;      | 0.27; 0.11; 0.013;     |

Максимальная относительная погрешность.

**Таблица 2.**  $q = 1 + \varepsilon$ . Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 2. Первое число в ячейках таблицы — погрешность стандартной формулы (15), второе — погрешность формулы из [3], третье число — погрешность формулы (16).

| $\varepsilon$ | $N_1/2 = M_1 = 10; h = H = 0.31,$ | $N_1/2 = M_1 = 20; h = H = 0.16,$ | $N_1/2 = M_1 = 40; h = H = 0.079,$ |
|---------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1             | 0.047; 0.011; 0.0087;             | 0.024; 0.006; 0.0046;             | 0.012; 0.0032; 0.0025;             |
| 0.5           | 0.047; 0.021; 0.011;              | 0.024; 0.0088; 0.0045;            | 0.012; 0.0039; 0.0024;             |
| 0.3           | 0.05; 0.039; 0.013;               | 0.024; 0.015; 0.0048;             | 0.012; 0.0057; 0.0024;             |
| 0.2           | 0.076; 0.059; 0.018;              | 0.024; 0.026; 0.0053;             | 0.013; 0.0091; 0.0025;             |
| 0.15          | 0.15; 0.072; 0.026;               | 0.031; 0.038; 0.0063;             | 0.015; 0.014; 0.0026;              |
| 0.1           | 0.5; 0.082; 0.042;                | 0.056; 0.058; 0.0098;             | 0.021; 0.025; 0.003;               |
| 0.08          | 0.9; 0.083; 0.056;                | 0.12; 0.068; 0.013;               | 0.027; 0.033; 0.0033;              |
| 0.04          | 4.43; 0.15; 0.15;                 | 0.9; 0.078; 0.028;                | 0.11; 0.066; 0.0064;               |

**Таблица 3.**  $q = 1 + \varepsilon$ . Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 3. Первое число в ячейках таблицы — погрешность стандартной формулы (15), второе — погрешность формулы из [3], третье число — погрешность формулы (16).

| $\varepsilon$ | $N_1/2 = M_1 = 10; h = H = 0.31,$ | $N_1/2 = M_1 = 20; h = H = 0.16,$ | $N_1/2 = M_1 = 40; h = H = 0.079,$ |
|---------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1             | 0.048; 0.016; 0.014;              | 0.024; 0.005; 0.0036;             | 0.012; 0.0029; 0.0019;             |
| 0.5           | 0.049; 0.02; 0.017;               | 0.024; 0.0052; 0.0045;            | 0.012; 0.0029; 0.0019;             |
| 0.3           | 0.064; 0.031; 0.022;              | 0.025; 0.01; 0.0057;              | 0.012; 0.003; 0.0019;              |
| 0.2           | 0.13; 0.051; 0.027;               | 0.026; 0.021; 0.0073;             | 0.012; 0.0062; 0.0019;             |
| 0.15          | 0.25; 0.065; 0.033;               | 0.034; 0.033; 0.0089;             | 0.012; 0.011; 0.0023;              |
| 0.1           | 0.66; 0.075; 0.045;               | 0.086; 0.053; 0.012;              | 0.013; 0.022; 0.0031;              |
| 0.08          | 1.1; 0.075; 0.058;                | 0.16; 0.063; 0.015;               | 0.018; 0.03; 0.0037;               |
| 0.04          | 4.78; 0.15; 0.15;                 | 1.01; 0.073; 0.028;               | 0.14; 0.063; 0.0069;               |

**Таблица 4.**  $q = 1 + \varepsilon$ . Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 4. Первое число в ячейках таблицы — погрешность стандартной формулы (15), второе — погрешность формулы из [3], третье число — погрешность формулы (16).

| $\varepsilon$ | $N_1/2 = M_1 = 10; h = H = 0.31,$ | $N_1/2 = M_1 = 20; h = H = 0.16,$ | $N_1/2 = M_1 = 40; h = H = 0.079,$ |
|---------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1             | 0.048; 0.013; 0.012;              | 0.024; 0.0034; 0.003;             | 0.012; 0.00086; 0.00077;           |
| 0.5           | 0.048; 0.016; 0.015;              | 0.024; 0.0044; 0.0039;            | 0.012; 0.0011; 0.00098;            |
| 0.3           | 0.05; 0.021; 0.019;               | 0.024; 0.0057; 0.0051;            | 0.012; 0.0015; 0.0013;             |
| 0.2           | 0.096; 0.027; 0.025;              | 0.024; 0.0073; 0.0067;            | 0.012; 0.0019; 0.0017;             |
| 0.15          | 0.21; 0.032; 0.03;                | 0.026; 0.0089; 0.0083;            | 0.012; 0.0023; 0.0021;             |
| 0.1           | 0.62; 0.044; 0.042;               | 0.067; 0.012; 0.011;              | 0.012; 0.0031; 0.003;              |
| 0.08          | 1.06; 0.053; 0.052;               | 0.14; 0.014; 0.014;               | 0.013; 0.0038; 0.0036;             |
| 0.04          | 4.74; 0.14; 0.14;                 | 0.99; 0.027; 0.027;               | 0.13; 0.0069; 0.0067;              |

**Таблица 5.**  $q = 1 + \varepsilon$ . Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 5. Первое число в ячейках таблицы — погрешность стандартной формулы (15), второе — погрешность формулы из [3], третье число — погрешность формулы (16).

| $\varepsilon$ | $N_1/2 = M_1 = 10; h = H = 0.31,$ | $N_1/2 = M_1 = 20; h = H = 0.16,$ | $N_1/2 = M_1 = 40; h = H = 0.079,$ |
|---------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1             | 0.047; 0.013; 0.012;              | 0.024; 0.0053; 0.0038;            | 0.012; 0.003; 0.002;               |
| 0.5           | 0.047; 0.017; 0.015;              | 0.024; 0.0052; 0.0039;            | 0.012; 0.003; 0.002;               |
| 0.3           | 0.049; 0.03; 0.019;               | 0.024; 0.0097; 0.0051;            | 0.012; 0.003; 0.002;               |
| 0.2           | 0.09; 0.05; 0.025;                | 0.024; 0.02; 0.0067;              | 0.012; 0.006; 0.002;               |
| 0.15          | 0.21; 0.063; 0.031;               | 0.025; 0.032; 0.0083;             | 0.012; 0.01; 0.0021;               |
| 0.1           | 0.62; 0.074; 0.043;               | 0.064; 0.052; 0.012;              | 0.012; 0.021; 0.003;               |
| 0.08          | 1.06; 0.075; 0.052;               | 0.14; 0.062; 0.014;               | 0.018; 0.03; 0.0036;               |
| 0.04          | 4.74; 0.097; 0.097;               | 0.99; 0.073; 0.027;               | 0.13; 0.062; 0.0067;               |

Как видно из приведенных численных результатов, стандартная квадратурная формула (15) при  $\epsilon \geq h$  имеет первый (по  $h$ ) порядок сходимости. При  $\epsilon \geq 2h$  максимальная абсолютная погрешность этой формулы во всех тестах не превосходит  $h/5$ , а при  $\epsilon \geq h$  она не превосходит  $h/2.5$ . В вычислениях по формуле (15) начинается резкое нарастание погрешности, когда толщина слоя  $\epsilon$  становится меньше шага интегрирования  $h$ .

При  $\epsilon \geq h/2$  абсолютная погрешность квадратурной формулы (16) во всех тестах, как правило, не превосходит  $h/10$ . Если же  $\epsilon \geq h/10$ , то абсолютная погрешность этой формулы во всех тестах не превосходит  $h/2$ . При  $\epsilon \geq h$  квадратурная формула (16) дает сходимость первого порядка по  $h$ . Максимальная абсолютная погрешность вычислений по формуле (16) в 5 (или более) раз меньше, чем погрешность вычислений по стандартной формуле (15). Когда толщина слоя  $\epsilon$  становится меньше шага интегрирования  $h$ , в вычислениях по формуле (16) начинается нарастание погрешности. Из результатов первого теста вытекает, что максимальная относительная погрешность формулы (16) составляет менее 1% при  $\epsilon \geq h \approx 0.1$ .

Таким образом, если при заданном  $\epsilon$  взять шаг сетки  $h = 2\epsilon$ , то абсолютная погрешность вычислений по формуле (16) будет не более  $\epsilon/5$ . Следовательно, квадратурная формула (16) позволяет брать шаг сетки меньше толщины слоя и при этом получать приемлемую точность вычислений, что уменьшает стоимость расчетов по сравнению с другими квадратурными формулами.

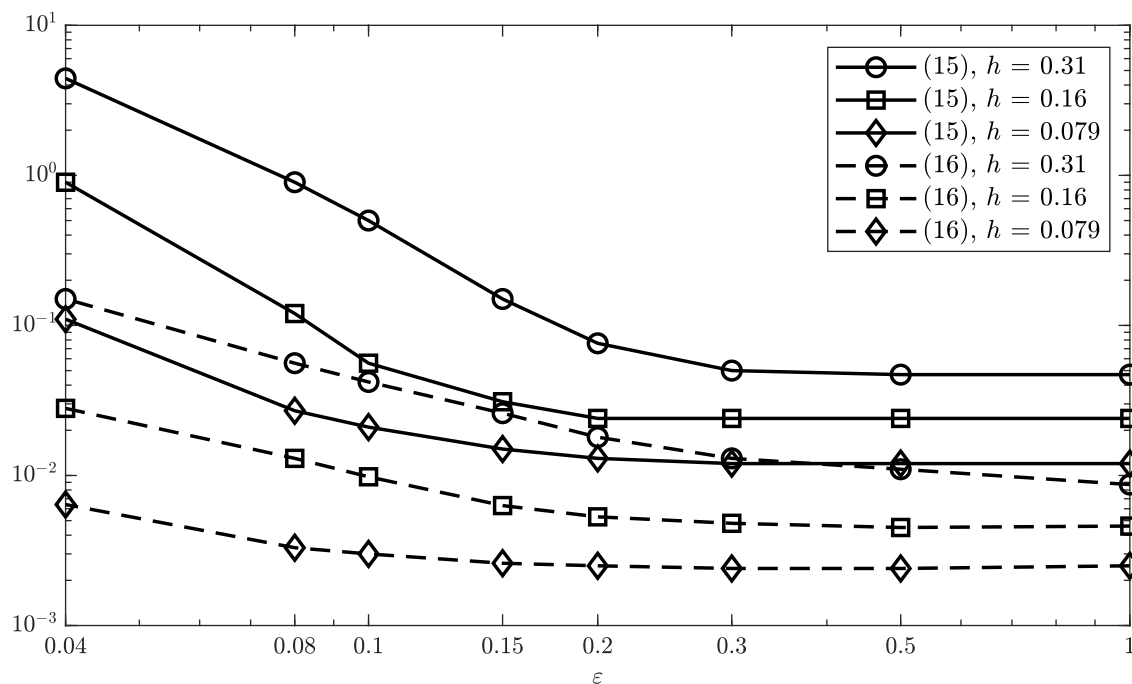
Максимальная абсолютная погрешность, полученная в тестах по формуле из [3] как правило меньше, чем по формуле (15), но больше, чем по формуле (16). Тем самым в задаче на границе тонкого слоя формула из [3] оказывается лучше стандартной формулы, но хуже, чем формула (16).

Погрешности формулы из [3] и погрешности формулы (16) достигают максимума во всех тестах при параметризации одной из сфер со сдвигом по  $\varphi$  на  $h/2$  относительно другой сферы. Величины погрешностей не зависят от того, параметризация какой из двух сфер смещена. Для формулы из [3] и формулы (16) погрешности в тестах со сдвигом  $h/2$  начинают превосходить погрешности в тестах без сдвига, когда толщина слоя  $\epsilon$  становится меньше шага интегрирования  $h$ . Если  $\epsilon \geq h$ , то погрешности вычислений по этим формулам в тестах со сдвигом и без сдвига примерно одинаковые. Погрешность стандартной квадратурной формулы (15) достигает максимума в случае, когда обе сферы имеют несмещенную параметризацию. Для формулы (15) погрешности в тестах без сдвига начинают превосходить погрешности в тестах со сдвигом одной из сфер на  $h/2$  по  $\varphi$  относительно другой сферы, когда толщина слоя  $\epsilon$  становится меньше шага интегрирования  $h$ . Если  $\epsilon \geq h$ , то погрешности вычислений по формуле (15) в тестах со сдвигом и без сдвига примерно одинаковые. Тем самым погрешности в формуле из [3] и в формуле (16) демонстрируют прямо противоположное поведение по сравнению с погрешностями в формуле (15) относительно тестов со сдвигом и без сдвига.

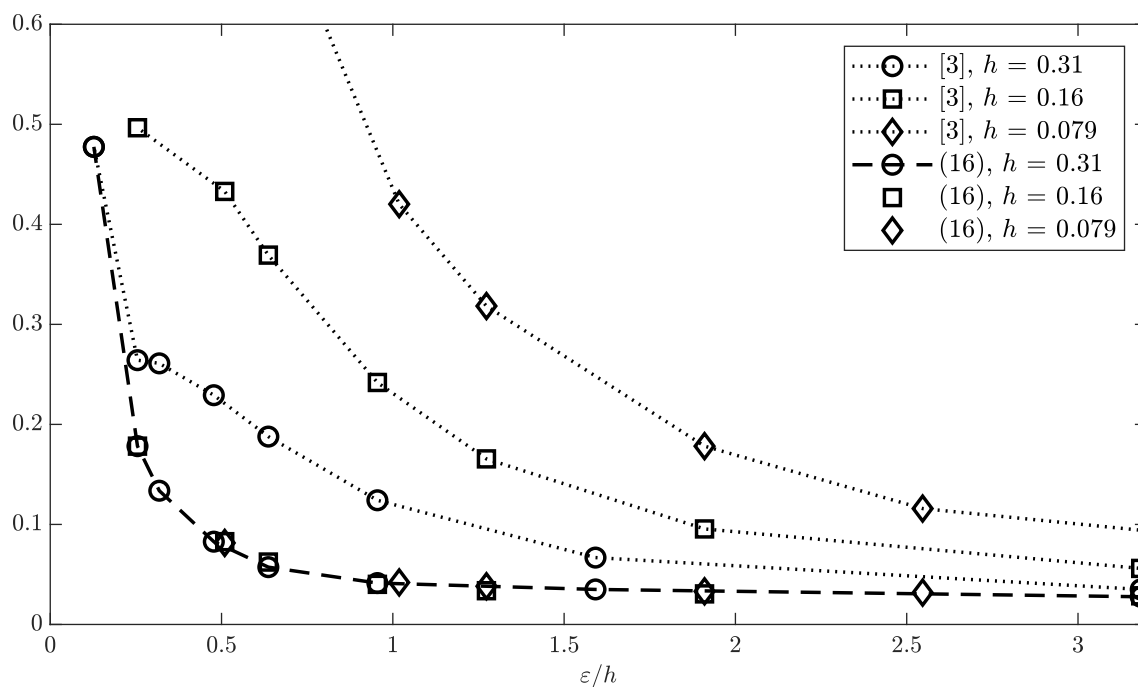
В тесте 4 максимальные абсолютные погрешности, генерируемые формулой (16) и формулой из [3] практически совпадают, что видно из табл. 4. В других тестах формула из [3] дает более высокую погрешность, чем формула (16). Такой эффект объясняется тем, что максимальные погрешности достигаются вблизи полюсов сфер  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , а в тесте 4 плотность в потенциале зануляется на полюсах обеих сфер. Формула (16) обеспечивает более точные вычисления вблизи полюсов, чем формула из [3], однако, обнуление подынтегральной функции вблизи полюсов нивелирует это достоинство формулы (16), в результате максимальные погрешности, получаемые по формуле (16) и по формуле из [3], сравниваются по величине.

С целью визуализации полученных результатов были построены графики для теста 2 на фиг. 1—3. На фиг. 1 представлены графики абсолютной погрешности в тесте 2 для квадратурных формул (15) и (16) в зависимости от толщины тонкого слоя  $\epsilon$  в логарифмическом масштабе для разных значений  $h$ . По графикам видно, что формулы сходятся при уменьшении  $h$  и что точность вычислений по формуле (16) значительно выше, чем по формуле (15), при фиксированном шаге  $h$ . На фиг. 2, 3 проводится сравнение формулы (16) с формулой (15) и формулой из [3] на данных из теста 2. На этих рисунках построены графики, показывающие поведение абсолютной погрешности вычислений в единицах  $h$  в зависимости от толщины слоя в единицах  $h$ , т.е. от величины  $\epsilon/h$ . Для формулы (16) кривые при разных значениях  $h$  совпадают (для остальных тестов в тех же координатах они также совпадают). Тем самым абсолютная погрешность вычислений по формуле (16) в единицах  $h$  зависит только от  $\epsilon/h$  и не зависит собственно от  $h$ . Для остальных двух квадратурных формул погрешность вычислений в указанных координатах зависит от  $h$ , поэтому при разных значениях  $h$  получаются разные кривые. Графики на фиг. 2, 3 показывают, что вычисления по формуле (16) обеспечивают более высокую точность, чем по двум другим формулам. Такие же графики по остальным тестам дают похожую картину.

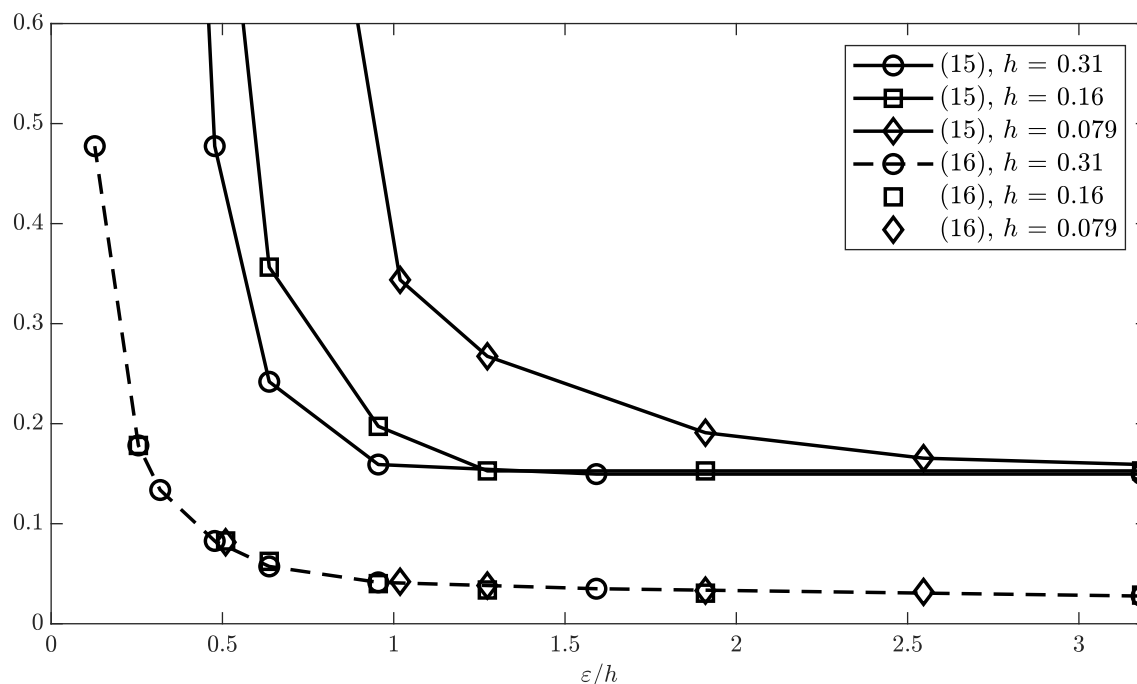
В заключение отметим, что метод задачи о скачке, использованный в настоящей работе, позволяет построить тесты, содержащие явные выражения для нормальной производной потенциала простого слоя на конечном числе эквидистантных сфер. Этот прием дает возможность изучать вычислительные свойства квадратурных формул в многослойных средах.



**Фиг. 1.** Максимальные абсолютные погрешности стандартной квадратурной формулы (15) и формулы (16) для различных  $h$  в зависимости от толщины сферического слоя  $\varepsilon$  в тесте 2. По оси абсцисс отложена толщина сферического слоя  $\varepsilon$  в логарифмическом масштабе, а по оси ординат отложены максимальные абсолютные погрешности в логарифмическом масштабе.



**Фиг. 2.** Максимальные абсолютные погрешности квадратурной формулы из [3] и формулы (16) для различных  $h$  в зависимости от толщины сферического слоя  $\varepsilon$  в единицах  $h$ , а по оси ординат отложены максимальные абсолютные погрешности в единицах  $h$ .



**Фиг. 3.** Максимальные абсолютные погрешности стандартной квадратурной формулы (15) и формулы (16) для различных  $h$  в зависимости от толщины сферического слоя  $\varepsilon$  в тесте 2. По оси абсцисс отложена толщина сферического слоя  $\varepsilon$  в единицах  $h$ , а по оси ординат отложены максимальные абсолютные погрешности в единицах  $h$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крутицкий П.А. Смешанная задача для уравнения Лапласа в трехмерной многосвязной области // Дифференц. ур-ния. 1999. Т. 35. № 9. С. 1179–1186.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
3. Крутицкий П.А., Резниченко И.О., Колыбасова В.В. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 9. С. 1270–1288.
4. Krutitskii P.A., Reznichenko I.O. Improved Quadrature Formulas for the Direct Value of the Normal Derivative of a Single-Layer Potential // Comput. Math. and Math. Phys. 2024. Vol. 64. № 2. P. 188–205.
5. Medkova D., Krutitskii P.A. The harmonic Dirichlet problem for a cracked domain with jump conditions on cracks // Applicable Analysis. 2004. V. 83. № 7. P. 661–671.
6. Medkova D., Krutitskii P.A. Neumann and Robin problems in a cracked domain with jump conditions on cracks // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 301. P. 99–114.
7. Krutitskii P.A. The jump problem for the Laplace equation // Appl. Math. Letters. 2001. V. 14. № 3. P. 353–358.
8. Krutitskii P.A. Explicit solution of the jump problem for the Laplace equation and singularities at the edges // Math. Problems in Engng. 2001. V. 7. № 1. P. 1–13.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1981.
10. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Физматлит, 2000.

# TESTING OF QUADRATURE FORMULAS FOR THE DIRECT VALUE OF THE NORMAL DERIVATIVE OF A SINGLE-LAYER POTENTIAL AT THE BOUNDARY OF A THIN BODY

P. A. Krutitskii\*, I. O. Reznichenko\*\*

*125047 Moscow, Miusskaya pl., M.V. Keldysh IAM, RAS, Russia,*

*\*e-mail: biem@mail.ru*

*\*\*e-mail: io.reznichenko@physics.msu.ru*

Received: 17.03.2024

Revised: 17.03.2024

Accepted: 24.04.2024

**Abstract.** Using test examples constructed on the basis of an explicit solution of the jump problem, a comparison of quadrature formulas for the direct value of the normal derivative of the harmonic single-layer potential on the boundary of a thin body is carried out. It is established that the error of calculations using the quadrature formula based on numerical integration is several times greater than the error of calculations using the improved quadrature formula based on the analytical calculation of integrals. As numerical tests have shown, the improved quadrature formula provides acceptable calculation accuracy even when the thickness of the body is significantly smaller than the integration step, which makes it possible to achieve the required calculation accuracy at a lower cost. The obtained results can be used for numerical solution of boundary value problems in thin bodies and in layered media by the potential method.

**Keywords:** Laplace equation, potential theory, thin body, quadrature formulas.

## РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА УЛУЧШЕНИЯ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦ<sup>1)</sup>

© 2024 г. А.С. Леонов<sup>1,\*</sup>, Д.В. Лукьяненко<sup>2,\*\*</sup>, А.Г. Ягола<sup>2,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>115409 Москва, Каширское ш., 31, НИЯУ «МИФИ», Россия

<sup>2</sup>119992 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Россия

\*e-mail: asleonov@mephi.ru

\*\*e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

\*\*\*e-mail: yagola@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 27.03.2024 г.

Переработанный вариант 27.03.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Рассматривается одна из возможных постановок обратных задач гравиметрии и магнитометрии, которая состоит в нахождении на заданной глубине гипотетических точечных источников соответствующих потенциальных полей по этим полям, измеряемым на поверхности Земли. Устанавливается единственность решения таких обратных задач. Для численного решения дискретизированных их вариантов применяется новый алгоритм, основанный на улучшении числа обусловленности матрицы задачи с помощью метода минимальной псевдообратной матрицы (алгоритм МПМУ). Алгоритм тестируется на модельных задачах грави- и магнито-разведки при их раздельном решении. Предлагается и тестируется также вариант алгоритма МПМУ для совместного решения этих обратных задач. В заключение, алгоритм применяется для раздельной и совместной обработки некоторых широко известных данных грави- и магнито-разведки для Курской магнитной аномалии. Библ. 31. Фиг. 11.

**Ключевые слова:** грави- и магнито-разведка, обратная задача, единственность решения, метод минимальной псевдообратной матрицы.

DOI: 10.31857/S0044466924100023, EDN: KATTQB

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В абстрактной форме обратные задачи гравиметрии и/или магнитометрии заключаются в определении источников, лежащих в известной пространственной области и создающих гравитационные и/или магнитные поля, которые измеряются в другой области. Эти измерения в рамках принятых математических моделей генерации полей часто позволяют найти источники с помощью специальных процедур решения обратных задач. Конкретные постановки таких обратных задач могут быть весьма разнообразными и зачастую зависят как от аппаратуры, методики, структуры и результатов измерений, так и от возможностей однозначного решения соответствующей математической обратной задачи. Все это можно видеть на примере многочисленных публикаций, из которых для краткости мы выделим лишь некоторые, близкие по направлению исследований, работы (см. [1]–[18]) и, в частности, недавние работы [19], [20]. Анализируя математические постановки обратных задач из этих работ, можно убедиться, что ключевым моментом в них является стремление получить определенное (единственное) решение обратной задачи. Хорошо известно, что найти однозначное распределение источников в заданной ограниченной области по измерениям соответствующих потенциальных полей вне этой области в общем случае нельзя (см. [6]). Соответствующие задачи имеют бесконечно много эквивалентных по генерируемому полю решений. Для выделения единственного решения делаются специальные дополнительные предположения. Например, в [21] для достаточно редко встречающихся обратных задач определения формы рудного тела делаются предположения о его форме, так что единственность решения обратной задачи вытекает из известных теорем П.С.Новикова [1] и Л.Н.Сретенского [2]. Часто встречается предположение о расположении источников. Так, в цикле работ [14]–[18] предлагается метод линейных интегральных представлений

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (код проекта 23-41-00002).

потенциальных полей, в котором по измерениям на земной поверхности определяются двумерные распределения источников на фиксированных различных глубинах. Распределения такого рода позволяют судить о геологической структуре, создающей наблюдаемые поля. Отметим высокую скорость решения соответствующих обратных задач и достаточную устойчивость получаемых решений по отношению к случайным возмущениям данных. Этот и многие другие методы решения линейных обратных задач грави- и магнитометрии связаны с обращением некоторых матриц, которые мы будем называть *матрицами обратных задач*. Очень часто такие матрицы оказываются плохо обусловленными или даже вырожденными. Отсюда возникает проблема устойчивости решений, полученных при обращении таких матриц. Она решается по-разному в различных работах. Так, многие авторы применяют метод регуляризации А.Н.Тихонова [22, 23] в различных его модификациях. Можно также использовать алгоритмы типа известного метода TSVD [24] и т.д.

Повысить устойчивость решаемой линейной обратной задачи можно также, заменив ее матрицу на некоторую «близкую», но имеющую лучшее (меньшее) число обусловленности. Именно такой подход будет использоваться ниже для решения некоторых обратных задач грави- и магнитометрии. Постановка этих задач дается в разд. 2. В разд. 3 излагается алгоритм их решения, основанный на так называемой *процедуре улучшения числа обусловленности матрицы задачи с помощью метода минимальной псевдообратной матрицы* (коротко, процедура МПМУ, в английской транскрипции МРМІ). В разд. 4 процедура МПМУ апробируется при раздельном решении модельных задач грави- и магнитометрии. В разд. 5 она применяется для раздельного решения этих задач с данными по Курской магнитной аномалии, а в разд. 6 делается попытка решить эти задачи совместно. Выводы из этих численных экспериментов представлены в разд. 7.

## 2. ПОСТАНОВКА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ

Будем решать обратные задачи гравиметрии и магнитометрии в следующей *региональной постановке*. Считаем, что измерения соответствующих потенциальных полей проводятся на земной поверхности с известным рельефом (высотой)  $z = z_0(x, y) \geq 0$ ,  $(x, y) \in D$ , где  $D$  — область исследований с кусочно-гладкой границей. Более детально, измерения проводятся в трехмерной области вида  $T = \{(x, y, z) : z_0(x, y) < z < z_1(x, y), (x, y) \in D\}$ ,  $z_{0,1}(x, y) \in C(D)$ . Нас интересуют следующие задачи.

**Задача 1.** На заданной поверхности  $H = H(x, y) < 0$ ,  $H(x, y) \in C(D)$ , найти число  $N$ , отличающиеся между собой расположения  $(x'_k, y'_k, H(x'_k, y'_k))$ ,  $k = \overline{1, N}$ , и массы  $g = [g_k]_{k=1}^N$  точечных источников гравитации, которые создают поле силы тяжести с вертикальной составляющей  $G_z(x, y, z)$ , измеренной в  $T$ .

Эта задача сводится к решению уравнения

$$\gamma \sum_{k=1}^N \frac{(z - H(x'_k, y'_k))g_k}{((x - x'_k)^2 + (y - y'_k)^2 + (z - H(x'_k, y'_k))^2)^{3/2}} = G_z(x, y, z), \quad (x, y, z) \in T, \quad (2.1)$$

относительно величин  $N$ ,  $(x'_k, y'_k)$ ,  $g_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Коэффициент  $\gamma$  есть известная гравитационная постоянная. В векторной форме уравнение имеет вид

$$\gamma \sum_{k=1}^N K_{gr}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k)g_k = G_z(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in T,$$

где

$$K_{gr}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k) = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k, \mathbf{n})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|^3},$$

а  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{r}'_k = (x'_k, y'_k, H(x'_k, y'_k))$ ,  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ .

**Задача 2.** На заданной поверхности  $H = H(x, y) < 0$ ,  $H(x, y) \in C(D)$ , найти число  $N$ , отличающиеся между собой расположения  $(x'_k, y'_k, H(x'_k, y'_k))$ ,  $k = \overline{1, N}$ , и вертикальные составляющие  $m = \{m_k\}_{k=1}^N$  векторов намагниченности точечных магнитных диполей, которые создают поле магнитной индукции с вертикальной составляющей  $B_z(x, y, z)$ , измеренной в  $T$ .

Задача сводится к решению уравнения

$$\mu_0 \sum_{k=1}^N K_{mg}(x, y, z, x'_k, y'_k)m_k = B_z(x, y, z), \quad (x, y, z) \in T, \quad (2.2)$$

относительно неизвестных  $N$ ,  $(x'_k, y'_k)$ ,  $m_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ . Здесь  $\mu_0$  — известная магнитная постоянная, а

$$K_{mg}(x, y, z, x', y') = K_{mg}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{3(z - H(x', y'))^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{n})^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

**Замечание.** Физические величины, фигурирующие в формулах (2.1), (2.2), следует выражать в принятых для таких задач единицах системы СИ. В частности, величины типа  $x, y, z$  будут выражаться в километрах (km), величина  $G_z(x, y, z)$  — в миллигалах (mGal), а величина  $B_z(x, y, z)$  выражается в нанотеслах (nTl). Однако для удобства записи мы будем принимать постоянные  $\gamma, \mu_0$  равными единице. Тогда искомые величины будут далее иметь следующие размерности:  $[g] = \text{mGal} \cdot \text{km}^2, [m] = \text{nTl} \cdot \text{km}^3$ .

### 3. О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ (2.1), (2.2)

Обратные задачи (2.1), (2.2) можно записать в следующей единообразной форме: найти число  $N \in \mathbb{N}$ , не совпадающие для различных  $k$  координаты  $\mathbf{r}'_k = (x'_k, y'_k, z'_k) \in \Sigma, k = \overline{1, N}$ , и такие числа  $X_k$ , что выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^N K(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k) X_k = Y(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in T. \quad (3.1)$$

Здесь  $\Sigma$  — заданная кусочно-гладкая поверхность, лежащая в полупространстве  $z < 0$ , а ядро  $K$  и величина  $Y(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in T$ , известны. Абстрактная задача такого типа может не иметь решения; если ее решение существует, то оно может быть не единственным. Однако в задачах (2.1), (2.2) единственность решений можно гарантировать из-за специфических свойств функции  $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k)$  и выбора поверхности  $\Sigma$ .

Для дальнейшего нам понадобится область  $T_H = \{(x, y, z) : H(x, y) < z < z_1(x, y), (x, y) \in D\}$ . Из условий на функции  $z_0(x, y), H(x, y)$  ясно, что  $T \subset T_H$ . Мы также будем считать, что поверхность  $\Sigma$  определяется уравнением  $z = H(x, y) \in C(D)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathbf{r}'_k \in \Sigma$  для всякого  $k \in \mathbb{N}$ , а функция  $K(\mathbf{r})$  является гармонической по переменным  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  всюду при  $|\mathbf{r}| > 0$ , причем  $K(\mathbf{r}) \rightarrow \infty$  при  $|\mathbf{r}| \rightarrow 0$ . Тогда задача (3.1) с данными  $Y(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in T$ , не может иметь более одного решения  $\{N \in \mathbb{N}, X_k, \mathbf{r}'_k \in \Sigma, k = \overline{1, N}\}$ .

Пусть  $\mathbf{r}'_k \in \Sigma$  для всякого  $k \in \mathbb{N}$ , а функция  $K(\mathbf{r})$  является гармонической по переменным  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  всюду при  $|\mathbf{r}| > 0$ , причем  $K(\mathbf{r}) \rightarrow \infty$  при  $|\mathbf{r}| \rightarrow 0$ . Тогда задача (3.1) с данными  $Y(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in T$ , не может иметь более одного решения  $\{N \in \mathbb{N}, X_k, \mathbf{r}'_k \in \Sigma, k = \overline{1, N}\}$ .

**Доказательство.** Предположим, что задача (3.1) имеет два решения, т.е. найдутся числа  $N_{1,2} \in \mathbb{N}$ , две различные совокупности векторов:  $\mathbf{r}_k^{(1)} \in \Sigma, k = \overline{1, N_1}$ , и  $\mathbf{r}_k^{(2)} \in \Sigma, k = \overline{1, N_2}$ , и две совокупности чисел:  $\{X_k^{(1)}\}_{k=1}^{N_1}$  и  $\{X_k^{(2)}\}_{k=1}^{N_2}$ , для которых выполнены равенства

$$\sum_{k=1}^{N_1} K(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^{(1)}) X_k^{(1)} = \sum_{k=1}^{N_2} K(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^{(2)}) X_k^{(2)} = Y(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in T. \quad (3.2)$$

Если учесть, что множества элементов  $\{\mathbf{r}_k^{(1)}\}$  и  $\{\mathbf{r}_k^{(2)}\}$  могут иметь непустое пересечение, то из равенств (3.2) следует существование такого числа  $N \in \mathbb{N}$ , такого набора различных векторов  $\mathbf{r}'_k \in \Sigma, k = \overline{1, N}$ , и такого нетривиального набора чисел  $X_k, \sum_{k=1}^N X_k^2 > 0$ , что

$$\sum_{k=1}^N K(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k) X_k = 0, \quad \mathbf{r} \in T. \quad (3.3)$$

В левой части равенства (3.3) стоит гармоническая в области  $T_H$  функция, и она равна нулю в подобласти  $T, T \subset T_H$ . Поэтому, согласно известному свойству единственности гармонического продолжения [25, с. 88–89], равенство (3.3) будет верно и в области  $T_H$ . В частности, оно будет верно и для последовательности точек  $\{\mathbf{r}_n\}_{n=1}^\infty \subset T_H$  такой, что  $\mathbf{r}_n \rightarrow \mathbf{r}'_1$  при  $n \rightarrow \infty$ :

$$K(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_1) X_1 + \sum_{k=2}^N K(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_k) X_k = 0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при  $n \rightarrow \infty$  и учитывая свойства:  $K(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_1) \rightarrow \infty, K(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_k) \rightarrow K(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_k) \in \mathbb{R}, k = 2, 3, \dots, N$ , приходим к выводу, что  $X_1 = 0$ . Поэтому член с  $k = 1$  из равенства (3.3) можно исключить:

$$\sum_{k=2}^N K(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k) X_k = 0, \quad \mathbf{r} \in T_H.$$

Далее, в этом равенстве можно вместо  $\mathbf{r}$  взять последовательность  $\{\mathbf{r}_n\}_{n=1}^\infty \subset T_H$ ,  $\mathbf{r}_n \rightarrow \mathbf{r}'_2$ , и тем же путем убедиться, что  $X_2 = 0$ . Продолжая этот процесс, получим, что  $X_k = 0$  для всех  $k = \overline{1, N}$ , а это противоречит нетривиальности решения уравнения (3.3).

Отметим, что условия теоремы выполнены для функций  $K_{gr}$  и  $K_{mg}$  из задач 1 и 2, так что последние имеют не более одного решения. Отметим также, что теорема верна и в случае, когда область  $T \subset \mathbb{R}^3 \cap \{z > 0\}$ ,  $\text{int} T \neq \emptyset$ , имеет кусочно-гладкую границу общего вида, кусочно-гладкая поверхность  $\Sigma$  лежит в полупространстве  $\mathbb{R}^3 \cap \{z < 0\}$ , а для области  $T_H$  выполнены условия:  $T \subset T_H$ ,  $\Sigma \subset \partial T_H$ .

#### 4. О ДИСКРЕТИЗАЦИИ ЗАДАЧ (2.1), (2.2)

Данные  $G_z(x, y, z)$ ,  $B_z(x, y, z)$  в задачах (2.1), (2.2) измеряются, как правило, в конечном числе точек на рельефе  $z = z_0(x, y) \geq 0$ ,  $(x, y) \in D$ , или вблизи него. Кроме того, в этих задачах часто задают положения источников  $\mathbf{r}'_k = (x_k, y_k, H(x_k, y_k))$ . Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать следующие дискретные варианты задач (2.1), (2.2): для заданных точек наблюдения  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_0(x_i, y_i))$ ,  $i = \overline{1, M_0}$ , и заданных точек расположения источников  $\mathbf{r}'_k = (x_k, y_k, H(x_k, y_k))$ ,  $k = \overline{1, N}$ , найти решения  $g = \{g_k\}$ ,  $m = \{m_k\}$  каждой из систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^N K_{gr}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_k)g_k = G_z(\mathbf{r}_i), \quad \sum_{k=1}^N K_{mg}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_k)m_k = B_z(\mathbf{r}_i), \quad i = \overline{1, M_0}. \quad (4.1)$$

Эти СЛАУ можно формально записать в виде  $AX = Y$ , где  $A$  — матрица соответствующей задачи,  $Y$  — ее правая часть, а  $X$  — соответствующие неизвестные. В этих задачах нам известна точно заданная матрица  $A$ , а правые части СЛАУ  $Y$  заданы, вообще говоря, с «ошибкой измерения»  $\delta$ : вместо  $Y$  известна приближенная правая часть  $Y_\delta$  такая, что  $\|Y - Y_\delta\| \leq \delta$ . Здесь и далее все нормы евклидовы. По этим данным нужно найти величины  $X = g, m$ .

Теоретически, СЛАУ  $AX = Y$  может не иметь обычного решения, когда рассматриваемые модели не адекватны экспериментальным данным. Но она всегда имеет решение в смысле метода наименьших квадратов (МНК), т.е. всегда существует решение системы  $A^T AX = A^T Y$ . Она также может быть неоднозначно разрешимой или плохо обусловленной. Таким образом, рассматриваемые дискретные варианты задач (2.1), (2.2) в общем случае оказываются некорректно поставленными, и для их решения необходимо применять специальные методы — методы регуляризации. В частности, регуляризацию некорректной обратной задачи можно проводить с помощью метода А.Н.Тихонова, метода TSVD и др. (см., например, [22–24]). Мы же предлагаем следующий новый метод.

#### 5. АЛГОРИТМ МПМУ УЛУЧШЕНИЯ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦ ЗАДАЧ

Рассмотрим СЛАУ общего вида  $\bar{A}X = Y$ , где  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $Y \in \mathbb{R}^m$  и действительная матрица  $\bar{A}$  имеет размер  $\dim \bar{A} = m \times n$ . Мы будем искать нормальное псевдорешение  $\bar{X}$  этой СЛАУ, т.е. то ее решения по методу наименьших квадратов, у которого минимальна евклидова норма. В случае однозначной разрешимости рассматриваемой СЛАУ,  $\bar{X}$  совпадает с обычным решением. Данными для нахождения  $\bar{X}$  являются величины  $\bar{A}, Y$ . Для этих *точных данных* задача формально решается с помощью псевдообратной матрицы  $A^+$ :  $\bar{X} = A^+Y$ . Если вместо величин  $Y$  известна приближенная правая часть  $Y_\delta$ , то вектор  $X_\delta = \bar{A}^+Y_\delta$  является устойчивым приближением к  $\bar{X}$ :  $X_\delta \rightarrow \bar{X}$  в  $\mathbb{R}^n$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

Матрица  $\bar{A}^+$ , как правило, вычисляется приближенно с помощью различного вида вычислительной техники с конечной разрядной сеткой. При этом, из-за округлений, в известных процедурах псевдообращения вместо  $\bar{A}$  фактически используется весьма близкая к ней матрица  $A_h$  с известным (оцениваемым) уровнем возмущения  $h$ :  $\|\bar{A} - A_h\| \leq h$ . В итоге, мы вычисляем  $A_h^+$ , а не  $\bar{A}^+$ , и получаем на самом деле вместо  $\bar{X}$  приближенное решение  $X_{h\delta} = A_h^+Y_\delta$ . Для вырожденных и плохо обусловленных матриц  $\bar{A}$  многие процедуры псевдообращения численно неустойчивы по отношению к ошибкам данных. Как следствие, приближения  $X_{h\delta}$  даже при малых погрешностях  $h$  могут быть сколь угодно «далеки» от точного нормального псевдорешения  $\bar{X}$ . В связи с этим разработаны специальные устойчивые методы приближенного нахождения  $\bar{A}^+$  по возмущенным данным (см., например, [22, 24, 26] и др.).

Нам понадобится так называемый *метод минимальной псевдообратной матрицы* (МПМ) [23, 27]. Сформулируем его, как в указанных работах, для СЛАУ  $\bar{A}z = u$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ . Считается, что точная матрица неизвестна, а вместо нее задана  $A_h$ :  $\|\bar{A} - A_h\| \leq h$ , причем число  $h$  известно. Правая часть  $u$  также неизвестна, и в нашем распоряжении имеется ее приближение  $u_\delta$  с точностью  $\delta$ :  $\|u_\delta - u\| \leq \delta$ . Матрицы  $\bar{A}, A_h$  — действительные. Метод МПМ состоит в следующем:

а) находится матрица метода  $\tilde{A}_h$ , удовлетворяющая условию

$$\|\tilde{A}_h^+\| = \inf \{ \|A^+\| : \forall A, \dim A = m \times n, \|A - A_h\| \leq h \},$$

т.е. из всех матриц, сравнимых по точности с  $A_h$  (сюда входит и точная матрица  $\bar{A}$ ) выбирается та, у которой псевдообратная имеет минимальную норму;

б) находится приближенное решение в виде  $z_{\delta h} = \tilde{A}_h^+ u_{\delta}$ .

Такое приближенное решение СЛАУ имеет оптимальный порядок точности, а матрица  $\tilde{A}_h$  имеет число обусловленности, по порядку близкое к наилучшему (см. [23, 27]). Кроме того, метод МПМ позволяет вычислять устойчивую оценку ранга неизвестной точной матрицы. Отметим, что метод не требует знания погрешности  $\delta$ , но требует знания числа  $h$ . Метод МПМ реализуется численно с помощью сингулярного разложения матрицы  $A_h$ . Соответствующие формулы даны в [23, 27] и в Приложении. Преимущества метода МПМ перед другими методами указаны в [23, 27].

В отличие от постановки задачи с применением метода МПМ, в задачах (4.1), которые нас интересуют, мы знаем точно матрицу  $\bar{A}$ . Однако она может быть плохо обусловленной или даже вырожденной, и в этом случае необходима регуляризация соответствующей СЛАУ. Одним из вариантов регуляризации является улучшение (уменьшение) числа обусловленности матрицы путем варьирования ее в определенных пределах возмущений. Изложим соответствующий алгоритм для СЛАУ  $\bar{A}X = Y$ , считая, что  $\bar{A} \neq 0$  и точная правая часть СЛАУ нетривиальна:  $Y \neq 0$ .

Пусть дано сингулярное разложение точной матрицы:  $\bar{A} = U\bar{R}V^T$ , где  $U, V$  — ортогональные матрицы размера  $m \times m$  и  $n \times n$  соответственно, а  $\bar{R}$  — диагональная матрица размера  $m \times n$ , содержащая сингулярные числа матрицы  $\bar{A}$ , упорядоченные по невозрастанию:

$$\bar{R} = \text{diag} [\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \dots, \bar{\rho}_{\bar{r}}, 0, \dots, 0], \quad \bar{\rho}_1 \geq \bar{\rho}_2 \geq \dots, \bar{\rho}_{\bar{r}} > 0.$$

Здесь  $\bar{r} = \text{rank } \bar{A} \leq M = \min(m, n)$ . Введем также спектральное число обусловленности матрицы  $\bar{A}$ :  $\nu_s(\bar{A}) = \bar{\rho}_1 / \bar{\rho}_{\bar{r}}$ .

**Алгоритм МПМУ** решения СЛАУ  $\bar{A}X = Y$  с данными  $\{\bar{A}, Y_{\delta}\}$  состоит в следующем.

Предварительный шаг: находим число  $\mu_{\delta} = \inf \{ \|\bar{A}X - Y_{\delta}\| : \forall X \in \mathbb{R}^n \}$  — меру несовместности решаемой СЛАУ. Устойчивые методы решения этой задачи описаны, например, в [23].

**Шаг 1.** Зададим число  $h_0$ ,  $h_0 > h_1 = \frac{27}{16}\bar{\rho}_1^4$ . Для каждого  $h$ ,  $0 \leq h \leq h_0$ , заменяем точную матрицу  $\bar{A}$  на приближенную матрицу вида  $\bar{A}_h = U\bar{R}_hV^T$ , где

$$\bar{R}_h = \text{diag} [\bar{\rho}_1 x_1(h), \bar{\rho}_2 x_2(h), \dots, \bar{\rho}_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(h), 0, \dots, 0]$$

диагональная матрица, получаемая по формулам из Приложения с заменой там матрицы  $A_h$  и ее сингулярных чисел на матрицу  $\bar{A}$  и ее сингулярные числа. Более детально,

$$x_k(h) = \{\bar{x}_k(h), 0 \leq h \leq h_k; 0, h > h_k\}$$

для  $k = 1, \dots, \bar{r}$ , где  $\bar{x}_k(h)$  — решение уравнения  $\bar{x}_k^4 - \bar{x}_k^3 = h\bar{\rho}_k^{-4}$ ,  $\bar{x}_k \in [1, \frac{3}{2}]$ , а  $h_k = \frac{27}{16}\bar{\rho}_k^4$ .

**Шаг 2.** Вводим функцию  $\beta_{\delta}(h) = \|\bar{A}_h^+ Y_{\delta} - Y_{\delta}\|$ ,  $0 \leq h \leq h_0$ , и решаем уравнение  $\beta_{\delta}^2(h) = \delta^2 + \mu_{\delta}^2$ . Обозначим его решение как  $h(\delta) > 0$ . Вопросы разрешимости уравнения будут рассмотрены далее.

**Шаг 3.** Находим матрицу метода МПМУ  $\bar{A}_{h(\delta)} = U\bar{R}_{h(\delta)}V^T$  и с ее помощью вычисляем приближенное решение СЛАУ:  $X_{\delta} = \bar{A}_{h(\delta)}^+ Y_{\delta} = V\bar{R}_{h(\delta)}^+ U^T Y_{\delta}$ .

В [28] установлены следующие свойства такого алгоритма.

Пусть для каждого  $\delta$ ,  $0 < \delta < \delta_0 = \text{const}$ , выполнено неравенство  $\|Y_{\delta}\| > \mu_{\delta}$ . Тогда верно следующее:

1) функция  $\beta_{\delta}(h)$  монотонно не убывает при  $h \in [0, h_0]$ , непрерывна слева в каждой точке  $h > 0$  и имеет разрывы первого рода в точках  $h_k$ ;

2)  $\beta_{\delta}^2(+0) = \mu_{\delta}^2$ ,  $\beta_{\delta}^2(h_0) = \|Y_{\delta}\|^2$ ;

3) уравнение  $\beta_{\delta}^2(h) = \delta^2 + \mu_{\delta}^2$  имеет «обобщенное решение»  $h(\delta) > 0$ , т.е. точку, для которой выполнены неравенства

$$\lim_{h \rightarrow h(\delta)} \beta_{\delta}^2(h) = \beta_{\delta}^2(h(\delta) - 0) \leq \mu_{\delta}^2 + \delta^2 \leq \beta_{\delta}^2(h(\delta) + 0) = \overline{\lim}_{h \rightarrow h(\delta)} \beta_{\delta}^2(h);$$

это либо обычное решение уравнения, либо одна из точек разрыва  $h_k$  функции  $\beta_{\delta}^2(h)$ ;

4)  $h(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$  и поэтому  $\bar{A}_{h(\delta)}^+ \rightarrow \bar{A}$ ,  $X_{\delta} = \bar{A}_{h(\delta)}^+ Y_{\delta} \rightarrow \bar{X}$ ;

5) выполнена оценка  $x_k(h) \sim 1 + a_k h$  при  $h \rightarrow +0$  для каждого  $k$ ,  $1 \leq k \leq \bar{r}$ , где  $a_k = \bar{\rho}_k^{-4}$ ;

6) обозначим как  $r(\delta)$  ранг матрицы  $\bar{A}_{h(\delta)}$ . Тогда  $r(\delta) \leq \bar{r}$ .

Из этих свойств вытекает

**Теорема 2.** Пусть сингулярные числа матрицы  $\bar{A}$  простые:  $\bar{\rho}_k > \bar{\rho}_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots, M - 1$ . Тогда при  $\delta \rightarrow 0$  справедлива оценка

$$\nu_s(\bar{A}_{h(\delta)}) = \frac{\bar{\rho}_1 x_1(h(\delta))}{\bar{\rho}_{r(\delta)} x_{r(\delta)}(h(\delta))} \sim \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_{r(\delta)}} (1 - h(\delta)(a_{r(\delta)} - a_1)) < \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_r} = \nu_s(\bar{A}).$$

Доказательство легко следует из свойств 4) – 6) с учетом неравенства  $a_1 = \bar{\rho}_1^{-4} < \bar{\rho}_{r(\delta)}^{-4} = a_{r(\delta)}$ .

Таким образом, число обусловленности матрицы  $\bar{A}_{h(\delta)}$  меньше числа обусловленности для  $\bar{A}$  по крайней мере при «малых»  $\delta$ .

Численная реализации алгоритма МПМУ рассмотрена в [28] (см. также [23, 27]). Там же представлено сравнение результатов работы этого алгоритма и методов регуляризации А.Н.Тихонова [22] и TSVD [24].

Рассмотрим на простом примере «механизм действия» этого алгоритма.

**Пример 1.** Пусть точная матрица СЛАУ, ее точная и приближенная правые части и точное решение имеют вид

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-8} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \end{bmatrix}, \bar{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решим СЛАУ  $\bar{A}X = Y_\delta$  с помощью алгоритма МПМУ для различных  $\delta$ .

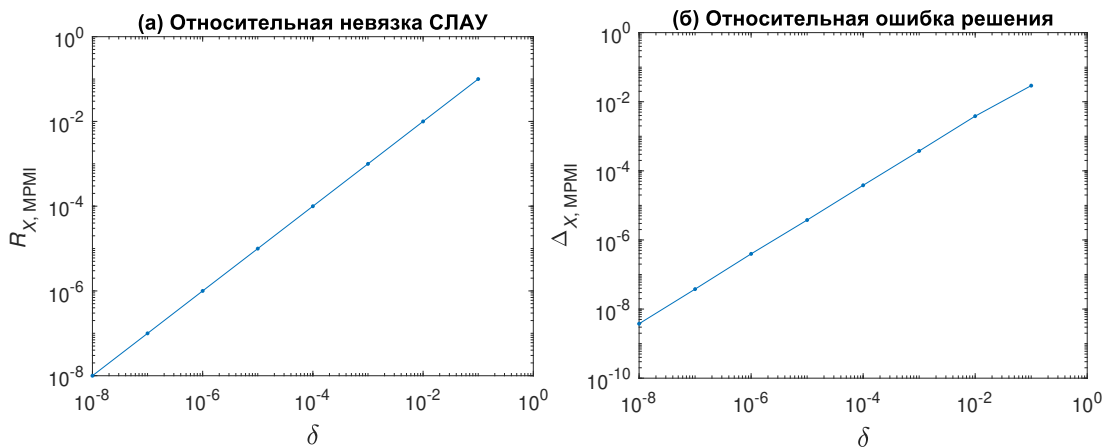
Число обусловленности матрицы есть  $\nu_s(\bar{A}) = 10^8$ , т.е. матрица весьма плохо обусловлена. Нетрудно видеть, что относительная точность непосредственного решения СЛАУ  $\bar{A}X = Y_\delta$ , т.е. величина  $\Delta_X = \|\bar{X} - \bar{A}^{-1}Y_\delta\| / \|\bar{X}\| = 10^8\delta$ , представляется очень плохой при «больших»  $\delta$ . Теперь применим для приближенного решения СЛАУ предлагаемый алгоритм. Оказывается, что для  $0 < \delta < 1$  матрица метода МПМУ выражается как

$$A_{h(\delta)} = \begin{bmatrix} x(h) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, x^4(h) - x^3(h) = h, x(h) \in \left[1, \frac{3}{2}\right],$$

ее число обусловленности  $\nu_s(A_{h(\delta)}) = x(h)$  не велико по сравнению с  $\nu_s(\bar{A}) = 10^8$  и при этом  $\text{rank } A_{h(\delta)} = 1$ . Фактически, алгоритм удаляет для указанных величин  $\delta$  из СЛАУ второе уравнение с малым коэффициентом  $10^{-8}$ , и в результате решается только первое уравнение системы. Остальные характеристики приближенных решений, полученных с помощью алгоритма МПМУ для разных  $\delta$ , представлены на фиг. 1. Видно, что невязка СЛАУ и точность приближенного решения убывают как некоторая степень  $\delta$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

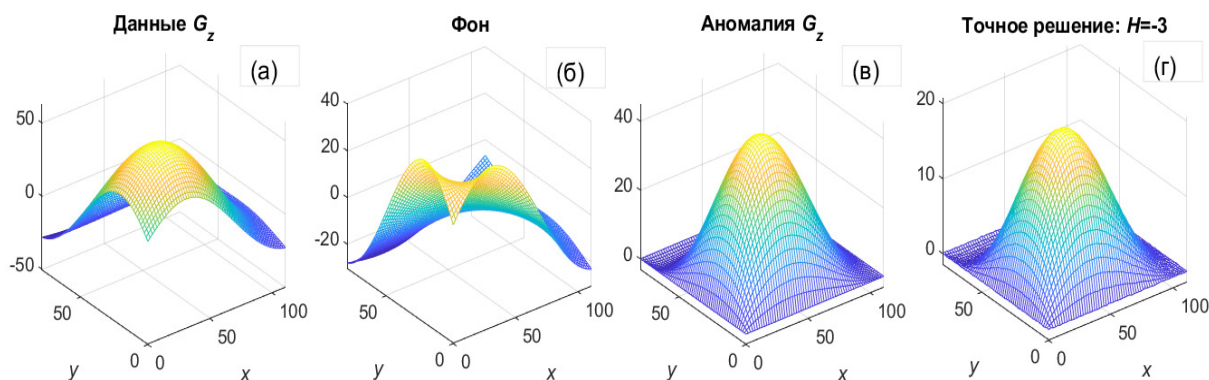
## 6. АДАПТАЦИЯ АЛГОРИТМА И МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В дальнейшем мы будем рассматривать задачи 1 и 2 в дискретной постановке (4.1),  $AX = Y_{an}$ , с данными  $Y_{an}$  для гравитационных и магнитных аномалий, и будем решать эти задачи с помощью алгоритма МПМУ. Заме-



**Фиг. 1.** Результат работы алгоритма МПМУ для СЛАУ из примера 1 для различных уровней возмущения правой части  $\delta$ ; (а) — относительная невязка СЛАУ  $R_{X, MPMI} = \frac{\|A_{h(\delta)}X_\delta - Y_\delta\|}{\|Y_\delta\|}$ ; (б) — относительная ошибка приближенного решения

$$\Delta_{X, MPMI} = \frac{\|\bar{X} - A_{h(\delta)}^+ Y_\delta\|}{\|\bar{X}\|}.$$



Фиг. 2. (а) — Данные с возмущением в 0.5%, (б) — вычисленный фон, (в) — выделенная аномалия, (г) — точное решение ( $H = -3$ ).

тим, однако, что в реальных измерениях регистрируется не сама величина  $Y_{an}$ , а суммарное поле  $Y$ , создаваемое аномалией и породами, ее окружающими. Таким образом, необходимо выделить собственно аномальное поле из измерений  $Y$ , используя некоторое модельное математическое определение аномального поля. Для того чтобы нагляднее описать этот процесс, сделаем следующие упрощающие предположения. Считаем, что измерения поля  $Y$  проводятся на плоском рельефе  $z = H_0 = \text{const} \geq 0$  в прямоугольной области  $D$ , а именно: на равномерной сетке точек  $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n \in D$ . Эта же сетка на глубине  $H < 0$  определяет положение искомым источников поля:  $(x'_k, y'_k) = (x_k, y_k)$ . Далее предположим, что  $Y = Y_{an} + Y_{bg}$ , где  $Y_{an}$  — поле, создаваемое собственно гравитационной или магнитной аномалией, а  $Y_{bg}$  — это фоновое поле, создаваемое окружающими область измерений породами. Математически фоновое поле определим как потенциальное поле (поле внешних источников-пород) в плоской области  $D \times \{z = H_0\}$ , удовлетворяющее на границе этой области условию  $Y_{bg}|_{\partial D} = Y|_{\partial D}$ . Таким образом, аномальное поле удовлетворяет нулевым граничным условиям на границе  $\partial D$ , а фоновое поле есть решение задачи Дирихле в прямоугольной области:

$$\begin{aligned} \Delta Y_{bg} &= 0, \quad (x, y) \in D \setminus \partial D, \\ Y_{bg}|_{\partial D} &= Y|_{\partial D}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

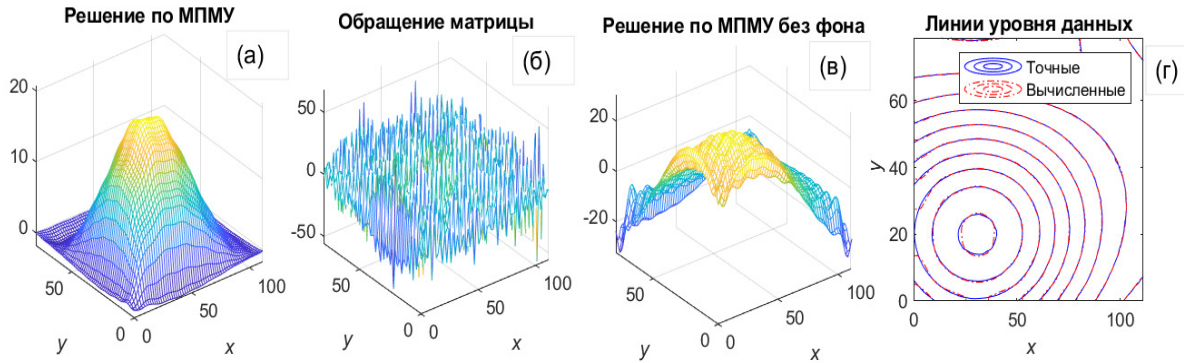
Соответственно, решая эту задачу с помощью одного из многих имеющихся эффективных методов (см., например, [29]), можно найти фоновое поле, а затем — необходимое для решения задач (4.1) аномальное поле  $Y_{an} = Y - Y_{bg}$ .

Сделанные предположения о рельефе носят модельный характер, и от них можно отказаться, изменяя соответственно процедуру выделения аномального поля. Для краткости мы не будем здесь это рассматривать.

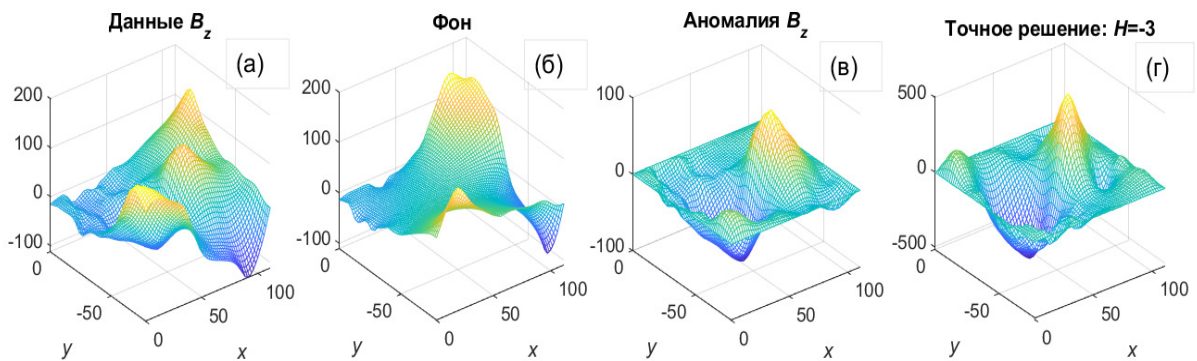
Сначала проиллюстрируем возможности алгоритма МПМУ на примерах модельных задач.

**Решение обратной задачи гравиметрии.** На фиг. 2а показаны данные  $Y = G_z(x, y, z)$  обратной задачи при  $z = H_0 = 0$ , полученные путем решения прямой задачи из модельного решения  $\bar{X}$ , которое задано на глубине  $H = -3$  на равномерной сетке размера  $3721 \times 3721$  в области  $D = [0, 111] \times [0, 79]$  (см. фиг. 2г). Данные подвергнуты возмущению поточечной нормально распределенной ошибкой с нулевым средним так, что выполнено условие  $\frac{\|Y - Y_\delta\|}{\|Y\|} \leq \delta_0$  для  $\delta_0 = 0.005$  (ошибка в 0.5%,  $\delta = \delta_0 \|Y\|$ ). На фиг. 2б, в представлены найденный фон  $Y_{bg}$ , т.е. решение задачи (6.1), и аномалия  $Y_{an}$ . Матрица обратной задачи  $A$  имеет полный ранг  $\text{rank} A = 3721$  и число обусловленности  $\nu_s(A) \approx 1464.6$ . Применяв алгоритм МПМУ, мы получили матрицу  $A_{h(\delta)}$ , для которой  $\text{rank} A_{h(\delta)} = 192$  и  $\nu_s(A_{h(\delta)}) \approx 2.8$ . Приближенное решение обратной задачи, полученное по этому алгоритму, т.е. величина  $X_\delta = A_{h(\delta)}^+ Y_{an}$ , представлена на фиг. 3а. Относительная точность полученного решения оказалась такой:  $\Delta = \frac{\|X_\delta - \bar{X}\|}{\|\bar{X}\|} \approx 0.094$ . Для сравнения на фиг. 3б показано решение обратной задачи путем обращения исходной матрицы:  $\tilde{X}_\delta = A^{-1} Y_{an}$ , которое, как видно, не приемлемо для интерпретации.

Сравним это решение по алгоритму МПМУ с данными в виде выделенной аномалии  $Y_{an}$  с аналогичным решением с исходными данными  $Y$  без выделения фона. Соответствующее приближение показано на фиг. 3в. Из сравнения ясно, что процедура выделения фона может существенно менять приближенное решение. На фиг. 3г дано сравнение линий уровня (изолиний) исходных данных обратной задачи (фиг. 2а) и их аналогов, вычисленных с помощью решения по алгоритму МПМУ с выделением фона. Невязка точных и вычисленных данных  $\frac{\|A\bar{X} - AX_\delta\|}{\|A\bar{X}\|}$  составляет около 2.7%. При сравнении изолинии оказываются весьма близкими графически. Приблизительно такая же картина получается при сравнении исходных изолиний и их аналогов, вычисленных с



**Фиг. 3.** (а) — Решение методом МПМУ, (б) — решение путем обращения матрицы задачи, (в) — решение с данными без выделения фона, (г) — сравнение линий уровня исходных данных и их аналогов, вычисленных по алгоритму МПМУ с выделением фона.



**Фиг. 4.** (а) — Данные с возмущением в 0.5%, (б) — вычисленный фон, (в) — выделенная аномалия, (г) — точное решение ( $H = -3$ ).

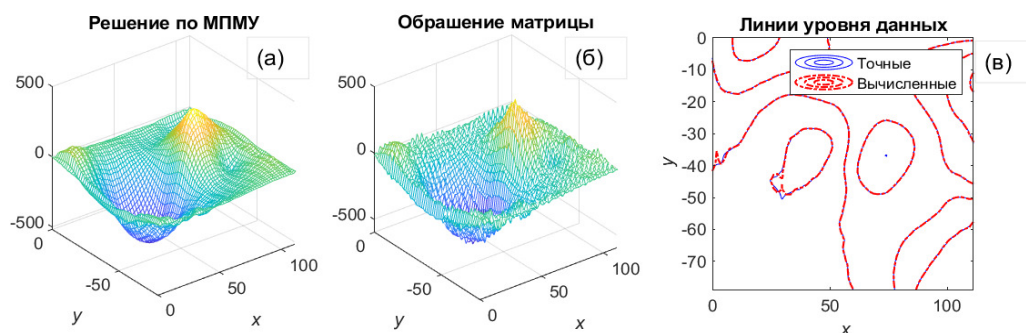
помощью решения  $\tilde{X}_\delta = A^{-1}Y_{an}$  и с помощью решения по алгоритму МПМУ с исходными данными без выделения фона. Это подтверждает численную неустойчивость рассматриваемой обратной задачи. Для краткости мы не включаем в текст соответствующие рисунки.

**Решение обратной задачи магнитометрии.** Модельная задача построена по аналогии с модельной задачей гравиметрии на равномерной сетке размера  $3721 \times 3721$  в области  $D = [0, 111] \times [-79, 0]$ . Ее исходные данные  $Y = B_z(x, y, z)$  при  $z = 0$  представлены на фиг. 4а. Модельное точное решение  $\bar{X}$  на глубине  $H = -3$  изображено на фиг. 4г. Данные возмущены ошибкой с  $\delta_0 = 0.005$ . На фиг. 2б,в показаны найденный фон и вычисленная магнитная аномалия. Матрица обратной задачи  $A$  здесь снова имеет полный ранг  $\text{rank} A = 3721$ , а ее число обусловленности есть  $\nu_s(A) \approx 68.7$ . Таким образом, эта матрица достаточно хорошо обусловлена. После применения алгоритма МПМУ получается матрица  $A_{h(\delta)}$ , для которой  $\text{rank} A_{h(\delta)} = 1565$  и  $\nu_s(A_{h(\delta)}) \approx 3.9$ . Приближенное решение обратной задачи  $X_\delta = A_{h(\delta)}^+ Y_{an}$ , полученное по этому алгоритму изображено на фиг. 5а. Его относительная точность есть  $\Delta = \frac{\|X_\delta - \bar{X}\|}{\|\bar{X}\|} \approx 0.353$ . Для сравнения на фиг. 5б показано не регуляризованное решение обратной задачи  $\tilde{X}_\delta = A^{-1}Y_{an}$ , которое содержит колебания, не имеющие отношения к геофизической структуре.

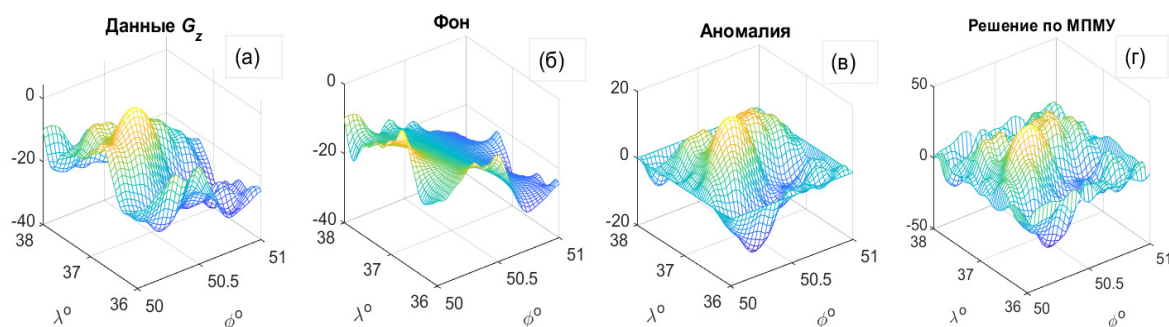
На фиг. 5в проводится сравнение изолиний исходных данных обратной задачи и их аналогов, вычисленных с помощью решения по алгоритму МПМУ с выделением фона. Невязка точных и вычисленных данных составляет около 2.2%. Видна графическая близость изолиний.

## 7. РАЗДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ ДЛЯ КУРСКОЙ МАГНИТНОЙ АНОМАЛИИ

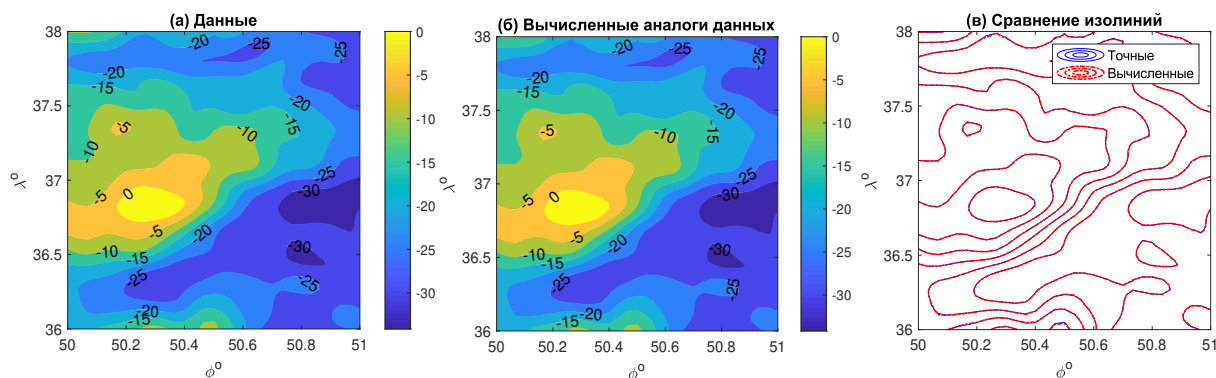
Алгоритм МПМУ был применен для обработки реальных данных для Курской магнитной аномалии (координаты: северная широта  $\phi \in [50^\circ, 51^\circ]$ , восточная долгота  $\lambda \in [36^\circ, 38^\circ]$ ). Приведем результаты решения



Фиг. 5. (а) — Решение методом МПМУ, (б) — решение путем обращения матрицы задачи, (в) — сравнение линий уровня исходных данных и их аналогов, вычисленных по алгоритму МПМУ.



Фиг. 6. (а) — Данные  $G_z$ , (б) — вычисленный фон, (в) — выделенная аномалия, (г) — решение методом МПМУ.

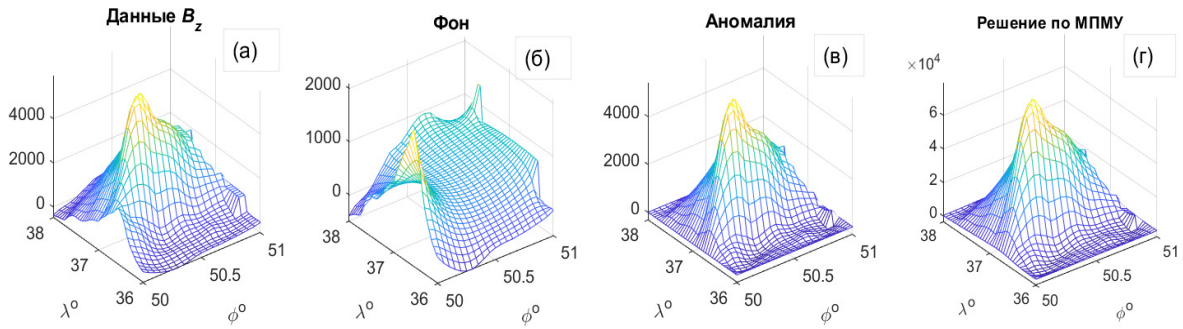


Фиг. 7. (а) — Изолинии данных  $G_z$ , (б) — изолинии их аналогов, вычисленных с помощью метода МПМУ, (в) — сравнение этих изолиний.

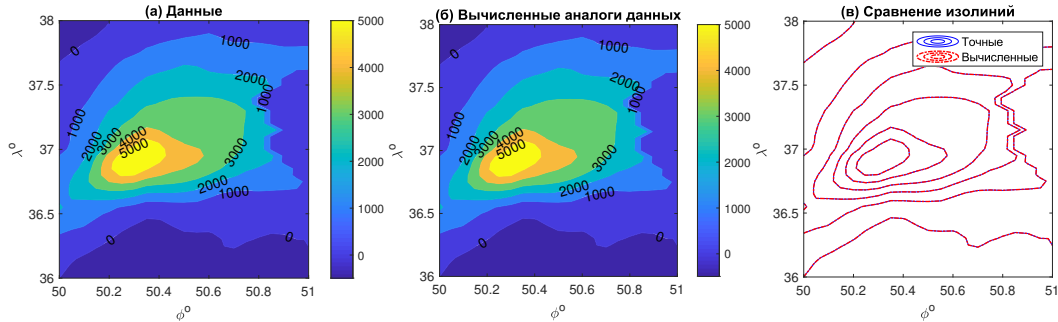
соответствующих обратных задач 1 и 2 в дискретной постановке (4.1) для  $H = -3$ , приближенно считая рельеф плоским:  $H_0 = 0$ . Все исходные данные и сетки взяты из баз данных WGM2012 GLOBAL MODEL [30] (гравитационные данные) и WDMAM [31] (магнитные данные). Во всех расчетах предполагалось, что данные измерены с относительной точностью 0.1%.

**Обратная задача гравиметрии.** На фиг. 6 показаны данные обратной задачи  $G_z$ , вычисленный фон, найденная аномалия и решение обратной задачи по методу МПМУ. На фиг. 7 изображены изолинии точных данных, их аналогов, вычисленных с помощью решения обратной задачи. Приведено также сравнение этих результатов. Невязка точных и вычисленных данных составляет 3.6%. Изолинии графически близки.

**Обратная задача магнитометрии.** Аналогичные результаты отображены на фиг. 8, 9. Невязка точных и вычисленных данных составляет здесь 3.1%.



Фиг. 8. (а) — Данные  $B_z$ , (б) — вычисленный фон, (в) — выделенная аномалия, (г) — решение методом МПМУ.



Фиг. 9. (а) — Изолинии данных  $B_z$ , (б) — изолинии их аналогов, вычисленных с помощью метода МПМУ, (в) — сравнение этих изолиний.

## 8. СОВМЕСТНОЕ РЕШЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ ЗАДАЧ

Разработано достаточно большое число способов совместного решения обратных задач такого рода (см., например, [9, 10, 13]). Формально решить совместно обратные задачи гравиметрии и магнитометрии в заданном районе можно, объединив системы уравнений с матрицами  $A_{gr}$  и  $A_{mg}$  для неизвестных  $g$  и  $m$  соответственно в единую СЛАУ с решением-столбцом  $X = [g; m]^T$ , правой частью  $Y = [G_z; B_z]^T$  и с матрицей  $A = [A_{gr} \ 0; 0 \ A_{mg}]$ , а затем решить новую систему

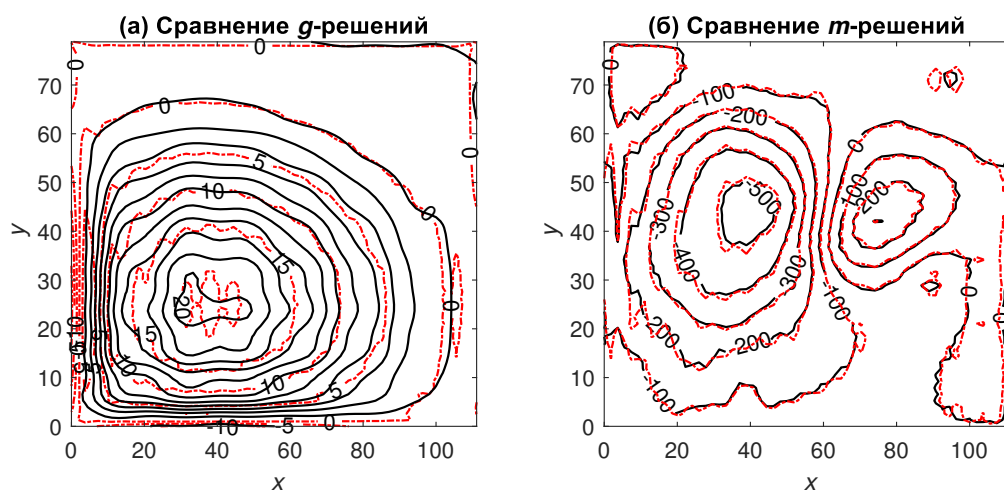
$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{gr} & 0 \\ 0 & A_{mg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_z \\ B_z \end{bmatrix}.$$

Именно такой подход мы здесь используем для иллюстрации к алгоритму МПМУ. Однако в силу разнородности гравитационных и магнитных измерений и данных требуется масштабирование соответствующих величин. Мы использовали следующие новые масштабированные величины:  $\bar{A}_{gr} = \frac{A_{gr}}{\|A_{gr}\|}$ ,  $\bar{A}_{mg} = \frac{A_{mg}}{\|A_{mg}\|}$ ,  $\bar{G}_z = \frac{G_z}{\|G_z\|}$ ,  $\bar{B}_z = \frac{B_z}{\|B_z\|}$ . Таким образом, совместное решение обратных задач грави- и магниторазведки сводится к решению СЛАУ вида

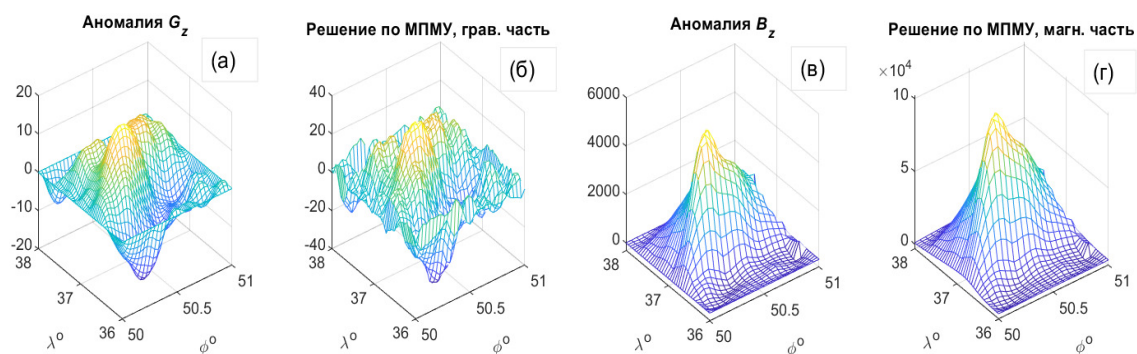
$$\bar{A}\bar{X} = \bar{Y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_{gr} & 0 \\ 0 & \bar{A}_{mg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{g} \\ \bar{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_z \\ \bar{B}_z \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

и искомые величины вычисляются как  $g = \frac{\|G_z\|}{\|A_{gr}\|} \bar{g}$ ,  $m = \frac{\|B_z\|}{\|A_{mg}\|} \bar{m}$ . Систему (8.1) мы решали с помощью алгоритма МПМУ.

Приведем результаты совместного решения модельных задач из разд. 6. Исходная матрица имеет следующие характеристики:  $\dim \bar{A} = 7442 \times 7442$ ,  $\text{rank} \bar{A} = 7442$  и  $\nu_s(\bar{A}) \approx 1465$ . Для матрицы метода МПМУ оказалось, что  $\text{rank} \bar{A}_{h(\delta)} = 3297$  и  $\nu_s(\bar{A}_{h(\delta)}) \approx 29.6$ . Таким образом, число обусловленности матрицы существенно улучшилось. При этом, однако, точность получаемых приближенных решений гравитационной и магнитной задачи несколько ухудшилась. Качественно, это можно видеть на фиг. 10 из сравнения изолиний решений. Там сравниваются изолинии отдельных решений этих задач (непрерывные линии) и аналогичных линий, полученных при совместном решении (пунктирные линии). Количественно, отклонения полученных приближенных решений от точных получились такие:  $\Delta_{gr} = \frac{\|g_{appr} - g_{ex}\|}{\|g_{ex}\|} \approx 0.182$ ,  $\Delta_{mag} = \frac{\|m_{appr} - m_{ex}\|}{\|m_{ex}\|} \approx 0.056$ . При этом невязка СЛАУ (8.1) для полученных решений составляет около 1%.



Фиг. 10. Сравнение изолиний отдельного решения (непрерывные линии) и совместного решения (пунктир) обратных задач гравиметрии (а) и магнитометрии (б).



Фиг. 11. Данные (а), (б) и совместные решения (в), (г) обратных задач для Курской магнитной аномалии с помощью алгоритма МПМУ.

Реализация алгоритма МПМУ для совместного решения обратных задач требует несколько большего времени, чем суммарное время решения этих задач отдельно этим же методом. Такой эффект связан с использованием в МПМУ метода сингулярного разложения матриц (SVD). Известно, что число операций  $N_{SVD}$ , требуемое в методе SVD с квадратной матрицей размера  $N \times N$ , имеет асимптотику вида  $N_{SVD} \sim \frac{8N^3}{3}$  при больших  $N$ . Поэтому для совместного решения рассматриваемых задач с матрицами размера  $N_1 \times N_1$  и  $N_2 \times N_2$  требуется время порядка  $t \sim \frac{8(N_1+N_2)^3}{3}$  а это больше чем сумма времен  $t_1 + t_2 \sim \frac{8(N_1^3+N_2^3)}{3}$  отдельного решения задач.

Аналогичное совместное решение гравитационной и магнитной задачи было проведено с данными по Курской магнитной аномалии из разд. 7. В этом случае  $\dim \bar{A} = 3782 \times 3782$ ,  $\text{rank} \bar{A} = 3782$  и  $v_s(\bar{A}) \approx 3.45 \cdot 10^{19}$ . Для матрицы метода МПМУ:  $\text{rank} \bar{A}_{h(\delta)} = 2058$  и  $v_s(\bar{A}_{h(\delta)}) \approx 6.64$ . Следует отметить значительное улучшение числа обусловленности. Полученные приближенные решения можно видеть на фиг. 11б,г. Поскольку точные решения для этой задачи неизвестны, можно сравнить на сколько полученные здесь решения отличаются от решений, найденных отдельно. Будем сравнивать такие величины, вычисляя отклонения  $\bar{\Delta} = \frac{\|X_{\text{separate}} - X_{\text{joint}}\|}{\|X_{\text{separate}}\|}$ , где  $X_{\text{separate}}$  — величина, найденная при отдельном решении, а  $X_{\text{joint}}$  — величина, найденная при совместном решении. Оказалось, что эти отклонения для гравитационных и магнитных решений таковы:  $\bar{\Delta}_{gr} \approx 0.048$  и  $\bar{\Delta}_{mag} \approx 0.069$ .

## 9. ВЫВОДЫ

1. Предлагаемая в статье постановка обратных задач грави- и магниторазведки гарантирует единственность решений этих задач. Однако, при дискретизации эти задачи могут терять такое свойство, и тогда для их решения необходимо применять регуляризующие алгоритмы.

2. Разработанный алгоритм МПМУ улучшения числа обусловленности матриц обладает регуляризующими свойствами: он позволяет устойчиво по отношению к возмущениям данных найти решение поставленных обратных задач грави- и магниторазведки взятых отдельно, а также совместно. Это доказано теоретически и подтверждено при решении модельных задач.

3. С помощью алгоритма МПМУ были решены рассматриваемые обратные задачи для данных по Курской магнитной аномалии, как раздельно так и совместно. Полученные приближенные решения оказались достаточно близкими, однако время совместного решения обратных задач оказалось несколько большим, чем суммарное время раздельного решения этих задач. Такой эффект объясняется аналогичным свойством метода SVD, который используется в алгоритме МПМУ. Несмотря на это, совместное решение можно применять, например, для контроля получаемых решений.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### МЕТОД МИНИМАЛЬНОЙ ПСЕВДООБРАТНОЙ МАТРИЦЫ И ЕГО ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Центральным пунктом метода является решение **Задачи**: найти матрицу  $\tilde{A}_h$ , удовлетворяющую условию

$$\|\tilde{A}_h^+\| = \inf \{ \|A^+\| : \forall A, \dim A = m \times n, \|A - A_h\| \leq h \}. \quad (\text{A.1})$$

Эта задача решена в [23, 28] следующим образом. Используется SVD-разложение заданной действительной матрицы  $A_h$ :  $A_h = U_h R_h V_h^T$ . Здесь  $U_h, V_h$  — ортогональные матрицы размеров  $m \times m$  и  $n \times n$ , а

$$R_h = \text{diag} [\rho_1^{(h)}, \rho_2^{(h)}, \dots, \rho_M^{(h)}], \quad \rho_1^{(h)} \geq \rho_2^{(h)} \geq \dots \geq \rho_M^{(h)} \geq 0, \quad M = \min \{n, m\},$$

есть диагональная матрица размера  $m \times n$ , содержащая упорядоченные сингулярные числа  $\rho_k^{(h)}, k = 1, \dots, M$ . Тогда одно из решений задачи (A.1) имеет вид:  $\tilde{A}_h = U_h \tilde{R}_h V_h^T$ , где  $\tilde{R}_h = \text{diag} [\rho_1^{(h)} x_1(h), \rho_2^{(h)} x_2(h), \dots, \rho_M^{(h)} x_M(h)]$ .

Числа  $x_k(h)$  вычисляются по следующему правилу. Пусть  $h_k = \frac{27}{16} (\rho_k^{(h)})^4$ . Тогда  $x_k(h) = \{ \tilde{x}_k(h), 0 \leq h \leq h_k; 0, h > h_k \}$ , где  $\tilde{x}_k(h)$  есть решение уравнения  $x_k^4 - x_k^3 = h (\rho_k^{(h)})^{-4}$ ,  $x_k \in [1, \frac{3}{2}]$ . Псевдообращение  $\tilde{A}_h^+$  вычисляется как  $\tilde{A}_h^+ = V_h \tilde{R}_h^+ U_h^T$ , где

$$\tilde{R}_h^+ = \text{diag} [\theta [\rho_1^{(h)} x_1(h)], \theta [\rho_2^{(h)} x_2(h)], \dots, \theta [\rho_M^{(h)} x_M(h)]]$$

и  $\theta(\rho) = \{\rho^{-1}, \rho > 0; 0, \rho = 0\}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. № 3. С. 165–168.
2. Сретенский Л.Н. О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. 1954. Т. 99. № 1. С. 21–22.
3. Заморев А.А. Определение формы тела по производным внешнего гравитационного потенциала // Изв. АН СССР Сер. геогр и геофиз. 1942. № 1/2. С. 48–54.
4. Иванов В.К. Теорема единственности обратной задачи логарифмического потенциала для звездных множеств // Изв. вузов. Матем. 1958. № 3. С. 99–106.
5. Цирульский А.В. О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР Физика Земли. 1969. № 6. С. 60–65.
6. Страхов В.Н. Об эквивалентности в обратной задаче гравиметрии при переменной плотности масс // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 2. С. 329–331.
7. Bhattacharyya B.K. A method for computing the total magnetization vector and the dimensions of a rectangular block-shaped body from magnetic anomalies // Geophysics. 1966. V. 31. P. 74–96.
8. Zhdanov M.S. Integral Transforms in Geophysics. New York: Springer-Verlag, 1987.

9. Zeyen H., Pous J. 3-D joint inversion of magnetic and gravimetric data with a priori information // *Geophysical Journal International*. 1993. V. 112. P. 244–256.
10. Haber E., Oldenburg D. Joint inversion: a structural approach // *Inverse Problems*. 1997. V. 13. P. 63–77.
11. Li Y., Oldenburg D.W. 3-D inversion of gravity data // *Geophysics*. 1998. V. 63. P. 109–119.
12. Prilepko A.I., Orlovsky D.G. and Vasin, I.A. *Methods for solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker, 2000.
13. Fregoso E., Gallardo L. A. Cross-gradients joint 3D inversion with applications to gravity and magnetic data // *Geophysics*. 2009. V. 74. No 4. P. L31–L42.
14. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // *Физика Земли*. 2002. Т. 38. № 2. С. 3–19.
15. Strakhov V.N., Stepanova I.E. Solution of gravity problems by the S-approximation method (regional version) // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2002. V. 38. No 7. P. 535–544.
16. Stepanova I.E. On the S-approximation of the Earth's gravity field: regional version // *Inverse Problems in Science and Engng*. 2009. V. 17. No 8. P. 1095–1111.
17. Степанова И.Э., Керимов И.А., Раевский Д.Н., Щепетилов А.В. Комбинированный метод F-, S- и R-аппроксимаций при решении задач геофизики и геоморфологии // *Физика Земли*. 2018. № 1. С. 96–113.
18. Степанова И.Э., Керимов И.А., Ягола А. Г. Аппроксимационный подход в различных модификациях метода линейных интегральных представлений. *Физика Земли*. 2019. № 2. С. 31–46.
19. Stepanova I., Lukyanenko D., Kolotov I., Shchepetilov A., Yagola A. On the Unique Solvability of Inverse Problems of Magnetometry and Gravimetry // *Mathematics*. 2023. V. 11. P. 3230.
20. Колотов И.И., Лукьяненко Д.В., Степанова И.Э., Щепетилов А.В., Ягола А.Г. О единственности решения систем линейных алгебраических уравнений, к которым редуцируются обратные задачи гравиметрии и магнитометрии: региональный вариант // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 63. № 9. С. 1446–1457.
21. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
22. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
23. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995; М.: Курс, 2017.
24. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of Inverse Problems*. Dordrecht: Kluwer, 1996.
25. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968.
26. Hansen P.C. The truncated SVD as a method for regularization // *BIT*. 1987. V. 27. P. 534–553.
27. Леонов А.С. Метод минимальной псевдообратной матрицы: теория и численная реализация // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1991. Т.31. № 10. С. 1427–1443.
28. Леонов А.С. Методы решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, улучшающие обусловленность // *Изв. вузов. Математика*. 2024. № 10. С. 21–31.
29. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
30. <https://bgi.obs-mip.fr/data-products/grids-and-models/wgm2012-global-model/>
31. <http://wdmam.org/download.php>

# SOLVING SOME INVERSE PROBLEMS OF GRAVIMETRY AND MAGNETOMETRY USING AN ALGORITHM TO IMPROVE THE NUMBER OF MATRIX CONDITIONALITY

A.S. Leonov<sup>a,\*</sup>, D.V. Lukyanenko<sup>b,\*\*</sup>, A.G. Yagola<sup>b,\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> 115409 Moscow, Kashirskoe shosse, 31, NRNU MEPhI, Moscow, Russia

<sup>b</sup> 199992 Moscow, Leninskie Gory, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Russia

\*e-mail: asleonov@mephi.ru

\*\*e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

\*\*\*e-mail: yagola@physics.msu.ru

Received: 27.03.2024

Revised: 27.03.2024

Accepted: 28.06.2024

**Abstract.** One of the possible formulations of the inverse problems of gravimetry and magnetometry is considered, which consists in finding at a given depth hypothetical point sources of corresponding potential fields for these fields measured on the Earth's surface. The uniqueness of the solution of such inverse problems is established. For the numerical solution of their discretized variants, a new algorithm is used based on improving the condition number of the problem matrix using the minimum pseudo-inverse matrix method (MPM algorithm). The algorithm is tested on model problems of gravity and magnetic exploration with their separate solution. A variant of the MPM algorithm for the joint solution of these inverse problems is also proposed and tested. In conclusion, the algorithm is used for separate and joint processing of some well-known gravity and magnetic exploration data for the Kursk magnetic anomaly.

**Keywords:** gravity and magnetic exploration, inverse problem, uniqueness of solution, method of minimal pseudo-inverse matrix.

# ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. А.И. Федотов<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>420111 Казань, ул. Карла Маркса, 10, Казанский национальный исследовательский  
технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

\*e-mail: fedotovkazan@mail.ru

Поступила в редакцию 18.05.2024 г.

Переработанный вариант 19.05.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

В настоящее время имеется более 30 различных определений производной дробного порядка, и их число продолжает расти. Некоторые из них всего лишь “игры разума”, но другие введены для решения серьезных математических задач. В этой статье дано новое определение производной дробного порядка, основанного на обобщении формулы дифференцирования полиномов Якоби. Это позволило ввести шкалу систем ортогональных полиномов, замыканиями которых являются пространства Соболева. Использование этих производных позволило поставить задачу решения сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром Коши на разомкнутом контуре. Доказано существование и единственность решения таких уравнений, обоснован метод Галеркина для их приближенного решения. Доказана сходимость метода, получены оценки погрешности приближенных решений. Библ. 17.

**Ключевые слова:** производные дробного порядка, сингулярные интегродифференциальные уравнения, метод Галеркина.

DOI: 10.31857/S0044466924100032, EDN: KAOGET

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к проблемам дробного дифференцирования и интегрирования в математике, физике и смежных дисциплинах постоянно растет, и к настоящему времени можно констатировать, что имеется две параллельно развивающихся теории: дробное дифференцирование и интегрирование периодических функций и дробное дифференцирование и интегрирование непериодических функций, то есть функций определенных на разомкнутых контурах. И если для периодического случая теория дробного дифференцирования и интегрирования имеет вполне законченную форму, то в непериодическом случае нет даже единого общепризнанного определения дробной производной. Даже в фундаментальной монографии [1] имеется несколько определений дробной производной для непериодических функций. И к настоящему моменту имеется уже более 30 таких определений. Каждое определение имеет свои преимущества и недостатки, для преодоления которых вводятся все новые определения. Укажем хотя бы на определение “удобной производной”, появившейся сравнительно недавно в [2] и нашедшей уже много последователей.

Такое обилие определений дробной производной с одной стороны и необходимость дробных производных для прикладных исследований с другой, приводит к необходимости очертить рамки допустимости определений, т.е. ввести критерии их корректности. Такие критерии были сформулированы в работе [3] и позже повторены в современной формулировке в работе [4]. Основными критериями являются следующие:

- а) если функция аналитическая, то ее производная тоже должна быть аналитической;
- б) оператор дробного дифференцирования должен быть линейным;
- в) при натуральных значениях порядка дифференцирования оператор должен совпадать с обычным оператором дифференцирования.

Последнее требование означает, что, как указал Эйлер [3], возникает ситуация, похожая на задачу интерполирования. Имеется система операторов целочисленного дифференцирования, требуется связать эти операторы оператором допускающим дифференцирование любого действительного порядка. И так же как в случае

интерполирования, когда имеется сколь угодно много кривых, соединяющих заданные точки, имеется бесконечно много способов - о чем писал Лейбниц в письме Лопиталю - определить оператор дробного дифференцирования, совпадающий при целых значениях порядка дифференцирования с обычным оператором дифференцирования. Все такие операторы должны считаться корректно определенными. При этом важно понимать, что операторы целочисленного дифференцирования являются частными случаями операторов дробного дифференцирования, и поэтому обладают свойствами, которыми операторы дробного дифференцирования могут и не обладать. И вопрос тогда уже не столько в корректности определения оператора дробного дифференцирования, а в выборе такого оператора, который бы наилучшим образом подходил для решения конкретной задачи.

В работе [5] автор определил оператор дробного дифференцирования интерполируя операторы целочисленного дифференцирования сплайнами первого порядка. Это позволило поставить задачу решения интегродифференциального уравнения дробного порядка, предложить квадратурно-разностный метод для его решения и обосновать его. Легко проверить, что для такого определения все условия корректности определения а)–в) выполнены. Это означает, что такое определение должно считаться корректным.

В данной работе оператор дробного дифференцирования определен интерполированием показателей степеней весовой функции. Это позволило сформулировать задачу решения сингулярного интегродифференциального уравнения с дробными производными, предложить метод Галеркина для его решения и обосновать этот метод. И для этого определения оператора дробного дифференцирования все условия корректности выполнены, поэтому и это определение оператора должно считаться корректным.

Метод Галеркина в этой работе применяется к достаточно простому уравнению. Однако аналогичные уравнения с целочисленными операторами дифференцирования рассматривались в нескольких работах. Например, в [6] рассмотрен метод Галеркина, основанный на аппроксимации точного решения линейными комбинациями полиномов Лежандра, а в [7] предложен интересный смешанный метод для решения того же уравнения. Оба метода обоснованы в работах автора [8] и [9].

В данной работе сделан очередной шаг в развитии теории и приближенных методов решения сингулярных интегродифференциальных уравнений на разомкнутом контуре: установлены условия однозначной разрешимости таких уравнений, доказана сходимость метода Галеркина и получены оценки погрешности.

Структура статьи следующая. В разд. 2 даются основные определения и обозначения. Раздел 3 содержит вспомогательные результаты, некоторые свойства введенных полиномов и известные результаты необходимые для доказательства однозначной разрешимости точного уравнения и сходимости приближенных решений. В разд. 4 и 5 мы определяем и исследуем свойства весовых пространств Соболева и соответствующих сопряженных пространств. Раздел 6 содержит некоторые новые факты о сингулярных интегродифференциальных уравнениях Коши необходимые для дальнейших исследований. В разд. 7 представлено сингулярное интегродифференциальное уравнение Коши, исследованы условия его однозначной разрешимости и получена оценка оператора левой части этого уравнения. В разд. 8 описан метод Галеркина для решения вышеуказанного уравнения. В этом разделе, кроме того, показано, что метод сходится и получена оценка погрешности. Наконец, разд. 9 содержит численный пример, который подтверждает теоретические результаты статьи.

## 2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем, как обычно, обозначать  $\mathbb{N}$  множество натуральных чисел,  $\mathbb{N}_0$  множество натуральных чисел дополненных нулем, а  $\mathbb{R}$  множество действительных чисел.

Функции, за исключением  $\{P_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$  – полиномов Лежандра,  $\{P_l^{(\mu, \nu)}\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu > -1$ ,  $\nu > -1$ , – полиномов Якоби,  $\{T_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$  – полиномов Чебышёва первого рода и  $\{U_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$  – полиномов Чебышёва второго рода, будем обозначать строчными латинскими буквами. Пространства функций и операторы действующие в этих пространствах будем обозначать заглавными латинскими буквами.

Обозначим

$$p(\alpha, t) = (1 - t^2)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}, \quad t \in (-1, 1), \quad (1)$$

весовую функцию, а

$$v(l, 0, \alpha, t) = \frac{\Gamma(l + 2\alpha + 1)}{2^\alpha \Gamma(l + \alpha + 1)} P_l^{(\alpha, \alpha)}(t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}, \quad t \in [-1, 1], \quad (2)$$

систему нормированных полиномов Якоби ортогональных на отрезке  $[-1, 1]$  с весом (1). При  $\alpha = -\frac{1}{2}$  полиномы  $v(l, 0, -\frac{1}{2}, t)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $t \in [-1, 1]$ , совпадают с нормированными полиномами Чебышёва первого рода

$$v(0, 0, -\frac{1}{2}, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0, \quad v(l, 0, -\frac{1}{2}, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi l}} T_l(t), \quad l \in \mathbb{N}, \quad t \in [-1, 1],$$

$$T_l(t) = \cos(l \arccos t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [-1, 1].$$

При  $\alpha = \frac{1}{2}$  полиномы  $v(l, 0, \frac{1}{2}, t)$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $t \in [-1, 1]$ , совпадают с нормированными полиномами Чебышёва второго рода

$$v(l, 0, \frac{1}{2}, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} U_l(t), \quad U_l(t) = \frac{\sin((l+1) \arccos t)}{\sin(\arccos t)}, \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [-1, 1].$$

А при  $\alpha = 0$  полиномы  $v(l, \frac{1}{2}, 0, t)$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $t \in [-1, 1]$ , совпадают с полиномами Лежандра [10]

$$v(l, \frac{1}{2}, 0, t) = P_l(t) = \sum_{n=0}^l g_{2n} \cos((l-2n) \arccos t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [-1, 1],$$

$$g_{2n} = \frac{(2n-1)!!(2l-2n-1)!!}{(2n)!!(2l-2n)!!}, \quad n = 0, 1, \dots, l.$$

Здесь полагаем  $(-1)!! = 0!! = 1$ .

Для определения производной дробного порядка  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \beta$ , от полиномов (2) формально обобщим формулу дифференцирования полиномов Якоби [10]

$$D^m P_{l+m}^{(\mu, \nu)}(t) = \frac{\Gamma(l+2m+\mu+\nu+1)}{2^m \Gamma(l+m+\mu+\nu+1)} P_l^{(m+\mu, m+\nu)}(t),$$

$$l, m \in \mathbb{N}_0, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}, \quad \mu > -1, \nu > -1, \quad t \in [-1, 1],$$

на случай оператора дифференцирования порядка  $\beta$

$$D^\beta v(l, \beta, \alpha, t) = \frac{\Gamma(l+\beta+2\alpha+1)}{2^\alpha \Gamma(l+\beta+\alpha+1)} D^\beta P_{l+\beta}^{(\alpha, \alpha)}(t) = \frac{\Gamma(l+2(\alpha+\beta)+1)}{2^{\alpha+\beta} \Gamma(l+\alpha+\beta+1)} P_l^{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}(t) = v(l, 0, \alpha+\beta, t).$$

Наконец, для произвольных  $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \beta$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ , производная порядка  $\beta$  от полинома  $v(l, \gamma, \alpha, t)$  будет иметь вид<sup>1</sup>

$$D^\beta v(l, \gamma, \alpha, t) = \frac{\Gamma(l+\gamma-\beta+2(\alpha+\beta)+1)}{2^{\alpha+\beta} \Gamma(l+\gamma-\beta+\alpha+\beta+1)} P_{l+\gamma-\beta}^{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}(t) = v(l + [\gamma - \beta], \{\gamma - \beta\}, \alpha + \beta, t), \quad l + [\gamma - \beta] \in \mathbb{N}_0.$$

В частности,

$$D^{\frac{1}{2}} v(l+1, 0, -\frac{1}{2}, t) = v(l, \frac{1}{2}, 0, t) = P_l(t),$$

$$D^{\frac{1}{2}} P_l(t) = D^{\frac{1}{2}} v(l, \frac{1}{2}, 0, t) = v(l, 0, \frac{1}{2}, t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [-1, 1],$$

то есть производными порядка  $\frac{1}{2}$  от нормированных полиномов Чебышёва первого рода являются полиномы Лежандра, а производными порядка  $\frac{1}{2}$  от полиномов Лежандра являются нормированные полиномы Чебышёва второго рода.

### 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим некоторые свойства полиномов

$$v(l, \gamma, \alpha, t) = \frac{\Gamma(l+\gamma+2\alpha+1)}{2^\alpha \Gamma(l+\gamma+\alpha+1)} P_l^{(\alpha, \alpha)}(t), \quad (3)$$

$$l \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad t \in [-1, 1],$$

и операторов дробного дифференцирования  $D^\beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \beta$ .

**Лемма 1.** Для любых фиксированных  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \alpha$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ , полиномы  $v(l, \gamma, \alpha, t)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $t \in [-1, 1]$ , образуют ортогональную систему полиномов с весом  $p(\alpha, t) = (1-t^2)^\alpha$  на  $[-1, 1]$ , причем

$$\int_{-1}^1 p(\alpha, \tau) v^2(l, \gamma, \alpha, \tau) d\tau = \frac{\Gamma^2(l+\gamma+2\alpha+1) \Gamma^2(l+\alpha+1)}{(l+\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma^2(l+\gamma+\alpha+1) \Gamma(l+2\alpha+1) l!}, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

<sup>1</sup>Здесь и далее  $[\alpha]$  означает целую часть, а  $\{\alpha\}$  — дробную часть числа  $\alpha$ .

**Доказательство.** Ортогональность системы полиномов  $v(l, \gamma, \alpha, t)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $t \in [-1, 1]$ , при любых фиксированных  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \alpha$ ,  $0 \leq \gamma \leq 1$ , сразу следует из определения (3) и ортогональности системы полиномов Якоби  $\{P_l^{(\alpha, \alpha)}\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $-1 \leq \alpha$ , с весом  $p(\alpha, t)$  на отрезке  $[-1, 1]$ .

Так как для системы полиномов Якоби  $\{P_l^{(\mu, \nu)}\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ ,  $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ ,  $\mu > -1$ ,  $\nu > -1$ , выполняются равенства [10]

$$\int_{-1}^1 (1-\tau)^\mu (1+\tau)^\nu (P_l^{(\mu, \nu)}(\tau))^2 d\tau = \frac{2^{\mu+\nu+1} \Gamma(l+\mu+1) \Gamma(l+\nu+1)}{(2l+\mu+\nu+1) \Gamma(l+\mu+\nu+1) l!}, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

то, учитывая (3), найдем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(\alpha, \tau) v^2(l, \gamma, \alpha, \tau) d\tau &= \frac{\Gamma^2(l+\gamma+2\alpha+1)}{2^{2\alpha} \Gamma^2(l+\gamma+\alpha+1)} \int_{-1}^1 p(\alpha, \tau) (P_l^{(\alpha, \alpha)}(\tau))^2 d\tau = \\ &= \frac{\Gamma^2(l+\gamma+2\alpha+1) 2^{2\alpha+1} \Gamma^2(l+\alpha+1)}{2^{2\alpha} \Gamma^2(l+\gamma+\alpha+1) 2(l+\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma(l+2\alpha+1) l!} = \\ &= \frac{\Gamma^2(l+\gamma+2\alpha+1) \Gamma^2(l+\alpha+1)}{(l+\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma^2(l+\gamma+\alpha+1) \Gamma(l+2\alpha+1) l!}, \quad l \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 следует, в частности, что справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(-\frac{1}{2}, \tau) v^2(l+1, 0, -\frac{1}{2}, \tau) d\tau &= \frac{1}{(l+1)^2}, \\ \int_{-1}^1 p(0, \tau) v^2(l, \frac{1}{2}, 0, \tau) d\tau &= \frac{1}{l+\frac{1}{2}}, \\ \int_{-1}^1 p(\frac{1}{2}, \tau) v^2(l, 0, \frac{1}{2}, \tau) d\tau &= 1, \quad l \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Для дальнейшего изложения нам понадобятся еще 2 леммы. Доказательство первой из них имеется, например, в [11], второй – в [12].

**Лемма 2.** Пусть  $A$  и  $B$  – линейные операторы, действующие из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Z$ . Предположим, что оператор  $A$  обратим и выполнено условие  $\|B\|_{X \rightarrow Z} \|A^{-1}\|_{Z \rightarrow X} < 1$ . Тогда оператор  $A+B: X \rightarrow Z$  также обратим, и справедлива оценка

$$\|(A+B)^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \leq \frac{\|A^{-1}\|_{Z \rightarrow X}}{1 - \|B\|_{X \rightarrow Z} \|A^{-1}\|_{Z \rightarrow X}}.$$

Вновь обозначим  $X$  и  $Z$  банаховы пространства и пусть  $X_n \subset X$ ,  $Z_n \subset Z$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , их подпространства. Рассмотрим уравнения

$$Kx = z, \quad K: X \rightarrow Z, \quad (4)$$

$$K_n x_n = z_n, \quad K_n: X_n \rightarrow Z_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где  $K$  и  $K_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , линейные ограниченные операторы.

**Лемма 3.** Предположим, что оператор  $K: X \rightarrow Z$  обратим, и операторы  $K_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , равномерно сходятся к нему

$$\|K - K_n\|_{X_n \rightarrow Z} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Если  $\dim X_n = \dim Z_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то для всех  $n$ , удовлетворяющих условию

$$u_n = \|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \|K - K_n\|_{X_n \rightarrow Z} < 1,$$

приближенные уравнения (5) имеют единственные решения  $x_n^* \in X_n$  для любых правых частей  $z_n \in Z_n$ , и верна оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \frac{\|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X}}{1 - u_n} (\|z - z_n\|_Z + u_n \|z\|_Z),$$

где  $x^* = K^{-1}z$  – точное решение уравнения (4).

## 4. ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

Зафиксируем  $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \alpha$ ,  $0 \leq s$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ , и обозначим  $H_{\alpha, \gamma}^s$  пространство Соболева функций являющееся замыканием множества полиномов  $v(l, \gamma, \alpha, \tau)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $\tau \in [-1, 1]$ , относительно нормы

$$\|x\|_{H_{\alpha, \gamma}^s} = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{x}^2(l, \gamma, \alpha) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad x \in H_{\alpha, \gamma}^s, \quad l = \begin{cases} l, & l \in \mathbb{N}, \\ 1, & l = 0, \end{cases} \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad (6)$$

$$\hat{x}(l, \gamma, \alpha) = h(l, \gamma, \alpha) \int_{-1}^1 p(\alpha, \tau) x(\tau) v(l, \gamma, \alpha, \tau) d\tau,$$

$$h(l, \gamma, \alpha) = \frac{\Gamma(l + \gamma + \alpha + 1) \sqrt{(l + \alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(l + 2\alpha + 1) l!}}{\Gamma(l + \gamma + 2\alpha + 1) \Gamma(l + \alpha + 1)}, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

$$x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \hat{x}(l, \gamma, \alpha) h(l, \gamma, \alpha) v(l, \gamma, \alpha, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Пространство  $H_{\alpha, \gamma}^s$  является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle_{\alpha, \gamma}^s = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{x}(l, \gamma, \alpha) \hat{y}(l, \gamma, \alpha), \quad x, y \in H_{\alpha, \gamma}^s,$$

которое связано с нормой (6) равенством

$$\|x\|_{H_{\alpha, \gamma}^s} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\alpha, \gamma}^s}, \quad x \in H_{\alpha, \gamma}^s.$$

Параметр  $s$  является параметром гладкости функций входящих в пространство  $H_{\alpha, \gamma}^s$ . Как показано в [13], при  $s > \frac{1}{2}$  пространство  $H_{\alpha, \gamma}^s$  вкладывается в пространство непрерывных функций, при  $s > \frac{3}{2}$  — в пространство функций, первая производная которых непрерывна и так далее.

## 5. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Вновь зафиксируем  $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \alpha$ ,  $0 \leq s$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ , и обозначим

$$w(l, \gamma, -\alpha, \tau) = p(\alpha, \tau) v(l, \gamma, \alpha, \tau), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad \tau \in [-1, 1], \quad (7)$$

множество функций являющихся произведениями весовой функции  $p(\alpha, \tau)$  и полиномов  $v(l, \gamma, \alpha, \tau)$ . Легко видеть, что функции (7) ортогональны на  $[-1, 1]$  с весом  $p(-\alpha, t)$ , причем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(-\alpha, \tau) w^2(l, \gamma, -\alpha, \tau) d\tau &= \int_{-1}^1 p(\alpha, \tau) v^2(l, \gamma, \alpha, \tau) d\tau = \\ &= \frac{\Gamma^2(l + \gamma + 2\alpha + 1) \Gamma^2(l + \alpha + 1)}{(l + \alpha + \frac{1}{2}) \Gamma^2(l + \gamma + \alpha + 1) \Gamma(l + 2\alpha + 1) l!}, \quad l \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Обозначим через  $H_{-\alpha, \gamma}^{s*}$  замыкание множества функций (7) относительно нормы

$$\|y\|_{H_{-\alpha, \gamma}^{s*}} = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{y}^2(l, \gamma, -\alpha) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad y \in H_{-\alpha, \gamma}^{s*}, \quad (8)$$

$$\hat{y}(l, \gamma, -\alpha) = h(l, \gamma, \alpha) \int_{-1}^1 p(-\alpha, \tau) y(\tau) w(l, \gamma, -\alpha, \tau) d\tau, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

$$y(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \hat{y}(l, \gamma, -\alpha) h(l, \gamma, \alpha) w(l, \gamma, -\alpha, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Пространство  $H_{-\alpha, \gamma}^{s*}$  является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle_{-\alpha, \gamma}^s = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{x}(l, \gamma, -\alpha) \hat{y}(l, \gamma, -\alpha), \quad x, y \in H_{-\alpha, \gamma}^{s*},$$

которое связано с нормой (8) равенством

$$\|y\|_{H_{-\alpha,\gamma}^{s*}} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{-\alpha,\gamma}^{s*}}, \quad x \in H_{-\alpha,\gamma}^{s*}.$$

Для любых  $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \alpha$ ,  $0 \leq s$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ , скалярное произведение

$$(x, y)_{\alpha,\gamma}^s = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \widehat{x}(l, \gamma, \alpha) \widehat{y}(l, \gamma, -\alpha), \quad x \in H_{\alpha,\gamma}^s, \quad y \in H_{-\alpha,\gamma}^{s*},$$

задает сопряжение между пространствами  $H_{\alpha,\gamma}^s$  и  $H_{-\alpha,\gamma}^{s*}$ . Легко видеть, что для любых  $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \alpha$ ,  $0 \leq s$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ , выполняются соотношения  $H_{\alpha,\gamma}^{s**} = H_{\alpha,\gamma}^s$ , а при  $\alpha = 0$  пространства  $H_{0,\gamma}^s$  являются самосопряженными для любых  $0 \leq s$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ .

## 6. СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ КОШИ

Обозначим через  $S$  оператор, который каждой функции  $y \in H_{-\alpha,\gamma}^{s*}$ ,  $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \alpha$ ,  $0 \leq s$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ , ставит в соответствие сингулярный интеграл

$$(Sy)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad t \in (-1, 1), \quad (9)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши-Лебегу. В [14] показано, что для любых  $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \alpha$ ,  $0 \leq s$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ , оператор  $S$  ограничен в паре пространств  $(H_{-\alpha,\gamma}^{s*}, H_{\alpha,\gamma}^s)$ , однако вычисление сингулярного интеграла в явном виде возможно лишь в редких частных случаях. В этой связи разработано большое число квадратурных формул для приближенного вычисления таких интегралов. Эти формулы основаны на аппроксимации тем или иным способом подынтегрального выражения агрегатами допускающими точное вычисление сингулярных интегралов. Однако и здесь арсенал средств ограничен, по существу, хорошо известными формулами

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(-\frac{1}{2}, \tau) T_{l+1}(\tau) d\tau}{\tau - t} = U_l(t), \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\frac{1}{2}, \tau) U_l(\tau) d\tau}{\tau - t} = -T_{l+1}(t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in (-1, 1),$$

для сингулярных интегралов от полиномов Чебышёва первого и второго рода, которые в терминах пар пространств  $(H_{\frac{1}{2},0}^{s*}, H_{\frac{1}{2},0}^s)$  и  $(H_{-\frac{1}{2},0}^{s*}, H_{-\frac{1}{2},0}^s)$  будут выглядеть

$$Sw(l+1, 0, \frac{1}{2}, t) = (l+1)^{-1} v(l, 0, \frac{1}{2}, t), \quad Sw(l, 0, -\frac{1}{2}, t) = -(l+1) v(l+1, 0, -\frac{1}{2}, t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in (-1, 1). \quad (10)$$

В этом разделе показано, что такими значениями являются значения  $\alpha = m - \frac{1}{2}$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ . При  $m = 0$  и  $m = 1$  значения сингулярных интегралов от функций  $w(l, 0, m - \frac{1}{2}, t)$  указаны в (10). Следующая лемма показывает, что и для  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$  сингулярные интегралы от функций  $w(l, m - \frac{1}{2}, t)$  также являются полиномами.

**Лемма 4.** Для любых  $m, l \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \geq 2$  сингулярные интегралы  $Sw(l, 0, -m + \frac{1}{2}, t)$  равны полиномам, которые выражаются через полиномы  $v(j, 0, -\frac{1}{2}, t)$  по формулам

$$Sw(l, -m + \frac{1}{2}, t) = - \sum_{j=l+1}^{l+2m-1} d_{j-1} j v(j, 0, -\frac{1}{2}, t),$$

$$d_j = \int_{-1}^1 p(m - \frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, m - \frac{1}{2}, \tau) v(j, 0, \frac{1}{2}, \tau) d\tau, \quad j = l, l+1, \dots, l+2m-2.$$

**Доказательство.** Зафиксируем  $m, l \in \mathbb{N}_0$ ,  $m \geq 2$ , и представим функцию  $w(l, 0, -m + \frac{1}{2}, t)$  в виде разложения

$$\begin{aligned} w(l, 0, -m + \frac{1}{2}, t) &= p(m - \frac{1}{2}, t) v(l, 0, m - \frac{1}{2}, t) = p(\frac{1}{2}, t) p(m-1, t) v(l, 0, m - \frac{1}{2}, t) = \\ &= p(\frac{1}{2}, t) \sum_{j=l}^{l+2m-2} d_j v(j, 0, \frac{1}{2}, t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$d_j = \int_{-1}^1 p(m - \frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, m - \frac{1}{2}, \tau) v(j, 0, \frac{1}{2}, \tau) d\tau, \quad j = l, l+1, \dots, l+2m-2,$$

теперь, подставляя разложение (11) в сингулярный интеграл и используя (10), получим

$$Sw(l, 0, -m + \frac{1}{2}, t) = \sum_{j=l}^{l+2m-2} d_j Sw(j, 0, -\frac{1}{2}, t) = - \sum_{j=l+1}^{l+2m-1} d_{j-1} j v(j, 0, -\frac{1}{2}, t).$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 4 лишь констатирует тот факт, что сингулярным интегралом от функции  $w(l, 0, -m + \frac{1}{2}, t)$  является полином. Вычислить коэффициенты этого полинома в разложении (11) помогают следующая

**Лемма 5.** *Первообразная порядка  $m \in \mathbb{N}$  полинома  $v(l, 0, -\frac{1}{2}, t)$  равна*

$$\frac{2^{-m}}{\prod_{j=-m+1}^{m-1} (l-j)} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m-1, l) v(l+m-2k, 0, -\frac{1}{2}, t), \quad (12)$$

где  $u(k, m-1, l)$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , — это полиномы с целочисленными коэффициентами порядка  $m-1$ , зависящие от переменной  $l \in \mathbb{N}$  и определяемые рекуррентным соотношением

$$u(0, 0, l) = u(1, 0, l) = 1, \\ u(k, m, l) = \frac{l^2 - m^2}{m+1} \left( \frac{m-k+1}{l+m-2k} u(k, m-1, l) + \frac{k}{l+m-2k+2} u(k-1, m-1, l) \right), \\ m \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

**Доказательство.** Доказательство проведем методом математической индукции по  $m$ .

При  $m = 1$ , переходя к полиномам Чебышёва первого и второго родов, легко получить выражение

$$v(l, 0, -\frac{1}{2}, t) = \frac{1}{2l} (v(l, 0, \frac{1}{2}, t) - v(l-2, 0, \frac{1}{2}, t)). \quad (13)$$

В [15] есть соотношение, которое в терминах данной статьи выглядит как

$$D^k w(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = (-1)^k \frac{(l+k)!(2m+l+1)!}{l!(2m+l+1-k)!} w(l+k, 0, -m - \frac{1}{2} + k, t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (14)$$

Используя его, получаем, что первообразными для полиномов  $v(l, 0, -\frac{1}{2}, t)$  являются полиномы

$$\frac{1}{2l} (v(l+1, 0, -\frac{1}{2}, t) - v(l-1, 0, -\frac{1}{2}, t)) = \frac{1}{2l} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} u(k, 0, l) v(l+1-2k, 0, -\frac{1}{2}, t), \quad l \in \mathbb{N},$$

что соответствует формуле (12) при  $m = 1$ . То есть при  $m = 1$  лемма 5 верна.

Предположим, что лемма 5 верна для некоторого  $m \in \mathbb{N}$ , и докажем, что тогда она верна и для  $m+1$ . Для этого выразим в формуле (12) полиномы  $v(l+m-2k, 0, -\frac{1}{2}, t)$  по формуле (13)

$$v(l+m-2k, 0, -\frac{1}{2}, t) = \frac{1}{2(l+m-2k)} (v(l+m-2k, 0, \frac{1}{2}, t) - v(l+m-2k-2, 0, \frac{1}{2}, t)).$$

Тогда первообразная для  $v(l+m-2k, 0, -\frac{1}{2}, t)$  будет равна

$$\frac{1}{2(l+m-2k)} (v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t) - v(l+m-2k-1, 0, -\frac{1}{2}, t)),$$

а  $m+1$ -я первообразная для полинома  $v(l, 0, -\frac{1}{2}, t)$  будет равна

$$\frac{2^{-m}}{\prod_{j=-m+1}^{m-1} (l-j)} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m-1, l) \frac{1}{2(l+m-2k)} (v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t) -$$

$$\begin{aligned}
& -v(l+m-2k-1, 0, -\frac{1}{2}, t)) = \\
& = \frac{2^{-m-1}}{\prod_{j=-m+1}^{m-1} (l-j)} \left( \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m-1, l) \frac{v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l+m-2k} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m-1, l) \frac{v(l+m-2k-1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l+m-2k} \right) = \\
& = \frac{2^{-m-1}}{\prod_{j=-m+1}^{m-1} (l-j)} \left( \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m-1, l) \frac{v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l+m-2k} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m}{k-1} u(k-1, m-1, l) \frac{v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l+m-2k+2} \right) = \\
& = \frac{2^{-m-1}}{\prod_{j=-m+1}^{m-1} (l-j)} \left( u(0, m-1, l) \frac{v(l+m+1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l+m} - \right. \\
& \quad \left. - (-1)^m u(m, m-1, l) \frac{v(l-m-1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l-m} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^m v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t) \left( (-1)^k \binom{m}{k} \frac{u(k, m-1, l)}{l+m-2k} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (-1)^k \binom{m}{k-1} \frac{u(k-1, m-1, l)}{l+m-2k+2} \right) \right) = \\
& = \frac{2^{-m-1}}{\prod_{j=-m}^m (l-j)} \left( u(0, m, l) v(l+m+1, 0, -\frac{1}{2}, t) - (-1)^m u(m, m, l) v(l-m-1, 0, -\frac{1}{2}, t) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m+1}{k} \frac{l^2 - m^2}{m+1} \left( \frac{m-k+1}{l+m-2k} u(k, m-1, l) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{k}{l+m-2k+2} u(k-1, m-1, l) \right) v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t) \right) = \\
& = \frac{2^{-m-1}}{\prod_{j=-m}^m (l-j)} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} u(k, m, l) v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t).
\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

**Теорема 1.** Для любых  $m, l \in \mathbb{N}$  сингулярный интеграл с ядром Коши от функции  $w(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t)$ ,  $t \in [-1, 1]$ , равен

$$\begin{aligned}
& Sw(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = 2^{-m} (l+1)(l+2m+1) \times \\
& \times \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k+1} \binom{m}{k} u(k, m-1, l+m+1) v(2m+l+1-2k, 0, -\frac{1}{2}, t).
\end{aligned}$$

**Доказательство.** Зафиксируем  $m, l \in \mathbb{N}_0$  и найдем вначале производную порядка  $m$  от искомого интеграла. Применяя  $m$  раз представление Крикунова [16] и учитывая, что функции  $w(l, -0, j - \frac{1}{2}, t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , обращаются в ноль на концах отрезка  $[-1, 1]$ , получим

$$D^m Sw(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = SD^m w(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t), \quad t \in [-1, 1].$$

По формуле (14)

$$D^m w(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = (-1)^m \frac{(2m + l + 1)!}{l!(m + l + 1)!} w(l + m, 0, -\frac{1}{2}, t),$$

а значение

$$Sw(l + m, 0, -\frac{1}{2}, t) = -(l + m + 1)v(l + m + 1, 0, -\frac{1}{2}, t)$$

указано в (10), поэтому

$$D^m Sw(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = (-1)^{m+1} \frac{(2m + l + 1)!}{l!} v(l + m + 1, 0, -\frac{1}{2}, t).$$

По лемме 5 первообразной порядка  $m$  для полинома  $v(l + m + 1, 0, -\frac{1}{2}, t)$  является полином

$$\frac{2^{-m}}{\prod_{j=2}^{2m} (l + j)} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m - 1, l + m + 1) v(2m + l + 1 - 2k, 0, -\frac{1}{2}, t),$$

поэтому

$$Sw(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = 2^{-m} (l + 1)(l + 2m + 1) \times \\ \times \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k+1} \binom{m}{k} u(k, m - 1, l + m + 1) v(2m + l + 1 - 2k, 0, -\frac{1}{2}, t).$$

Теорема доказана.

## 7. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$x^{(\frac{3}{2})}(t) + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\frac{1}{2}, \tau) x^{(\frac{1}{2})}(\tau) d\tau}{\tau - t} = z(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \in (-1, 1), \quad (15)$$

с начальными условиями

$$\int_{-1}^1 x(\tau) d\tau = 0. \quad (16)$$

В статьях [6], [7] были предложены приближенные методы решения подобных уравнений с целочисленными производными. В работах автора [8], [9] получены достаточные условия однозначной разрешимости этих уравнений и обоснованы использованные в [6], [7], приближенные методы. В работе [17] автором обоснованы методы Галеркина и коллокаций для решения полных сингулярных интегродифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на  $(-1, 1)$ . Сингулярные интегродифференциальные уравнения с производными дробного порядка рассматриваются в данной статье впервые.

Зафиксируем  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s > \frac{1}{2}$ , и обозначим  $X$  замыкание множества полиномов  $v(l + 1, \frac{1}{2}, 0, \tau)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $\tau \in [-1, 1]$ , относительно нормы

$$\|x\|_X = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{x}^2(l + 1, \frac{1}{2}, 0) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad x \in X,$$

$$\hat{x}(l + 1, \frac{1}{2}, 0) = h(l, 0, \frac{3}{2}) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) x^{(\frac{3}{2})}(\tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

$$x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Обозначим  $Z$  замыкание множества полиномов  $v(l, 0, \frac{3}{2}, t)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $\tau \in [-1, 1]$ , относительно нормы

$$\|z\|_Z = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \widehat{z}^2(l, 0, \frac{3}{2}) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad z \in Z,$$

$$\widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) = h(l, 0, \frac{3}{2}) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) z(\tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

$$z(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Задачу (15), (16) запишем в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$Kx \equiv D^{\frac{3}{2}}x + \lambda SpD^{\frac{1}{2}}x = z, \quad K : X \rightarrow Z, \quad (17)$$

$$(SpD^{\frac{1}{2}}x)(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{p(\frac{1}{2}, \tau) x(\frac{1}{2})(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad t \in (-1, 1).$$

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (15), (16) устанавливает

**Теорема 2.** Для всех  $|\lambda| < 2$  операторное уравнение (17), а следовательно и задача (15), (16) однозначно разрешимы при любой правой части  $z \in Z$ , и верна оценка

$$\|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \leq \frac{2}{2 - |\lambda|}.$$

**Доказательство.** Докажем вначале, что оператор  $D^{\frac{3}{2}} : X \rightarrow Z$  и обратный к нему оператор  $D^{-\frac{3}{2}} : Z \rightarrow X$  являются взаимнооднозначными и их нормы равны

$$\|D^{\frac{3}{2}}\|_{X \rightarrow Z} = \|D^{-\frac{3}{2}}\|_{Z \rightarrow X} = 1.$$

Для этого рассмотрим уравнение

$$D^{\frac{3}{2}}x = z, \quad x \in X, \quad z \in Z, \quad (18)$$

$$x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad z(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

с известными коэффициентами  $\widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2})$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ , и искомыми коэффициентами  $\widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ . Уравнение (18) эквивалентно бесконечной системе уравнений

$$\widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) = \widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2}), \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

а его решением будет функция

$$x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Найдем норму функции  $D^{\frac{3}{2}}x$  в пространстве  $Z$ . Так как

$$(D^{\frac{3}{2}}x)(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

то

$$\|D^{\frac{3}{2}}x\|_Z = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \widehat{x}^2(l+1, \frac{1}{2}, 0) \right\}^{\frac{1}{2}} = \|x\|_X.$$

Это означает, что оператор  $D^{\frac{3}{2}}$  взаимнооднозначен и его норма равна 1.

Рассмотрим теперь уравнение

$$D^{-\frac{3}{2}}z = x, \quad z \in Z, \quad x \in X, \quad (19)$$

$$z(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

с известными коэффициентами  $\widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ , и искомыми коэффициентами  $\widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2})$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ . Уравнение (18) эквивалентно бесконечной системе уравнений

$$\widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) = \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0), \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

а его решением будет функция

$$z(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Найдем норму функции  $D^{-\frac{3}{2}}z$  в пространстве  $X$ . Так как

$$(D^{-\frac{3}{2}}z)(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

то

$$\|D^{-\frac{3}{2}}z\|_X = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \widehat{z}^2(l, 0, \frac{3}{2}) \right\}^{\frac{1}{2}} = \|z\|_Z.$$

Это означает, что оператор  $D^{-\frac{3}{2}}$  также взаимнооднозначен и его норма равна 1. Равенство

$$\|D^{\frac{3}{2}}\|_{X \rightarrow Z} = \|D^{-\frac{3}{2}}\|_{Z \rightarrow X} = 1$$

доказано.

Теперь для доказательства обратимости оператора  $K : X \rightarrow Z$  по лемме 2 достаточно оценить норму оператора  $SpD^{\frac{1}{2}} : X \rightarrow Z$ . Для этого вновь возьмем произвольный элемент

$$x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

применим к нему оператор  $SpD^{\frac{1}{2}}$  и оценим норму функции  $SpD^{\frac{1}{2}}x$  в пространстве  $Z$

$$\|SpD^{\frac{1}{2}}x\|_Z = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \widehat{SpD^{\frac{1}{2}}x}^2(l, 0, \frac{3}{2}) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$(D^{\frac{1}{2}}x)(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, 0, \frac{1}{2}, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

а

$$p(\frac{1}{2}, \tau)(D^{\frac{1}{2}}x)(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) w(l+1, 0, -\frac{1}{2}, \tau),$$

то по теореме 1 имеем

$$(SpD^{\frac{1}{2}}x)(t) = - \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) (l+2) v(l+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau).$$

Коэффициенты Фурье функции  $(SpD^{\frac{1}{2}}x)(t)$  в пространстве  $Z$  будут равны

$$\widehat{SpD^{\frac{1}{2}}x}(l, 0, \frac{3}{2}) = h(l, 0, \frac{3}{2}) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) (SpD^{\frac{1}{2}}x)(\tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau =$$

$$= -h(l, 0, \frac{3}{2}) \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(k+1, \frac{1}{2}, 0) h(k, 0, \frac{3}{2}) (k+2) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(k+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

В силу ортогональности полиномов  $v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau)$  с весом  $p(\frac{3}{2}, \tau)$  всем полиномам порядка меньше  $l$  и ортогональности полиномов  $v(k+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau)$  с весом  $p(-\frac{1}{2}, \tau)$  всем полиномам порядка меньше  $k+2$  интеграл

$$\int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(k+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau = 0$$

при  $k+2 < l$  и  $l+4 < k+2$ . Однако и среди значений  $k+2 = l, l+1, l+2, l+3, l+4$  этот интеграл отличен от нуля только при  $k+2 = l+1$  и при  $k+2 = l+3$  и равен

$$\int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(k+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau = \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(l+1, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau = -\frac{1}{2}, \quad k+2 = l+1,$$

$$\int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(k+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau = \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(l+3, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau = \frac{l}{4(l+3)}, \quad k+2 = l+3.$$

Учитывая, что  $\widehat{x}(0, \frac{1}{2}, 0) = 0$ , найдем

$$\begin{aligned} \widehat{SpD^{\frac{1}{2}}}(0, 0, \frac{3}{2}) &= 0, \\ \widehat{SpD^{\frac{1}{2}}}x(l, 0, \frac{3}{2}) &= h(l, 0, \frac{3}{2}) \left( \frac{l+1}{2} \widehat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) h(l-1, 0, \frac{3}{2}) - \frac{l}{4} \widehat{x}(l+2, \frac{1}{2}, 0) h(l+1, 0, \frac{3}{2}) \right) = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{(l+1)(l+2)(l+3)}} \left( 2\widehat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) \frac{l+1}{\sqrt{l}} - \widehat{x}(l+2, \frac{1}{2}, 0) \frac{l}{\sqrt{l+4}} \right), \quad l \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то есть

$$(SpD^{\frac{1}{2}}x)(t) = \frac{1}{4} \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{(l+1)(l+2)(l+3)}} (2\widehat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) \frac{l+1}{\sqrt{l}} - \widehat{x}(l+2, \frac{1}{2}, 0) \frac{l}{\sqrt{l+4}}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, t).$$

Это позволяет получить оценку

$$\|SpD^{\frac{1}{2}}x\|_Z^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}} l^{2s} \left( \frac{1}{4\sqrt{(l+1)(l+2)(l+3)}} \left( 2\widehat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) \frac{l+1}{\sqrt{l}} - \widehat{x}(l+2, \frac{1}{2}, 0) \frac{l}{\sqrt{l+4}} \right) \right)^2 \leq \frac{1}{4} \|x\|_X^2,$$

и, окончательно,

$$\|SpD^{\frac{1}{2}}\|_{X \rightarrow Z} \leq \frac{1}{2}.$$

При  $|\lambda| < 2$  будет верна оценка  $\|\lambda SpD^{\frac{1}{2}}\|_{X \rightarrow Z} < 1$ , и, так как

$$\|\lambda SpD^{\frac{1}{2}}\|_{X \rightarrow Z} \|D^{-\frac{3}{2}}\|_{Z \rightarrow X} < 1,$$

то по лемме 2 оператор  $K : X \rightarrow Z$  будет обратим с оценкой нормы обратного оператора

$$\|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \leq \frac{2}{2 - |\lambda|}.$$

Теорема 2 доказана полностью.

Теорема 2 устанавливает лишь достаточные условия разрешимости задачи (15), (16). На самом деле класс однозначно разрешимых задач этого вида значительно шире. Однако эта теорема необходима, чтобы предположение об обратимости оператора  $K$  в следующей теореме не было пустым.

## 8. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}$  и обозначим  $Q_n$

$$(Q_n z)(\tau) = \sum_{l=0}^{n-1} \hat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad z \in Z, \quad \tau \in [-1, 1],$$

отрезок ряда Фурье функции  $z \in Z$  по системе полиномов  $v(l, 0, \frac{3}{2}, t)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $t \in [-1, 1]$ , а  $E_n(z)_Z$  — наилучшее приближение этой функции полиномами порядка не выше  $n - 1$  по норме пространства  $Z$ . Известно, что наилучшее приближение этой функции в гильбертовом пространстве доставляет отрезок ее ряда Фурье, поэтому

$$E_n(z)_Z = \|z - Q_n z\|_Z, \quad z \in Z.$$

Приближенное решение задачи (15), (16) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{l=1}^n \hat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) h(l-1, 0, \frac{3}{2}) v(l, \frac{1}{2}, 0, t), \quad t \in [-1, 1],$$

неизвестные коэффициенты  $\{\hat{x}(l, \frac{1}{2}, 0)\}_{l=1}^n$  которого найдем из системы линейных алгебраических уравнений метода Галеркина

$$\hat{x}(1, \frac{1}{2}, 0) = \hat{z}(0, 0, \frac{3}{2}), \quad (20)$$

$$\hat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) + \lambda \left( \frac{l+1}{2\sqrt{l(l+2)}} \hat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) - \frac{l}{4\sqrt{(l+2)(l+4)}} \hat{x}(l+2, \frac{1}{2}, 0) \right) = \hat{z}(l, 0, \frac{3}{2}), \quad l = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$\hat{x}(n, \frac{1}{2}, 0) + \frac{\lambda n}{2\sqrt{(n-1)(n+1)}} \hat{x}(n-1, \frac{1}{2}, 0) = \hat{z}(n-1, 0, \frac{3}{2}).$$

**Теорема 3.** Пусть оператор  $K : X \rightarrow Z$  задачи (15), (16) обратим и обратный оператор  $K^{-1}$  ограничен. Тогда для всех  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , система уравнений (20) имеет единственное решение  $\{\hat{x}^*(l, \frac{1}{2}, 0)\}_{l=1}^n$ , и приближенные решения

$$x_n^*(t) = \sum_{l=1}^n \hat{x}^*(l, 0, -\frac{1}{2}) h(l-1, 0, \frac{3}{2}) v(l, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad t \in [-1, 1],$$

сходятся к точному решению  $x^*$  задачи (15), (16) по норме пространства  $X$  со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X} E_n(z)_Z.$$

**Доказательство.** Зафиксируем  $n \in \mathbb{N}_0$  и обозначим  $X_n$  замыкание множества полиномов  $v(l, \frac{1}{2}, 0, \tau)$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$ ,  $\tau \in [-1, 1]$ , относительно нормы

$$\|x_n\|_{X_n} = \left\{ \sum_{l=1}^n l^{2s} \hat{x}^2(l+1, \frac{1}{2}, 0) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad x_n \in X_n,$$

$$\hat{x}_n(l, \frac{1}{2}, 0) = h(l-1, 0, \frac{3}{2}) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) x^{(\frac{3}{2})}(\tau) v(l-1, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau, \quad l = 1, \dots, n,$$

$$x_n(\tau) = \sum_{l=1}^n \hat{x}_n(l, \frac{1}{2}, 0) h(l-1, 0, \frac{3}{2}) v(l, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Пространство  $X_n$  является подпространством пространства  $X$ . Обозначим, кроме того,  $Z_n$  замыкание множества полиномов  $v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau)$ ,  $l = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $\tau \in [-1, 1]$ , относительно нормы

$$\|z_n\|_{Z_n} = \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} l^{2s} \hat{z}^2(l, 0, \frac{3}{2}) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad z_n \in Z_n,$$

$$\hat{z}_n(l, 0, \frac{3}{2}) = h(l, 0, \frac{3}{2}) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) z_n(\tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau, \quad l = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$z_n(\tau) = \sum_{l=0}^{n-1} \hat{z}_n(l, \frac{3}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Пространство  $Z_n$  является подпространством пространства  $Z$ .

Теперь систему уравнений (20) можно записать в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$K_n x_n = z_n, \quad K_n : X_n \rightarrow Z_n, \quad K_n = Q_n K, \quad z_n = Q_n z. \quad (21)$$

Так как для любых  $x_n \in X_n$   $K x_n = K_n x_n$ , то по лемме 3 операторное уравнение (21), а, следовательно и эквивалентная ей система уравнений (20) имеет единственное решение  $\{\hat{x}_n^*(l, \frac{1}{2}, 0)\}_{l=1}^n$  при любой правой части  $z_n \in Z_n$ , и приближенные решения

$$x_n(\tau) = \sum_{l=1}^n \hat{x}_n(l, \frac{1}{2}, 0) h(l-1, 0, \frac{3}{2}) v(l, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

сходятся к точному решению  $x^*$  задачи (15), (16) с оценкой

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X} E_n(z)_Z.$$

Теорема 3 доказана.

## 9. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим уравнение

$$x^{(\frac{3}{2})}(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\frac{1}{2}, \tau) x^{(\frac{1}{2})}(\tau) d\tau}{\tau - t} = z(t), \quad t \in (-1, 1), \quad (22)$$

с начальным условием

$$\int_{-1}^1 x(\tau) d\tau = 0, \quad (23)$$

и правой частью

$$z(t) = -\frac{2}{25} v(4, 0, \frac{3}{2}, t) - \frac{1}{8} v(3, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{7}{150} v(2, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{59}{48} v(1, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{21}{5} v(0, 0, \frac{3}{2}, t).$$

Точным решением задачи (22), (23) является функция

$$x(t) = t^3 + t^2 + 2t - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} v(3, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{3} v(2, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{13}{5} v(1, \frac{1}{2}, 0, t).$$

Легко проверить, что она удовлетворяет условию (23).

Приближенное решение задачи (22), (23) будем искать вначале в виде полинома

$$x_1(t) = a_1^1 v(1, \frac{1}{2}, 0, t)$$

с искомыми коэффициентами  $a_1^1$ . Подставляя  $x_1$  в левую часть уравнения (22), получим

$$(D^{\frac{3}{2}} x_1)(t) + (Sp D^{\frac{1}{2}} x_1)(t) = a_1^1 (\frac{5}{3} v(0, 0, \frac{3}{2}, t) - \frac{1}{6} v(2, 0, \frac{3}{2}, t)).$$

Теперь, приравнявая, следуя методу Галеркина, коэффициенты Фурье левой и правой частей уравнения (22) по полиному  $v(0, 0, \frac{3}{2}, t)$  получим решение

$$a_1^1 = \frac{63}{25}, \quad x_1(t) = \frac{63}{25} v(1, \frac{1}{2}, 0, t).$$

Так как

$$x(t) - x_1(t) = \frac{2}{5}v(3, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{3}v(2, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{25}v(1, \frac{1}{2}, 0, t),$$

то оценка погрешности приближенного решения равна

$$\|x - x_1\|_X \approx 2.48.$$

Наилучшее приближение  $E_1(z)_Z$  для  $z$  равно

$$E_1(z)_Z = \|z - Q_1 z\|_Z \approx 3.67.$$

Таким образом, для  $n = 1$  численный результат подтверждает оценку 3.

Возьмем теперь  $n = 2$ . Приближенное решение в этом случае будет равно

$$x_2(t) = a_1^2 v(1, \frac{1}{2}, 0, t) + a_2^2 v(2, \frac{1}{2}, 0, t)$$

с искомыми коэффициентами  $a_1^2, a_2^2$ . Подставляя  $x_2$  в левую часть уравнения (22), получим

$$(D^{\frac{3}{2}}x_2)(t) + (SpD^{\frac{1}{2}}x_2)(t) = a_1^2 \frac{5}{3}v(0, 0, \frac{3}{2}, t) + a_2^2 \frac{59}{32}v(1, 0, \frac{3}{2}, t) - a_1^2 \frac{1}{6}v(2, 0, \frac{3}{2}, t) - a_2^2 \frac{3}{16}v(3, 0, \frac{3}{2}, t).$$

Вновь приравнявая по методу Галеркина коэффициенты Фурье левой и правой части уравнения (22) по полиномам  $v(0, 0, \frac{3}{2}, t)$  и  $v(1, 0, \frac{3}{2}, t)$  получим решение

$$a_1^2 = \frac{63}{25}, \quad a_2^2 = \frac{2}{3}, \quad x_2(t) = \frac{63}{25}v(1, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{3}v(2, \frac{1}{2}, 0, t).$$

Так как

$$x(t) - x_2(t) = \frac{2}{5}v(3, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{25}v(1, \frac{1}{2}, 0, t),$$

то оценка погрешности для этого приближенного решения будет равна

$$\|x - x_2\|_X \approx 1.56.$$

Наилучшее приближение  $E_2(z)_Z$  для функции  $z$  равно

$$E_2(z)_Z = \|z - Q_2 z\|_Z \approx 1.174.$$

Таким образом, для  $n = 2$  численный результат также подтверждает оценку 3.

Теперь возьмем  $n = 3$ . Приближенное решение будет иметь вид

$$x_3(t) = a_1^3 v(1, \frac{1}{2}, 0, t) + a_2^3 v(2, \frac{1}{2}, 0, t) + a_3^3 v(3, \frac{1}{2}, 0, t)$$

с искомыми коэффициентами  $a_1^3, a_2^3, a_3^3$ . Подставляя  $x_3$  в левую часть уравнения (22), получаем

$$\begin{aligned} (D^{\frac{3}{2}}x_3)(t) + (SpD^{\frac{1}{2}}x_3)(t) = & v(0, 0, \frac{3}{2}, t)(a_1^3 \frac{5}{3} - a_3^3 \frac{1}{3}) + \\ & + v(1, 0, \frac{3}{2}, t)a_2^3 \frac{59}{32} + v(2, 0, \frac{3}{2}, t)(\frac{23}{15}a_3^3 - a_1^3 \frac{1}{6}) - \\ & - v(3, 0, \frac{3}{2}, t)a_2^3 \frac{3}{16} + v(4, 0, \frac{3}{2}, t)a_3^3 \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

По методу Галеркина получаем решение

$$a_1^3 = \frac{581}{225}, \quad a_2^3 = \frac{2}{3}, \quad a_3^3 = \frac{14}{45}, \quad x_3(t) = \frac{581}{225}v(1, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{2}{3}v(2, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{14}{45}v(3, 0, \frac{3}{2}, t).$$

Так как

$$x(t) - x_3(t) = \frac{4}{45}v(3, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{104}{225}v(1, 0, \frac{3}{2}, t),$$

то оценка погрешности для этого приближенного решения будет равна

$$\|x - x_3\|_X \approx 0.871.$$

Наилучшее приближение  $E_3(z)_Z$  для  $z$  равно

$$E_3(z)_Z = \|z - Q_3 z\|_Z \approx 1.161.$$

И вновь, при  $n = 3$  численное решение подтверждает теорему 3.

Возьмем наконец  $n = 4$ . Приближенное решение будет иметь вид

$$x_4(t) = a_1^4 v(1, \frac{1}{2}, 0, t) + a_2^4 v(2, \frac{1}{2}, 0, t) + a_3^4 v(3, \frac{1}{2}, 0, t) + a_4^4 v(4, \frac{1}{2}, 0, t)$$

с искомыми коэффициентами  $a_1^4, a_2^4, a_3^4, a_4^4$ . Подставляя  $x_3$  в левую часть уравнения (22), получим

$$\begin{aligned} (D^{\frac{3}{2}} x_3)(t) + (SpD^{\frac{1}{2}} x_3)(t) = & v(0, 0, \frac{3}{2}, t)(a_1^4 \frac{5}{3} - a_3^4 \frac{1}{3}) + \\ & + v(1, 0, \frac{3}{2}, t)(a_2^4 \frac{59}{32} - \frac{35}{32} a_4^4) + v(2, 0, \frac{3}{2}, t)(\frac{23}{15} a_3^4 - a_1^4 \frac{1}{6}) + \\ & + v(3, 0, \frac{3}{2}, t)(a_4^4 \frac{73}{48} - \frac{3}{16} a_2^4) - v(4, 0, \frac{3}{2}, t) a_3^4 \frac{1}{5} - v(5, 0, \frac{3}{2}, t) a_4^4 \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

В этом случае метод Галеркина дает точное решение задачи (22), (23)

$$\begin{aligned} a_1^4 = \frac{13}{5}, a_2^4 = \frac{2}{3}, a_3^4 = \frac{2}{5}, a_4^4 = 0, \\ x_4(t) = \frac{2}{5} v(3, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{3} v(2, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{13}{5} v(1, \frac{1}{2}, 0, t), \end{aligned}$$

поэтому и  $\|x - x_4\|_X$ , и  $E_4(z)_Z$  равны нулю, что означает, что теорема 3 подтверждается тривиально.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техн., 1987. 688 с.
2. Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababhehb M. A new definition of fractional derivative // J. of Comput. and Appl. Math. 2014. N 264. P. 65–70.
3. Ross B. The development of fractional calculus 1695–1900 // Historia math. 1977. N 4. P. 75–89.
4. Hilfer R., Luchko Yu. Disederata for fractional derivatives and integrals // Mathematics. 2019. 7. 149. <https://doi.org/10.3390/math7020149>
5. Федотов А.И. Обоснование квадратурно-разностного метода решения интегродифференциальных уравнений с производными переменного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 4. С. 564–579.
6. Badr A. A., Integro-Differential Equation with Cauchy Kernel // J. Comput. Appl. Math. No 134, 191 (2001).
7. Frankel J.I. A Galerkin solution to a regularized Cauchy singular integro-differential equation // Quart. Appl. Math. 1995. V. 53. No 2. P. 245–258.
8. Fedotov A.I. Justification of the Galerkin method for one class of singular integro-differential equations on an interval // Lobachevskii journal of mathematics. 2008. V. 29. No 2. P. 73–81.
9. Fedotov A.I. Justification of a Galerkin method for a regularized Cauchy singular integro-differential equation // Quart. Appl. Math. 2009. V. 67. No 3. P. 541–552.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Мир. 1985. 1100 с.
11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
12. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та 1980. 231 с.
13. Тейлор М., Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир. 1984. 472 с.

14. *Хведелидзе Б.В.* Линейные разрывные задачи теории функций и некоторые их приложения // Труды Тбилисского матем. инст. Академии наук Грузинской ССР. 1956. Т. 23. С. 3–158.
15. *Дайтов Р.З., Тимербаев М.Р.* Точные оценки аппроксимации полиномами в весовых пространствах Соболева // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 7. С. 886–894. <https://doi.org/10.1134/S0012266115070071>
16. *Крикунов Ю.М.* О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегродифференциального уравнения // Ученые записки КГУ. 1952. Т. 112. № 10. С. 191–199.
17. *Fedotov A.I.* Обоснование методов Галеркина и коллокаций для одного класса сингулярных интегродифференциальных уравнений на отрезке // Уфимский матем. журнал. 2012. Т. 13. № 4. С. 91–111.

## JUSTIFICATION OF THE GALERKIN METHOD FOR SOLVING SINGULAR INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

A. I. Fedotov\*

420111 Kazan, Karl Marx str., 10, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University, Russia

\*e-mail: [fedotovkazan@mail.ru](mailto:fedotovkazan@mail.ru)

Received: 18.05.2024

Revised: 19.05.2024

Accepted: 28.06.2024

**Abstract.** Currently, there are more than 30 different definitions of the fractional derivative, and their number continues to grow. Some of them are just “mind games”, but others are introduced to solve serious mathematical problems. In this paper, a new definition of the fractional order derivative is given, based on generalization of the Jacobi polynomial differentiation formula. This made it possible to introduce a scale of orthogonal polynomial systems whose closures are Sobolev spaces. The use of these derivatives made it possible to set the problem of solving singular integrodifferential equations with a Cauchy kernel on an open circuit. The existence and uniqueness of the solution of such equations is proved, and the Galerkin method for their approximate solution is substantiated. The convergence of the method is proved, and estimates of the error of approximate solutions are obtained.

**Keywords:** fractional order derivatives, singular integrodifferential equations, Galerkin method.

## РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РИЧАРДСОНА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ В СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

© 2024 г. Г. И. Шишкин<sup>1,\*</sup>, Л. П. Шишкина<sup>1</sup>

<sup>1</sup>620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, ИММ УрО РАН, Россия

\*e-mail: shishkin@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 16.06.2024 г.

Переработанный вариант 16.06.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Рассматривается задача Коши для регулярного уравнения переноса. Для этой задачи с использованием техники Ричардсона строится разностная схема повышенного порядка точности на трех вложенных сетках, сходящаяся в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости. Библ. 8.

**Ключевые слова:** уравнение переноса, задача Коши, стандартная разностная схема, равномерная сетка, невязка, разложение невязки, монотонность дифференциальной и сеточной задач, техника Ричардсона, разностная схема, повышенный порядок точности, сходимость в равномерной норме.

DOI: 10.31857/S0044466924100047, EDN: KANTUN

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время все большее внимание уделяется разработке численных методов для уравнений математической физики повышенного порядка точности. Отметим, что техника Ричардсона для улучшения скорости сходимости сеточных решений некоторых классов задач применялась, например, в работах Г. И. Марчука [1], Г. И. Марчука и В. В. Шайдурова [2], А. А. Самарского [3], П. В. Хемкера, Г. И. Шишкина и Л. П. Шишкиной [4], Г. И. Шишкина и Л. П. Шишкиной [5].

Для задачи Коши для уравнения переноса в работе Г. И. Шишкина и Л. П. Шишкиной [6] впервые построена улучшенная разностная схема Ричардсона на основе двух вложенных сеток, сходящаяся в равномерной норме со вторым порядком скорости сходимости. В настоящей работе, в отличие от работы [6], для задачи Коши для уравнения переноса строятся разложения обратных разностных производных и соответствующих невязок по степеням шагов основной, разреженных и дважды разреженных сеток соответственно. Такой подход позволяет разработать технику Ричардсона на трех вложенных сетках и построить разностную схему повышенного порядка точности, сходящуюся в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости.

**О содержании работы.** Постановка задачи Коши для уравнения переноса и цель исследования приводятся в разд. 2. Априорные оценки решения и производных устанавливаются в разд. 3. Стандартная разностная схема для задачи Коши для уравнения переноса рассматривается в разд. 4 и устанавливается ее сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости. В разд. 5, 6 и 7 разработана техника разложений обратных разностных производных по степеням шагов основной, разреженной и дважды разреженной сеток соответственно. С использованием этих разложений получены разложения для соответствующих невязок. В разд. 8 на основе разложений невязок сеточных решений строится разностная схема Ричардсона повышенного порядка точности, сходящаяся в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости. Выводы приводятся в разд. 9.

### 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА. ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

На полосе  $\overline{G}$

$$\overline{G} = G \cup S, \quad (2.1a)$$

где

$$G = D \times (0, T], \quad D = (-\infty < x < \infty); \quad (2.16)$$

$$S = \{(x, t) : -\infty < x < \infty, t = 0\},$$

рассмотрим задачу Коши для регулярного уравнения переноса

$$L u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G; \quad u(x, t) = \varphi(x), \quad (x, t) \in S. \quad (2.2)$$

Здесь

$$L = b(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + c(x, t) + p(x, t) \frac{\partial}{\partial t}, \quad (x, t) \in G, \quad (2.3a)$$

функции  $b(x, t)$ ,  $c(x, t)$ ,  $p(x, t)$ ,  $f(x, t)$  предполагаются достаточно гладкими на  $\overline{G}$ , функция  $\varphi(x)$  предполагается достаточно гладкой на множестве  $S$ , причем,<sup>1</sup>

$$b_0 \leq b(x, t) \leq b^0, \quad 0 \leq c(x, t) \leq c^0, \quad p_0 \leq p(x, t) \leq p^0, \quad (2.3б)$$

$$|f(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in \overline{G};$$

$$|\varphi(x)| \leq M, \quad x \in D; \quad b_0, p_0 > 0. \quad (2.3в)$$

**Наша цель** — для задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) построить разностную схему, сходящуюся в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости.

### 3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ И ПРОИЗВОДНЫХ

В этом разделе рассмотрим ряд априорных оценок решения задачи (2.2), (2.1), необходимых при построении разностных схем и обосновании их сходимости. В разд. 5, 6 и 7 нам потребуется ограниченность производных  $\partial^k / \partial x^k u(x, t)$ ,  $\partial^k / \partial t^k u(x, t)$ ,  $(x, t) \in \overline{G}$ , для  $k \leq K$ ,  $K = 4$ . Вывод оценок подобен выводу оценок решения и производных регулярных и сингулярных компонент решения сингулярно возмущенного уравнения переноса в [7].

**3.1.** Для задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) справедлив *принцип максимума*, подобный принципу максимума для сингулярно возмущенного уравнения переноса в [7].

**Теорема 3.1.** Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) выполняется условие

$$L u(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in G; \quad u(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in S.$$

Тогда для функции  $u(x, t)$  справедлива оценка  $u(x, t) \geq 0$ ,  $(x, t) \in \overline{G}$ .

**3.2.** Приведем априорные оценки для решения задачи Коши (2.2), (2.1).

Применяя технику мажорантных функций (подобную приведенной в [7] для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса), находим оценку решения задачи (2.2), (2.1)

$$|u(x, t)| \leq M, \quad (x, t) \in \overline{G}. \quad (3.1)$$

При исследовании производных решения задачи Коши считаем, что коэффициенты и правая часть уравнения являются достаточно гладкими на  $\overline{G}$ :  $b, c, p, f \in C^{k, k_0}(\overline{G})$ ,  $k + k_0 \leq K$ ,  $K \leq 4$ , начальная функция — достаточно гладкая на множестве  $S$ , производные  $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \varphi(x)$ ,  $k \leq K$ , ограничены при  $K = 4$ . При этих условиях выполняется включение

$$u \in C^{k, k_0}(\overline{G}), \quad k + k_0 \leq K. \quad (3.2)$$

Тогда для функции  $u(x, t)$  справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} u(x, t) \right| \leq M, \quad (x, t) \in \overline{G}, \quad k + k_0 \leq K. \quad (3.3)$$

Справедлива следующая

**Теорема 3.2.** Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) выполняется условие  $b, c, p, f \in C^{k, k_0}(\overline{G})$ ,  $k + k_0 \leq K$ ,  $K = 4$ . Тогда для решения задачи Коши  $u(x, t)$  и его производных справедливы оценки (3.1), (3.3).

<sup>1</sup> Через  $M$  (через  $m$ ) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят от шаблонов разностных схем.

## 4. СТАНДАРТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

В этом разделе построим *стандартную разностную схему* на основе монотонной сеточной аппроксимации задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) и исследуем ее сходимость.

**4.1.** На множестве  $\bar{G}$  введем сетку

$$\bar{G}_{h\tau} = \bar{\omega} \times \bar{\omega}_0. \quad (4.1)$$

Здесь  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\omega}_0$  — равномерные сетки на множествах  $(-\infty, \infty)$  и  $[0, T]$  соответственно. Пусть  $h$  и  $\tau$  — шаги сеток  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\omega}_0$ ; узел  $(0, 0)$  принадлежит сетке  $\bar{G}_{h\tau}$ .

Предполагаем выполненным условие  $h \leq M N^{-1}$ ,  $\tau \leq M N_0^{-1}$ , где  $N + 1$  и  $N_0 + 1$  — число узлов на отрезке единичной длины на множестве  $(-\infty, \infty)$  и число узлов сетки  $\bar{\omega}_0$  соответственно.

Задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем *стандартной разностной схемой* [3]

$$\Lambda z(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in G_{h\tau}; \quad z(x, t) = \varphi(x), \quad (x, t) \in S_{h\tau}. \quad (4.2a)$$

Здесь  $G_{h\tau} = G \cap \bar{G}_{h\tau}$ ,  $S_{h\tau} = S \cap \bar{G}_{h\tau}$ ,

$$\Lambda \equiv b(x, t) \delta_{\bar{x}} + c(x, t) + p(x, t) \delta_{\bar{t}}, \quad (4.2b)$$

$\delta_{\bar{x}} z(x, t)$  и  $\delta_{\bar{t}} z(x, t)$  — первые обратные разностные производные (производные назад) по  $x$  и  $t$  соответственно.

Разностная схема (4.2), (4.1) монотонна (определение монотонности разностных схем см., например, в [3]). Для схемы (4.2), (4.1) справедлив *сеточный принцип максимума*.

**Теорема 4.1.** Пусть для разностной схемы (4.2), (4.1) выполняются условия  $\Lambda z(x, t) \geq 0$ ,  $(x, t) \in G_{h\tau}$ ;  $z(x, t) \geq 0$ ,  $(x, t) \in S_{h\tau}$ . Тогда для функции  $z(x, t)$  справедлива оценка  $z(x, t) \geq 0$ ,  $(x, t) \in \bar{G}_{h\tau}$ .

**4.2.** С учетом априорных оценок устанавливаем сходимость в равномерной норме разностной схемы (4.2), (4.1).

С использованием оценок (3.3), где  $K = 2$ , подобно [7], получаем, что решение разностной схемы (4.2), (4.1) сходится в равномерной норме к решению задачи Коши (2.2), (2.1) с оценкой

$$|u(x, t) - z(x, t)| \leq M [N^{-1} + N_0^{-1}], \quad (x, t) \in \bar{G}_{h\tau}. \quad (4.3)$$

**Теорема 4.2.** Пусть для решения задачи Коши (2.2), (2.1) выполняются оценка (3.3) при  $K = 2$ . Тогда решение разностной схемы (4.2), (4.1) сходится в равномерной норме и для него справедлива оценка (4.3).

## 5. РАЗЛОЖЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И НЕВЯЗОК ПО СТЕПЕНЯМ ШАГОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ВРЕМЕННОЙ СЕТОК

В случае разностной схемы (4.2), (4.1) построим разложения первых обратных разностных производных по  $x$  и  $t$  по степеням шагов  $h$  и  $\tau$  равномерных сеток  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\omega}_0$ . С использованием этих разложений получим разложения по степеням шагов  $h$  и  $\tau$  для соответствующих невязок, которые будем использовать в разд. 7 при построении схемы, сходящейся с третьим порядком скорости сходимости.

**5.1.** Рассмотрим разложение обратной разностной производной  $\delta_{\bar{x}} u(x, t)$  по шагу  $h$  в узле  $(x, t)$ , где

$$\delta_{\bar{x}} u(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h}, \quad (x, t) \in G_{h\tau}.$$

Заметим, что узел  $(0, 0)$  принадлежит сетке  $\bar{G}_{h\tau}$ .

Заметим, что для  $u(x - h, t)$  выполняется следующее разложение по степеням шага  $h$ :

$$\begin{aligned} u(x - h, t) = & u(x, t) - h \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + 2^{-1} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - \\ & - 6^{-1} h^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) + 24^{-1} h^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\vartheta, t), \quad (x, t) \in G_{h\tau}, \quad \vartheta \in [x - h, x]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

С учетом разложения (5.1) для  $u(x-h, t)$  получаем разложение обратной разностной производной  $\delta_{\bar{x}}u(x, t)$  по степеням шага  $h$  в узле  $(x, t)$

$$\delta_{\bar{x}}u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - 2^{-1} h \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + 6^{-1} h^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) - 24^{-1} h^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\vartheta, t), \quad (x, t) \in G_{h\tau}, \quad \vartheta \in [x-h, x]. \quad (5.2)$$

Теперь, с учетом разложения (5.2) получаем разложение по степеням шага  $h$  в узле  $(x, t)$  для разности  $\delta_{\bar{x}}u(x, t) - \partial/\partial x u(x, t)$ , которую назовем невязкой [8]

$$\delta_{\bar{x}}u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = -2^{-1} h \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + 6^{-1} h^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) - 24^{-1} h^3 \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\vartheta, t), \quad (x, t) \in G_{h\tau}. \quad (5.3)$$

**5.2.** Рассмотрим разложение обратной разностной производной  $\delta_{\bar{t}}u(x, t)$  по степеням шага  $\tau$  в узле  $(x, t)$ , где

$$\delta_{\bar{t}}u(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x, t-\tau)}{\tau}, \quad (x, t) \in G_{h\tau}.$$

Узел  $(0, 0)$  принадлежит сетке  $\bar{G}_{h\tau}$ .

Подобно разложению (5.1), для  $u(x, t-\tau)$  выполняется следующее разложение по степеням шага  $\tau$ :

$$u(x, t-\tau) = u(x, t) - \tau \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + 2^{-1} \tau^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - 6^{-1} \tau^3 \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) + 24^{-1} \tau^4 \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x, \eta), \quad (x, t) \in G_{h\tau}, \quad \eta \in [t-\tau, t]. \quad (5.4)$$

С учетом разложения (5.4) для  $u(x, t-\tau)$  получаем разложение обратной разностной производной  $\delta_{\bar{t}}u(x, t)$  по степеням шага  $\tau$

$$\delta_{\bar{t}}u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - 2^{-1} \tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + 6^{-1} \tau^2 \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) - 24^{-1} \tau^3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x, \eta), \quad (x, t) \in G_{h\tau}, \quad \eta \in [t-\tau, t]. \quad (5.5)$$

Аналогично (5.3), с учетом разложения (5.5), получаем разложение по степеням шага  $\tau$  в узле  $(x, t)$  для невязки  $\delta_{\bar{t}}u(x, t) - \partial/\partial t u(x, t)$

$$\delta_{\bar{t}}u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -2^{-1} \tau \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + 6^{-1} \tau^2 \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) - 24^{-1} \tau^3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x, \eta), \quad (x, t) \in G_{h\tau}. \quad (5.6)$$

**5.3.** Основные результаты о разложении обратных разностных производных по  $x$  и  $t$  и невязок по степеням сеточных шагов  $h$  и  $\tau$  равномерных сеток  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\omega}_0$ .

Справедлива следующая

**Теорема 5.1.** Пусть для решения задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) выполняется оценка (3.3) при  $K = 4$ . Тогда в случае разностной схемы (4.2), (4.1) для разностных производных  $\delta_{\bar{x}}u(x, t)$  и  $\delta_{\bar{t}}u(x, t)$ ,  $(x, t) \in G_{h\tau}$  справедливы разложения (5.2) и (5.5) соответственно.

Также справедлива следующая

**Теорема 5.2.** Пусть выполняется условие теоремы 5.1. Тогда для невязок  $\delta_{\bar{x}}u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$  и  $\delta_{\bar{t}}u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$  справедливы разложения (5.3) и (5.6).

## 6. РАЗЛОЖЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И НЕВЯЗОК ПО СТЕПЕНЯМ ШАГОВ РАЗРЕЖЕННЫХ СЕТОК

В этом разделе на основе сетки  $\overline{G}_{h\tau(4.1)}$  строим *разреженную сетку*, на которой для разностной схемы (4.2), аналогично построениям в разд. 5, строим разложения разностных производных по  $x$  и  $t$  по степеням шагов *разреженных* сеток и разложения для соответствующих невязок, которые будут использованы в разд. 8 при построении схемы повышенного порядка точности, сходящейся с *третьим порядком* скорости сходимости.

**6.1.** На основе сетки  $\overline{G}_{h\tau(4.1)}$  строим следующую *разреженную сетку*:

$$\overline{G}_{h^*\tau^*}^* = \overline{\omega}^* \times \overline{\omega}_0^*. \quad (6.1)$$

Здесь  $\overline{\omega}^*$  и  $\overline{\omega}_0^*$  — равномерные сетки на множествах  $(-\infty, \infty)$  и  $[0, T]$  соответственно. Величины шагов  $h^*$  и  $\tau^*$  сеток  $\overline{\omega}^*$  и  $\overline{\omega}_0^*$  в два раза больше величины шагов  $h$  и  $\tau$  сеток  $\overline{\omega}$  и  $\overline{\omega}_0$ . Узел  $(0, 0)$  принадлежит сеткам  $\overline{G}_{h\tau}$  и  $\overline{G}_{h^*\tau^*}^*$ .

На сетке  $\overline{G}_{h^*\tau^*}^*$  рассмотрим *разностную схему*

$$\begin{aligned} \Lambda^* z^*(x, t) &\equiv \{b(x, t) \delta_{\overline{x}^*} + p(x, t) \delta_{\overline{t}^*} + c(x, t)\} z^*(x, t) = \\ &= f(x, t), \quad (x, t) \in G_{h^*\tau^*}^*, \\ z^*(x, t) &= \varphi(x), \quad (x, t) \in S_{h^*\tau^*}^*. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь  $G_{h^*\tau^*}^* = G \cap \overline{G}_{h^*\tau^*}^*$ ,  $S_{h^*\tau^*}^* = S \cap \overline{G}_{h^*\tau^*}^*$ ;  $\delta_{\overline{x}^*} z^*(x, t)$  и  $\delta_{\overline{t}^*} z^*(x, t)$  — первые обратные разностные производные на разреженной сетке  $\overline{G}_{h^*\tau^*}^*$

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{x}^*} z^*(x, t) &= \frac{z^*(x, t) - z^*(x - h^*, t)}{h^*}, \quad (x, t) \in \overline{G}_{h^*\tau^*}^*, \\ \delta_{\overline{t}^*} z^*(x, t) &= \frac{z^*(x, t) - z^*(x, t - \tau^*)}{\tau^*}, \quad (x, t) \in G_{h^*\tau^*}^*. \end{aligned}$$

Для функции

$$w^*(x, t) = z^*(x, t) - u(x, t), \quad (x, t) \in \overline{G}_{h^*\tau^*}^*$$

выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Lambda^* w^*(x, t) &= \Lambda^* z^*(x, t) - \Lambda^* u(x, t) = (L - \Lambda^*) u(x, t) = \\ &= b(x, t) \left[ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - \delta_{\overline{x}^*} u(x, t) \right] + \\ &+ p(x, t) \left[ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \delta_{\overline{t}^*} u(x, t) \right], \quad (x, t) \in G_{h^*\tau^*}^*, \end{aligned} \quad (6.3)$$

причем

$$w^*(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_{h^*\tau^*}^*.$$

**6.2.** Рассмотрим разложение обратной разностной производной  $\delta_{\overline{x}^*} u(x, t)$  по шагу  $h^*$  в узле  $(x, t)$ .

Для производной  $\delta_{\overline{x}^*} u(x, t)$  имеем следующее представление:

$$\delta_{\overline{x}^*} u(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x - h^*, t)}{h^*}, \quad (x, t) \in G_{h^*\tau^*}^*.$$

Узел  $(0, 0)$  принадлежит сетке  $\overline{G}_{h^*\tau^*}^*$ .

Заметим, что для  $u(x - h^*, t)$  выполняется следующее разложение по степеням шага  $h^*$ :

$$\begin{aligned} u(x - h^*, t) &= u(x, t) - h^* \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + 2^{-1} h^{*2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - 6^{-1} h^{*3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) + \\ &+ 24^{-1} h^{*4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\vartheta, t), \quad (x, t) \in G_{h^*\tau^*}^*, \quad \vartheta \in [x - h^*, x]. \end{aligned} \quad (6.4)$$

С учетом разложения (6.4) для  $u(x - h^*, t)$ , получаем разложение обратной разностной производной  $\delta_{\overline{x}^*} u(x, t)$  по степеням шага  $h^*$

$$\delta_{\overline{x}^*} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - 2^{-1} h^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + 6^{-1} h^{*2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) - \quad (6.5)$$

$$-24^{-1} h^{*3} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\vartheta, t), \quad (x, t) \in G_{h^* \tau^*}^*, \quad \vartheta \in [x - h^*, x].$$

**6.3.** Подобно (6.4), для  $u(x, t - \tau^*)$  выполняется следующее разложение по степеням шага  $\tau^*$ :

$$\begin{aligned} u(x, t - \tau^*) = & u(x, t) - \tau^* \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + 2^{-1} \tau^{*2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - 6^{-1} \tau^{*3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) + \\ & + 24^{-1} \tau^{*4} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x, \eta), \quad (x, t) \in G_{h^* \tau^*}^*, \quad \eta \in [t - \tau^*, t]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

С учетом разложения (6.6) для  $u(x, t - \tau^*)$ , получаем разложение обратной разностной производной  $\delta_{\bar{t}^*} u(x, t)$  по степеням шага  $\tau^*$

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{t}^*} u(x, t) = & \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - 2^{-1} \tau^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + 6^{-1} \tau^{*2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) - \\ & - 24^{-1} \tau^{*3} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x, \eta), \quad (x, t) \in G_{h^* \tau^*}^*, \quad \eta \in [t - \tau^*, t]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

**6.4.** Основным результатом о разложении разностных производных по  $x$  и  $t$  по степеням сеточных шагов разреженной сетки  $G_{h^* \tau^*}^*$ .

В силу разложений (6.5) и (6.7), для невязок  $\delta_{\bar{x}^*} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$  и  $\delta_{\bar{t}^*} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$  справедливы следующие разложения по степеням сеточных шагов  $h^*$  и  $\tau^*$ :

$$\delta_{\bar{x}^*} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = -2^{-1} h^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + 6^{-1} h^{*2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) - \quad (6.8)$$

$$-24^{-1} h^{*3} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\vartheta, x), \quad (x, t) \in G_{h^* \tau^*}^*, \quad \vartheta \in [x - h^*, x];$$

$$\delta_{\bar{t}^*} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = -2^{-1} \tau^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + 6^{-1} \tau^{*2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) - \quad (6.9)$$

$$-24^{-1} \tau^{*3} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x, \eta), \quad (x, t) \in G_{h^* \tau^*}^*, \quad \eta \in [t - \tau^*, t].$$

Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 6.1.** Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) выполняется условие  $b, c, p, f \in C^{k, k_0}(\bar{G})$ ,  $k, k_0 \leq K$ ,  $K = 4$ . Тогда для невязок  $\delta_{\bar{x}^*} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$  и  $\delta_{\bar{t}^*} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$  справедливы разложения (6.8) и (6.9) по степеням сеточных шагов  $h^*$  и  $\tau^*$  разреженной сетки  $G_{h^* \tau^*}^*$ .

## 7. РАЗЛОЖЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И НЕВЯЗОК ПО СТЕПЕНЯМ ШАГОВ ДВАЖДЫ РАЗРЕЖЕННЫХ СЕТОК

В этом разделе на основе *разреженной сетки*  $\bar{G}_{h^* \tau^*}^*$  (6.1) строим *дважды разреженную сетку*, на которой для разностной схемы (4.2), аналогично построениям в разд. 6, строим разложения разностных производных по  $x$  и  $t$  по степеням шагов *дважды разреженных* сеток и разложения для соответствующих невязок, которые будут использованы в разд. 8 при построении схемы повышенного порядка точности, сходящейся с *третьим порядком* скорости сходимости.

**7.1.** На основе сетки  $\bar{G}_{h\tau(4.1)}$  строим следующую *дважды разреженную сетку*:

$$\bar{G}_{h^{**} \tau^{**}}^{**} = \bar{\omega}^{**} \times \bar{\omega}_0^{**}. \quad (7.1)$$

Здесь  $\bar{\omega}^{**}$  и  $\bar{\omega}_0^{**}$  — равномерные сетки на множествах  $(-\infty, \infty)$  и  $[0, T]$  соответственно. Величины шагов  $h^{**}$  и  $\tau^{**}$  сеток  $\bar{\omega}^{**}$  и  $\bar{\omega}_0^{**}$  в четыре раза больше величины шагов  $h$  и  $\tau$  сеток  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\omega}_0$ . Узел  $(0, 0)$  принадлежит сеткам  $\bar{G}_{h\tau}$  и  $\bar{G}_{h^{**} \tau^{**}}^{**}$ .

На сетке  $\overline{G}_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$  рассмотрим *разностную схему*

$$\begin{aligned}\Lambda^{**} z^{**}(x, t) &\equiv \{b(x, t) \delta_{\overline{x}^{**}} + p(x, t) \delta_{\overline{t}^{**}} + c(x, t)\} z^{**}(x, t) = \\ &= f(x, t), \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}, \\ z^{**}(x, t) &= \varphi(x), \quad (x, t) \in S_{h^{**}\tau^{**}}^{**}.\end{aligned}\quad (7.2)$$

Здесь  $G_{h^{**}\tau^{**}}^{**} = G \cap \overline{G}_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$ ,  $S_{h^{**}\tau^{**}}^{**} = S \cap \overline{G}_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$ ;  $\delta_{\overline{x}^{**}} z^{**}(x, t)$  и  $\delta_{\overline{t}^{**}} z^{**}(x, t)$  — первые обратные разностные производные на разреженной сетке  $\overline{G}_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$

$$\begin{aligned}\delta_{\overline{x}^{**}} z^{**}(x, t) &= \frac{z^{**}(x, t) - z^{**}(x - h^{**}, t)}{h^{**}}, \quad (x, t) \in \overline{G}_{h^{**}\tau^{**}}^{**}, \\ \delta_{\overline{t}^{**}} z^{**}(x, t) &= \frac{z^{**}(x, t) - z^{**}(x, t - \tau^{**})}{\tau^{**}}, \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}.\end{aligned}$$

Для функции

$$w^{**}(x, t) = z^{**}(x, t) - u(x, t), \quad (x, t) \in \overline{G}_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$$

выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\Lambda^{**} w^{**}(x, t) &= \Lambda^{**} z^{**}(x, t) - \Lambda^{**} u(x, t) = (L - \Lambda^{**}) u(x, t) = \\ &= b(x, t) \left[ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - \delta_{\overline{x}^{**}} u(x, t) \right] + \\ &+ p(x, t) \left[ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \delta_{\overline{t}^{**}} u(x, t) \right], \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**},\end{aligned}\quad (7.3)$$

причем

$$w^{**}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in S_{h^{**}\tau^{**}}^{**}.$$

**7.2.** Рассмотрим разложение обратной разностной производной  $\delta_{\overline{x}^{**}} u(x, t)$  по шагу  $h^{**}$  в узле  $(x, t)$ .

Для производной  $\delta_{\overline{x}^{**}} u(x, t)$  имеем следующее представление:

$$\delta_{\overline{x}^{**}} u(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x - h^{**}, t)}{h^{**}}, \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}.$$

Узел  $(0, 0)$  принадлежит сетке  $\overline{G}_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$ .

Заметим, что для  $u(x - h^{**}, t)$  выполняется следующее разложение по степеням шага  $h^{**}$ :

$$\begin{aligned}u(x - h^{**}, t) &= u(x, t) - h^{**} \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) + 2^{-1} h^{**2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) - 6^{-1} h^{**3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) + \\ &+ 24^{-1} h^{**4} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\vartheta, t), \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}, \quad \vartheta \in [x - h^{**}, x].\end{aligned}\quad (7.4)$$

С учетом разложения (7.4) для  $u(x - h^{**}, t)$ , получаем разложение обратной разностной производной  $\delta_{\overline{x}^{**}} u(x, t)$  по степеням шага  $h^{**}$

$$\begin{aligned}\delta_{\overline{x}^{**}} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) - 2^{-1} h^{**} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + 6^{-1} h^{**2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) - \\ &- 24^{-1} h^{**3} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\vartheta, t), \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}, \quad \vartheta \in [x - h^{**}, x].\end{aligned}\quad (7.5)$$

**7.3.** Подобно (7.4), для  $u(x, t - \tau^{**})$  выполняется следующее разложение по степеням шага  $\tau^{**}$ :

$$\begin{aligned}u(x, t - \tau^{**}) &= u(x, t) - \tau^{**} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + 2^{-1} \tau^{**2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - 6^{-1} \tau^{**3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) + \\ &+ 24^{-1} \tau^{**4} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(\eta, t), \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}, \quad \eta \in [t - \tau^{**}, t].\end{aligned}\quad (7.6)$$

С учетом разложения (7.6) для  $u(x, t - \tau^{**})$ , получаем разложение обратной разностной производной  $\delta_{\tau^{**}} u(x, t)$  по степеням шага  $\tau^{**}$

$$\begin{aligned} \delta_{\tau^{**}} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - 2^{-1} \tau^{**} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + 6^{-1} \tau^{**2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) - \\ &- 24^{-1} \tau^{**3} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x, \eta), \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{***}, \quad \eta \in [t - \tau^{**}, t]. \end{aligned} \quad (7.7)$$

**7.4.** Основным результатом о разложении разностных производных по  $x$  и  $t$  по степеням сеточных шагов разреженной сетки  $G_{h^{**}\tau^{**}}^{***}$ .

В силу разложений (7.5) и (7.7), для невязок  $\delta_{\bar{x}^{**}} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$  и  $\delta_{\tau^{**}} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$  справедливы следующие разложения по степеням сеточных шагов  $h^{**}$  и  $\tau^{**}$ :

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{x}^{**}} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) &= -2^{-1} h^{**} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + 6^{-1} h^{**2} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x, t) - \\ &- 24^{-1} h^{**3} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x, \vartheta), \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{***}, \quad \vartheta \in [x - h^{**}, x]; \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\tau^{**}} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) &= -2^{-1} \tau^{**} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + 6^{-1} \tau^{**2} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x, t) - \\ &- 24^{-1} \tau^{**3} \frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x, \eta), \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{***}, \quad \eta \in [t - \tau^{**}, t]. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 7.1.** Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) выполняется условие  $b, c, p, f \in C^{k, k_0}(\bar{G})$ ,  $k, k_0 \leq K$ ,  $K = 4$ . Тогда для невязок  $\delta_{\bar{x}^{**}} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$  и  $\delta_{\tau^{**}} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, t)$  справедливы разложения (7.8) и (7.9) по степеням сеточных шагов  $h^{**}$  и  $\tau^{**}$  разреженной сетки  $G_{h^{**}\tau^{**}}^{***}$ .

## 8. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РИЧАРДСОНА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Отметим, что структура разложений невязок сеточных решений относительно шагов сеток на *основной, разреженной и дважды разреженной* равномерных сетках подобна. Эти разложения позволяют применить технику Ричардсона и построить сеточное решение, сходящееся с *третьим порядком* скорости сходимости.

**8.1.** В разд. 5—7 получены разложения невязок по степеням шагов  $x$  и  $t$  на трех вложенных сетках  $G_{h\tau}$ ,  $G_{h^*\tau^*}^*$ ,  $G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$ .

На *дважды разреженной сетке*  $G_{h^{**}\tau^{**}}^{***}$  строим функцию  $\hat{z}(x, t)$  — линейную комбинацию из трех функций  $z(x, t)$ ,  $(x, t) \in G_{h\tau}$ ;  $z^*(x, t)$ ,  $(x, t) \in G_{h^*\tau^*}^*$  и  $z^{**}(x, t)$ ,  $(x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$ :

$$\hat{z}(x, t) = \alpha z(x, t) + \beta z^*(x, t) + \gamma z^{**}(x, t), \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{***}. \quad (8.1)$$

Соотношение (8.1) содержит параметры  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Эти параметры выбираются с учетом разложений невязок на основной сетке  $G_{h\tau}$  (разд. 5), на разреженной сетке  $G_{h^*\tau^*}^*$  (разд. 6) и на дважды разреженной сетке  $G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$  (разд. 7). Требуется, чтобы главный член разложения функции  $\hat{z}(x, t)$  при  $(x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{***}$  был равен единице, что приводит к следующему условию:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (8.2)$$

Кроме того, требуется, чтобы в разложении невязок функции  $\hat{z}(x, t)$ ,  $(x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{***}$ , не содержались линейные и квадратичные члены разложения, что приводит к следующим соотношениям:

$$\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0, \quad \alpha + 4\beta + 16\gamma = 0. \quad (8.3)$$

Из системы уравнений (8.2), (8.3) получаем следующие значения для параметров  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ :

$$\alpha = 8 \times 3^{-1}, \quad \beta = -2, \quad \gamma = 3^{-1}. \quad (8.4)$$

Для функции  $\widehat{z}_{(8.1)}(x, t)$ ,  $(x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$ , получаем представление

$$\widehat{z}(x, t) = 8 \times 3^{-1} z(x, t) - 2 z^*(x, t) + 3^{-1} z^{**}(x, t), \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}. \quad (8.5)$$

**8.2.** С учетом (8.5) для функции  $\widehat{z}(x, t)$ ,  $(x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$ , получаем следующую оценку:

$$|\widehat{z}(x, t) - u(x, t)| \leq M (N^{-3} + N_0^{-3}), \quad (x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}. \quad (8.6)$$

Функцию  $\widehat{z}(x, t)$ ,  $(x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$ , сходящуюся в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости, назовем решением задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) *повышенного порядка точности*.

Таким образом, справедлива следующая

**Теорема 8.1.** Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) в представлении (8.1) выполняются условия (8.2), (8.3) и (8.4). Тогда функция  $\widehat{z}(x, t)$ ,  $(x, t) \in G_{h^{**}\tau^{**}}^{**}$ , — решение разностной схемы Ричардсона повышенного порядка точности — сходится в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости с оценкой (8.6).

## 9. ВЫВОДЫ

**9.1.** Рассмотрена постановка задачи Коши для уравнения переноса и определена цель исследования.

**9.2.** Для задачи Коши для уравнения переноса построена монотонная стандартная разностная схема и установлена ее сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости.

**9.3.** Построены разложения первых обратных разностных производных по степеням шагов *основных, разреженных и дважды разреженных* равномерных сеток по пространству и времени. С использованием этих разложений получены разложения для соответствующих невязок сеточных решений.

**9.4.** На основе линейной комбинации решений разностных схем на *основных, разреженных и дважды разреженных* сетках, с учетом разложений соответствующих невязок на этих сетках, построена разностная схема Ричардсона повышенного порядка точности, сходящаяся в равномерной норме с *третьим порядком* скорости сходимости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989, 608 с.
2. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979, 320 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989, 616 с.
4. Хемкер П.В., Шишкин Г.И., Шишкина Л.П. Декомпозиция метода Ричардсона высокого порядка точности для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 2. С. 328–336.
5. Shishkin G.I., Shishkina L.P. Difference Methods for Singular Perturbation Problems. V. 140 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2009. 408 p.
6. Шишкин Г.И., Шишкина Л.П. Улучшенная разностная схема для задачи Коши в случае уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 8. С. 1272–1278.
7. Шишкин Г.И. Разностная схема для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 11. С. 1824–1830.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978, 512 с.

# RICHARDSON'S DIFFERENCE SCHEME OF THE THIRD ORDER OF ACCURACY FOR THE CAUCHY PROBLEM IN THE CASE OF THE TRANSFER EQUATION

© 2024 G.I. Shishkin\*, L.P. Shishkina

*620108 Yekaterinburg, S. Kovalevskaya str., 16, IMM, UB RAS, Russia*

*\*e-mail: shishkin@imm.uran.ru*

Received: 16.06.2024

Revised: 16.06.2024

Accepted: 01.07.2024

**Abstract.** The Cauchy problem for the regular transfer equation is considered. For this task, using the Richardson technique, a difference scheme of an increased order of accuracy is constructed on three nested grids, converging in a uniform norm with a third order of convergence rate.

**Keywords:** transfer equation, Cauchy problem, standard difference scheme, uniform grid, residual, residual decomposition, monotony of differential and grid problems, Richardson technique, difference scheme, increased order of accuracy, convergence in uniform norm.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

© 2024 г. А.Н. Квитко<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7-9, С.-Петербургский гос. университет, Россия

\*e-mail: alkvit46@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2024 г.

Переработанный вариант 28.05.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Предложен достаточно удобный для численной реализации алгоритм построения дифференцируемой управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в начало координат на нефиксированном промежутке времени. Найдено конструктивное достаточное условие калмановского типа, гарантирующее указанный перевод. Эффективность алгоритма иллюстрируется при решении конкретной практической задачи и ее численном моделировании. Библ. 20. Фиг. 1.

**Ключевые слова:** управляемость, граничные условия, стабилизация.

**DOI:** 10.31857/S0044466924100057, **EDN:** KANFYS

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных направлений развития математической теории управления является исследование проблемы построения различных типов управляющих функций и соответствующих функций фазовых координат, обеспечивающих перевод систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние. Среди этих задач важное место занимают задачи построения указанных управляющих функций в случае, когда время перевода не является заданной величиной и подлежит нахождению. Данный класс задач называют задачами терминального управления.

Актуальность исследования задач терминального управления обусловлена тем, что с одной стороны при решении задачи терминального управления можно получить более широкую область достижимости, с другой стороны результаты ее решения могут служить опорными приближениями при решении задач оптимизации. В частности при решении задачи оптимального быстродействия. Проблеме терминального управления посвящено большое количество работ. Некоторые из них приведены в ссылках [1]–[18]. Основные научные результаты указанных публикаций связаны с нахождением необходимых и достаточных условий, гарантирующих заданный перевод [2]–[6], [9], [13], [16]–[18], построением и оценками множества достижимости [1], [2], [4], [14], [16], а также разработкой методов приближенного или точного построения искомым управлений и соответствующих функций фазовых координат [7]–[12], [15]. В работах [2]–[5], [9], [16]–[18] необходимые и достаточные условия разрешимости задачи терминального управления формулируются в терминах алгебры Ли векторных полей порожденных правой частью исходной системы. В [6], [13] получены достаточные условия локальной управляемости на основе свойств вариационного конуса. Для оценок областей достижимости используется как дифференциально-геометрический подход, так и метод, основанный на вариации множества достижимости. При решении задач терминального управления для нелинейных систем специального вида применяются методы основанные на замене зависимых и независимых переменных, которые позволяют значительно упростить решение исходной задачи. В настоящее время проблема терминальных задач для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно подробно изучена для линейных и нелинейных систем специального вида. Однако теория решения задач терминального управления для нелинейных управляемых систем общего вида ввиду их сложности еще недостаточно разработана. Основные усилия автора направлены на разработку достаточно простого для численной реализации и устойчивого к погрешностям вычислений алгоритма решения нелокальной задачи терминального управления для более широкого класса нелинейных ста-

ционарных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и нахождению конструктивного достаточного условия калмановского типа, гарантирующего его реализацию. Поставленная цель достигнута сведением решения исходной нелокальной терминальной задачи к решению некоторого числа локальных граничных задач на фиксированном промежутке времени. В свою очередь каждая из граничных задач может быть решена с помощью алгоритма из работы [19] с небольшими изменениями.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)^T$ ,  $\mathbf{u} \in R^r$ ,  $r \leq n$ ,

$$\mathbf{f} \in C^{2n}(R^n \times R^r; R^n), \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (1.3)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{0}).$$

Построим матрицу  $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = (\mathbf{B}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))$ . Предположим, что для всех  $\mathbf{x}$  из области

$$\|\mathbf{x}\| \leq C, \quad C > 0, \quad (1.4)$$

выполнено условие

$$\text{rank } \mathbf{S}(\mathbf{x}) = n. \quad (1.5)$$

Пусть  $\bar{\mathbf{x}} \in R^n$ ,  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$ ,  $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ , — фиксированное состояние.

**Задача.** Найти пару функций:  $\mathbf{x}(t) \in C^n([0, t_1]; R^n)$ ,  $\mathbf{u}(t) \in C^n([0, t_1]; R^r)$ , удовлетворяющую системе (1.1) и условиям

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

В (1.6)  $t_1$  — заранее неизвестный момент времени, подлежащий определению. При  $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  полагаем  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

**Теорема.** Пусть для правой части системы (1.1) выполнены условия (1.2), (1.3) и в области (1.4) выполнено условие (1.5). Тогда для всех  $\bar{\mathbf{x}} : \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{C}{2}$  существует решение поставленной задачи, которое может быть получено после решения конечного числа вспомогательных локальных граничных задач на заданном промежутке времени.

Основная идея решения вспомогательных локальных задач состоит в том, чтобы посредством преобразований зависимых и независимых переменных, решение каждой исходной локальной задачи свести к решению задачи стабилизации нелинейной вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида при постоянно действующих возмущениях. Для ее решения находится вспомогательное управление, обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы линейной части этой системы. На заключительном этапе находится решение задачи Коши для вспомогательной системы, замкнутой указанным управлением, и осуществляется переход к исходным зависимым и независимым переменным.

## 2. ФОРМУЛИРОВКА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Пусть

$$L = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq C} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})\|, \quad t_0 \leq \frac{C}{2L}.$$

Рассмотрим функцию  $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ ,  $\boldsymbol{\varphi}(t) \in C^{2n}[0, t_1]$ , удовлетворяющую системе

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{0}), \quad t \in [0, t_1], \quad \boldsymbol{\varphi}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{C}{2}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t_1) = \bar{\mathbf{x}}_1, \quad \bar{\mathbf{x}}_1 = (\bar{x}_1^1, \dots, \bar{x}_1^n)^T, \quad 0 < t_1 \leq t_0. \quad (2.1)$$

**Замечание 1.** Нетрудно видеть, что из условий (1.2), (2.1) и определения момента  $t_0 > 0$  следуют неравенства

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \leq C, \quad \left\| \frac{d^k \boldsymbol{\varphi}}{dt^k}(t) \right\| \leq K, \quad k = 1, \dots, 2n \quad \forall t \in [0, t_1],$$

где константа  $K > 0$  зависит от области (1.4).

**Задача 1.** Найти пару функций  $\mathbf{x}(t) \in C^n([0, t_1]; R^n)$ ,  $\mathbf{u}(t) \in C^n([0, t_1]; R^r)$ , удовлетворяющую системе (1.1) и условиям

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{C}{2}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(t_1) = (1 - \varepsilon(t_1))\bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_2, \quad 0 < \varepsilon(t_1) \leq 1. \quad (2.2)$$

Здесь  $\varepsilon(t_1)$  и  $t_1 : 0 < t_1 \leq t_0$  подлежат определению. Выполним в системе (1.1) замену

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{y}, \quad t \in [0, t_1], \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T. \quad (2.3)$$

Тогда в новой переменной  $\mathbf{y}$  система (1.1) примет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{0}), \quad t \in [0, t_1]. \quad (2.4)$$

Рассмотрим задачу: найти пару функций  $\mathbf{y}(t) \in C^n[0, t_1]$ ,  $\mathbf{u}(t) \in C^n[0, t_1]$ , удовлетворяющую системе (2.4) и условиям

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(t_1) = -\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{u}(t_1) = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Указанную пару функций будем называть *решением задачи* (2.4), (2.5). Выполним в системе (2.4) замену:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{a}(t) - \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1. \quad (2.6)$$

В новой переменной  $\mathbf{a}(t)$  система (2.4) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{f}(\mathbf{a} + \boldsymbol{\varphi}(t) - \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{0}) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}(t)), \quad t \in [0, t_1], \\ \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}(t)) &\equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассмотрим условия

$$\mathbf{a}(0) = \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_1. \quad (2.8)$$

Будем искать пару  $\mathbf{a}(t) \in C^n([0, t_1]; R^n)$ ,  $\mathbf{u}(t) \in C^n([0, t_1]; R^r)$ , удовлетворяющую системе (2.7) и условиям (2.8). Указанную пару функций  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  будем называть *решением задачи* (2.7), (2.8). Выполним в системе (2.7) преобразование независимой переменной  $t$  по формуле

$$t = t_1 - t_1 e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, +\infty), \quad (2.9)$$

где  $\alpha > 0$  — некоторое фиксированное число, подлежащее определению. Тогда в новой независимой переменной  $\tau$  система (2.7) и условия (2.8) примут вид:

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\tau} = \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{c}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{d}, \boldsymbol{\varphi}(t(\tau))), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{c}(\tau) = \mathbf{a}(t(\tau)), \quad \mathbf{d}(\tau) = \mathbf{u}(t(\tau)), \quad \tau \in [0, +\infty), \quad \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T, \quad \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)^T, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{c}(0) = \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{d}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}(\tau) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}(\tau) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Пару функций  $\mathbf{c}(\tau) \in C^n([0, \infty); R^n)$ ,  $\mathbf{d}(\tau) \in C^n([0, \infty); R^r)$ , удовлетворяющую системе (2.10) и условиям (2.12), будем называть *решением задачи* (2.10), (2.12).

**Замечание 2.** Имея решение задачи (2.10), (2.12) с помощью формул (2.9), (2.11) получим решение задачи (2.7), (2.8). В свою очередь подстановка решения задачи (2.7), (2.8) в формулы (2.6), (2.3) и предельный переход при  $t \rightarrow t_1$  даст решение задачи 1.

Введем обозначения

$$\tilde{\mathbf{c}} = \theta_i \mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \theta_i \mathbf{d}, \quad \tilde{t}_1 = t_1 + \theta_i(t - t_1), \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n, \quad |k| = \sum_{i=1}^n k_i,$$

$$|m| = \sum_{i=1}^r m_i, \quad k! = k_1! \dots k_n!, \quad m! = m_1! \dots m_r!.$$

Используя свойство (1.2), разложение правой части системы (2.7) в ряд Тейлора в окрестности точки  $(\mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{u} = \mathbf{0}, t = t_1)$  и замену (2.9), (2.11), систему (2.10) можно записать в виде:

$$\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_j +$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \frac{1}{2} \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j c_k + \right. \\
& + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j d_k + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial u_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_j d_k + \\
& + 2 t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j + 2 t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial u_j \partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_j + \\
& \left. + t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \right] + \dots \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-1} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial^{|k|+|m|+l} \Psi_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \dots d_r^{m_r} e^{-\alpha\tau} t_1^l + \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial^{|k|+|m|+l} \Psi_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}(\tilde{c}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{t}_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \dots d_r^{m_r} e^{-\alpha\tau} t_1^l, \\
& i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Ограничим область изменения  $\mathbf{c}(\tau)$ ,  $\mathbf{d}(\tau)$  неравенствами

$$\|\mathbf{c}(\tau)\| \leq C, \quad \|\mathbf{d}(\tau)\| \leq C, \quad \tau \in [0, \infty). \tag{2.14}$$

Сделаем  $2n - 1$  преобразований сдвигов функций  $c_i(\tau) : c_i(\tau) \rightarrow c_i^{2n-1}(\tau)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Главная их цель состоит в том, чтобы в правой части системы, полученной в результате этих преобразований, все слагаемые, не содержащиеся в явном виде степеней компонент  $\mathbf{c}^{2n-1}$  и  $\mathbf{d}$ , в области (2.14) удовлетворяли оценке  $O(e^{-2n\alpha\tau} t_1^{2n})$  при  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $t_1 \rightarrow 0$ . На первом этапе выполним замену  $c_i(\tau)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , по формуле

$$c_i(\tau) = c_i^1 - t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.15}$$

Пусть

$$D^{|k|+|m|+l} \Psi_i \equiv \frac{\partial^{|k|+|m|+l} \Psi_i}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ниже для компактности записи в правой части системы (2.16) зависимость  $\varepsilon$  от  $t_1$  будем опускать, полагая, что  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(t_1)$ . После подстановки (2.15) в левую и правую части системы (2.13) получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{dc_i^1}{d\tau} = & -\alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - \\
& - \alpha t_1^3 e^{-3\alpha\tau} \sum_{j=n}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \\
& + \frac{1}{2} \alpha t_1^3 e^{-3\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \\
& + \alpha (e^{-\alpha\tau} t_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j^1 - e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j^1) + \\
& + e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j^1 + \alpha (e^{-\alpha\tau} t_1 \sum_{j=1}^r \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k - \\
& - e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial u_k \partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k + e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial u_k \partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \alpha t_1 e^{-\alpha \tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j^1 c_k^1 + \alpha e^{-\alpha \tau} t_1 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k c_j^1 + \\
& + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha \tau} t_1 \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial u_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_j d_k + \frac{1}{2} \alpha e^{-3\alpha \tau} t_1^3 \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \dots \\
& \dots + \alpha t_1 e^{-\alpha \tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-2} \frac{1}{k!m!l!} D^{|k|+|m|+l|} \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) (c_1^1 - e^{-\alpha \tau} t_1 \Psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1))^{k_1} \times \dots \\
& \dots \times (c_n^1 - e^{-\alpha \tau} t_1 \Psi_n(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1))^{k_n} d_1^{m_1} \times \dots \times d_r^{m_r} t_1^l + \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha \tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-1} \frac{1}{k!m!l!} D^{|k|+|m|+l|} \Psi_i(\tilde{\mathbf{c}}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{t}_1) (c_1^1 - e^{-\alpha \tau} t_1 \Psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1))^{k_1} \times \dots \\
& \dots \times (c_n^1 - e^{-\alpha \tau} t_1 \Psi_n(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1))^{k_n} d_1^{m_1} \times \dots \times d_r^{m_r} t_1^l, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Из (2.15), (2.12) следует

$$c_i^1(0) = \varepsilon(t_1) \bar{x}_1^i + t_1 \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.17}$$

Нетрудно видеть, что в правой части системы (2.16) слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов  $\mathbf{c}^1$  и  $\mathbf{d}$ , в области (2.14) удовлетворяют условию  $O(e^{-2\alpha \tau} t_1^2)$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $t_1 \rightarrow 0$ . На втором этапе сделаем замену

$$\begin{aligned}
c_i^1(\tau) &= c_i^2(\tau) + \frac{1}{2} t_1^2 e^{-2\alpha \tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - \\
&- \frac{1}{2} t_1^2 e^{-2\alpha \tau} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) = c_i^2(\tau) + t_1^2 e^{-2\alpha \tau} \varphi_i^2(\varepsilon(t_1)), \\
\varphi_i^2(\varepsilon(t_1)) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1), \\
\varphi_i^2(0) &= 0, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Последнее равенство в (2.18) следует из (2.7). В результате получим систему в новых переменных  $\mathbf{c}_i^2$ . Несложный анализ показывает, что в ее правой части слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов  $\mathbf{c}_i^2$  и  $\mathbf{d}$ , в области (2.14) удовлетворяют условию  $O(e^{-3\alpha \tau} t_1^3)$ ,  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $t_1 \rightarrow 0$ . Начальное условие согласно (2.17), (2.18) примет вид

$$c_i^2(0) = \varepsilon(t_1) \bar{x}_1^i + t_1 \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - t_1^2 \varphi_i^2(\varepsilon(t_1)), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.19}$$

Используя (2.15), (2.18) и индуктивный переход на  $k$ -м шаге получим искомое преобразование вида

$$c_i^{k-1}(\tau) = c_i^k + t_1^k e^{-k\alpha \tau} \phi_i^k(\varepsilon(t_1)), \quad \phi_i^k(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.20}$$

Если применить преобразования (2.20)  $(2n-1)$  раз, объединить слагаемые в полученной системе, линейные по компонентам вектора  $\mathbf{c}^{2n-1}$  и содержащие коэффициенты  $t_1^i e^{-i\alpha \tau}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , а также слагаемые, линейные по компонентам вектора  $\mathbf{d}$  и содержащие коэффициенты  $t_1^i e^{-i\alpha \tau}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , то согласно (2.16), (2.17), (2.19) будем иметь систему и начальные данные, которые в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{c}^{2n-1}}{d\tau} = \mathbf{P} \mathbf{c}^{2n-1} + \mathbf{Q} \mathbf{d} + \sum_{i=1}^4 \mathbf{R}_i (\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau), \quad \mathbf{R}_i = (R_i^1, \dots, R_i^n)^T, \quad i = 1, \dots, 4. \tag{2.21}$$

Функции  $R_1^i$  содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора  $\mathbf{c}^{2n-1}$  с коэффициентами  $t_1^i e^{-i\alpha \tau}$ ,  $i \geq n$ , не содержащие степеней компонент вектора  $\mathbf{d}$ . Функции  $R_2^i$  содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора  $\mathbf{d}$  с коэффициентами  $t_1^i e^{-i\alpha \tau}$ ,  $i \geq n$ , не содержащие степеней компонент вектора  $\mathbf{c}^{2n-1}$ . В  $R_3^i$  содержатся все слагаемые, нелинейные по компонентам векторов  $\mathbf{c}^{2n-1}$  и  $\mathbf{d}$ . Функция  $R_4^i$  состоит из слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов  $\mathbf{c}^{2n-1}$  и  $\mathbf{d}$ . Матрицы  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  и начальные данные имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= t_1 \alpha e^{-\alpha \tau} (\mathbf{P}_1(t_1) + e^{-\alpha \tau} t_1 \mathbf{P}_2(t_1) + \dots + e^{-(n-2)\alpha \tau} t_1^{n-2} \mathbf{P}_{n-1}(t_1)), \\
\mathbf{Q} &= t_1 \alpha e^{-\alpha \tau} (\mathbf{Q}_1(t_1) + e^{-\alpha \tau} t_1 \mathbf{Q}_2(t_1) + \dots + e^{-(n-2)\alpha \tau} t_1^{n-2} \mathbf{Q}_{n-1}(t_1)),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^{2n-1}(0) &= \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1 + t_1\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - t_1^2\mathbf{f}^2(\varepsilon(t_1)) - t_1^3\mathbf{f}^3(\varepsilon(t_1)) - \dots \\
&\dots - t_1^{2n}\mathbf{f}^{2n-1}(\varepsilon(t_1)), \mathbf{f}^i(\varepsilon(t_1)) = (\phi_1^i(\varepsilon(t_1)), \dots, \phi_n^i(\varepsilon(t_1)))^T, \\
\mathbf{f}^i(0) &= \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, 2n-1.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Введем новую управляющую функцию  $\mathbf{w}(\tau)$ , связанную с  $\mathbf{d}(\tau)$  уравнениями

$$\frac{d\mathbf{d}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{v}_1, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{d\tau} = \mathbf{v}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, 2n-2, \quad \frac{d\mathbf{v}_{2n-1}}{d\tau} = \alpha\bar{t}e^{-\alpha\tau}\mathbf{w}, \quad \mathbf{v}_i = (v_1^i, \dots, v_r^i)^T, \quad \mathbf{v}_i \in R^r. \tag{2.24}$$

Положим

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, 2n-1. \tag{2.25}$$

Систему (2.21), (2.24) и начальные данные (2.23), (2.25) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}}{d\tau} &= \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{c}}^{2n-1} + \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{w} + \sum_{i=1}^4 \bar{\mathbf{R}}_i(\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau), \quad \bar{\mathbf{c}}^{2n-1} = (\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \bar{\mathbf{v}})_{n+2nr \times 1}^T, \\
\bar{\mathbf{v}} &= (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^T, \quad \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)^T, \quad \bar{\mathbf{R}}_1 = (R_1^1, \dots, R_1^n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})_{n+2nr \times 1}^T, \\
\bar{\mathbf{R}}_2 &= (R_2^1, \dots, R_2^n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})_{n+2nr \times 1}^T, \quad \bar{\mathbf{R}}_3 = (R_3^1, \dots, R_3^n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})_{n+2nr \times 1}^T, \\
\bar{\mathbf{R}}_4 &= (R_4^1, \dots, R_4^n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})_{n+2nr \times 1}^T,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{O}_{n \times r} & \mathbf{O}_{n \times r} & \dots & \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{O}_{r \times n} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{E}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \dots & \mathbf{O}_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{r \times n} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{E}_{r \times r} & \dots & \mathbf{O}_{r \times r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_{r \times n} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \dots & \mathbf{E}_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{r \times n} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \dots & \mathbf{O}_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{O}_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{r \times r} \\ \vdots \\ \mathbf{O}_{r \times r} \\ \alpha\bar{t}e^{-\alpha\tau}\mathbf{E}_{r \times r} \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

$$\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(0) = \bar{\mathbf{c}}_0^{2n-1}, \quad \bar{\mathbf{c}}_0^{2n-1} = (\mathbf{c}^{2n-1}(0), \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})_{n+2nr \times 1}^T, \tag{2.28}$$

где  $\mathbf{O}_{r \times n}$ ,  $\mathbf{O}_{r \times r}$  — матрицы с нулевыми элементами,  $\mathbf{E}_{r \times r}$  — единичная матрица.

Рассмотрим задачу: найти пару функций  $\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(\tau) \in C^1[0, \infty)$ ,  $\mathbf{w}(\tau) \in C^1[0, \infty)$ , удовлетворяющую системе (2.26) и условиям

$$\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(0) = \bar{\mathbf{c}}_0^{2n-1}, \quad \bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(\tau) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty. \tag{2.29}$$

Указанную пару  $\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(\tau)$ ,  $\mathbf{v}(\tau)$  будем называть *решением задачи* (2.26), (2.29).

**Замечание 3.** Легко видеть, что имея пару функций  $(\mathbf{c}^{2n-1}(\tau), \mathbf{d}(\tau)) = \bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(\tau)$ , входящую в решение задачи (2.26), (2.29) и используя формулы (2.20), (2.18) и (2.15), получаем решение задачи (2.10), (2.12).

Для удобства дальнейших рассуждений введем область изменения  $\mathbf{c}^{(2n-1)}$  согласованную с областью (2.14). Учитывая (2.20), (2.18), (2.15), (2.7) и индуктивный переход, получим равенство  $\mathbf{c} = \mathbf{c}^{2n-1} + \chi(\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1), \chi(\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon(t_1)$ . Отсюда  $\|\mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{c}^{2n-1}\| + \|\chi(\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1)\|$ . В силу сказанного, для любого  $\bar{\mathbf{x}}_1$  из области (1.4) и  $t_1 : 0 < t_1 \leq t_0$ , следует существование констант  $C_1, \varepsilon_0 : 0 < C_1 < C, 0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon(t_1)$  таких, что для всех  $\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1 : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  и для всех  $\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}$ , принадлежащих области

$$\|\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}\| < C_1, \tag{2.30}$$

соответствующие функции  $\mathbf{c}(\tau)$ ,  $\mathbf{d}(\tau)$  будут принадлежать области (2.14).

### 3. ОЦЕНКА СЛАГАЕМЫХ ПРАВОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ (2.21) И СИНТЕЗ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ЕЕ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

Из построения правой части системы (2.21), условия (2.22) и замечания 1 следует, что в области (2.30)  $\forall \tau \in [0, \infty)$  имеют место оценки

$$e^{-(i-1)\alpha\tau}t_1^{i-1}\|\mathbf{P}_i(t_1)\| \rightarrow 0, \quad e^{-(i-1)\alpha\tau}t_1^{i-1}\|\mathbf{Q}_i(t_1)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t_1 \rightarrow 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \tag{3.1}$$

$$\|\mathbf{R}_1(\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau)\| \leq e^{-n\alpha\tau}t_1^n L_1 \|\mathbf{c}^{2n-1}\|, \quad \|\mathbf{R}_2(\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau)\| \leq e^{-n\alpha\tau}t_1^n L_2 \|\mathbf{d}\|, \tag{3.2}$$

$$\|\mathbf{R}_3(\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau)\| \leq e^{-\alpha\tau}t_1 L_3 (\|\mathbf{c}^{2n-1}\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2), \quad \|\mathbf{R}_4(\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau)\| \leq L_4(\varepsilon_0\bar{\mathbf{x}}_1)t_1^{2n}e^{-2n\alpha\tau}. \tag{3.3}$$

Константы  $L_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , зависят от области (2.30).

С учетом (2.7), (2.15), (2.16), (2.18), (2.20) имеем

$$L_4(\varepsilon \bar{x}_1) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (3.4)$$

Рассмотрим систему

$$\frac{d\bar{c}^{2n-1}}{d\tau} = \bar{P}\bar{c}^{2n-1} + \bar{Q}w. \quad (3.5)$$

Воспользовавшись условиями (1.5), (2.22), (2.27), (3.1), замечанием 1 и доказательством леммы приведенной в работе [19] с учетом замены матриц  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$  и  $P$ ,  $Q$ , фигурирующих в [19] (см. (2.16), (2.20) из [19]) на матрицы  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$  и  $P$ ,  $Q$ , определенные выражениями (2.27), (2.22), а также  $\|F\|$  из работы [19] на  $t_1$ , нетрудно показать, что для любого  $\bar{x}_1$  из области (1.4) существует  $\bar{t} : 0 < \bar{t} \leq t_0$  такое, что при  $t_1 = \bar{t}$  можно построить вспомогательное управление  $w(\tau)$  вида

$$w = M(\tau)\bar{c}^{2n-1}, \quad \|M(\tau)\| = O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы  $\Phi(\tau)$  системы (3.5), (3.6) при  $\bar{x}_1 = \Psi(\bar{t})$ . Для  $\Phi(\tau)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\Phi(\tau)\| &\leq K\bar{t}e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 0, \\ \|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\| &\leq K\bar{t}^{-(n-1)}e^{-\lambda(\tau-t)\tau}e^{(n-1)\alpha t}, \\ \tau &\geq t, \quad \tau \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (3.7)$$

В дальнейшем будем рассматривать задачу 1 и последующие задачи  $2, \dots, k$  на фиксированном промежутке  $[0, \bar{t}]$ . То есть в (1.6), (2.1)–(2.10), (2.12), (2.13), (2.15)–(2.23) полагаем  $t_1 = \bar{t}$ ,

#### 4. ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Рассмотрим систему (2.26) с начальными данными (2.28), замкнутую вспомогательным управлением (3.6), полученного в ходе доказательства леммы в работе [19], на промежутке  $[0, \bar{t}]$ . В силу (3.5), (3.6) эта система примет вид

$$\frac{d\bar{c}^{2n-1}}{d\tau} = C\bar{c}^{2n-1} + \sum_{i=1}^4 \bar{R}_i(c^{2n-1}, d, \tau), \quad C = \bar{P} + \bar{Q}M(\tau). \quad (4.1)$$

Если пользоваться рассуждениями, приведенными при доказательстве теоремы в работе [19], с учетом (3.1)–(3.4), (3.7), замечания 1, а также замены  $\|\bar{x}\|$  и  $\|F\|$  на  $\varepsilon\|\bar{x}_1\|$  и формулы (4.15) в [19] на формулу  $c^{2n-1} = (\bar{t})^n z e^{-n\alpha\tau}$ , то для любого  $\bar{x}_1$  из области (1.4) можно найти  $\varepsilon_1 : 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 \leq 1$  такое, что решение системы (4.1) с начальными данными (2.28), (2.23) (с учетом замены  $\varepsilon(t_1)\bar{x}_1$  на  $\varepsilon_1\bar{x}_1$ ), не покидает область (2.30) и удовлетворяет условиям (2.29). В результате будем иметь пару функций  $\bar{c}^{2n-1}(\tau)$ ,  $w(\tau)$ , удовлетворяющую системе (4.1), которая является решением задачи (2.26), (2.29). В свою очередь пара функций  $\bar{c}^{2n-1}(\tau) = (c^{2n-1}(\tau), d(\tau))$  после перехода к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (2.20), (2.15), (2.11), (2.9), (2.6), (2.3) и предельного перехода при  $t \rightarrow \bar{t}$ , согласно (1.2) и замечаниям 3 и 2, дает пару функций

$$\begin{aligned} x^1(t) &\in C^{2n-1}([0, \bar{t}]; R^n), \quad x^1(t) = (x_1^1(t), \dots, x_n^1(t))^T, \\ u^1(t) &\in C^{2n-1}([0, \bar{t}]; R^r), \quad u^1(t) = (u_1^1(t), \dots, u_r^1(t))^T, \end{aligned} \quad (4.2)$$

которая является решением задачи 1, т.е. функции (4.2) удовлетворяют системе

$$\dot{x}^1(t) = f(x^1(t), u^1(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4.3)$$

и условиям

$$x^1(0) = \bar{x}, u^1(0) = 0 \quad x^1(\bar{t}) = (1 - \varepsilon_1)\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \quad u^1(\bar{t}) = 0, \quad \|\bar{x}_2\| < \|\bar{x}_1\|. \quad (4.4)$$

Из условий (1.2), (2.27), (2.29) и (4.2) следует

$$\frac{d^k u^1}{dt^k}(\bar{t}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2n - 1, \quad (4.5)$$

**Задача 2.** Найти пару функций  $\mathbf{x}^2(t) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}]; R^n)$ ,  $\mathbf{u}^2(t) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}]; R^r)$ , удовлетворяющую системе (1.1) и условиям

$$\mathbf{x}^2(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}^2(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^2(\bar{t}) = (1 - \varepsilon)\bar{\mathbf{x}}_2 = \bar{\mathbf{x}}_3, \quad \mathbf{u}^2(\bar{t}) = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

В (4.6)  $\varepsilon : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$  подлежит определению. Выполним в системе (1.1) замену

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{y} + \mathbf{x}^1(t), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T, \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{u}^1(t), \quad \mathbf{v}^{(1)} = (v_1^{(1)}, \dots, v_r^{(1)})^T, \quad t \in [0, \bar{t}]. \quad (4.7)$$

В результате, с учетом (4.3), (4.4), (4.6), (4.7), в новых переменных система (1.1) и условия (4.6) примут вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}^1(t), \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{u}^1(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4.8)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^{(1)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(\bar{t}) = -\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2, \quad \mathbf{v}^{(1)}(\bar{t}) = \mathbf{0}. \quad (4.9)$$

После подстановки (2.6) (с заменой  $\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1$  на  $\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2$ ) в левую и правую часть (4.8) с учетом (4.9) получим аналог системы (2.7) и условий (2.8)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{f}(\mathbf{a} - \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{x}^1(t), \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{u}^1(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t)) = \\ &= \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \\ \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t)) &\equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{a}(0) = \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2, \quad \mathbf{v}^{(1)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^{(1)}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при } t \rightarrow \bar{t}. \quad (4.11)$$

В результате перехода к независимой переменной  $\tau$  в (4.10), (4.11) по формуле (2.9) получаем аналог системы (2.10) и условий (2.12)

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\tau} = \alpha \bar{t} e^{-\alpha\tau} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{c}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{d}, \mathbf{x}^1(t(\tau)), \mathbf{u}^1(t(\tau))), \quad (4.12)$$

$$\mathbf{c}(\tau) = \mathbf{a}(t(\tau)), \quad \mathbf{d}(\tau) = \mathbf{v}^{(1)}(t(\tau)),$$

$$\mathbf{c}(0) = \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2, \quad \mathbf{d}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}(\tau) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}(\tau) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

После разложения правой части системы (4.10) в окрестности точки  $(\mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{0}, t = \bar{t})$ , преобразований (2.20) и присоединения системы (2.24) будем иметь аналог системы (2.26), (2.27) и начальных условий (2.28). Ее линейная часть является аналогом системы (3.5). Воспользовавшись рассуждениями, приведенными при решении задачи 1, применительно к системе (4.12) и условиям (4.13) можно найти  $\varepsilon = \varepsilon_2 : 0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$  и пару функций  $x^2(t, \bar{\mathbf{x}}_3) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}])$ ,  $u^2(t, \bar{\mathbf{x}}_3) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}])$ ,  $t \in [0, \bar{t}]$ , удовлетворяющую системе

$$\frac{d\mathbf{x}^2}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^2(t), \mathbf{u}^2(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4.14)$$

и условиям (4.6). Кроме того, согласно (2.29), (4.5) имеем

$$\frac{d^k \mathbf{u}^2}{dt^k}(\bar{t}) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1, \quad \|\bar{\mathbf{x}}_3\| < \|\bar{\mathbf{x}}_2\| < \|\bar{\mathbf{x}}_1\|.$$

**Задача К.** Используя рассуждения, приведенные при решении задачи 2 и индуктивный переход получим пару функций

$$\mathbf{x}^k(t) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}]), \quad \mathbf{u}^k(t) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}]), \quad (4.15)$$

которая удовлетворяет системе

$$\frac{d\mathbf{x}^k}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k(t), \mathbf{u}^k(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4.16)$$

и условиям

$$\mathbf{x}^k(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}^k(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^k(\bar{t}) = (1 - \varepsilon_k)\bar{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_{k+1}, \quad \mathbf{u}^k(\bar{t}) = \mathbf{0}. \quad (4.17)$$

Кроме того,

$$\frac{d^k \mathbf{u}^k}{dt^k}(\bar{t}) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1, \quad \|\bar{\mathbf{x}}_{k+1}\| < \dots < \|\bar{\mathbf{x}}_3\| < \|\bar{\mathbf{x}}_2\| < \|\bar{\mathbf{x}}_1\|. \quad (4.18)$$

**Замечание 4.** Из условий (1.2)–(1.5), (4.18) следует, что процедуру решения задач  $1, \dots, k$  можно завершить при выполнении условия  $\|\bar{x}_k\| < \varepsilon$  и продолжить решение поставленной задачи по алгоритму, разработанному в [19]. Величина  $\varepsilon > 0$  фигурирует в формулировке теоремы из упомянутой работы.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что процедура решения  $k$ -й задачи может быть продолжена  $\forall \bar{x}_k : \|\bar{x}_k\| \geq \varepsilon$ . Предположим противное, тогда

$$\bar{x}_k \rightarrow \bar{y} \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad \|y\| \geq \varepsilon. \quad (4.19)$$

Выполним в системе (4.16) замены

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^k(t) &= \mathbf{y} + \mathbf{x}^{k-1}(t), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T, \\ \mathbf{u}^k(t) &= \mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{u}^{k-1}(t), \quad \mathbf{v}^{(k-1)} = (v_1^{(k-1)}, \dots, v_r^{(k-1)})^T, \quad t \in [0, \bar{t}], \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{a}(t) - (\varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k + (\bar{\mathbf{y}} - \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k)), \quad \bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)^T. \quad (4.21)$$

В результате преобразований (4.20) и (4.21) система (4.16) и аналог условий (4.11) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{f}(\mathbf{a} - (\varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k + (\bar{\mathbf{y}} - \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k)) + \mathbf{x}^{k-1}(t), \quad \mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{u}^{k-1}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{k-1}(t), \mathbf{u}^{k-1}(t)) = \\ &= \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}, \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k + (\bar{\mathbf{y}} - \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k), \mathbf{v}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{k-1}(t), \mathbf{u}^{k-1}(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \\ \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}^{k-1}(t), \mathbf{u}^{k-1}(t)) &\equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T, \\ \mathbf{a}(0) &= \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k + \bar{\mathbf{y}} - \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k, \quad \mathbf{v}^{(k-1)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^{(k-1)}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \rightarrow \bar{t}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Если разложить в ряд Тейлора правую часть системы (4.22) в окрестности точки  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}^{(k-1)} = \mathbf{0}$ ,  $t = \bar{t}$ , использовать замену независимой переменной  $t$  по формуле (2.9) и применить алгоритм решения задачи  $k$ , основанный на решении задач 1, 2, то, согласно условию (4.19), для достаточно большого  $k = m$  получим пару функций  $x^m(t)$ ,  $u^m(t)$ , удовлетворяющую системе (4.16) и условиям  $\mathbf{x}^m(0) = \bar{\mathbf{x}}$ ,  $u^m(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}^m(\bar{t}) = \bar{\mathbf{y}}$ ,  $u^m(\bar{t}) = \mathbf{0}$ . В свою очередь после решения задачи  $k = m + 1$  получим пару функций  $x^{m+1}(t)$ ,  $u^{m+1}(t)$ , удовлетворяющую системе (4.16) и условиям  $\mathbf{x}^{m+1}(0) = \bar{\mathbf{x}}$ ,  $u^{m+1}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}^{m+1}(\bar{t}) = (1 - \varepsilon)\bar{\mathbf{y}}$ ,  $u^{m+1}(\bar{t}) = \mathbf{0}$ ,  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 1$ . Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения о продолжимости процедуры решения задач  $1, \dots, k$ . Теорема доказана.

#### 4.1. Описание алгоритма

На основе доказательства теоремы алгоритм решения поставленной задачи состоит из следующих этапов.

##### Решение задачи 1.

1. При заданном значении  $C > 0$  из условия  $L = \max_{\|x\| \leq C} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})\|$ ,  $0 < t_0 < \frac{C}{2L}$ , находится величина  $t_0$ . Выполняется численными методами.
2. Решение задачи Коши для системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ ,  $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$ , на промежутке  $[0, t_0]$ . В результате получим функцию фазовых координат  $\boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $t \in [0, t_0]$ , и состояние  $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_1$ . Выполняется численными методами.
3. Построение системы (2.26). Выполняется аналитическими методами.
4. Построение матриц (2.22), (2.27). Выполняется аналитическими методами.
5. Нахождение момента  $\bar{t}$  из условия  $0 < t_1 \leq \bar{t} \leq t_0 : \text{rank} \{L_1, L_2, \dots, L_n\} = \text{rank} \{\bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_n\} = n$  для всех  $s\bar{x}_1$ ,  $s \in [0, 1]$ , где

$$\begin{aligned} L_1 &= Q(t_1), \quad L_i = P(t_1)L_{i-1} - \frac{dL_{i-1}}{d\tau}, \\ \bar{L}_1 &= \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} Q_1(t_1), \quad \bar{L}_i = \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} P_1(t_1) \bar{L}_{i-1} - \frac{d\bar{L}_{i-1}}{d\tau}, \quad i = 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Выполняется аналитическими методами.

6. Решение задачи стабилизации системы (3.5). В результате получаем закон вспомогательного управления в виде обратной связи (3.6). Выполняется аналитическими методами.

7. Переход в обратной связи к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (2.20), (218), (2.15), (2.11), (2.9). В результате будем иметь вспомогательную управляющую функцию  $\bar{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}(\tau(t))$ .

8. Решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{a}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{a} - \varepsilon_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{0}), \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \alpha^{-1}(\bar{t} - t)^{-1} \mathbf{v}_1(\tau(t)), \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \alpha^{-1}(\bar{t} - t)^{-1} \mathbf{v}_{i+1}(\tau(t)), \quad i = 1, \dots, 2n - 2, \\ \frac{d\mathbf{v}_{2n-1}}{dt} &= \bar{\mathbf{w}}(t)\end{aligned}$$

с начальными данными  $\mathbf{a}(0) = \varepsilon_1 \bar{\mathbf{x}}_1$ ,  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, \dots, 2n - 1$ , на промежутке  $[0, \bar{t}]$ . В результате получим известные функции  $\mathbf{a}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ .

9. Построение функций  $\mathbf{x}^1(t)$ ,  $\mathbf{u}^1(t) = \mathbf{u}(t)$  по формулам  $\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{a}(t) - \varepsilon_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \boldsymbol{\varphi}(t)$ ,  $\mathbf{u}^1(t) = \mathbf{u}(t)$ . В результате получаем пару функций  $\mathbf{x}^1(t)$ ,  $\mathbf{u}^1(t)$ , удовлетворяющую системе (4.3) и условиям (4.5), (4.4). Выполняется численными методами.

При  $\|\bar{\mathbf{x}}_2\| < \varepsilon$  задача решается по алгоритму из работы [19] (см. замечание 4).

#### Решение задачи 2.

1. Построение системы (4.12). Выполняется аналитическими методами.
2. С помощью оценок (3.2), (3.3), (3.7), (4.6) и (4.22), (4.23) из [19] (с учетом замены  $F$  на  $\varepsilon \bar{x}_1$ ) находится значение  $0 < \varepsilon_2 \leq 1$ .
3. Построение матриц (2.22) и (2.27) с учетом замены  $t_1$  на  $\bar{t}$  и  $\varepsilon_1$  на  $\varepsilon_2$ . Выполняется аналитическими методами.
4. Решение задачи стабилизации системы (3.5). В результате получаем закон вспомогательного управления в виде обратной связи (3.6). Выполняется аналитическими методами.
5. Переход в обратной связи к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (2.20), (218), (2.15), (2.11), (2.9). В результате будем иметь вспомогательную управляющую функцию  $\bar{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}(\tau(t))$ .
6. Решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{a}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{a} - \varepsilon_2 \bar{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{x}^1(t), \mathbf{u} + \mathbf{u}^1(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t)), \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \alpha^{-1}(\bar{t} - t)^{-1} \mathbf{v}_1(\tau(t)), \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \alpha^{-1}(\bar{t} - t)^{-1} \mathbf{v}_{i+1}(\tau(t)), \quad i = 1, \dots, 2n - 2, \quad \frac{d\mathbf{v}_{2n-1}}{dt} = \bar{\mathbf{w}}(t)\end{aligned}$$

с начальными данными  $\mathbf{a}(0) = \varepsilon_2 \bar{\mathbf{x}}_2$ ,  $\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}$ ,  $i = 1, \dots, 2n - 1$ , на промежутке  $[0, \bar{t}]$ . В результате получаем пару функций  $\mathbf{x}^2(t) = \mathbf{a}(t) - \varepsilon_2 \bar{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{x}^1(t)$ ,  $\mathbf{u}^2(t) = \mathbf{u}^1(t) + \mathbf{u}(t)$ , удовлетворяющую системе (4.14) и условиям (4.6) при  $\varepsilon = \varepsilon_2$ . Выполняется численными методами.

Процедура решения задачи **К** совпадает с процедурой решения задачи 2 с учетом замены  $\varepsilon_2$  на  $\varepsilon_k$ . В результате получим пару функций  $x^k(t)$ ,  $u^k(t)$ , удовлетворяющую системе (4.16) и условиям (4.15), (4.17) и (4.18). При  $\|\mathbf{x}^k(\bar{t})\| < \varepsilon$  решение поставленной задачи продолжается по алгоритму из работы [19].

**Пример.** Пусть правая часть системы (1.1) имеет вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \{b_{ij}(\mathbf{x})\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r, \quad \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)^T.$$

Алгоритм решения поставленной задачи для данной правой части состоит из следующих этапов.

#### Решение задачи 1.

1. Проверка условия (1.5) в области (1.4), где  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$ .
2. Нахождение константы  $L = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq C} \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|$ , и момента  $t_0 \leq \frac{C}{2L}$ .

## 3. Решение задачи Коши для системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad t \in [0, t_1], \quad \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{C}{2}, \quad 0 < t_1 \leq t_0.$$

В результате получим известную функцию  $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$  и вектор  $\bar{\mathbf{x}}_1 = \boldsymbol{\varphi}(t_1)$ .

## 4. Построение аналога системы (2.7)

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{g}(\mathbf{a} + \boldsymbol{\varphi}(t) - \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1) + \mathbf{B}(\mathbf{a} + \boldsymbol{\varphi}(t) - \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1)\mathbf{u} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{0}) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}(t)), \quad t \in [0, t_1],$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}(t)) \equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T.$$

## 5. Построение аналога системы (2.13).

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \bar{b}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \sum_{j=1}^r b_{ij}(\mathbf{x})u_j, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dc_i}{d\tau} &= \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r b_{ij}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_j + \\ &+ \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \frac{1}{2} \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \left[ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_j c_k + \right. \\ &+ 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial u_k \partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_j d_k + 2 t_1 e^{-\alpha\tau} \alpha \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) c_j + \\ &+ 2 t_1 e^{-\alpha\tau} \alpha \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial u_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) d_j + t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \left. \right] + \dots \\ &+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-2} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{|k|+l} g_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^l}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} e^{-l\tau} t_1^l + \\ &+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-2} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{|k|+l+1} \bar{b}_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^l \partial u_1 \dots \partial u_r}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1 \dots d_r e^{-l\tau} t_1^l + \\ &+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-1} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{|k|+l} g_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^l}(\tilde{c}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{t}_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} e^{-l\tau} t_1^l + \\ &+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-1} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{|k|+l+1} \bar{b}_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1 \dots \partial u_r \partial t^l}(\tilde{c}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{t}_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1 \dots d_r e^{-l\tau} t_1^l. \end{aligned}$$

После замены (2.15) получим аналог системы (2.16)

$$\begin{aligned} \frac{dc_i^1}{d\tau} &= -\alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - \\ &- \alpha^2 t_1^3 e^{-3\alpha\tau} \sum_{k=1}^n \sum_{j=n}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha t_1^3 e^{-3\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \\ &+ \alpha \left( e^{-\alpha\tau} t_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_j^1 - e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j^1 \right) + \\ &+ \alpha e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) c_j^1 + \alpha (e^{-\alpha\tau} t_1 \sum_{j=1}^r b_{ij}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) d_j - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^{-2\alpha\tau}t_1^2 \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial u_k \partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k + e^{-2\alpha\tau}t_1^2 \alpha \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial u_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) d_j + \\
& + \frac{1}{2} \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_j^1 c_k^1 + \alpha e^{-\alpha\tau} t_1 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial x_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k c_j^1 + \\
& + \frac{1}{2} \alpha e^{-3\alpha\tau} t_1^3 \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \dots \\
& \dots + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-2} \frac{1}{k!l!} D^{|k|+|l|} g_i(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) (c_1^1 - e^{-\alpha\tau} t_1 \Psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_1} \times \dots \\
& \dots \times (c_n^1 - e^{-\alpha\tau} t_1 \Psi_n(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_n} t_1^l + \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-2} \frac{1}{k!l! \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \frac{\partial^{k+l+1}}{\partial u_1 \dots \partial u_r \partial t^l} \bar{b}_i(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{t}_1) (c_1^1 - e^{-\alpha\tau} t_1 \Psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_1} \times \dots \\
& \dots \times (c_n^1 - e^{-\alpha\tau} t_1 \Psi_n(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_n} d_1 \times \dots \times d_r t_1^l + \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-1} \frac{1}{k!l!} D^{|k|+|l|} g_i(\tilde{c}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{t}_1) (c_1^1 - t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{x}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_1} \times \dots \\
& \times (c_n^1 - t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_n} e^{-l\tau} t_1^l + \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-1} \frac{1}{k!l! \partial t^l} \frac{\partial^{k+l+1}}{\partial u_1, \dots, \partial u_r} \bar{b}_i(\tilde{c}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{t}_1) (c_1^1 - t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{x}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_1} \times \dots \\
& \times (c_n^1 - t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_n} d_1 \dots d_r e^{-l\tau} t_1^l.
\end{aligned}$$

В результате преобразований (2.20) получим аналог системы (2.21). Первые два слагаемых матрицы (2.22) примут вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1(t_1) &= \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1), \quad \mathbf{Q}_1(t_1) = b_{ij}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1), \\
\mathbf{P}_2(t_1) &= e^{-\alpha\tau} t_1 \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \alpha \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) \right), \\
\mathbf{Q}_2(t_1) &= e^{-\alpha\tau} t_1 \left( \alpha \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial u_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial u_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \right).
\end{aligned}$$

Далее находим  $t_1 = \bar{t}$  из условия указанного в п. 5 решения задачи 1 и строим вспомогательную систему (2.26), (2.27) с учетом конкретизации матриц  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{Q}$ . Далее решаются задачи  $1, \dots, k$  по алгоритмам, приведенным выше, с учетом конкретизации правой части системы (1.1):  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}$ .

## 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ

В качестве иллюстрации предложенного метода рассмотрим задачу управления однозвенным роботом-манипулятором при переносе груза в заданную точку. В соответствии с [20], система уравнений, описывающая движение манипулятора с учетом возмущений имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -a_2 \sin x_1 - a_1 x_2 + u,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

где  $x_1$  — угол отклонения манипулятора от вертикальной оси,  $x_2$  — скорость изменения угла отклонения,  $a_1 = \bar{\alpha} L^{-2} m_1^{-1}$ ,  $m_1 = m_0 + \frac{M}{3}$ ,  $a_2 = g L^{-1} (m_0 + \frac{M}{2}) m_1^{-1}$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\bar{\alpha}$  — коэффициент трения,  $m_0$  — масса переносимого груза,  $L$  — длина манипулятора,  $M$  — масса манипулятора,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ ,  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$ . Рассмотрим граничные условия

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad u(0) = 0, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{0}, \quad u(1) = 0. \tag{5.2}$$

После решения задачи Коши для системы (5.1) с начальными данными (5.2) на промежутке  $[0, \bar{t}]$  при  $u = 0$  будем иметь функцию  $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$ , вектор состояния  $\bar{\mathbf{x}}_1 = (\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2)^T$ ,  $\bar{x}_1^1 = \varphi_1(\bar{t})$ ,  $\bar{x}_1^2 = \varphi_2(\bar{t})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (0, 1)^T$ ,

$g_1(\mathbf{x}) = x_1, g_2(\mathbf{x}) = -a_2 \sin x_1 - a_1 x_2$ . Вспомогательная система (2.7) и условия (2.8) (при  $\varepsilon(t_1) = 1$ ) для задачи (5.1), (5.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{db_1}{dt} &= b_2 - \bar{x}_2, \\ \frac{db_2}{dt} &= -a_2 \sin(b_1 - \bar{x}_1 + \varphi_1(t)) - a_1 b_2 + a_1 \bar{x}_2 + a_2 \sin \varphi_1(t) + u, \\ \Psi(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, 0, t_1) &= (\psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, 0, t_1), \psi_2(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, 0, t_1))^T, \\ \psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, 0, t_1) &= -\bar{x}_2, \psi_2(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, 0, t_1) = a_1 \varphi_2(t_1) + a_2 \sin \varphi_1(t_1), \\ b_1(0) &= \varphi_1(\bar{t}), \quad b_2(0) = \varphi_2(\bar{t}), \quad u(0) = 0, \quad b_i(t) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \quad u(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_1. \end{aligned}$$

После замены (2.9) (при  $t_1 = \bar{t}$ ) получим аналог системы (2.10) и матриц

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{d\tau} &= \bar{t} a e^{-\alpha \tau} c_2 - \bar{t} a e^{-\alpha \tau} \varphi_2(\bar{t}), \\ \frac{dc_2}{d\tau} &= -\bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_2 \sin(c_1 - \varphi_1(\bar{t}) + \bar{\varphi}_1(\tau)) - \bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_1 c_2 + \\ &+ \bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_1 \varphi_2(\bar{t}) + \bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_2 \sin \bar{\varphi}_1(\tau) + \bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_2 \sin \bar{\varphi}_1(\tau) + \bar{t} a e^{-\alpha \tau} d, \\ \frac{d}{d\tau} d &= v, \\ \bar{\varphi}_1(\tau) &= \varphi_1(t(\tau)), \quad c_1(\tau) = b_1(t(\tau)), \quad c_2(\tau) = b_2(t(\tau)), \\ d(\tau) &= u(t(\tau)), \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$c_1(0) = \bar{x}_1^1, \quad c_2(0) = \bar{x}_1^2, \quad d(0) = 0, \quad c_i(\tau) \rightarrow 0, \quad v(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2. \tag{5.4}$$

Для решения задачи (5.3), (5.4) выполним замены переменных  $c_2(\tau), c_1(\tau)$  по формулам

$$c_2(\tau) = c_2^{(1)}(\tau) - \bar{t} e^{-\alpha \tau} a_1 \varphi_2(\bar{t}) - \bar{t} e^{-\alpha \tau} a_2 \sin \varphi_1(\bar{t}), \quad c_1(\tau) = c_1^{(1)}(\tau) + \bar{t} e^{-\alpha \tau} \varphi_2(\bar{t}). \tag{5.5}$$

В результате система (5.3) примет вид

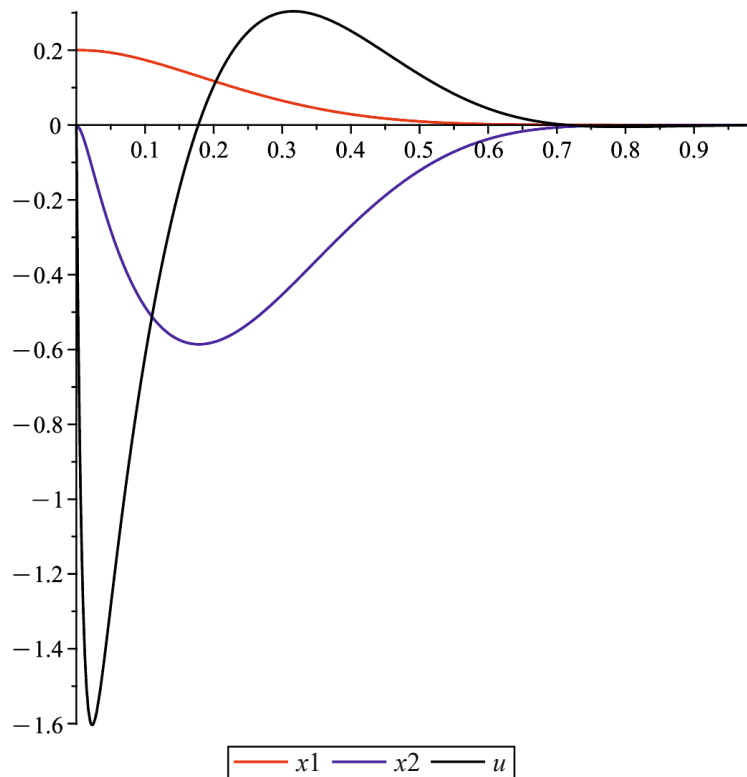
$$\begin{aligned} \frac{dc_1^{(1)}}{d\tau} &= \bar{t} a e^{-\alpha \tau} c_2^{(1)} - \bar{t}^2 e^{-2\alpha \tau} (a_1 \varphi_2(\bar{t}) + a_2 \sin \varphi_1(\bar{t})), \\ \frac{dc_2^{(1)}}{d\tau} &= -\alpha e^{-\alpha \tau} \bar{t} a_2 \sin(c_1^{(1)} + \bar{t} e^{-\alpha \tau} \varphi_2(\bar{t}) - \varphi_1(\bar{t}) + \bar{\varphi}_1(\tau)) - \\ &- \alpha e^{-\alpha \tau} \bar{t} a_1 c_2^{(1)} - \alpha \bar{t}^2 e^{-2\alpha \tau} a_1 \varphi_2(\bar{t}) - \alpha \bar{t}^2 e^{-2\alpha \tau} a_2 \sin \varphi_1(\bar{t}) + \alpha e^{-\alpha \tau} d, \\ \frac{d}{d\tau} d &= v. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Линейная часть системы (5.6) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{c}}}{d\tau} &= \alpha e^{-\alpha \tau} \bar{P} \bar{\mathbf{c}} + \alpha e^{-\alpha \tau} \bar{\mathbf{Q}} v, \quad \bar{\mathbf{c}} = (c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, d)^T, \\ \bar{P} &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{t} a e^{-\alpha \tau} & 0 \\ -\bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_2 & -\bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_1 & \bar{t} a e^{-\alpha \tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{t} a e^{-\alpha \tau} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

После решения задачи стабилизации системы (5.7) по алгоритму, предложенному в [19], и перехода к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (2.9), (2.11), (5.5) будем иметь закон вспомогательного управления в исходных переменных  $x_1, x_2, t$ :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}(t) &= M(t) \bar{\mathbf{c}} + \bar{\mathbf{v}}(t), \quad \bar{\mathbf{c}} = (x_1, x_2, u)^T, \\ \bar{M}(t) &= M(\tau(t)) = \begin{pmatrix} -(\bar{t} - t) a_1 a_2 \bar{t} a + 3 a a_2 + 6 a_2 - \frac{1}{\alpha^2 \bar{t}^2} (\bar{t} - t)^{-2} (8 \bar{t}^3 \alpha^3 + 24 \bar{t}^2 \alpha^2 + 22 \bar{t} \alpha + 6) \\ -a_1^2 \bar{t} a + a_2 (\bar{t} - t) \bar{t} a + 3 a_1 \bar{t} a + 6 a_1 - \frac{1}{\alpha} (\bar{t} - t)^{-1} (7 \bar{t}^2 \alpha^2 + 18 \bar{t} \alpha + 11) \\ a_1 \alpha \bar{t} (\bar{t} - t) - 3 \alpha \bar{t} - 6 \end{pmatrix}^T, \\ \bar{\mathbf{v}}(t) &= \bar{M}(t) ((t - \bar{t}) \varphi_2(\bar{t}), (\bar{t} - t) (a_1 \varphi_2(\bar{t}) + a_2 \sin \varphi_1(\bar{t}), 0)^T. \end{aligned} \tag{5.8}$$



Фиг. 1.

На заключительном этапе находим решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_2 - a_2 \sin x_1 + u, \\ \dot{u} &= \bar{v}(t),\end{aligned}$$

замкнутой вспомогательным управлением (5.8), на промежутке  $[0, 99]$  с начальными данными:  $x_1(0) = x_1$ ,  $x_2(0) = x_2$ ,  $d(0) = 0$ . В процессе численного моделирования находилось решение задачи (5.1), (5.2) при  $C = 2$ ,  $x_1 = 0.2$  рад,  $x_2 = 0$  рад/сек,  $\bar{\alpha} = 0.1$ ,  $\alpha = 0.25$ ,  $L = 15$  м,  $M = 20$  кг,  $m_0 = 1$  кг,  $\bar{t} = 1$ ,  $g = 9.8$ .

На фиг. 1 представлены графики функций фазовых координат  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и управления  $u(t)$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты решения задачи управления роботом-манипулятором и ее численное моделирование показывают, что предложенный в работе метод может быть применен при решении конкретных практических задач. В том числе при решении задачи глобальной стабилизации на конечном промежутке времени широкого класса нелинейных управляемых систем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grasse K.A. On the relation between small-time local controllability and normal self-reachability // Math. Control Signal systems. 1992. V. 5. P. 41–66.
2. Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем. М.: Наука, 1997.
3. Krastanov M.I. A necessary condition for small-time local controllability // J. of dynamic and control systems. 1998. V. 4. P. 425–456.
4. Krastanov M, Quincampoix M. Local small time controllability and attainability of a set for nonlinear control system // ESEAIM Control, Optimization and Calculus of variations. 2001. V. 6. P. 499–516.
5. Krastanov M.I. A sufficient condition for small-time local controllability // SIAM J.Control Optim. 2009. V. 48. Issue 4. P. 2296–2322.

6. *Cesar O. Agullar, Andrew D. Lewis* Small-Time Local Controllability for a Class of Homogeneous Systems // SIAM J. of control and Optimization. 2012. V. 50. Issue. 3. P. 1502–1517.
7. *Крищенко А.П., Фетисов Д.А.* Терминальная задача для многомерных аффинных систем // Докл. АН. 2013. Т. 452. № 2. С. 144–149.
8. *Крищенко А.П., Фетисов Д.А.* Преобразование аффинных систем и решение задач терминального управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2013. № 2. С. 3–16.
9. *Fetisov D.A.* Terminal control problem for affine systems. // Diff. Equa. 2013. V. 49. № 11. P. 1378–1388.93C35.
10. *Крищенко А.П., Фетисов Д.А.* Задача терминального управления для аффинных систем // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 11. С. 1410–1420.
11. *Фетисов Д.А.* Решение терминальных задач для аффинных систем квазиканонического вида на основе орбитальной линеаризации // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 12. С. 1660–1668.
12. *Фетисов Д.А.* Решение терминальных задач для аффинных систем с векторным управлением на основе орбитальной линеаризации // Матем. и матем. моделирование. 2015. С. 17–31.
13. *Cesar O. Aquilar, A. Di. Lewis* Small-time controllability of homogeneous systems // Engng Mathematics. 2015. P. 1–17.
14. *Hermes H.* Lie algebras of vector fields and local approximation of attainable sets // SIAM J. Control Opt. 1978. V. 16. P. 715–727.
15. *Фетисов Д.А.* О построении решений терминальных задач для многомерных аффинных систем квазиканонического вида // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 12. С. 1709–1720.
16. *Saber Jafarpour* On smaii-time local controllability // Optimization and Control. 2019. V. 7. P. 1–22.
17. *Krastanov M., Nikolova N.* A necessary condition for small-time local controllability // Automatica. 2021. V. 124. Article ID 109258.5P.
18. *Krastanov M., Nikolova M.* On the small-time local controllability // Systems and Control Letters. 2023. V. 177. Article ID.105535.
19. *Квитко А.Н.* Об одном методе решения локальной граничной задачи для нелинейной стационарной управляемой системы в классе дифференцируемых управлений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 4. С. 555–570.
20. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. школа, 1998.

## SOLVING THE TERMINAL CONTROL PROBLEM FOR A NONLINEAR STATIONARY SYSTEM IN A LIMITED AREA

A. N. Kvitko\*

199034 St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg State University. University, Russia

\*e-mail: alkvit46@mail.ru, a.kvitko@spbu.ru

Received: 16.05.2024

Revised: 28.05.2024

Accepted: 28.06.2024

**Abstract.** An algorithm is proposed that is sufficiently convenient for numerical implementation to construct a differentiable control function that guarantees the transfer of a wide class of nonlinear stationary systems of ordinary differential equations from the initial state to the origin of coordinates over an unfixed period of time. A constructively sufficient Kalman type condition has been found to guarantee the specified transfer. The effectiveness of the algorithm is obvious in solving a specific practical problem and its numerical modeling.

**Keywords:** controllability, boundary conditions, stabilization.

## ПОИСК ГЛОБАЛЬНОГО ОПТИМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ТОПОЛОГИИ СЕТИ<sup>1)</sup>

© 2024 г. А. Ю. Крылатов<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, СПбГУ, Россия

<sup>2</sup>199178 Санкт-Петербург, 12-я лин. В.О., 13, Институт проблем транспорта, Россия

\*e-mail: a.krylatov@spbu.ru, aykrylatov@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.

Переработанный вариант 25.05.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Статья посвящена проблеме поиска глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети для случая сетей с непересекающимися путями. В рассматриваемой постановке задачи менеджер сети инвестирует в пропускные способности ее элементов, стремясь минимизировать общую задержку, возникающую в результате равновесного распределения потоков. Доказано, что решение исследуемой задачи с необходимостью должно разрешать определенную задачу минимакса. При этом получены условия оптимальности решений возникающей задачи минимакса при достаточно естественных допущениях. На основе полученных результатов разработан новый алгоритм решения задачи оптимизации топологии сети с непересекающимися путями. Библ. 20. Фиг. 3. Табл. 2.

**Ключевые слова:** оптимизация топологии сети, равновесное распределение потоков.

**DOI:** 10.31857/S0044466924100068, **EDN:** KANPGL

### ВВЕДЕНИЕ

Одна из первых постановок задачи оптимизации топологии сети была сформулирована в виде игры Штакельберга (см. [1]). В рамках такой постановки лидер инвестирует в пропускные способности элементов сети, стремясь минимизировать общую задержку (общие затраты), возникающую в результате равновесного распределения потоков на нижнем уровне (см. [2]). Можно выделить две ключевые практические предпосылки, послужившие драйвером к возникновению такой модели. Во-первых, принципиально некооперативное поведение единиц потока в различных реальных сетях. Действительно, в общем случае, некооперативно ведут себя, например, потоки участников движения в улично-дорожных сетях (см. [3]), грузовые потоки в логистических сетях (см. [4]), потоки сигналов в беспроводных сетях (см. [5]). Во-вторых, менеджеры сложных сетей, зачастую, не могут непосредственно влиять на поведение единиц потока, что заставляет их добиваться улучшений в функционировании всей сети через воздействие на ее топологию.

Стоит отметить, что формулируемая указанным образом задача оптимизации топологии сети является одной из самых ресурсоемких, с точки зрения вычислений, задач в области транспортного планирования (см. [6], [7]). Тем не менее, в силу практической значимости этой задачи многие исследователи занимаются разработкой подходов к ее решению. При этом подавляющее большинство разрабатываемых методов, представленных в литературе, основаны на идее приближенного представления реакции нижнего уровня на воздействия верхнего как вектор-функции от переменных пропускных способностей. Нет сомнений, что предположение о существовании такой вектор-функции существенно упрощает изначальную задачу, сводя ее к задаче условной нелинейной оптимизации. Однако на текущий момент не известен ни вид такой функции, ни даже ее свойства (см. [8], [9]). Таким образом, используя различные приближения указанной функции, исследователи получают допустимые решения двухуровневой задачи оптимизации топологии сети, но, как правило, не могут ответить на вопрос, приводят ли получаемые решения к глобальному оптимуму или нет (см. [10], [11]).

Наиболее распространенной среди приближенных представлений реакции нижнего уровня на воздействия верхнего является аппроксимация первого порядка, полученная изначалью для целей анализа чувствительности равновесного распределения потоков к незначительным изменениям пропускных способностей (см. [12],

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22–71–10063).

[13]). Такая аппроксимация оказалась востребованной, поскольку на ее основе можно разрабатывать различные проекционные методы решения (см. [14], [15]). Действительно, приближение первого порядка позволяет эффективно находить точки локального оптимума за счет применения градиентного спуска (см. [16]). Подобные методы продемонстрировали хорошую сходимость к локальным оптимумам, но не смогли справиться с поиском глобального. Исследователи полагают, что множественные локальные оптимумы возникают вследствие невыпуклости задачи оптимизации топологии сети (см. [11], [14]). В то же время, недавние результаты показали, что, по крайней мере, на малых сетях получаемые проекционными методами локальные оптимумы довольно близки к глобальному (см. [17]).

Таким образом, до сих пор существуют открытые исследовательские вопросы в изучении глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети, формулируемой описанным выше образом. В настоящей работе внимание будет сфокусировано на получении условий оптимальности для поиска глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети в случае специальных видов сетей. Рассматриваемые в статье сети встречаются при моделировании автомобильных потоков на элементах улично-дорожной сети с непересекающимися путями (см. [18]), потоков грузов в дистрибутивных сетях звездочного типа (см. [4]), потоков сигналов в беспроводных сетях (см. [5]). В разд. 1 приведена математическая формулировка задачи оптимизации топологии сети в виде задачи двухуровневой оптимизации для рассматриваемого в статье случая сетей. Последующие разделы посвящены исследованию условий оптимальности решения сформулированной задачи.

## 1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сеть в виде ориентированного графа  $G = (V, E)$ . Будем считать, что сеть состоит из  $n$  непересекающихся альтернативных путей (каналов), либо исходящих из единственного истока, либо входящих в единственный сток, либо исходящих из единственного истока и входящих в единственный сток. Множество всех таких непересекающихся альтернатив будем обозначать через  $I$ ,  $|I| = n$ . Предположим, что каждая альтернатива  $i$ ,  $i \in I$ , характеризуется величиной пропускной способности  $y_i$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)^T$  при  $y \in \mathbb{R}^n$ . При этом будем считать, что величины пропускных способностей  $y_i$ ,  $i \in I$ , являются переменными верхнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети, каждая из которых может принимать допустимые значения от  $l_i > 0$  до  $u_i > 0$ , т.е.  $y_i$  принадлежит множеству  $Y_i = \{y_i \mid l_i \leq y_i \leq u_i\}$  для любого  $i \in I$ ;  $l = (l_1, \dots, l_n)^T$  и  $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ . Более того, для каждого  $i \in I$  введем непрерывно-дифференцируемую строго возрастающую выпуклую функцию на множестве вещественных неотрицательных чисел  $g_i(\cdot)$ , принимающую только неотрицательные значения. Функцией  $g_i(y_i)$ ,  $i \in I$ , будем описывать бюджетные затраты, необходимые для увеличения пропускной способности альтернативы  $i$  с величины  $l_i$  до величины  $y_i$  при  $g_i(l_i) = 0$ . При этом общий бюджет, который может быть инвестирован в увеличение пропускной способности всех альтернатив не должен превышать  $U$ :  $\sum_{i \in I} g_i(y_i) \leq U$ . Таким образом, получаем область определения переменных верхнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети:

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in I} g_i(y_i) \leq U \text{ и } l_i \leq y_i \leq u_i \quad \forall i \in I \right\}.$$

В свою очередь, будем считать, что как только допустимый набор величин пропускных способностей  $y \in Y$  задан, поток  $D > 0$  распределяется среди доступных альтернатив. Через  $x_i$  обозначим количество потока, распределенного по альтернативе  $i$ ,  $i \in I$ :  $D = \sum_{i \in I} x_i$  и  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  при  $x \in \mathbb{R}^n$ . Таким образом, получаем область определения переменных нижнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in I} x_i = D \text{ и } x_i \geq 0 \quad \forall i \in I \right\}.$$

Более того, будем считать, что каждая альтернатива  $i$ ,  $i \in I$ , характеризуется функцией задержки (затрат)  $f_i(x_i, y_i)$  единицы потока  $x_i$  по альтернативе с пропускной способностью  $y_i$ . С одной стороны, будем предполагать, что для любого фиксированного положительного  $\bar{y}_i \in \mathbb{R}^1$ ,  $i \in I$ , функция  $f_i(x_i, \bar{y}_i) \in C^3(\mathbb{R}^1)$ , при этом

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(0, \bar{y}_i) = 0, \quad (1)$$

и для  $m = \overline{1, 2}$  справедливо

$$\frac{\partial^m f_i}{\partial x_i^m}(x_i, \bar{y}_i) > 0 \quad \forall x_i > 0. \quad (2)$$

С другой стороны, будем предполагать, что для любого фиксированного  $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^1$ ,  $i \in I$ , функция  $f_i(\bar{x}_i, y_i) \in C^1(\mathbb{R}^1)$ , при этом если  $\bar{x}_i \geq 0$ , то

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(\bar{x}_i, y_i) \leq 0 \quad \forall y_i \in Y_i. \quad (3)$$

В настоящей статье мы рассмотрим двухуровневую задачу оптимизации топологии сети  $G$  в виде игры Штакельберга. Будем предполагать, что лидер стремится минимизировать общие затраты в сети на верхнем уровне оптимизации, в то время как на нижнем уровне происходит равновесное распределение потоков (затраты на всех используемых альтернативах одинаковы и меньше затрат на неиспользуемых). В рамках введенных предположений некооперативная игра равновесного распределения потоков на нижнем уровне является потенциальной игрой и может быть сформулирована в виде следующей задачи условной нелинейной оптимизации (см. [18], [19]):

$$\min_{x \in X} \sum_{i \in I} \int_0^{x_i} f_i(u, y_i) du.$$

Заметим, что при строго возрастающих функциях  $f_i(x_i, y_i)$  по  $x_i$ ,  $i \in I$ , для любого  $y \in Y$  мы получаем задачу минимизации выпуклой целевой функции на выпуклом множестве ограничений. Другими словами, для любого  $y \in Y$  задача оптимизации нижнего уровня имеет единственное решение. В свою очередь, лидер на верхнем уровне стремится минимизировать общие затраты (общую задержку) в сети за счет минимальных инвестиций в увеличение пропускной способности альтернатив (см. [20]):

$$\min_{y \in Y} \sum_{i \in I} f_i(x_i, y_i) x_i + w \sum_{i \in I} g_i(y_i),$$

где вес  $w \geq 0$  определяет значимость инвестиционных затрат в целевой функции верхнего уровня. Таким образом, окончательно получаем следующую задачу двухуровневой оптимизации топологии сети (см. [2]):

$$\min_{y \in Y} \sum_{i \in I} f_i(x_i, y_i) x_i + w \sum_{i \in I} g_i(y_i) \quad (4)$$

при

$$x = \arg \min_{x \in X} \sum_{i \in I} \int_0^{x_i} f_i(u, y_i) du. \quad (5)$$

## 2. РАВНОВЕСИЕ ПОТОКОВ КАК МИНИМУМ РАВНОВЕСНОЙ ЗАДЕРЖКИ

Для любого  $\hat{I} \subseteq I$  зададим функцию

$$\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = \frac{\sum_{i \in \hat{I}} \frac{f_i(x_i, y_i)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}}{\sum_{i \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}} \quad (6)$$

на  $X_{\hat{I}} \times \bar{Y}$ , где  $X_{\hat{I}} = \{x \in X \mid x_i > 0 \Leftrightarrow i \in \hat{I}\}$ , а  $\bar{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid l_i \leq y_i \leq u_i \quad \forall i \in I\}$ .

**Лемма 1.** Для любого  $y \in \bar{Y}$ , если система уравнений  $f_s(x_s, y_s) = f_r(x_r, y_r)$ ,  $s, r \in \hat{I}$ , имеет решение  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ , то  $\hat{x}$  является точкой максимума функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$  на множестве  $X_{\hat{I}}$ .

**Доказательство.** I. Для произвольно выбранного  $y \in \bar{Y}$  рассмотрим Лагранжиан функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$  на множестве  $X_{\hat{I}}$ :

$$L(x, y) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) + \omega \left( D - \sum_{i \in \hat{I}} x_i \right), \quad (7)$$

где  $\omega$  является множителем Лагранжа. Согласно условиям Каруша—Куна—Таккера, решение следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x, y) = 0 \quad \forall i \in \hat{I}, \quad (8)$$

удовлетворяющее  $\sum_{i \in \hat{I}} x_i = D$ , может являться точкой экстремума функции  $f_{\hat{I}}(x, y)$  на множестве  $X_{\hat{I}}$  для заданного  $y \in \bar{Y}$ . Если подставить (7) в (8), то получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_{\hat{I}}(x, y) = \omega \quad \forall i \in \hat{I}. \quad (9)$$

Таким образом, для любого  $y \in \bar{Y}$ , если существует вектор  $x \in X_{\hat{I}}$  и число  $\omega$ , удовлетворяющее системе (9), то выполняются условия оптимальности первого порядка, а значит, такой  $x$  может являться точкой экстремума функции  $f_{\hat{I}}(x, y)$  на множестве  $X_{\hat{I}}$  для заданного  $y \in \bar{Y}$ .

Рассмотрим первые частные производные функции  $f_{\hat{I}}(x, y)$  по каждой из компонент  $x$ :

$$\frac{\partial f_{\hat{I}}}{\partial x_i} = \frac{1}{\sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}}} + \left( \frac{\sum_{s \in \hat{I}} \frac{f_s}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}}}{\sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}}} - f_i \right) \frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}}{\left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right]^2} \quad \forall i \in \hat{I}. \quad (10)$$

Для любого  $\hat{I} \subseteq I$  и  $y \in \bar{Y}$ , если система уравнений  $f_i(x_i, y_i) = f_j(x_j, y_j)$ ,  $i, j \in \hat{I}$ , имеет решение  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ , то, благодаря (10),

$$\frac{\partial f_{\hat{I}}}{\partial x_i}(\hat{x}, y) = \frac{1}{\sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s, y_s)}} \quad \forall i \in \hat{I}. \quad (11)$$

Таким образом, для любого  $y \in \bar{Y}$ , если существует вектор  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$  такой, что  $f_i(\hat{x}_i, y_i) = f_j(\hat{x}_j, y_j)$ ,  $i, j \in \hat{I}$ , то  $\hat{x}$  может являться точкой экстремума функции  $f_{\hat{I}}(x, y)$  на множестве  $X_{\hat{I}}$ , так как в таком случае существует  $\omega = 1 / \sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s, y_s)}$ , при котором  $\hat{x}$  удовлетворяет системе уравнений (9).

II. Для произвольно выбранного  $y \in \bar{Y}$  проверим, является ли  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ , удовлетворяющий  $f_i(\hat{x}_i, y_i) = f_j(\hat{x}_j, y_j)$  для всех  $i, j \in \hat{I}$ , точкой экстремума функции  $f_{\hat{I}}(x, y)$  на множестве  $X_{\hat{I}}$ . Другими словами, проверим выполнимость условий оптимальности второго порядка. Необходимо установить, какие значения принимает квадратичная форма функции Лагранжа

$$Q(x, y) = \sum_{i, j \in \hat{I}} \frac{\partial^2 L(x, y)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \quad (12)$$

в точке  $\hat{x}$  при  $\Delta x_i$ ,  $i \in \hat{I}$ , удовлетворяющих следующим условиям:  
 $\sum_{i \in \hat{I}} \frac{\partial q}{\partial x_i} \Delta x_i = 0$ , где  $q(x) = \sum_{i \in \hat{I}} x_i - D$ , т.е.

$$\sum_{i \in \hat{I}} \Delta x_i = 0. \quad (13)$$

Не умаляя общности, положим, что  $k$  является последним элементом упорядоченного множества  $\hat{I}$ . В таком случае из (13) следует, что

$$\Delta x_k = - \sum_{i=1}^{k-1} \Delta x_i. \quad (14)$$

При этом для произвольно выбранного  $y \in \bar{Y}$ , если система уравнений  $f_s(x_s, y_s) = f_r(x_r, y_r)$ ,  $s, r \in \hat{I}$ , имеет решение  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ , то вторые частные производные функции  $f_{\hat{I}}(x, y)$  по  $x_i$ ,  $i \in \hat{I}$ , в точке  $\hat{x}$  имеют вид

$$\frac{\partial^2 f_{\hat{I}}}{\partial x_i^2}(\hat{x}, y) = 2 \frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\hat{x}_i, y_i)}{\left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, y_i) \right]^2} - \frac{\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i^2}(\hat{x}_i, y_i)}{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\hat{x}_i, y_i)} \quad \forall i \in \hat{I}, \quad (15)$$

в то время как вторые частные производные функции  $f_{\hat{I}}(x, y)$  по  $x_i$  и  $x_j$ ,  $i, j \in \hat{I}$ , в точке  $\hat{x}$  имеют вид

$$\frac{\partial^2 f_{\hat{I}}}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{x}, y) = \frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\hat{x}_i, y_i)}{\left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, y_i) \right]^2} + \frac{\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_j^2}(\hat{x}_j, y_j)}{\left[ \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\hat{x}_j, y_j) \right]^2} \quad \forall i, j \in \hat{I}. \quad (16)$$

Подставляя (14)–(16) в (12), получаем

$$Q(\hat{x}, y) = - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\hat{x}_i, y_i)}{\sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s, y_s)}} (\Delta x_i)^2 - \frac{\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_k^2}(\hat{x}_k, y_k)}{\sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s, y_s)}} \left( \sum_{i=1}^{k-1} \Delta x_i \right)^2.$$

Другими словами, квадратичная форма функции Лагранжа отрицательна в точке  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ . Следовательно, для любого  $y \in \bar{Y}$ , если существует  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$  такой, что  $f_i(\hat{x}_i, y_i) = f_j(\hat{x}_j, y_j)$  для всех  $i, j \in \hat{I}$ , то  $\hat{x}$  является точкой экстремума (максимума) функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$  на множестве  $X_{\hat{I}}$ .

**Лемма 2.** Для любого  $y \in \bar{Y}$  вектор  $\hat{x}$  является точкой экстремума функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$  на множестве  $X_{\hat{I}}$  тогда и только тогда, когда  $f_s(\hat{x}_s, y_s) = f_r(\hat{x}_r, y_r)$  для всех  $s, r \in \hat{I}$ .

**Доказательство.** *Достаточность.* Согласно лемме 1, для любого  $y \in \bar{Y}$ , если система уравнений  $f_s(x_s, y_s) = f_r(x_r, y_r)$ ,  $s, r \in \hat{I}$ , имеет решение  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ , то  $\hat{x}$  является точкой экстремума функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$ .

*Необходимость.* Допустим, существует  $\bar{y} \in \bar{Y}$ , для которого функция  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y})$  имеет точку экстремума  $\bar{x} \in X_{\hat{I}}$  такую, что  $f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s) \neq f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$  для некоторых  $s, r \in \hat{I}$ . В таком случае, поскольку  $\bar{x}$  — точка экстремума функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y})$ , то  $\bar{x}$  должен удовлетворять условиям оптимальности первого порядка (9) для некоторого  $\omega$  при  $y = \bar{y}$ , из чего, с учетом (10), следует, что должен существовать скаляр  $d$ , удовлетворяющий следующим равенствам:

$$\left( \sum_{s \in \hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} - f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \right) \frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)}{\left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \right]^2} = d \quad \forall i \in \hat{I}. \quad (17)$$

Заметим при этом, что  $d$  может равняться нулю тогда и только тогда, когда  $f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s) = f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$  для всех  $s, r \in \hat{I}$ . Однако мы исходим из предположения, что  $f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s) \neq f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$  для некоторых  $s, r \in \hat{I}$ , а значит,  $d \neq 0$ . Таким образом, согласно (17), получаем, что  $(\bar{x}, \bar{y})$  должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\sum_{s \in \hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} = f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} + d \Omega_i(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall i \in \hat{I} \quad (18)$$

при  $d \neq 0$ , где

$$\Omega_i(\bar{x}, \bar{y}) = \left( \sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} \right)^2 \frac{\left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \right]^2}{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} > 0 \quad \forall i \in \hat{I}.$$

Предположим, что  $d > 0$ . В таком случае, с одной стороны, из (18) следует, что

$$\sum_{s \in \hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} > f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} \quad \forall i \in \hat{I}. \quad (19)$$

Однако, с другой стороны, поскольку  $f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s) \neq f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$  для некоторых  $s, r \in \hat{I}$ , то существует  $k \in \hat{I}$  такой, что  $f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \geq f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)$  для всех  $s \in \hat{I}$  и при этом  $f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) > f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$  хотя бы для одного  $r \in \hat{I}$ . Следовательно, для такого  $k$  справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{s \in \hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} < \sum_{s \in \hat{I}} \frac{f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} = f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}. \quad (20)$$

Одновременное выполнение (19) и (20) невозможно, а значит,  $d$  не может быть строго больше нуля.

Предположим, что  $d < 0$ . В таком случае, с одной стороны, из (18) следует, что

$$\sum_{s \in \hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} < f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} \quad \forall i \in \hat{I}. \quad (21)$$

Однако, с другой стороны, поскольку  $f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s) \neq f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$  для некоторых  $s, r \in \hat{I}$ , то существует  $k \in \hat{I}$  такой, что  $f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \leq f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)$  для всех  $s \in \hat{I}$  и при этом  $f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) < f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$  хотя бы для одного  $r \in \hat{I}$ . Следовательно, для такого  $k$  справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{s \in \hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} > \sum_{s \in \hat{I}} \frac{f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} = f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \sum_{s \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}. \quad (22)$$

Одновременное выполнение (21) и (22) невозможно, а значит,  $d$  не может быть строго меньше нуля.

Таким образом, получаем, что  $(\bar{x}, \bar{y})$  должны удовлетворять системе уравнений (18) для некоторого  $d \neq 0$ , и при этом  $d$  не может быть строго больше или строго меньше нуля. Другими словами, приходим к противоречию, доказывающему, что для любого  $y \in \bar{Y}$ , если вектор  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$  является точкой экстремума функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$ , то  $f_s(\hat{x}_s, y_s) = f_r(\hat{x}_r, y_r)$  для всех  $s, r \in \hat{I}$ .

**Лемма 3.** Для любого  $\hat{I} \subseteq I$  и любого  $y \in \bar{Y}$  справедливо неравенство

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \geq f_i(0, y_i) \quad \forall i \in \hat{I}.$$

**Доказательство.** Для произвольного  $\hat{I} \subseteq I$  и  $y \in \bar{Y}$  домножим и разделим  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$  на  $\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_j, y_j)$  при произвольно выбранном  $j \in \hat{I}$ . В таком случае получим

$$\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = \frac{f_j(x_j, y_j) + \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_j, y_j) \sum_{i \in \hat{I} \setminus j} \frac{f_i(x_i, y_i)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}}{1 + \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_j, y_j) \sum_{i \in \hat{I} \setminus j} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}},$$

откуда в силу (1) следует, что

$$\lim_{x_j \rightarrow 0} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = f_j(0, y_j) \quad \forall j \in \hat{I}. \quad (23)$$

Рассмотрим последовательность точек  $x^k \in X_{\hat{I}}$  такую, что  $x_j^1 = \epsilon > 0$  и  $x_j^k > x_j^{k+1}$ , т.е.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_j^k = 0.$$

Поскольку

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \geq \mathbb{f}_{\hat{I}}(x^k, y) \quad \forall k \geq 1,$$

то

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x^k, y),$$

а значит, в силу (23) получаем

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \geq f_j(0, y_j) \quad \forall j \in \hat{I}.$$

**Теорема 1.** Для любого  $y \in Y$  существует единственное решение задачи оптимизации нижнего уровня (5), и если  $x^* \in X$  является этим решением, то

$$\min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \begin{cases} = f_i(x_i^*, y_i) & \text{при } x_i^* > 0, \\ \leq f_i(x_i^*, y_i) & \text{при } x_i^* = 0, \end{cases} \quad \forall i \in I. \quad (24)$$

**Доказательство.** Рассмотрим нелинейную задачу условной оптимизации нижнего уровня (5). Для любого  $y \in Y$  функции  $f_i(x_i, y_i)$ ,  $i \in I$ , являются строго возрастающими на  $X$ , а значит, целевая функция нижнего уровня (5) является выпуклой на выпуклом  $X$ . Следовательно, задача (5) имеет единственное решение для любого  $y \in Y$ , а согласно условиям Каруша–Куна–Таккера, для заданного  $y \in Y$ , если вектор  $x^* \in X$  является решением задачи (5), то частные производные по компонентам  $x$  функции Лагранжа

$$L(x, y) = \sum_{i \in I} \int_0^{x_i} f_i(u, y_i) du + \zeta \left( D - \sum_{i \in I} x_i \right) + \sum_{i \in I} (-x_i) \nu_i,$$

где  $\zeta$  и  $v_i$ ,  $i \in I$ , — множители Лагранжа, должны равняться нулю в точке  $x^*$  (условия стационарности):

$$f_i(x_i^*, y_i) - \zeta - v_i = 0 \quad \forall i \in I$$

при

$$\sum_{i \in I} x_i^* = D. \quad (25)$$

Другими словами,  $x^* \in X$  должен удовлетворять (25) и следующей системе:

$$f_i(x_i^*, y_i) = \zeta + v_i \quad \forall i \in I$$

или

$$f_i(x_i^*, y_i) \begin{cases} = \zeta, & \text{при } x_i^* > 0, \\ \geq \zeta, & \text{при } x_i^* = 0, \end{cases} \quad \forall i \in I, \quad (26)$$

поскольку в силу условий дополняющей нежесткости  $(-x_i^*)v_i = 0$  при  $v_i \geq 0$  и  $x_i^* \geq 0$  для всех  $i \in I$ .

Будем считать, что подмножество  $I^* \subseteq I$  таково, что

$$x_i^* \begin{cases} > 0 & \text{для } i \in I^*, \\ = 0 & \text{для } i \in I \setminus I^*. \end{cases}$$

Покажем, что справедливо

$$\min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, y) = \sup_{x \in X_{I^*}} f_{I^*}(x, y) = f_i(x_i^*, y_i) \quad \forall i \in I^*. \quad (27)$$

С одной стороны, согласно (26),

$$f_i(x_i^*, y_i) = f_j(x_j^*, y_j) \quad \forall i, j \in I^*, \quad (28)$$

а значит, в силу леммы 1  $x^*$  — точка максимума функции  $f_{I^*}(x, y)$  на множестве  $X_{I^*}$ , т.е.

$$\sup_{x \in X_{I^*}} f_{I^*}(x, y) = f_{I^*}(x^*, y),$$

откуда в силу вида функции  $f_{I^*}(x, y)$  следует

$$\sup_{x \in X_{I^*}} f_{I^*}(x, y) = f_i(x_i^*, y_i) \quad \forall i \in I^*. \quad (29)$$

С другой стороны, согласно (26),

$$f_i(x_i^*, y_i) \leq f_j(0, y_j) \quad \forall i \in I^*, j \in I \setminus I^*,$$

или

$$\sup_{x \in X_{I^*}} f_{I^*}(x, y) \leq f_j(0, y_j) \quad \forall j \in I \setminus I^*.$$

В свою очередь, для любого  $\hat{I} \subseteq I$  такого, что  $I^* \subset \hat{I}$  в силу леммы 3

$$f_j(0, y_j) \leq \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, y) \quad \forall j \in \hat{I}.$$

Следовательно, для произвольно выбранного  $j \in I \setminus I^*$ , справедливо:

$$\sup_{x \in X_{I^*}} f_{I^*}(x, y) \leq f_j(0, y_j) \leq \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, y),$$

а значит,

$$\sup_{x \in X_{I^*}} f_{I^*}(x, y) \leq \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, y) \quad (30)$$

для любого такого  $\hat{I} \subseteq I$ , что  $I^* \subset \hat{I}$ .

В то же время, в силу непрерывности и строгого возрастания функций  $f_i(x_i, y_i)$ ,  $i \in I$ , по  $x_i$  на множестве положительных чисел, из (28) следует, что существуют такие  $\Delta x_i^* > 0$ ,  $i \in I^*$ , что

$$f_i(x_i^* + \Delta x_i^*, y_i) = f_j(x_j^* + \Delta x_j^*, y_j) \quad \forall i \in I^* \setminus s$$

при

$$x_s^* = \sum_{i \in I^* \setminus s} \Delta x_i^*$$

для произвольно выбранного  $s \in I^*$ . Другими словами, для  $\hat{I} = I^* \setminus s$  существует  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$  такой, что  $\hat{x}_i = x_i^* + \Delta x_i^*$  для всех  $i \in \hat{I}$  и  $f_i(\hat{x}_i, y_i) = f_j(\hat{x}_j, y_j)$  для всех  $i, j \in \hat{I}$ . В таком случае в силу леммы 1  $\hat{x}$  является точкой максимума функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$  на  $X_{\hat{I}}$ , т.е.

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(\hat{x}, y),$$

откуда, в силу вида функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$ , следует

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = f_i(\hat{x}_i, y_i) \quad \forall i \in \hat{I},$$

что, в силу строгого возрастания функций  $f_i(x_i, y_i)$ ,  $i \in I$ , при  $x_i > 0$ , приводит к

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = f_i(x_i^* + \Delta x_i^*, y_i) > f_i(x_i^*, y_i) \quad \forall i \in I^* \setminus s,$$

а значит, в силу (29),

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) > \sup_{x \in X_{I^*}} \mathbb{f}_{I^*}(x, y).$$

Таким образом, действительно, равенство (27) справедливо, а значит, из (26) следует (24).

### 3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ТОПОЛОГИИ СЕТИ К МИНИМАКСУ

**Теорема 2.** *Решение задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5) существует, и  $y^* \in Y$  является этим решением тогда и только тогда, когда*

$$y^* \in \arg \min_{y \in Y} \left[ \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) D + w \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right]. \quad (31)$$

**Доказательство.** Множество  $Y$  замкнуто и ограничено, при этом для любого  $y \in Y$  существует единственное решение задачи нижнего уровня (5). Следовательно, существует  $y^* \in Y$ , обеспечивающее наименьшее значение целевого функционала верхнего уровня. Другими словами, решение задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5) существует.

**Необходимость.** Пусть  $y^* \in Y$  является решением задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5). В таком случае

$$\sum_{i \in I} f_i(x_i^*, y_i^*) x_i^* + w \sum_{i \in I} g_i(y_i^*) \leq \sum_{i \in I} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \bar{x}_i + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) \quad \forall \bar{y} \in Y, \quad (32)$$

где  $x^* \in X$  и  $\bar{x} \in X$  являются единственными решениями задачи (5) при заданных  $y^* \in Y$  и  $\bar{y} \in Y$  соответственно. Благодаря теореме 1, получаем

$$\min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y^*) \begin{cases} = f_i(x_i^*, y_i^*) & \text{при } x_i^* > 0, \\ \leq f_i(x_i^*, y_i^*) & \text{при } x_i^* = 0, \end{cases} \quad \forall i \in I, \quad (33)$$

и

$$\min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y}) \begin{cases} = f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) & \text{при } \bar{x}_i > 0, \\ \leq f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) & \text{при } \bar{x}_i = 0, \end{cases} \quad \forall i \in I. \quad (34)$$

Если определить  $I^* \subseteq I$  и  $\bar{I} \subseteq I$  такими, что

$$x_i^* \begin{cases} > 0 & \text{для } i \in I^*, \\ = 0 & \text{для } i \in I \setminus I^*, \end{cases} \quad \text{и} \quad \bar{x}_i \begin{cases} > 0 & \text{для } i \in \bar{I}, \\ = 0 & \text{для } i \in I \setminus \bar{I}, \end{cases}$$

то из (33) следует

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} f_i(x_i^*, y_i^*) x_i^* + w \sum_{i \in I} g_i(y_i^*) &= \sum_{i \in I^*} f_i(x_i^*, y_i^*) x_i^* + w \sum_{i \in I} g_i(y_i^*) = \\ &= \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y^*) \sum_{i \in I} x_i^* + w \sum_{i \in I} g_i(y_i^*) = \end{aligned}$$

$$= \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, y^*)D + w \sum_{i \in I} g_i(y_i^*),$$

а из (34) следует

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \bar{x}_i + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) &= \sum_{i \in \bar{I}} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \bar{x}_i + w \sum_{i \in \bar{I}} g_i(\bar{y}_i) = \\ &= \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, \bar{y}) \sum_{i \in \bar{I}} \bar{x}_i + w \sum_{i \in \bar{I}} g_i(\bar{y}_i) = \\ &= \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, \bar{y})D + w \sum_{i \in \bar{I}} g_i(\bar{y}_i). \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольно выбранного  $\bar{y} \in Y$ , в силу (32), приходим к

$$\min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, y^*)D + w \sum_{i \in I} g_i(y_i^*) \leq \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, \bar{y})D + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i).$$

Другими словами,

$$y^* \in \arg \min_{y \in Y} \left[ \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, y)D + w \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right].$$

*Достаточность.* Пусть  $y^* \in Y$  является решением задачи (31), но не является решением задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5). В таком случае существует решение  $\bar{y} \in Y$  задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5) и при этом

$$\sum_{i \in I} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \bar{x}_i + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) < \sum_{i \in I} f_i(x_i^*, y_i^*) x_i^* + w \sum_{i \in I} g_i(y_i^*), \quad (35)$$

где  $x^* \in X$  и  $\bar{x} \in X$  являются единственными решениями задачи (5) при заданных  $y^* \in Y$  и  $\bar{y} \in Y$  соответственно. Однако, если  $x^* \in X$  и  $\bar{x} \in X$  являются решениями задачи (5) при заданных  $y^* \in Y$  и  $\bar{y} \in Y$  соответственно, то, как было показано при доказательстве необходимости,

$$\sum_{i \in I} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \bar{x}_i + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, \bar{y})D + w \sum_{i \in \bar{I}} g_i(\bar{y}_i),$$

а

$$\sum_{i \in I} f_i(x_i^*, y_i^*) x_i^* + w \sum_{i \in I} g_i(y_i^*) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, y^*)D + w \sum_{i \in \bar{I}} g_i(y_i^*),$$

и, значит, из (35) следует

$$\min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, \bar{y})D + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) < \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, y^*)D + w \sum_{i \in I} g_i(y_i^*),$$

что невозможно, поскольку  $y^* \in Y$  является решением задачи (31). Таким образом, приходим к противоречию, доказывающему, что если  $y^* \in Y$  является решением задачи (31), то  $y^* \in Y$  также является решением задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5).

Для любого  $\hat{I} \subseteq I$  зададим функцию

$$\phi_{\hat{I}}(x, y) = f_{\hat{I}}(x, y)D + w \sum_{i \in I} g_i(y_i)$$

на  $X_{\hat{I}} \times Y$ .

**Теорема 3.** *Справедливо равенство*

$$\min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y). \quad (36)$$

**Доказательство.** На множестве  $Y$  зададим

$$\psi_I(y) = \sup_{x \in X_I} \phi_I(x, y)$$

для произвольно выбранного  $\hat{I} \subseteq I$ . Заметим, что, поскольку  $Y$  — компакт, а множество подмножеств множества  $I$  конечно, то существуют  $\tilde{y} \in Y$  и  $\tilde{I} \subseteq I$  такие, что

$$(\tilde{y}, \tilde{I}) = \arg \min_{(y, I) \in Y \times I} \psi_I(y).$$

В таком случае, с одной стороны,

$$\min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \psi_{\hat{I}}(y) \leq \min_{\hat{I} \subseteq I} \psi_{\hat{I}}(\tilde{y}) \leq \psi_{\tilde{I}}(\tilde{y}), \quad (37)$$

$$\min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \psi_{\hat{I}}(y) \leq \min_{y \in Y} \psi_{\tilde{I}}(y) \leq \phi_{\tilde{I}}(\tilde{y}). \quad (38)$$

С другой стороны,

$$\psi_{\tilde{I}}(\tilde{y}) = \min_{(y, \tilde{I}) \in Y \times I} \psi_{\tilde{I}}(y) \leq \min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \psi_{\hat{I}}(y), \quad (39)$$

$$\psi_{\tilde{I}}(\tilde{y}) = \min_{(y, \tilde{I}) \in Y \times I} \psi_{\tilde{I}}(y) \leq \min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \psi_{\hat{I}}(y). \quad (40)$$

Благодаря (37) и (39), получаем

$$\min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \psi_{\hat{I}}(y) = \psi_{\tilde{I}}(\tilde{y}), \quad (41)$$

а, благодаря (38) и (40), получаем

$$\min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \psi_{\hat{I}}(y) = \psi_{\tilde{I}}(\tilde{y}). \quad (42)$$

Одновременное выполнение (41) и (42) ведет к

$$\min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \psi_{\hat{I}}(y) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \psi_{\hat{I}}(y)$$

или

$$\min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y).$$

**Следствие 1.** Если  $y^*$  является решением задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5), а  $x^*$  — решением задачи (5) для  $y^*$ , то пара  $(x^*, y^*)$  является решением задачи минимакса

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{I^*}} \phi_{I^*}(x, y) \quad (43)$$

при

$$I^* \in \arg \min_{\hat{I} \subseteq I} \left[ \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y) \right]. \quad (44)$$

**Доказательство.** Если  $\bar{x}$  является решением задачи (5) для  $\bar{y} \in Y$ , то в силу теоремы 1

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \bar{x}_i + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) &= \sum_{i \in \bar{I}} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \bar{x}_i + w \sum_{i \in \bar{I}} g_i(\bar{y}_i) = \\ &= \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y}) \sum_{i \in \hat{I}} \bar{x}_i + w \sum_{i \in \hat{I}} g_i(\bar{y}_i) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y}) D + w \sum_{i \in \hat{I}} g_i(\bar{y}_i), \end{aligned}$$

где  $\bar{I} \subseteq I$  такое, что

$$\bar{x}_i \begin{cases} > 0 & \text{для } i \in \bar{I}, \\ = 0 & \text{для } i \in I \setminus \bar{I}. \end{cases}$$

При этом в силу вида функции  $\mathbb{f}_{\bar{I}}(x, y)$  справедливо

$$\mathbb{f}_{\bar{I}}(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y}).$$

В таком случае

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \bar{x}_i + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) &= \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y}) D + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) = \\ &= \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, \bar{y}) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(\bar{x}, \bar{y}) D + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) = \phi_{\hat{I}}(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Другими словами, для любого  $\bar{y} \in Y$  выполняется

$$\sum_{i \in I} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \bar{x}_i + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) = \phi_{\hat{I}}(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, \bar{y}),$$

где  $\bar{x}$  является решением задачи (5) для  $\bar{y} \in Y$ . Поскольку  $y^*$  является решением задачи (4)–(5), а  $x^*$  – решением задачи (5) для  $y^*$ , то

$$\phi_{I^*}(x^*, y^*) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y^*) \leq \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y) \quad \forall y \in Y$$

или

$$\phi_{I^*}(x^*, y^*) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y^*) = \min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y),$$

а значит, согласно теореме 3,

$$\phi_{I^*}(x^*, y^*) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y).$$

Следовательно,

$$\phi_{I^*}(x^*, y^*) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{I^*}} \phi_{I^*}(x, y)$$

при

$$I^* \in \arg \min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y).$$

**Замечание 1.** Следствие 1 позволяет утверждать, что если  $y^*$  является решением задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5), а  $x^*$  – решением задачи (5) для  $y^*$ , то с необходимостью пара  $(x^*, y^*)$  разрешает задачу минимакса

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y) \quad (45)$$

для некоторого  $\hat{I} \subseteq I$ .

#### 4. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ВОЗНИКШИХ ЗАДАЧ МИНИМАКСА

**Теорема 4.** Если функция  $\phi_{\hat{I}}(x, y)$  имеет седловую точку  $(\hat{x}, \hat{y}) \in X_{\hat{I}} \times Y$ , то

$$f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = f_j(\hat{x}_j, \hat{y}_j) \quad \forall i, j \in \hat{I}, \quad (46)$$

$$\hat{y}_j = l_j \quad \forall j \in I \setminus \hat{I}, \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\frac{\partial f_j}{\partial y_j}(\hat{x}_j, \hat{y}_j)}{\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\hat{x}_j, \hat{y}_j)} \left\{ \begin{aligned} &\leq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_j}{\partial y_j}(\hat{y}_j) \quad \text{при} \quad \hat{y}_j = l_j, \\ &= \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_j}{\partial y_j}(\hat{y}_j) \quad \text{при} \quad l_j < \hat{y}_j < u_j, \\ &\geq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_j}{\partial y_j}(\hat{y}_j) \quad \text{при} \quad \hat{y}_j = u_j, \end{aligned} \right. \quad \forall j \in \hat{I}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где

$$\lambda \begin{cases} \geq 0, & \text{если} \quad \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) = U, \\ = 0, & \text{если} \quad \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) < U. \end{cases} \quad (49)$$

**Доказательство.** Если функция  $\phi_{\hat{I}}(x, y)$  имеет седловую точку  $(\hat{x}, \hat{y}) \in X_{\hat{I}} \times Y$ , то

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y) = \max_{x \in X_{\hat{I}}} \min_{y \in Y} \phi_{\hat{I}}(x, y) = \phi_{\hat{I}}(\hat{x}, \hat{y}). \quad (50)$$

С одной стороны,  $\hat{x}$  удовлетворяет условиям Каруша–Куна–Таккера (ККТ) применительно к  $\phi_{\hat{I}}(x, \hat{y})$  на множестве  $X_{\hat{I}}$ . Составим Лагранжиан

$$L_x(x, \hat{y}) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \hat{y}) D + w \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) + \omega \left( D - \sum_{i \in \hat{I}} x_i \right),$$

где  $\omega$  является множителем Лагранжа. Точка  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$  должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\partial L_x}{\partial x_i}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \quad \forall i \in \hat{I},$$

откуда получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{f}_{\hat{I}}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\omega}{D} \quad \forall i \in \hat{I}. \quad (51)$$

Заметим, что при доказательстве леммы 2 было показано, что при  $\hat{y} \in Y$  вектор  $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$  является решением системы (51) тогда и только тогда, когда  $f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = f_j(\hat{x}_j, \hat{y}_j)$  для всех  $i, j \in \hat{I}$ . Следовательно, пара  $(\hat{x}, \hat{y})$  должна удовлетворять следующим условиям:

$$f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = f_j(\hat{x}_j, \hat{y}_j) \quad \forall i, j \in \hat{I}. \quad (52)$$

С другой стороны,  $\hat{y}$  удовлетворяет условиям ККТ применительно к  $\phi_{\hat{I}}(\hat{x}, y)$  на множестве  $Y$ . Составим Лагранжиан

$$L_y(\hat{x}, y) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(\hat{x}, y)D + w \sum_{i \in I} g_i(y_i) + \lambda \left( \sum_{i \in I} g_i(y_i) - U \right) + \sum_{i \in I} \eta_i(l_i - y_i) + \\ + \sum_{i \in I} \gamma_i(y_i - u_i),$$

где  $\lambda \geq 0$  и  $\eta_i \geq 0, \gamma_i \geq 0, i \in I$ , являются множителями Лагранжа. Точка  $\hat{y}$  должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\partial L_y}{\partial y_i}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \quad \forall i \in I, \quad (53)$$

$$\lambda \left( \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) - U \right) = 0, \quad (54)$$

$$\eta_i(l_i - \hat{y}_i) = 0 \quad \forall i \in I, \quad (55)$$

$$\gamma_i(\hat{y}_i - u_i) = 0 \quad \forall i \in I. \quad (56)$$

Таким образом, из (53) следует, что

$$-D \frac{\partial \mathbb{f}_{\hat{I}}}{\partial y_j}(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = (w + \lambda) \frac{\partial g_j}{\partial y_j}(\hat{y}_j) - \eta_j + \gamma_j \quad \forall j \in I, \quad (57)$$

а, в силу (55) и (56), имеет место система

$$\begin{aligned} \eta_i \geq 0, \gamma_i = 0 & \quad \text{при} \quad \hat{y}_i = l_i, \\ \eta_i = 0, \gamma_i = 0 & \quad \text{при} \quad l_i < \hat{y}_i < u_i, \\ \eta_i = 0, \gamma_i \geq 0 & \quad \text{при} \quad \hat{y}_i = u_i, \end{aligned} \quad \forall i \in I,$$

откуда, согласно (57), получаем

$$-\frac{\partial \mathbb{f}_{\hat{I}}}{\partial y_j}(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \begin{cases} \leq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad l_j = \hat{y}_j, \\ = \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad l_j < \hat{y}_j < u_j, \\ \geq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad \hat{y}_j = u_j, \end{cases} \quad \forall j \in I. \quad (58)$$

Продифференцируем функцию  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(\hat{x}, y)$  по  $y_j$  для всех  $j \in I$ :

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\sum_{i \in \hat{I}} \frac{f_i(\hat{x}_i, y_i)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, y_i)}}{\sum_{i \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, y_i)}} \right) = \frac{\frac{\partial f_j}{\partial y_j}}{\frac{\partial f_j}{\partial x_j}} + \frac{\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_j \partial y_j}}{\left[ \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \right]^2} \left( \frac{\sum_{i \in \hat{I}} \frac{f_i}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}}}{\sum_{i \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}}} - f_j \right). \quad (59)$$

Поскольку  $(\hat{x}, \hat{y})$  удовлетворяет (52), то из (59) следует, что

$$\frac{\partial \mathbb{f}_{\hat{I}}}{\partial y_j}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\frac{\frac{\partial f_j}{\partial y_j}(\hat{x}_j, \hat{y}_j)}{\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\hat{x}_j, \hat{y}_j)}}{\sum_{i \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)}} \quad \forall j \in I. \quad (60)$$

Заметим при этом, что в силу вида функции  $f_{\hat{I}}(\hat{x}, y)$  справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial f_{\hat{I}}}{\partial y_j}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \quad \forall j \in I \setminus \hat{I}. \quad (61)$$

Таким образом, если подставить (60) и (61) в (58), то получим

$$\frac{\frac{\partial f_{\hat{I}}}{\partial y_j}(\hat{x}_j, \hat{y}_j) - \frac{\frac{\partial f_{\hat{I}}}{\partial x_j}(\hat{x}_j, \hat{y}_j)}{\sum_{i \in \hat{I}} \frac{\partial f_{\hat{I}}}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)}}{\left\{ \begin{array}{ll} \leq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при } l_j = \hat{y}_j, \\ = \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при } l_j < \hat{y}_j < u_j, \\ \geq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при } \hat{y}_j = u_j, \end{array} \right.} \quad \forall j \in \hat{I}, \quad (62)$$

и

$$0 \left\{ \begin{array}{ll} \leq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при } l_j = \hat{y}_j, \\ = \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при } l_j < \hat{y}_j < u_j, \\ \geq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при } \hat{y}_j = u_j, \end{array} \right. \quad \forall j \in I \setminus \hat{I}. \quad (63)$$

При этом, поскольку  $\lambda \geq 0$ , то, в силу (54), имеют место следующие условия:

$$\lambda \left\{ \begin{array}{ll} \geq 0, & \text{если } \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) = U, \\ = 0, & \text{если } \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) < U. \end{array} \right. \quad (64)$$

Более того, поскольку  $w \geq 0$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $D > 0$  и  $\frac{\partial g_i}{\partial y_i}(y_i) > 0$  для всех  $i \in I$ , то из (63) следует, что

$$\hat{y}_j = l_j \quad \forall j \in I \setminus \hat{I}. \quad (65)$$

## 5. ПОИСК ОПТИМАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ СЕТИ

В предыдущих разделах статьи было доказано, что решение двухуровневой задачи оптимизации топологии сети с непересекающимися путями с необходимостью должно разрешать определенную задачу минимакса. При этом для соответствующей задачи минимакса получены условия оптимальности при достаточно естественных допущениях. На основе полученных результатов может быть построен следующий алгоритм решения исследуемой задачи оптимизации топологии сети.

---

### Алгоритм 1

---

1:  $\hat{x} \leftarrow$  решение задачи нижнего уровня (5) при  $y = l$

2:  $\hat{I} \leftarrow$  множество индексов таких, что

$$\hat{x}_i \left\{ \begin{array}{ll} > 0 & \text{для } i \in \hat{I}, \\ = 0 & \text{для } i \in I \setminus \hat{I}, \end{array} \right.$$

3:  $(\hat{y}, \hat{x}) \leftarrow$  решение задачи минимакса:

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y),$$

4: **while**  $\hat{x}$  не является решением задачи (5) для  $\hat{y}$  **do**

5:  $\hat{I} \leftarrow \hat{I} \setminus s$ , где  $s$  – компонент, в котором нарушается условие (24)

6:  $(\hat{y}, \hat{x}) \leftarrow$  решение задачи минимакса:

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y),$$

7: **end while**

8: **return**  $(\hat{y}, \hat{x})$  &  $\hat{I}$

---

Рассмотрим результаты работы алгоритма на конкретном примере сети, представленной в виде ориентированного графа  $G = (V, E)$  и состоящей из четырех непересекающихся альтернативных путей (каналов). Величины верхних и нижних границ пропускных способностей доступных альтернатив даны в табл. 1.

Бюджетные затраты, необходимые для увеличения пропускной способности альтернативы  $i$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , с величинами  $l_i$  до величины  $y_i$ , будем описывать с помощью функции следующего вида:

$$g_i(y_i) = 100(y_i - l_i)^2 \quad \forall i = \overline{1, 4},$$

Таблица 1. Нижняя и верхняя границы пропускных способностей

| $i = \overline{1, 4}$     | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Нижняя граница ( $l_i$ )  | 50    | 80    | 70    | 40    |
| Верхняя граница ( $u_i$ ) | 80    | 100   | 95    | 70    |

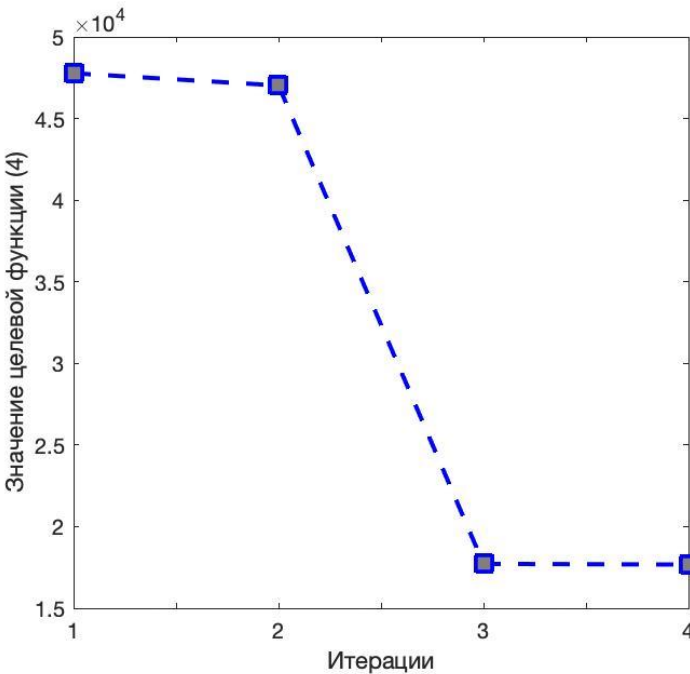
Таблица 2. Параметры функций задержки

| $i$                                   | 1  | 2  | 3  | 4  |
|---------------------------------------|----|----|----|----|
| Время свободного движения ( $t_i^0$ ) | 20 | 25 | 18 | 28 |

а общий бюджет, который может быть инвестирован в увеличение пропускной способности всех альтернатив не должен превышать 200 000:  $\sum_{i=1}^4 g_i(y_i) \leq 200\,000$ . При этом каждая альтернатива  $i, i = \overline{1, 4}$ , характеризуется BPR-функцией задержки (затрат)  $f_i(x_i, y_i)$  единицы потока  $x_i$  по альтернативе с пропускной способностью  $y_i$ :

$$f_i(x_i, y_i) = t_i^0 + 0.15 \left( \frac{x_i}{y_i} \right)^4 \quad \forall i = \overline{1, 4},$$

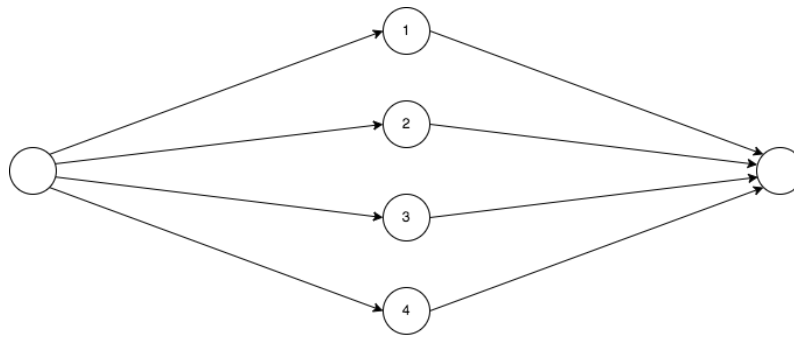
при параметрах, заданных в табл. 2.  
Как только допустимый набор величин пропускных способностей задан, поток  $D = 1000$  распределяется среди доступных альтернатив в соответствии с принципом конкурентного равновесия при заданных функциях задержки (затрат). Если лидер на верхнем уровне стремится минимизировать общие затраты (общую задержку) в сети за счет минимальных инвестиций в увеличение пропускной способности альтернатив, то возникает задача двухуровневой оптимизации (4)–(5). При этом будем считать, что  $w = 0.01$ , т.е. единицу общих сетевых затрат (общей задержки) лидер оценивает в 100 бюджетных единиц.  
Результат решения возникшей задачи с применением алгоритма 1 представлен на фиг. 1. Значение целевой функции после применения алгоритма 1 равно 17672.6.



Фиг. 1. Результат работы алгоритма 1.

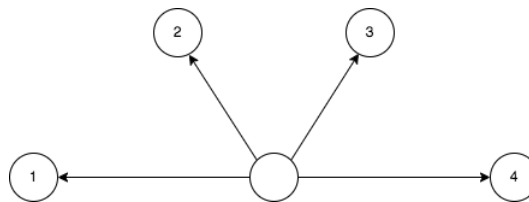
Стоит отметить, что сформулированная задача двухуровневой оптимизации может относиться к разным прикладным задачам. Действительно, с одной стороны, задача (4)–(5) может возникнуть в случае оптимизации участка улично-дорожной сети с непересекающимися путями (фиг. 2). В таком случае можно считать, что

участок улично-дорожной сети обслуживает 1000 неатомарных пользователей, распределяющихся среди четырех маршрутов в стремлении минимизировать индивидуальное время движения.



Фиг. 2. Сеть с непересекающимися маршрутами.

С другой стороны, задача (4)–(5) может возникнуть в случае оптимизации сети дистрибьюторского центра типа звезда (фиг. 3).



Фиг. 3. Сеть типа звезда.

В таком случае можно считать, что дистрибьюторский центр способен поставить 1000 неатомарных единиц продуктового потока, который распределяется среди четырех альтернативных покупателей по принципу аукциона. При этом, если на фиг. 3 направить стрелочки в обратную сторону, то задача (4)–(5) будет соответствовать ситуации, в рамках которой единственный покупатель удовлетворяет свой спрос в 1000 единиц продуктового потока, закупаясь у четырех альтернативных поставщиков по принципу аукциона.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследована проблема поиска глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети для случая сетей с непересекающимися путями. В рассматриваемой постановке задачи менеджер сети инвестирует в пропускные способности ее элементов, стремясь минимизировать общую задержку, возникающую в результате равновесного распределения потоков. Доказано, что решение исследуемой задачи с необходимостью должно разрешать определенную задачу минимакса. При этом получены условия оптимальности решений возникающей задачи минимакса при достаточно естественных допущениях. На основе полученных результатов разработан новый алгоритм решения задачи оптимизации топологии сети с непересекающимися путями. В будущих работах планируется обобщить полученные результаты на случай более общих видов сетей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stackelberg H.V.* Marktform und Gleichgewicht. Berlin: Springer, 1934 (English Translated: The Theory of the Market Economy. Oxford: Oxford Univer. Press, 1952).
2. *Migdalas A.* Bilevel programming in traffic planning: Models, methods and challenge // J. Global Optimizat. 1995. V. 7. P. 381–405.
3. *Krylatov A.Y., Zakharov V.V., Malygin I.G.* Competitive traffic assignment in road networks // Transport and Telecommunicat. 2016. V. 17. № 3. P 212–221.
4. *Krylatov A., Raevskaya A.* Freight flow assignment in the intermodal logistics network // Transportat. Res. Procedia. 2023. V. 68C. P. 492–498.

5. *Xing C., Jing Y., Wang S., Ma S., Poor H.V.* New viewpoint and algorithms for Wwater-filling solutions in wireless communications // IEEE Transact. on Signal Proces. 2020. V. 68. P. 1618–1634.
6. *Suh S., Kim T.* Solving nonlinear bilevel programming models of the equilibrium network design problem: a comparative review // Ann. Operat. Res. 1992. V. 34. № 1. P. 203–218.
7. *Yang H., Bell M.G.H.* Models and algorithms for road network design: a review and some new developments // Transport Rev. 1998. V. 18. № 3. P. 257–278.
8. *Abdulaal M., LeBlanc L. J.* Continuous equilibrium network design models // Transportat. Res. Part B. 1979. V. 13. № 1. P. 19–32.
9. *Marcotte P.* Network optimization with continuous control parameters // Transportat. Sci. 1983. V. 17. № 2. P. 181–197.
10. *Marcotte P., Marquis G.* Efficient implementation of heuristics for the continuous network design problem // Ann. Operat. Res. 1992. V. 34. № 1. P. 163–176.
11. *Suwansirikul C., Friesz T.L., Tobin R.L.* Equilibrium decomposed optimization: A heuristic for the continuous equilibrium network design problem // Transportat. Sci. 1987. V. 21. № 4. P. 227–292.
12. *Tobin R. L., Friesz T. L.* Sensitivity analysis for equilibrium network Fflow // Transportat. Sci. 1988. V. 22. № 4. P. 231–293.
13. *Tobin R. L.* Sensitivity analysis for variational inequalities // J. Optimizat. Theory and Appl. 1986. V. 48. № 1. P. 191–204.
14. *Chiou S.* Bilevel programming for the continuous transport network design problem // Transportat. Res. Part B. 2005. V. 39. № 4. P. 361–383.
15. *Friesz T.L., Cho H.-J., Mehta N.J., Tobin R.L., Anandalingam G.* A simulated annealing approach to the network design problem with variational inequality constraints // Transportat. Sci. 1992. V. 26. № 1. P. 1–68.
16. *Meng Q., Yang H., Bell M.G.H.* An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous network design problem // Transportat. Res. B. 2001. V. 35. P. 83–105.
17. *Li C., Yang H., Zhu D., Meng Q.* A global optimization method for continuous network design problems // Transportat. Res. Part B. 2012. V. 46. № 9. P. 1144–1158.
18. *Крылатов А. Ю.* Распределение потока в сети как задача поиска неподвижной точки // Дискретный анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23. № 2. С. 63–87 (English Translated: Krylatov A.Yu. Network flow assignment as a fixed point problem // J. Appl. and Industrial Math. 2016. V. 10. № 2. P. 243–256.)
19. *Schmeidler D.* Equilibrium points of nonatomic games // J. Stat. Phys. 1973. V. 7. № 4. P. 295–300.
20. *Milchtaich I.* Internalization of social cost in congestion games // Economic Theory. 2021. V. 71. P. 717–760.

# GLOBAL OPTIMUM SEARCH IN THE NETWORK DESIGN PROBLEM

A. Yu. Krylatov<sup>a,b,\*</sup>

<sup>a</sup> 199034 Saint Petersburg, Universitetskaya nab., 7/9, St. Petersburg State University, Russia

<sup>b</sup> 199178 Saint Petersburg, 12th line VO., 13, Institute of Transport Problems, Russia

\*e-mail: a.krylatov@spbu.ru, aykrylatov@yandex.ru

Received: 10.11.2023

Revised: 25.05.2024

Accepted: 01.07.2024

**Abstract.** The global optimum search in the network design problem for the case of networks with disjoint paths is considered. In the considered formulation of the problem, the manager of a network invests in the capacities of its elements, seeking to minimize the total delay arising from the equilibrium flow assignment. It is proven that the solution to the problem under study must necessarily solve a certain minimax problem. Optimality conditions for solutions of the minimax problem are found under fairly natural assumptions. Based on the results, a new algorithm is developed for optimizing the topology of a network with disjoint paths.

**Keywords:** network design problem, equilibrium flow assignment.

# НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ РАЗНОСТНЫМ И ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

© 2024 г. К.Б. Мансимов<sup>1,2,\*</sup>, А.В. Керимова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Аз 1148 Баку, ул. З.Халилова, 23, Бакинский Гос.Университет, Азербайджан

<sup>2</sup>Аз 1141 Баку, ул. Б. Вагабаде, 68, Институт Систем Министерства Образования и Науки Азербайджана, Азербайджан

\*e-mail: kamilbmansimov@gmail.com

Поступила в редакцию 09.01.2024 г.

Переработанный вариант 09.01.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Рассматривается ступенчатая задача оптимального управления, описываемая совокупностью разностных и интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра и функционалом типа Больца. Ранее подобные задачи исследовались для случая дифференциальных, а также обыкновенных разностных уравнений. При предположении открытости областей управления, применяя модифицированный вариант метода приращений, вычислены первая и вторая вариации функционала качества. С помощью этих вариаций доказан аналог уравнения Эйлера и ряд конструктивно проверяемых необходимых условий оптимальности второго порядка. Библ. 8.

**Ключевые слова:** разностное уравнение типа Вольтерра, интегродифференциальное уравнение Вольтерра, вариация функционала, необходимое условие оптимальности, аналог уравнения Эйлера.

DOI: 10.31857/S0044466924100072, EDN: KADJTN

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] и др. изучены некоторые задачи оптимального управления ступенчатыми системами, описываемые на различных отрезках времени различными обыкновенными дифференциальными уравнениями и получен в рассматриваемых задачах ряд необходимых условий оптимальности.

В предлагаемой работе рассматривается одна двухэтапная ступенчатая задача оптимального управления, описываемая совокупностью интегродифференциальных и разностных уравнений типа Вольтерра.

При предположении открытости областей управления получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $T_1 = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}$  и  $T_2 = [t_1, t_2]$  — заданные соответственно “дискретный” и непрерывный отрезки,  $U_1 \subset R^r$  и  $U_2 \subset R^q$  — заданные непустые, открытые и ограниченные множества.

Предположим, что дискретно-непрерывный двухэтапный процесс описывается следующими системами разностных и интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$x_1(t+1) = f_1(t, x_1(t), u_1(t)) + \sum_{\tau=t_0}^t g_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)), \quad t \in T_1, \quad (1)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad (2)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(t, x_2(t), u_2(t)) + \int_{t_1}^t g_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) d\tau, \quad t \in T_2, \quad (3)$$

$$x_2(t_1) = G(x_1(t_1)). \quad (4)$$

Здесь  $f_1(t, x_1, u_1)$  ( $g_1(t, \tau, x_1, u_1)$ ) — заданная  $n$ -мерная вектор-функция, дискретная по  $t$  ( $t, \tau$ ) и дважды непрерывно дифференцируемая по  $(x_1, u_1)$ , при всех  $t$  ( $t, \tau$ ),  $f_2(t, x_2, u_2)$ ,  $g_2(t, \tau, x_2, u_2)$  — заданные  $n$ -мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(x_2, u_2)$  до второго порядка включительно,  $x_{10}$  — заданный постоянный  $n$ -мерный вектор,  $G(x_1)$  — заданная дважды непрерывно дифференцируемая  $n$ -мерная вектор-функция,  $u_1(t)$  ( $u_2(t)$ ) —  $r$  ( $q$ ) — мерная дискретная (кусочно-непрерывная, с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор-функция управляющих воздействий, со значениями из  $U_1$  ( $U_2$ ), т.е.

$$u_1(t) \in U_1 \subset R^r, \quad t \in T_1, \quad (5)$$

$$u_2(t) \in U_2 \subset R^q, \quad t \in T_2. \quad (6)$$

Пару  $(u_1(t), u_2(t))$  с вышеприведенными свойствами назовем *допустимым управлением*.

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении  $(u_1(t), u_2(t))$  задачи Коши (1), (2) имеет единственное дискретное решение  $x_1(t)$ , а задача Коши (3), (4) имеет единственное кусочно-гладкое решение (см. например, [4–7])  $x_2(t)$ .

На решениях задач Коши (1), (2) и (3), (4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал типа Больца в виде

$$J(u_1, u_2) = \varphi_1(x_1(t_1)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \sum_{\tau=t}^t F_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)) \right] + \varphi_2(x_2(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{t_1}^t F_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) d\tau \right] dt. \quad (7)$$

Здесь  $\varphi_i(x_i)$ ,  $i = 1, 2$  — заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции,  $F_1(t, \tau, x_1, u_1)$  — заданная дискретная по  $(t, \tau)$  и дважды непрерывно дифференцируемая по  $(x_1, u_1)$  при всех  $(t, \tau)$  скалярная функция, а  $F_2(t, \tau, x_2, u_2)$  — заданная, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по  $(x_2, u_2)$  до второго порядка включительно, скалярная функция.

Рассмотрим задачу нахождения минимального значения функционала (7) при ограничениях (1)–(6).

Допустимое управление  $(u_1(t), u_2(t))$ , доставляющее минимальное значение функционалу (7), при ограничениях (1)–(6), назовем *оптимальным управлением*, а соответствующий процесс  $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$  — *оптимальным процессом*.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядков в рассматриваемой задаче.

### 3. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМУЛЫ ПРИРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИОНАЛА

Пусть  $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$  и  $(\bar{u}_1(t) = u_1(t) + \Delta u_1(t), \bar{u}_2(t) = u_2(t) + \Delta u_2(t), \bar{x}_1(t) = x_1(t) + \Delta x_1(t), \bar{x}_2(t) = x_2(t) + \Delta x_2(t))$  — некоторые допустимые процессы.

Тогда, ясно, что  $(\Delta x_1(t), \Delta x_2(t))$  будет решением задачи

$$\Delta x_1(t+1) = f_1(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t)) - f_1(t, x_1(t), u_1(t)) + \sum_{\tau=t_0}^t \left[ g_1(t, \tau, \bar{x}_1(\tau), \bar{u}_1(\tau)) - g_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)) \right], \quad (8)$$

$$\Delta x_1(t_0) = 0, \quad (9)$$

$$\Delta \dot{x}_2(t) = f_2(t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t)) - f_2(t, x_2(t), u_2(t)) + \int_{t_1}^t \left[ g_2(t, \tau, \bar{x}_2(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - g_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) \right] d\tau, \quad (10)$$

$$\Delta x_2(t_1) = G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1)). \quad (11)$$

Пусть  $\psi_i = \psi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  — пока произвольные  $n$ -мерные вектор-функции.

Применяя дискретный аналог теоремы Фубини (см., например, [8]) доказывается, что

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_1(t) \Delta x_1(t+1) &= \psi'_1(t_1-1) \Delta x_1(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_1(t-1) \Delta x_1(t) = \\ &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_1(t) (f_1(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t)) - f_1(t, x_1(t), u_1(t))) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'_1(\tau) \left[ g_1(\tau, t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t)) - g_1(\tau, t, x_1(t), u_1(t)) \right] \right]. \quad (12)$$

Далее, применяя формулу Фубини (Дирихле) (см., например, [5, 7]), получим

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \psi'_2 \Delta \dot{x}_2(t) dt &= \psi'_2(t_2) \Delta x_2(t_2) - \psi'_2(t_1) \left( G(\bar{x}(t_1)) - G(x(t_1)) \right) - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \psi'_2 \Delta x_2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \psi'_2(t) \left( f_2(t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t)) - f_2(t, x_2(t), u_2(t)) \right) + \right. \\ &\left. + \int_{t_1}^{t_2} \psi'_2(\tau) \left[ g_2(\tau, t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t)) - g_2(\tau, t, x_2(t), u_2(t)) \right] d\tau \right] dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее запишем формулу приращения функционала (7).

После некоторых преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta J(u_1, u_2) &= \varphi_1(\bar{x}_1(t_1)) - \varphi_1(x_1(t_1)) + \varphi_2(\bar{x}_2(t_2)) - \varphi_2(x_2(t_2)) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \sum_{\tau=t_1}^{t_1-1} \left[ F_1(\tau, t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t)) - F_1(\tau, t, x_1(t), u_1(t)) \right] \right] + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{t_1}^{t_2} \left[ F_2(\tau, t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t)) - F_2(\tau, t, x_2(t), u_2(t)) \right] d\tau \right] dt. \end{aligned} \quad (14)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi'_1(t)) &= \psi'_1(t) f_1(t, x_1(t), u_1(t)) - \sum_{\tau=t}^{t_1-1} F_1(\tau, t, x_1(t), u_1(t)) + \\ &+ \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'_1(\tau) g_1(\tau, t, x_1(t), u_1(t)), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi'_2(t)) &= \psi'_2(t) f_2(t, x_2(t), u_2(t)) - \int_{t_1}^{t_2} F_2(\tau, t, x_2(t), u_2(t)) d\tau + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \psi'_2(\tau) g_2(\tau, t, x_2(t), u_2(t)) d\tau. \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что функции  $H_i(t, x_i(t), u_i(t), \psi'_i(t))$ ,  $i = 1, 2$ , являются аналогами функции Гамильтона–Понтрягина (гамильтониана).

Учитывая эти обозначения, а также форму (12), (13), (15), (16) формула приращения (14) функционала представляется в виде

$$\begin{aligned} \Delta J(u_1, u_2) &= \varphi_1(\bar{x}_1(t_1)) - \varphi_1(x_1(t_1)) + \varphi_2(\bar{x}_2(t_2)) - \varphi_2(x_2(t_2)) + \psi'_1(t_1-1) \Delta x_1(t_1) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi'_1(t-1) \Delta x_1(t) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ H_1(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t), \psi_1(t)) - H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t)) \right] + \\ &+ \psi'_2(t_2) \Delta x_2(t_2) - \psi'_2(t_1) \left( G(\bar{x}_1(t_1)) - G(x_1(t_1)) \right) - \int_{t_1}^{t_2} \psi'_2(t) \Delta x_2(t) dt - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \left[ H_2(t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t), \psi_2(t)) - H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t)) \right] dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Введя обозначение

$$M(\psi_2(t_1), x_1(t_1)) = \psi_2'(t_1) G(x_1(t_1)),$$

и применяя отдельным слагаемым в этой формуле (17) формулу Тейлора, получим, что

$$\begin{aligned} \Delta J(u_1, u_2) = & \frac{\partial \varphi_1'(x_1(t_1))}{\partial x_1} \Delta x_1(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t_1) + o_1(\|\Delta x_1(t_1)\|^2) + \\ & + \psi_1'(t_1 - 1) \Delta x_1(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1'(t-1) \Delta x_1(t-1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1} \Delta x_1(t) + \right. \\ & + \left. \frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} \Delta u_1(t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \Delta x_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t) + \right. \\ & + \left. 2 \Delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \Delta x_1(t) + \Delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial^2 u_1} \Delta u_1(t) \right] - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2(\|\Delta x_1(t)\| + \|\Delta u_1(t)\|)^2 + \frac{\partial \varphi_2'(x_2(t_2))}{\partial x_2} \Delta x_2(t_2) + \frac{1}{2} \Delta x_2'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \Delta x_2(t_2) + \\ & + o_4(\|\Delta x_2(t_2)\|^2) + \psi_2'(t_2) \Delta x_2(t_2) - \frac{\partial M'(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1} \Delta x_1(t) - \frac{1}{2} \Delta x_1'(t) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t) - \\ & - o_3(\|\Delta x_1(t_1)\|^2) - \int_{t_1}^{t_2} \psi_2'(t) \Delta x_2(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2} \Delta x_2(t) + \right. \\ & + \left. \frac{\partial H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} \Delta u_2(t) \right] dt - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \Delta x_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \Delta x_2(t) + \right. \\ & + \left. 2 \Delta u_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} \Delta x_2(t) + \Delta u_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial^2 u_2} \Delta u_2(t) \right] dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} o_5(\|\Delta x_2(t)\| + \|\Delta u_2(t)\|)^2 dt. \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь  $\|\alpha\|$  — норма вектора  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$ , определяемая формулой  $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$ , а  $o(\alpha)$  есть величина более высокого порядка чем  $\alpha$ , т. е.  $\frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} \rightarrow 0$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Если предполагать, что вектор-функции  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  являются соответственно решениями следующих задач:

$$\psi_1(t-1) = \frac{\partial H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1}, \quad t \in T_1, \quad (19)$$

$$\psi_1(t_1-1) = -\frac{\partial \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1}, \quad (20)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = -\frac{\partial H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2}, \quad t \in T_2, \quad (21)$$

$$\psi_2(t_2) = -\frac{\partial \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2}, \quad (22)$$

то формула приращения (18) примет вид

$$\begin{aligned} \Delta J(u_1, u_2) = & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} \Delta u_1(t) - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \Delta x_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t) + \right. \\ & + \left. 2 \Delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \Delta x_1(t) + \Delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial^2 u_1} \Delta u_1(t) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2 \left( [\|\Delta x_1(t)\| + \|\Delta u_1(t)\|]^2 \right) + \frac{1}{2} \Delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t_1) + o_1(\|\Delta x_1(t_1)\|^2) - \\
& -\frac{1}{2} \Delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \Delta x_1(t_1) - o_3(\|\Delta x_1(t_1)\|^2) + \frac{1}{2} \Delta x'_2(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \Delta x_2(t_2) + o_4(\|\Delta x_2(t_2)\|^2) - \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H'_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} \Delta u_2(t) dt - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \Delta x'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \Delta x_2(t) + \right. \\
& \left. + 2\Delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} \Delta x_2(t) + \Delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2^2} \Delta u_2(t) \right] dt - \\
& \left. - \int_{t_1}^{t_2} o_5 \left( [\|\Delta x_2(t)\| + \|\Delta u_2(t)\|]^2 \right) dt. \quad (23)
\end{aligned}$$

Задачи Коши (19), (20) и (21), (22) являются сопряженной системой в рассматриваемой задаче.

Доказанная формула приращения функционала качества позволяет получить необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Для этого нужно получить оценки для  $\|\Delta x_1(t)\|$  и  $\|\Delta x_2(t)\|$ .

#### 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА И АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Пусть в рассматриваемой задаче  $\Delta u_1(t) \neq 0$ , а  $\Delta u_1(t) = 0$ . Тогда из задачи (8), (9) линеаризацией получаем, что

$$\begin{aligned}
\Delta x_1(t+1) &= \frac{\partial f_1(t, x_1(t), u_1(t))}{\partial x_1} \Delta x_1(t) + \frac{\partial f_1(t, x_1(t), u_1(t))}{\partial u_1} \Delta u_1(t) + o_6([\|\Delta x_1(t)\| + \|\Delta u_1(t)\|]) + \\
&+ \sum_{\tau=t_0}^t \left[ \frac{\partial g_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial x_1} \Delta x_1(\tau) + \frac{\partial g_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} \Delta u_1(\tau) + o_7(\|\Delta x_1(\tau)\| + \|\Delta u_1(\tau)\|) \right], \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\Delta x_1(t_0) = 0, \quad (25)$$

а из задачи (10), (11) получаем, что

$$\begin{aligned}
\Delta x_2(t) &= \int_{t_1}^t \frac{\partial f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} \Delta x_2(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t \left[ \int_{\tau}^t \frac{\partial g_2(s, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} \Delta x_2(\tau) ds \right] d\tau + \\
&+ \int_{t_1}^t \left( o_8(\|\Delta x_2(\tau)\|) + o_9(\|\Delta x_2(\tau)\|) \right) d\tau + \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} \Delta x_1(t_1) + o_{10}(\|\Delta x_1(t_1)\|). \quad (26)
\end{aligned}$$

Пусть  $\varepsilon$  — произвольное достаточно малое по абсолютной величине число, а  $\delta u_1(t) \in R^r$ ,  $t \in T_1$ , произвольная  $r$ -мерная дискретная и ограниченная вектор-функция (вариация управляющей функции  $u_2(t)$ ).

Тогда специальное приращение управляющей функции  $u_1(t)$  можно определить по формуле

$$\Delta u_1(t; \varepsilon) = \varepsilon \delta u_1(t). \quad (27)$$

Через  $(\Delta x_1(t; \varepsilon), \Delta x_2(t; \varepsilon))$  определим специальное приращение траектории  $(x_1(t), x_2(t))$ , отвечающее специальному приращению (28) управления  $u_1(t)$ .

С помощью формулы (24) доказывается справедливость разложения

$$\Delta x_1(t; \varepsilon) = \varepsilon \delta x_1(t) + o(\varepsilon; t), \quad t \in T_1. \quad (28)$$

Здесь  $\delta x_1(t)$  — вариация траектории  $x_1(t)$ , являющаяся решением уравнения в вариациях (см., например, [5, 6])

$$\delta x_1(t+1) = \frac{\partial f_1(t, x_1(t), u_1(t))}{\partial x_1} \delta x_1(t) + \frac{\partial f_1(t, x_1(t), u_1(t))}{\partial u_1} \delta u_1(t) +$$

$$+ \sum_{\tau=t_0}^t \left[ \frac{\partial g_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial x_1} \delta x_1(\tau) + \frac{\partial g_1(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} \delta u_1(\tau) \right], \quad t \in T_1, \quad (29)$$

$$\delta x_1(t_0) = 0. \quad (30)$$

Далее из линеаризованной системы (26) получаем, что

$$\Delta x_2(t; \varepsilon) = \varepsilon \delta x_2(t) + o(\varepsilon; t), \quad (31)$$

где  $\delta x_1(t_0)$  является решением аналога уравнения в вариациях (см., например, [6])

$$\delta \dot{x}_2(t) = \frac{\partial f_2(t, x_2(t), u_2(t))}{\partial x_2} \delta x_2(t) + \int_{t_1}^{t_1} \frac{\partial g_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} \delta x_2(\tau) d\tau, \quad (32)$$

$$\delta x_2(t_1) = \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} \delta x_1(t_1). \quad (33)$$

Сейчас предположим, что  $\Delta u_1(t) = 0$ , а  $\Delta u_1(t) \neq 0$ . Тогда ясно, что при этом  $\Delta x_1(t) = 0$ , а  $\Delta x_2(t)$  будет решением задачи

$$\Delta \dot{x}_2(t) = f_2(t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t)) - f_2(t, x_2(t), u_2(t)) + \int_{t_1}^t \left[ g_2(t, \tau, \bar{x}_2(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - g_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) \right] d\tau, \quad (34)$$

$$\Delta x_2(t_1) = 0. \quad (35)$$

Из задачи (34), (35) следует, что

$$\Delta x_2(t) = \int_{t_1}^t \left[ \left( f_2(\tau, \bar{x}_2(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) \right) + \int_{\tau}^t \left[ g_2(s, \tau, \bar{x}_2(\tau), \bar{u}_2(\tau)) - g_2(s, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)) \right] ds \right] d\tau. \quad (36)$$

Из формулы (36) переходя к норме и используя условие Липшица, получаем, что

$$\|\Delta x_2(t)\| \leq L_4 \int_{t_1}^t (\|\Delta x_2(\tau)\| + \|\Delta u_2(\tau)\|) d\tau, \quad (37)$$

где  $L_4 = \text{const} > 0$  — некоторое постоянное.

Из неравенства (37), применяя лемму Гронуолла–Беллмана получим, что

$$\|\Delta x_2(t)\| \leq L_5 \int_{t_1}^t \|\Delta u_2(\tau)\| d\tau, \quad (38)$$

где  $L_5 = \text{const} > 0$  — некоторое постоянное.

Пусть теперь  $\mu$  достаточно малое по абсолютной величине число, а  $\delta u_2(t) \in R^q$ ,  $t \in T_2$ , произвольная кусочно-непрерывная ограниченная  $q$ -мерная вектор-функция (допустимая вариация управляющей функции  $u_2(t)$ ).

Специальное приращение допустимого управления  $u_2(t)$  определим по формуле

$$\Delta u_2(t; \mu) = \mu \delta u_2(t), \quad t \in T_2. \quad (39)$$

Через  $\Delta x_2(t; \mu)$  обозначим специальное приращение траектории  $x_2(t)$ , отвечающее приращению (39) управления  $u_2(t)$ .

Из оценки (38) следует, что

$$\|\Delta x_2(t; \mu)\| \leq L_6 \mu, \quad t \in T_2. \quad (40)$$

Учитывая формулу (33) и оценку (40) с помощью (36) доказывается справедливость разложения

$$\Delta x_2(t; \mu) = \mu y(t) + o(\mu; t), \quad (41)$$

где  $y(t)$  (вариация траектории  $x_2(t)$ ) является решением задачи

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & \frac{\partial f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} y(t) + \frac{\partial f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} \delta u_2(t) + \\ & + \int_{t_1}^{t_1} \left[ \frac{\partial g_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} y(\tau) + \frac{\partial g_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} \delta u_2(\tau) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\delta y(t_1) = 0. \quad (43)$$

Доказанные разложения (28), (31) и формулы (27), (39) позволяют сформулировать необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Учитывая их из формулы приращения (23) функционала получаем, что

$$\begin{aligned} J(u_1(t) + \varepsilon \delta u_1(t), u_2(t)) - J(u_1(t), u_2(t)) = & -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H'_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi'_1(t))}{\partial u_1} \delta u_1(t) - \\ & - \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \delta x'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi'_1(t))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t) + 2\delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi'_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \delta x_1(t) + \right. \\ & + \delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi'_1(t))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \left. \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta x'_2(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t_2) - \\ & - \frac{\varepsilon^2}{2} \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 M(\Psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta x'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi'_2(t))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t) dt + o(\varepsilon^2); \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} J(u_1(t), u_2(t) + \mu \delta u_2(t)) - J(u_1(t), u_2(t)) = & -\mu \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H'_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi'_2(t))}{\partial u_2} \delta u_2(t) dt + \\ & + \frac{\mu^2}{2} \delta y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta y(t_2) - \frac{\mu^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ y'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi'_2(t))}{\partial x_2^2} y(t) + \right. \\ & + 2\delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi'_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) + \delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi'_2(t))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t) \left. \right] dt + o(\mu^2). \end{aligned} \quad (45)$$

Из разложений (44) и (45) следуют выражения первых и вторых вариаций функционала в виде

$$\delta^1 J(u_1, u_2; \delta u_1) = - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H'_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi_1(t))}{\partial u_1} \delta u_1(t), \quad (46)$$

$$\delta^1 J(u_1, u_2; \delta u_2) = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H'_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi_2(t))}{\partial u_2} \delta u_2(t) dt, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 J(u_1, u_2; \delta u_1) = & \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) + \delta x'_2(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t_2) - \\ & - \delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 M(\Psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \delta x'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi_2(t))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t) dt - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \delta x'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi_1(t))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t) + 2\delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \delta x_1(t) + \right. \\ & \left. + \delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi_1(t))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

$$\delta^2 J(u_1, u_2; \delta u_2) = y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} y(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} \left[ y'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} y(t) + \right. \\ \left. + 2\delta u_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) + \delta u_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t) \right] dt. \quad (49)$$

## 5. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ТЕРМИНАХ ВАРИАЦИЙ ФУНКЦИОНАЛА

Как известно из вариационного исчисления (см., например, [4–7]) в случае задачи на минимум, вдоль оптимального управления первая вариация функционала равна нулю, а вторая неотрицательна. Поэтому из соотношений (46) и (47) получаем, что вдоль оптимального управления

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} \delta u_1(t) = 0, \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} \delta u_2(t) dt = 0$$

для всех  $\delta u_1(t) \in R^r$ ,  $t \in T_1$ , и  $\delta u_2(t) \in R^q$ ,  $t \in T_2$ , соответственно.

Учитывая произвольность допустимых вариаций  $\delta u_1$  и  $\delta u_2$ , доказывается

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого управления  $(u_1(t), u_2(t))$  необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{\partial H_1(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta), \psi_1(\theta))}{\partial u_1} = 0 \quad \forall \theta \in T_1, \quad (50)$$

$$\frac{\partial H_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta))}{\partial u_2} = 0 \quad \forall \theta \in [t_1, t_2]. \quad (51)$$

Здесь  $\theta \in [t_1, t_2]$  — произвольная точка непрерывности управления  $u_2(t)$ .

Соотношения (50), (51) являются необходимыми условиями оптимальности первого порядка и представляют собой аналог уравнения Эйлера из классического вариационного исчисления (см., например, [4, 5]).

Любое допустимое управление  $(u_1(t), u_2(t))$ , удовлетворяющее аналогу уравнения Эйлера (50), (51) назовем классической экстремалью.

Известно, что число классических экстремалей может быть достаточно большим [6].

Поэтому надо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка.

Из формул (48) и (49) следует, что для оптимальности допустимого управления  $(u_1(t), u_2(t))$  необходимо, чтобы неравенства

$$\delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) + \delta x_2'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t_2) - \delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) - \\ - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \delta x_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t) + 2\delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \delta x_1(t) + \right. \\ \left. + \delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \right] - \int_{t_1}^{t_2} \delta x_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t) dt \geq 0, \quad (52)$$

$$y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} y(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} \left[ y'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} y(t) + \right. \\ \left. + 2\delta u_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) + \delta u_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t) \right] dt \geq 0 \quad (53)$$

выполнялись для всех  $\delta u_1(t) \in R^r$ ,  $t \in T_1$ , и  $\delta u_2(t) \in R^q$ ,  $t \in T_2$ , соответственно.

Неравенства (52) и (53) являются неявно заданными необходимыми условиями оптимальности второго порядка.

Поэтому возникает необходимость получения необходимых условий оптимальности второго порядка выраженных в явной форме.

## 6. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЗАДАННЫЕ В ЯВНОЙ ФОРМЕ

Задачи (29), (30) и (32), (33) являются линейными неоднородными задачами Коши.

Пусть матричные функции  $F_1(t, \tau)$  и  $F_2(t, \tau)$  ( $n \times n$ ) являются решениями задач

$$F_1(t, \tau - 1) = F_1(t, \tau) \frac{\partial f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial x_1} + \sum_{s=\tau}^{t-1} F_1(t, s) \frac{\partial g_1(s, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial x_1}, \quad (54)$$

$$F_1(t, t - 1) = E, \quad (55)$$

$$\frac{\partial F_2(t, \tau)}{\partial \tau} = F_2(t, \tau) \frac{\partial f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} + \int_{t_1}^t F_2(t, s) \frac{\partial g_2(s, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} ds, \quad (56)$$

$$F_2(t, t) = E, \quad (57)$$

где  $E$  есть ( $n \times n$ ) единичная матрица.

Тогда решения задач (29), (30), (32), (33) и (42), (43) могут быть представлены в виде

$$\delta x_1(t) = \sum_{\tau=t_0}^t F_1(t, \tau) \frac{\partial f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} \delta u_1(\tau) + \sum_{\tau=t_0}^t \left[ \sum_{s=\tau}^{t-1} F_1(t, s) \frac{\partial g_1(s, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} \right] \delta u_1(\tau), \quad (58)$$

$$\delta x_2(t) = F_2(t, t_1) \frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1} \delta x_1(t_1), \quad (59)$$

$$y(t) = \int_{t_1}^t F_2(t, \tau) \frac{\partial f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} \delta u_2(\tau) d\tau + \int_{t_1}^t \left[ \int_{\tau}^t F_2(t, s) \frac{\partial g_2(s, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} \delta u_2(\tau) ds \right] d\tau. \quad (60)$$

Учитывая представление (58), представление (59) записывается в виде

$$\delta x_2(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} F_2(t, t_1) \frac{\partial G(x_1(t))}{\partial x_1} \left[ F_1(t_1, \tau) \frac{\partial f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} + \sum_{s=\tau}^{t_1-1} F_1(t, s) \frac{\partial g_1(s, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} \right] \delta u_1(\tau).$$

Введя обозначения

$$Q_1(t, \tau) = F_1(t, \tau) \frac{\partial f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} + \sum_{s=\tau}^{t-1} F_1(t, s) \frac{\partial g_1(s, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1},$$

$$Q_2(t, \tau) = F_2(t, t_1) \frac{\partial G(x_1(t))}{\partial x_1} \left[ F_1(t_1, \tau) \frac{\partial f_1(\tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} + \sum_{s=\tau}^{t_1-1} F_1(t, s) \frac{\partial g_1(s, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau))}{\partial u_1} \right],$$

$$Q_3(t, \tau) = F_2(t, \tau) \frac{\partial f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} + \int_{\tau}^t F_2(t, s) \frac{\partial g_2(s, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} ds,$$

представления (58), (59) и (60) записываются в следующем компактном виде:

$$\delta x_1(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} Q_1(t, \tau) \delta u_1(\tau), \quad (61)$$

$$\delta x_2(t) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} Q_2(t_1, \tau) \delta u_1(\tau), \quad (62)$$

$$y(t_1) = \int_{t_1}^{t_1} Q_3(t_1, \tau) \delta u_2(\tau) d\tau. \quad (63)$$

Теперь учитывая представления (61)–(63), займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенствах (52) и (53).

С помощью формул (61) и (63) доказывается, что

$$\delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'_1(\tau) Q'_1(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} Q_1(t_1, s) \delta u_1(s), \quad (64)$$

$$x'_2(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t_2) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'_1(\tau) Q'_2(t_2, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_2(t_2, s) \delta u_1(s), \quad (65)$$

$$\delta x'_1(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'_1(\tau) Q'_1(t_1, \tau) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} Q_1(t_1, s) \delta u_1(s), \quad (66)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \delta x_1(t) = \\ & = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'_1(t) \left[ \sum_{\tau=t_0}^t \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} Q_1(t, \tau) \delta u_1(\tau) \right], \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t) = \\ & = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'_1(\tau) \left[ \sum_{\max(\tau, s)+1}^{t_1-1} Q'_1(t, \tau) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} Q_1(t, s) \right] \delta u_1(s), \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \delta x'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t) dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \delta u'_1(\tau) Q'_2(t, \tau) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} Q_2(t, s) \delta u_2(s) \right] dt, \end{aligned} \quad (69)$$

$$y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} y(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta u'_2(t) Q'_3(t_2, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_3(t_2, s) \delta u_2(s) ds d\tau, \quad (70)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{t_1}^{t_1} \delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} Q_3(t, \tau) \delta u_2(\tau) d\tau \right] dt, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} y'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} y(t) dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta u'_2(\tau) \left[ \int_{\max(\tau, s)}^{t_2} Q'_3(t, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_3(t, s) dt \right] \delta u_2(s) ds d\tau. \end{aligned} \quad (72)$$

Введем обозначения

$$K_1(\tau, s) = -Q'_1(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} Q_1(t_1, s) - Q'_2(t_1, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_2(t_1, s) +$$

$$+ Q'_1(t_1, \tau) \frac{\partial^2 M(\Psi_2(t_1 - 1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} Q_1(t_1, s) + \sum_{\max(\tau, s)+1}^{t_1-1} Q'_1(t, \tau) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi_1(t))}{\partial x_1^2} Q_1(t, s) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \delta Q'_2(t, \tau) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi_2(t))}{\partial x_2^2} Q_2(t, s) dt, \quad (73)$$

$$K_2(\tau, s) = -Q'_3(t_2, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_3(t_2, s) + \int_{\max(\tau, s)}^{t_2} Q'_3(t, \tau) \frac{\partial^2 H_1(t, x_2(t), u_2(t), \Psi_2(t))}{\partial x_2^2} Q_3(t, s) dt. \quad (74)$$

Учитывая доказанные тождества (64)–(72) и обозначения (73), (74), из неравенств (51)–(53) получаем, что

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u'_1(\tau) K_1(\tau, s) \delta u_1(s) + 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[ \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} Q_1(t, \tau) \delta u_1(\tau) \right] + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u'_1(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \Psi_1(t))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \leq 0, \quad (75)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^{t_2} \delta u'_2(\tau) K_2(\tau, s) \delta u_2(s) ds d\tau + 2 \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{t_1}^{t_1} \delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} Q_3(t, \tau) \delta u_2(\tau) d\tau \right] dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \delta u'_2(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \Psi_2(t))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t) \leq 0. \quad (76)$$

Сформулируем полученный результат.

**Теорема 2.** Для оптимальности классической экстремали  $(u_1(t), u_2(t))$  необходимо, чтобы неравенства (75) и (76) выполнялись соответственно для всех  $\delta u_1(t) \in R^r, t \in T_1$ , и  $\delta u_2(t) \in R^q, t \in T_2$ .

Как видно, необходимые условия оптимальности (75) и (76) являясь общими условиями оптимальности второго порядка, носят явный характер и выражены непосредственно через параметры рассматриваемой задачи.

Из них, используя произвольность допустимых вариаций,  $\delta u_1(t)$  и  $\delta u_2(t)$ , управляющих функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , можно получить более простые, но менее информативные условия оптимальности.

Приведем одну из них.

**Теорема 3.** Для оптимальности классической экстремали  $(u_1(t), u_2(t))$  необходимо, чтобы неравенства

$$v_1' K_1(\theta, \theta) v_1 + v_1' \frac{\partial^2 H_1(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta), \Psi_1(\theta))}{\partial u_1^2} v_1 \leq 0, \quad (77)$$

$$v_2' \frac{\partial^2 H_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \Psi_2(\theta))}{\partial u_2^2} v_2 \leq 0 \quad (78)$$

выполнялись для всех  $v_1 \in R^r$  и  $\theta \in T_1$  и  $v_2 \in R^q, \theta \in [t_1, t_2)$  соответственно.

**Доказательство.** Допустимую вариацию  $\delta u_1(t)$ , управления  $u_1(t)$  определим по формуле

$$\Delta u_1(t) = \begin{cases} v_1, & t = \theta, \theta \in T_1, \\ 0, & t \neq \theta, \end{cases} \quad (79)$$

где  $v_1 \in R^r$  — произвольный вектор,  $\theta \in T_1$  — произвольная точка.

Учитывая формулу (73) в неравенстве (75) приходим к неравенству (77).

Докажем неравенство (78).

Пусть  $\theta \in [t_1, t_2)$  — произвольная точка непрерывности управления  $u_2(t)$ ,  $v_2 \in R^q$  — произвольный вектор,  $\varepsilon > 0$  — произвольное достаточно малое число такое, что  $\theta + \varepsilon < t_2$ .

Специальную вариацию управления  $u_2(t)$  определим по формуле

$$\Delta u_2(t; \varepsilon) = \begin{cases} v_2, & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in T_2 \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} \quad (80)$$

Принимая во внимание формулу (80), в неравенстве (76), после некоторых преобразований получим, что

$$\varepsilon v_2' \frac{\partial^2 H_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \psi(\theta))}{\partial u_2^2} v_2 + o(\varepsilon) \leq 0.$$

Отсюда в силу произвольности  $\varepsilon > 0$  следует неравенство (78).

Этим теорема доказана.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривается одна ступенчатая дискретно-непрерывная задача оптимального управления, описываемая системами разностных уравнений Вольтерра и интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра с общим функционалом типа Больмаца.

Области управления являются открытыми множествами.

Вычислены первая и вторая вариации функционала качества.

С их помощью доказан аналог уравнения Эйлера и ряд необходимых условий оптимальности второго порядка.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом // Вестник РУДН. Сер. прикл. и компьютерная математика. 2002. № 1(1). С. 131–136.
2. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемехан. 1993. № 6. С. 32–36.
3. Исмаилов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. №10. С. 1758–1770.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В., Калинин А.И. и др. Методы оптимизации. Минск: Изд-во “Четыре четверти”, 2011. 472 с.
5. Афансьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш.школа, 1989. 447 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011. 256 с.
7. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2018, 384 с.
8. Souyousefain M., Leela S. Stability results for difference equations of Volterra type // Appl. Math. Comput. 1990. V. 36. № 1. P. 51–61.

# NECESSARY CONDITIONS FOR OPTIMALITY OF THE FIRST AND SECOND ORDERS IN A SINGLE STEP CONTROL PROBLEM DESCRIBED BY VOLTERRA TYPE DIFFERENTIAL AND INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS

K. B. Mansimov<sup>a,b,\*</sup>, A. V. Kerimova<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Az 1148 Baku, Z. Khalilov str., 23, Baku State University, Azerbaijan*

<sup>b</sup>*Az 1141 Baku, B. Vagabzade str., 68, Institute of Systems of the Ministry of Education and Science of Azerbaijan, Azerbaijan*

*\*e-mail: kamilbmansimov@gmail.com*

Received: 09.01.2024

Revised: 09.01.2024

Accepted: 28.06.2024

**Abstract.** A stepwise optimal control problem is considered, described by a set of Volterra type difference and integrodifferential equations and a Boltz type functional. Previously, similar problems were investigated for the case of differential as well as ordinary difference equations. Assuming the openness of the control areas, using a modified version of the increment method, the first and second variations of the quality functional are calculated. With the help of these variations, an analogue of the Euler equation and a number of constructively verifiable necessary conditions for second-order optimality are proved.

**Keywords:** Volterra type difference equation, Volterra integrodifferential equations, functional variation, necessary optimality condition, analog of the Euler equation.

УДК 517.977.5

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ФРЕНЕЛЕВСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ<sup>1)</sup>

© 2024 г. А.Ю. Чеботарев<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия

\*e-mail: cheb@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 21.02.2024 г.

Переработанный вариант 19.04.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Рассматривается нестационарная обратная задача для нелинейной параболично-эллиптической системы, моделирующей сложный теплообмен с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Доказана нелокальная по времени однозначная разрешимость обратной задачи. Библ. 22.

**Ключевые слова:** квазистационарные уравнения радиационного теплообмена, френелевские условия сопряжения, обратная задача, нелокальная разрешимость.

DOI: 10.31857/S0044466924100088, EDN: KACZVB

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ краевых и обратных задач для диффузионных уравнений сложного теплообмена важен для приложений в технике и медицине [1–4]. Как показано в [5, 6], существенный вклад в распределение температурных полей в многокомпонентных средах с различными коэффициентами преломления вносят эффекты отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления. В [5–7] представлены условия сопряжения, моделирующие указанные эффекты в рамках диффузионной модели, использующей  $P_1$ -приближение для уравнения переноса теплового излучения. Настоящая работа посвящена анализу обратной задачи для квазистационарной диффузионной модели сложного теплообмена в многокомпонентной среде. Задача заключается в отыскании неизвестной интенсивности тепловых источников, моделируемых некоторым функционалом, а также соответствующих полей температуры и теплового излучения, по заданным значениям функционала на решении начально-краевой задачи.

Нелинейные краевые и обратные задачи, моделирующие сложный теплообмен в рамках  $P_1$ -приближения без учета эффектов отражения и преломления на границах подобластей с различными коэффициентами преломления, изучены достаточно подробно [1, 8–10]. Стационарная обратная задача для модели с френелевскими условиями сопряжения рассмотрена в [11]. В [6, 12] проведен анализ квазистационарных начально-краевых задач для уравнений сложного теплообмена в многокомпонентной области. Следует также отметить работы [13–18], посвященные анализу моделей сложного теплообмена, включающих интегродифференциальное уравнение переноса излучения. Исследование различных обратных задач для математических моделей тепломассопереноса представлено в [19–21].

Нестационарный сложный теплообмен будем рассматривать в ограниченной липшицевой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , содержащей конечное число липшицевых подобластей  $\Omega_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , замыкания которых не пересекаются и принадлежат  $\Omega$ .  $\Omega_0 = \Omega \setminus (\bigcup_{j=1}^p \bar{\Omega}_j)$  — внешняя подобласть,  $\Gamma = \partial\Omega \subset \Gamma_0 = \partial\Omega_0$ ,  $\Gamma_j = \partial\Omega_j \subset \Gamma_0$ ,  $j = 1, \dots, p$ . Процесс теплообмена моделируется (в рамках  $P_1$ -приближения для уравнения переноса излучения) в каждой из областей  $\Omega_j$ ,  $j = 0, \dots, p$ , при  $t \in (0, T)$  следующими уравнениями:

$$r \frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = q(t)f, \quad -\alpha \Delta \varphi + \beta(\varphi - \theta^3 |\theta|) = 0. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№075-00459-24-00)

Здесь  $\theta$  — нормализованная температура и  $\varphi$  — нормализованная интенсивность теплового излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные кусочно-постоянные параметры  $r$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ , описывающие свойства среды, определены в [5]. Функция  $f$  описывает пространственное распределение тепловых источников, а функция времени  $q$  их интенсивность. На границе  $\Gamma = \partial\Omega$  ставятся краевые условия третьего рода

$$a\partial_n\theta + c(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad (2)$$

где  $\theta_b$  — заданная граничная температура,  $c$  — коэффициент теплопередачи,  $0 < \gamma \leq 1/2$  — параметр, зависящий от коэффициента излучения поверхности. На внутренних границах  $\Gamma_j = \partial\Omega_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , заданы условия сопряжения для температуры  $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$  и интенсивности излучения  $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$ , полученные в [5]

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0\partial_n\theta_0 = a_j\partial_n\theta_j, \quad (3)$$

$$n_0^2\alpha_0\partial_n\varphi_0 = n_j^2\alpha_j\partial_n\varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0\partial_n\varphi_0. \quad (4)$$

Здесь  $a_j, \alpha_j, n_j = a, \alpha, n|_{\Omega_j}$ ,  $h_j > 0$  — параметры, зависящие от коэффициентов отражения на внутренних границах. Через  $\partial_n$  в краевых условиях и условиях сопряжения обозначаем производные в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}$  к границе  $\partial\Omega$  или  $\partial\Omega_j$ .

Ставятся также начальные условия для температуры,

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (5)$$

**Замечание 1.** Условия (4) выводятся из френелевских условий сопряжения на  $\Gamma_j$  для интенсивности излучения  $I$ , не усредненной по направлениям, при использовании  $P_1$ -приближения для  $I$  и интегрировании указанных условий по направлениям входящих лучей для каждой подобласти. Здесь следует отметить, что при приближении к границе области или к границе неоднородности нормальная производная усредненного решения уравнения переноса излучения имеет особенность, которая фактически не учитывается при выводе краевого условия для  $\varphi$  и условий сопряжения. Таким образом, в рассматриваемой модели не учитывается, что вблизи границы решение уравнения переноса имеет пограничный слой. Тем не менее, как показывают примеры численного моделирования [22], разница температурных полей для диффузионной и полной модели сложного теплообмена не является столь значительной.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 приводится формализация начально-краевой задачи (1)–(5), дается постановка обратной задачи и ее преобразование. Разрешимость обратной задачи доказана в разд. 3. Теорема единственности решения обратной задачи представлена в разд. 4, а в разд. 5 представлено доказательство вспомогательных результатов.

Основной результат работы состоит в доказательстве нелокальной по времени разрешимости обратной задачи.

## 2. СЛАБАЯ ФОРМУЛИРОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Через  $L^s$ ,  $1 \leq s \leq \infty$ , будем обозначать пространства Лебега  $s$ -интегрируемых функций и, соответственно, через  $H^s = W_2^s$  — пространства Соболева;  $H = L^2(\Omega)$ ,  $V = H^1(\Omega)$ ,

$$W = \{w \in H, w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j), j = 0, \dots, p\}.$$

Пространство  $H$  будем отождествлять с сопряженным пространством  $H'$ ,  $V \subset W \subset H = H' \subset W' \subset V'$ . Через  $(f, v)$  обозначаем значение функционала  $f \in V'$  на элементе  $v \in V$  и скалярное произведение в  $H$ , если  $f, v \in H$ ;

$$\|v\|^2 = (v, v); (v, w)_j = (v, w)_{L^2(\Omega_j)}, \|v\|_j^2 = (v, v)_j; (v, w)_W = \sum_{j=0}^p (v, w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Через  $L^p(0, T; X)$  (соотв.  $C([0, T], X)$ ) обозначаем пространство строго измеримых функций класса  $L^p$  (соотв. непрерывных), определенных на  $[0, T]$ , со значениями в банаховом пространстве  $X$ ;  $D'(0, T)$  — пространство распределений на  $(0, T)$ .

Пусть данные начально-краевой задачи удовлетворяют следующим условиям:

- (i)  $c, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$ ,  $c \geq c_0 > 0$ ,  $\gamma \geq \gamma_0 > 0$ ,  $c_0, \gamma_0 = \text{const}$ ;
- (ii)  $\{a, b, r, \alpha, \beta, n\}_{\Omega_j} = \{a_j, b_j, r_j, \alpha_j, \beta_j, n_j\} > 0$ ,  $b = \sigma\beta n^2$ ,  $\sigma = \text{const} > 0$ ;
- (iii)  $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Gamma \times (0, T))$ ;  $f \in V'$ ,  $q \in H^{-1}(0, T)$ .

Введем операторы  $A_1: V \rightarrow V'$ ,  $A_2: W \rightarrow W'$  и функции  $f_b \in L^2(0, T; V')$ ,  $g_b \in L^2(0, T; W')$ , используя равенства, справедливые для  $\theta, \eta \in V$ ,  $\varphi, w \in W$ :

$$\begin{aligned}(A_1 \theta, \eta) &= (a \nabla \theta, \nabla \eta) + \int_{\Gamma} c \theta \eta d\Gamma, \\ \frac{1}{\sigma} (A_2 \varphi, w) &= \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 (\nabla \varphi, \nabla w)_j + n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \varphi w d\Gamma + n_0^2 \sum_{j=1}^p h_j \int_{\Gamma_j} (\varphi_0 - \varphi_j)(w_0 - w_j) d\Gamma, \\ (f_b, \eta) &= \int_{\Gamma} c \theta_b \eta d\Gamma, \quad (g_b, w) = \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 w d\Gamma.\end{aligned}$$

Здесь  $\{\varphi_j, w_j\} = \{\varphi, w\}|_{\Omega_j}$ .

Скалярное произведение и норму в пространстве  $V$ , эквивалентную стандартной, определим, используя оператор  $A_1$ ,  $(u, v)_V = (A_1 u, v)$ ,  $\|v\|_V^2 = (A_1 v, v)$ . Для возрастающей степенной функции используем обозначение  $[\lambda]^l = |\lambda|^l \text{sign } \lambda$ ,  $l > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Определение.** Пара  $\theta \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T], H) \cap L^5(Q)$ ,  $\varphi \in L^{5/4}(0, T; W)$  называется слабым решением задачи (1)–(5), если для всех  $v \in V$

$$(r\theta' + A_1 \theta + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b - q(t)f, v) = 0 \text{ в } D'(0, T), \quad A_2 \varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g_b \quad t \in (0, T) \quad (6)$$

и при этом  $\theta(0) = \theta_0$ . Здесь и далее  $Q = \Omega \times (0, T)$ .

Слабая формулировка задачи (1)–(4) получается стандартным образом путем умножения уравнений (1) на тестовые функции  $\eta \in V$  и  $\sigma n^2 \psi \in W$  соответственно, интегрирования по частям по областям  $\Omega_j$ , сложения полученных равенств и применения краевых условий (2) и условий сопряжения (3), (4).

**Замечание 2.** В статье [12] доказано, что при выполнении условий (i)–(iii), если при этом  $q \in L^2(0, T)$ , существует единственное решение  $\{\theta, \varphi\}$  задачи (6) такое, что  $\theta \in L^2(0, T; V) \cap L^5(0, T; L^5(\Omega))$ ,  $r\theta' \in L^2(0, T; V') + L^{5/4}(Q)$ ,  $\varphi \in L^{5/4}(0, T; W)$ .

#### Постановка и преобразование обратной задачи

**Задача (IP).** Найти  $q \in H^{-1}(0, T)$ ,  $\theta \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T], H) \cap L^5(Q)$ ,  $\varphi \in L^{5/4}(0, T; W)$ , удовлетворяющие (6) и дополнительному условию

$$(f, \theta(t)) = s(t), \quad t \in (0, T). \quad (7)$$

Здесь  $s \in H^1(0, T)$  — заданная функция.

**Замечание 3.** Типичным примером обратной задачи, возникающей, например, при моделировании процессов лазерной абляции [2], является задача, в которой требуется определить какую интенсивность в зависимости от времени должен иметь тепловой источник, локализованный, например, в  $\Omega_1$ , чтобы обеспечить в области  $\Omega_1$  заданную среднюю температуру. В этом случае  $f(x) = 1$ , если  $x \in \Omega_1$  и  $f(x) = 0$ , если  $x \in \Omega \setminus \Omega_1$ , а условие переопределения имеет вид  $\int_{\Omega_1} \theta dx = s(t)$ ,  $t \in (0, T)$ . Учитывая, что в постановке задачи (IP)  $f \in V'$ , могут быть рассмотрены обратные задачи с неизвестными интенсивностями поверхностных тепловых источников, обеспечивающих требуемую среднюю температуру на рассматриваемой поверхности.

Преобразуем постановку задачи (IP), исключив функции  $\varphi, q$ . Заметим сразу, что билинейная форма  $\{\varphi, \psi\} \rightarrow (A_2 \varphi + b\varphi, \psi)$  непрерывна, симметрична и положительно определена в пространстве  $W$ . Из леммы Лакса-Мильграма следует, что для каждого  $\eta \in W'$  существует единственное решение  $\varphi \in W$  уравнения  $A_2 \varphi + b\varphi = \eta$  и оператор  $(A_2 + bI)^{-1}: W' \rightarrow W$  непрерывен. Поэтому из второго уравнения в (6) следует, что  $\varphi = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + b[\theta]^4)$ , первое уравнение можно записать в виде

$$(r\theta' + A_1 \theta + B(b[\theta]^4) - g - q(t)f, v) = 0 \text{ в } D'(0, T). \quad (8)$$

Здесь  $B = A_2(A_2 + bI)^{-1}: W' \rightarrow W'$ ,  $g = f_b + b(A_2 + bI)^{-1}g_b \in L^2(0, T; V')$ .

Для исключения интенсивности источников  $q$  рассмотрим пространства  $V_0 = \text{Ker } f = \{z \in V : (f, z) = 0\}$  и  $H_0$  — замыкание  $V_0$  по норме  $H$ ,  $V_0 \subset H_0 = H'_0 \subset V'_0$ . Пусть  $\tilde{f} \in V$ ,  $(f, \tilde{f}) = 1$ . Будем искать компоненту  $\theta$  решения задачи (IP) в виде

$$\theta(t) = \xi(t) + s(t)\tilde{f}, \quad \text{где } \xi \in L^2(0, T; V_0) \cap C([0, T], H_0) \cap L^5(Q).$$

Сформулируем постановку задачи для определения функции  $\xi$ .

**Задача (P).** Найти  $\xi \in L^2(0, T; V_0) \cap C([0, T], H_0) \cap L^5(Q)$  такую, что  $r\theta' \in L^2(0, T; V'_0) + L^{5/4}(Q)$

$$r\theta' + A_1 \theta + B(b[\theta]^4) - g = 0 \text{ в } V'_0 \text{ п.в. на } (0, T), \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (9)$$

где  $\theta(t) = \xi(t) + s(t)\tilde{f}$ ,  $\xi_0 = \theta_0 - s(0)\tilde{f} \in H_0$ .

**Лемма 1.** Пусть выполняются условия (i)–(iii),  $\theta_0 - s(0)\tilde{f} \in H_0$ . Тройка  $\{q, \theta, \varphi\}$  является решением обратной задачи (IP), если и только если

$$\theta(t) = \xi(t) + s(t)\tilde{f}, \quad \varphi = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + b[\theta]^4), \quad q(t) = h'(t),$$

где  $\xi$  – решение задачи (P),  $h(t) = (r(\theta(t) - \theta_0), \tilde{f}) + \int_0^t (A_1\theta(\tau) + B(b[\theta(\tau)]^4) - g(\tau), \tilde{f})d\tau$ .

**Доказательство.** Пусть  $\{q, \theta, \varphi\}$  – решение задачи (IP). Тогда, полагая  $\xi(t) = \theta(t) - s(t)\tilde{f}$ , заключаем, что  $\xi \in L^2(0, T; V_0) \cap C([0, T], H_0) \cap L^5(Q)$ . Из равенства (8) следует

$$(r\theta' + A_1\theta + B(b[\theta]^4) - g, v) = 0 \text{ в } D'(0, T) \quad \forall v \in V_0.$$

Заметим, что  $A_1\theta + B(b[\theta]^4) - g = A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b$  и при этом  $A_1\theta - f_b \in L^2(0, T; V') \subset L^2(0, T; V'_0)$ ,  $b[\theta]^4 \in L^{5/4}(Q)$ ,  $\varphi \in L^{5/4}(0, T; W) \subset L^{5/4}(Q)$ . Поэтому  $r\theta' \in L^2(0, T; V'_0) + L^{5/4}(Q)$  и справедливы равенства (9).

Обратно, если  $\xi$  – решение задачи (P), то для  $\theta(t) = \xi(t) + s(t)\tilde{f}$  справедливы равенства  $(f, \theta(t)) = s(t)$ ,  $t \in (0, T)$ ,  $\theta(0) = \theta_0$ . Кроме того, из условия  $\theta \in L^5(Q)$  получаем  $\varphi = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + b[\theta]^4) \in L^{5/4}(0, T; W)$ . Поскольку  $v - (f, v)\tilde{f} \in V_0$  для всех  $v \in V$ , из (9) следует, что

$$(r\theta' + A_1\theta + B(b[\theta]^4) - g, v - (f, v)\tilde{f}) = 0. \quad (10)$$

Для того чтобы ввести интенсивность тепловых источников, положим

$$\tilde{\theta}(t) = \int_0^t \theta(\tau)d\tau, \quad F(t) = \int_0^t (B(b[\theta(\tau)]^4) - g(\tau))d\tau.$$

Интегрируя (10), получим

$$(r(\theta(t) - \theta_0) + A_1\tilde{\theta}(t) + F(t), v - (f, v)\tilde{f}) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$(r(\theta(t) - \theta_0) + A_1\tilde{\theta}(t) + F(t) - h(t)f, v) = 0 \quad \forall v \in V, \quad (11)$$

где  $h(t) = (r(\theta(t) - \theta_0), \tilde{f}) + \int_0^t (A_1\theta(\tau) + B(b[\theta(\tau)]^4) - g(\tau), \tilde{f})d\tau \in C[0, T]$ . Дифференцируя (11) по  $t$  в смысле распределений на  $(0, T)$ , получим первое уравнение в (6), где  $q(t) = h'(t) \in H^{-1}(0, T)$ .

### 3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (P)

Для доказательства разрешимости задачи будем использовать следующие вспомогательные оценки, обоснование которых приводится в конце работы.

**Лемма 2** (см. [7]). Пусть  $\zeta \in W$ ,

$$E(\zeta) = \frac{16\sigma}{25} \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 \|\nabla \zeta\|_j^2 + \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \zeta^2 d\Gamma + \sigma n_0^2 \sum_{j=1}^p h_j \int_{\Gamma_j} ([\zeta_0]^{8/5} - [\zeta_j]^{8/5})([\zeta_0]^{2/5} - [\zeta_j]^{2/5}) d\Gamma.$$

Тогда существует постоянная  $K > 0$  такая, что

$$K\|\zeta\|^2 \leq E(\zeta) \quad \forall \zeta \in W.$$

**Лемма 3.** Пусть  $u \in L^5(\Omega)$ ,  $\eta \in W$ ,  $A_2\eta + b\eta = bu$ . Тогда

$$\|\eta\|_{L^5(\Omega)} \leq \frac{\max b}{K + \max b} \|u\|_{L^5(\Omega)}. \quad (12)$$

Здесь и далее используется весовая норма в  $L^5(\Omega)$ ,  $\|z\|_{L^5(\Omega)} = (\int_{\Omega} b|z|^5 dx)^{1/5}$ .

**Лемма 4.** Пусть  $B : W' \mapsto W'$ ,  $B = A_2(A_2 + bI)^{-1}$ . Тогда для произвольных  $u, v \in L^5(\Omega)$  справедливы неравенства

$$(B(b[u]^4), u) \geq K_1 \|u\|_{L^5(\Omega)}^5, \quad (B(b[u]^4), v) \leq K_2 \|u\|_{L^5(\Omega)}^4 \|v\|_{L^5(\Omega)}. \quad (13)$$

Здесь  $K_1 = \frac{K}{K + \max b}$ ,  $K_2 = \frac{K + 2 \max b}{K + \max b}$ .

Определим галеркинские приближения  $\xi_k$  решения задачи (P) и выведем необходимые для доказательства разрешимости априорные оценки. В пространстве  $V_0$  рассмотрим ортонормированный в  $H$  базис  $w_1, w_2, \dots$ . Тогда

$$\begin{aligned}\xi_k(t) &\in V_k = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_k\}, \quad t \in (0, T). \\ (r\theta'_k + A_1\theta_k + B(b[\theta_k]^4) - g, v) &= 0 \quad \forall v \in V_k, \\ \xi_k(0) &= \xi_{0k}.\end{aligned}\tag{14}$$

Здесь  $\theta_k(t) = \xi_k(t) + s(t)\tilde{f}$ ,  $\xi_{0k}$  — ортогональная проекция в  $H$  функции  $\xi_0$  на подпространство  $V_k$ .

Задача Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (14) разрешима на малом временном интервале  $(0, T_k)$ . Оценки, полученные ниже, позволяют продолжить решение на  $(0, T)$ .

#### Априорные оценки галеркинских приближений

Положим  $v = \xi_k$  в (14) и учтем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}(r\theta'_k, \xi_k) &= (r\xi'_k, \xi_k) + s'(t)(r\tilde{f}, \xi_k) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\xi_k, \xi_k) + s'(t)(r\tilde{f}, \xi_k), \\ (A_1\theta_k, \xi_k) &= \|\xi_k\|_V^2 + s(t)(A_1\tilde{f}, \xi_k), \\ (B(b[\theta_k]^4), \xi_k) &= (B(b[\theta_k]^4), \theta_k) - s(t)(B(b[\theta_k]^4), \tilde{f}).\end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\xi_k, \xi_k) + \|\xi_k\|_V^2 + (B(b[\theta_k]^4), \theta_k) = s(t)(B(b[\theta_k]^4), \tilde{f}) + (p, \xi_k).$$

Здесь  $p(t) = g(t) - s(t)A_1\tilde{f} - s'(t)r\tilde{f} \in L^2(0, T; V')$ .

Применяя оценки (13), получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\xi_k, \xi_k) + \|\xi_k\|_V^2 + K_1\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 \leq K_2\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^4 \|s(t)\tilde{f}\|_{L^5(\Omega)} + (p, \xi_k).\tag{15}$$

Оценим правую часть (15), используя неравенства

$$\begin{aligned}(p, \xi_k) &\leq \frac{1}{2}\|p\|_{V'}^2 + \frac{1}{2}\|\xi_k\|_V^2, \\ \|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^4 \|s(t)\tilde{f}\|_{L^5(\Omega)} &\leq \frac{1}{5} \left( 4\varepsilon^{5/4} \|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 + \varepsilon^{-5} \|s(t)\tilde{f}\|_{L^5(\Omega)}^5 \right).\end{aligned}$$

При достаточно малом  $\varepsilon > 0$  из (15) следует оценка

$$\frac{d}{dt} (r\xi_k, \xi_k) + \|\xi_k\|_V^2 + K_1\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 \leq C\|s(t)\tilde{f}\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|p\|_{V'}^2.\tag{16}$$

Здесь и далее через  $C > 0$  обозначаем постоянные, не зависящие от  $k$ .

Проинтегрировав по времени неравенство (16), получаем оценки

$$\|\xi_k(t)\| \leq C, \quad \int_0^t \|\xi_k(\tau)\|_V^2 d\tau \leq C, \quad \int_0^t \|\theta_k(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 d\tau \leq C.\tag{17}$$

Аналогичные оценки в  $L^\infty(0, T; H)$  и в  $L^2(0, T; V)$  справедливы и для  $\theta_k$ . Выведем равностепенную непрерывность последовательности  $\theta_k$  в  $L^2(0, T; H)$ . Рассмотрим (14) в момент времени  $\tau$ , положим  $v = \theta_k(\tau) - \theta_k(t) \in V_k$  и проинтегрируем по  $\tau$  от  $t$  до  $t+h$ , затем по  $t$  от 0 до  $T-h$ . Тогда

$$\frac{1}{2} \int_0^{T-h} (r(\theta_k(t+h) - \theta_k(t), \theta_k(t+h) - \theta_k(t))) dt = \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} p_k(t, \tau) d\tau dt,\tag{18}$$

где

$$p_k(t, \tau) = (A_1\theta_k(\tau) + B(b[\theta_k(\tau)]^4) - g(\tau), \theta_k(t) - \theta_k(\tau)).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (A_1 \theta_k(\tau), \theta_k(t) - \theta_k(\tau)) &\leq \frac{1}{2} \|\theta_k(\tau)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\theta_k(t)\|_V^2, \\ (B(b[\theta_k(\tau)]^4), \theta_k(t) - \theta_k(\tau)) &\leq K_2 \|\theta_k(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^4 \|\theta_k(t) - \theta_k(\tau)\|_{L^5(\Omega)} \leq \\ &\leq K_2 \left( \frac{9}{5} \|\theta_k(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 + \frac{1}{5} \|\theta_k(t)\|_{L^5(\Omega)}^5 \right). \end{aligned}$$

Полученные неравенства позволяют оценить правую часть (18), используя также неравенства (17), причем для оценки интегралов от функций, зависящих от  $\tau$ , достаточно поменять порядок интегрирования. В результате получаем оценку равностепенной непрерывности

$$\int_0^{T-h} \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t)\|^2 dt \leq C_1 h, \quad (19)$$

где  $C_1 > 0$  не зависит от  $k, h$ .

Оценки (17), (19) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что существуют функции  $\xi, \theta = \xi + s(t)\tilde{f}$  такие, что

$$\xi_k \rightarrow \xi \text{ слабо в } L^2(0, T; V_0), \theta_k \rightarrow \theta \text{ слабо в } L^2(0, T; V), L^5(Q), \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \text{ сильно в } L^4(Q).$$

Сходимость  $\theta_k \rightarrow \theta$  в  $L^4(Q)$  следует из неравенства

$$\|\theta_k - \theta\|_{L^4(Q)}^4 \leq \|\theta_k - \theta\|_{L^2(Q)}^{2/3} \|\theta_k - \theta\|_{L^5(Q)}^{10/3}.$$

Заметим также, что последовательность  $B(b([\theta_k]^4)) = b([\theta_k]^4 - \psi_k)$ , где  $A_2 \psi_k + b\psi_k = b[\theta_k]^4$ , ограничена в  $L^{5/4}(0, T; W)$  и поэтому  $B(b([\theta_k]^4)) \rightarrow \chi$  слабо в  $L^{5/4}(0, T; W)$ . Поскольку  $\theta_k \rightarrow \theta$  в  $L^4(Q)$ , заключаем, что  $\chi = B(b([\theta]^4))$ .

Полученных результатов о сходимости достаточно для предельного перехода при  $k \rightarrow \infty$  в системе (14) и доказательства того, что предельные функции таковы, что  $\xi \in L^2(0, T; V_0) \cap L^5(Q)$ ,  $r\xi' \in L^2(0, T; V_0') + L^{5/4}(Q)$  и выполняются равенства (9). При этом  $\xi \in C([0, T]; H)$  (см. [12]).

Таким образом, получаем следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (i)–(iii),  $\theta_0 - s(0)\tilde{f} \in H_0$ . Тогда существует решение задачи (P).

#### 4. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Покажем, что задача (P) не может иметь двух различных решений. Тогда, на основании леммы 1 и теоремы 1, получим однозначную разрешимость задачи (IP).

Пусть  $\xi_{1,2}$  — два решения задачи (P),  $\theta_{1,2} = \xi_{1,2} + s(t)\tilde{f}$ ,  $\theta = \xi_1 - \xi_2 = \theta_1 - \theta_2 \in L^2(0, T; V_0)$ . Тогда из (9) следует равенство

$$(r\theta' + A_1\theta + B(b([\theta_1]^4 - [\theta_1]^4)), \theta) = (r\theta' + A_1\theta + (b([\theta_1]^4 - [\theta_1]^4), \theta) - (b\zeta, \theta) = 0.$$

Здесь  $\zeta = (A_2 + bI)^{-1}(b([\theta_1]^4 - [\theta_1]^4))$ .

Учитывая неравенства

$$([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4)(\theta_1 - \theta_2) \geq 0, \quad |[\theta_1]^4 - [\theta_2]^4| \leq 2(|\theta_1|^3 + |\theta_2|^3)|\theta|,$$

получаем оценки

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\theta, \theta) + \|\theta\|_V^2 \leq (b\zeta, \theta) \leq \max b \|\zeta\|_{L^6(\Omega)} \|\theta\|_{L^{6/5}(\Omega)} \leq \max b |\Omega|^{1/3} \|\zeta\|_{L^6(\Omega)} \|\theta\|, \quad (20)$$

при этом

$$(A_2\zeta, \zeta) + (b\zeta, \zeta) = (b([\theta_1]^4 - [\theta_1]^4), \zeta) \leq 2 \max b \int_{\Omega} (|\theta_1|^3 + |\theta_2|^3) |\theta| |\zeta| dx. \quad (21)$$

Левую часть (21) оценим снизу, используя непрерывность вложения  $W \subset L^6(\Omega)$  и поэтому  $K_3 \|\varphi\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq (A_2 \zeta, \zeta) + (b\zeta, \zeta)$ , а правую сверху, используя неравенство Гёльдера. Тогда

$$K_3 \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq 2 \max b \|\zeta\|_{L^6(\Omega)} \left( \left( \int_{\Omega} |\theta_1|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} + \left( \int_{\Omega} |\theta_2|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} \right).$$

Заметим, что

$$\left( \int_{\Omega} |\theta_{1,2}|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} \leq \|\theta_{1,2}\|_{L^5(\Omega)}^3 \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{1/5}.$$

Следовательно,

$$K_3 \|\zeta\|_{L^6(\Omega)} \leq 2 \max b \left( \|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{1/5}.$$

Используя полученное неравенство для  $\zeta$  в правой части (20), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\theta, \theta) + \|\theta\|_V^2 \leq K_4 \left( \|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{6/5}. \quad (22)$$

Здесь  $K_4 = 2(\max b)^2 |\Omega|^{1/3} / K_3$ . Из неравенства Юнга с параметром  $\varepsilon > 0$  выводим оценку

$$\left( \|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{6/5} \leq \frac{4\varepsilon^{5/2}}{5} \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^2 + \frac{3\varepsilon^{-5/3}}{5} \left( \|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^5 \right) \|\theta\|^2.$$

Учитывая непрерывность вложения  $V \subset L^6(\Omega)$ , получаем из (22) при малом  $\varepsilon$

$$\min r \|\theta(t)\|^2 \leq K_5 \int_0^t \left( \|\theta_1(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 \right) \|\theta(\tau)\|^2 d\tau,$$

где  $K_5 > 0$  зависит только от  $K_4, \varepsilon$ . Функция  $\tau \rightarrow \left( \|\theta_1(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 \right)$  интегрируема на  $(0, T)$  и поэтому из неравенства Гронуолла следует  $\theta = 0$ , что означает единственность решения.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (i)–(iii),  $\theta_0 - s(0)\tilde{f} \in H_0$ . Тогда существует единственное решение обратной задачи (IP).

## 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

**Лемма 5.** Для вывода оценки (12) определим срезку функции  $\eta$ , полагая для  $m \in \mathbb{N}$

$$\eta_m = \begin{cases} \eta, & \text{если } |\eta| < m, \\ m \operatorname{sign} \eta, & \text{если } |\eta| \geq m. \end{cases}$$

Умножим скалярно уравнение  $A_2 \eta + b\eta = bu$  на  $[\eta_m]^4 \in W$ . Тогда

$$(A_2 \eta, [\eta_m]^4) + (b\eta, [\eta_m]^4) = (bu, [\eta_m]^4). \quad (23)$$

Пусть  $\psi_m = [\eta_m]^{5/2}$ . Выражение  $(A_2 \eta, [\eta_m]^4)$  оценивается снизу квадратичной формой  $E(\psi_m)$ , определенной в лемме 2, и в силу этой леммы

$$K \|\psi_m\|^2 \leq E(\psi_m) \leq (A_2 \eta, [\eta_m]^4).$$

Кроме того, справедливы неравенства

$$(b\psi_m, \psi_m) \leq (b\eta, [\eta_m]^4), \quad (bu, [\eta_m]^4) \leq \|u\|_{L^5(\Omega)} \|\eta\|_{L^5(\Omega)}^4.$$

Поэтому из равенства (23) следует оценка

$$K \|\psi_m\|^2 + (b\psi_m, \psi_m) \leq \|u\|_{L^5(\Omega)} \|\eta\|_{L^5(\Omega)}^4.$$

Это означает, что последовательность  $\psi_m$  ограничена в пространстве  $H$ , а тогда и в  $W$ . Следовательно, при  $m \rightarrow +\infty$  имеет место сходимость  $\psi_m \rightarrow \psi = [\eta]^{5/2}$  в  $H$ . Из последнего неравенства выводим в пределе:

$$K\|\psi\|^2 + (b\psi, \psi) \leq \|u\|_{L^5(\Omega)} \|\eta\|_{L^5(\Omega)}^4.$$

Заметив, что  $\max b \|\psi\|^2 \geq \|\eta\|_{L^5(\Omega)}^5$ ,  $(b\psi, \psi) = \|\eta\|_{L^5(\Omega)}^5$ , получаем неравенство

$$\|\eta\|_{L^5(\Omega)} \leq \frac{\max b}{K + \max b} \|u\|_{L^5(\Omega)}.$$

**Лемма 6.** Справедливость оценок (13) следует из леммы 3, если учесть, что

$$\begin{aligned} (B(b[u]^4), u) &= (b[u]^4, u) - (b(A_2 + bI)^{-1}(b[u]^4), u) = \|u\|_{L^5(\Omega)} - (b[u]^4, (A_2 + bI)^{-1}(bu)) \geq \\ &\geq \|u\|_{L^5(\Omega)}^5 - \|u\|_{L^5(\Omega)}^4 \|(A_2 + bI)^{-1}(bu)\|_{L^5(\Omega)} \geq \left(1 - \frac{\max b}{K + \max b}\right) \|u\|_{L^5(\Omega)}^5. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} (B(b[u]^4), v) &= (b[u]^4, v) - (b(A_2 + bI)^{-1}(b[u]^4), v) \leq \\ &\leq \|u\|_{L^5(\Omega)}^4 \|v\|_{L^5(\Omega)} - (b[u]^4, (A_2 + bI)^{-1}(bv)) \leq \left(1 + \frac{\max b}{K + \max b}\right) \|u\|_{L^5(\Omega)}^4 \|v\|_{L^5(\Omega)}. \end{aligned}$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pinnau R. Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by  $SP_1$ -system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
2. Ковтаныук А.Е., Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю. Использование диффузионного приближения для моделирования радиационных и тепловых процессов в кожном покрове // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 123. N 2. С. 194–199.
3. Kovtanyuk A., Chebotarev A., Astrakhanitseva A. Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2021. V. 29 (3). P. 467–476.
4. Чеботарев А.Ю., Пак Н.М., Ковтаныук А.Е. Анализ и численное моделирование начально-краевой задачи для квазилинейных уравнений сложного теплообмена // Сиб. журнал индустриальной матем. 2023. Т. 26. № 4. С. 180–193.
5. Chebotarev, A.Y., Grenkin, G.V., Kovtanyuk, A.E., Botkin, N.D., Hoffmann, K.-H. Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 57 (2018). 290–298.
6. Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E. Quasi-static diffusion model of complex heat transfer with reflection and refraction conditions // J. Math. Anal. Appl. 2022. V. 507. 125745.
7. Чеботарев А.Ю. Неоднородная краевая задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 12. С. 1660–1665.
8. Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.
9. Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D. Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. V. 75. P. 262–269.
10. Chebotarev A.Yu., Pinnau R. An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.
11. Чеботарев А.Ю. Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. С. 303–311.
12. Чеботарев А.Ю. Неоднородная задача для квазистационарных уравнений сложного теплообмена с условиями отражения и преломления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 3. С. 118–126.

13. *Амосов А.А.* Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 3. С. 510–535.
14. *Amosov A.A.* Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation // J. Math. Sci. 2018. V. 233. № 6. P. 777–806.
15. *Amosov A.A., Krymov N.E.* On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems // J. of Math. Sc. 2020. V. 244. P. 357–377.
16. *Amosov A.* Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system consisting of an absolutely black body and several semitransparent bodies // Math. Methods in the Applied Sciences. 2021. V. 44. № 13. P. 10703–10733.
17. *A. Amosov.* Nonstationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a Semitransparent Body with Absolutely Black Inclusions // Mathematics 2021. 9(13). 1471.
18. *Amosov A.* Nonstationary radiative-conductive heat transfer problem in an absolutely black body with semitransparent inclusions // Math. Methods in the Applied Sciences. 2023. V. 46. № 4. P. 4237–4262.
19. *Пятков С.Г., Ротко В.В.* Обратные задачи для некоторых квазилинейных параболических систем с точечными условиями переопределения // Матем. тр., 22:1 (2019), 178–204.
20. *Белоголов В.А., Пятков С.Г.* О некоторых классах обратных задач определения коэффициента теплообмена в слоистых средах // Сиб. матем. журнал. 2022. Т.63. № 2. С. 252–271.
21. *Пятков С.Г., Баранчук В. А.* Определение коэффициента теплопередачи в математических моделях тепло-массопереноса // Матем. заметки. 2023. Т. 113. Выпуск 1. С. 90–108.
22. *Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Numerical simulations of a coupled radiative-conductive heat transfer model using a modified Monte Carlo method // Internat. Journal of Heat and Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 649–654.

## THE INVERSE PROBLEM FOR QUASI-STATIONARY EQUATIONS OF COMPLEX HEAT TRANSFER WITH FRESNEL CONJUGATION CONDITIONS

A.Y. Chebotarev\*

690041 Vladivostok, Radio Str., 7, IAM FEB RAS, Russia

\*e-mail: cheb@iam.dvo.ru

Received: 21.02.2024

Revised: 19.04.2024

Accepted: 28.06.2024

**Abstract.** A nonstationary inverse problem is considered for a nonlinear parabolic elliptic system modeling complex heat transfer with Fresnel conjugation conditions on the surfaces of the refractive index discontinuity. The time-non-local unambiguous solvability of the inverse problem is proved.

**Keywords:** quasi-stationary equations of radiative heat transfer, Fresnel conjugation conditions, inverse problem, nonlocal solvability.

# КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРА В ЕСТЕСТВЕННОМ БАЗИСЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

© 2024 г. Л. Т. Ащепков<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>690091 Владивосток, ул. Мордовцева, 12, стр. 2, Дальневосточный федеральный университет, Россия

\*e-mail: ashchepkov@yahoo.com

Поступила в редакцию 15.03.2024 г.

Переработанный вариант 15.03.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Предложен простой способ синтеза управления в задаче перевода траектории линейной нестационарной системы из начального состояния в состояние равновесия. Искомое управление находится аналитически с использованием «естественного» базиса линейной системы. Показана связь вырожденности матрицы управляемости с существованием инвариантов и линейных связей между фазовыми переменными. Библ. 6.

**Ключевые слова:** критерий управляемости, естественный базис, обратная связь, уравнение Риккати, декомпозиция, инварианты системы.

DOI: 10.31857/S0044466924100094, EDN: JZTWQF

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В первой части монографии [1] изложены метод и результаты исследования классической задачи автоматического управления о нахождении регулятора, переводящего траекторию линейной системы в состояние равновесия. Там же приведены ссылки на ранние публикации и описан алгоритм решения задачи с использованием критерия управляемости и операции псевдообращения матриц. Цель настоящей статьи — показать, что в алгоритме [1] операцию псевдообращения можно без ущерба заменить обычной операцией обращения матрицы, если привлечь к решению задачи дополнительные технические средства — естественный базис и декомпозицию системы. Они позволяют установить ряд новых свойств задачи, начиная с условий разрешимости и корректного аналитического представления регулятора обратными матрицами до связи матрицы управляемости с инвариантами системы (см. [2], [3]). Эта связь обнаруживается при декомпозиции системы и подробнее освещается в разд. 8. Пока лишь отметим, что неполнота ранга матрицы управляемости вызывает появление в фазовом пространстве системы многообразий, содержащих все ее траектории независимо от выбора управлений, и существенно влияет на разрешимость задачи и существование регулятора. Те же явления имеют место и в более общих аффинных системах (см. [4]).

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим основную задачу управления линейной системой с закрепленными концами траектории

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ x(t_0) &= x_0, \quad x(t_1) = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$  — переменный и фиксированный фазовые векторы (векторы состояния),  $u \in \mathbb{R}^m$  — вектор управляющих воздействий,  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $t_0 < t_1$ , — заданные моменты времени,  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  — непрерывные на отрезке  $[t_0, t_1]$  матрицы.

Условимся все векторы в формулах считать столбцовыми, операцию транспонирования отмечать штрихом, нулевую и единичную матрицы обозначать символами 0 и  $I$ . Их размеры обычно ясны из контекста. Норму вектора  $x$  примем евклидовой:  $\|x\| = (x'x)^{1/2}$ . На полуотрезке  $[t_0, t_1]$  управление  $u(t)$  полагаем непрерывным, траекторию  $x(t)$  системы (1) — непрерывной и непрерывно дифференцируемой. Управление  $u(t)$  назовем решением основной задачи, если отвечающая ему траектория  $x(t)$  удовлетворяет всем условиям (1). Требуется найти решение задачи в программной и синтезированной форме.

### 3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Нам потребуется *фундаментальная матрица*  $F(\tau, t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  однородной системы дифференциальных уравнений  $\dot{x} = A(t)x$ . Эта матрица однозначно определена для всех  $\tau, t \in [t_0, t_1]$  условиями *начальной задачи*

$$F_t(\tau, t) = -F(\tau, t)A(t), \quad F(\tau, \tau) = I$$

и при любых  $\tau, s, t \in [t_0, t_1]$  обладает *полугрупповым* свойством  $F(\tau, s)F(s, t) = F(\tau, t)$ .

Для разрешимости основной задачи на отрезке  $[t_0, t_1]$  необходимо и достаточно (см. [1, с. 43]), чтобы векторы  $x_0$  и  $z \in \mathbb{R}^n$  удовлетворяли линейному уравнению

$$x_0 + W(t_0, t_1)z = 0 \quad (2)$$

с матрицей *управляемости*

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} F(t_0, t)B(t)B'(t)F'(t_0, t)dt \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (3)$$

В этом случае программное управление

$$u(t) = B'(t)F'(t_0, t)z, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (4)$$

служит решением основной задачи.

### 4. ЕСТЕСТВЕННЫЙ БАЗИС ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть ранг матрицы  $W(t_0, t_1)$  равен  $r$ ,  $r < n$ . Тогда уравнение  $e'W(t_0, t_1) = 0$  с неизвестным вектором  $e \in \mathbb{R}^n$  имеет  $n-r$  линейно независимых решений. Построим из линейных комбинаций решений методом ортогонализации (см. [5, с. 233]) систему ортонормированных векторов  $e_{r+1}, \dots, e_n$ . Дополним их ортонормированными векторами  $e_1, \dots, e_r$  до полного ортонормированного базиса  $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$  пространства  $\mathbb{R}^n$  и сформируем *базисные* матрицы

$$E_1 = (e_1, \dots, e_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad E_2 = (e_{r+1}, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}, \quad E = (E_1, E_2) \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

По построению базисные матрицы обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} E_1' E_1 &= I, & E_2' E_2 &= I, \\ E' E &= E_1 E_1' + E_2 E_2' = I, \\ E_1' E_2 &= 0, & E_2' W(t_0, t_1) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим далее на отрезке  $[t_0, t_1]$  решения

$$\begin{aligned} \Psi_1(t_0, t) &= F'(t_0, t)E_1, & \Psi_2(t_0, t) &= F'(t_0, t)E_2, \\ \Psi(t_0, t) &= (\Psi_1(t_0, t), \Psi_2(t_0, t)) \end{aligned} \quad (6)$$

матричного дифференциального уравнения  $\dot{\Psi} = -A'(t)\Psi$ . Вследствие единственности матрица  $\Psi(t_0, t)$  обратима. Базис фазового пространства  $\mathbb{R}^n$ , образованный при текущем  $t \in [t_0, t_1]$  столбцами матрицы  $\Psi(t_0, t)$ , назовем *естественным* базисом системы (1).

### 5. ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Предварительно покажем обратимость матрицы

$$W_1(t_0, t_1) = E_1' W(t_0, t_1)E_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}. \quad (7)$$

Предположим противное: столбцы матрицы  $W_1(t_0, t_1)$  линейно зависимы, т.е. найдется вектор  $\lambda \in \mathbb{R}^r$ ,  $\lambda \neq 0$ , со свойством  $W_1(t_0, t_1)\lambda = 0$ . Полагая  $\mu = E_1\lambda$ , имеем

$$0 = \lambda' W_1(t_0, t_1)\lambda = \mu' W(t_0, t_1)\mu = \int_{t_0}^{t_1} \|\mu' F(t_0, t)B(t)\|^2 dt.$$

Непрерывность и неотрицательность подынтегральной функции в последнем равенстве равносильна тождеству  $\mu'F(t_0, t)B(t) \equiv 0, t \in [t_0, t_1]$ . Умножим тождество справа на матрицу  $B'(t)F'(t_0, t)$  и проинтегрируем по  $t \in [t_0, t_1]$ . В результате получим  $\mu'W(t_0, t_1) = 0$ . Вектор  $\mu$  как решение уравнения  $e'W(t_0, t_1) = 0$  равен линейной комбинации  $E_2v, v \in \mathbb{R}^{n-r}$ , фундаментальных решений этого уравнения (см. [6, с. 85]). Тогда из равенств  $\mu = E_1\lambda = E_2v$  следует линейная зависимость столбцов базисной матрицы  $E$ , что невозможно по определению. Установленное противоречие доказывает обратимость матрицы (7).

Отметим, что в ходе доказательства фактически установлена эквивалентность утверждений

$$E'_2W(t_0, t_1) = 0 \Leftrightarrow (\Psi'_2(t_0, t)B(t) \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_1]). \quad (8)$$

Вернемся к решению уравнения (2). Умножив его слева на обратимую матрицу  $E'$ , получим эквивалентную систему уравнений

$$\begin{aligned} E'_1x_0 + E'_1W(t_0, t_1)z &= 0, \\ E'_2x_0 + E'_2W(t_0, t_1)z &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда с использованием последнего свойства (5) и установленной выше обратимости матрицы (7) имеем

$$z = -E_1W_1^{-1}(t_0, t_1)E'_1x_0, \quad E'_2x_0 = 0. \quad (9)$$

Условие  $E'_2x_0 = 0$  необходимо и достаточно для совместности уравнения (2) и, следовательно, для разрешимости основной задачи. Подстановкой вектора  $z$  вида (9) в формулу (4) находим программное решение

$$\begin{aligned} u(t, z) &= B'(t)F'(t_0, t)z, \quad t \in [t_0, t_1], \\ z &= -E_1W_1^{-1}(t_0, t_1)E'_1x_0, \quad E'_2x_0 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

основной задачи. Для отвечающей управлению (10) траектории  $x(t, z)$  системы (1) выполнено тождество  $\Psi'_2(t_0, t)x(t, z) = 0, t \in [t_0, t_1]$ . В самом деле, левая часть тождества равна нулю на концах отрезка  $[t_0, t_1]$  и имеет равную нулю частную производную по  $t$  в остальных точках этого отрезка.

**Вывод 1.** Для разрешимости основной задачи с матрицей управляемости ранга  $r < n$  необходимо и достаточно, чтобы начальное состояние  $x_0$  принадлежало подпространству  $E'_2x_0 = 0$ . В этом случае задача имеет программное решение (10), и соответствующая траектория системы (1) лежит на многообразии  $\Psi'_2(t_0, t)x = 0$ .

## 6. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим двухточечную задачу управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ x(\tau) &= \xi, \quad x(t_1) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

с параметрами  $\tau \in [t_0, t_1], \xi \in \mathbb{R}^n$ . Очевидно, параметрическая задача (11) содержит основную задачу при  $\tau = t_0, \xi = x_0$ . Согласно разд. 5 разрешимость параметрической задачи равносильна совместности уравнения  $\xi + W(\tau, t_1)z = 0$ . Умножив последнее уравнение слева на обратимую матрицу  $\Psi'(t_0, \tau)$  вида (6), приходим к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{aligned} \Psi'_1(t_0, \tau)\xi + \Psi'_1(t_0, \tau)W(\tau, t_1)z &= 0, \\ \Psi'_2(t_0, \tau)\xi + \Psi'_2(t_0, \tau)W(\tau, t_1)z &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть матрица  $W(\tau, t_1)$  при каждом  $\tau \in [t_0, t_1]$  имеет один и тот же ранг  $r < n$ . Покажем, что тогда выполнено равенство  $\Psi'_2(t_0, \tau)W(\tau, t_1) = 0$ , и матрица

$$W_2(\tau, t_1) = \Psi'_1(t_0, \tau)W(\tau, t_1)\Psi_1(t_0, \tau) \in \mathbb{R}^{r \times r} \quad (13)$$

обратима. Первое утверждения проверяется с помощью полугруппового свойства фундаментальной матрицы, формулы (3) и тождества (8):

$$\begin{aligned} \Psi'_2(t_0, \tau)W(\tau, t_1) &= E'_2F(t_0, \tau) \int_{\tau}^{t_1} F(\tau, t)B(t)B'(t)F'(\tau, t)dt = \\ &= \int_{\tau}^{t_1} E'_2F(t_0, t)B(t)B'(t)F'(\tau, t)dt = \int_{\tau}^{t_1} \Psi'_2(t_0, t)B(t)B'(t)F'(\tau, t)dt = 0. \end{aligned}$$

Из этого равенства следует, что  $n - r$  линейно независимых столбцов матрицы  $\Psi_2(t_0, \tau)$  образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения  $e'W(\tau, t_1) = 0$ .

Докажем теперь второе утверждение. Допустим, матрица  $W_2(\tau, t_1)$  при некотором  $\tau \in [t_0, t_1]$  вырожденная, т.е. существует вектор  $\lambda \in \mathbb{R}^r, \lambda \neq 0$ , со свойством  $W_2(\tau, t_1)\lambda = 0$ . Обозначив  $\mu = \Psi_1(\tau, t_1)\lambda$ , по аналогии с разд. 5 получим равносильные утверждения

$$\begin{aligned} \lambda'W_2(\tau, t_1)\lambda = 0 &\Leftrightarrow \mu'W(\tau, t_1)\mu = 0 \Leftrightarrow \int_{\tau}^{t_1} \|\mu'F(\tau, t)B(t)\|^2 dt = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\mu'F(\tau, t)B(t) \equiv 0, t \in [\tau, t_1]) \Leftrightarrow \mu'W(\tau, t_1) = 0. \end{aligned}$$

Вектор  $\mu$  как решение последнего однородного уравнения есть линейная комбинация фундаментальных решений этого уравнения (см. [6, с. 85]), т.е.  $\mu = \Psi_2(\tau, t_1)v, v \in \mathbb{R}^{n-r}$ . Тогда из равенств  $\mu = \Psi_1(\tau, t_1)\lambda = \Psi_2(\tau, t_1)v$  следует линейная зависимость столбцов базисной матрицы  $\Psi(\tau, t_1)$ , что невозможно. Полученное противоречие доказывает обратимость матрицы (13).

На основании сказанного векторы  $\xi$  и  $z = z(\xi, \tau)$ , удовлетворяющие условиям

$$z(\xi, \tau) = -\Psi_1(t_0, \tau)W_2^{-1}(\tau, t_1)\Psi_1'(t_0, \tau)\xi, \quad \Psi_2'(t_0, \tau)\xi = 0, \quad (14)$$

образуют решение уравнений (12). Пользуясь формулой (4), находим отвечающее (14) программное решение параметрической задачи

$$u(t, \xi, \tau) = B'(t)F'(\tau, t)z(\xi, \tau), \quad t \in [\tau, t_1].$$

В начальный момент  $t = \tau$  это программное решение становится функцией  $u(\tau, \xi, \tau) = B'(\tau)z(\xi, \tau)$  начальных значений. Заменив  $\xi, \tau$  соответственно на  $x, t$  и  $u(t, x, t)$  — на  $v(x, t)$ , приходим к линейной обратной связи

$$v(x, t) = -B'(t)K(t)x, (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1]. \quad (15)$$

Здесь в силу (14) фазовые векторы  $x = x(t)$  отвечают условиям

$$\Psi_2'(t_0, t)x(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (16)$$

и матрица  $K(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  имеет вид

$$K(t) = \Psi_1(t_0, t)W_2^{-1}(t, t_1)\Psi_1'(t_0, t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (17)$$

Формулы (15) и (17) дают решение параметрической задачи и включенной в нее основной задачи.

## 7. СВОЙСТВА СИНТЕЗИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Из (17) следует, что в области определения матрица  $K(t)$  непрерывна, симметрична, неотрицательно определена и удовлетворяет условиям начальной задачи для матричного уравнения Риккати

$$\dot{K} = -A'(t)K - KA(t) + KB(t)B'(t)K, K(t_0) = E_1W_1^{-1}(t_0, t_1)E_1'. \quad (18)$$

Траектория  $x(t)$  замкнутой управлением (15) линейной системы

$$\dot{x} = (A(t) - B(t)B'(t)K(t))x, x(t_0) = x_0, E_2'x_0 = 0, \quad (19)$$

существует на всем полуотрезке  $[t_0, t_1]$  и лежит на многообразии (16). Последнее проверяется точно так же, как в разд. 5.

Используя соотношения (18) и (19), можно убедиться, что решение  $\psi(t)$  сопряженной начальной задачи

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -A'(t)\psi, \psi(t_0) = z, \\ z &= -E_1W_1^{-1}(t_0, t_1)E_1'x_0, E_2'x_0 = 0, \end{aligned}$$

удовлетворяет равенствам

$$\psi(t) = F'(t_0, t)z = K(t)x(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Отсюда и из (15) при  $x = x(t)$  получим программное управление  $v(x(t), t) = -B'(t)F'(t_0, t)z, t \in [t_0, t_1]$ , которое по непрерывности на замыкании области определения совпадает с управлением (10). Легко видеть, что

совпадают также начальные задачи для замыкаемых этими управлениями систем дифференциальных уравнений. Следовательно, совпадают решения этих систем, т.е. под действием синтезированного управления решение замкнутой системы (19) действительно стремится к нулю при  $t \rightarrow t_1$ .

Допустим, что матрица  $W(t, t_1)$  имеет полный ранг  $n$  на всем полуотрезке  $[t_0, t_1]$ . Зададим естественный базис линейной системы матрицами  $E = I$ ,  $\Psi(t_0, t) = F'(t_0, t)$  и примем

$$E_1 = I, \quad E_2 = 0, \quad \Psi_1(t_0, t) = F'(t_0, t), \quad \Psi_2(t_0, t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (20)$$

Тогда в законе управления (15) матрица  $K(t) = W^{-1}(t, t_1)$  есть решение начальной задачи (18), где в силу (20) и (7) начальное условие примет вид  $K(t_0) = W^{-1}(t_0, t_1)$ . Равенство (16) при этом выполняется автоматически.

Подведем итоги.

**Вывод 2.** Если ранг матрица  $W(t, t_1)$  при всех  $t \in [t_0, t_1]$  равен  $r < n$  и начальное состояние  $x_0$  отвечает условию  $E'_2 x_0 = 0$ , то основная задача имеет решение в форме линейной обратной связи (15) с матрицей (17), определенной начальной задачей (18). Траектория замкнутой системы (19) лежит на многообразии  $\Psi'_2(t_0, t)x = 0$ . Если  $r = n$ , то при любом  $x_0$  синтезированное решение основной задачи дается формулами (15) и (18) с уточнениями (20). Если  $r < n$  и  $E'_2 x_0 \neq 0$ , то основная задача не имеет решения.

## 8. ДЕКОМПОЗИЦИЯ И ИНВАРИАНТ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим подробнее связь вырожденности матрицы управляемости и функциональной зависимости фазовых переменных линейной системы (1).

Пусть по-прежнему ранг матрицы  $W(t_0, t_1)$  равен  $r < n$ . Выполним в системе дифференциальных уравнений и начальном условии (1) невырожденное преобразование фазовых переменных

$$\begin{aligned} F(t_0, t)x &= E_1 y_1 + E_2 y_2, \\ t &\in [t_0, t_1], \quad y_1 \in \mathbb{R}^r, \quad y_2 \in \mathbb{R}^{n-r}. \end{aligned} \quad (21)$$

В прежних обозначениях получим декомпозированную систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \Psi'_1(t_0, t)B(t)u, \\ \dot{y}_2 &= \Psi'_2(t_0, t)B(t)u, \\ y_1(t_0) &= E'_1 x_0, \quad y_2(t_0) = E'_2 x_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда на основании тождества (8) находим *инвариант* — векторную функцию  $y_2 = E'_2 x_0$ , принимающую постоянное значение на всех решениях системы (22) независимо от выбора управлений. Выполнив обратное (21) преобразование

$$y_1 = \Psi'_1(t_0, t)x, \quad y_2 = \Psi'_2(t_0, t)x$$

фазовых переменных, получим соответствующий инвариант

$$\Psi'_2(t_0, t)x = E'_2 x_0 \quad (23)$$

системы (1). Как видно, вырожденность матрицы  $W(t_0, t_1)$  влечет функциональную зависимость (23) фазовых переменных системы. Эту зависимость можно использовать для понижения размерности системы (см., например, [3, с. 57]).

В расширенном пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  переменных  $x, t$  уравнением (23) задано некоторое многообразие  $M$ . Очевидно,  $(x_0, t_0) \in M$ . В силу тождества (8) многообразие  $M$  содержит любую интегральную кривую системы (1), исходящую из точки  $(x_0, t_0)$  под действием произвольно выбранного управления. Исходная задача разрешима, если одна из таких кривых проходит через точку  $(0, t_1) \in M$ . Отсюда и из (23) следует условие  $E'_2 x_0 = 0$  на начальное состояние  $x_0$ , определяющее разрешимость основной задачи.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена классическая задача о построении регулятора, переводящего траекторию линейной нестационарной системы в состояние равновесия за конечное время в случае произвольного ранга матрицы управляемости. Предложен простой способ аналитического решения задачи, использующий специальный базис и декомпозицию системы. С их помощью установлены дополнительные свойства задачи и упрощен алгоритм [1] синтеза управления.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калман Р, Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
2. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Критерий полной управляемости линейной нестационарной системы в критическом случае // Изв. ИМИ УдГУ. 2002. № 2(25). С. 81–86.
3. Ashchepkov L.T., Dolgy D.V. Taekuan Kim, Agarwal R.P. Optimal Control. Cham: Springer Nature, 2022.
4. Ащепков Л.Т. Синтез оптимальной системы с устойчивыми режимами скольжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 5. С. 731–738. Ashchepkov L. T. Synthesis of an optimal system with stable sliding modes // Comput. Math. Math. Phys. 2023. V. 63. № 5. P. 743–750.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.

## FORMATION OF THE REGULATOR IN THE NATURAL BASIS OF A LINEAR SYSTEM

L. T. Ashchepkov\*

690091 Vladivostok, 12 Mordovtseva str., building 2, Far Eastern Federal University, Russia

\*e-mail: ashchepkov@yahoo.com

Received: 15.03.2024

Revised: 15.03.2024

Accepted: 01.07.2024

**Abstract.** A simple method for synthesizing control in the problem of transferring the trajectory of a linear non-stationary system from an initial state to an equilibrium state is proposed. The desired control is found analytically using the "natural" basis of the linear system. The connection of the degeneracy of the controllability matrix with the existence of invariants and linear relationships between phase variables is shown.

**Keywords:** controllability criterion, natural basis, feedback, Riccati equation, decomposition, invariants of the system.

УДК 519.612

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ  
ПРИ СБЛИЖЕНИИ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ МАСС<sup>1)</sup>© 2024 г. С. А. Назаров<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>199178 Санкт-Петербург, Большой пр-т, 61, Институт проблем машиноведения РАН, Россия

\*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 11.05.2024 г.

Переработанный вариант 11.05.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Исследуется спектральная задача Дирихле в трехмерной области с несколькими идентичными концентрированными тяжелыми массами (большие возмущения плотности на мелких множествах). Строится асимптотика собственных значений и функций в зависимости от двух параметров: малого, характеризующего размер и плотность включений, и времениподобного, описывающего процесс их приближения к началу координат (или к точке на границе области). Основное новшество — построение двухмасштабных асимптотических разложений и вывод равномерных оценок асимптотических остатков. Библ. 34. Фиг. 2.

**Ключевые слова:** спектральная задача Дирихле, концентрированные массы, времениподобный параметр, асимптотика собственных значений и функций, равномерные оценки.

DOI: 10.31857/S0044466924100105, EDN: JZQVRV

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $\Omega$ ,  $\omega$  — области в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ , с гладкими (класса  $C^\infty$  для простоты; см. разд. 8) границами  $\partial\Omega$ ,  $\partial\omega$  и компактными замыканиями  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ ,  $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$ . Область  $\Omega$  звездная относительно начала  $\mathcal{O}$  декартовой системы координат  $x = (x_1, \dots, x_3)$ , а  $\mathcal{L}^1, \dots, \mathcal{L}^J$  — исходящие из него лучи, на которых выделим точки  $P^1(t), \dots, P^J(t)$ ; их множество обозначим через  $\mathcal{P}(t)$ . При этом  $J \geq 2$ , длины  $|P^j(t)|$  равны  $v_j t$ , а  $t$  — времениподобный параметр, описывающий “движение” мелких включений с “центрами” в точках  $P^j(t)$ , и  $v_1, \dots, v_J > 0$  — их “скорости” (см. фиг. 1). Пусть еще  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  — малый параметр,  $\varepsilon_0 > 0$ , и

$$\omega_j^\varepsilon(t) = \{x : \xi^j := \varepsilon^{-1}(x - P^j(t)) \in \omega_j\}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (1)$$

где  $t \in [\varepsilon\tau_\omega, t_\Omega]$ , а числа  $\tau_\omega > 0$  и  $t_\Omega > 0$  таковы, что в случае  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  верны формулы

$$\overline{\omega_j^\varepsilon(t)} \subset \Omega \text{ при } t \leq t_\Omega, \quad \overline{\omega_j^\varepsilon(t)} \cap \overline{\omega_k^\varepsilon(t)} = \emptyset \text{ при } t \geq \varepsilon\tau_\omega \text{ и } j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, J. \quad (2)$$

Величину  $\varepsilon_0 > 0$  при необходимости уменьшаем, сохраняя за ней обозначение. Наконец,  $X$  — характеристическая функция области  $\omega$ , т.е.  $X(\xi) = 1$  при  $\xi \in \omega$ , но  $X(\xi) = 0$  при  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega$ , а  $X_t^\varepsilon$  — характеристическая функция множества  $\omega^\varepsilon(t) = \omega_1^\varepsilon(t) \cup \dots \cup \omega_J^\varepsilon(t)$ .

Рассмотрим спектральную задачу Дирихле для оператора Лапласа

$$-\Delta_x u_t^\varepsilon(x) = \lambda_t^\varepsilon(\rho + \varepsilon^{-3} X_t^\varepsilon) u_t^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

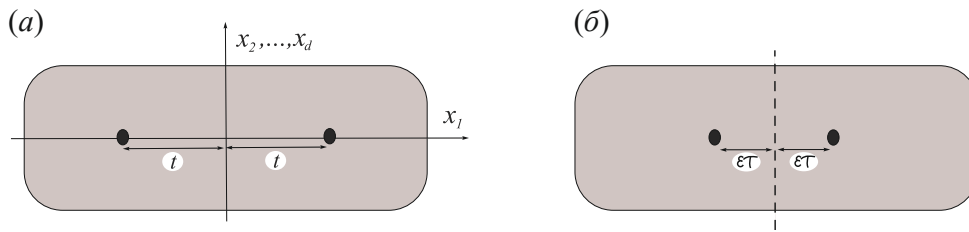
$$u_t^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

и ее вариационную формулировку как интегральное тождество (см. [1])

$$(\nabla_x u_t^\varepsilon, \nabla_x \psi)_\Omega = \lambda_t^\varepsilon((\rho + \varepsilon^{-3} X_t^\varepsilon) u_t^\varepsilon, \psi)_\Omega \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (4)$$

Здесь  $\nabla = \text{grad}$ ,  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега  $L^2(\Omega)$ ,  $\rho > 0$  — фиксированная величина,  $\lambda_t^\varepsilon$  — спектральный параметр, а собственная функция  $u_t^\varepsilon$  ищется в пространстве Соболева

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (код проекта 124041500009-8).



**Фиг. 1.** Плоское изображение тела с включениями • в случае  $J = 2$  и  $v_j = 1$  при большом (а) и малом (б) расстоянии между ними. Штриховая линия — возможная ось зеркальной симметрии.

$H_0^1(\Omega)$  функций, аннулирующихся на границе  $\partial\Omega$ . Сформулированные задачи обладают дискретными спектрами

$$0 < \lambda_{t,1}^\varepsilon < \lambda_{t,2}^\varepsilon \leq \lambda_{t,3}^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_{t,n}^\varepsilon \leq \dots \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Обозначив через  $\delta_{p,q}$  символ Кронекера, соответствующие собственные функции  $u_{t,1}^\varepsilon, u_{t,2}^\varepsilon, \dots, u_{t,n}^\varepsilon, \dots \in H_0^1(\Omega)$  подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{t,p}^\varepsilon, u_{t,q}^\varepsilon)_\omega = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}.$$

Сингулярно возмущенная задача (3) относится к инициированному классической работой [2] (см. также более ранние исследования [3], [4] задач в близких постановках) классу задач о “концентрированных массах”: мелкие, но тяжелые “дробинки”  $\omega_j^\varepsilon(t)$  проникли в массив  $\Omega$ , имеющий незначительную плотность  $\rho > 0$ . При этом малые величины  $t$  характеризуют хорошую кучность выстрела, а большие — сильную его разреженность, т.е. разброс дробы.

Несмотря на то, что в статье [2] исследовалась трехмерное одиночное включение  $\omega_1^\varepsilon$ , масса  $\varepsilon^{-3}|\omega^\varepsilon| = |\omega|$  которого сравнима по порядку с массой  $\rho|\Omega^\varepsilon \setminus \omega^\varepsilon|$  окружающего материала, разработанный в [2] подход позволяет сделать предварительные выводы о строении спектра (5). Именно, в случае  $t \in (t_\Omega^0, t_\Omega]$  при фиксированном  $t_\Omega^0 > 0$ , каждом  $k \in \mathbb{N}$  и малом  $\varepsilon > 0$  нормированные собственные значения  $\varepsilon^{-1}\lambda_{t,1+(k-1)J}^\varepsilon, \dots, \varepsilon^{-1}\lambda_{t,kJ}^\varepsilon$  задачи (3) попадают в узкую окрестность члена  $\Lambda_k$  последовательности

$$0 < \Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \Lambda_3 \leq \dots \leq \Lambda_n \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (6)$$

собственных значений уравнения в пространстве с одним включением  $\omega$  единичного размера

$$-\Delta_\xi U(\xi) = \Lambda X(\xi)U(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (7)$$

Вместе с тем, в случае  $t = \varepsilon\tau$  при  $\tau \in [\tau_\omega, \tau_\omega^0]$ , а также фиксированном  $\tau_\omega^0 > \tau_\omega$  и малом  $\varepsilon > 0$  справедливы неравенства  $|\varepsilon^{-1}\lambda_{\tau,p}^\varepsilon - M_{\tau,p}| \leq c_{\tau,p}\varepsilon^\theta$ ,  $\theta > 0$ , в которых фигурируют собственные числа

$$0 < M_{\tau,1} < M_{\tau,2} \leq M_{\tau,3} \leq \dots \leq M_{\tau,n} \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (8)$$

следующего уравнения с группой  $\omega^1(\tau) = \omega_1^1(\tau) \cup \dots \cup \omega_J^1(\tau)$  взаимодействующих включений:

$$-\Delta_\xi V_\tau(\xi) = M_\tau X_\tau^1(\xi)V_\tau(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (9)$$

Носители правых частей уравнений (7) и (9) содержатся соответственно на множествах  $\overline{\omega}$  и  $\overline{\omega^1(\tau)}$ , т.е. согласно определению (2) во второй ситуации включения  $\omega_1^\varepsilon(\varepsilon\tau), \dots, \omega_J^\varepsilon(\varepsilon\tau)$  с диаметрами  $O(\varepsilon)$  располагаются на расстоянии  $O(\varepsilon)$  одно от другого, и поэтому их приходится интерпретировать как единую концентрированную массу  $\omega^\varepsilon(\varepsilon\tau)$  — конгломерат. Ясно, что спектры (6) и (8) предельных уравнений (7) и (9) не совпадают (см. лемму 1 в разд. 2).

Задачи о тяжелых<sup>1</sup> концентрированных массах в разнообразных постановках изучались с помощью различных методов. Упомянем некоторые группы задач — списки конечно же неполные. Помимо краевых задач Дирихле и Неймана для тела в  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , с одной или несколькими массами, удаленными одна от другой на значительное расстояние (см. [5]–[12]), рассматривались и сближенные на расстояние  $O(\varepsilon)$  тяжелые массы диаметром  $\varepsilon$ , периодически распределенные около его  $(d-1)$ -мерной границы (см. [13]–[17]) или вдоль подмногообразия размерностью  $d' < d-1$  (см. [18], а также [19]–[21] в случае полостей). Зависимость собственных

<sup>1</sup>т.е. при  $m \geq 0$ . Легкие массы ( $m < 0$ ) требуют применения иных методов и здесь не обсуждаются.

пар  $\{\lambda_{t,n}^\varepsilon; u_{t,n}^\varepsilon\}$  от времениподобного параметра  $t$  требует применение новых приемов асимптотического анализа. Предшествующие результаты, как уже упоминалось, предоставляют различные предельные задачи при больших и малых значениях  $t$ . Поэтому на первый план выходит вопрос: как одна асимптотическая формула для  $\lambda_{t,n}^\varepsilon$  трансформируется в другую, т.е. как собственные значения (8) уравнения (9) превращаются в собственные значения (6) уравнения (7) при  $\tau = \varepsilon^{-1}t \rightarrow +\infty$ . Ответы на этот и сопутствующие вопросы даны в разд. 3–5. Однако значительно большую трудность представляет обоснование двухмасштабных асимптотических формул из-за необходимости отслеживать в оценках зависимость мажорант от времениподобных параметров — “медленного”  $t$  или “быстрого”  $\tau$ . В разд. 6 с помощью классической леммы 4 о “почти собственных” значениях и векторах установлено, что в малой окрестности каждого из найденных формально асимптотических приближений имеется какой-то член последовательности (5), однако обычные подходы к точному определению его номера годятся только для  $t \in [t_0, t_\Omega]$  или  $\tau \in [\tau_\omega, \tau_0]$  при положительных  $t_0$  и  $\tau_0$ . Для того чтобы распространить эти результаты на промежуточные значения времениподобного параметра  $t \in (\varepsilon\tau_0, t_0)$ , в разд. 7 доказывается вспомогательная теорема 2 об однозначной разрешимости (неоднородной) задачи (3) с параметрами  $\lambda^\varepsilon = \varepsilon^m \Lambda$  и  $t \in [\varepsilon\tau_\Lambda, t_\Omega]$ , где  $\Lambda$  — точка вне спектра уравнения (7), и  $\tau_\Lambda$  — некоторая величина, зависящая от  $\Lambda$  и других данных задачи. Этот факт позволяет посредством простых рассуждений закончить оправдание асимптотических формул, получив, в частности, равномерные относительно  $t \in [\varepsilon\tau_\omega, t_\Omega]$  оценки остатков. В заключительном разд. 8 перечислены доступные обобщения полученных результатов и сформулированы открытые вопросы.

## 2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сообщим несколько известных фактов, их можно найти в первоисточнике [2] и, например, в статьях [22], [10]; кроме того, они вытекают из результатов [23, гл. 6] и [24, § 2] для общих эллиптических систем. Интегральное тождество

$$(\nabla_\xi U, \nabla_\xi \Psi)_{\mathbb{R}^d} = \Lambda(U, \Psi)_\omega \quad \forall \Psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3), \quad (10)$$

обслуживающее уравнение (7), ставится на пространстве  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ , полученном пополнением линейного множества  $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по “энергетической” норме

$$(\|\nabla_\xi \Psi; L^2(\mathbb{R}^3)\|^2 + \|\Psi; L^2(\omega)\|^2)^{1/2}.$$

Пространство  $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$  совпадает алгебраически и топологически с пространством Кондратьева  $\mathcal{V}_1^1(\mathbb{R}^3)$  (см. [25], а также [23, гл. 6]) в силу одномерного неравенства Харди с показателем  $\theta = 1$ :

$$\int_h^{+\infty} \left| \frac{dW}{d\rho}(\rho) \right|^2 \rho^{0+1} d\rho \geq \frac{\theta^2}{4} \int_h^{+\infty} |W(\rho)|^2 \rho^{0-1} d\rho \quad \text{при } W \in C_c^\infty[d, +\infty), \quad d \geq 0, \quad \theta > 0. \quad (11)$$

При этом  $\mathcal{V}_\beta^\ell(\mathbb{R}^3)$  — пополнение линеала  $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  по весовой норме

$$\|\Psi; \mathcal{V}_\beta^\ell(\mathbb{R}^3)\| = \left( \sum_{k=0}^{\ell} \|(1+\rho)^{\beta+k-\ell} \nabla_\xi^k \Psi; L^2(\mathbb{R}^3)\|^2 \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Здесь  $\ell \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$  и  $\beta \in \mathbb{R}$  — показатели гладкости и веса. Пространство  $\mathcal{V}_\beta^\ell(\mathbb{R}^3)$  состоит из функций  $\Psi \in H_{\text{loc}}^\ell(\mathbb{R}^3)$  с конечной нормой (12).

Введем радиус  $R_\omega$ , для которого  $\bar{\omega} \subset \mathbb{B}_{R_\omega}$ , и такую срезку  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ , что

$$\chi(\xi) = 1 \quad \text{при } \xi \in \mathbb{B}_{R_\omega} = \{\xi : \rho = |\xi| < R_\omega\} \quad \text{и} \quad \chi(\xi) = 0 \quad \text{при } \xi \notin \mathbb{B}_{2R_\omega}. \quad (13)$$

Собственные функции  $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$  задачи (10), бесконечно дифференцируемые в областях  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega}$  и  $\omega$  по-отдельности, можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(U_p, U_q)_\omega = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Для них справедливы представления

$$U_p(\xi) = (1 - \chi(\xi))K_p\Phi(\xi) + \tilde{U}_p(\xi), \quad (15)$$

где  $\Phi(\xi) = (4\pi|\xi|)^{-1}$  — фундаментальное решение оператора Лапласа в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , а для остатка  $\tilde{U}_p$  выполнены оценки

$$|\nabla_\xi^l \tilde{U}_p(\xi)| \leq c_{p,l} \rho^{-2-l} \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_R, \quad l \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (16)$$

причем  $\nabla_{\xi}^l U$  — совокупность производных функции  $U$  порядка  $l$ . Коэффициенты  $K_p$  находятся по формулам (см. далее выкладку (39))

$$K_p = \Lambda_p \int_{\omega} U_p(\xi) d\xi. \quad (17)$$

Первую собственную функцию  $U_1$  можно выбрать положительной всюду в  $\mathbb{R}^3$ , и поэтому справедливо неравенство  $K_1 > 0$ . При  $p > 1$  собственные значения могут быть кратными, например, в случае зеркальной симметрии области  $\omega$ . Если  $\Lambda_p$  есть  $\kappa_p$ -кратное собственное значение,

$$\Lambda_{p-1} < \Lambda_p = \dots = \Lambda_{p+\kappa_p-1} < \Lambda_{p+\kappa_p}, \quad (18)$$

то собственные функции  $U_p, \dots, U_{p+\kappa_p-1}$  всегда удастся зафиксировать так, чтобы выполнялись равенства  $K_{p+1} = \dots = K_{p+\kappa_p-1} = 0$ . Коэффициент  $K_p$  тоже может обратиться в нуль. Например, для шара  $\omega$  имеем  $p = 2, \kappa_2 = 3$  в соотношении (18) и ввиду нечетности собственных функций относительно какой-то координаты все коэффициенты  $K_2, \dots, K_{d+1}$  равны нулю.

Аналогичные результаты (см. конец разд. 4) справедливы и для собственных функций  $V_{\tau,1}, V_{\tau,2}, \dots, V_{\tau,n}, \dots \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$  задачи (9), удовлетворяющих интегральному тождеству

$$(\nabla_{\xi} V_{\tau}, \nabla_{\xi} \Psi)_{\mathbb{R}^d} = M_{\tau}(V_{\tau}, \Psi)_{\omega^1(\tau)} \quad \forall \Psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3), \quad (19)$$

а также условиям ортогональности и нормировки

$$(V_{\tau,p}, V_{\tau,q})_{\omega^1(\tau)} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

**Лемма 1.** При всех  $\tau \geq \tau_{\omega}$  имеет место неравенство  $M_{\tau,1} < \Lambda_1$ .

**Доказательство.** В силу минимального принципа справедливо соотношение

$$M_{\tau,1} = \min_{V_{\tau} \in \mathcal{V}} \frac{\|\nabla_{\xi} V_{\tau}; L^2(\mathbb{R}^3)\|^2}{\|V_{\tau}; L^2(\omega^1(\tau))\|^2} < \min_{W \in \mathcal{V}} \frac{\|\nabla_{\xi} W; L^2(\mathbb{R}^3)\|^2}{\|W; L^2(\omega)\|^2} = \Lambda_1$$

(см., например, [26, теорема 10.2.1]). При этом знаменатель дроби Рэлея уменьшен путем замены  $\omega^1(\tau) \mapsto \omega_1^1(\tau) \subsetneq \omega^1(\tau)$ , а строгое неравенство обусловлено тем, что собственная функция  $V_{\tau,1} \in \mathcal{E}$  не обращается в нуль тождественно ни на одном из множеств  $\omega_1^1(\tau), \dots, \omega_J^1(\tau)$ .

### 3. АСИМПТОТИКА ПРИ БОЛЬШИХ $t$

Повтор с незначительными изменениями рассуждений из статьи [2] доказывает следующие сходимости при  $\varepsilon \rightarrow +0$ :

$$\varepsilon^{-1} \lambda_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon} \rightarrow \Lambda_p, \quad k = 1, \dots, J, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Предел (21) не зависит от параметра  $t \geq t_0 > 0$ , и такой результат не способствует достижению поставленной в работе цели. Простейший вариант асимптотического анализа возмущений кратных собственных значений (см., например, книгу [27, гл. 10 и 11]) предлагает такой анзац:

$$\lambda_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon} = \varepsilon \Lambda_p + \varepsilon^2 \Lambda_{t,k}^{p'} + \dots, \quad k = 1, \dots, J, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Здесь  $\Lambda_{t,1}^{p'}, \dots, \Lambda_{t,J}^{p'}$  — величины, подлежащие определению, а многоточие замещает младшие асимптотические члены, не существенные в предпринимаемом формальном анализе.

Для построения двучленной асимптотики собственных функций задачи (3) применим метод сращиваемых разложений (см. книги [28, 29], [27, гл. 2] и др.): помимо внутренних разложений

$$u_{t,\varepsilon((k+(p-1)J)}^{\varepsilon}(x) = b_j^{pk}(t) U_p(\xi^j) + \varepsilon U_{t,j}^{pk'}(\xi^j) + \dots, \quad j = 1, \dots, J, \quad (23)$$

приемлемых в малых окрестностях включений (1), вводим внешнее разложение

$$u_{t,((k+(p-1)J)}^{\varepsilon}(x) = \varepsilon \sum_{j=1}^J a_j^{pk}(t) G(x, P^j(t)) + \dots, \quad (24)$$

пригодное на удалении от включений и содержащее функцию Грина  $G(x, x')$  задачи Дирихле для оператора Лапласа в области  $\Omega$ . Для функции  $x \mapsto G_t^j(x) = G(x, P^j(t))$  выполнены соотношения

$$G_t^j(x) = \chi_t^j(x) \Phi(x - P^j(t)) + G_t^{j0}(x), \quad G_t^{j0}(x)_t(x) = \sum_{l=1}^J \chi_t^l(x) \mathbf{G}_l^j(t) + \widehat{G}_t^j(x), \quad j = 1, \dots, J, \quad (25)$$

$$r_l(t) |\widehat{G}_t^j(x)| + |\nabla_x \widehat{G}_t^j(x)| \leq c_\Omega^j t^{-1}, \quad r_l(t) := |x - P^l(t)| \leq t R_P / 2, \quad (26)$$

где  $R_P = \min\{|P^j(t_\Omega) - P^k(t_\Omega)| : j \neq k\}$  и  $\chi_t^j(x) = \chi^j(t_\Omega t^{-1}(x - P^j(t)))$ , а функция  $\chi^j \in C_c^\infty(\Omega)$  равна единице в окрестности точки  $P^j(t_\Omega)$  (см. ограничения (2)) и  $\chi^j \chi^k = 0$  при  $k \neq j$ . Появление множителя  $t^{-1}$  в оценке (26) объясняется сближением точек из множества  $\mathcal{P}(t)$  при уменьшении параметра  $t$  (см. статью [30] и см. далее разд. 4 и 5).

**Лемма 2.** Составленная из коэффициентов в формулах (25) матрица  $\mathbf{G}(t) = (\mathbf{G}_l^j(t))_{j,l=1}^J$  размером  $J \times J$  представима в виде  $\mathbf{G}(t) = (4\pi t)^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{R}(t)$ , где  $\mathbf{R}(t)$  — симметричная и положительно определенная при  $t \in (0, t_\Omega]$ , но вырождающаяся при  $t \rightarrow +0$  матрица, гладко зависящая от параметра  $t \in [0, t_\Omega]$ , а  $\mathbf{Y}$  — числовая матрица с элементами  $\mathbf{Y}_{kk} = 0$  и  $\mathbf{Y}_{kl} = |P^k - P^l|^{2-d}$  при  $k, l = 1, \dots, J$  и  $l \neq k$ .

**Доказательство.** Разность  $G_t^{j0}(x) = G_t^j(x) - \Phi(x - P^j(t))$  — решение задачи

$$-\Delta_x G_t^{j0}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad G_t^{j0}(x) = -C_d |x - P^j(t)|^{2-d}, \quad x \in \partial\Omega.$$

Следовательно, (отрицательная) функция  $G_t^{j0} \in C^\infty(\overline{\Omega})$  гладко зависит от параметра  $t \in [0, t_\Omega]$ , так как точка  $P^j(t)$  лежит внутри  $\Omega$ . Применим формулу Грина в области  $\Omega \setminus \mathbb{B}_R(P^k(t))$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} G_t^{j0}(x) \partial_n G_t^k(x) ds_x - \lim_{R \rightarrow +0} \int_{\partial\mathbb{B}_R(P^k(t))} \left( G_t^{j0}(x) \frac{\partial G_t^k}{\partial r_j}(x) - G_t^k(x) \frac{\partial G_t^{j0}}{\partial r_j}(x) \right) ds_x = \\ &= \int_{\partial\Omega} G_t^{j0}(x) \partial_n G_t^{j0}(x) ds_x - \int_{\partial\Omega} \Phi(x - P^j(t)) \partial_n \Phi(x - P^k(t)) ds_x + G_t^{j0}(P^k(t)) = \\ &= (\nabla_x G_t^{j0}, \nabla_x G_t^{j0})_\Omega + (\nabla_x \Phi(\cdot - P^j(t)), \nabla_x \Phi(\cdot - P^k(t)))_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} - \mathbf{R}_{kl}(t). \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbb{B}_R(P^k(t))$  — шар  $\{x : r_k(t) := |x - P^k(t)| < R\}$ , а  $\partial_n$  — производная вдоль внешней нормали, в частности,  $\partial_n = -\partial_{r_j}$  на сфере  $\partial\mathbb{B}_R(P^j(t))$ . Кроме того,  $\mathbf{R}_{kl}(t) = -G_t^{j0}(P^k(t))$ . Итак,  $\mathbf{R}(t)$  — сумма двух матриц Грама, построенных с помощью скалярных произведений в  $L^2(\Omega)$  и  $L^2(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$  по двум наборам линейно независимых в случае  $t > 0$  функций. Первое слагаемое  $(4\pi t)^{-1} \mathbf{Y} t^{2-d}$  учитывает вид фундаментального решения  $\Phi(x) = (4\pi|x|)^{-1}$ .

**Замечание 1.** 1) По теореме Виета для корней многочлена  $y \mapsto \det(\mathbf{Y} - y\mathbf{I})$ , где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица размером  $J \times J$ , в силу строения матрицы  $\mathbf{Y}$  выполнено равенство  $y_1 + \dots + y_J = 0$ , т.е. имеются положительные и отрицательные корни, так как все они не могут стать нулем из-за отрицательного коэффициента при  $y^{J-2}$

$$-|P^1 - P^2|^{-1} - |P^2 - P^3|^{-1} - \dots - |P^{J-1} - P^J|^{-1} - |P^J - P^1|^{-1}.$$

Таким образом, матрица  $\mathbf{Y}$  и матрица  $\mathbf{G}(t)$  при малом  $t > 0$  не являются знакоопределенными, но все-таки  $\mathbf{G}(t)$  может стать отрицательно определенной, если  $t$  велико.

2) При  $J = 2$  (фиг. 1) два ( $\pm$ ) собственных значения матрицы  $\mathbf{Y}$  имеют вид  $\pm |P^1 - P^2|^{-1}$ .

Рассмотрим простое собственное значение  $\Lambda_p$  при условии  $K_p \neq 0$ . Найдем поправочные члены  $\Lambda_k^{p'}(t)$  и  $U_{t(j)}^{p'k'}$ , а также коэффициенты  $b_j^{pk}(t)$  и  $a_j^{pk}(t)$ , образующие столбцы  $b^{pk}(t)$  и  $a^{pk}(t)$  высотой  $J$ . С этой целью произведем сращивание разложений (23) и (24) на уровне  $\varepsilon^{d-2}$ . Благодаря связи  $r_j = \varepsilon r_j$  радиальных переменных сравнение сингулярных составляющих в разложениях (23), (15) и (24), (25) приводит к равенствам  $a_j^p(t) = K_p b_j^p(t)$ ,  $j = 1, \dots, J$ . При сращивании постоянных слагаемых в разложениях (24), (25) функция  $U_{t,j}^{p'k'}$  приобретает такое поведение:

$$U_{t,j}^{p'k'}(\xi^j) = K_p \sum_{l=1}^J b_l^{pk}(t) \mathbf{G}_j^l(t) + O(\rho_j^{-1}), \quad |\xi^j| = \rho_j \rightarrow +\infty. \quad (27)$$

Теперь подставим анзацы (22) и (23) в задачу (3), положим  $\varepsilon = 0$  после растяжения координат и уведем тем самым границу  $\partial\Omega$  на бесконечность. В результате приходим к уравнению

$$-\Delta_{\xi^j} U_{t,j}^{pk'}(\xi^j) - X(\xi^j) \Lambda_p U_{t,j}^{pk'}(\xi^j) = X(\xi^j) \Lambda_{t,k}^{p'} b_j^{pk}(t) U_p(\xi^j), \quad \xi^j \in \mathbb{R}^3. \quad (28)$$

Умножим его на  $U_p$  и проинтегрируем по частям в шаре  $\mathbb{B}_R = \{\xi^j : \rho_j < R\}$ . Предельный переход при  $R \rightarrow +\infty$  и представления (15), (27) дают соотношение

$$\begin{aligned} \Lambda_{t,k}^{p'} b_j^{pk}(t) &= \Lambda_{t,k}^{p'} b_j^{pk}(t) \int_{\omega} |U_p(\xi^j)|^2 d\xi^j = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}_R} U_p(\xi^j) (\Delta_{\xi^j} U_{t,j}^{pk'}(\xi^j) + X(\xi^j) \Lambda_p U_{t,j}^{pk'}(\xi^j)) d\xi^j = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial\mathbb{B}_R} \left( U_{t,j}^{pk'}(\xi^j) \frac{\partial U_p}{\partial \rho_j}(\xi^j) - U_p(\xi^j) \frac{\partial U_{t,j}^{pk'}}{\partial \rho_j}(\xi^j) \right) ds_{\xi^j} = K_p^2 \sum_{l=1}^J b_l^{pk}(t) \mathbf{G}_j^l(t), \quad j = 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассматривая равенства (29) (без средних их частей) как систему линейных алгебраических уравнений для столбца  $b^p(t)$ , выводим формулы

$$\Lambda_{t,k}^{p'} = K_p^2 \mathbf{g}_k(t), \quad k = 1, \dots, J, \quad (30)$$

в которых  $\mathbf{g}_1(t) \leq \dots \leq \mathbf{g}_J(t)$  — собственные значения матрицы  $\mathbf{G}(t)$  из леммы 2. При этом в силу той же леммы и формул (27), (28) верны используемые в п. 6 оценки

$$|\Lambda_{t,k}^{p'}| + \|U_{t,j}^{pk'}; L^2(\omega)\| \leq c_{pk} t^{-1}. \quad (31)$$

Соответствующие собственные векторы  $b^{p1}(t), \dots, b^{pJ}(t) \in \mathbb{R}^J$ , подчиненные условиям

$$b^{pj}(t) \cdot b^{pk}(t) = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, \dots, J, \quad (32)$$

вместе с упоминавшимися связями  $a_j^p(t) = K_p b_j^p(t)$  конкретизируют выделенные члены анзацев (23) и (24). При выполнении равенств (29) задача (28), (27) имеет решение в виде

$$U_{t(j)}^{pk'}(\xi^j) = -K_p (b_1^{pk}(t) \mathbf{G}_j^1(t) + \dots + b_J^{pk}(t) \mathbf{G}_j^J(t)) + \tilde{U}_{t,j}^{pk'}(\xi^j). \quad (33)$$

Остаток  $\tilde{U}_{t(j)}^{pk'} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ , допускающий разложение вида (15), определен с точностью до слагаемого  $c_j^{pk'}(t) U_p$ , т.е. в силу формулы  $K_p \neq 0$  ему можно придать скорость затухания  $O(\rho_j^{-2})$ .

Подчеркнем, что знаки собственных значений матрицы  $\mathbf{G}(t)$  из леммы 2, а вместе с ними и знаки поправочных членов в анзацах (22) в общем случае остаются неизвестными. В силу замечания 1 при  $J = 2$  и  $p = 1$  имеем  $\Lambda_{t,1}^{1'} < 0$  и  $\Lambda_{t,2}^{1'} > 0$ , по крайней мере, при малом  $t > 0$ , что согласуется с утверждением леммы 1 и нашло отражение на фиг. 2.

В ситуации  $K_p = 0$  и  $\varkappa_p = 1$  указанные формулы не дают полезной информации об отдельных членах анзацев (22) и (23), (24) для собственных пар  $\{\lambda_{t,q}^\varepsilon; u_{t,q}^\varepsilon\}$  задачи (3) при  $q = p(J-1)+1, \dots, pJ$ , и асимптотическую процедуру следует продолжить согласно алгоритмам из работы [31], изложенной в гл. 4 книги [27] (см. также упрощенный материал в гл. 2 и 9). Как пояснено в разд. 2, для кратного собственного значения  $\Lambda_p$  из списка (18) разве лишь один из коэффициентов  $K_p, \dots, K_{p+\varkappa_p-1}$  может случиться ненулевым. Поэтому при  $K_p \neq 0$  приведенные вычисления предоставляют содержательные формулы разве лишь для  $J$  собственных значений и их положение в списке  $\lambda_{t,p(J-1)+1}^\varepsilon, \dots, \lambda_{t,(p+\varkappa_p-1)J}^\varepsilon$  зависит от знаков величин  $\mathbf{g}_1(t), \dots, \mathbf{g}_J(t)$ .

Имея хороший пример для  $p = 1$  (см. разд. 5), не будем загромождать статью сложными конструкциями, не предоставляющими отчетливую информацию о поведении собственных значений (5).

#### 4. АСИМПТОТИКА ПРИ МАЛОМ $t$

Далее понадобится только простая (без поправочного члена) и потому очевидная асимптотическая формула для собственных значений (5)

$$\lambda_{t,n}^\varepsilon = \varepsilon^m M_{\varepsilon^{-1}t,n} + \dots, \quad (34)$$

в которой фигурируют собственные значения (8) задачи (9) о группе включений. Основным становится вопрос о зависимости собственных пар  $\{M_{\tau,n}; V_{\tau,n}\}$  от “быстрой” переменной  $\tau = \varepsilon^{-1}t$ . Выясним эту зависимость для больших  $\tau$ . Поскольку при этом множества  $\omega_1^1(\tau), \dots, \omega_J^1(\tau)$  становятся удаленными одно от другого, для собственных значений примем похожий на (22) анзац

$$M_{\tau,k+(p-1)J} = \Lambda_p + \tau^{-1} M_k^{p'} + \widetilde{M}_{\tau,k+(p-1)J}, \quad k = 1, \dots, J, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (35)$$

где  $\Lambda_p$  — член последовательности (6), а величины  $M_k^{p'}$  и  $\widetilde{M}_{\tau, k+(p-1)J}$  подлежат вычислению и оцениванию. Сначала предположим, что  $\Lambda_p$  — простое собственное значение, применим метод составных разложений (см. [27, 32] и др.) и представим собственные функции в виде

$$V_{\tau, k+(p-1)J}(\xi) = \sum_{j=1}^J (h_j^{p,k} U_p(\xi - \tau P^j) + \tau^{-1} U_{k,j}^{p'}(\xi - \tau P^j)) + \widetilde{V}_{\tau, k+(p-1)J}(\xi). \quad (36)$$

Столбец коэффициентов  $h^{p,k} = (h_1^{p,k}, \dots, h_J^{p,k}) \in \mathbb{R}^J$  найдем из условий разрешимости уравнений

$$-\Delta_{\xi,j} U_{k,j}^{p'}(\xi^j) - X(\xi^j) \Lambda_p U_{k,j}^{p'}(\xi^j) = M_k^{p'} h_j^{p,k} U_p(\xi^j) + F_{k,j}^{p'}(\xi^j), \quad \xi^j \in \mathbb{R}^3, \quad (37)$$

для поправочных членов  $U_{k,l}^{p'}$  и  $M_k^{p'}$ , а его правая часть

$$F_{k,j}^{p'}(\xi^j) = X(\xi^j) \Lambda_p \frac{K_p}{4\pi} \sum_{l=1, \dots, J, l \neq j} h_l^{p,k} |P^j - P^l|^{-1}, \quad \xi^j \in \mathbb{R}^3,$$

получена посредством подстановки анзацев (35) и (36) в формулу (9), применения разложения (36) и сбора множителей при  $\tau^{2-d}$  при учете соотношения

$$\Phi(\xi^l) = (4\pi)^{-1} |\xi^k + \tau(P^k - P^l)|^{-1} = (4\pi)^{-1} \tau^{-1} |P^k - P^l|^{2-d} (1 + O(\tau^{-1})).$$

В силу нормировки (14) при  $q = p$  и определения матрицы  $\mathbf{Y}$  в лемме 2 условия разрешимости совокупности ( $k = 1, \dots, J$ ) задач (37) принимают вид системы  $J$  алгебраических уравнений

$$M_j^{p'} h^{p,j} = -(4\pi)^{-1} K_p^2 \mathbf{Y} h^{p,j}. \quad (38)$$

Появление в равенстве (38) матрицы  $\mathbf{Y}$  размером  $J \times J$  обусловлено следующей выкладкой, которая использует формулу Грина в шаре большого радиуса, представление (15), вид фундаментального решения и площадь  $4\pi R^2$  сферы  $\partial \mathbb{B}_R$ :

$$\Lambda_p \int_{\omega} U_p(\xi) d\xi = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}_R} \Delta_{\xi} U_p(\xi) d\xi = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial \mathbb{B}_R} \frac{\partial U_p}{\partial \rho}(\xi) ds_{\xi} = -K_p \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial \mathbb{B}_R} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}(\xi) ds_{\xi} = K_p. \quad (39)$$

Итак,  $M_j^{p'}$  и  $h^{p,j}$  — собственные значения  $-(4\pi)^{-1} K_p^2 y_j$  и собственные векторы матрицы  $-(4\pi)^{-1} K_p^2 \mathbf{Y}$  (со знаком минус). При этом задачи (37) стали разрешимыми, т.е. все отдельные слагаемые асимптотических анзацев (35) и (36) определены. Оценки асимптотических остатков

$$|\widetilde{M}_{\tau, k+(p-1)J}| \leq c_k^p \tau^{-2}, \quad k = 1, \dots, J, \quad (40)$$

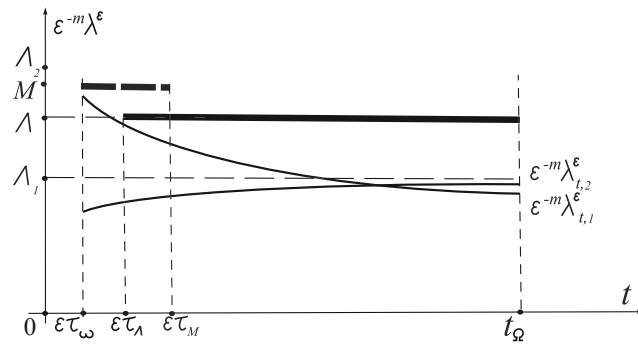
выводятся при помощи метода [27, гл. 5, § 3] или понятной модификации выкладок из разд. 6. Столь же доступные оценки остатков  $\widetilde{V}_{\tau, k+(p-1)J}$  в разложениях (36) далее не понадобятся.

Как и в разд. 4, в случае кратного собственного значения  $\Lambda_p$  из формулы (18) при  $\kappa_p > 1$  большинство (если  $K_p = \dots = K_{p+\kappa_p-1} = 0$ , то — все) первых поправочных членов в анзаце (35) для собственных значений  $M_{\tau, (p-1)J+1}, \dots, M_{\tau, (p+\kappa_p-1)J}$  обращаются в нуль. По договоренности построением младших асимптотических членов с помощью известных процедур из монографии [27, гл. 2, 5, 9], описывающих распадение такого собственного значения  $\Lambda_p$  при  $\tau \rightarrow +\infty$  согласно представлениям  $M_{\tau, q} = \Lambda_p + \tau^{1-d} M_q^{p''} + \dots$ , в настоящей работе не занимаемся.

Собственные функции  $V_{\tau, n}$  раскладываются вне шара  $\mathbb{B}_{\tau R_{\omega}}$  в сходящийся ряд Фурье с членами  $K_{\tau, n}^Q Q(-\nabla_{\xi}) \Phi(\xi)$ , где  $Q$  — однородные гармонические полиномы степени  $q_Q \in \mathbb{N}_0$ . Для коэффициентов  $K_{\tau, n}^Q$  верны интегральные представления (см. статью [24, § 2] и формулу (17))

$$K_{\tau, n}^Q = \mathbf{q}_Q^{-1} M_{\tau, n} \int_{\omega^1(\tau)} Q(\xi) V_{\tau, n} d\xi, \quad \text{где } \mathbf{q}_Q = Q(\nabla_{\xi}) Q(\xi)|_{\xi=0} > 0. \quad (41)$$

Согласно [33, гл. 7] величины  $M_{\tau, n}$  непрерывно зависят от параметра  $\tau$  и в силу соотношений (35), (40) они остаются ограниченными при  $\tau \rightarrow +\infty$ . Собственные функции  $V_{\tau, n}$  нормированы в пространстве  $L^2(\omega^1(\tau))$  и



**Фиг. 2.** Графики двух первых нормированных собственных чисел  $\epsilon^{-1} \lambda_{t,1}^\epsilon$  и  $\epsilon^{-1} \lambda_{t,2}^\epsilon$ . Для точек  $\{\Lambda, t\}$  на жирных линиях задача (3) однозначно разрешима (см. теорему 2 и замечание 2, 3).

объем группы включений  $|\omega^1(\tau)| = J|\omega|$  остается неизменным. Следовательно, модули коэффициентов (41) не превосходят  $C q_Q^{-1/2} \tau^q$ , и поэтому справедливы оценки

$$|V_{\tau,n}(\xi)| \leq c_n \left( \frac{\tau}{|\xi|} \right) |\xi|^{-1}, \quad |\nabla_\xi V_{\tau,n}(\xi)| \leq c_n \left( \frac{\tau}{|\xi|} \right) |\xi|^{-2} \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{B}_{\tau R_\omega}, \quad (42)$$

причем  $[0, +\infty) \ni z \mapsto c_n(z)$  — непрерывные ограниченные функции. Оценки (42) также можно получить посредством замены координат  $\xi \mapsto \tau^{-1} \xi$  и исследования уравнения вида (5) с исчезающими при  $\tau \rightarrow +\infty$  включениями (см. [27, гл. 5, § 3 и гл. 9] и [23, гл. 6, § 5]).

## 5. ОБ ЭВОЛЮЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

На основе построенных асимптотик проследим, что происходит с первыми  $J$  собственными значениями из последовательности (5).

Поскольку для собственной функции  $U_1$  выполнено неравенство  $K_1 > 0$ , верны асимптотические формулы (22) с ненулевыми поправками (30), причем для  $t \geq t_1 > 0$  и малого параметра  $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$  в  $c_1 \epsilon$ -окрестность точки  $\Lambda_1$  попадают нормированные собственные значения  $\epsilon^{-1} \lambda_{t,1}^\epsilon, \dots, \epsilon^{-1} \lambda_{t,J}^\epsilon$  задачи (3) и только они; здесь  $\epsilon_1, t_1$  и  $c_1$  — положительные числа. Согласно замечанию 1 и лемме 2 при малых  $t$  эти значения располагаются как выше, так и ниже точки  $\Lambda_1$ , но при больших  $t$  — только ниже, по причинам главенствующих ролей соответственно первого и второго слагаемых из представления матрицы  $\mathbf{G}(t)$  в лемме 2 (см. фиг. 2, где  $J = 2$ ).

При сближении включений, вызванном уменьшением параметра  $t$ , величины  $\epsilon^{-1} \lambda_{t,1}^\epsilon$  все более удаляются от точки  $\Lambda_1$ , но при совсем малых значениях  $t \in [\epsilon \tau_\omega, \epsilon \tau_1]$ , где  $\tau_1 > \tau_\omega$ , приходится пользоваться асимптотической формулой (34), содержащей члены  $M_{\tau,1}, \dots, M_{\tau,J}$  последовательности (8). Иными словами, группа сближенных включений интерпретируется как единая концентрированная масса. При конечных значениях “быстрой” времениподобной переменной  $\tau = \epsilon^{-1} t$  поведение величин  $\lambda_{\epsilon \tau,1}^\epsilon, \dots, \lambda_{\epsilon \tau,J}^\epsilon$  можно определить только в результате численного анализа спектра уравнения (8), однако при увеличении параметра  $\tau$  начинает действовать представление (34), в котором  $p = 1$ , а  $M_{\tau,1}', \dots, M_{\tau,J}'$  — собственные значения матрицы  $-(4\pi)^{-1} K_1^2 \mathbf{Y}$  (со знаком минус). Теперь настал черед еще раз принять во внимание формулы (22) при  $p = 1$ , где в качестве младших членов  $\Lambda_{t,j}^{1'}, j = 1, \dots, J$ , выступают произведения (30) квадрата коэффициента  $K_1 > 0$  и собственных значений  $\mathbf{g}_j(t)$  матрицы  $\mathbf{G}(t)$ . В силу леммы 2 справедливы представления

$$\epsilon \Lambda_{t,k}^{1'} = \epsilon K_1^2 \mathbf{g}_k(t) = \epsilon ((4\pi)^{-1} K_1^2 y_k t^{-1} + O(1)) = K_1^2 (4\pi)^{-1} y_k \tau^{-1} + O(\epsilon^{-1}) = \tau^{-1} M_k^{1'} + O(\epsilon).$$

Благодаря этой связи, асимптотические формулы (22) и (34) плавно переходят одна в другую, обеспечивая тем самым “сшивание” асимптотических представлений собственных значений  $\lambda_{t,k}^\epsilon$  в разных зонах изменения времениподобного параметра.

Если  $\Lambda_p$  — простое собственное значение при  $p > 1$  и  $K_p \neq 0$ , то описанная “стыковка” асимптотических формул (22) и (34) сохраняется полностью, однако в случае  $K_p = 0$  поправочные члены аннулируются, совпадение асимптотик становится более явным, но для получения информации об отклонении собственных значений  $\lambda_{(J-1)p+1}^\epsilon, \dots, \lambda_{Jp}^\epsilon$  от точки  $\epsilon \Lambda_p$  нужны отсутствующие младшие члены асимптотики. То же касается и кратных собственных значений (18) уравнения (7), для которых при  $K_p \neq 0$  разве лишь  $J$  элементов списка  $\lambda_{(J-1)p+1}^\epsilon, \dots, \lambda_{J(p+\kappa_p)}^\epsilon$  подчиняются описанному закону.

Наконец, на малом сегменте  $[\varepsilon\tau_\omega, \varepsilon\tau_p] \ni t$  собственные значения (5) описываются асимптотикой (34), мало-содержательной из-за недостатка информации о зависимости спектра (8) предельного уравнения (9) от быстрого времениподобного параметра  $\tau$ .

## 6. НАЧАЛО ОБОСНОВАНИЯ АСИМПТОТИКИ

Введем скалярное произведение

$$\langle u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, t} = (\nabla_x u_t^\varepsilon, \nabla_x \psi_t^\varepsilon)_\Omega + \varepsilon^{-2} (u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon(t)} + \varepsilon \rho(u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon)_\Omega \quad (43)$$

в пространстве Соболева  $\mathcal{H}^\varepsilon(t) = H_0^1(\Omega)$  и определим положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряженный оператор  $\mathcal{K}_t^\varepsilon$  при помощи тождества

$$\langle \mathcal{K}_t^\varepsilon u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \varepsilon^{-3} (u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon(t)} + \rho(u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon)_\Omega \quad \forall u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon(t). \quad (44)$$

Согласно теоремам 10.1.5 и 10.2.2 из книги [26] и благодаря компактности вложения  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  существенный спектр оператора  $\mathcal{K}_t^\varepsilon$  состоит из единственной точки  $\kappa = 0$ , а дискретный спектр образует бесконечно малую монотонную положительную последовательность

$$\kappa_{t,1}^\varepsilon \geq \kappa_{t,2}^\varepsilon \geq \dots \geq \kappa_{t,n}^\varepsilon \geq \dots \rightarrow +0. \quad (45)$$

В силу определений (43) и (44) интегральное тождество (4) эквивалентно абстрактному уравнению  $\mathcal{K}_t^\varepsilon u_t^\varepsilon = \kappa_t^\varepsilon u_t^\varepsilon$  в пространстве  $\mathcal{H}^\varepsilon(t)$  с новым спектральным параметром

$$\kappa_t^\varepsilon = (\varepsilon + \lambda_t^\varepsilon)^{-1} = \varepsilon^{-1} (1 + \varepsilon^{-1} \lambda_t^\varepsilon)^{-1}. \quad (46)$$

Формула (46) переделывает последовательность (45) в неограниченную монотонную последовательность (5) собственных значений исходной вариационной задачи (4).

Следуя книге [27, гл. 2 и 4], в пространстве Соболева  $H^\ell(\Omega)$  введем весовую норму

$$\|u_t^\varepsilon; \mathbf{V}_\beta^{\ell, \varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| = \left( \sum_{k=0}^{\ell} \|(\varepsilon + \mathbf{r}(t))^{\beta-\ell+k} \nabla_x^k u_t^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2}, \quad (47)$$

где  $\ell \in \mathbb{N}_0$  и  $\beta \in \mathbb{R}$  — показатели гладкости и веса, а  $\mathbf{r}(t) = \min\{r_1(t), \dots, r_J(t)\}$  и  $r_j(t) = |x - P^j(t)|$ . При  $\varepsilon = 0$  пространство  $\mathbf{V}_\beta^{\ell, 0}(\Omega; \mathcal{P}^\varepsilon(t))$  становится пространством Кондратьева (см. [25], а также [23, гл. 4]), однако в случае  $\varepsilon > 0$  норма (47) эквивалентна обычной соболевской норме, хотя константы эквивалентности могут неограниченно возрастать при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Убедимся в том, что для  $\ell = 1$  и  $\beta = 0$  упомянутые константы все-таки от малого параметра не зависят.

**Лемма 3.** *Пространство  $\mathcal{H}^\varepsilon(t)$  топологически и алгебраически совпадает с пространством  $\mathbf{V}_0^{1, \varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))$  равномерно относительно параметра  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_t]$  при некотором  $\varepsilon_t > 0$ .*

**Доказательство.** Правая оценка в соотношении эквивалентности

$$C_t^\varepsilon(\Omega) \|u_t^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\| \geq \|u_t^\varepsilon; \mathbf{V}_0^{1, \varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \geq c_t^\varepsilon(\Omega) \|u_t^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\| \quad \text{при } c_t^\varepsilon(\Omega) > 0$$

очевидна, так как  $\mathbf{r}_\varepsilon(t) \geq \varepsilon$  на  $\omega_j^\varepsilon$ . Левая оценка обеспечена неравенствами Пуанкаре—Фридрихса в области  $\Omega$  и на шаре  $\mathbb{B}_{\varepsilon R}^j$ , а также одномерным неравенством Харди (11) с параметром  $\theta = 1$ , проинтегрированным по угловым переменным.

Далее понадобится лемма о “почти собственных” значениях и векторах (см. первоисточник [32]), обеспеченная спектральным разложением резольвенты (см., например, [26, гл. 6]).

**Лемма 4.** *Пусть  $\mathbf{u}_t^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon(t)$  и  $\mathbf{k}_t^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  таковы, что*

$$\|\mathbf{u}_t^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\| = 1, \quad \|\mathcal{K}_t^\varepsilon \mathbf{u}_t^\varepsilon - \mathbf{k}_t^\varepsilon \mathbf{u}_t^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\| =: \delta_t^\varepsilon \in [0, \mathbf{k}_t^\varepsilon). \quad (48)$$

Тогда у оператора  $\mathcal{K}_t^\varepsilon$  есть собственное число  $\kappa_{n_t^\varepsilon}^\varepsilon$ , подчиненное неравенству  $|\mathbf{k}_t^\varepsilon - \kappa_{n_t^\varepsilon}^\varepsilon| \leq \delta_t^\varepsilon$ . Более того, при любом  $\delta_t^{\varepsilon\#} \in (\delta_t^\varepsilon, \mathbf{k}_t^\varepsilon)$  найдутся коэффициенты  $\mathbf{c}_{t, \mathbf{N}_t^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathbf{c}_{t, \mathbf{N}_t^\varepsilon + \mathbf{X}_t^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ , для которых

$$\left\| \mathbf{u}_t^\varepsilon - \sum_{l=\mathbf{N}_t^\varepsilon}^{\mathbf{N}_t^\varepsilon + \mathbf{X}_t^\varepsilon - 1} \mathbf{c}_{t, l}^\varepsilon \mathcal{U}_{t, l}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t) \right\| \leq 2 \frac{\delta_t^\varepsilon}{\delta_t^{\varepsilon\#}}, \quad \sum_{l=\mathbf{N}_t^\varepsilon}^{\mathbf{N}_t^\varepsilon + \mathbf{X}_t^\varepsilon - 1} |\mathbf{c}_{t, l}^\varepsilon|^2 = 1. \quad (49)$$

Здесь  $\kappa_{t, N_t^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \kappa_{t, N_t^\varepsilon + X_t^\varepsilon - 1}^\varepsilon$  — набор всех собственных значений оператора  $\mathcal{K}_t^\varepsilon$  на (замкнутом) сегменте  $[\kappa_t^\varepsilon - \delta_t^{\varepsilon\#}, \kappa_t^\varepsilon + \delta_t^{\varepsilon\#}]$ , а соответствующие собственные векторы  $\mathcal{U}_{t, N_t^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{U}_{t, N_t^\varepsilon + X_t^\varepsilon - 1}^\varepsilon$  удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки  $\langle \mathcal{U}_{t, l}^\varepsilon, \mathcal{U}_{t, k}^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \delta_{l, k}$ .

Начнем с технически более простого случая малого  $t = \varepsilon t$ : включения соединены в конгломерат  $\omega^\varepsilon(t)$ . В качестве “почти собственной” пары оператора  $\mathcal{K}_t^\varepsilon$  возьмем выражения

$$\mathbf{k}_{t, n}^\varepsilon = \varepsilon^{-1}(1 + M_{\tau, n})^{-1} \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_{t, n}^\varepsilon = \|\mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon; \mathcal{H}_t^\varepsilon\|^{-1} \mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon, \quad (50)$$

где  $\{M_{\tau, n}; V_{\tau, n}\}$  — собственная пара уравнения (9),  $\mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon(x) = \chi(x)V_{\tau, n}(\varepsilon^{-1}x)$ , а  $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$  — срезающая функция, равная единице в шаре  $\mathbb{B}_{R_\Omega}$ , причем  $\mathbb{B}_{2R_\Omega} \subset \Omega$ .

В первую очередь вычислим скалярное произведение  $\langle \mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon, \mathbf{v}_{\tau, q}^\varepsilon \rangle_{t, \varepsilon}$ . Имеем

$$\left| \int_\Omega \left| \nabla_x \left( \chi(x) V_{\tau, n} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |V_{\tau, n}(\xi)|^2 d\xi \right| \leq c c_n \left( \frac{\varepsilon \tau}{R_\Omega} \right) \varepsilon^3 \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{R_\Omega/\varepsilon}^\infty \rho^{-2} d\rho + \int_{R_\Omega/\varepsilon}^{2R_\Omega/\varepsilon} d\rho \right) \leq C \varepsilon^2, \quad (51)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\omega^\varepsilon(\varepsilon \tau)} |\mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon(x)|^2 dx = \varepsilon, \quad \varepsilon \int_\Omega |\mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon(x)|^2 dx \leq c_n \varepsilon \int_0^{2R_\Omega} \left( 1 + \frac{\rho}{\varepsilon} \right)^{-2} \rho^2 d\rho \leq C_n \varepsilon^2.$$

Применение оценок (42) в первой строке требует ограничение  $\varepsilon \tau = t \leq t'_{\Omega, \omega} =: R_\Omega$ , которое влечет за собой и третье неравенство в списке (51); при этом показатели степеней радиальной переменной  $\rho = |\xi|$  произошли от упомянутых оценок. Второе равенство — следствие нормировки (20). Итак, в силу тождества (19) при  $\Psi = V_{\tau, n}$  получаем, что

$$|\langle \mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon, \mathbf{v}_{\tau, q}^\varepsilon \rangle_{t, \varepsilon} - \delta_{n, q} \varepsilon (M_{\tau, n} + 1)| \leq c_{n, q} \varepsilon^2. \quad (52)$$

Оценим величину  $\delta_{t, n}^\varepsilon$ , найденную по формуле (48) для пары (50). Имеем

$$\begin{aligned} \delta_{t, n}^\varepsilon &= \sup |\langle \mathcal{K}_t^\varepsilon \mathbf{u}_{t, n}^\varepsilon - \mathbf{k}_{t, n}^\varepsilon \mathbf{u}_{t, n}^\varepsilon, \Psi_t^\varepsilon \rangle_{t, \varepsilon}| = \\ &= \mathbf{k}_{t, n}^\varepsilon \|\mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\|^{-1} \sup |(\nabla_x \mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon, \nabla_x \Psi_t^\varepsilon)_\Omega - M_{\tau, n}((\rho \varepsilon + \varepsilon^{-2} X_t^\varepsilon) \mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon, \Psi_t^\varepsilon)_\Omega|. \end{aligned} \quad (53)$$

Супремум вычисляется по единичному шару в пространстве  $\mathcal{H}^\varepsilon(t)$  и  $\|\Psi_t^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\| \leq 1$ , т.е.  $\|\Psi_t^\varepsilon; \mathbf{V}_0^{1, \varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c$ . Обработаем выражение  $I_{\tau, n}^\varepsilon(\Psi_t^\varepsilon)$  между последними знаками модуля в (53). В первом скалярном произведении перенесем срезку  $\chi$  от  $V_{\tau, n}$  к  $\Psi_t^\varepsilon$  и оценим возникающие коммутаторы  $[\nabla_x, \chi]$ , локализованные на кольце  $\mathbb{A}_{R_\Omega} = \mathbb{B}_{2R_\Omega} \setminus \mathbb{B}_{R_\Omega}$ , аналогично выкладке (51):

$$|(V_{\tau, n} \nabla_x \chi, \nabla_x \Psi_t^\varepsilon)_\Omega| + |(\nabla_x V_{\tau, n}, \Psi_t^\varepsilon \nabla_x \chi)_\Omega| \leq c \left( \int_{R_\Omega}^{2R_\Omega} \left( \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-4} \right) r^2 dr \right)^{1/2} \|\Psi_t^\varepsilon; H^1(\mathbb{A}_{R_\Omega})\| \leq C \varepsilon.$$

Кроме того,

$$M_{\tau, n} \rho \varepsilon^m |(V_{\tau, n}, \chi \Psi_t^\varepsilon)_\Omega| \leq c \varepsilon \left( \int_0^{2R_\Omega} \left( 1 + \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-2} r^2 dr \right)^{1/2} \|\Psi_t^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \leq C \varepsilon^2.$$

Оставшиеся в выражении  $I_{\tau, n}^\varepsilon(\Psi_t^\varepsilon)$  члены образуют разность

$$(\nabla_x V_{\tau, n}, \nabla_x (\chi \Psi_t^\varepsilon))_{\mathbb{R}^d} - \varepsilon^{-2} M_{\tau, n} (V_{\tau, n}, \chi \Psi_t^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon(\varepsilon \tau)},$$

которая после растяжения координат исчезает в силу интегрального тождества (19) для пары  $\{M_{\tau, n}; V_{\tau, n}\}$  с финитной пробной функцией  $(\xi \mapsto \chi(\varepsilon \xi) \Psi_t^\varepsilon(\varepsilon \xi))$ .

Итак, в силу полученных оценок и формул (50), (52) находим, что

$$\delta_{t, n}^\varepsilon \leq c_n \varepsilon^{-1/2}. \quad (54)$$

Теперь лемма 4 и соотношение (46) предоставляют собственное значение  $\kappa_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon$  оператора  $\mathcal{K}_t^\varepsilon$  и собственное значение  $\lambda_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon$  задачи (3), для которых верны неравенства

$$|\kappa_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon - \mathbf{t}_{t, n}^\varepsilon| \leq c_n \varepsilon^{-1/2} \Rightarrow |\varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon - M_{\tau, n}| \leq c_n \varepsilon^{1/2} (1 + M_{\tau, n}) (1 + \varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon). \quad (55)$$

Отсюда сначала выводим, что  $1 + \varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon \leq 2(1 + M_{\tau, n}^\varepsilon)$  в случае  $c_n \varepsilon^{1/2} (1 + M_{\tau, n}^\varepsilon) \leq 1/2$ , а затем для  $C_n = 2c_n(1 + M_{\tau, n}^\varepsilon)^2$  и подходящего  $\varepsilon_n > 0$  — оценку

$$|\varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon - M_{\tau, n}^\varepsilon| \leq C_n \varepsilon^{1/2} \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_n). \quad (56)$$

Индекс  $N_t^\varepsilon(n)$  остался неизвестным. Сходимость  $\varepsilon^{-1} \lambda_{\varepsilon \tau, n}^\varepsilon \rightarrow M_{\tau, n}$  (ср. формулу (21)), установленная в работе [2] при фиксированном параметре  $\tau$  и, в частности, обеспечивающая равенство  $N_t^\varepsilon(n) = n$  в формуле (56), по непрерывности переносится на  $\tau \in [\tau_\omega, \tau_0]$  при любом фиксированном  $\tau_0 > \tau_\omega$ , однако значения  $\tau \in [\tau_0, \varepsilon^{-1} R'_\Omega]$  нуждаются в отдельном исследовании, которое закончим в разд. 7. Сначала проверим, что отображение  $n \mapsto N_{\varepsilon t}^\varepsilon(n)$  можно сделать инъекцией. Пусть  $M_{\tau, p}$  — собственное значение с кратностью  $\varkappa_{\tau, p}$  (аналогично формуле (18)). Воспользуемся второй частью леммы 4 при  $t = \varepsilon \tau$ , где в качестве  $\delta_n^\varepsilon$  возьмем не зависящую от  $t$  максимальную из мажорант (54) при  $n = p, \dots, p + \varkappa_{\tau, p} - 1$  и положим  $\delta_n^{\varepsilon\#} = \theta^{-1} \delta_n^\varepsilon$  при некотором  $\theta \in (0, 1)$ . Обозначим через  $\mathbf{c}_{(t, n)}^\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}_t^\varepsilon}$  и  $\mathcal{S}_{(t, n)}^\varepsilon$  столбцы коэффициентов и линейные комбинации, фигурирующие в соотношениях (49). Ввиду условий ортогональности и нормировки собственных векторов  $\mathcal{U}_{t, k}^\varepsilon$  оператора  $\mathcal{K}_t^\varepsilon$  (см. лемму 4) находим, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}_{(t, n)}^\varepsilon \cdot \mathbf{c}_{(t, q)}^\varepsilon - \delta_{n, q}| &= |\langle \mathcal{S}_{(t, n)}^\varepsilon, \mathcal{S}_{(t, q)}^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, t} - \delta_{n, q}| \leq |\langle \mathcal{S}_{(t, n)}^\varepsilon - \mathbf{u}_{(t, n)}^\varepsilon, \mathcal{S}_{(t, q)}^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, t}| + \\ &+ |\langle \mathbf{u}_{(t, n)}^\varepsilon, \mathcal{S}_{(t, q)}^\varepsilon - \mathbf{u}_{(t, q)}^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, t}| + |\langle \mathbf{u}_{(t, n)}^\varepsilon, \mathbf{u}_{(t, q)}^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, t} - \delta_{n, q}| \leq 2\theta + 2\theta + C_{n, q} \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Здесь помимо первой оценки (49) дважды применено неравенство (52): первый раз при  $n = q$  для выяснения асимптотики нормы  $\|\mathbf{v}_{(t, n)}^\varepsilon; \mathcal{H}_t^\varepsilon\|$ , а второй — для выбранных  $n$  и  $q$ . Итак, при малых  $\theta$  и  $\varepsilon$  столбцы  $\mathbf{c}_{(t, p)}^\varepsilon, \dots, \mathbf{c}_{(t, p + \varkappa_{\tau, p} - 1)}^\varepsilon$  “почти ортонормированы” в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{\mathbf{X}_t^\varepsilon}$ , что возможно лишь в случае  $\mathbf{X}_t^\varepsilon \geq \varkappa_{\tau, p}$ , а значит, при подходящих  $\theta \in (0, 1)$ ,  $\varepsilon_n > 0$  и  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$  в  $(\theta^{-1} \delta_n^\varepsilon)$ -окрестности точки  $\mathbf{k}_{t, n}^\varepsilon$  расположено не менее  $\varkappa_{\tau, p}$  собственных значений оператора  $\mathcal{K}_t^\varepsilon$ . Итак, выкладка (55), (56) устанавливает существование таких  $C_p > 0$  и  $\varepsilon_p > 0$ , что

$$|\varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(p) + q}^\varepsilon - M_{\tau, p + q}^\varepsilon| \leq C_p \varepsilon^{1/2} \quad \text{при} \quad q = 0, \dots, \varkappa_{\tau, p} - 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_p), \quad t \in [\varepsilon \tau_\omega, \varepsilon \tau'_\omega]. \quad (57)$$

Соотношение (57) не обслуживает большие значения  $t$  и, более того, не включает непосредственно поправку  $\varepsilon^2 \Lambda_{t, k}^{p'}$  из анзаца (22). Поэтому приходится повторить вычисления для больших значений времениподобного параметра  $t$ . В ситуации (18) согласно формулам (46) и (22) в качестве “почти собственных” пар оператора  $\mathcal{K}_t^\varepsilon$  возьмем выражения

$$\mathbf{k}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} (\Lambda_p + \varepsilon \Lambda_{t, k}^{p'})^{-1} \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon = \|\mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon; \mathcal{H}_t^\varepsilon\|^{-1} \mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon, \quad (58)$$

где  $k = 1, \dots, J$  и в соответствии с разложениями (23) и (24)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon(x) &= \sum_{j=1}^J \chi_t^j(x) (b_j^{pk}(t) U_p(\varepsilon^{-1}(x - P^j(t))) + \varepsilon U_{t, j}^{pk'}(\varepsilon^{-1}(x - P^j(t)))) + \\ &+ \mathcal{X}_t^\varepsilon(x) \varepsilon K_p \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) G_t^j(x) - \mathcal{X}_t^\varepsilon(x) \varepsilon K_p \sum_{j=1}^J \chi_t^j(x) (b_j^{pk}(t) \Phi(x - P^j(t)) + \sum_{l=1}^J b_l^{pk}(t) \mathbf{G}_j^l(t)). \end{aligned} \quad (59)$$

Приведем пояснения к конструкции (59), включающей срезки с перехлестывающимися носителями (см. [31] и [27, гл. 4]), а именно, сглаживающую особенности функции Грина срезку

$$\mathcal{X}_t^\varepsilon(x) = 1 - \chi_t^1(P^1(t) + \varepsilon^{-1}(x - P^1(t))) - \dots - \chi_t^J(P^J(t) + \varepsilon^{-1}(x - P^J(t)))$$

и срезки  $\chi_t^j$  из формулы (25), обеспечивающие локализацию пограничных слоев. Кроме того,

$$|\nabla_x^p \mathcal{X}_t^\varepsilon(x)| \leq c_0 \varepsilon^{-p} (t_\Omega^{-1} t)^p \quad \text{и} \quad |\nabla_x^p \chi_t^j(x)| \leq c_j (t_\Omega^{-1} t)^p \quad \text{при} \quad p = 1, 2. \quad (60)$$

Важное наблюдение для последующих оценок величин  $\delta_{t, p}^\varepsilon$  из формулы (48): слагаемые, подвергшиеся сращиванию в разд. 3, учтены в правой части равенства (59) дважды — и в первом и во втором членах, но такое дублирование устранено вычитаемым, составленным из названных слагаемых. Как и в формуле (53), вычисляем супремум по единичному шару в  $\mathcal{H}^\varepsilon(t)$ :

$$\begin{aligned} \delta_{t, p}^{\varepsilon, k} &= \sup |\langle \mathcal{K}_t^\varepsilon \mathbf{u}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon - \mathbf{k}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon, \mathbf{u}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon, \Psi_t^\varepsilon \rangle_{t, \varepsilon}| = \mathbf{k}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon \|\mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\|^{-1} \times \\ &\times \sup |\langle \nabla_x \mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon, \nabla_x \Psi_t^\varepsilon \rangle_\Omega - (\Lambda_p + \varepsilon \Lambda_{t, k}^{p'})((\rho \varepsilon + \varepsilon^{-2} X_t) \mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon, \Psi_t^\varepsilon) \rangle|. \end{aligned} \quad (61)$$

Сначала обрабатываем скалярные произведения  $\mathbf{I}_{k,l}^{\varepsilon,\tau} := \langle \mathbf{v}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon}, \mathbf{v}_{t,l+(p-1)J}^{\varepsilon} \rangle_{\varepsilon,t}$ , представив при учете разложений (25) функцию (59) в виде

$$\mathbf{v}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon} = \sum_{j=1}^J \chi_t^j b_j^{pk}(t) U_p + \tilde{\mathbf{v}}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon}, \quad \text{где} \quad \tilde{\mathbf{v}}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon} = \varepsilon \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) (\chi_t^j \tilde{U}_{t,j}^{pk'} + \chi_t^{\varepsilon} K_p \hat{G}_t^j).$$

Согласно формулам (15), (32) и (25) имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}_{k,l}^{\varepsilon,\tau} - \varepsilon \delta_{k,l} I_p| &\leq c_{k,l} \left( \varepsilon^{1/2} I_p^{1/2} (s_{k,l,\chi}^{\varepsilon,\tau} + s_{k,l,m}^{\varepsilon,\tau} + \tilde{s}_{k,l}^{\varepsilon,\tau})^{1/2} + s_{k,l,\chi}^{\varepsilon,\tau} + s_{k,l,m}^{\varepsilon,\tau} + \tilde{s}_{k,l}^{\varepsilon,\tau} \right), \\ \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) b_j^{pl}(t) (\|\nabla_x U_p; L^2(\mathbb{R}^d)\|^2 + \varepsilon^{-2} \|U_p; L^2(\omega_j^{\varepsilon})\|^2) &= \varepsilon \delta_{k,l} I_p, \quad I_p = \Lambda_p + 1, \\ s_{k,l,\chi}^{\varepsilon,t} &= \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) b_j^{pl}(t) \|\nabla_x ((1 - \chi_t^j) U_p); L^2(\Omega)\|^2 \leq \\ &\leq c_{k,l} \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{R_0 t}^{\infty} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-4} r^2 dr + \frac{1}{t^2} \int_{R_0 t}^{2R_0 t} \left( \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-2} r^2 dr \right) \leq C_{k,l} \frac{\varepsilon^2}{t}, \\ s_{k,l,m}^{\varepsilon,t} &= \varepsilon \rho \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) b_j^{pl}(t) \|\chi_t^j U_p; L^2(\Omega)\|^2 \leq c_{k,l} \varepsilon \int_0^{R_0 t} \left( 1 + \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-2} r^2 dr \leq C_{k,l} \varepsilon^3, \\ \tilde{s}_{k,l}^{\varepsilon,t} &\leq \|\tilde{\mathbf{v}}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon}; \mathcal{H}_t^{\varepsilon}\| \|\tilde{\mathbf{v}}_{t,l+(p-1)J}^{\varepsilon}; \mathcal{H}_t^{\varepsilon}\|, \\ \|\tilde{\mathbf{v}}_{t,q+(p-1)J}^{\varepsilon}; \mathcal{H}_t^{\varepsilon}(t)\|^2 &\leq c_q \varepsilon^2 (\varepsilon^2 + \varepsilon^5 (\varepsilon + t)^{-3} + t^{-1} + \varepsilon^4 + \varepsilon t^{-1}) \leq C_q \varepsilon^2 (1 + t^{-1} \varepsilon) \leq C_q (1 + \tau_{\omega}^{-1} \varepsilon)^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Приведем пояснения. В первой строке использовано простое алгебраическое неравенство, а во второй — соотношения (32) для столбцов  $b^{q,p}$  и (10), (14) для пар  $\{\Lambda_p; U_p\}$  после растяжения координат  $x \mapsto \xi^j$ . Остальные выкладки учитывают скорости затухания  $O(|\xi|^{-1})$  и  $O(|\xi|^{-2})$  остатков в разложениях (15) и (33) (см. оценки (16) и конец разд. 3), а также соотношения (25), (26) для сглаженных функций Грина  $\hat{G}_t^j$ . Оценки интегралов в последней строке такие же, как и в средней части списка (62). Подводя итог, находим, что

$$|\langle \mathbf{v}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon}, \mathbf{v}_{t,l+(p-1)J}^{\varepsilon} \rangle_{\varepsilon,t} - \varepsilon (1 + \Lambda_p) \delta_{k,l}| \leq c_{k,l} t^{-1/2} \varepsilon^{3/2}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\|\mathbf{v}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon}; \mathcal{H}_t^{\varepsilon}\| \geq \frac{1}{2} \varepsilon^{1/2} (1 + \Lambda_p)^{1/2} \quad \text{при} \quad t \in [t_{\alpha} \varepsilon^{\alpha}, t_{\Omega}], \quad \alpha \in (0, 1), \quad t_{\alpha} > 0. \quad (63)$$

Итак, в силу (58) и (63) множитель при  $\sup |I_{t,p}^{\varepsilon,k}|$  в правой части равенства (61) не превосходит  $c_p \varepsilon^{-3/2}$ . Само выражение  $I_{t,p}^{\varepsilon,k}$  представим как сумму  $I_{t,p}^{\varepsilon,U} + I_{t,p}^{\varepsilon,kG} + I_{t,p}^{\varepsilon,k\chi} + I_{t,p}^{\varepsilon,k\chi} + \varepsilon^m \rho I_{t,p}^{\varepsilon,k\Lambda}$ , указав и оценив далее каждое из слагаемых. При учете неравенства (31) имеем

$$\begin{aligned} I_{t,p}^{\varepsilon,U} &= \sum_{j=1}^J (\nabla_x (b_j^{pk}(t) U_p + \varepsilon U_{t,j}^{pk'}), \nabla_x (\chi_t^j \Psi_t^{\varepsilon}))_{\Omega} - \varepsilon^{-2} (\Lambda_p + \varepsilon \Lambda_{t,k}^{p'}) (b_j^{pk}(t) U_p + \varepsilon U_{t,j}^{pk'}, \Psi_t^{\varepsilon})_{\omega_j^{\varepsilon}} = \\ &= \Lambda_{t,k}^{p'} \sum_{j=1}^J (U_{t,j}^{pk'}, \Psi_t^{\varepsilon})_{\omega_j^{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad |I_{t,p}^{\varepsilon,U}| \leq c_p \varepsilon^{3/2} \varepsilon \|\Psi_t^{\varepsilon}; \mathcal{H}_t^{\varepsilon}\| \leq C_p \frac{\varepsilon^{5/2}}{t^2} \leq C_p \tau_{\omega}^{-1/2} \frac{\varepsilon^2}{t^{3/2}}. \end{aligned}$$

Здесь приняты во внимание интегральные тождества, обслуживающие уравнения (7) для  $U_p$  и (28) для  $U_{t,j}^{pk'}$  с финитной пробной функцией  $\chi_t^j \Psi_t^{\varepsilon} \in H^1(\mathbb{R}^3)$ . Множитель  $\chi_t^j$  появился на второй позиции в скалярных произведениях из  $I_{t,p}^{\varepsilon,U}$  в результате коммутирования с оператор-градиентом, а значит, обозначив

$$\mathbf{U}_{t,j}^{pk\varepsilon} = b_j^{kp}(t) (U_p - K_p \Phi) + \varepsilon (U_{t,j}^{pk'} - b_1^{kp}(t) \mathbf{G}_j^1(t) - \dots - b_J^{kp}(t) \mathbf{G}_j^J(t)),$$

при учете скоростей затухания остатков в разложениях (15) и (27), а также расположения и размера носителей производных срезов  $\chi_t^j$  и последнего слагаемого в (59) обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} |I_{t,p}^{\varepsilon\chi}| &= \left| \sum_{j=1}^J (\mathbf{U}_{t,j}^{pk\varepsilon} \nabla_x \chi_t^j, \nabla_x \Psi_t^\varepsilon)_\Omega - (\nabla_x \mathbf{U}_{t,j}^{pk\varepsilon}, \Psi_t^\varepsilon \nabla_x \chi_t^j)_\Omega \right| \leq \\ &\leq \frac{c_p}{t} |\text{supp}|\nabla_x \chi_t^j||^{1/2} \left( \frac{\varepsilon^2}{t^2} + \varepsilon \frac{\varepsilon}{t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon^3}{t^3} + \varepsilon \frac{\varepsilon}{t} \right) \|\Psi_t^\varepsilon; H^1(\Omega)\| \leq C_p \frac{\varepsilon^2}{t^{3/2}}. \end{aligned}$$

Для слагаемых, содержащих функции Грина, выполнены соотношения

$$I_{t,p}^{\varepsilon G} = \varepsilon K_p \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) (\nabla_x G_t^j, \nabla_x (\mathcal{X}_t^\varepsilon \Psi_t^\varepsilon))_\Omega = 0,$$

$$\begin{aligned} |I_{t,p}^{\varepsilon\mathcal{X}}| &= \varepsilon |K_p| \left| \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^J \left( b_j^{pk}(t) (\tilde{G}_t^{jl} \nabla_x \chi_t^l, \nabla_x \Psi_t^\varepsilon)_\Omega - b_j^{pk}(t) (\nabla_x \tilde{G}_t^{jl}, \Psi_t^\varepsilon \nabla_x \chi_t^l)_\Omega \right) \right| \leq \\ &\leq c_p \frac{\varepsilon}{t} |\text{supp}|\nabla_x \chi_t^j||^{1/2} \left( \frac{\varepsilon}{t^2} \|\nabla_x \Psi_t^\varepsilon; L^2(\text{supp}|\nabla_x \chi_t^j|)\| + \frac{1}{t^2} \|\Psi_t^\varepsilon; L^2(\text{supp}|\nabla_x \chi_t^j|)\| \right) \leq C_p \frac{\varepsilon^2}{t^{3/2}}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве применены поточечные оценки (26).

Собрав приведенные соотношения для составляющих выражения (61), обнаруживаем, что

$$\delta_{\tau,p}^{\varepsilon k} \leq c_p \varepsilon^{1/2} t^{-3/2}.$$

Теперь повторим с понятными изменениями выкладки и рассуждения, опирающиеся на лемму 4, и для каждого  $p \in \mathbb{N}$  и собственного числа  $\Lambda_p$  из формулы (18) найдем собственные числа задачи (3), для которых выполнены следующие неравенства с некоторыми положительными  $C_p$  и  $\varepsilon_p$ :

$$|\varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(p)+k}^\varepsilon - \Lambda_p - \varepsilon \Lambda_{t,k}^{p'}| \leq C_p t^{-3/2} \varepsilon^{3/2} \text{ при } k = 0, \dots, \varkappa_p - 1 \text{ и } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p), t \in [\varepsilon \tau_\omega, t_\Omega]. \quad (64)$$

Формула (64) перестает быть информативной при  $t \leq t'_\Omega \varepsilon$ , так как мажоранта в ней совпадает по порядку с поправочным членом  $\varepsilon \Lambda_{t,k}^{p'} = O(t^{-1} \varepsilon)$ . Это наблюдение согласуется с тем фактом, что при малых значениях времениподобного параметра  $t$  включения (4) объединяются в конгломерат  $\omega^\varepsilon(t)$  и асимптотику собственных значений (5) приходится находить из уравнения (9) и оправдывать оценкой (57). Вместе с тем зоны действия асимптотических формул (64) и (57) пересекаются и при  $t = O(\sqrt{\varepsilon})$  приводят к одинаковому результату (ср. пояснения в разд. 5). Сформулируем результат, проверку которого закончим в разд. 7, где будут найдены номера действовавших собственных значений  $\lambda_{t, N_t^\varepsilon(p)}^\varepsilon$  из последовательности (5).

**Теорема 1.** При любом  $\alpha \in (0, 1)$  для каждого  $p \in \mathbb{N}$  найдутся положительные величины  $t_{p,\omega}^\alpha$ ,  $t_{p,\Omega}^\alpha$  и  $C_p = C_p(\alpha)$ ,  $\varepsilon_p = \varepsilon_p(\alpha)$ , при которых выполнены следующие утверждения.

- 1) При  $t \in [\varepsilon^\alpha t_{p,\Omega}^\alpha, t_\Omega]$  собственные числа (5) и (6) задач (3) и (7) связаны формулой (64), в которой  $N_t^\varepsilon(p) = p$ .
- 2) При  $t \in [\varepsilon \tau_\omega, \varepsilon^\alpha t_{p,\omega}^\alpha]$  собственные числа (5) и (8) задач (3) и (9) связаны формулой (57), в которой  $N_t^\varepsilon(p) = p$ .

Подчернем, что при введенных в теореме 1 ограничениях на параметр  $t$  каждая из асимптотических формул становится содержательной, так как мажоранты в них оказываются значительно меньше выделенных асимптотических членов.

## 7. ЗАВЕРШЕНИЕ ОБОСНОВАНИЯ АСИМПТОТИКИ

Для того чтобы устранить упомянутый изъян в доказательстве теоремы 1, проверим вспомогательное утверждение.

**Теорема 2.** Пусть точка  $\Lambda$  лежит вне спектра  $\{\Lambda_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  задачи (10). Тогда найдутся такие положительные  $\varepsilon_\Lambda$  и  $\tau_\Lambda$  (фиг. 2), что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\Lambda)$ ,  $t \in [\varepsilon \tau_\Lambda, t_\Omega]$  и любой функции  $f_t^\varepsilon \in L^2(\Omega)$  имеет единственное решение  $u_t^\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  следующая задача Дирихле:

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_t^\varepsilon(x) - \varepsilon \Lambda(\rho + \varepsilon^{-3} X_t^\varepsilon(x)) u_t^\varepsilon(x) &= f_t^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t^\varepsilon(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (65)$$

**Доказательство.** Применим прием вариации весового индекса из статьи [31] (см. ее изложение в монографии [27, гл. 4]). Ввиду эквивалентности весовых и обычных норм в пространствах Лебега и Соболева считаем, что  $f_t^\varepsilon \in \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))$ , и ищем решение  $u_t^\varepsilon \in \mathbf{V}_1^{2,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))$ , т.е. задаче (65) ставим в соответствие отображение

$$\mathbf{A}_\beta^\varepsilon(t, \Lambda) : \mathbf{V}_{1+\beta}^{2,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t)) \cap \mathbf{V}_{\beta,0}^{1,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t)) \rightarrow \mathbf{V}_{1+\beta}^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t)). \quad (66)$$

Нижний индекс 0 после весового  $\beta$  означает выполнение условия Дирихле на границе  $\partial\Omega$ . Понятно, что норма оператора (66) равномерно ограничена относительно параметра  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  при некотором  $\varepsilon_0 > 0$ .

Представим правую часть задачи (65) как сумму

$$f_t^\varepsilon(x) = f_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) + f_{t,1}^{h,\varepsilon}(\varepsilon^{-1}(x - P^1(t)) + \dots + f_{t,J}^{h,\varepsilon}(\varepsilon^{-1}(x - P^J(t))),$$

где  $h \geq 2$ ,

$$f_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) = \mathcal{X}^{h,\varepsilon}(x) f_t^\varepsilon(x) \text{ и } f_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j) = \chi(h\varepsilon\xi^j) f_t^\varepsilon(P^j(t) + \varepsilon\xi^j), \quad j = 1, \dots, J,$$

а срезки  $\chi_j^h(\xi^j) := \chi(h\xi^j)$  и  $\mathcal{X}^{h,\varepsilon}(x)$  заданы формулами (13) и

$$\mathcal{X}^{h,\varepsilon}(x) = 1 - \chi((h\varepsilon)^{-1}(x - P^1(t))) - \dots - \chi((h\varepsilon)^{-1}(x - P^J(t))). \quad (67)$$

Для того чтобы носители функций  $x \mapsto \chi_j^h(\varepsilon^{-1}(x - P^j(t)))$  и  $x \mapsto \chi_k^h(\varepsilon^{-1}(x - P^k(t)))$  не пересекались при  $k \neq j$ , и введенные срезки образовали разбиение единицы, пригодное для дальнейшего анализа, приходится принять ограничение  $t \geq h\varepsilon\tau_{\mathcal{P}_\omega}$  с некоторым  $\tau_{\mathcal{P}_\omega} > \tau_\omega > 0$ .

Ясно, что  $f_{t,0}^{h,\varepsilon} \in \mathbf{V}_{1-\beta}^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))$  при  $\beta \geq 0$ , так как  $f_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) = 0$ , если  $r(t) < Rh\varepsilon$ . Кроме того,

$$\|f_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1-\beta}^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c_0((1 + Rh)\varepsilon)^{-\beta} \|f_t^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|. \quad (68)$$

Множитель  $((1 + Rh)\varepsilon)^{-\beta}$  возник из-за уменьшения весового показателя в левой части. При  $\beta \in [0, \beta_0]$ ,  $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$  и малых  $\beta_0, \varepsilon_0 > 0$  задача Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) - \varepsilon \Lambda \rho u_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) &= f_{t,0}^{h,\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega, \\ u_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (69)$$

имеет единственное решение  $u_{t,0}^{h,\varepsilon} \in \mathbf{V}_{1-\beta}^{2,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))$  (см. замечание 2, 2)) и верна оценка

$$\|u_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1-\beta}^{2,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq C_0 \|f_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1-\beta}^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \quad (70)$$

с общим для всех указанных  $\beta$  множителем  $C_0$ .

Поскольку  $f_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j) = 0$  при  $|\xi^j| > 2Rh$ , находим, что

$$\|f_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{1+\beta}^0(\mathbb{R}^3)\| \leq c_j(1 + 2Rh)^\beta \|f_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_1^0(\mathbb{R}^3)\| \leq c_j^\Omega(1 + 2Rh)^\beta \varepsilon^{-5/2} \|f_t^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|. \quad (71)$$

Первый множитель  $(1 + 2Rh)^\beta$  — результат увеличения весового показателя, а множитель  $\varepsilon^{-5/2}$  возник вследствие сжатия координат  $\xi^j \mapsto x = P^j(t) + \varepsilon\xi^j$  согласно соотношению  $r_j(t)^2 dx = \varepsilon^5 \rho_j^2 d\xi^j$ . При  $\beta \in [0, \beta_0]$  у уравнения

$$-\Delta_{\xi^j} u_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j) - \Lambda X(\xi^j) u_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j) = \varepsilon^2 f_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j), \quad \xi^j \in \mathbb{R}^3,$$

есть единственное решение  $u_{t,j}^\varepsilon \in \mathcal{V}_{1+\beta}^2(\mathbb{R}^3)$  (см. замечание 2, 1)), удовлетворяющее следующей оценке с не зависящим от  $\beta \in [0, \beta_0]$  множителем  $C_j$ :

$$\|u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{1+\beta}^2(\mathbb{R}^3)\| \leq C_j \varepsilon^2 \|f_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{1+\beta}^0(\mathbb{R}^3)\|. \quad (72)$$

В качестве приближенного решения задачи (65) возьмем сумму

$$(\mathbf{R}_0^\varepsilon(t, \Lambda) f_t^\varepsilon)(x) = u_{t,\approx}^{h,\varepsilon}(x) := \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}(x) u_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) + \sum_{j=1}^J \chi_t^j(x) u_{t,j}^{h,\varepsilon}(\varepsilon^{-1}(x - P^j(t))).$$

Здесь  $\mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}$  — срезка (67) при  $h = 1$ , а срезки  $\chi_t^j$  взяты из (59); для них справедливы равенства  $\mathcal{X}_t^{1,\varepsilon} \mathcal{X}^{h,\varepsilon} = \mathcal{X}^{h,\varepsilon}$  и  $\chi_t^j \chi_j^h = \chi_j^h$ . Следовательно, невязка в задаче (65) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_x u_{t,\approx}^{h,\varepsilon} + \varepsilon \Lambda(\rho + \varepsilon^{-3} X_t^\varepsilon) u_{t,\approx}^{h,\varepsilon} + f_t^\varepsilon =: F_t^{h,\varepsilon} = F_{t,0}^{h,\varepsilon} + \\ + \sum_{j=1}^J (F_{t,j}^{h,\varepsilon} + \Lambda \rho F_{t,j,m}^{h,\varepsilon}) := [\Delta_x, \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}] u_{t,0}^{h,\varepsilon} + \sum_{j=1}^J ([\Delta_x, \chi_t^j] u_{t,j}^{h,\varepsilon} + \varepsilon \Lambda \rho \chi_t^j u_{t,j}^{h,\varepsilon}). \end{aligned} \quad (73)$$

В силу формул (67) и (13) носители коэффициентов коммутатора  $[\Delta_x, \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}] = 2\nabla_x \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon} \cdot \nabla_x + \Delta_x \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}$  расположены на объединении ( $j = 1, \dots, J$ ) сферических колец  $\{x : R \leq \varepsilon^{-1} r_j \leq 2R\}$ , а значит, в силу оценок (68), (70) и (60) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|F_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_1^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c_{R,\Omega} \varepsilon^\beta \|[\Delta_x, \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}] u_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1-\beta}^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq \\ \leq c'_{R,\Omega} \varepsilon^\beta \|u_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1-\beta}^{2,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq C_{R,\Omega} (1 + Rh)^{-\beta} \|f_{t,0}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|. \end{aligned} \quad (74)$$

Носители коэффициентов коммутатора  $[\Delta_x, \chi_t^j]$  содержатся в кольце  $\mathbb{A}_t^j = \{x : R \leq t_\Omega t^{-1} r_j \leq 2R\}$ , и поэтому при помощи оценок (71), (72) и (60) выводим соотношение

$$\begin{aligned} \|F_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_1^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c_j (\varepsilon + Rt_\Omega^{-1} t)^{-\beta} \|[\Delta_x, \chi_t^j] u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1+\beta}^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq \\ \leq c'_j (\varepsilon + Rt_\Omega^{-1} t)^{-\beta} (t_\Omega t^{-1} \|\nabla_x u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1+\beta}^{0,\varepsilon}(\mathbb{A}_t^j)\| + t_\Omega^2 t^{-2} \|u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1+\beta}^{0,\varepsilon}(\mathbb{A}_t^j)\|) \leq \\ \leq c''_j (\varepsilon + Rt_\Omega^{-1} t)^{-\beta} \varepsilon^{1+\beta} \varepsilon^{3/2} (\varepsilon^{-1} R^{-1} t_\Omega t^{-1} + R^{-2} t_\Omega^2 t^{-2}) \|u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{1+\beta}^{2,0}(\mathbb{R}^3)\| \leq \\ \leq c'''_j (1 + Rt_\Omega^{-1} \tau)^{-1-\beta} \varepsilon^{-1} (R^{-1} t_\Omega \tau^{-1}) \varepsilon^{3/2} \varepsilon^2 \|f_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{1+\beta}^0(\mathbb{R}^3)\| \leq \\ \leq C_{j,\Omega}^R (1 + 2Rh)^\beta (1 + Rt_\Omega^{-1} \tau)^{-2-\beta} \|f_{t,j}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|. \end{aligned} \quad (75)$$

Наконец, для последних слагаемых в (73) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\chi_t^j u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_1^0(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c_j \varepsilon \varepsilon^{5/2} \|\xi^j \mapsto \chi_t^j(\xi^j) u_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j); \mathcal{V}_1^0(\mathbb{R}^3)\| \leq \\ \leq c_j \varepsilon \varepsilon^{5/2} \varepsilon^{-2} (1 + 2Rt_\Omega^{-1} t)^2 \|u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{-1}^0(\mathbb{R}^3)\| \leq c'_j \varepsilon^{3/2} (1 + 2Rt_\Omega^{-1} t)^2 \|u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_1^2(\mathbb{R}^3)\| \leq \\ \leq c''_j \varepsilon^{3/2} (1 + 2Rt_\Omega^{-1} t)^2 \varepsilon^2 \|f_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_1^0(\mathbb{R}^3)\| \leq C_{j,\Omega} \varepsilon (1 + 2Rt_\Omega^{-1} t)^2 \|f_{t,0}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|. \end{aligned} \quad (76)$$

Здесь применены оценки (71) и (72) при  $\beta = 0$ .

Более простые выкладки с показателем  $\beta = 0$  доказывают, что

$$\|\mathbf{R}_{t,f_t}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{2,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| = \|u_{t,\approx}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_1^{2,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c \|f_{t,0}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|.$$

Полученные оценки (74)–(76) и представление (73) показывают, что оператор  $\mathbf{A}_0^\varepsilon(t, \Lambda) \mathbf{R}_0^\varepsilon(t, \Lambda) - \mathbf{I}$  можно сделать малым ( $\mathbf{I}$  — тождественное отображение в пространстве  $\mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))$ ). В самом деле, сначала выбираем величину  $h_\Lambda$  в ограничении  $h \geq h_\Lambda$  настолько большой, что множитель при норме  $\|f_{t,0}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|$  в формуле (74) стал достаточно малым, а затем фиксируем границы изменения параметров  $\tau \geq \tau_\Lambda$  и  $\varepsilon \leq \varepsilon_\Lambda$ , поступая аналогично с такими же множителями в (75) и (76) соответственно. В итоге видим, что оператор  $\mathbf{S}_0^\varepsilon(t, \Lambda) = \mathbf{A}_0^\varepsilon(t, \Lambda) \mathbf{R}_0^\varepsilon(t, \Lambda)$  обратим, так как допускает разложение в ряд Неймана, и следовательно,  $\mathbf{R}_0^\varepsilon(t, \Lambda)$  — “почти обратный”, а  $\mathbf{R}_0^\varepsilon(t, \Lambda) \mathbf{S}_0^\varepsilon(t, \Lambda)^{-1}$  — истинный обратный для отображения (66). Теорема 2 доказана.

**Замечание 2.** 1) Согласно условию  $\Lambda \notin \{\Lambda_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  отображение

$$\mathcal{V}_{1+\beta}^2(\mathbb{R}^3) \ni v^j \mapsto A_{\beta}^j v^j := \Delta_{\xi^j} v^j + \Lambda X v^j \in \mathcal{V}_{1+\beta}^0(\mathbb{R}^3)$$

является изоморфизмом при  $\beta = 0$ , а теория Кондратьева [25] (см., например, [23, гл. 6, § 4] и [24, § 5]) переносит это свойство на показатели  $\beta \in (-1/2, 1/2)$ . Крайние значения показателя выбраны так, что  $(1 - \chi) \Phi \in \mathcal{V}_{1+\beta}^2(\mathbb{R}^3)$  при  $\beta < 1/2$ , но  $1 \notin \mathcal{V}_{1+\beta}^2(\mathbb{R}^3)$  при  $\beta > 1/2$ . Случай малого  $\beta$  рассматривается с помощью элементарных средств:

дифференциальное выражение  $(1 + \rho_j^2)^{-\beta/2} [\Delta_{\varepsilon^j}, (1 + \rho_j^2)^{\beta/2}]$ , включающее коммутатор оператора Лапласа и весового множителя, порождает отображение  $\mathcal{V}_1^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{V}_1^0(\mathbb{R}^3)$  с нормой  $O(|\beta|)$ , т.е. при малом  $|\beta|$  оператор  $A_\beta^j$  наследует все свойства от  $A_0^j$ .

2) При тех же ограничениях на весовой показатель изоморфность присуща и оператору  $A_\beta^0$  задачи (69) с областью определения  $\mathbf{V}_{1+\beta}^2(\Omega; \mathcal{P}(t)) \cap \mathbf{V}_{\beta,0}^1(\Omega; \mathcal{P}(t))$ . Необходимо также принять во внимание, что слагаемое  $\varepsilon \Delta u_{t,0}^\varepsilon$  в левой части уравнения (69) порождает бесконечно малое возмущение при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

3) Если  $M \notin \{M_{\tau,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ , то, как и в теореме 2, задача (69) с параметрами  $t = \varepsilon \tau$  и  $\Lambda = M$  при  $\tau \in [\tau_\omega, \tau_M]$  и  $\tau_M > \tau_\omega$  однозначно разрешима (верхняя полужирная штрихпунктирная линия на фиг. 2).

Теперь завершим проверку теоремы 1. В силу сходимости (21) при  $t = t_\Omega$  на сегмент  $[0, \varepsilon \Lambda]$  попадают в точности  $JN(\Lambda)$  собственных значений (5), где  $N(\Lambda)$  — кратность спектра (6) на интервале  $(0, \Lambda)$ . Собственные значения  $\lambda_{t,\varepsilon}^\varepsilon$ , непрерывно зависящие от  $t$  согласно [33, гл. 6], не могут покинуть этот сегмент при  $t \in [\varepsilon t_\Lambda, t_\Omega]$  в силу теоремы 2, т.е. их количество остается неизменным. В то же время формулы (57) и (64), установленные в разд. 6, предоставляют не менее  $JN(\Lambda)$  собственных значений на сегменте, а значит, именно указанное количество. Таким образом, получаем, что все собственные значения  $\lambda_{t,n}^\varepsilon \in [0, \varepsilon \Lambda]$  исходной задачи (3) обладают найденными асимптотиками. Отметим, что благодаря замечанию 2, 3), приведенные рассуждения годятся и для малых значений времениподобного параметра. Теорема 1 доказана в полном объеме.

## 8. НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ

1° *Геометрия*. Можно считать, что включения  $\omega_1^\varepsilon(t), \dots, \omega_J^\varepsilon(t)$ ,двигающиеся вдоль лучей  $\mathcal{L}^1, \dots, \mathcal{L}^J$ , имеют разную форму. На этом пути разумна постановка задачи о распадении одиночной концентрированной массы на несколько фрагментов.

Предположение о  $C^\infty$ -гладкости поверхностей  $\partial\Omega$  и  $\partial\omega$  конечно же избыточно — можно считать, что граница включения  $\omega$  липшицева, а на границу области  $\Omega$ , где поставлены условия Дирихле, нужные для корректной постановки спектральной задачи (4) ограничения, ничтожны. Отметим, что замена краевого условия Дирихле условием Неймана

$$\partial_n u_t^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

может коренным образом изменить асимптотические структуры: как показано в [22] (см. также [7, 10] и [34]) концентрированные массы начинают взаимодействовать за счет появления в предельных уравнениях (7) при  $j = 1, \dots, J$  интегральных членов, связывающих их в единую спектральную задачу. Автор не знает, как это обстоятельство влияет на сделанные в разд. 5 выводы о зависимостях от времениподобного параметра.

2° *Приближение включения к границе*. Если в ситуации  $J = 2$  на фиг. 1 предположить симметрию множеств  $\Omega$  и  $\omega^\varepsilon(t)$  относительно гиперплоскости  $\{x : x_1 = 0\}$ , то на дополнительно образованной границе  $\Gamma = \{x \in \Omega : x_1 = 0\}$  можно поставить искусственное условие Дирихле или Неймана. При этом спектр (5) исходной задачи (3) распадается на две подпоследовательности, т.е. полученные в статье результаты обслуживают задачу о приближении концентрированной массы к границе, а в качестве времениподобного параметра выступает расстояние до границы. Легкодоступны обобщения: гладкая граница может быть изогнутой, а включений и мишенных точек — несколько.

Укажем близкую по тематике публикацию [30], в которой изучалась зависимость функции Грина только при малых расстояниях ее особенности от границы.

3° *Размерность и плотность*. В случае многомерных ( $d > 3$ ) областей  $\Omega, \omega \subset \mathbb{R}^d$  и более контрастных ( $m > 3$ ) плотностей  $\varepsilon^{-m}$  включений итерационные процессы построения и выводы остаются без особых изменений. Например, асимптотическое разложение (22) принимает вид

$$\lambda_{t,k+(p-1)J}^\varepsilon = \varepsilon^{m-2} \left( \Lambda_p + \varepsilon^{d-3} \Lambda_{t,k}^{p'} \right) + \dots$$

Некоторые осложнения возникают при обосновании асимптотик (ср. материал в книге [27, гл. 2]).

Если  $d = 2$ , т.е.  $\Omega$  и  $\omega$  — плоские области, то фундаментальное решение оператора Лапласа  $\Phi(x) = -(2\pi)^{-1} \ln |x|$  приобретает логарифмический рост на бесконечности, и как следствие строение асимптотических анзацев для собственных пар задачи (3) претерпевает серьезные изменения (см. результаты работ [6], [34] и др.).

В случае  $m = 2$  к предельным задачам (7) или (9) присоединяется еще одна:

$$-\Delta_x v(x) = \mu v(x), \quad x \in \Omega, \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (77)$$

Это обстоятельство разрушает предложенные в статье асимптотические конструкции.

Если  $m < 2$  (легкая масса), то остается только одна предельная задача (77), и годятся асимптотические процедуры из [27, гл. 2 и 9], однако, как и в других двух случаях из этого раздела, зависимости собственных значений от времениподобного параметра не изучались.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. *Sanchez-Palencia E.* Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses // Trends in applications of pure mathematics to mechanics (Palaiseau, 1983), Lecture Notes in Phys., 195, Berlin: Springer, 1984. P. 346–368.
3. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах // Изв. Николаевской морской академии. 1913. Вып. 2. С. 325–348.
4. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. М.-Л.: Гос. тех. изд-во, 1950.
5. *Олейник О.А.* О собственных колебаниях тел с концентрированными массами // Современные проблемы прикладной математики и математической физики. М.: Наука, 1988. С. 101–128.
6. *Leal C., Sanchez-Hubert J.* Perturbation of the eigenvalues of a membrane with a concentrated mass // Quart. Appl. Math. 1989. V. 47. № 1. P. 93–103.
7. *Назаров С.А.* Об одной задаче Санчес-Паленсия с краевыми условиями Неймана // Изв. ВУЗов. Матем. 1989. № 11. С. 60–66.
8. *Oleinik O.A., Sanchez-Hubert J., Yosifian G.A.* On vibrations of a membrane with concentrated masses // Bull. Sci. Math. 1991. V. 115. № 1. P. 1–27.
9. *Gomez D., Lobo M., Perez E.* On the eigenfunctions associated with the high frequencies in systems with a concentrated mass // J. Math. Pures Appl. 1999. V. 78. № 8. P. 841–865.
10. *Canzos J., Perez E., Vilasanchez M.* Asymptotics for the eigenvalues of the Neumann spectral problem with concentrated masses // Indiana Univ. Math. J. 2007. V. 56. № 4. P. 1939–1987.
11. *Sanchez Hubert J., Sanchez Palencia E.* Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic methods. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
12. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1990.
13. *Lobo M., Perez E.* On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary // Math. Model. Meth. Appl. Sci. 1993. V. 3. № 2. P. 249–273.
14. *Campillo M., Dascalu C., Ionescu I.* Instability of a periodic systems of faults // Geophys. J. Int. 2004. V. 159. P. 212–222.
15. *Chechkin G.A., Cioranescu D., Damlamian A., Piatnitski A.L.* On boundary value problem with singular inhomogeneity concentrated on the boundary // J. de Mathematiques Pures et Appliquees. 2012. V. 98. № 2. P. 115–138.
16. *Мельник Т.А., Чечкин Г.А.* Собственные колебания густых каскадных соединений со “сверхтяжелыми” концентрированными массами // Изв. РАН. 2015. Т. 79. № 3. С. 41–86.
17. *Nazarov S.A., Perez M.E.* On multi-scale asymptotic structure of eigenfunctions in a boundary value problem with concentrated masses near the boundary // Revista Matematica Complutense. 2018. V. 31. № 1. P. 1–62.
18. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных чисел задачи Неймана при концентрации масс на тонком тороидальном множестве // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2006. Вып. 3. № 15. С. 61–71.
19. *Назаров С.А.* Осреднение краевых задач в области, содержащей тонкую полость с периодически изменяющимся сечением // Тр. Московского матем. общества. 1990. Т. 53. С. 98–129.

20. Олейник О.А., Шапошникова Т.А. Об усреднении бигармонического уравнения в области, перфорированной вдоль многообразий малой размерности // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 830–842.
21. Лобо М., Олейник О.А., Перес М.Е., Шапошникова Т.А. О граничных задачах в областях, перфорированных вдоль многообразий // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. № 4. С. 205–206.
22. Nazarov S.A. Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions // RAIRO Model. Math. Anal. Numer. 1993. V. 27. № 6. P. 777–799.
23. Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
24. Назаров С.А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
25. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. матем. общества. 1963. Т. 16. С. 219–292.
26. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
27. Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenevski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestorten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991. (Английский перевод: Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhauser Verlag, 2000).
28. Ван Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
29. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
30. Ильин А.М., Сулейманов Б.И. Асимптотика функции Грина для эллиптического уравнения второго порядка около границы области // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 6. С. 1322–1339.
31. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области // Проблемы матем. анализа. Вып. 8. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. С. 72–153.
32. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
33. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
34. Назаров С.А. “Дальнодействие” концентрированных масс в двумерных задачах Неймана и Дирихле // Изв. РАН. Сер. матем. 2023. Т. 87. № 1. С. 65–118.

# ASYMPTOTIC ANALYSIS OF EIGENVALUES FOR CONCENTRATED MASSES APPROACHING ONE ANOTHER

S. A. Nazarov\*

*199178, 61 Bolshoy Ave., Saint Petersburg,  
Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Russia,  
\*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

Received: 11.05.2024

Revised: 11.05.2024

Accepted: 01.07.2024

**Abstract.** A spectral Dirichlet problem in a three-dimensional domain with several identical concentrated heavy masses (large density perturbations on small sets) is studied. Asymptotics of its eigenvalues and eigenfunctions are constructed depending on two parameters: a small one characterizing the size and the density of the inclusions and a timelike parameter describing their approach to the origin (or to a point on the boundary of the domain). The basic novelty is the construction of two-scale asymptotic expansions and the derivation of uniform estimates for asymptotic remainders

**Keywords:** Dirichlet spectral problem, concentrated masses, time-like parameter, asymptotics of eigenvalues and functions, uniform estimates.

# ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ<sup>1)</sup>

© 2024 г. Е. А. Овсянников<sup>1,2,3,\*</sup><sup>1</sup>119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия<sup>2</sup>115409 Москва, Каширское ш., 31, НИЯУ “МИФИ”, Россия<sup>3</sup>117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН им. Патриса Лумумбы, Россия

\*e-mail: evg.bud@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.01.2024 г.

Переработанный вариант 28.06.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения соболевского типа из теории ионно-звуковых волн в плазме. Данная задача сводится к эквивалентному абстрактному интегральному уравнению. Методом сжимающих отображений доказывается локальная разрешимость данного уравнения. Далее используется “бутстрэп”-метод повышения гладкости решения. Наконец, используя метод пробных функций, при некотором достаточном условии получается результат о разрушении решения за конечное время и находится верхняя оценка на время существования решения. Библ. 10.

**Ключевые слова:** нелинейные уравнения соболевского типа, локальная разрешимость, пробная функция, разрушение, оценка времени существования решения.

DOI: 10.31857/S0044466924100119, EDN: JZNBUS

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является логическим продолжением работ [1]–[6] по исследованию нелинейных уравнений ионно-звуковых волн в плазме, которые носят название уравнений соболевского типа. Стоит особенно отметить работу [4], где было рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

а также работу [6], где для данного уравнения была доказана локальная разрешимость и разрушение классического решения  $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{2+2}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$  задачи Коши с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x). \quad (1.2)$$

Как отмечалось в работе [4], в уравнении (1.1) мы имеем дело с уравнением из теории ионно-звуковых волн в плазме, если  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 > 0$ , и с уравнением из теории дрейфовых волн в плазме, если  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  и  $\omega_3 > 0$ . Неизвестная функция  $u(x, t)$  пропорциональна потенциалу  $\phi(x, t)$  электрического поля в плазме. В настоящей статье мы рассмотрим только случай ионно-звуковых волн, поэтому уравнение (1.1) переписывается в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \omega^2 \Delta u(x, t) = \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

где  $\omega = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 > 0$ , и под  $\omega$  подразумевается плазменная частота электронов.

<sup>1)</sup> Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и РНФ (грант №23-11-00056).

Пусть  $\Omega := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < b^2, 0 < a < b\}$  — сферический слой в заданной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . В отличие от работы [6], мы рассмотрим начально-краевую задачу на множестве  $\overline{\Omega} \times [0, T]$  для уравнения (1.3) с начальными условиями (1.2) и однородным условием Неймана на границе  $\partial\Omega$ :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.4)$$

где  $n$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ .

Однако в настоящей работе мы существенно упростим уравнение (1.3) и граничное условие (1.4), упростив при этом саму физическую модель. Отметим, что в монографии [7] была предложена модель сферически-симметричных ионно-звуковых волн, т.е. когда неизвестная функция  $u(x, t)$  зависит лишь от времени  $t$  и расстояния  $r = r_{Ox}$  от начала декартовой системы координат (точки  $O$ ) до точки  $x = (x_1, x_2, x_3)$ . Для этой модели удобнее ввести сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$  с центром в точке  $O$ . Тогда  $u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t) = u(r, \theta, \varphi, t) = u(r, t)$ , а также  $\Delta u(r, t) = \Delta_r u(r, t)$ , где

$$\Delta_r u(r, t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right),$$

т.е. оператор  $\Delta_r$  является радиальной частью оператора Лапласа.

С учетом упрощения физической модели начально-краевая задача в сферическом слое с условиями Неймана на границе имеет следующий вид (“1+1”-мерная задача):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta_r u(r, t) - u(r, t)) + \omega^2 \Delta_r u(r, t) &= \frac{\partial^2 u^2(r, t)}{\partial t^2}, \quad (r, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ u(r, 0) &= u_0(r), \quad u_t(r, 0) = u_1(r), \quad r \in [a, b], \\ u_r(a, t) &= u_r(b, t) = 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $0 < a < b$ , а оценка для конечного времени  $0 < T < +\infty$  будет определена ниже.

Отметим, что классическое решение задачи (1.5) мы будем искать в классе  $u(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ , поэтому необходимо потребовать согласование начального и граничного условий:

$$u_{0r}(a) = u_{0r}(b) = u_{1r}(a) = u_{1r}(b) = 0.$$

Также отметим, что физический смысл однородных условий Неймана на границе состоит в том, что напряженность электрического поля равна нулю на границе сферического слоя.

С опорой на методики исследований, предложенные, в основном, в работах [1] и [8], методом сжимающих отображений мы докажем локальную разрешимость задачи (1.5), а методом пробных функций при некотором достаточном условии докажем разрушение за конечное время классического решения этой задачи и найдем верхнюю оценку на время существования решения.

## 2. СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ

Пусть  $a, b, T \in (0, +\infty)$ , причем  $a < b$ .

Под функциональным пространством  $\mathbb{C}(D)$  будем понимать стандартное линейное пространство непрерывных функций действительной переменной на множестве  $D \subset \mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ .

Символом  $\mathbb{C}^{(n)}[a, b]$ , где  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , обозначаем линейное пространство непрерывно дифференцируемых по  $r \in [a, b]$  функций  $f(r)$  до  $n$ -го порядка включительно (при  $n = 0$   $\mathbb{C}^{(0)}[a, b] = \mathbb{C}[a, b]$ ), причем производные в граничных точках  $r = a$  и  $r = b$  понимаются в смысле односторонних. В работе мы используем стандартную норму

$$\|f(r)\|_{\mathbb{C}^{(n)}[a, b]} := \sum_{k=0}^n \sup_{r \in [a, b]} \left| \frac{d^k f(r)}{dr^k} \right|.$$

Под функциональным пространством  $\mathbb{C}^{(m)}([0, T]; \mathbb{C}^{(n)}[a, b])$  мы понимаем класс функций  $f(r, t)$ ,  $(r, t) \in [a, b] \times [0, T]$ ,  $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , у которых сама функция  $f(r, t)$  вместе со своими частными производными с произвольным порядком следования частных производных по  $r$  и по  $t$  порядка не выше  $m$  по переменной  $t \in [0, T]$  и не выше  $n$  по переменной  $r \in [a, b]$  принадлежат пространству  $\mathbb{C}([a, b] \times [0, T])$ . Отметим, что частные производные в граничных точках множества  $[a, b] \times [0, T]$  понимаются как соответствующие односторонние производные. При этом имеет место коммутативность всех указанных смешанных частных производных по  $r \in [a, b]$

и  $t \in [0, T]$ . Также отметим, что при  $m = 0$  и  $n = 0$   $\mathbb{C}^{(0)}([0, T]; \mathbb{C}^{(0)}[a, b]) = \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]) = \mathbb{C}([a, b] \times [0, T])$ . Кроме того, в работе мы используем обозначение  $\mathbb{B} := \mathbb{C}([a, b] \times [0, T])$ , а норму этого пространства обозначаем через  $\|\cdot\|$ :

$$\|f(r, t)\| = \|f(r, t)\|_{\mathbb{B}} := \sup_{(r, t) \in [a, b] \times [0, T]} |f(r, t)|.$$

В настоящей статье систематически будем использовать банаховы пространства абстрактных функций  $\mathbb{C}([0, T]; B)$ ,  $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; B)$ ,  $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; B)$ , где  $B$  — банахово пространство относительно нормы  $\|\cdot\|_B$ . Стоит отметить, что подобные обозначения иногда совпадают с обозначениями пространств  $\mathbb{C}^{(m)}([0, T]; \mathbb{C}^{(n)}[a, b])$ . Нетрудно показать, что эти классы функций совпадают. Вследствие этого мы можем рассматривать функцию двух переменных  $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(m)}([0, T]; \mathbb{C}^{(n)}[a, b])$  при  $m, n = \{0, 1, 2\}$  то в обычном смысле на множестве  $[a, b] \times [0, T]$ , то как абстрактную  $v(r, t) \equiv v(r)(t) \equiv v(t) \in \mathbb{C}^{(m)}([0, T]; B)$ , где  $B = \mathbb{C}^{(n)}[a, b]$ . Этим эквивалентным представлением мы будем пользоваться на протяжении большей части статьи. Эквивалентность данных представлений здесь и в дальнейшем мы обозначаем операцией  $\equiv$ .

Линейное пространство функций  $f(t) \in \mathbb{C}([0, T]; B)$  определяется следующими свойствами:

$$f(t) : [0, T] \rightarrow B, \quad \|f(t_1) - f(t_2)\|_B \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| \rightarrow +0, \quad t_1, t_2 \in [0, T].$$

Линейное пространство  $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; B)$  определяется как такое подпространство линейного пространства  $\mathbb{C}([0, T]; B)$ , что существует сильная производная

$$\frac{df}{dt}(t) \in \mathbb{C}([0, T]; B), \quad \left\| \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} - \frac{df}{dt}(t) \right\|_B \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |\Delta t| \rightarrow +0.$$

Линейное пространство  $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; B)$  определяется индуктивным образом. Иногда сильные производные первого и второго порядка мы будем обозначать как  $f'(t)$  и  $f''(t)$  соответственно.

Также в работе мы используем обозначение  $\mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])$  для пространства всех линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве  $\mathbb{C}[0, T]$ . Отметим, что данное пространство является банаховой алгеброй с единицей  $I$  (единичным оператором). Теперь введем используемое в статье пространство  $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T]))$ . Пусть  $v(t) \in \mathbb{C}[0, T]$ . Зафиксируем отображение  $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}[0, T]$ . Пусть  $\widehat{W} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])$ . В итоге имеем, что

$$[0, T] \xrightarrow{v} \mathbb{C}[0, T] \xrightarrow{\widehat{W}} \mathbb{C}[0, T].$$

Пространством  $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T]))$  будем считать класс таких операторов  $\widehat{W} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])$ , что при произвольном фиксированном отображении  $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}[0, T]$  композиция  $(\widehat{W} \circ v)(t) = \widehat{W}(v(t))$  дифференцируема по  $t \in [0, T]$  по Фреше, причем эта производная Фреше  $\frac{d(\widehat{W} \circ v)}{dt}(t)$  является непрерывным оператором при действии из  $[0, T]$  в  $\mathbb{C}[0, T]$ .

### 3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Рассмотрим задачу (1.5). Сделаем замену  $u(r, t) = v(r, t)/r$ . Тогда данная задача примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rv_{rr}(r, t) - rv(r, t)) + \omega^2 rv_{rr}(r, t) &= \frac{\partial^2 v^2(r, t)}{\partial t^2}, \quad (r, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ v(r, 0) &= v_0(r), \quad v_t(r, 0) = v_1(r), \quad r \in [a, b], \\ v(a, t) - av_r(a, t) &= 0, \quad v(b, t) - bv_r(b, t) = 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $v_0(r) := ru_0(r)$ ,  $v_1(r) := ru_1(r)$ , при этом  $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ .

Перепишем уравнение задачи (3.1) в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (rv_{rr} - rv - v^2) + \omega^2 (rv_{rr} - rv - v^2) = -\omega^2 rv - \omega^2 v^2. \quad (3.2)$$

Введем непрерывный оператор  $\widehat{L}: \mathbb{C}^{(2)}[a, b] \rightarrow \mathbb{C}[a, b]$ ,

$$\widehat{L}w := rw_{rr} - rw,$$

который имеет непрерывный обратный оператор  $\widehat{G} : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$ , где

$$(\widehat{G}h)(r) = \int_a^b G(r, y)h(y) dy,$$

а  $G(r, y)$  — функция Грина третьей краевой задачи

$$\begin{aligned} rw_{rr} - rw &= h(r), \quad r \in [a, b], \\ w(a) - aw_r(a) &= 0, \\ w(b) - bw_r(b) &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что данная функция Грина имеет следующий вид:

$$G(r, y) = \frac{1}{yM} \begin{cases} (\sinh(r-a) + a \cosh(r-a))(\sinh(y-b) + b \cosh(y-b)), & a \leq r < y \leq b, \\ (\sinh(r-b) + b \cosh(r-b))(\sinh(y-a) + a \cosh(y-a)), & a \leq y < r \leq b, \end{cases}$$

где  $M := (1 - ab) \sinh(b-a) - (b-a) \cosh(b-a)$ .

Поддействуем оператором  $\widehat{G}$  на уравнение (3.2). Тогда получаем, что

$$\frac{d^2}{dt^2} (v - \widehat{G}(v^2)) + \omega^2 (v - \widehat{G}(v^2)) = -\omega^2 \widehat{G}(rv + v^2),$$

где в дальнейшем мы рассматриваем  $v \equiv v(r, t) \equiv v(r)(t) \equiv v(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$  как абстрактную функцию, а также производную по  $t$  считаем в смысле сильной производной в пространстве  $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ .

Введя обозначение  $z = z(t) := v - \widehat{G}(v^2)$ , получаем следующую абстрактную задачу Коши:

$$\begin{aligned} z'' + \omega^2 z &= -\omega^2 \widehat{G}(rv + v^2), \\ z(0) &= \underbrace{v_0 - \widehat{G}(v_0^2)}_{=: z_0}, \\ z'(0) &= \underbrace{v_1 - 2\widehat{G}(v_0 v_1)}_{=: z_1}. \end{aligned}$$

С помощью функции Коши данной задачи приходим к тому, что эта задача эквивалентна следующему абстрактному интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 \cos \omega t + \frac{z_1}{\omega} \sin \omega t - \omega \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \widehat{G}(rv(s) + v^2(s)) ds = \\ &= z_0 \cos \omega t + \frac{z_1}{\omega} \sin \omega t - \omega \int_0^t ds \sin(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy. \end{aligned}$$

С учетом введенного ранее обозначения перепишем это уравнение в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} v - \widehat{G}(v^2) &= C_1(r) \cos \omega t + C_2(r) \sin \omega t - \\ &- \omega \int_0^t ds \sin(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$C_1(r) := z_0 = v_0 - \widehat{G}(v_0^2), \quad C_2(r) := \frac{z_1}{\omega} = \frac{v_1 - 2\widehat{G}(v_0 v_1)}{\omega}.$$

Далее учтем, что операторы  $\widehat{G}$  и  $d/dt$  коммутируют между собой, поэтому

$$\frac{d}{dt} \widehat{G}(v^2) = \widehat{G} \left( \frac{d(v^2)}{dt} \right) = \widehat{G} \left( 2v \frac{dv}{dt} \right) = \widehat{K}(v) * \frac{dv}{dt}, \quad (3.4)$$

где оператор  $\widehat{K}(v)* \equiv \widehat{K}(v(t))*$  имеет вид:

$$\widehat{K}(v) * w := 2 \int_a^b G(r, y) v(y, t) w(y, t) dy. \quad (3.5)$$

Дифференцируя абстрактное уравнение (3.3) по времени, с учетом (3.4) получаем следующее интегродифференциальное уравнение (здесь  $I$  — единичный оператор):

$$\begin{aligned} (I - \widehat{K}(v) *) \frac{dv}{dt} &= f(r, t) - \omega^2 \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy, \\ v(r)(0) &= v_0(r), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$f(r, t) := -C_1(r) \omega \sin \omega t + C_2(r) \omega \cos \omega t. \quad (3.7)$$

#### 4. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Будем использовать метод исследования, предложенный в работе [8], с небольшими модификациями. Напомним, что ранее мы ввели банахово пространство

$$\mathbb{B} = \mathbb{C}([a, b] \times [0, T]).$$

Выше было упомянуто, что его норму обозначаем через  $\|\cdot\|$ . Далее выберем замкнутое, выпуклое и ограниченное подмножество данного банахова пространства:

$$B_{n\varepsilon} := \{v(r, t) \in \mathbb{B} : \|v\| \leq n\varepsilon\} \quad \text{при некотором фиксированном } n \in \mathbb{N},$$

и предположим, что  $\|v_0\| \leq \varepsilon$  и  $\|v_1\| \leq \varepsilon$ .

Решение абстрактного интегродифференциального уравнения (3.6) рассматриваем в классе  $v(r, t) \equiv v(r)(t) \equiv v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$ , в том числе, производную по  $t$  считаем в смысле данного пространства.<sup>1</sup> Отметим, что  $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]) \subset \mathbb{B}$ .

Получим достаточные условия существования обратного оператора  $(I - \widehat{K}(v)*)^{-1}$ . Сделаем для оценки нормы оператора  $\widehat{K}(v)* : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$  с учетом выражения (3.5):

$$\begin{aligned} \|\widehat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} &= \sup_{\|w\| \leq 1} \|\widehat{K}(v) * w\| = \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| 2 \int_a^b G(r, y) v(y, t) w(y, t) dy \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left( 2\|v\| \underbrace{\|w\|}_{\leq 1} \left\| \int_a^b G(r, y) dy \right\| \right) \leq 2c_1 R \|v\|, \end{aligned}$$

где

$$R := b - a \quad \text{и} \quad c_1 := \sup_{r, y \in [a, b]} |G(r, y)| = \max_{r, y \in [a, b]} |G(r, y)|$$

с учетом непрерывности функции Грина по переменным  $(r, y) \in [a, b] \times [a, b]$ , что следует из общих свойств функции Грина. Если же при этом  $v \in B_{n\varepsilon}$ , то при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  имеет место оценка

$$\|\widehat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|v\| \leq 2c_1 R n\varepsilon \leq \frac{1}{2},$$

а это означает, что обратный оператор  $(I - \widehat{K}(v)*)^{-1} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$  существует и представляется в виде сходящегося ряда Неймана:

$$(I - \widehat{K}(v)*)^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v) *]^m. \quad (4.1)$$

<sup>1</sup> *Замечание.* Нетрудно показать, что если абстрактная функция  $v(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ , то тогда она может всегда рассматриваться принадлежащей пространству  $v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$ , и значения сильных производных первого порядка одинаковы с точки зрения пространств  $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$  и  $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$ .

Введем оператор  $\mu$ :

$$\mu(v) \equiv \mu(v(t)) \equiv \mu(v)(r, t) := f(r, t) - \omega^2 \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy. \quad (4.2)$$

Тогда с учетом существования обратного оператора  $(I - \hat{K}(v)*)^{-1}$  и введенного обозначения интегродифференциальное уравнение (3.6) эквивалентно уравнению

$$\frac{dv}{dt} = (I - \hat{K}(v)*)^{-1} [\mu(v)]. \quad (4.3)$$

Теперь введем оператор  $\hat{F}(v) := I - \hat{K}(v)*$ . Тогда уравнение (4.3) перепишется в более простом виде

$$\frac{dv}{dt} = \hat{F}^{-1}(v) [\mu(v)]. \quad (4.4)$$

В силу (4.1) имеет место оценка

$$\|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \|[\hat{K}(\tilde{v}_1*)]^m - [\hat{K}(\tilde{v}_2*)]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}. \quad (4.5)$$

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 4.1.** Для всех  $v, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\epsilon}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  справедливы следующие оценки:

$$\|\hat{K}(\tilde{v}_1) * -\hat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \quad (4.6)$$

$$\|[\hat{K}(v) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \|\hat{K}(v) * \|^m_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}, \quad (4.7)$$

$$\|[\hat{K}(\tilde{v}_1) *]^m - [\hat{K}(\tilde{v}_2) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq m(2c_1 R n \epsilon)^{m-1} \|\hat{K}(\tilde{v}_1) * - \hat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}. \quad (4.8)$$

**Доказательство. Шаг 1.** Докажем оценку (4.6). В самом деле, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|\hat{K}(\tilde{v}_1) * - \hat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} &= \sup_{\|w\| \leq 1} \|\hat{K}(\tilde{v}_1) * w - \hat{K}(\tilde{v}_2) * w\| = \\ &= \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| 2 \int_a^b G(r, y) (\tilde{v}_1(y, t) - \tilde{v}_2(y, t)) w(y, t) dy \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| 2 \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \underbrace{\|w\|}_{\leq 1} \int_a^b G(r, y) dy \right\| \leq 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (4.6) доказана.

**Следствие 1.** Переобозначив  $\tilde{v}_1$  на  $v$ , при  $\tilde{v}_2 = 0$  имеет место оценка

$$\|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|v\| \leq 2c_1 R n \epsilon. \quad (4.9)$$

**Шаг 2.** Докажем оценку (4.7) методом математической индукции. В самом деле, данная оценка очевидна при  $m = 1$  (база индукции). Предположим, что эта оценка выполняется для какого-либо произвольного  $m \in \mathbb{N}$ . Докажем, что она выполнена и при  $m + 1$ .

С учетом предположения индукции имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|[\hat{K}(v) *]^{m+1}\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} &= \sup_{\|w\| \leq 1} \|[\hat{K}(v) *]^{m+1}(w)\| = \sup_{\|w\| \leq 1} \|[\hat{K}(v) *]^m (\hat{K}(v) * w)\| \leq \\ &\leq \|[\hat{K}(v) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \underbrace{\sup_{\|w\| \leq 1} \|\hat{K}(v) * w\|}_{= \|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}} = \|[\hat{K}(v) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \\ &\leq \|\hat{K}(v) * \|^m_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}^{m+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (4.7) доказана.

**Следствие 2.** С учетом (4.9) имеет место следующая оценка:

$$\|[\widehat{K}(v)]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \|\widehat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}^m \leq (2c_1 R n \varepsilon)^m. \quad (4.10)$$

**Шаг 3.** Докажем оценку (4.8) также методом математической индукции. Заметим, что данная оценка очевидна при  $m = 1$  (база индукции). Предположим, что эта оценка выполняется для какого-либо произвольного  $m \in \mathbb{N}$ . Докажем, что она выполнена и при  $m + 1$ .

С учетом предположения индукции, а также оценки (4.10) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} & \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^{m+1} - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^{m+1}\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \sup_{\|w\| \leq 1} \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^{m+1}w - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^{m+1}w\| = \\ & = \sup_{\|w\| \leq 1} \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_2) * w)\| = \\ & = \sup_{\|w\| \leq 1} \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) + [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) - \\ & - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_2) * w)\| = \\ & = \sup_{\|w\| \leq 1} \|([\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^m - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m)(\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) + [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m([\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2)]w)\| \leq \\ & \leq \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^m - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \underbrace{\sup_{\|w\| \leq 1} \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w\|}_{= \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R n \varepsilon} + \\ & + \underbrace{\|[\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}}_{\leq (2c_1 R n \varepsilon)^m} \cdot \underbrace{\sup_{\|w\| \leq 1} \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2)]w\|}_{= \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}} \leq \\ & \leq m(2c_1 R n \varepsilon)^{m-1} \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot 2c_1 R n \varepsilon + \\ & + (2c_1 R n \varepsilon)^m \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = (m+1)(2c_1 R n \varepsilon)^m \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (4.8) доказана.

Лемма полностью доказана.

В итоге в силу оценки (4.5), а также оценок (4.6) и (4.8) леммы 4.1 имеет место оценка

$$\|\widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} m(2c_1 R n \varepsilon)^{m-1} \cdot 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|.$$

Поскольку при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  выполнено неравенство  $2c_1 R n \varepsilon \leq 1/2$ , то

$$\|\widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{2^{m-1}}}_{=4} = c_2 \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \quad (4.11)$$

где  $c_2 := 8c_1 R$ , а для числового ряда  $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{2^{m-1}}$  нетрудно показывается, что он сходится (например, по признаку Д'Аламбера). Сумма данного ряда (она равна 4) нетрудно находится с помощью почленного дифференцирования степенного ряда  $\sum_{m=1}^{+\infty} x^m$  в точке  $x = 1/2$ , принадлежащей интервалу сходимости  $(-1; 1)$  данного ряда.

Введем следующий оператор  $A$ :

$$A(v) \equiv A(v)(t) \equiv A(v)(r, t) := \widehat{F}^{-1}(v)[\mu(v)] \equiv \widehat{F}^{-1}(v)[\mu(v)(r, t)].$$

Тогда интегродифференциальное уравнение (3.6) с учетом (4.4) и введенного обозначения переписывается в виде

$$\frac{dv}{dt} = A(v), \quad (4.12)$$

$$v(0) = v_0.$$

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 4.2.** Для всех  $v, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\varepsilon}$  при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  таком, что  $2c_1 R n \varepsilon \leq 1/2$ , а также при малых начальных данных  $\|v_0\| \leq \varepsilon$  и  $\|v_1\| \leq \varepsilon$  справедливы оценки

$$\|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| \leq c_3(\varepsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \quad (4.13)$$

$$\|A(v)\| \leq c_4(\varepsilon, T), \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} c_3(\varepsilon, T) &= c_2 \left( c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R\omega^2 T n \varepsilon(b + n\varepsilon) \right) + 2c_1 R\omega^2 T(b + 2n\varepsilon), \\ c_4(\varepsilon, T) &= 2 \left( c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R\omega^2 T n \varepsilon(b + n\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

**Доказательство. Шаг 1.** Для доказательства оценки (4.13) учтем, что

$$\begin{aligned} \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| &= \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1)[\mu(\tilde{v}_1)] - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_2)]\| = \\ &= \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1)[\mu(\tilde{v}_1)] - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_1)] + \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_1)] - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_2)]\| = \\ &= \|(\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2))[\mu(\tilde{v}_1)] + \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)]\| \leq \\ &\leq \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\mu(\tilde{v}_1)\| + \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\| \leq \\ &\leq c_2 \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \cdot \|\mu(\tilde{v}_1)\| + 2\|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\|, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где мы учли оценку (4.11), а также то, что с учетом неравенства (4.10) имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|\hat{F}^{-1}(v)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} &= \|(I - \hat{K}(v) *)^{-1}\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \left\| \sum_{m=0}^{+\infty} [\hat{K}(v) *]^m \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{+\infty} \|\hat{K}(v) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} \|\hat{K}(v) * \|^m_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} (2c_1 R n \varepsilon)^m \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

**Шаг 2.** Сделаем оценку для  $\|\mu(v)\|$ . С учетом (4.2) имеем

$$\|\mu(v)\| \leq \|f(r, t)\| + \omega^2 \left\| \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy \right\|. \quad (4.17)$$

Учитывая (3.7), выражение для  $f(r, t)$  перепишем в виде

$$\begin{aligned} f(r, t) &= (\hat{G}(v_0^2) - v_0)\omega \sin \omega t + (v_1 - 2\hat{G}(v_0 v_1)) \cos \omega t = \\ &= \omega \left( \int_a^b G(r, y) v_0^2(y) dy - v_0(r) \right) \sin \omega t + \\ &+ \left( v_1(r) - 2 \int_a^b G(r, y) v_0(y) v_1(y) dy \right) \cos \omega t, \end{aligned}$$

откуда сразу следует, что

$$\begin{aligned} \|f(r, t)\| &\leq \omega \left( \left\| \sin \omega t \cdot \int_a^b G(r, y) v_0^2(y) dy \right\| + \|v_0(r) \sin \omega t\| \right) + \\ &+ \|v_1(r) \cos \omega t\| + 2 \left\| \cos \omega t \cdot \int_a^b G(r, y) v_0(y) v_1(y) dy \right\| \leq \\ &\leq \omega(c_1 R \varepsilon^2 + \varepsilon) + \varepsilon + 2c_1 R \varepsilon^2 = c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \omega^2 \left\| \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy \right\| &\leq \\ &\leq \omega^2 c_1 (b n \varepsilon + (n \varepsilon)^2) R T = c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Тогда с учетом неравенств (4.18), (4.19) получаем, что оценка (4.17) перепишется в следующем виде:

$$\|\mu(v)\| \leq c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon). \quad (4.20)$$

**Шаг 3.** Теперь оценим  $\|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\|$ .

С учетом (4.2) имеем

$$\begin{aligned} \|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\| &\leq \omega^2 \left\| \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) [y(\tilde{v}_1(y, s) - \tilde{v}_2(y, s)) + \right. \\ &\left. + \tilde{v}_1^2(y, s) - \tilde{v}_2^2(y, s)] dy \right\| \leq \omega^2 T c_1 R (b \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| + \|\tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2\|). \end{aligned}$$

Далее учтем, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2\| &\leq \|(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2)(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)\| \leq \|\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2\| \cdot \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \leq \\ &\leq \underbrace{(\|\tilde{v}_1\| + \|\tilde{v}_2\|)}_{\leq 2n\varepsilon} \cdot \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \leq 2n\varepsilon \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \end{aligned}$$

откуда сразу получаем оценку

$$\|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\| \leq \omega^2 T c_1 R (b \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| + 2n\varepsilon \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|) = c_1 R \omega^2 T (b + 2n\varepsilon) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|. \quad (4.21)$$

**Шаг 4.** Учитывая оценки (4.15), (4.20), (4.21), а также переобозначая  $v$  на  $\tilde{v}_1$  в (4.20), получаем итоговую оценку

$$\begin{aligned} \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| &\leq c_2 \left( c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon) \right) \cdot \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| + \\ &+ 2c_1 R \omega^2 T (b + 2n\varepsilon) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| = \\ &= \left[ c_2 \left( c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon) \right) + \right. \\ &\left. + 2c_1 R \omega^2 T (b + 2n\varepsilon) \right] \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| = c_3(\varepsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (4.13) доказана.

**Следствие 3.** Оператор  $A$  непрерывен при действии из  $B_{n\varepsilon}$  в  $B_{n\varepsilon}$ , поскольку для любых  $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\varepsilon}$  выполнена импликация

$$\|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \rightarrow +0 \implies \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| \leq c_3(\varepsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \rightarrow +0.$$

**Шаг 5.** Оценим  $\|A(v)\|$ :

$$\begin{aligned} \|A(v)\| &= \|\hat{F}^{-1}(v)[\mu(v)]\| \leq \|\hat{F}^{-1}(v)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\mu(v)\| \leq \\ &\leq 2 \left( c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon) \right) = c_4(\varepsilon, T), \end{aligned}$$

где мы воспользовались оценками (4.16) и (4.20).

Таким образом, оценка (4.14) доказана.

Лемма доказана полностью.

Введем оператор  $H$ :

$$H[v] \equiv H[v](t) \equiv H[v](r, t) := v_0(r) + \int_0^t A(v)(r, s) ds.$$

Перепишем задачу (4.12) в следующем эквивалентном виде:

$$v(r, t) = H[v](r, t).$$

В обозначениях абстрактных функций и, соответственно, абстрактного интегрального уравнения Вольтерра II рода данная задача примет вид

$$v(t) = v_0 + \underbrace{\int_0^t A(v)(s) ds}_{=H[v]=H[v](t)}. \quad (4.22)$$

Докажем однозначную локальную разрешимость данного уравнения методом сжимающих отображений, выбрав соответствующие значения  $\varepsilon > 0$ ,  $T > 0$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Отметим, что в силу общих свойств метрических пространств ранее указанное множество  $B_{n\varepsilon}$  само является полным метрическим пространством относительно расстояния, порожденного нормой пространства  $\mathbb{B}$  (см., например, работу [9]). Поэтому нам потребуется, чтобы оператор  $H$ :

1) действовал из  $B_{n\varepsilon}$  в  $B_{n\varepsilon}$ ,

2) являлся сжимающим на  $B_{n\varepsilon}$ .

**Шаг 1.** Для доказательства п. 1) сделаем оценку для  $\|H[v]\|$ :

$$\begin{aligned} \|H[v]\| &= \left\| v_0 + \int_0^t A(v)(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \|v_0\| + T\|A(v)\| \leq \varepsilon + Tc_4(\varepsilon, T), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где мы воспользовались оценкой (4.14) леммы 4.2, а также условием  $\|v_0\| \leq \varepsilon$ .

Потребуем выполнения неравенства  $\varepsilon + Tc_4(\varepsilon, T) \leq n\varepsilon$ . Тогда из (4.23) автоматически следует, что  $\|H[v]\| \leq n\varepsilon$  и, кроме того,

$$\begin{aligned} Tc_4(\varepsilon, T) &\leq (n-1)\varepsilon \iff \\ \iff 2T(c_1R(\omega+2)\varepsilon^2 + (\omega+1)\varepsilon + c_1R\omega^2Tn\varepsilon(b+n\varepsilon)) &\leq (n-1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку

$$2T(\omega+1)\varepsilon < 2T(c_1R(\omega+2)\varepsilon^2 + (\omega+1)\varepsilon + c_1R\omega^2Tn\varepsilon(b+n\varepsilon)) \leq (n-1)\varepsilon,$$

то

$$2T(\omega+1)\varepsilon < (n-1)\varepsilon \iff n > 2T(\omega+1) + 1.$$

Тогда при фиксированном  $T > 0$  и фиксированном  $n \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющим неравенству  $n > 2T(\omega+1) + 1$ , а также при малом  $\varepsilon > 0$  таком, что

$$2c_1Rn\varepsilon \leq \frac{1}{2}, \quad Tc_4(\varepsilon, T) \leq (n-1)\varepsilon,$$

оператор  $H$  действует из  $B_{n\varepsilon}$  в  $B_{n\varepsilon}$ .

**Шаг 2.** Для доказательства п. 2) воспользуемся тем, что для любых  $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\epsilon}$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|H[\tilde{v}_1] - H[\tilde{v}_2]\| &\leq \left\| \int_0^t \left( A(\tilde{v}_1)(s) - A(\tilde{v}_2)(s) \right) ds \right\| \leq \\ &\leq T \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| \leq T c_3(\epsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \end{aligned}$$

где мы воспользовались оценкой (4.13) леммы 4.2.

Потребуем выполнение неравенства  $T c_3(\epsilon, T) \leq 1/2$  при достаточно малых фиксированных  $\epsilon > 0$  и  $T > 0$  и фиксированном  $n \in \mathbb{N}$ , удовлетворяющем неравенству  $n > 2T(\omega + 1) + 1$ . Тогда оператор  $H$  будет сжимающим на  $B_{n\epsilon}$ .

В итоге мы доказали следующую лемму.

**Лемма 4.3.** Пусть  $\epsilon > 0$  и  $T > 0$  – произвольные достаточно малые, и  $n \in \mathbb{N}$  – произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству  $n > 2T(\omega + 1) + 1$ , причем малость  $\epsilon$  и  $T$  определяется одновременным выполнением следующих условий:

$$2c_1 R n \epsilon \leq \frac{1}{2}, \quad T c_3(\epsilon, T) \leq \frac{1}{2}, \quad T c_4(\epsilon, T) \leq (n - 1)\epsilon.$$

Тогда оператор  $H$  действует из  $B_{n\epsilon}$  в  $B_{n\epsilon}$  и является сжимающим на  $B_{n\epsilon}$ .

Отсюда в силу теоремы о сжимающих отображениях и того, что  $\|v_0(r)\| = \|v_0(r)\|_{\mathbb{C}[a,b]}$  и  $\|v_1(r)\| = \|v_1(r)\|_{\mathbb{C}[a,b]}$ , приходим к следующей теореме.

**Теорема 1.** Для достаточно малых  $T > 0$  и  $\epsilon > 0$  при начальных данных  $v_0(r), v_1(r) \in \mathbb{C}[a, b]$  таких, что

$$\|v_0(r)\|_{\mathbb{C}[a,b]} \leq \epsilon, \quad \|v_1(r)\|_{\mathbb{C}[a,b]} \leq \epsilon$$

существует и единственно решение интегрального уравнения (4.22) в классе функций  $v(t) \equiv v(r)(t) \equiv v(r, t) \in \mathbb{B} = \mathbb{C}([a, b] \times [0, T]) = \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$ .

Аналогично работам [1] и [8], используем метод повышения гладкости (“бутстрэп”-метод) решения абстрактного интегрального уравнения (4.22). Учитывая то, что в правой части уравнения под интегралом стоит непрерывная по времени функция (в силу непрерывности оператора  $A$  согласно следствию 3), интеграл непрерывно дифференцируем по  $t$ . Поскольку в левой части стоит функция  $v(t) \equiv v(r, t)$ , то  $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$ , причем

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= A(v) = \hat{F}^{-1}(v) [\mu(v)] = \\ &= \left( I - \hat{K}(v(t)) * \right)^{-1} [\mu(v(t))] = \left( \sum_{m=0}^{+\infty} [\hat{K}(v(t)) *]^m \right) \mu(v(t)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu(v) \equiv \mu(v(t)) \equiv \mu(v)(r, t) &= \left[ \omega \left( \int_a^b G(r, y) v_0^2(y) dy - v_0(r) \right) \sin \omega t + \right. \\ &+ \left( v_1(r) - 2 \int_a^b G(r, y) v_0(y) v_1(y) dy \right) \cos \omega t - \\ &\left. - \omega^2 \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (y v(y, s) + v^2(y, s)) dy \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Как итог, мы имеем абстрактное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = \left( \sum_{m=0}^{+\infty} [\hat{K}(v(t)) *]^m \right) \mu(v(t)) \quad (4.25)$$

относительно функции  $v(t) \equiv v(r, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$  с начальным условием  $v(0) = v_0 \equiv v(r)(0) = v_0(r) \in \mathbb{C}[a, b]$ . Учитывая явный вид (4.24) для  $\mu(v(t))$ , получаем, что

$$\mu(v(t)) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]). \quad (4.26)$$

Кроме того, оператор  $\widehat{K}(v(t))*$ , вообще говоря, при фиксированном  $v(t)$  и фиксированном  $r \in [a, b]$  можно рассматривать как элемент банаховой алгебры  $\mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])$  линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве  $\mathbb{C}[0, T]$  (данный оператор непрерывен, поскольку он линейный при фиксированном  $v(t)$  и ранее была доказана его ограниченность).

Поскольку согласно результатам работы [10] степенной операторный ряд  $\sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v(t)) *]^m$  в банаховой алгебре  $\mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])$  непрерывно дифференцируем по  $t \in [0, T]$  по Фреше внутри шара сходимости ( $\|\widehat{K}(v(t)) * \|_{\mathbb{C}[0, T] \rightarrow \mathbb{C}[0, T]} \leq \|\widehat{K}(v(t)) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \frac{1}{2} < 1$  согласно доказанному ранее), то

$$\sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v(t)) *]^m = (I - \widehat{K}(v(t)) *)^{-1} \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])). \quad (4.27)$$

Согласно результатам (4.26) и (4.27), с учетом вида абстрактного уравнения (4.25) получаем, что

$$\frac{d}{dt}v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$$

и, стало быть,  $v(t) \equiv v(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$ .

Согласно ранее проведенным выкладкам, абстрактное уравнение (4.25), вообще говоря, эквивалентно уравнению (3.3), которое, в свою очередь, можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(r, t) = & \widehat{G}(v^2(r, t)) + \left( v_0(r) - \widehat{G}(v_0^2(r)) \right) \cos \omega t + \\ & + \frac{1}{\omega} \left( v_1(r) - 2\widehat{G}(v_0(r)v_1(r)) \right) \sin \omega t - \omega \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \widehat{G}(rv(r, s) + v^2(r, s)) ds. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Поскольку  $v_0(r), v_1(r) \in \mathbb{C}[a, b]$  и  $\mathbb{C}^{(2)}[a, b] \subset \mathbb{C}[a, b]$ , то предположим, что  $v_0(r), v_1(r) \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$ . Введем оператор вложения  $\widehat{J} : \mathbb{C}^{(2)}[a, b] \rightarrow \mathbb{C}[a, b]$ . Учитывая то, что  $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$  и  $v_0(r), v_1(r) \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$ , указанные ниже функции принадлежат следующим классам:

$$\begin{aligned} v^2(r, t) & \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]), \\ v_0^2(r) & \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b], \quad v_0(r) \cdot v_1(r) \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b], \\ rv(r, t) & \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]), \\ rv(r, t) + v^2(r, t) & \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]). \end{aligned} \quad (4.29)$$

С учетом (4.29) и оператора вложения  $\widehat{J}$  перепишем уравнение (4.28) в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(r, t) = & \widehat{G}(v^2(r, t)) + \left( v_0(r) - \widehat{G}\widehat{J}[v_0^2(r)] \right) \cos \omega t + \\ & + \frac{1}{\omega} \left( v_1(r) - 2\widehat{G}\widehat{J}[v_0(r)v_1(r)] \right) \sin \omega t - \omega \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \widehat{G}(rv(r, s) + v^2(r, s)) ds. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Как мы уже ранее отмечали, согласно свойствам функции Грина,  $\widehat{G} : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$ , причем  $\widehat{G}$  — непрерывный оператор. Поэтому согласно (4.29) и виду уравнения (4.30) приходим к тому, что правая часть уравнения принадлежит классу  $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ . Значит, и левая часть должна принадлежать данному классу, т.е.  $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ .

Поскольку с учетом проделанных ранее выкладок задачи (3.1), (3.3), (4.25), (4.28) и (4.30) эквивалентны, то задача (3.1) локально разрешима в классе  $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$  при некотором  $T > 0$  и достаточно малом  $\varepsilon > 0$ , причем начальные условия  $v_0(r), v_1(r) \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$  такие, что  $\|v_0(r)\|_{\mathbb{C}[a, b]} \leq \varepsilon$  и  $\|v_1(r)\|_{\mathbb{C}[a, b]} \leq \varepsilon$ .

Так как

$$u(r, t) = \frac{v(r, t)}{r} \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b]), \quad (4.31)$$

в силу того что  $0 < a < b$ , и задачи (1.5), (3.1) эквивалентны, то имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Пусть фиксированы параметры задачи:  $\omega > 0$ ,  $0 < a < b$ . Тогда найдется такое  $T > 0$  и достаточно малое  $\varepsilon > 0$ , что при начальных функциях  $u_0(r)$ ,  $u_1(r) \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$

$$\|ru_0(r)\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon, \quad \|ru_1(r)\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon,$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$u_{0r}(a) = u_{0r}(b) = u_{1r}(a) = u_{1r}(b) = 0,$$

существует единственное решение задачи (1.5) в классе  $u(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ .

## 5. РАЗРУШЕНИЕ И ОЦЕНКА ДЛЯ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Аналогично тому, как это было сделано в работах [1] и [2], применим метод пробных функций для нахождения верхней оценки на время существования классического решения задачи (1.5). Справедлива следующая

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2 и  $u(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$  — единственное решение задачи (1.5). Тогда при выполнении достаточного условия

$$\int_a^b r^2 u_1(r) \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right) dr < 0$$

время  $T$  существования классического решения задачи (1.5) конечно и имеет место следующая оценка сверху:

$$T \leq - \frac{\int_a^b r^2 \left( u_0(r) + 1/2 \right)^2 dr}{2 \int_a^b r^2 u_1(r) \left( u_0(r) + 1/2 \right) dr}.$$

**Доказательство.** Умножим основное уравнение (1.5) на пробную функцию  $\varphi(r) = r^2$  и проинтегрируем по множеству  $r \in [a, b]$ , учитывая, что в получившихся собственных интегралах, зависящих от параметра  $t$ , можно менять порядок дифференцирования и интегрирования вследствие принадлежности  $u(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left( \frac{2u_r(r, t)}{r} + u_{rr}(r, t) - u(r, t) \right) \varphi(r) dr + \omega^2 \int_a^b \left( \frac{2u_r(r, t)}{r} + u_{rr}(r, t) \right) \varphi(r) dr = \\ & = \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b u^2(r, t) \varphi(r) dr \iff \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left( 2ru_r(r, t) + r^2 u_{rr}(r, t) - r^2 u(r, t) - r^2 u^2(r, t) \right) dr + \\ & + \omega^2 \int_a^b \left( 2ru_r(r, t) + r^2 u_{rr}(r, t) \right) dr = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

С учетом граничных условий задачи (1.5) справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left( 2ru_r(r, t) + r^2 u_{rr}(r, t) \right) dr = \int_a^b 2ru_r(r, t) dr + \int_a^b r^2 u_{rr}(r, t) dr = \\ & = \underbrace{r^2 u_r(r, t) \Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b r^2 u_{rr}(r, t) dr + \int_a^b r^2 u_{rr}(r, t) dr = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

С учетом (5.2) перепишем (5.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} & - \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left( r^2 u^2(r, t) + r^2 u(r, t) \right) dr = 0 \iff \\ & \iff \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left( r^2 u^2(r, t) + r^2 u(r, t) \right) dr = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Далее учтем, что

$$r^2 u^2(r, t) + r^2 u(r, t) = r^2 (u^2(r, t) + u(r, t)) = r^2 \left( u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{r^2}{4}. \quad (5.4)$$

Поскольку

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \frac{r^2}{4} dr = 0,$$

то с учетом равенства (5.4) перепишем (5.3) в виде

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_a^b r^2 \left( u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr = 0. \quad (5.5)$$

Введем обозначение

$$I(t) := \int_a^b r^2 \left( u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr.$$

Тогда с учетом (5.5) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$I''(t) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$I(t) = \tilde{C}_1 t + \tilde{C}_2. \quad (5.6)$$

Найдем начальные условия  $I(0)$ ,  $I'(0)$  с учетом начальных условий задачи (1.5).

Во-первых,

$$I(0) = \int_a^b r^2 \left( u(r, 0) + \frac{1}{2} \right)^2 dr = \int_a^b r^2 \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr =: I_0. \quad (5.7)$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} I'(t) &= \frac{d}{dt} \int_a^b r^2 \left( u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left( r^2 \left( u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 \right) dr = \\ &= 2 \int_a^b r^2 \left( u(r, t) + \frac{1}{2} \right) u_t(r, t) dr, \end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$I'(0) = 2 \int_a^b r^2 \left( u(r, 0) + \frac{1}{2} \right) u_t(r, 0) dr = 2 \int_a^b r^2 \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr =: I_1. \quad (5.8)$$

С одной стороны, с учетом общего решения (5.6) и начальных условий (5.7), (5.8) находим, что  $\tilde{C}_1 = I_1$ ,  $\tilde{C}_2 = I_0$  и

$$I(t) = \int_a^b r^2 \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr + 2t \int_a^b r^2 \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr.$$

С другой стороны, поскольку

$$I(t) = \int_a^b r^2 \left( u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr \geq 0$$

как интеграл от неотрицательной функции, получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\int_a^b r^2 \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr + 2t \int_a^b r^2 \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr \geq 0 \iff \\ &\iff 2t \int_a^b r^2 \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr \geq - \int_a^b r^2 \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr, \end{aligned}$$

которое справедливо для любого  $t \in [0, T]$ . В частности, при  $t = T$  имеем

$$2T \int_a^b r^2 \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr \geq - \int_a^b r^2 \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr.$$

Разделив данное неравенство на

$$\int_a^b r^2 \left( u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr < 0,$$

получаем, что

$$T \leq - \frac{\int_a^b r^2 (u_0(r) + 1/2)^2 dr}{2 \int_a^b r^2 (u_0(r) + 1/2) u_1(r) dr}.$$

Теорема полностью доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V.* Blow-up for one Sobolev problem: theoretical approach and numerical analysis // *J. Math. Anal. Appl.* 2016. V. 442. № 2. P. 451–468.
2. *Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Овсянников Е.А., Панин А.А.* Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрзивной нелинейностью // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование.* 2017. Т. 10. № 2. С. 107–123.
3. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Взрывная неустойчивость в нелинейных волновых моделях с распределенными параметрами // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2020. Т. 84. № 3. С. 15–70.
4. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2022. Т. 62. № 10. С. 1639–1661.
5. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. II. Теория потенциала // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 63. № 2. С. 282–316.
6. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. III. Задачи Коши // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 63. № 7. С. 1109–1127.
7. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998. С. 448.
8. *Корпусов М.О.* Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2015. Т. 79. № 5. С. 103–162.
9. *Панин А.А.* О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // *Матем. заметки.* 2015. Т. 97. № 6. С. 884–903.
10. *Silvestri B.* Fréchet differential of a power series in banach algebras // *Opuscula Mathematica.* 2010. V. 30. № 2. P. 155–177.

# LOCAL SOLVABILITY AND BLOW-UP OF CLASSICAL SOLUTION TO SOME INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR EQUATION GOVERNING ION-ACOUSTIC WAVES IN A PLASMA

E. A. Ovsyannikov<sup>a,b,c,\*</sup>

<sup>a</sup> 119991 Moscow, Leninskie Gory, 1, Lomonosov Moscow State University, Russia

<sup>b</sup> 115409 Moscow, Kashirskoe shosse, 31, NRNU "MEPhI Russia

<sup>c</sup> 117198 Moscow, Miklukho-Maklaya str., Patrice Lumumba RUDN, 117198 Moscow, Russia

\*e-mail: evg.bud@yandex.ru

Received: 29.01.2024

Revised: 28.06.2024

Accepted: 01.07.2024

**Abstract.** The initial boundary value problem for the Sobolev type equation of the theory of ion-acoustic waves in plasma is considered. This problem comes to an equivalent abstract integral equation. The local solvability of this equation is proved by the contraction mapping principle. Next, a “bootstrap” method is used to increase the smoothness of the solution. Finally, the test function method with a certain sufficient condition is used to obtain a finite time blow-up result and an upper bound on the blow-up time is found.

**Keywords:** nonlinear Sobolev type equations, local solvability, test function, blow-up, blow-up time estimation.

# УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ТИПА М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ПАМЯТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ<sup>1)</sup>

© 2024 г. М. Ю. Кокурин<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>424001 Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1, Марийский государственный университет, Россия

\*e-mail: kokurinm@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.03.2024 г.

Переработанный вариант 05.03.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Рассматривается нелинейная коэффициентная обратная задача, связанная с частичной реконструкцией матрицы памяти вязкоупругой среды по результатам зондирования среды семейством волновых полей, возбуждаемых точечными источниками. Исследуется пространственно непероопределенная постановка, в которой многообразия точечных источников и детекторов не совпадают и имеют суммарную размерность, равную трем. Устанавливаются требования к этим многообразиям, обеспечивающие однозначную разрешимость изучаемой обратной задачи. Результат достигается за счет редукции этой задачи к цепочке связанных систем линейных интегральных уравнений типа М.М. Лаврентьева. Библ. 33.

**Ключевые слова:** уравнения упругости, вязкоупругая среда, коэффициентная обратная задача, ядро памяти, линейное интегральное уравнение, бигармоническое уравнение, единственность.

DOI: 10.31857/S0044466924100125, EDN: JZLWVL

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения М.М. Лаврентьева восходят к работам [1], [2], в которых был предложен подход к исследованию нелинейных коэффициентных обратных задач для широкого класса уравнений в частных производных, позволяющий редуцировать такие задачи к линейным интегральным уравнениям. Наиболее полно этот подход развит в применении к коэффициентным задачам для гиперболических уравнений, рассматриваемых в частотной, либо во временной области (см. [3]–[8]). Типичная постановка обратной задачи в частотной области состоит в том, что один или несколько коэффициентов уравнения, имеющих носитель в ограниченной области  $D \subset \mathbb{R}^3$  со связным дополнением, разыскиваются по данным измерения комплексной амплитуды  $u(x) = u(x; z, \omega)$  поля установившихся колебаний  $U(x, t) = u(x)e^{-i\omega t}$ ,  $x \in X$ , инициированного семейством гармонических по времени источников  $F(x, z, t) = \delta(x - z)e^{-i\omega t}$ ,  $z \in Z$ . Здесь  $X$  есть многообразие, содержащее детекторы поля, рассеянного неоднородностью  $D$ ,  $Z$  — множество точечных источников,  $(X \cup Z) \cap \overline{D} = \emptyset$ . Специальным образом организованный предельный переход при  $\omega \rightarrow 0$  в интегральном уравнении для  $u(x)$  позволяет получить для искомого коэффициента линейное интегральное уравнение, называемое уравнением М.М. Лаврентьева. При работе с исходным волновым уравнением во временной области аналогичный результат получается после применения к этому уравнению преобразования Фурье–Лапласа по времени. В задаче реконструкции коэффициента  $c(x)$  в гиперболическом уравнении

$$\frac{1}{c^2(x)} U_{tt}(x, t) = \Delta U(x, t) - \delta(x - z)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

описанный подход приводит к линейному интегральному уравнению

$$\int_D \frac{\xi(y)dy}{|x - y||z - y|} = G(x, z), \quad x \in X, \quad z \in Z. \quad (1.2)$$

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 24–21–00031).

Здесь функция  $G(x, z)$  определяется по наблюдениям рассеянного поля на  $X$  в частотной, либо во временной области,

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}, \quad x \in D,$$

и предполагается, что искомым коэффициент  $c(x) \equiv c_0 > 0$  вне  $D$ ,  $c \in C(\mathbb{R}^3)$ . В приложениях функция  $c(x)$  есть скорость распространения сигнала в скалярной волновой среде. Редукция исходной нелинейной обратной задачи к линейным уравнениям вида (1.2) позволяет, во-первых, устанавливать теоремы единственности для этих задач при различных требованиях к выбору множеств источников и детекторов и, во-вторых, конструировать численные алгоритмы, основанные на хорошо развитой технике регуляризации линейных интегральных уравнений (см. [8], [9]). Другие возможные подходы к конструированию эффективных алгоритмов для решения уравнения М.М. Лаврентьева представлены в [7], [10], [11]. Единственность решения в обратной задаче реконструкции коэффициента  $c(x)$  в (1.1) имеет место в том случае, когда соответствующее (1.2) однородное уравнение имеет лишь нулевое решение. Естественным требованием к выбору многообразий  $X, Z$  является пространственная непероопределенность обратной задачи, означающая, что суммарная размерность  $X$  и  $Z$  равна размерности носителя  $D$  реконструируемой функции  $c(x)$ , т.е. трем. Первоначально в [3], [4] единственность решения интегрального уравнения (1.2) была обоснована в переопределенных постановках, в которых  $\dim(X) = \dim(Z) = 2$ . В последнее время получены теоремы единственности для уравнения М.М. Лаврентьева (1.2) в непероопределенной постановке, когда одно из многообразий  $X, Z$  является отрезком прямой, а другое, например, — областью на плоскости или на аналитической поверхности, не пересекающей  $\bar{D}$  (см. [12]–[14]). Характерным результатом в этом направлении является следующая теорема.

**Теорема 1** (см. [12]). Пусть  $X$  содержит область на плоскости  $\Pi$ ,  $Z$  содержит открытый интервал на прямой  $\mathcal{L}$  и  $(\Pi \cup \mathcal{L}) \cap \bar{D} = \emptyset$ . Тогда соответствующее (1.2) однородное уравнение имеет в классе  $L_2(D)$  лишь нулевое решение.

Все сказанное относится главным образом к обратным задачам для гиперболических уравнений, описывающих скалярные волновые поля. Такими уравнениями моделируются процессы в акустике, они возникают также в одномерных задачах, связанных с электромагнитными и упругими колебаниями неоднородных сред.

В настоящей работе объектом изучения является система

$$\omega^2 u(x) + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u(x) + \mu \Delta u(x) + \omega q(x, \omega) u(x) = -a \delta(x - z), \quad (1.3)$$

$$x \in \mathbb{R}^3, \quad \omega > 0,$$

описывающая, в частности, установившиеся гармонические колебания трехмерной вязкоупругой среды. Вектор  $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ , характеризующий перемещения точек среды, зависит также от местоположения  $z \in Z$  точечного источника зондирующей упругой волны и от ее частоты  $\omega$ . В необходимых случаях зависимость  $u$  от  $z, \omega$  будет специально отмечаться. Мы используем обозначение  $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$ , дифференциальные операторы  $\nabla, \Delta, \operatorname{div}$  берутся по переменной  $x \in \mathbb{R}^3$ , что во избежание разночтений ниже также иногда отмечается. Правая часть в (1.3) описывает силу в направлении единичного вектора  $a \in \mathbb{R}^3$ , приложенную в точке  $x = z$ . Предполагается, что коэффициенты Ламэ  $\lambda, \mu > 0$  постоянны. Диагональная матричная функция

$$q(x, \omega) = \operatorname{diag}(q_1(x, \omega), q_2(x, \omega), q_3(x, \omega))$$

имеет компоненты, непрерывные в  $\mathbb{R}^4 = \{(x, \omega)\}$ . Кроме того,

$$q(x, \omega) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D.$$

Как и выше,  $D$  есть ограниченная область со связным дополнением  $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ .

Исходной по отношению к (1.3) служит задача динамики вязкоупругой среды во временной постановке (см. [15]–[19])

$$\begin{aligned} U_{tt}(x, t) - (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} U(x, t) - \mu \Delta U(x, t) + \sigma(x) U_t(x, t) + \\ + \int_{-\infty}^t h(x, t - \tau) U_{tt}(x, \tau) d\tau = a \delta(x - z) g(t); \quad x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $U(x, t) = (U_1(x, t), U_2(x, t), U_3(x, t))$  — вектор перемещений точки  $x$ ;  $\sigma(x), h(x, t)$  — диагональные матрицы,

$$\sigma(x) = \operatorname{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x)), \quad h(x, t) = \operatorname{diag}(h_1(x, t), h_2(x, t), h_3(x, t)).$$

Матрица  $\sigma(x)$  характеризует внутреннее поглощение энергии в среде, матричное ядро  $h(x, t)$  описывает наследственные свойства среды. Физический смысл имеют лишь ядра памяти  $h$  с неотрицательными компонентами, удовлетворяющие условию  $h(x, t) = 0, t < 0$ , это условие далее считаем выполненным.

На практике используются две схемы перехода от (1.4) к уравнению (1.3).

1) Можно положить

$$g(t) = e^{-i\omega t}, \quad U(x, t) = u(x)e^{-i\omega t}, \quad \omega > 0,$$

в результате для комплексной амплитуды  $u(x)$  получаем уравнение (1.3) с матричной функцией

$$q(x, \omega) = i\sigma(x) + \omega\tilde{h}(x, \omega). \quad (1.5)$$

Здесь и далее через  $\tilde{H}(\omega)$  обозначаем преобразование Фурье скалярной, векторной или матричной функции  $H = H(t)$ ,

$$\tilde{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} H(t) dt.$$

В этом случае уравнение (1.3) описывает установившиеся гармонические колебания вязкоупругой среды под действием периодической силы, приложенной в точке  $x = z$ .

2) Положим  $g(t) = \delta(t)$  и добавим к (1.4) начальное условие  $U|_{t=0} \equiv 0$ . Пусть решение  $U(x, t)$  полученной задачи Коши и его производные по времени до второго порядка включительно убывают вне источников, так что к этим функциям возможно применение преобразования Фурье по времени, и это преобразование определено, по крайней мере, при  $\omega > 0$ . Выполняя такое преобразование и полагая  $u(x; \omega) = \tilde{U}(x, \omega)$ , приходим к уравнению (1.3) с функцией  $q$  как в (1.5). В этом случае (1.3) описывает эффект мгновенного при  $t = 0$  приложения возбуждающей силы в точке  $x = z$ . Сделанное предположение относительно области определения преобразования Фурье гарантирует возможность предельного перехода при  $\omega \rightarrow 0$ , лежащего в основе конструкции М.М. Лаврентьева.

Система (1.3) рассматривается вместе с условиями излучения на бесконечности (см. [20, гл. III, §2]):

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u^{(p)}(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \frac{\partial u^{(p)}(x)}{\partial |x|} - ik_1 u^{(p)}(x) \right) = 0, \quad (1.6)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u^{(s)}(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \frac{\partial u^{(s)}(x)}{\partial |x|} - ik_2 u^{(s)}(x) \right) = 0. \quad (1.7)$$

Здесь  $u^{(p)} = \nabla \Psi^{(p)}$  и  $u^{(s)} = \text{rot} \Psi^{(s)}$  — однозначно определяемые потенциальная и соленоидальная компоненты векторного поля  $u = u^{(p)} + u^{(s)}$ ,  $\Psi^{(p)}$  и  $\Psi^{(s)}$  — их скалярный и векторный потенциал соответственно. Через

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}; \quad c_1 = \sqrt{\lambda + 2\mu}, \quad c_2 = \sqrt{\mu}$$

обозначаются волновые числа и скорости распространения продольных и поперечных волн в однородной упругой среде, для которой  $q(x, t) \equiv 0$ . В этом контексте прямая задача для уравнения (1.3) заключается в нахождении для заданной матричной функции  $q(x, \omega)$  решения (1.3), удовлетворяющего условиям (1.6), (1.7), с фиксированным  $\omega > 0$ . Константы  $\lambda, \mu$  всюду считаем заданными. Отмеченная выше возможность единообразного охвата в рамках уравнения (1.3) содержательно различных схем возбуждения колебаний мотивирует постановку обратной задачи зондирования в частотной формулировке. В настоящей работе мы будем исследовать следующую обратную задачу для уравнения (1.3).

**Обратная задача (ОЗ).** Считая известными значения решений  $u = u(x; z, \omega)$  задачи (1.3), (1.6), (1.7) для всех  $x \in X, z \in Z, \omega \in (0, \bar{\omega}]$ ,  $\bar{\omega} > 0$ , определить матричную функцию  $q(x, \omega)$  для  $x \in D, \omega \in (0, \bar{\omega}]$ .

Здесь и далее  $X, Z$  — множества локализации точечных детекторов и источников зондирующих упругих волн,  $(X \cup Z) \cap \bar{D} = \emptyset$ . Нас в первую очередь интересует возможность такого выбора  $X, Z$ , при котором ОЗ имела бы единственное решение и была бы непереопределенной в пространственном смысле, так что  $\dim(X) + \dim(Z) = 3$ .

**Замечание 1.** Предположим, что для ядра памяти  $h$  в уравнении (1.4) с константами  $C > 0, \kappa \in (0, 1)$  выполняется условие

$$\|\tilde{h}(x, \omega)\| \leq \frac{C}{\omega^\kappa}, \quad \omega \in (0, \bar{\omega}]. \quad (1.8)$$

Тогда в силу (1.5) решение ОЗ доставляет матрицу  $\sigma(x) = -i \lim_{\omega \rightarrow 0} q(x, \omega)$  и преобразование Фурье

$$\tilde{h}(x, \omega) = \omega^{-1}(q(x, \omega) - i\sigma(x))$$

для  $x \in D$ ,  $\omega \in (0, \overline{\omega}]$ . При соответствующих условиях относительно  $h$  эти данные позволяют реконструировать и исходное ядро памяти  $h(x, t)$ ,  $x \in D$ ,  $t > 0$ . Таким условием является, например, аналитичность матричной функции  $\tilde{h}(x, \omega)$  на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  и в комплексной окрестности точки  $\omega = 0$ , возможно, с разрезом, проведенным из этой точки в бесконечность. В этом случае задание  $\tilde{h}(x, \omega)$  при  $\omega \in (0, \overline{\omega}]$  однозначно определяет  $\tilde{h}(x, \omega)$  для всех  $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , после чего  $h(x, t)$  восстанавливается с помощью обратного преобразования Фурье. В качестве примеров укажем ядра, участвующие в равенствах (2.2), (2.3) ниже. Согласно этим равенствам, условие (1.8) для указанных ядер также выполняется.

Средством исследования поставленной задачи нам послужат уравнения и системы типа М.М. Лаврентьева, получаемые низкочастотным предельным переходом из системы интегральных уравнений, эквивалентных (1.3), (1.6), (1.7). В применении к обратным задачам трехмерной упругости эта техника ранее практически не использовалась. Отметим лишь работу [19], посвященную задаче реконструкции аналитической относительно  $\omega$  матричной функции  $q(x, \omega)$  в (1.3) по данным обратного рассеяния, т.е. в случае  $X = Z$  и  $x = z$ , где  $X$  — область в  $\mathbb{R}^3$ . Очевидно, здесь мы имеем неперопределенную в указанном выше смысле ОЗ. Как установлено в [19], такая постановка приводит к однозначно разрешимой обратной задаче. Новизна нашей постановки заключается в том, что в интересующем нас случае множества источников и детекторов могут не совпадать. Интерес к такой организации зондирования объясняется широко применяемыми на практике схемами томографического исследования неоднородностей, допускающими зондирование этих неоднородностей "на просвет". Кроме того, мы принимаем к рассмотрению и широкий класс неаналитических по  $\omega$  функций  $q(x, \omega)$ , имеющих распространение на практике. В настоящее время имеется также значительный массив результатов по единственности решений коэффициентных обратных задач для систем уравнений упругости во временной постановке (см. [21], [22] и указанные там ссылки). Особенностью этих результатов является пространственная переопределенность рассматриваемых обратных задач (см., например, [22]). Пространственно неперопределенные формулировки задачи восстановления памяти для ядер специальных типов изучаются в [23].

План дальнейшего изложения следующий. Разд. 2 посвящен конкретизации постановки обратной задачи. Разд. 3, также носящий технический характер, посвящен обоснованию редукции обратной задачи к цепочке связанных систем линейных интегральных уравнений типа М.М. Лаврентьева. В разд. 4 при одном дополнительном условии устанавливается однозначная разрешимость полученных систем и тем самым дается частичное решение проблемы единственности в рассматриваемой обратной задаче. Попутно устанавливается однозначная разрешимость некоторого класса уравнений типа М.М. Лаврентьева, аналогичных (1.2).

## 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Вначале уточним условия, налагаемые на компоненты матричной функции  $q$  в (1.3). Наши требования к функции  $q(x, \omega)$  в силу (1.5) определяются видом типичных ядер памяти  $h(x, t)$  в (1.4). Наряду с естественными условиями  $h_j(x, t) \geq 0$ ,  $t \geq 0$  и  $h_j(x, t) = 0$ ,  $t < 0$ , прикладные соображения диктуют требование  $\lim_{t \rightarrow \infty} h_j(x, t) = 0$ ,  $1 \leq j \leq 3$  (см. [24, §2]). Термодинамический анализ процесса деформирования доставляет и некоторые дополнительные ограничения на ядро (см. [24, §18]). Характерными примерами являются ядра Абеля  $h(x, t) = h(x)t_+^{\alpha-1}$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , и их конечные суммы

$$h(x, t) = \sum_{k=1}^N h^{(k)}(x)t_+^{\alpha_k-1}, \quad \alpha_k \in (0, 1), 1 \leq k \leq N, t_+ = \max\{0, t\}, \quad (2.1)$$

имеющие неинтегрируемую особенность в бесконечности, а также экспоненциально убывающие модификации  $h(x, t)e^{-\delta_0 t}$ ,  $\delta_0 > 0$ , таких ядер (см. [15]–[17], [25]). Интегрируемым поведением в бесконечности обладают и многие другие классы ядер: ядра Максвелла–Дебая (см. [24, §4], [25])

$$h(x, t) = \mathcal{H}(t) \sum_{k=1}^N h^{(k)}(x)e^{-\delta_k t}, \quad \delta_k > 0, 1 \leq k \leq N; \quad \mathcal{H}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0, \end{cases}$$

ядра Ю.Н. Работнова и другие конструкции на основе функций Миттаг–Леффлера (см. [24, §4], [25], [26]). Для функций (2.1) имеем

$$\tilde{h}(x, \omega) = \sum_{k=1}^N h^{(k)}(x)e^{i\alpha_k \pi/2} \Gamma(\alpha_k) \omega^{-\alpha_k}. \quad (2.2)$$

Через  $\Gamma(\cdot)$  обозначается  $\Gamma$ -функция Эйлера. В случае экспоненциально убывающего при  $t \rightarrow +\infty$  ядра  $h$  его преобразование Фурье  $\tilde{h}(x, \omega)$  является аналитическим по  $\omega \in \mathbb{R}$ . В частности,

$$\tilde{h}(x, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{(k)}(x) \omega^k, \quad \omega \in \mathbb{C}, |\omega| < \omega_0, \quad (2.3)$$

с достаточно малым  $\omega_0 > 0$ . Из (2.2), (2.3) следует, что соответствующие ядра  $h$  удовлетворяют условиям Замечания 1. Имея в виду (1.5) и представления (2.2), (2.3), введем следующее условие на матрицу  $q$  в (1.3).

**Условие 1.** Имеет место равенство

$$q(x, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{(k)}(x) \omega^{\beta_k}, \quad |\omega| < \omega_0, \quad (2.4)$$

$$\beta_0 = 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots; \quad \beta_{k+1} - \beta_k \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.5)$$

где  $q^{(k)}(x)$  — диагональные матрицы с непрерывными в  $\mathbb{R}^3$  компонентами,  $q^{(k)}(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и ряд сходится равномерно.

В частном случае  $\beta_k = k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , равенство (2.4) означает аналитичность  $q(x, \omega)$  по  $\omega$  в окрестности точки  $\omega = 0$ , именно этот класс матричных функций  $q$  рассматривается в [19]. В то же время условие 1 охватывает и получаемые из (2.2) функции вида

$$q(x, \omega) = i\sigma(x) + \sum_{k=1}^N h^{(k)}(x) e^{i\alpha_k \pi/2} \Gamma(\alpha_k) \omega^{1-\alpha_k},$$

не являющиеся аналитическими в  $\omega = 0$  в силу условия  $\alpha_k \in (0, 1)$ ,  $1 \leq k \leq N$ .

Уравнение (1.3) с условиями излучения (1.6), (1.7) стандартным образом сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений. Обозначим

$$\Delta^* u = (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} u + \mu \Delta u, \quad u = (u_1, u_2, u_3)$$

и запишем фундаментальное решение

$$\Phi^{(r)}(x, y; \omega) = \frac{e^{ik_r|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad k_r = \frac{\omega}{c_r}$$

уравнения Гельмгольца

$$-(\Delta_x + k_r^2)u(x) = \delta(x - y)$$

с условием излучения Зоммерфельда

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left( \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - ik_r u(x) \right) = 0, \quad r = 1, 2.$$

Тогда матричная функция  $\Gamma(x, y; \omega) = (\Gamma_{kj}(x, y; \omega))_{k,j=1}^3$ ,

$$\Gamma_{kj}(x, y; \omega) = \frac{1}{c_2^2} \delta_{kj} \Phi^{(2)}(x, y; \omega) - \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} (\Phi^{(1)}(x, y; \omega) - \Phi^{(2)}(x, y; \omega)), \quad (2.6)$$

$$1 \leq k, j \leq 3,$$

где  $\delta_{kj}$  — символ Кронекера, является решением системы

$$-(\Delta^* + \omega^2)\Gamma(x, y; \omega) = \delta(x - y)E, \quad E = (\delta_{kj})_{k,j=1}^3.$$

При этом строки матрицы  $\Gamma(x, y; \omega)$  при каждом  $y$  удовлетворяют условиям излучения (1.6), (1.7) (см. [20, гл. II, §1; гл. III, §2]). Записанная система понимается как три построчных соотношения между матрицами в левой и правой частях. Пусть  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$  — произвольная обычная локально интегрируемая или обобщенная вектор-функция с компактным носителем. Тогда решение системы

$$-(\Delta^* + \omega^2)u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (2.7)$$

удовлетворяющее условиям (1.6), (1.7), имеет вид

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x, y; \omega) f(y) dy. \quad (2.8)$$

Перепишем уравнение (1.3) в виде

$$-(\Delta^* + \omega^2)u = \omega q(x, \omega)u + a\delta(x - z), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

С учетом (2.7), (2.8) для решения  $u(x) = u(x, z; \omega)$  уравнения (1.3) получаем представление

$$u(x, z; \omega) = \int_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x, y; \omega) (\omega q(y, \omega) u(y, z; \omega) + a\delta(y - z)) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.9)$$

Обозначим через

$$u^{(i)}(x, z; \omega) = \Gamma(x, z; \omega)a \quad (2.10)$$

волновое поле источника в однородной ( $q \equiv 0$ ) среде и представим полное поле  $u$  в виде  $u(x, z; \omega) = u^{(s)}(x, z; \omega) + u^{(i)}(x, z; \omega)$ , где  $u^{(s)}$  есть рассеянное неоднородностью поле. Тогда уравнение (2.9) запишется следующим образом:

$$u^{(s)}(x, z; \omega) = \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) q(y, \omega) (u^{(i)}(y, z; \omega) + u^{(s)}(y, z; \omega)) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.11)$$

Имея в виду разложение (2.4), ниже обратимся к следующей обратной задаче, эквивалентной ОЗ.

**Обратная задача 1 (ОЗ1).** Считая, что значения рассеянного поля  $u^{(s)} = u^{(s)}(x, z; \omega)$ , удовлетворяющего уравнению (2.11), известны для всех  $x \in X$ ,  $z \in Z$ ,  $\omega \in (0, \bar{\omega}]$ ,  $\bar{\omega} > 0$ , матричная функция  $q(x, \omega)$  удовлетворяет условию 1 с заданными показателями  $\beta_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , определить матричные функции  $q^{(k)}(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , для  $x \in D$ .

При анализе ОЗ1 будем использовать системы линейных интегральных уравнений, подобных (1.2).

### 3. СИСТЕМЫ ТИПА М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА

В этом разделе опишем построение цепочки уравнений типа М.М. Лаврентьева для решения ОЗ1. Обратимся к уравнению (2.11) и получим линейные интегральные уравнения относительно матриц  $q^{(k)}$  в разложении (2.4).

Вначале заметим, что для любой непрерывной по  $y$  матричной функции  $q(y, \omega)$  линейный интегральный оператор с ядром  $\Gamma(x, y; \omega)q(y, \omega)$  в (2.11) непрерывен из  $[C(\bar{D})]^3$  в  $[C(\bar{D})]^3$ . Это следует из теорем 2.2, 2.5 [20, гл. IV]. Кроме того,  $u^{(i)}(\cdot, z; \omega) \in [C(\bar{D})]^3$  ввиду (2.6), (2.10) и условия  $Z \cap \bar{D} = \emptyset$ . Поэтому при  $\omega \in \mathbb{R}$  с достаточно малым  $|\omega|$  уравнение (2.11), записанное для  $x \in D$ , имеет единственное решение  $u^{(s)}(\cdot, z; \omega) \in [C(\bar{D})]^3$ , причем

$$|u^{(s)}(x, z; \omega)| = O(\omega), \quad x \in D, z \in Z, \omega \in (0, \omega_0] \quad (3.1)$$

для достаточно малого  $\omega_0 > 0$ . Из (2.11) тогда следует, что компоненты вектор-функции  $u^{(s)}(\cdot, z; \omega)$  принадлежат классу  $C^\infty$  вне  $\bar{D}$ .

Нам понадобятся обозначения

$$\begin{aligned} \Gamma_0(x, y) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \Gamma(x, y; \omega), \quad u_0^{(i)}(x, z) = \lim_{\omega \rightarrow 0} u^{(i)}(x, z; \omega) = \Gamma_0(x, z)a; \\ \alpha &= \frac{1}{8\pi c_1^2}, \quad \beta = \frac{1}{8\pi c_2^2}, \quad \gamma = \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Непосредственное вычисление на основе (2.6) дает

$$(\Gamma_0)_{kj}(x, y) = (\beta + \alpha) \frac{\delta_{kj}}{|x - y|} + (\beta - \alpha) \frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{|x - y|^3}, \quad 1 \leq k, j \leq 3 \quad (3.3)$$

(см. подробнее в [19]).

Вывод цепочки интегральных уравнений для матриц  $q^{(k)}(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , проведем в несколько шагов. В построении будут участвовать также последовательности вспомогательных функций  $\{v_k(x, z; \omega)\}$  с  $x \in D$ ,  $z \in Z$  и  $\{F_k(x, z)\}$  с  $x \in X$ ,  $z \in Z$ .

**Шаг 0.** Полагаем

$$v_0(x, z; \omega) \equiv 0, \quad x \in D, z \in Z,$$

тогда согласно (2.5), (3.1)

$$\begin{aligned} |u^{(s)}(x, z; \omega) - v_0(x, z; \omega)| &= O(\omega) = O(\omega^{1+\beta_0}), \\ x \in D, z \in Z, \omega &\in (0, \omega_0]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Деля обе части (2.11) на  $\omega$  и переходя к пределу при  $\omega \rightarrow 0$ , с учетом (2.4), (3.4) получаем

$$\int_D \Gamma_0(x, y) q^{(0)}(y) u_0^{(i)}(y, z) dy = F_0(x, z), \quad x \in X, z \in Z, \quad (3.5)$$

где

$$F_0(x, z) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^{-1} u^{(s)}(x, z; \omega), \quad x \in X, z \in Z. \quad (3.6)$$

Ясно, что значения  $F_0(x, z)$  полностью определяются данными ОЗ1. В завершение шага 0 положим

$$v_1(x, z; \omega) = \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) q^{(0)}(y) (u^{(i)}(y, z; \omega) + v_0(y, z; \omega)) dy, \quad x \in D. \quad (3.7)$$

Функция  $v_1(x, z; \omega)$  однозначно определяется заданием матрицы  $q^{(0)}(y)$ , которая, в свою очередь, может быть определена из уравнения (3.5). Из (2.11), (3.7) следует, что при  $x \in D, z \in Z$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} u^{(s)}(x, z; \omega) - v_1(x, z; \omega) &= \\ &= \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) q(y, \omega) (u^{(i)}(y, z; \omega) + u^{(s)}(y, z; \omega)) dy - \\ &- \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) q^{(0)}(y) (u^{(i)}(y, z; \omega) + v_0(y, z; \omega)) dy = \\ &= \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) [(q(y, \omega) - q^{(0)}(y)) (u^{(i)}(y, z; \omega) + u^{(s)}(y, z; \omega)) + \\ &+ q^{(0)}(y) (u^{(s)}(y, z; \omega) - v_0(y, z; \omega))] dy. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (2.4), (2.5), (3.4) получаем

$$|u^{(s)}(x, z; \omega) - v_1(x, z; \omega)| = O(\omega^{1+\beta_1}), \quad x \in D, z \in Z, \omega \in (0, \omega_0]. \quad (3.8)$$

**Шаг 1.** Используя (2.4), (2.11), (3.8), запишем равенство

$$\begin{aligned} u^{(s)}(x, z; \omega) &= \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) (q^{(0)}(y) + q^{(1)}(y) \omega^{\beta_1} + O(\omega^{\beta_2})) \times \\ &\times (u^{(i)}(y, z; \omega) + v_1(y, z; \omega) + O(\omega^{1+\beta_1})) dy. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) следует

$$\begin{aligned} \int_D \Gamma_0(x, y) q^{(1)}(y) u_0^{(i)}(y, z) dy &= F_1(x, z), \quad x \in X, z \in Z; \\ F_1(x, z) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^{-(1+\beta_1)} \left[ u^{(s)}(x, z; \omega) - \right. \\ &- \left. \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) q^{(0)}(y) (u^{(i)}(y, z; \omega) + v_1(y, z; \omega)) dy \right], \quad x \in X, z \in Z. \end{aligned}$$

Здесь значения  $F_1(x, z)$  полностью определяются данными ОЗ1 и матричной функцией  $q^{(0)}(y)$ . Для  $x \in D$  положим

$$v_2(x, z; \omega) = \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) (q^{(0)}(y) + q^{(1)}(y) \omega^{\beta_1}) (u^{(i)}(y, z; \omega) + v_1(y, z; \omega)) dy.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & u^{(s)}(x, z; \omega) - v_2(x, z; \omega) = \\
 & = \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) [q(y, \omega)(u^{(i)}(y, z; \omega) + u^{(s)}(y, z; \omega)) - \\
 & - (q^{(0)}(y) + q^{(1)}(y)\omega^{\beta_1})(u^{(i)}(y, z; \omega) + v_1(y, z; \omega))] dy = \\
 & = \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) [(q(y, \omega) - q^{(0)}(y) - q^{(1)}(y)\omega^{\beta_1})(u^{(i)}(y, z; \omega) + u^{(s)}(y, z; \omega)) + \\
 & + (q^{(0)}(y) + q^{(1)}(y)\omega^{\beta_1})(u^{(s)}(y, z; \omega) - v_1(y, z; \omega))] dy.
 \end{aligned}$$

Поэтому на основании (2.4), (2.5), (3.8) выполняется

$$|u^{(s)}(x, z; \omega) - v_2(x, z; \omega)| = O(\omega^{1+\beta_2}), \quad x \in D, z \in Z, \omega \in (0, \omega_0].$$

Продолжая аналогично, перед шагом  $m$  имеем функцию

$$v_m(x, z; \omega) = \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) \left( \sum_{k=0}^{m-1} q^{(k)}(y)\omega^{\beta_k} \right) (u^{(i)}(y, z; \omega) + v_{m-1}(y, z; \omega)) dy,$$

такую что

$$|u^{(s)}(x, z; \omega) - v_m(x, z; \omega)| = O(\omega^{1+\beta_m}), \quad x \in D, z \in Z, \omega \in (0, \omega_0]. \quad (3.10)$$

**Шаг  $m$ .** Используя (2.4), (2.11), (3.10), запишем равенство

$$\begin{aligned}
 u^{(s)}(x, z; \omega) & = \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) \left( \sum_{k=0}^{m-1} q^{(k)}(y)\omega^{\beta_k} + q^{(m)}(y)\omega^{\beta_m} + O(\omega^{\beta_{m+1}}) \right) \times \\
 & \times (u^{(i)}(y, z; \omega) + v_m(y, z; \omega) + O(\omega^{1+\beta_m})) dy.
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из (3.11) получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_D \Gamma_0(x, y) q^{(m)}(y) u_0^{(i)}(y, z) dy = F_m(x, z), \quad x \in X, z \in Z; \\
 & F_m(x, z) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^{-(1+\beta_m)} \left[ u^{(s)}(x, z; \omega) - \right. \\
 & \left. - \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) \left( \sum_{k=0}^{m-1} q^{(k)}(y)\omega^{\beta_k} \right) (u^{(i)}(y, z; \omega) + v_m(y, z; \omega)) dy \right], \\
 & x \in X, z \in Z.
 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Для перехода к следующему шагу при  $x \in D$  определяем функцию

$$v_{m+1}(x, z; \omega) = \omega \int_D \Gamma(x, y; \omega) \left( \sum_{k=0}^m q^{(k)}(y)\omega^{\beta_k} \right) (u^{(i)}(y, z; \omega) + v_m(y, z; \omega)) dy,$$

для которой, как и выше, устанавливается оценка

$$|u^{(s)}(x, z; \omega) - v_{m+1}(x, z; \omega)| = O(\omega^{1+\beta_{m+1}}), \quad x \in D, z \in Z, \omega \in (0, \omega_0].$$

Подведем итог проведенным рассуждениям.

**Теорема 2.** Матричные функции  $q^{(k)}(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , в разложении (2.4) удовлетворяют цепочке систем линейных интегральных уравнений (3.12) с  $m = 0, 1, \dots$ . При  $m = 0$  правая часть в уравнении (3.12) определяется данными ОЗ1, а при  $m \geq 1$  — данными ОЗ1 и матричными функциями  $q^{(k)}(x)$ ,  $0 \leq k \leq m-1$ .

Системы (3.12) с учетом способа их вывода естественно назвать системами типа М.М. Лаврентьева. Из теоремы 2 следует, что если каждое уравнение (3.12) имеет не более одного решения, то все матричные функции  $q^{(k)}(x)$  последовательно определяются из этих уравнений, что и дает решение ОЗ1. Важно, что уравнения (3.12)

отличаются лишь своими правыми частями. Поэтому вопрос о единственности их решений сводится к установлению того, что однородная система интегральных уравнений

$$\int_D \Gamma_0(x, y) q(y) u_0^{(i)}(y, z) dy = 0, \quad x \in X, z \in Z, \quad (3.13)$$

имеет в классе диагональных матриц  $q(y)$  с непрерывными элементами лишь тривиальное решение  $q \equiv 0$ . В следующем разделе обратимся к анализу системы (3.13).

#### 4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В дальнейшем для определенности примем  $a = (1, 0, 0)$ .

Согласно (3.2) и (3.3), в этом случае

$$u_0^{(i)}(y, z) = (\eta_1(y, z), \eta_2(y, z), \eta_3(y, z)), \quad y \in D, z \in Z, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_1(y, z) &= (\beta - \alpha) \left( \frac{\gamma}{|y - z|} + \frac{(y_1 - z_1)^2}{|y - z|^3} \right), \\ \eta_2(y, z) &= (\beta - \alpha) \frac{(y_2 - z_2)(y_1 - z_1)}{|y - z|^3}, \\ \eta_3(y, z) &= (\beta - \alpha) \frac{(y_3 - z_3)(y_1 - z_1)}{|y - z|^3}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Обозначим

$$g_k(y, z) = \eta_k(y, z) q_k(y), \quad 1 \leq k \leq 3. \quad (4.3)$$

Используя (4.1)–(4.3), представим систему (3.13) в виде

$$\begin{aligned} \int_D \left[ \left( \frac{\gamma}{|x - y|} + \frac{(x_1 - y_1)^2}{|x - y|^3} \right) g_1 + \frac{(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)}{|x - y|^3} g_2 + \frac{(x_1 - y_1)(x_3 - y_3)}{|x - y|^3} g_3 \right] dy &= 0, \\ \int_D \left[ \frac{(x_2 - y_2)(x_1 - y_1)}{|x - y|^3} g_1 + \left( \frac{\gamma}{|x - y|} + \frac{(x_2 - y_2)^2}{|x - y|^3} \right) g_2 + \frac{(x_2 - y_2)(x_3 - y_3)}{|x - y|^3} g_3 \right] dy &= 0, \\ \int_D \left[ \frac{(x_3 - y_3)(x_1 - y_1)}{|x - y|^3} g_1 + \frac{(x_3 - y_3)(x_2 - y_2)}{|x - y|^3} g_2 + \left( \frac{\gamma}{|x - y|} + \frac{(x_3 - y_3)^2}{|x - y|^3} \right) g_3 \right] dy &= 0; \\ x \in X, \quad z \in Z. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Необходимо установить, что следствием (4.2)–(4.4) является равенство  $q_1(y) = q_2(y) = q_3(y) = 0$ ,  $y \in D$ . Ниже будет дано частичное решение этой задачи. Прежде всего уточним конструкцию множеств детекторов и источников  $X$  и  $Z$ .

**Условие 2.** 1) Множество  $X = S_1 \cup S_2$ , где  $S_1$  — сфера,  $S_2$  — кусочно-гладкая замкнутая поверхность,  $S_2 \setminus S_1$  плотно в  $S_2$ , и замкнутые области, ограниченные поверхностями  $S_1, S_2$ , не пересекаются с  $\bar{D}$ .

2) Множество  $Z$  есть открытый интервал на прямой

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3 = 0\}$$

и при этом  $\mathcal{L} \cap \bar{D} = \emptyset$ .

Такой выбор  $X, Z$  приводит к пространственно непероопределенным постановкам ОЗ, ОЗ1, поскольку  $\dim(X) + \dim(Z) = 3$ .

**Лемма 1.** Пусть выполняется условие 2 и (4.4). Тогда равенства (4.4) имеют место для всех точек  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$  и  $z \in \mathcal{L}$ .

**Доказательство.** Обозначим через  $V_k(x, z)$  функцию, определенную при  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ,  $z \in \mathcal{L}$  выражением в левой части  $k$ -го равенства в (4.4) с учетом обозначений (4.2), (4.3),  $1 \leq k \leq 3$ . Нетрудно видеть, что эти функции вещественно аналитичны по  $x$  и по  $z$  вне  $\bar{D}$ . В частности, аналитичны сужения функций  $V_k(x, \cdot)$  на прямую  $\mathcal{L}$ .

Поскольку при каждом  $x \in X$  эти сужения обращаются в нуль на открытом подмножестве в  $\mathcal{L}$ , мы получаем  $V_k(x, z) = 0$  для всех  $x \in X, z \in \mathcal{L}, 1 \leq k \leq 3$  (см. [27, гл. I, §1]). Остается показать, что эти равенства имеют место не только для точек  $x \in X$ , но и для любых  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ .

Определим функции

$$\varphi_{kj}(x) = \frac{(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{|x - y|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}, y \in D, 1 \leq k, j \leq 3.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{|x - y|} \right) = -\frac{x_j - y_j}{|x - y|^3}, \quad 1 \leq j \leq 3, \quad (4.5)$$

мы имеем

$$\varphi_{kj}(x, y) = -(x_k - y_k) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{|x - y|} \right).$$

Вычисляя  $\Delta_x \varphi_{kj}(x, y)$ , с использованием формулы

$$\Delta(uv) = u\Delta v + 2(\nabla u, \nabla v) + v\Delta u$$

и тождества

$$\Delta_x \left( \frac{1}{|x - y|} \right) = 0, \quad x \neq y, \quad (4.6)$$

получаем

$$\Delta_x \varphi_{kj}(x, y) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \left( \frac{1}{|x - y|} \right). \quad (4.7)$$

Из (4.6) и (4.7) следует

$$\Delta_x^2 \varphi_{kj}(x, y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}, y \in D, 1 \leq k, j \leq 3. \quad (4.8)$$

Слагаемые под знаками интегралов в (4.4) зависят от  $x$  посредством множителей  $\gamma|x - y|^{-1}$ , либо  $\varphi_{kj}(x, y)$ ,  $1 \leq k, j \leq 3$ . Поэтому из (4.6), (4.8) следует

$$\Delta_x^2 V_k(x, z) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}.$$

Тем самым  $V_k(\cdot, z)$ ,  $1 \leq k \leq 3$ , — бигармонические вне  $\overline{D}$  функции, обращающиеся в нуль на  $X$ . Часть 1) условия 2 и теорема единственности для полигармонических функций (см. [28], [29]) дают

$$V_k(x, z) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}, z \in \mathcal{L}, 1 \leq k \leq 3.$$

Лемма доказана.

Заметим далее, что

$$\frac{(x_j - y_j)^2}{|x - y|^3} = \frac{1}{|x - y|} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{x_j - y_j}{|x - y|} \right), \quad 1 \leq j \leq 3. \quad (4.9)$$

С использованием (4.9) перепишем первое из уравнений (4.4) в виде

$$\int_D \left[ \left( \frac{\gamma + 1}{|x - y|} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{x_1 - y_1}{|x - y|} \right) \right) g_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{x_2 - y_2}{|x - y|} \right) g_2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{x_3 - y_3}{|x - y|} \right) g_3 \right] dy = 0.$$

Следовательно,

$$(\gamma + 1) \int_D \frac{g_1 dy}{|x - y|} = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_D \left( \frac{x_1 - y_1}{|x - y|} g_1 + \frac{x_2 - y_2}{|x - y|} g_2 + \frac{x_3 - y_3}{|x - y|} g_3 \right) dy. \quad (4.10)$$

Аналогично второе и третье уравнения в (4.4) дают

$$(\gamma + 1) \int_D \frac{g_2 dy}{|x - y|} = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_D \left( \frac{x_1 - y_1}{|x - y|} g_1 + \frac{x_2 - y_2}{|x - y|} g_2 + \frac{x_3 - y_3}{|x - y|} g_3 \right) dy, \quad (4.11)$$

$$(\gamma + 1) \int_D \frac{g_3 dy}{|x - y|} = \frac{\partial}{\partial x_3} \int_D \left( \frac{x_1 - y_1}{|x - y|} g_1 + \frac{x_2 - y_2}{|x - y|} g_2 + \frac{x_3 - y_3}{|x - y|} g_3 \right) dy. \quad (4.12)$$

Равенства (4.10)–(4.12) имеют место для всех точек  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ . Мы видим, что

$$\left( \int_D \frac{g_1 dy}{|x-y|}, \int_D \frac{g_2 dy}{|x-y|}, \int_D \frac{g_3 dy}{|x-y|} \right) = \nabla_x W(x),$$

где

$$W(x) = \frac{1}{\gamma+1} \int_D \left( \frac{x_1-y_1}{|x-y|} g_1 + \frac{x_2-y_2}{|x-y|} g_2 + \frac{x_3-y_3}{|x-y|} g_3 \right) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}.$$

Следовательно, при  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ ,  $z \in \mathcal{L}$  справедливы равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \int_D \frac{g_1 dy}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_D \frac{g_2 dy}{|x-y|}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \int_D \frac{g_1 dy}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_D \frac{g_3 dy}{|x-y|}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \int_D \frac{g_2 dy}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial x_2} \int_D \frac{g_3 dy}{|x-y|}. \quad (4.15)$$

Используем (4.13)–(4.15) для получения следующего промежуточного результата.

**Теорема 3.** Пусть выполняются условие 2 и равенства (4.4).

1) Предположим, что  $q_3 \equiv 0$  ( $q_2 \equiv 0$ ), тогда  $q_2 \equiv 0$  ( $q_3 \equiv 0$ ).

2) Пусть  $q_1 \equiv 0$ . Тогда  $q_2 = q_3 \equiv 0$ .

**Доказательство.** 1) Пусть  $q_3 \equiv 0$ . Покажем, что тогда  $q_2 \equiv 0$ . Из (4.2), (4.3), (4.15) следует, что при  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ ,  $z \in \mathcal{L}$  выполняется

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \int_D \frac{(y_2 - z_2)(y_1 - z_1)q_2(y)dy}{|x-y||y-z|^3} = 0. \quad (4.16)$$

Следовательно, функция под знаком производной в (4.16) не зависит от  $x_3$  вне  $D$ . Поскольку подынтегральное выражение в (4.16) стремится к нулю при  $x_3 \rightarrow \infty$ , мы с учетом определения  $\mathcal{L}$  получаем

$$\int_D \frac{(y_1 - z_1)y_2 q_2(y)dy}{|x-y||y-z|^3} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}, z \in \mathcal{L}.$$

Согласно (4.5), при указанных  $x, z$  выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial z_1} \int_D \frac{y_2 q_2(y)dy}{|x-y||y-z|} = 0. \quad (4.17)$$

Таким образом, функция  $V(z)$ , стоящая под знаком производной в (4.17), постоянна на прямой  $\mathcal{L}$ . В то же время для этой функции мы, очевидно, имеем

$$\lim_{z \in \mathcal{L}, z \rightarrow \infty} V(z) = \lim_{z_1 \rightarrow \infty} V(z_1, 0, 0) = 0.$$

Следовательно,  $V \equiv 0$  на  $\mathcal{L}$  и потому

$$\int_D \frac{y_2 q_2(y)dy}{|x-y||y-z|} = 0.$$

Ссылка на теорему 1 завершает доказательство утверждения. Вторая часть п. 1) доказывается аналогично с заменой  $q_2$  на  $q_3$ . Доказательство п. 2) проводится по той же схеме с заменой в начале рассуждений равенства (4.15) на (4.13) и (4.14). Теорема доказана.

Пусть теперь априори известно, что  $q_2 \equiv 0$ , либо  $q_3 \equiv 0$ . Тогда, используя (4.2), (4.3), а также (4.13) или (4.14), для функции  $q_1$ , как и выше, получаем уравнение

$$\int_D \left( \frac{\gamma}{|y-z|} + \frac{(z_1 - y_1)^2}{|y-z|^3} \right) \frac{q_1(y)dy}{|x-y|} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}, z \in \mathcal{L}. \quad (4.18)$$

Уравнение типа М.М. Лаврентьева (4.18) напоминает исходное уравнение (1.2) и исследуется по схеме, развитой ранее в [12]. В следующей теореме мы несколько обобщим указанную схему с целью включения в нее наряду с (4.18) и некоторых других аналогичных уравнений.

Обозначим  $y' = (y_2, y_3) \in \mathbb{R}^2$ . Пусть непрерывная функция  $\Lambda = \Lambda(y_1, |y'|)$  определена при  $y \neq 0$  и  $\lim_{y \rightarrow \infty} \Lambda(y) = 0$ . Рассмотрим однородное интегральное уравнение

$$\int_D \Lambda(z_1 - y_1, |y'|) \frac{\eta(y) dy}{|x - y|} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}, z \in \mathcal{L}, \quad (4.19)$$

относительно функции  $\eta \in L_2(D)$ .

**Теорема 4.** *Предположим, что преобразование Фурье  $\tilde{\Lambda}(\mu, |y'|)$  функции  $\Lambda(y_1, |y'|)$  по переменной  $y_1$  имеет вид*

$$\tilde{\Lambda}(\mu, |y'|) = M(\mu |y'|),$$

*функция  $M(\zeta)$  аналитична в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Тогда единственным решением уравнения (4.19) является функция  $\eta = 0$  почти всюду в  $D$ .*

В теореме 4 функция  $M$  может быть многозначной, в этом случае рассматривается ее однозначная ветвь в  $\mathbb{C}$  с подходящим разрезом из  $\zeta = 0$  в  $\zeta = \infty$ , получаемая аналитическим продолжением  $M$  с положительной вещественной полуоси  $\mathbb{R}_+$ . Нам будет удобно считать этот разрез идущим вдоль положительной мнимой полуоси  $i\mathbb{R}_+$ .

**Следствие 1.** Единственным непрерывным решением уравнения (4.18) является функция  $q_1 \equiv 0$ .

Для доказательства следствия 1 заметим, что в (4.18)

$$\Lambda(z_1 - y_1, |y'|) = \frac{\gamma + 1}{((z_1 - y_1)^2 + |y'|^2)^{1/2}} - \frac{|y'|^2}{((z_1 - y_1)^2 + |y'|^2)^{3/2}}.$$

Вычисляя преобразование Фурье функции

$$\Lambda(y_1, |y'|) = \frac{\gamma + 1}{(y_1^2 + |y'|^2)^{1/2}} - \frac{|y'|^2}{(y_1^2 + |y'|^2)^{3/2}}$$

по переменной  $y_1$  (см. [30, с. 167]), получаем

$$\tilde{\Lambda}(\mu, |y'|) = M_0(\mu |y'|), \quad M_0(\zeta) = 2(\gamma + 1)K_0(\zeta) - 2\zeta K_1(\zeta).$$

Здесь  $K_0(\zeta)$ ,  $K_1(\zeta)$  — модифицированные функции Бесселя, аналитические в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  и имеющие  $\zeta = 0$  точкой ветвления логарифмического типа. Их однозначные ветви фиксируются значениями при вещественных  $\zeta > 0$  и разрезом комплексной плоскости вдоль полуоси  $i\mathbb{R}_+$ .

**Замечание 2.** Вычисляя обратное преобразование Фурье от  $M(\mu |y'|)$ , нетрудно показать, что функция  $\Lambda$  в теореме 4 необходимо имеет вид

$$\tilde{\Lambda}(y_1, |y'|) = \frac{1}{|y'|} \Psi\left(\frac{y_1}{|y'|}\right), \quad \Psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau t} M(\tau) d\tau.$$

Для  $\Lambda$  из уравнения (4.18) мы имеем  $\Psi(t) = (\gamma + 1)(t^2 + 1)^{-1/2} - (t^2 + 1)^{-3/2}$ .

**Доказательство Теоремы 4.** Доказательство следует схеме рассуждений из [12]. Поскольку семейство  $\{|x - y|^{-1}\}_{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}}$  плотно в смысле  $L_2(D)$  в классе всех функций, гармонических в  $D$ , достаточно убедиться, что если равенство

$$\int_D \Lambda(z_1 - y_1, |y'|) h(y) \eta(y) dy = 0 \quad (4.20)$$

с  $\eta \in L_2(D)$  выполняется для всех  $z_1 \in \mathbb{R}$  и для всех функций  $h \in C^2(D)$ , таких что  $\Delta h(y) = 0$ ,  $y \in D$ , то  $\eta = 0$  п.в. в  $D$ . Положим в (4.20)

$$h(y) = e^{-i(\lambda', y') + |\lambda'| y_1}, \quad \lambda' \in \mathbb{R}^2,$$

тогда будем иметь

$$\int_D \Lambda(z_1 - y_1, |y'|) e^{-i(\lambda', y') + |\lambda'| y_1} \eta(y) dy = 0, \quad z_1 \in \mathbb{R}, \quad \lambda' \in \mathbb{R}^2. \quad (4.21)$$

Применяя к (4.21) преобразование Фурье по переменной  $z_1$ , с учетом равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu z_1} \Lambda(z_1 - y_1, |y'|) dz_1 = e^{-i\mu y_1} M(\mu |y'|), \quad \mu \neq 0,$$

получаем

$$\int_D \eta(y_1, y') e^{-i(\lambda', y') + (|\lambda'| - i\mu)y_1} M(\mu |y'|) dy_1 dy' = 0, \quad \lambda' \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.22)$$

При каждом  $\lambda' \in \mathbb{R}^2$  функция в левой части (4.22) аналитична по  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Поэтому равенство (4.22) по аналитичности продолжается на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль луча  $i\mathbb{R}_+$ . Полагая  $\mu = p - |\lambda'|i$ ,  $p \neq 0$  в (4.22), получаем

$$\int_D \eta(y_1, y') e^{-ip y_1} e^{-i(\lambda', y')} M((p - |\lambda'|i)|y'|) dy_1 dy' = 0, \quad \lambda' \in \mathbb{R}^2, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.23)$$

Нетрудно видеть, что  $\zeta = (p - |\lambda'|i)|y'| \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}_+$  при всех  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\lambda', y' \in \mathbb{R}^2$ .

Обозначим  $Y_{0,1}(\theta) = 1$ ,  $Y_{k,1}(\theta) = \cos k\theta$ ,  $Y_{k,2}(\theta) = \sin k\theta$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Зафиксируем финитную на  $\mathbb{R}_+$  функцию  $\chi = \chi(r)$ ,  $r \geq 0$ , и функцию  $Y_{k,l}$  для произвольных  $k \geq 0$  и  $l \in \{1, 2\}$ . Умножим обе части равенства (4.23) на  $\chi(|\lambda'|)Y_{k,l}(\theta)$ , где  $\theta = \theta(\lambda')$ ,  $\lambda'/|\lambda'| = (\cos \theta, \sin \theta)$ , и проинтегрируем результат по  $\mathbb{R}^2 = \{\lambda'\}$ , считая функцию  $\eta$  продолженной нулем вне  $D$ . Мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \eta(y_1, y') e^{-ip y_1} \left( \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\lambda', y')} M((p - |\lambda'|i)|y'|) \chi(|\lambda'|) Y_{k,l}(\theta) d\lambda' \right) dy' dy_1 = 0. \quad (4.24)$$

Согласно теореме 3.10 в [31, гл. IV],

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(\lambda', y')} M((p - |\lambda'|i)|y'|) \chi(|\lambda'|) Y_{k,l}(\theta) d\lambda' = 2\pi(-i)^k Y_{k,l}(\varphi) \int_0^{\infty} J_k(r\rho) M((p - ir)\rho) \chi(r) r dr, \quad (4.25)$$

где  $\varphi = \varphi(y')$ ,  $y'/|y'| = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ ,  $\rho = |y'|$ ,  $J_k$  есть функция Бесселя порядка  $k$ . Выбирая в (4.24) в качестве  $\chi$  элемент последовательности финитных функций  $\{\chi_n(r)\}$ , сходящейся к  $\delta(r - t)$ ,  $t > 0$ , и переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , из (4.24), (4.25) получаем

$$\int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} \eta(y_1, y'(\rho, \varphi)) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi \right) e^{-ip y_1} dy_1 \right) J_k(t\rho) M((p - it)\rho) d\rho = 0, \quad (4.26)$$

$$t \geq 0, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k \geq 0, \quad l \in \{1, 2\}.$$

Здесь  $y'(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ .

Обозначим

$$G_{k,l}(\rho, y_1) = \int_0^{2\pi} \eta(y_1, y'(\rho, \varphi)) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi, \quad f_{p,k,l}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) e^{-ip y_1} dy_1.$$

Из (4.26) следует равенство

$$\int_0^{\infty} J_k(t\rho) M((p - it)\rho) f_{p,k,l}(\rho) d\rho = 0, \quad t \geq 0, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k \geq 0, \quad l \in \{1, 2\}. \quad (4.27)$$

Имеем

$$f_{p,k,l}(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ip)^j}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^j dy_1. \quad (4.28)$$

Для фиксированных номеров  $k, l$  возможны два случая.

1) При всех  $j = 0, 1, \dots$  справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^j dy_1 = 0 \quad (4.29)$$

для п.в.  $\rho \geq 0$ . Таким образом,  $f_{p,k,l}(\rho) = 0$  п.в. для всех  $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

2) Найдется номер  $m \geq 0$  такой, что  $\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^j dy_1 = 0$  для п.в.  $\rho \geq 0$  и всех  $0 \leq j < m$ , но функция  $\int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^m dy_1$  отлична от нуля на множестве положительной меры.

В случае 1) из (4.29) и теоремы Мюнца (см. [32, с. 54]) следует, что для п.в.  $\rho \geq 0, y_1 \in \mathbb{R}$  выполняется

$$G_{k,l}(\rho, y_1) \equiv \int_0^{2\pi} \eta(y_1, y'(\rho, \varphi)) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi = 0. \quad (4.30)$$

Рассмотрим подробнее случай 2). В этом случае, согласно (4.28), при  $p \rightarrow 0+$  справедливо

$$f_{p,k,l}(\rho) = \frac{(-ip)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^m dy_1 + O(p^{m+1}). \quad (4.31)$$

Поэтому при малых  $p > 0$  имеет место

$$\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = \frac{p^m}{m!} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, y_1) y_1^m dy_1 \right\|_{L_2(0,\infty)} + O(p^{m+1}). \quad (4.32)$$

Из (4.32) следует, что если  $\varepsilon > 0$  достаточно мало, то при  $0 < p \leq \varepsilon$  выполняется  $\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} > 0$ .

Положим

$$f_{p,k,l}^{(0)}(\rho) = \frac{f_{p,k,l}(\rho)}{\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)}}, \quad \rho \geq 0, \quad 0 < p \leq \varepsilon.$$

Используя (4.31) и (4.32), получаем

$$f_{p,k,l}^{(0)}(\rho) = \left( \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, y_1) y_1^m dy_1 \right\|_{L_2(0,\infty)} + O(p) \right)^{-1} \left( (-i)^m \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^m dy_1 + O(p) \right).$$

Таким образом,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|f_{p,k,l}^{(0)} - g_{k,l}^{(0)}\|_{L_2(0,\infty)} = 0, \quad (4.33)$$

где

$$g_{k,l}^{(0)}(\rho) = (-i)^m \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, y_1) y_1^m dy_1 \right\|_{L_2(0,\infty)}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^m dy_1.$$

Ясно, что

$$\|g_{k,l}^{(0)}\|_{L_2(0,\infty)} = 1. \quad (4.34)$$

Согласно (4.27), для выбранных номеров  $k, l$  выполняется

$$\int_0^{\infty} J_k(t\rho) M((p-it)\rho) f_{p,k,l}^{(0)}(\rho) d\rho = 0, \quad t \geq 0, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.35)$$

Переходя в (4.35) к пределу при  $p \rightarrow 0+$ , с учетом (4.33) получаем

$$\int_0^{\infty} J_k(t\rho) M(-it\rho) g_{k,l}^{(0)}(\rho) d\rho = 0, \quad t > 0. \quad (4.36)$$

Отсюда следует, что  $g_{k,l}^{(0)} = 0$  п.в. на  $\mathbb{R}$ . Действительно, умножая обе части (4.36) на  $t^{-s}$ ,  $s > 0$ , и интегрируя, находим

$$\int_0^\infty g_{k,l}^{(0)}(\rho) \left( \int_0^\infty t^{-s} J_k(t\rho) M(-it\rho) dt \right) d\rho = \int_0^\infty \rho^{s-1} g_{k,l}^{(0)}(\rho) d\rho \cdot \int_0^\infty \tau^{-s} J_k(\tau) M(-i\tau) d\tau = 0.$$

Это дает

$$\int_0^\infty \rho^{s-1} g_{k,l}^{(0)}(\rho) d\rho = 0, \quad s > 0. \quad (4.37)$$

Из (4.37) и теоремы об обращении преобразования Меллина (см. [30, с. 73]) следует  $g_{k,l}^{(0)} = 0$  п.в. на  $\mathbb{R}$ . Полученное равенство противоречит (4.34). Тем самым показано, что случай 2) невозможен ни при каких  $k, l$ .

Таким образом, реализуется случай 1), поэтому в силу (4.30) имеем

$$\int_0^{2\pi} \eta(y_1, y'(\rho, \varphi)) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi = 0$$

для всех  $k \geq 0$ ,  $l \in \{1, 2\}$  и для п.в.  $\rho \geq 0$ ,  $y_1 \in \mathbb{R}$ . Поскольку тригонометрическая система  $\{Y_{k,l}(\varphi)\}$  образует ортонормированный базис в  $L_2(0, 2\pi)$ , отсюда следует, что  $\eta(y_1, y'(\rho, \varphi)) = 0$  для п.в.  $\rho \geq 0$ ,  $y_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Теорема доказана.

Объединяя теорему 3 и следствие 1, получаем следующий основной результат настоящей работы.

**Теорема 5.** Пусть выполняется условие 2. Предположим, что в системе (3.13) одна из функций  $q_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , тождественно равна нулю. Тогда остальные две функции также нулевые.

Если в теореме 5 условие равенства нулю заменить требованием определенной согласованности  $q_2$  и  $q_3$ , то имеет место однозначная разрешимость (3.13).

**Теорема 6.** Пусть выполняется условие 2. Предположим, что

$$x_2 q_2(x) = x_3 q_3(x), \quad x \in D. \quad (4.38)$$

Тогда  $q_1 = q_2 = q_3 \equiv 0$  в  $D$ .

**Доказательство.** Из (4.13), (4.14), с учетом (4.2), (4.3) для  $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ ,  $z \in \mathcal{L}$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_D \frac{g_1 dy}{|x-y|} &= (\beta - \alpha) \frac{\partial}{\partial x_1} \int_D \frac{(y_2 - z_2)(y_1 - z_1) q_2(y) dy}{|x-y||y-z|^3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \int_D \frac{g_1 dy}{|x-y|} &= (\beta - \alpha) \frac{\partial}{\partial x_1} \int_D \frac{(y_3 - z_3)(y_1 - z_1) q_3(y) dy}{|x-y||y-z|^3}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.38) следует, что при указанных  $x, z$  выполняется

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \int_D \frac{g_1 dy}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial x_3} \int_D \frac{g_1 dy}{|x-y|}.$$

Поэтому для функции

$$\Theta(x) = \int_D \frac{g_1 dy}{|x-y|} \quad (4.39)$$

имеет место

$$\frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_3}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}.$$

Решая обычным образом последнее уравнение (см. [33, гл. 5, §2]), заключаем, что  $\Theta(x) = \Xi(x_1, x_2 + x_3)$ . Как видно из (4.39),

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Theta(x_1, \tau, t - \tau) = \Xi(x_1, t) = 0$$

для любых  $x_1, t$ , поэтому  $\Xi \equiv 0$  вне  $\overline{D}$ . Из (4.39), (4.2), (4.3) теперь следует (4.18). Используя следствие 1 и теорему 5, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Теорема 5 утверждает, что если в каждой матрице  $q^{(k)}(x)$  в ОЗ1 априори известен хотя бы один элемент  $q_j^{(k)}(x)$ , где  $j$  может зависеть от  $k$ , то вся последовательность  $q^{(k)}(x)$  однозначно восстанавливается по данным ОЗ1. Элементы этой последовательности определяются из систем (3.12), каждая из которых имеет единственное решение. В частности, справедлива следующая теорема.

**Теорема 7.** Пусть выполняются условия 1, 2. Предположим, что в ОЗ известна одна из компонент  $q_j(x, \omega)$  матрицы  $q(x, \omega)$ ,  $1 \leq j \leq 3$ . Тогда  $q(x, \omega)$  однозначно реконструируется по данным ОЗ.

В применении к уравнению (1.4) это означает, что в условиях замечания 1 все элементы матриц  $\sigma(x)$ ,  $h(x, t)$  однозначно реконструируются, если априори известны их элементы  $\sigma_k(x)$  и  $h_l(x, t)$  для некоторых  $1 \leq k, l \leq 3$ . С прикладной точки зрения условия теоремы 7 описывают зондирование анизотропной среды, свойства которой известны вдоль одного из координатных направлений. Утверждается, что данных зондирования в рамках рассматриваемой в работе схемы достаточно для реконструкции этих свойств вдоль двух других направлений координат. Согласно теореме 6, при выполнении условия

$$x_2\sigma_2(x) = x_3\sigma_3(x), \quad x_2h_2(x, t) = x_3h_3(x, t), \quad x \in D, t \geq 0, k \geq 1,$$

все элементы матриц  $\sigma(x)$ ,  $h(x, t)$  однозначно реконструируются по данным ОЗ.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. № 3. С. 520–521.
2. Лаврентьев М.М. Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. № 1. С. 32–35.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
4. Рамм А.Г. Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.
5. Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю. Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 47. № 3. С. 1201–1209.
6. Кокурин М.Ю., Паймеров С.К. Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 1. С. 117–128.
7. Klivanov M.V., Li J., Zhang W. Linear Lavrent'ev integral equation for the numerical solution of a nonlinear coefficient inverse problem // SIAM J. Appl. Math. 2021. V. 81. № 5. P. 1954–1978.
8. Козлов А.И., Кокурин М.Ю. Об интегральных уравнениях типа М.М.Лаврентьева в коэффициентных обратных задачах для волновых уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 9. С. 1492–1507.
9. Кокурин М.Ю., Ключев В.В. Условия единственности и численная аппроксимация решения интегрального уравнения М.М. Лаврентьева // Сиб. журн. вычисл. матем. 2022. Т. 25. № 4. С. 435–451.
10. Бакушинский А.Б., Леонов А.С. Экономичный численный метод решения коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения в трехмерном пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 561–574.
11. Бакушинский А.Б., Леонов А.С. Численное решение трехмерной коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения с интегральными данными в цилиндрической области // Сиб. журн. вычисл. матем. 2019. Т. 22. № 4. P. 381–397.
12. Кокурин М.Ю. О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования // Матем. заметки. 2018. Т. 104. № 5. С. 708–716.
13. Кокурин М.Ю. Полнота асимметричных произведений решений эллиптического уравнения второго порядка и единственность решения обратной задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 255–264.
14. Кокурин М.Ю. Полнота асимметричных произведений гармонических функций и единственность решения уравнения М.М. Лаврентьева в обратных задачах волнового зондирования // Изв. РАН. Сер. Матем. 2022. Т. 86. № 6. С. 101–122.

15. *Локишин А.А.* Волновые уравнения с сингулярно запаздывающим временем // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 1. С. 43–46.
16. *Hanyga A., Seredynska M.* Some effects of the memory kernel singularity on wave propagation and inversion in poroelastic media – I. Forward problems // Geophys. J. Inter. 1999. V. 137. P. 319–335.
17. *Ribodetti A., Hanyga A.* Some effects of the memory kernel singularity on wave propagation and inversion in poroelastic media – II. Inversion // Geophys. J. Inter. 2004. V. 158. P. 426–442.
18. *Hanyga A.* Wave propagation in media with singular memory // Math. and Comput. Model. 2001. V. 34. P. 1399–1421.
19. *Бухгейм А.Л., Дятлов Г.В., Кардаков В.Б., Танцеров Е.В.* Единственность в одной обратной задаче для системы уравнений упругости // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45. № 4. С. 747–757.
20. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.
21. *Яхно В.Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990.
22. *Романов В.Г.* Об определении коэффициентов в уравнениях вязкоупругости // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55. № 3. С. 617–626.
23. *Durdiev D.K., Totieva Z.D.* Kernel determination problems in hyperbolic integro–differential equations. Singapore: Springer, 2023.
24. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
25. *Ciambella J., Paolone A., Vidoli S.* Memory decay rates of viscoelastic solids: not too slow, but not too fast either // Rheologica Acta. 2011. V. 50. P. 661–674.
26. *Metzler R., Nonnenmacher T.F.* Fractional relaxation processes and fractional rheological models for the description of a class of viscoelastic materials // Inter. J. Plasticity. 2003. V. 19. P. 941–959.
27. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
28. *Бицадзе А.В.* О полигармонических функциях // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 3. С. 521–525.
29. *Hayman W.K., Korenblum B.* Representation and uniqueness theorems for polyharmonic functions // J. d'Analyse Mathematique. 1993. V. 60. P. 113–133.
30. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
31. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
32. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
33. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Лань, 2003.

# EQUATIONS AND SYSTEMS OF THE M.M. LAVRENTIEV TYPE IN THE INVERSE PROBLEM OF MEMORY RECONSTRUCTION OF A VISCOELASTIC MEDIUM

M. Yu. Kokurin\*

*424001 Yoshkar-Ola, Lenin Square, 1, Mari State University, Russia*

*\*e-mail: kokurinm@yandex.ru*

Received: 05.03.2024

Revised: 05.03.2024

Accepted: 01.07.2024

**Abstract.** A nonlinear coefficient inverse problem is considered related to the partial reconstruction of the memory matrix of a viscoelastic medium based on the results of probing the medium by a family of wave fields excited by point sources. A spatially non-overdetermined formulation is investigated in which the manifolds of point sources and detectors do not coincide and have a total dimension equal to three. The requirements for these manifolds are established to ensure the unique solvability of the studied inverse problem. The result is achieved by reducing this problem to a chain of connected systems of M.M. Lavrentiev type linear integral equations.

**Keywords:** elasticity equations, viscoelastic medium, coefficient inverse problem, memory kernel, linear integral equation, biharmonic equation, uniqueness.

# О НЕСТАНДАРТНОМ МЕТОДЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕЛИНЕАРИЗУЕМЫХ РЕШЕНИЙ В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ<sup>1)</sup>

© 2024 г. Д. В. Валовик<sup>1,\*</sup>, А. А. Дюндяева, С. В. Тихов<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>440026 Пенза, ул. Красная, 40, Пензенский гос. ун-т, Россия

\*e-mail: dvalovik@mail.ru

\*\*e-mail: tik.stanislav2015@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.04.2024 г.

Переработанный вариант 26.05.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Изучена задача о распространении электромагнитных волн в плоском диэлектрическом волноводе. Волновод заполнен нелинейной неоднородной средой; нелинейность характеризуется произвольной монотонной положительной непрерывно-дифференцируемой функцией со степенным ростом на бесконечности. Неоднородность среды характеризуется малыми (немонотонными) возмущениями линейной части диэлектрической проницаемости, а также коэффициента при нелинейном слагаемом. С математической точки зрения, эта задача эквивалентна нелинейной задаче на собственные значения для системы уравнений Максвелла со смешанными краевыми условиями. Для исследования задачи предложен метод возмущения, в котором в качестве невозмущенной задачи используется более простая нелинейная задача. Доказано существование как линеаризуемых, так и нелинеаризуемых решений. Библ. 26. Фиг. 16.

**Ключевые слова:** нелинейная задача типа Штурма–Лиувилля, метод возмущений, нелинеаризуемые решения, уравнения Максвелла, диэлектрический плоский волновод, нелинейная диэлектрическая проницаемость, нелинейный эффект Керра, неоднородная среда.

DOI: 10.31857/S0044466924100135, EDN: JYXPYU

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Этот раздел состоит из двух комплементарных частей: в первой части обсуждаются некоторые физические аспекты, связанные с изучаемой задачей, а во второй части обсуждаются математические подходы к проблеме.

Процессы распространения монохроматических электромагнитных волн в плоских слоистых волноводах, заполненных нелинейной средой, активно исследуются в течение многих десятилетий как в России, так и за рубежом. В строгой постановке некоторые из задач, отвечающих указанным процессам, вероятно, впервые появились в работе [1]. Хороший обзор, в первую очередь, результатов, полученных к 1990 г. за рубежом, содержится в работе [2] (см. также и представленную там библиографию). Кроме указанных источников, также стоит упомянуть работы [3]–[6].

Среди различных нелинейных эффектов, возникающих в результате взаимодействия интенсивного электромагнитного излучения со средой, важное место занимают так называемые эффекты самовоздействия, которые характеризуются тем, что падающий свет оказывает влияние на оптические характеристики (диэлектрическую проницаемость или показатель преломления) среды. Самым известным (и наиболее часто используемым) нелинейным законом, описывающим эффекты самовоздействия, является закон Керра (кубическая нелинейность). Этот закон используется при изучении сред с инверсной симметрией, где нелинейные эффекты второго порядка не проявляются.

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00028).

К настоящему времени теория распространения монохроматических поляризованных волн в нелинейных волноводах для случая произвольной нелинейности, отвечающей эффектам самовоздействия, в большой степени завершена. При этом предполагается, что линейная часть диэлектрической проницаемости является постоянной величиной (см. [7], [8]), т.е. в отсутствие нелинейных эффектов среда является однородной. С математической точки зрения такие физические задачи сводятся к нелинейным задачам на собственные значения для системы уравнений Максвелла с соответствующими краевыми условиями и, в случае открытых волноводов, условиям затухания поля на бесконечности. В дальнейшем был развит метод, позволяющий включить в рассмотрение и неоднородную линейную часть диэлектрической проницаемости (см. [9]–[11]). Однако основным недостатком развитого в работах [9]–[11] метода является то, что в качестве неоднородной части диэлектрической проницаемости может использоваться лишь монотонно возрастающая функция (поперечной координаты волновода).

В реальных волноведущих системах гораздо большее значение имеют неоднородности, которые характеризуются немонотонными функциями (см., например, [12]–[14]). В этом случае метод, развитый в работах [9]–[11], неприменим. Кроме того, для волноводов с нелинейным заполнением интерес представляет и такая ситуация, когда неоднородность является немонотонной, но малой по абсолютному значению функцией. С одной стороны, такая функция моделирует возмущение однородной среды, которое неизбежно возникает в любой реальной среде, которую можно приближенно считать однородной. С другой стороны, как показывают численные эксперименты в случае наличия нелинейности, такое “возмущение” линейной части диэлектрической проницаемости приводит к сильным изменениям дисперсионных кривых для “возмущенного” волновода (см. [15]). Работа [15] посвящена задаче о распространении монохроматических ТЕ-волн в плоском экранированном диэлектрическом слое, заполненном керровской средой (кубическая нелинейность) с “возмущенной” линейной частью диэлектрической проницаемости, и является, насколько известно авторам настоящей работы, первым результатом в этой области.

В настоящей работе исследуется задача о распространении монохроматических ТЕ-волн в плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной неоднородной средой. Выделим главные отличия данного исследования по сравнению с [15]. Во-первых, в настоящем исследовании рассматривается открытая волноведущая структура. Во-вторых, в качестве нелинейности рассматривается произвольная положительная монотонная функция от квадрата модуля амплитуды электрического поля, имеющая степенной рост на бесконечности. Такая нелинейность описывает в простейшем случае Керровский эффект, а также нелинейные эффекты высших порядков, имеющие место в средах с инверсной симметрией. Третьей важной особенностью настоящей работы является возмущение коэффициента нелинейности.

С математической точки зрения в работе исследуется задача на собственные значения для неавтономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с краевыми условиями третьего рода (в которые нелинейно входит спектральный параметр) и одним дополнительным локальным условием. Поскольку соответствующая линейная задача о распространении волн имеет дискретное множество решений (собственных значений), то естественно желание получить дискретные собственные значения и в нелинейной задаче. Это приводит к необходимости использования дополнительного условия (в данной постановке мы используем локальное краевое условие).

Одним из интересных эффектов в случае волноводов с нелинейным заполнением является наличие нелинеаризуемых решений у соответствующих математических задач (см. [7]–[11]). По этой причине какие-либо варианты методов возмущений, где в качестве невозмущенных задач используются линеаризованные постановки задач, не годятся для полного исследования описанных проблем. В то же время на настоящий момент нет строгой математической теории, которая позволяла бы учитывать немонотонные неоднородности в случае нелинейных волноведущих систем. Развитие предложенного в работах [9]–[11] подхода на немонотонные (неограниченные) нелинейности было бы существенным шагом в развитии аналитического аппарата теории нелинейных краевых задач.

В качестве метода исследования предлагается нестандартный метод возмущения, основанный на использовании решений более простой нелинейной задачи для нахождения решений основной задачи. Такой подход позволяет доказать разрешимость рассматриваемой задачи при достаточно малых значениях возмущающих параметров и при любом положительном фиксированном значении коэффициента нелинейности. Важным преимуществом предложенного метода по сравнению с классическим методом возмущения, использующим решения линейной задачи, является установление существования нелинеаризуемых решений задачи. Данный результат представляет интерес с физической точки зрения, поскольку такие нелинеаризуемые решения могут отвечать новым режимам распространения направленных ТЕ-поляризованных волн в описанной выше нелинейной волноведущей структуре. Кроме того, предложенный нестандартный метод возмущений может быть интересен и другим исследователям нелинейных задач, особенно в теории колебаний.

## 2. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть монохроматическая ТЕ-поляризованная волна  $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$ , где  $\omega$  — круговая частота,

$$\mathbf{E} = (0, e_y(x), 0)e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (h_x(x), 0, h_z(x))e^{i\gamma z}, \quad (2.1)$$

есть комплексные амплитуды (см. [16]),  $\gamma \in \mathbb{R}$  — волновое число, распространяется в плоском слое  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ , расположенном между двумя полупространствами  $x < 0$  и  $x > h$ .

Волновод  $\Sigma$  заполнен неоднородной нелинейной средой, которая характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью вида

$$\varepsilon_l(x) = \varepsilon_1 + c_1\varepsilon_2(x) + (\alpha_1 + c_2\alpha_2(x))f(|\mathbf{E}|^2), \quad 0 \leq x \leq h,$$

где  $\varepsilon_1, \alpha_1$  — положительные постоянные,  $c_1, c_2$  — вещественные параметры,  $\varepsilon_2(x)$  — непрерывная, а  $\alpha_2(x)$  — непрерывно дифференцируемая функции, определенные на отрезке  $x \in [0, h]$ , причем

$$\alpha_1 + c_2\alpha_2(x) \geq 0,$$

а  $f(s)$  — монотонно возрастающая положительная функция, имеющая степенной рост на бесконечности, т.е. представима в виде

$$f(s) = s^{2q} + f_1(s), \quad q > 0,$$

где  $f_1(s)$  — положительная непрерывная функция такая, что

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f_1(s) \cdot s^{-2q} = 0. \quad (2.2)$$

Полупространства  $x < 0$  и  $x > h$  заполнены однородными изотропными линейными средами, которые характеризуются постоянными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_c$  и  $\varepsilon_s$  соответственно, причем  $\varepsilon_c \leq \varepsilon_s$  (последнее условие не ограничивает общности рассмотрения).

Во всем пространстве  $\mu = \mu_0$ , где  $\mu_0$  — магнитная постоянная.

Комплексные амплитуды (2.1) удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая постоянная и

$$\varepsilon_r = \begin{cases} \varepsilon_s, & x > h, \\ \varepsilon_l, & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_c, & x < 0, \end{cases}$$

условию непрерывности касательных компонент поля (в данном случае таковыми являются  $e_y$  и  $h_z$ ) на границах  $x = 0$ ,  $x = h$ , а также условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при  $|x| \rightarrow \infty$ . Кроме того, мы накладываем на одну из компонент поля дополнительное условие, а именно, требуем, чтобы касательная компонента электрического поля имела фиксированное значение на границе  $x = 0$ .

В сформулированной задаче искомыми являются значения параметра  $\gamma$ , которые отвечают распространяющимся в слое волнам (2.1). Такие  $\gamma$  называют постоянными распространения волновода. Знание полного набора постоянных распространения необходимо при проектировании волноводящих структур.

## 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Подставив амплитуды (2.1) в систему (2.3), получаем

$$\begin{aligned} i\gamma h_x - h'_z &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r e_y, \\ i\gamma e_y &= -i\omega\mu h_x, \\ e'_y &= i\omega\mu h_z. \end{aligned}$$

Выражая  $h_x$  и  $h'_z$  из второго и третьего уравнений, соответственно, и подставляя их в первое уравнение, получаем

$$e''_y = \omega^2\varepsilon_0\mu_0(\gamma^2 - \varepsilon_r)e_y.$$

Пусть  $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ . Выполняя в предыдущем уравнении нормировку в соответствии с формулами  $\tilde{x} = k_0 x$ ,  $\tilde{\gamma} = k_0^{-1} \gamma$ ,  $\tilde{h} = k_0 h$ , вводя обозначение  $e_y := u$  и опуская символ тильды, получаем

$$u'' = (\gamma^2 - \varepsilon_r)u. \quad (3.1)$$

В полупространствах  $x < 0$  и  $x > h$  уравнение (3.1), будучи линейным и однородным, решается элементарно. С учетом условий на бесконечности решения имеют вид

$$u(x) = \begin{cases} C_c e^{k_c x}, & x < 0, \\ C_s e^{-k_s(x-h)}, & x > h. \end{cases}$$

где  $k_c = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c} > 0$ ,  $k_s = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s} > 0$ , а  $C_c, C_s$  есть произвольные постоянные. Из условий положительности подкоренных выражений в  $k_c, k_s$  и условия  $\varepsilon_c \geq \varepsilon_s$  следует, что

$$\gamma^2 > \varepsilon_c. \quad (3.2)$$

Внутри слоя  $\Sigma$  уравнение (3.1) имеет вид

$$u'' = -(\varepsilon_1 + c_1 \varepsilon_2(x) - \gamma^2)u - (\alpha_1 + c_2 \alpha_2(x))f(u^2)u. \quad (3.3)$$

Из условий непрерывности касательных компонент поля следуют условия сопряжения для функции  $u$  вида

$$[u]|_{x=0} = 0, \quad [u]|_{x=h} = 0, \quad [u']|_{x=0} = 0, \quad [u']|_{x=h} = 0,$$

где  $[u]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} u(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} u(x)$ .

Используя найденные для полупространств решения и записанные выше условия сопряжения, получаем для функции  $u(x)$  краевые условия вида

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c} \cdot u(0) - u'(0) = 0, \quad (3.4)$$

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s} \cdot u(h) + u'(h) = 0. \quad (3.5)$$

Кроме того, мы требуем, чтобы касательная компонента электрического поля имела фиксированное значение на границе  $x = 0$ ; отсюда следует, что функция  $u$  должна удовлетворять дополнительному условию вида

$$u(0) = A, \quad (3.6)$$

где  $A$  является фиксированной положительной величиной (это условие не ограничивает общности рассмотрения).

Поскольку уравнение (3.3) и условия (3.4), (3.5) зависят от  $\gamma^2$ , то достаточно исследовать случай  $\gamma > 0$ .

Итак, с математической точки зрения задача о распространении волны эквивалентна задаче  $\mathcal{P}$ , которая заключается в нахождении таких  $\gamma = \hat{\gamma} > 0$ , удовлетворяющих неравенству (3.2), что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция  $u(x; \gamma, c_1, c_2)$ , удовлетворяющая уравнению (3.3) и условиям (3.4), (3.5) и (3.6). Искомые  $\gamma = \hat{\gamma}$  будем называть собственными значениями, а соответствующие им функции  $u(x; \hat{\gamma}, c_1, c_2)$  — собственными функциями задачи  $\mathcal{P}$ .

Если в уравнении (3.3) положить  $c_1 = 0$  и  $c_2 = 0$ , то получаем частный случай задачи  $\mathcal{P}$ , а именно, задачу  $\mathcal{P}'$ , которая состоит в нахождении таких  $\gamma = \bar{\gamma}$ , что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция  $v \equiv v(x, \bar{\gamma})$ , удовлетворяющая уравнению

$$v'' = -(\varepsilon_1 - \gamma^2)v - \alpha_1 f(v^2)v \quad (3.7)$$

и краевым условиям

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c} \cdot v(0) - v'(0) = 0, \quad v(0) = A > 0, \quad (3.8)$$

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s} \cdot v(h) + v'(h) = 0. \quad (3.9)$$

Искомые  $\gamma = \bar{\gamma}$  будем называть собственными значениями, а соответствующие им функции  $v(x, \bar{\gamma})$  — собственными функциями задачи  $\mathcal{P}'$  (см. [7]).

Задача  $\mathcal{P}'$  будет использована в дальнейшем в качестве основного вспомогательного инструмента для аналитического исследования задачи  $\mathcal{P}$ .

Если в уравнении (3.3) положить  $\alpha_1 + c_2\alpha_2(x) \equiv 0$ , то задача  $\mathcal{P}$  вырождается в линейную задачу  $\mathcal{P}^0$  (где  $c_1$  не обязательно равна нулю), которая заключается в нахождении таких  $\gamma = \tilde{\gamma}$ , что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция  $w \equiv w(x, \tilde{\gamma}, c_1)$ , не равная тождественно нулю, являющаяся решением уравнения

$$w'' = -(\varepsilon_1 + c_1\varepsilon_2(x) - \gamma^2)w, \quad (3.10)$$

и удовлетворяющая краевым условиям

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c} \cdot w(0) - w'(0) = 0, \quad (3.11)$$

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c} \cdot w(h) + w'(h) = 0. \quad (3.12)$$

Искомые  $\gamma = \tilde{\gamma}$  будем называть собственными значениями, а соответствующие им функции  $w(x, \tilde{\gamma})$  — собственными функциями задачи  $\mathcal{P}^0$ .

Отметим, что условие (3.6), которое необходимо для определения дискретных собственных значений в задаче  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}'$ , не является необходимым в линейной задаче и по этой причине опущено.

Задача  $\mathcal{P}^0$  является классической в линейной волноводной теории (см. [14], [17]–[19]). Имеет место следующий результат.

**Утверждение 1.** *Задача  $\mathcal{P}^0$  имеет конечное число собственных значений  $\tilde{\gamma}$ . Более того, если в уравнении (3.10) положить  $c_1 = 0$ , то все положительные собственные значения  $\tilde{\gamma}$  задачи  $\mathcal{P}^0$  принадлежат интервалу  $(\sqrt{\varepsilon_s}, \sqrt{\varepsilon_1})$ .*

Мы не приводим здесь доказательства данного утверждения, так как этот результат является частью классической теории Штурма–Лиувилля (см. [19], [20]).

Задача  $\mathcal{P}^0$  может быть использована для развития стандартного метода возмущения для нахождения решений задачи  $\mathcal{P}$ . Действительно, пусть  $\tilde{\gamma}'$  есть собственное значение задачи  $\mathcal{P}^0$ . Можно показать, что для достаточно малого  $\alpha_1 + c_2\alpha_2(x)$  в некоторой окрестности  $\tilde{\gamma}'$  существует, по крайней мере, одно собственное значение  $\hat{\gamma}'$  задачи  $\mathcal{P}$  и  $\lim_{|\alpha_1|+|c_2| \rightarrow 0} \hat{\gamma}' = \tilde{\gamma}'$  [7]. Этот подход реализован в некоторых близких волноводных задачах (см. [21], [22]).

Очевидно, что такой подход позволяет найти только линеаризуемые собственные значения задачи  $\mathcal{P}$ . Однако задача  $\mathcal{P}$  может иметь решения, не связанные с решениями задачи  $\mathcal{P}^0$  (так называемые нелинеаризуемые нелинейные решения). Собственные значения, отвечающие таким решениям, не могут быть найдены с помощью обсуждаемого подхода. Действительно, как будет показано в разд. 4 этой статьи задача  $\mathcal{P}'$  имеет бесконечно много нелинеаризуемых решений, т.е. таких решений, которые не связаны с собственными значениями задачи  $\mathcal{P}^0$  при  $c_1 = 0$ . Естественно ожидать, что, по крайней мере, при малых  $c_1, c_2$  задача  $\mathcal{P}$  также имеет нелинеаризуемые решения. Такие решения могут быть найдены с помощью метода возмущения, использующего в качестве невозмущенной (нелинейную) задачу  $\mathcal{P}'$ .

#### 4. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА $\mathcal{P}'$

В данном разделе представлены некоторые известные результаты, касающиеся разрешимости задачи  $\mathcal{P}'$  и свойств ее решений. Как уже было отмечено выше, эта задача исследована в [7], [8]; используя результаты, представленные в этих работах, мы легко получаем следующие факты.

**Утверждение 2.** *Задача Коши для уравнения (3.7) с условиями (3.8) глобально однозначно разрешима и ее решение  $v \equiv v(x, \bar{\gamma})$  непрерывно зависит от переменной  $x \in [0, h]$  и параметра  $\gamma \in (\sqrt{\varepsilon_c}, +\infty)$ .*

Ясно, что решение  $v \equiv v(x, \bar{\gamma})$  задачи Коши (3.7), (3.8) является собственной функцией задачи  $\mathcal{P}'$ , если оно удовлетворяет условию (3.9). Таким образом, имеем следующий вполне очевидный результат.

**Утверждение 3.** *Число  $\gamma = \bar{\gamma}$  является собственным значением задачи  $\mathcal{P}'$  тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет характеристическому уравнению*

$$\Phi(\gamma) \equiv \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s} \cdot v(h, \gamma) + v'(h, \gamma) = 0, \quad (4.1)$$

где  $v(x, \gamma)$  является решением задачи Коши (3.7), (3.8).

Функцию  $\Phi(\gamma)$  назовем *характеристической функцией* задачи  $\mathcal{P}'$ .

В работе [7] получен следующий важный результат, устанавливающий разрешимость задачи  $\mathcal{P}'$  и свойства ее решений.

**Теорема 1.** Задача  $\mathcal{P}'$  имеет бесконечно много положительных собственных значений  $\gamma = \bar{\gamma}$  с точкой накопления на бесконечности. Кроме того, существует бесконечное число собственных значений  $\gamma = \bar{\gamma}_k$ , имеющих окрестности  $\Gamma_k = (\bar{\gamma}_k - \delta_k, \bar{\gamma}_k + \delta_k)$ , где  $\delta_k > 0$  есть некоторая постоянная, на противоположных концах которых характеристическая функция  $\varphi$  задачи  $\mathcal{P}'$ , определенная в (4.1), принимает значения разных знаков, т.е. выполняется неравенство

$$\varphi(\bar{\gamma}_k - \delta_k) \cdot \varphi(\bar{\gamma}_k + \delta_k) < 0, \quad (4.2)$$

причем окрестность  $\Gamma_k$  не содержит других собственных значений задачи  $\mathcal{P}'$ , кроме  $\bar{\gamma}_k$ .

Отметим, что задача  $\mathcal{P}'$  имеет бесконечно много нелинеаризуемых собственных значений. Такие решения отвечают новому режиму распространения электромагнитных волн, возникающему из-за наличия нелинейного слагаемого в диэлектрической проницаемости.

## 5. ЗАДАЧА $\mathcal{P}$

Начнем с утверждения о глобальной однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (3.3) с начальными условиями

$$u(0) = A, \quad u'(0) = \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_c} \cdot A, \quad (5.1)$$

которые получаются из условий (3.4) и (3.6).

**Утверждение 4.** Задача Коши для уравнения (3.3) с условиями (5.1) однозначно глобально разрешима и ее решение  $u \equiv u(x, \gamma, c_1, c_2)$  непрерывно зависит от переменной  $x \in [0, h]$  и параметров  $\gamma \in (\sqrt{\epsilon_c}, +\infty)$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  при условии  $\alpha_1 + c_2\alpha_2 > 0$ .

Ясно, что решение  $u(x, \gamma, c_1, c_2)$  задачи Коши (3.3), (5.1) является собственной функцией задачи  $\mathcal{P}$ , если оно удовлетворяет условию (3.5). Таким образом, имеем следующий результат.

**Утверждение 5.** Число  $\gamma = \hat{\gamma}$  является собственным значением задачи  $\mathcal{P}$  тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\psi(\gamma, c_1, c_2) \equiv \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_c} \cdot u(h, \gamma, c_1, c_2) + u'(h, \gamma, c_1, c_2) = 0, \quad (5.2)$$

где  $u(x, \gamma, c_1, c_2)$  является решением задачи Коши (3.3), (5.1).

Утверждение 5 доказывается аналогично тому, как доказано утверждение 5 в работе [15]. Функцию  $\psi(\gamma, c_1, c_2)$  будем называть характеристической функцией задачи  $\mathcal{P}$ .

Все последующие результаты будут получены при некоторых ограничениях на параметры задачи. Будем считать, что  $\gamma \in \Gamma^0$ ,  $c_1 \in C_1^0$ ,  $c_2 \in C_2^0$ , где  $\Gamma^0 := (\sqrt{\epsilon_s}, \gamma_0)$ ,  $C_1^0 = (-c_1^0, c_1^0)$ ,  $C_2^0 = (-c_2^0, c_2^0)$  и  $\gamma_0, c_1^0, c_2^0$  есть некоторые фиксированные положительные числа и  $\gamma_0 > \sqrt{\epsilon_s}$ . Величина  $\gamma_0$  выбирается произвольно, однако мы считаем, что  $\gamma_0$  является достаточно большим, так чтобы интервал  $\Gamma_0$  содержал собственные значения задачи  $\mathcal{P}'$ , являющиеся нелинеаризуемыми и удовлетворяющими свойству (4.2) (см. теорему 2). Числа  $c_1^0, c_2^0$  должны быть выбраны в соответствии с теоремой 2.

Далее нам понадобится результат, устанавливающий связь между решениями задач Коши (3.3), (5.1) и (3.7), (3.8). Имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 6.** Пусть  $u(x, \gamma, c_1, c_2)$  является решением задачи Коши для уравнения (3.3) с начальными условиями (5.1), а  $v(x, \gamma)$  есть решение задачи Коши (3.7), (3.8). Тогда при  $|c_1| + |c_2| \rightarrow +0$  верно, что

$$u(x, \gamma, c_1, c_2) \rightarrow v(x, \gamma) \quad (5.3)$$

равномерно по  $x \in [0, h]$  и  $\gamma \in \Gamma^0$ .

Вычитая из обеих частей уравнения (5.2) характеристическую функцию задачи  $\mathcal{P}'$ , получаем

$$\psi(\gamma, c_1, c_2) - \varphi(\gamma) = -\varphi(\gamma). \quad (5.4)$$

Исследуя данное уравнение, получаем основной результат настоящей работы, устанавливающий разрешимость задачи  $\mathcal{P}$ .

**Теорема 2.** Пусть задача  $\mathcal{P}'$  имеет  $n$  решений  $\bar{\gamma}_k \in \Gamma^0$ , где  $k = \overline{1, n}$ , удовлетворяющих свойству (4.2). Тогда существуют положительные числа  $c_1^0, c_2^0$  такие, что для всех  $c_1 \in C_1^0, c_2 \in C_2^0$  задача  $\mathcal{P}$  имеет, по крайней мере,  $n$  решений  $\hat{\gamma}_k$ , причем каждое  $\hat{\gamma}_k$  содержится в некоторой окрестности собственного значения  $\bar{\gamma}_k$ , и для каждого  $k = \overline{1, n}$

$$\lim_{|c_1|+|c_2| \rightarrow 0} \hat{\gamma}_k = \bar{\gamma}_k.$$

В связи с теоремой 2 необходимо дать следующие комментарии.

Теорема 2 утверждает существование  $n$  решений задачи  $\mathcal{P}$ , если задача  $\mathcal{P}'$  имеет  $n$  решений в  $\Gamma^0$ , и  $c_1^0, c_2^0$  достаточно малы. Здесь целое число  $n$  может быть сколь угодно большим, но это влияет на верхние границы  $c_1^0, c_2^0$  возможных значений  $c_1, c_2$ ; а именно, чем больше  $n$ , тем меньше  $c_1^0, c_2^0$ . Пытаясь перейти к пределу  $n \rightarrow \infty$ , мы получаем  $c_1 \rightarrow 0, c_2 \rightarrow 0$ ; иными словами, в этом случае задача  $\mathcal{P}$  вырождается в задачу  $\mathcal{P}'$ .

Если  $\gamma_0$  достаточно велико, то, по крайней мере, некоторые из собственных значений  $\bar{\gamma}_k \in \Gamma$  являются нелинеаризуемыми. Назовем их «существенно нелинейными» собственными значениями. Это означает, что те собственные значения  $\hat{\gamma}_k$ , для которых  $\lim_{|c_1|+|c_2| \rightarrow 0} \hat{\gamma}_k = \bar{\gamma}_k$ , где  $\bar{\gamma}_k \in \Gamma$  является нелинеаризуемым собственным значением задачи  $\mathcal{P}'$ , также являются «существенно нелинейными».

## 6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе представлены некоторые численные результаты. Во всех расчетах использовались следующие параметры:  $f(|\mathbf{E}|^2) = |\mathbf{E}|^2$  (кроме фиг. 13–16, где  $f(|\mathbf{E}|^2) = |\mathbf{E}|^2 + \alpha_1 |\mathbf{E}|^4$ ),  $\alpha_1 = 6.4 \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{В}^2$  (за исключением линейного случая, где  $\alpha_1$  равно, как и  $c_2$ , всегда нулю),  $\epsilon_1 = 2.405$  и  $A = 10^5 \text{ В/м}$  (см. [23]–[25]). Остальные параметры указаны в подписях к рисункам. Напомним, что  $A$  есть амплитуда касательной компоненты электрического поля на границе  $x = 0$ . Как известно, для обнаружения нелинейных эффектов величина амплитуды поля должна быть достаточно большой.

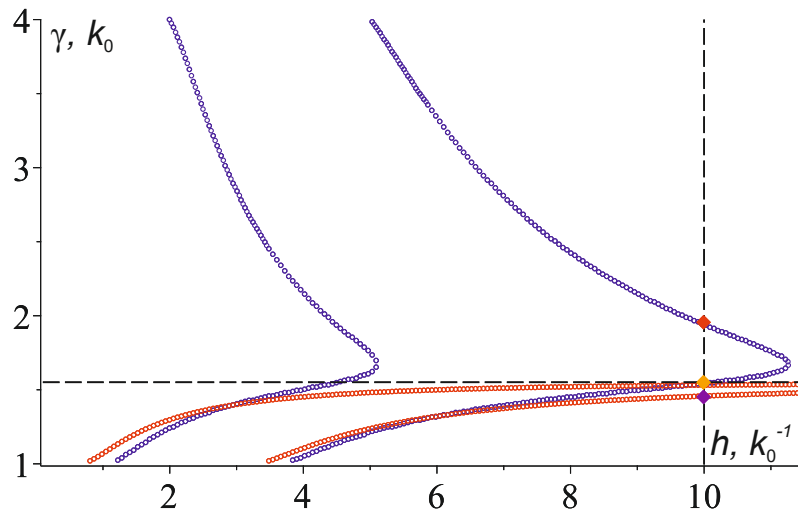
На фиг. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16 представлены дисперсионные кривые (ДК), характеризующие волноведущие свойства плоского диэлектрического слоя  $\Sigma$  в случаях, когда он заполнен линейной однородной (задача  $\mathcal{P}_0$ , где положено  $c_1 = 0$ ), нелинейной однородной (задача  $\mathcal{P}'$ ) и нелинейной неоднородной (задача  $\mathcal{P}$ ) средами. Вообще говоря, дисперсионные кривые строятся как зависимость волнового числа  $\gamma$  либо от частоты  $\omega$  волны, либо от толщины  $h$  волновода. Задачи  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}'$  и  $\mathcal{P}$  не содержат  $\omega$  явно из-за нормировки на  $k_0$ . Поэтому мы построили дисперсионные кривые в виде зависимости  $\gamma$  от  $h$ .

Отметим, что из-за уже упомянутой нормировки величины  $\gamma$  и  $h$  в представленных результатах являются безразмерными. «Реальные» значения волнового числа и толщины волновода есть, соответственно,  $k_0 \gamma$  и  $k_0^{-1} h$ , где  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

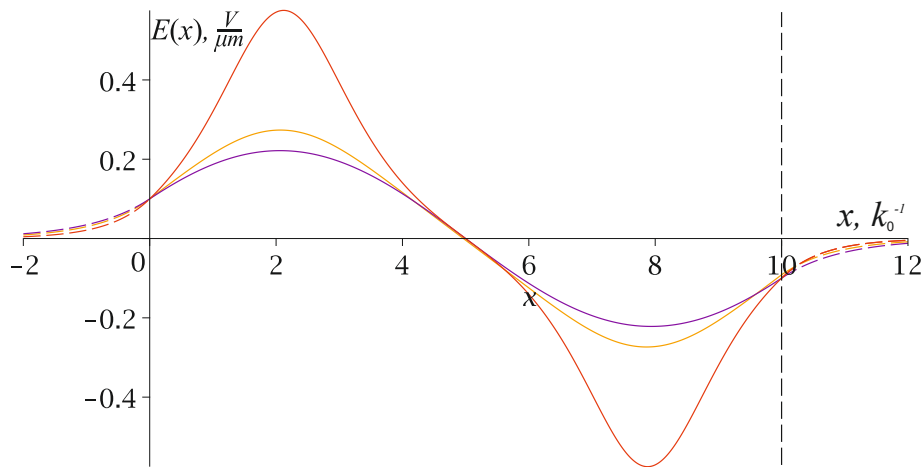
Вертикальная черная пунктирная линия  $h = h^*$  на фиг. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16 соответствует волноводу  $\Sigma$  толщиной  $k_0^{-1} h^*$ . Точки пересечения прямой  $h = h^*$  с дисперсионными кривыми, обозначенные на указанных рисунках ромбами, являются, с одной стороны, собственными значениями одной из задач  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}', \mathcal{P}$ , а, с другой стороны, принимая во внимание физический смысл задач  $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}', \mathcal{P}$ , являются постоянными распространения волновода  $\Sigma$ . В частности, фиг. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 являются хорошей иллюстрацией к теореме 1, наглядно демонстрируя происхождение бесконечного числа решений (собственных значений) задачи  $\mathcal{P}'$ . Действительно, все синие дисперсионные кривые (хотя на фиг. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16 изображены лишь две синие ДК, на самом деле их бесконечно много) в области  $\gamma > \sqrt{\epsilon_1}$  стремятся к прямой  $h = 0$ , откуда следует, что каждая из этих кривых непременно пересекает прямую  $h = h^*$ . Таким образом, существует бесконечно много точек пересечения синих ДК с прямой  $h = h^*$ , а, как уже отмечалось выше, все эти точки пересечения являются решениями задачи  $\mathcal{P}'$  или постоянными распространения волновода  $\Sigma$  толщиной  $h = h^*$ .

На фиг. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 изображены собственные функции, соответствующие собственным значениям, отмеченным на фиг. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. С физической точки зрения эти собственные функции связаны с (единственной) компонентой  $e_y$  электрического поля, а именно,  $u(x; \gamma) = e_y(x; \gamma)$ . Таким образом, фиг. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 демонстрируют распределение электрического поля направленных мод волновода  $\Sigma$  вдоль координатной оси  $Ox$ . Отметим, что в продольном направлении электромагнитная волна изменяется по гармоническому закону (см. формулу (2.1)).

В нелинейных случаях (задачи  $\mathcal{P}'$  и  $\mathcal{P}$ ) возможно, что несколько (разных) постоянных распространения принадлежат одной и той же дисперсионной кривой. Поэтому, чтобы различать такие постоянные распространения, будем использовать обозначения  $\bar{\gamma}_{n,m}$  и  $\hat{\gamma}_{n,m}$  для постоянных распространения задач  $\mathcal{P}'$  и  $\mathcal{P}$  соответственно. В этих обозначениях  $n = 1, 2, \dots$  есть номер дисперсионной кривой, а  $m = 1, 2, \dots$  — номер постоянной распространения среди всех постоянных распространения, лежащих на одной дисперсионной кривой и расположенных в порядке возрастания.

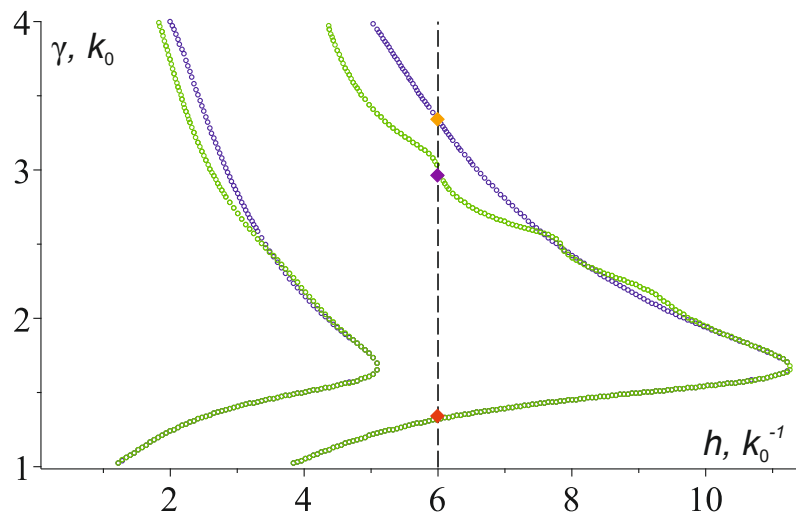


**Фиг. 1.** Дисперсионные кривые задач  $\mathcal{P}'$  (синие кривые) и  $\mathcal{P}^0$ , где  $c_1 = 0$  (красные кривые). Горизонтальная пунктирная линия есть асимптота для дисперсионных кривых задачи  $\mathcal{P}^0$ . Ромбы обозначают постоянные распространения  $\tilde{\gamma}_1 \approx \tilde{\gamma}_{2,1} \approx 1.566$  (оранжевый),  $\tilde{\gamma}_2 \approx 1.448$  (фиолетовый) и  $\tilde{\gamma}_{2,2} \approx 1.952$  (красный) волновода  $\Sigma$  толщиной  $h = 10$ .

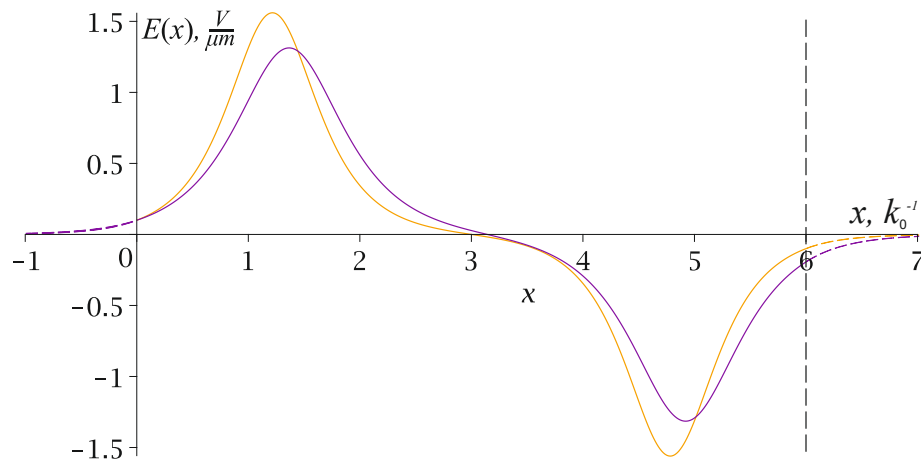


**Фиг. 2.** Собственные функции, соответствующие постоянным распространения  $\tilde{\gamma}_2$ ,  $\tilde{\gamma}_{2,1}$  и  $\tilde{\gamma}_{2,2}$ , отмеченным на фиг. 1 соответственно фиолетовым, оранжевым и красным ромбами. Фиолетовая кривая есть  $w(x; \tilde{\gamma}_2)$ , оранжевая кривая есть  $v(x; \tilde{\gamma}_{2,1})$  и красная кривая есть  $v(x; \tilde{\gamma}_{2,2})$ .

Представленные дисперсионные кривые и собственные функции задач  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{P}'$  наглядно демонстрируют идею развиваемого и применяемого в настоящей работе нестандартного метода возмущения для исследования задачи  $\mathcal{P}$ . Действительно, на фиг. 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 видно, что в окрестности всякого решения  $\hat{\gamma}^*$  вспомогательной (нелинейной) задачи  $\mathcal{P}'$  найдется, по крайней мере, одно собственное значение  $\hat{\gamma}^*$  (постоянная распространения) основной (нелинейной неоднородной) задачи  $\mathcal{P}$  при достаточно малых значениях возмущающих параметров  $c_1$  и  $c_2$ . Кроме того, можно показать, что  $\lim_{|c_1|+|c_2| \rightarrow 0} \hat{\gamma}^* = \bar{\gamma}^*$  и  $\lim_{|c_1|+|c_2| \rightarrow 0} u(x; \hat{\gamma}^*) = v(x; \bar{\gamma}^*)$ . Фигуры 15 и 16 призваны продемонстрировать ситуацию, когда обсуждаемый метод возмущений перестает работать. Так на фиг. 15 при  $c_1 = 0.075$ ,  $c_2 = 5 \times 10^{-14}$  как ДК задачи  $\mathcal{P}'$  (вторая синяя кривая), так и ДК задачи  $\mathcal{P}$  (вторая зеленая кривая) пересекают прямую  $h = 5$  в двух точках  $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \tilde{\gamma}_{2,1} \approx 1.218$ ,  $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.123$  и  $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.302$ , отмеченных соответственно красным, оранжевым и фиолетовым ромбами. На фиг. 16 при  $c_1 = 0.1$ ,  $c_2 = 5 \times 10^{-14}$  вторая ДК задачи  $\mathcal{P}$  вместо стремления к прямой  $h = 0$  уходит вправо и, таким образом, пересекает прямую  $h = h^*$  лишь в точке  $\hat{\gamma}_{2,1} \approx 1.218$  (красный ромб). Другими словами, при выбранных значениях параметров  $c_1$ ,  $c_2$  задача  $\mathcal{P}$  не имеет решения вблизи собственного значения  $\tilde{\gamma}_{2,2}$  задачи  $\mathcal{P}'$  (фиолетовый ромб). Стоит подчеркнуть, это не означает, что задача  $\mathcal{P}$  вовсе не имеет решений, кроме  $\tilde{\gamma}_{2,1}$ . Возможно, что при достаточно больших значениях параметра  $\gamma$  флуктуации в линейной части проницаемости и в коэффициенте нелинейности не оказывают существенного влияния на разрешимость задачи, и мы получим бесконечно много решений, как и в случае



**Фиг. 3.** Зеленые кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}$  с параметрами  $c_1 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $c_2 = 10^{-14}$ ,  $\varepsilon_2 = \alpha_2 = \sin(5x)$ , а синие кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}'$ . Ромбы обозначают постоянные распространения  $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.315$  (красный),  $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 2.961$  (фиолетовый) и  $\bar{\gamma}_{2,2} \approx 3.338$  (оранжевый) волновода  $\Sigma$  толщиной  $h = 6$ .



**Фиг. 4.** Собственные функции, соответствующие постоянным распространения  $\hat{\gamma}_{2,2}$  и  $\bar{\gamma}_{2,2}$ , отмеченным на фиг. 3 соответственно оранжевым и фиолетовым ромбами. Фиолетовая кривая есть  $u(x; \hat{\gamma}_{2,2})$ , оранжевая кривая есть  $v(x; \bar{\gamma}_{2,2})$ .

вспомогательной задачи  $\mathcal{P}'$ . Однако это требует проведения более глубоких исследований. Насколько известно авторам настоящей статьи, такое исследование остается за пределами существующих математических методов.

## 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

### 7.1. Доказательство утверждения 4

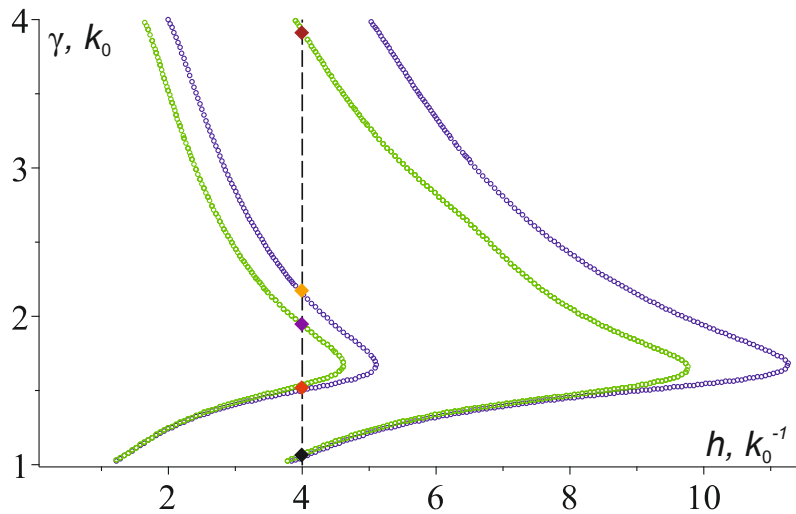
Для доказательства данного утверждения достаточно показать, что функции  $u$  и  $u'$  ограничены на всем отрезке  $x \in [0, h]$ . Действительно, пусть решение  $u$  задачи Коши (3.3), (5.1) существует при  $x \in [0, x']$ , где  $0 < x' \leq h$ . Тот факт, что такое  $x'$  непременно найдется, следует из классических результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений о локальном существовании решения задачи Коши (см. [26]). Если функции  $u$  и  $u'$  ограничены на всем отрезке  $x \in [0, h]$  и, в частности, при  $x \in [0, x']$ , то решение указанной задачи Коши (3.3), (5.1) может быть непрерывно продолжено вправо с полуинтервала  $[0, x']$  на весь отрезок  $[0, h]$  и, таким образом, утверждение 4 доказано.

Вводя обозначения

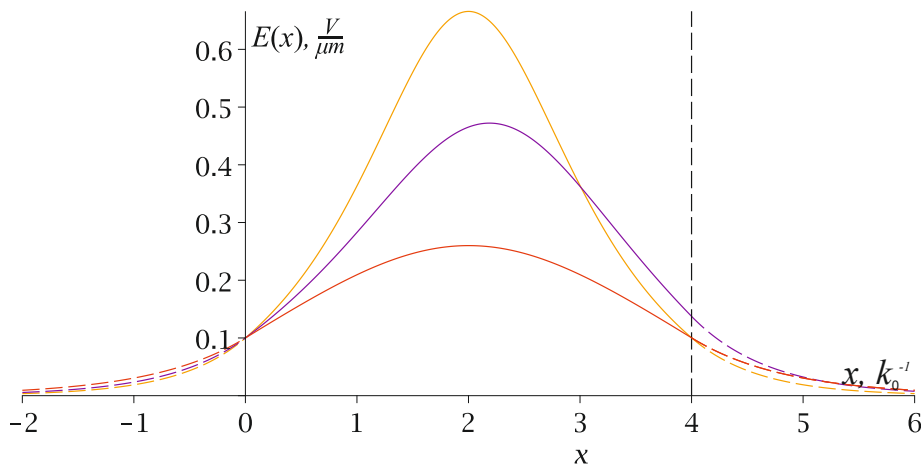
$$p(x) = \varepsilon_1 + c_1 \varepsilon_2(x) - \gamma^2, \quad q(x) = \alpha_1 + c_2 \alpha_2(x),$$

запишем уравнение (3.3) в виде

$$u'' + p(x)u + q(x)f(u^2)u = 0. \quad (7.1)$$



**Фиг. 5.** Зеленые кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}$  с параметрами  $c_1 = 0.05$ ,  $c_2 = 5 \times 10^{-14}$ ,  $\varepsilon_2 = \alpha_2 = 1 - \cos(x)$ , а синие кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}'$ . Ромбы обозначают постоянные распространения  $\hat{\gamma}_{2,1} \approx 1.077$  (черный),  $\hat{\gamma}_{1,1} \approx \bar{\gamma}_{1,1} \approx 1.515$  (красный),  $\hat{\gamma}_{1,2} \approx 1.944$  (фиолетовый),  $\bar{\gamma}_{1,2} \approx 2.156$  (оранжевый),  $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.908$  (коричневый) волновода  $\Sigma$  толщиной  $h = 4$ .



**Фиг. 6.** Собственные функции, соответствующие постоянным распространения  $\bar{\gamma}_{1,1}$  ( $\approx \hat{\gamma}_{1,1}$ ),  $\hat{\gamma}_{1,2}$  и  $\bar{\gamma}_{1,2}$  отмеченным на фиг. 5 соответственно красным, фиолетовым и оранжевым ромбами. Красная кривая есть  $v(x; \bar{\gamma}_{1,1})$ , фиолетовая кривая есть  $u(x; \hat{\gamma}_{1,1})$ , оранжевая кривая есть  $v(x; \bar{\gamma}_{1,2})$ .

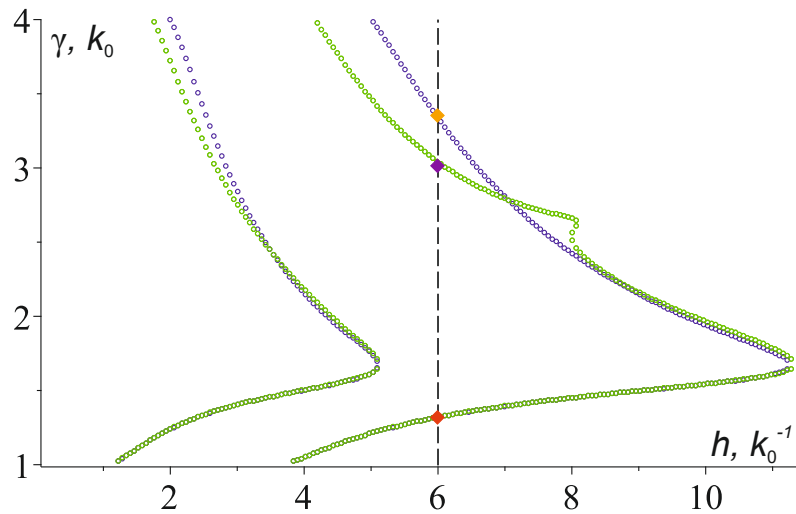
Заметим, что  $q(t)$  есть неотрицательная функция. Умножая уравнение (7.1) на  $2u'$  и затем интегрируя по  $x$ , находим

$$u'^2(x) - u'^2(0) + 2 \int_0^x p(t)u(t)u'(t)dt + 2 \int_0^x q(t)f(u^2(t))u(t)u'(t)dt = 0. \quad (7.2)$$

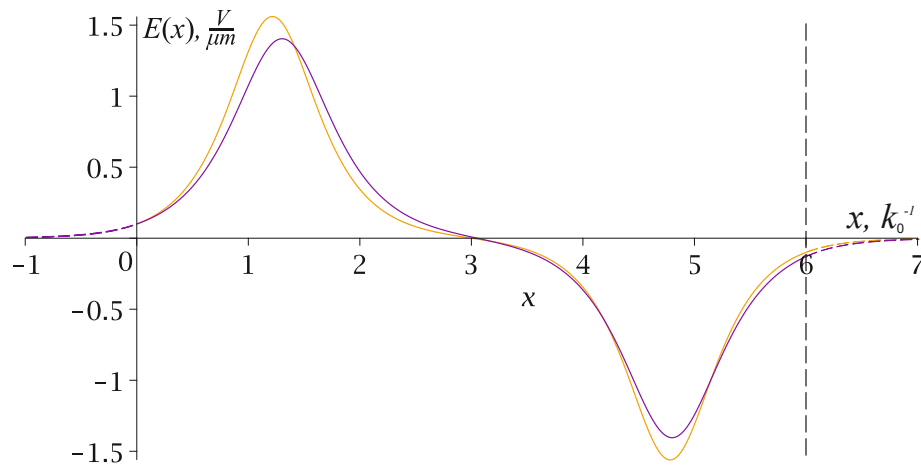
Пусть  $F(u^2)$  есть первообразная функции  $f(u^2)$ , т.е.

$$F(u^2) = \int_0^{u^2} f(s)ds = \frac{u^{2(2q+1)}}{2q+1} + \int_0^{u^2} f_1(s)ds = \frac{u^{2(2q+1)}}{2q+1} + F_1(u^2).$$

Далее будем считать, что  $u^4 \leq F(u^2)$ . Отметим, что в случае, если верно обратное неравенство, т.е.  $u^4 > F(u^2)$ , ограниченность  $u$  и  $u'$ , а значит, и справедливость доказываемого утверждения непосредственно следуют из указанного неравенства (см. подробности в конце доказательства).



**Фиг. 7.** Зеленые кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}$  с параметрами  $c_1 = 10^{-3}$ ,  $c_2 = 1.5 \times 10^{-14}$ ,  $\varepsilon_2 = \alpha_2 = 1 - \cos(2x)$ , а синие кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}'$ . Ромбы обозначают постоянные распространения  $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.315$  (красный),  $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.011$  (фиолетовый),  $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 3.338$  (оранжевый) волновода  $\Sigma$  толщиной  $h = 6$ .



**Фиг. 8.** Собственные функции, соответствующие постоянным распространения  $\hat{\gamma}_{2,2}$  и  $\bar{\gamma}_{2,2}$ , отмеченным на фиг. 7 соответственно фиолетовым и оранжевым ромбами. Фиолетовая кривая есть  $u(x; \hat{\gamma}_{2,2})$ , оранжевая кривая есть  $v(x; \bar{\gamma}_{2,2})$ .

Принимая во внимание, что  $\partial F(u^2(x))/\partial x = f(u^2(x)) 2u(x)u'(x)$  и применяя интегрирование по частям к последнему интегралу, перепишем соотношение (7.2) в виде

$$u'^2(x) + q(x)F(u^2(x)) = C - 2 \int_0^x p(t)u(t)u'(t)dt + \int_0^x q'(t)F(u^2(t))dt,$$

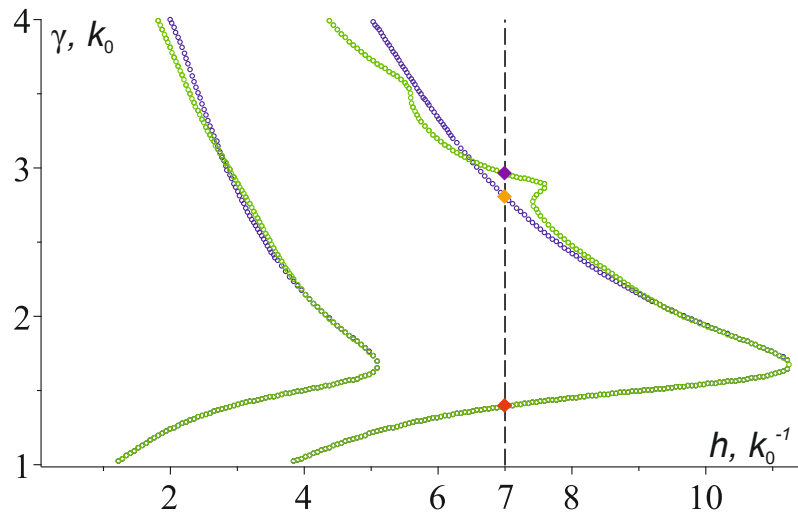
где  $C = u'^2(0) + q(0)F(u^2(0)) = k_c^2 A^2 + q(0)F(A^2)$ .

Используя элементарные неравенства  $2|uu'| \leq u^2 + u'^2$  и  $u^2 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^4$ , левую часть в последнем соотношении можно оценить следующим образом:

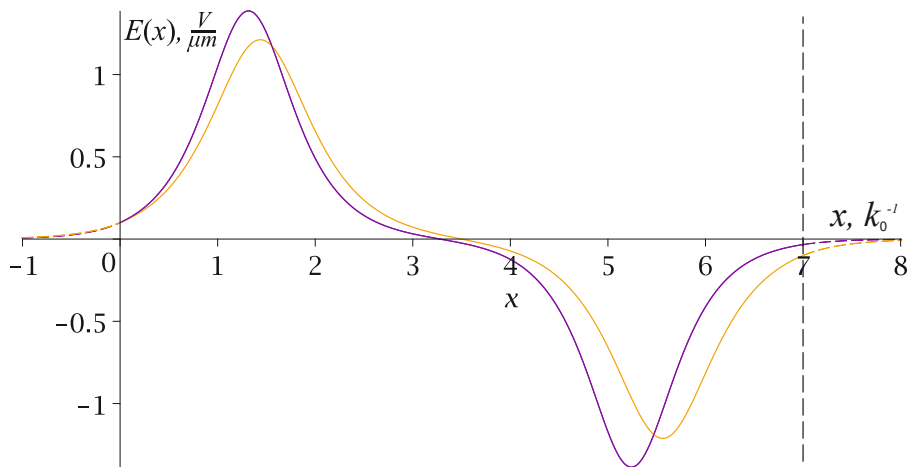
$$u'^2(x) + q(x)F(u^2(x)) \leq C + \int_0^x |p(t)| \left( u'^2(t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^4(t) \right) dt + \int_0^x |q'(t)|F(u^2(t)) dt.$$

Принимая во внимание, что  $F(u^2) \geq u^4$ , получаем

$$u'^2(x) + q(x)F(u^2(x)) \leq C + \frac{1}{2} \int_0^x |p(t)|dt + \frac{1}{2} \int_0^x |p(t)|F(u^2(t)) dt + \int_0^x |p(t)|u'^2(t)dt + \int_0^x |q'(t)|F(u^2(t)) dt. \quad (7.3)$$



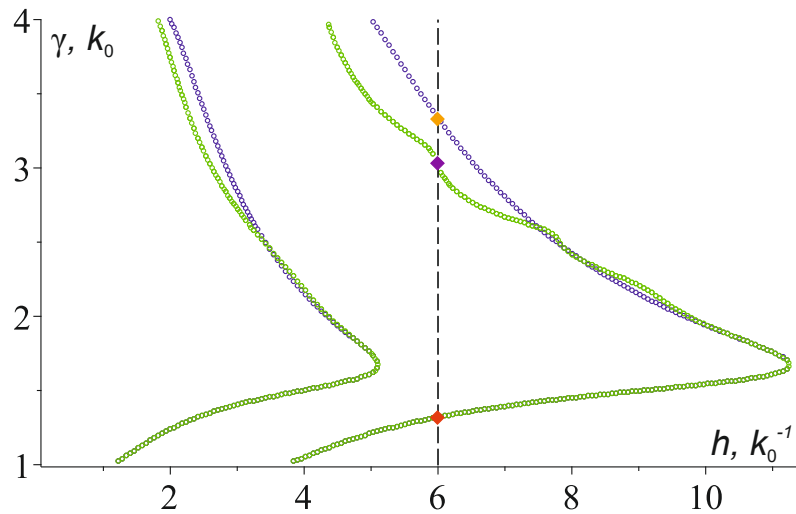
**Фиг. 9.** Зеленые кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}$  с параметрами  $c_1 = 10^{-4}$ ,  $c_2 = 10^{-15}$ ,  $\varepsilon_2 = \alpha_2 = \cos(5x)$ , а синие кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}'$ . Ромбы обозначают постоянные распространения  $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.404$  (красный),  $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 2.804$  (оранжевый),  $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 2.962$  (фиолетовый) волновода  $\Sigma$  толщиной  $h = 7$ .



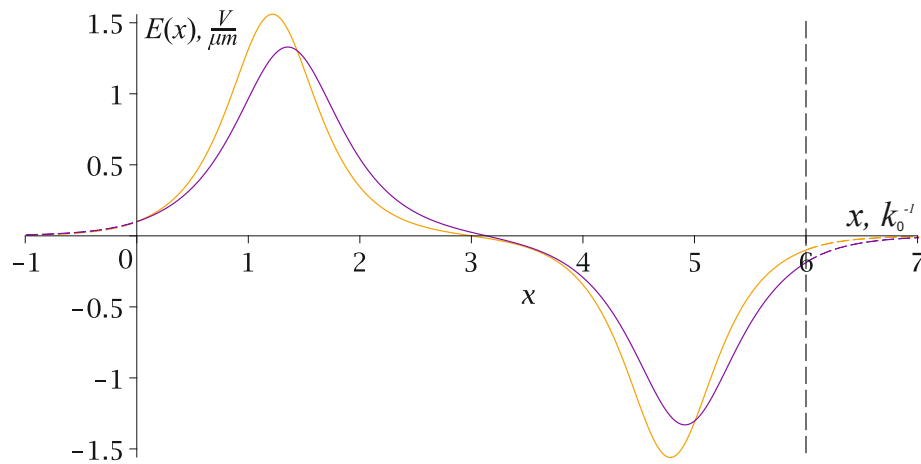
**Фиг. 10.** Собственные функции, соответствующие постоянным распространения  $\hat{\gamma}_{2,2}$  и  $\bar{\gamma}_{2,2}$ , отмеченным на фиг. 9 соответственно фиолетовым и оранжевым ромбами. Фиолетовая кривая есть  $u(x; \hat{\gamma}_{2,2})$ , оранжевая кривая есть  $v(x; \bar{\gamma}_{2,2})$ .

Для суммы последних трех слагаемых имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^x |p(t)| F(u^2(t)) dt + \int_0^x |p(t)| u'^2(t) dt + \int_0^x |q'(t)| F(u^2(t)) dt \leq \\
 & \leq \int_0^x \left( (|p(t)| + |q'(t)|) u'^2(t) + \left( \frac{1}{2} |p(t)| + |q'(t)| \right) F(u^2(t)) \right) dt \leq \\
 & \leq \int_0^x (|p(t)| + |q'(t)|) (u'^2(t) + F(u^2(t))) dt \leq \\
 & \leq \int_0^x (|p(t)| + |q'(t)|) u'^2(t) + \frac{|p(t)| + |q'(t)|}{q(t)} q(t) F(u^2(t)) dt \leq \\
 & \leq \int_0^x \theta(t) (|p(t)| + |q'(t)|) (u'^2(t) + q(t) F(u^2(t))) dt.
 \end{aligned}$$



**Фиг. 11.** Зеленые кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}$  с параметрами  $c_1 = 10^{-3}$ ,  $c_2 = 10^{-14}$ ,  $\varepsilon_2 = \cos(5x)$ ,  $\alpha_2 = \sin(5x)$ , а синие кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}'$ . Ромбы обозначают постоянные распространения  $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.315$  (красный),  $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.028$  (фиолетовый),  $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 3.338$  (оранжевый) волновода  $\Sigma$  толщиной  $h = 6$ .



**Фиг. 12.** Собственные функции, соответствующие постоянным распространения  $\hat{\gamma}_{2,2}$  и  $\bar{\gamma}_{2,2}$ , отмеченным на фиг. 11 соответственно фиолетовым и оранжевым ромбами. Фиолетовая кривая есть  $u(x; \hat{\gamma}_{2,2})$ , оранжевая кривая есть  $v(x; \bar{\gamma}_{2,2})$ .

Здесь  $\theta(t) = \max \{1, |q(t)|^{-1}\}$ . С учетом этого из (7.3) получаем

$$u'^2(x) + q(x)F(u^2) \leq C' + \int_0^x \theta(t) (|p(t)| + |q'(t)|) (u'^2(t) + q(t)F(u^2)) dt,$$

где  $C' = C + \frac{1}{2} \int_0^x |p(t)| dt$ .

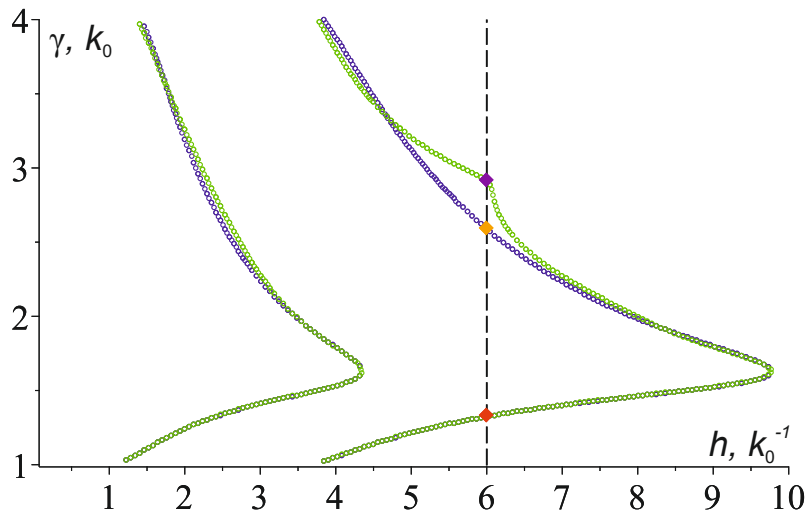
Применяя к последнему выражению лемму Гронуолла, приходим к неравенству вида

$$u'^2(x) + q(x)F(u^2(x)) \leq C' \exp \left\{ \int_0^x \theta(t) (|p(t)| + |q'(t)|) dt \right\},$$

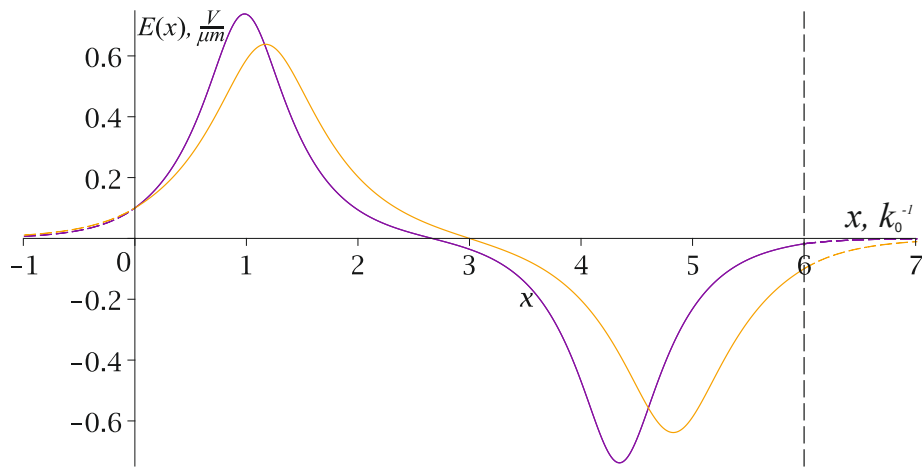
откуда следует ограниченность  $u$  и  $u'$  в силу ограниченности правой части. Таким образом, утверждение 4 доказано в случае, когда  $u^4 \leq F(u^2)$ .

Пусть теперь  $u^4 > F(u^2)$ . Отсюда следует

$$u^{2(2q-1)} \left( 1 + u^{-2(2q+1)} F_1(u^2) \right) < 1.$$



**Фиг. 13.** Зеленые кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}$  с параметрами  $c_1 = 2 \times 10^{-3}$ ,  $c_2 = 10^{-14}$ ,  $\varepsilon_2 = \alpha_2 = 1 - \cos(4x)$ , а синие кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}'$ . Ромбы обозначают постоянные распространения  $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.331$  (красный),  $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 2.592$  (оранжевый),  $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 2.916$  (фиолетовый) волновода  $\Sigma$  толщиной  $h = 6$ .



**Фиг. 14.** Собственные функции, соответствующие постоянным распространения  $\hat{\gamma}_{2,2}$  и  $\bar{\gamma}_{2,2}$ , отмеченным на фиг. 13 соответственно фиолетовым и оранжевым ромбами. Фиолетовая кривая есть  $u(x; \hat{\gamma}_{2,2})$ , оранжевая кривая есть  $v(x; \bar{\gamma}_{2,2})$ .

Поскольку  $\lim_{u^2 \rightarrow +\infty} u^{-2(2q+1)} F_1(u^2) = 0$  (см. формулу (2.2)), а  $q \geq 1$ , то из последнего неравенства следует ограниченность функции  $u$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ . Интегрируя (7.1) по  $x$ , легко получаем неравенство

$$|u'| \leq u'(0) + \int_0^x |p(t)|u(t)dt + \int_0^x q(t)f(u^2(t))dt,$$

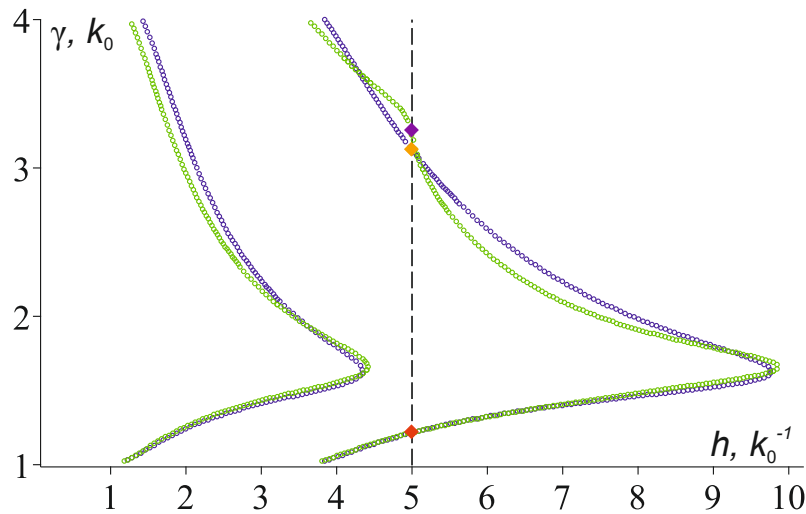
обеспечивающее ограниченность  $u'$  при условии ограниченности функции  $u$ . Таким образом, справедливость утверждения 4 в случае, когда  $u^4 > F(u^2)$ , также доказана.

## 7.2. Доказательство утверждения 6

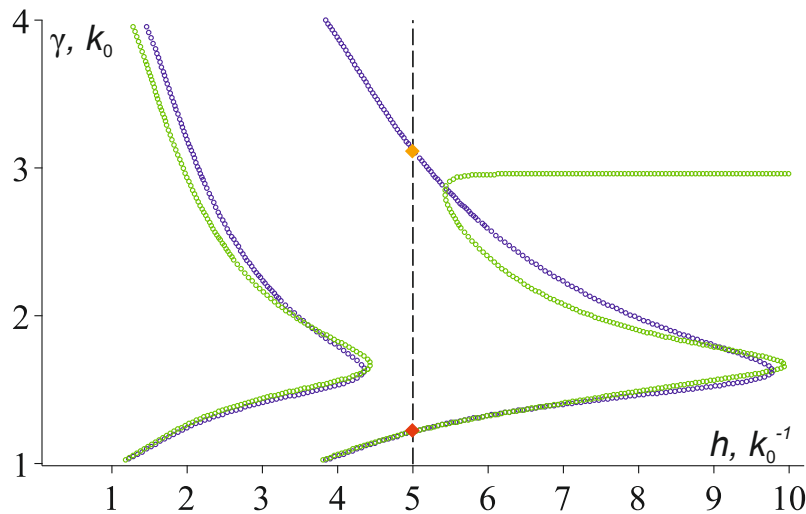
Согласно утверждению 4 задача Коши (3.3), (5.1) глобально однозначно разрешима, и ее решение  $u \equiv u(x, \gamma, c_1, c_2)$  определено и непрерывно при  $x \in [0, h]$ .

В соответствии с утверждением 2 задача Коши (3.7), (3.8) глобально однозначно разрешима, и ее решение  $v \equiv v(x, \gamma)$  определено и непрерывно при  $x \in [0, h]$ .

Тогда тот факт, что  $u(x, \gamma, c_1, c_2) \rightarrow v(x, \gamma)$  равномерно по  $x \in [0, h]$  и  $\gamma \in \Gamma_0$  при  $c_1 \rightarrow 0$  и  $c_2 \rightarrow 0$ , является прямым следствием так называемой интегральной теоремы о непрерывности (см. [26]).



**Фиг. 15.** Зеленые кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}$  с параметрами  $c_1 = 7.5 \times 10^{-2}$ ,  $c_2 = 5 \times 10^{-14}$ ,  $\varepsilon_2 = \alpha_2 = \sin(x)$ , а синие кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}'$ . Ромбы обозначают постоянные распространения  $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.218$  (красный),  $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 3.123$  (оранжевый),  $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.302$  (фиолетовый) волновода  $\Sigma$  толщиной  $h = 5$ .



**Фиг. 16.** Зеленые кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}$  с параметрами  $c_1 = 0.1$ ,  $c_2 = 5 \times 10^{-14}$ ,  $\varepsilon_2 = \alpha_2 = \sin(x)$ , а синие кривые есть ДК задачи  $\mathcal{P}'$ . Ромбы обозначают постоянные распространения  $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.218$  (красный),  $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 3.123$  (оранжевый) волновода  $\Sigma$  толщиной  $h = 5$ .

### 7.3. Доказательство теоремы 2

Пусть  $\gamma_0$  достаточно велико, так что задача  $\mathcal{P}'$  имеет  $n$  собственных значений  $\bar{\gamma}_k \in \Gamma_0$ , где  $k = \overline{1, k}$ , каждое из которых обладает свойством (4.2).

Ниже нам понадобятся интервалы  $\Gamma_k = (\bar{\gamma}_k - \delta_k, \bar{\gamma}_k + \delta_k)$ , где  $k = \overline{1, k}$  и  $\delta_k > 0$  есть некоторые постоянные, определенные в теореме 1. Подчеркнем, что  $\Gamma_k$  не содержит других собственных значений, кроме  $\bar{\gamma}_k$  для каждого  $k$ .

В силу утверждения 6 левая часть уравнения (5.4) ограничена при  $\gamma \in \Gamma_0$ ,  $c_1 \in C_1^0$ ,  $c_2 \in C_2^0$  и стремится к нулю при  $|c_1| + |c_2| \rightarrow +0$ , т. е. может быть сделана сколь угодно малой при соответствующем выборе  $c_1$  и  $c_2$ . Поскольку правая часть в (5.4) от  $c_1$  и  $c_2$  не зависит и принимает значения разных знаков на противоположных концах  $\Gamma_k$ , то из этого следует, что существует  $\bar{\gamma} \in \Gamma_k$ , удовлетворяющее (5.4), а значит, и утверждению 5.

Принимая во внимание данные рассуждения, приходим к выводу, что в любом интервале  $\Gamma_k$  существует  $\hat{\gamma}_k$ , удовлетворяющее уравнению (5.4). Ясно, что  $\lim_{|c_1|+|c_2| \rightarrow 0} \hat{\gamma}_k = \bar{\gamma}_k$ . В силу утверждения 5 такое  $\hat{\gamma}_k$  является собственным значением задачи  $\mathcal{P}$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eleonskii V.M., Silin V.P. Theory of self-trapping of an electromagnetic field in a nonlinear medium // Sov. Phys. JETP. 1970. V. 31. № 5. P. 918–923.
2. Boardman A.D., Egan P., Lederer F., et al. Third-order nonlinear electromagnetic te and tm guided waves. Elsevier sci. Publ. North-Holland, Amsterdam London New York Tokyo, 1991. Reprinted from *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena*, Eds. H.-E. Ponath and G. I. Stegeman.
3. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Солитоны. М.: Физматлит, 2003.
4. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М.: Физматлит, 2005.
5. Christian J.M., McDonald G.S., Potton R.J., Chamorro-Posada P. Helmholtz solitons in power-law optical materials // Phys. Rev. A. 2007. V. 76. № 3. P. 033834.
6. Boardman A.D., Egan P. Novel nonlinear surface and guided te waves in asymmetric lhm waveguides // J. Optic. A: Pure and Appl. Optic. 2009. V. 11. № 11. P. 114032(10).
7. Валовик Д.В. Распространение электромагнитных волн в открытом плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой i: TE-волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 838–858.
8. Валовик Д.В. Распространение электромагнитных волн в открытом плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой i: ТМ-волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60 № 3. С. 429–450.
9. Tikhov S.V., Valovik D.V. Nonlinearizable solutions in an eigenvalue problem for maxwell's equations with nonhomogeneous nonlinear permittivity in a layer // Studies in Appl. Math. 2022. V. 149. № 3. P. 565–587.
10. Valovik D.V. Maxwell's equations with nonlinear inhomogeneous constitutive relation: Guided waves in a film filled with inhomogeneous kerr medium // SIAM J. Appl. Math. 2023. V. 83. № 2. P. 553–575.
11. Tikhov S.V., Valovik D.V. Maxwell's equations in a plane waveguide with nonhomogeneous nonlinear permittivity: Analytical and numerical approaches // J. Nonlinear Sci. 2023. V. 33. № 105.
12. Содха М.С., Гхатак А.К. Неоднородные оптические волноводы. М.: Связь, 1980.
13. Гончаренко А.М., Карпенко В.А. Основы теории оптических волноводов. Минск: Наука и техника, 1983.
14. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
15. Dyundyaeva A., Tikhov S., Valovik D. Transverse electric guided wave propagation in a plane waveguide with kerr nonlinearity and perturbed inhomogeneity in the permittivity function // Photonics. 2023. VI. 10. № 4.
16. Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P. Cylindrical nonlinear waveguides // Sov. Phys. JETP. 1972. V. 35. № 1. P. 44–47.
17. Unger H.G. Planar optical waveguides and fibres. Oxford: Clarendon Press, 1977.
18. Marcuse D. Theory of dielectric optical waveguides. 2nd ed. Acad. Press, 1991.
19. Смирнов Ю.Г. Задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ- и ТМ-волн в двухслойных неоднородных анизотропных цилиндрических и плоских волноводах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 3. С. 460–468.
20. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
21. Schurmann H.W., Smirnov Yu.G., Shestopalov Yu.V. Propagation of te-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 1. P. 016614(10).
22. Smolkin E.Yu., Valovik D.V. Coupled electromagnetic wave propagation in a cylindrical dielectric waveguide filled with kerr medium: nonlinear effects // J. Modern Optic. 2017. V. 64. № 4. P. 396–406.

23. *Mihalache D., Stegeman G.I., Seaton C.T., et al.* Exact dispersion relations for transverse magnetic polarized guided waves at a nonlinear interface // *Optic. Lett.* 1987. V. 12. № 3. P. 187–189.
24. *Chen Q., Wang Z.H.* Exact dispersion relations for tm waves guided by thin dielectrics films bounded by nonlinear media // *Optic. Lett.* 1993. V. 18. № 4. P. 260–262.
25. *Huang J.H., Chang R., Leung P.T., et al.* Nonlinear dispersion relation for surface plasmon at a metal-kerr medium interface // *Optic. Communicat.* 2009. V. 282. P. 1412–1415.
26. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ГИФМЛ, 1961.

## ON THE NON-INERT PERTURBATION METHOD FOR PROVING THE EXISTENCE OF NON-LINEARIZABLE SOLUTIONS IN A NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEM ARISING IN THE THEORY OF WAVEGUIDES

D. V. Valovik\*, A. A. Dyundyaeva, S. V. Tikhov\*\*

440026 Penza, Krasnaya str., 40, Penza State University, Russia

\*e-mail: dvalovik@mail.ru

\*\*e-mail: tik.stanislav2015@yandex.ru

Received: 16.04.2024

Revised: 26.05.2024

Accepted: 01.07.2024

**Abstract.** The problem of propagation of electromagnetic waves in a plane dielectric waveguide is studied. The waveguide is filled with a nonlinear inhomogeneous medium; the nonlinearity is characterized by an arbitrary monotone positive continuously differentiable function with a stepwise increase on infinity. The inhomogeneity of the medium is characterized by small (non-monotone) perturbations of the linear part of the dielectric permeability, as well as the coefficient at the nonlinear term. From a mathematical point of view, this problem is equivalent to the eigenvalue problem for a system of Maxwell equations with mixed boundary conditions. To study the problem, a perturbation method is proposed, in which a simpler nonlinear problem is used as the main problem. The existence of both linearizable and non-linearizable solutions is proved.

**Keywords:** nonlinear Sturm–Liouville type problem, perturbation method, non-linearizable solutions, Maxwell equations, dielectric planar waveguide, nonlinear permittivity, nonlinear Kerr effect, inhomogeneous medium.

# ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ

© 2024 г. М.А. Кирюшина<sup>1, \*</sup>, Т.Г. Елизарова<sup>1</sup>, А.С. Епихин<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. Келдыша РАН, Россия

<sup>2</sup> 109004 Москва, ул. А. Солженицына, 25, ИСП им. В.П. Иванникова РАН, Россия

\*e-mail: m\_ist@mail.ru

Поступила в редакцию 23.11.2023 г.

Переработанный вариант 18.04.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Показано, что квазигидродинамический алгоритм позволяет моделировать течения вязкой несжимаемой жидкости в задачах термогравитационной конвекции при больших числах Грасгофа, включая корректное описание возникновения колебательного процесса. Приведены тесты для квадратной и прямоугольной областей. Расчеты выполнены в рамках реализации квазигидродинамического алгоритма в открытом пакете OpenFOAM. Библ. 16. Фиг. 12. Табл. 3.

**Ключевые слова:** метод контрольного объема, открытый пакет OpenFOAM, квазигидродинамический алгоритм, вязкая несжимаемая жидкость, гравитационная конвекция.

**DOI:** 10.31857/S0044466924100143, **EDN:** JYUUMW

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Оценки возможностей алгоритмов в задачах моделирования термогравитационной конвекции привлекают интерес исследователей для последующего адекватного выбора численного алгоритма. Особенный интерес представляют течения, в которых возможно возникновение нестационарных режимов, которые могут предшествовать зарождению ламинарно-турбулентного перехода. Теоретические исследования порога устойчивости и параметров вторичных конвективных течений в задачах термогравитационной конвекции изучены, например, в классической монографии [1]. Экспериментальное изучение устойчивости течений проводилось в широком диапазоне чисел Грасгофа  $Gr$  и Прандтля  $Pr$ . В частности, в экспериментах с этиловым спиртом [2] неустойчивость термогравитационной конвекции наблюдалась при больших  $Pr$  порядка 20, в задачах о течении расплавов [3] неустойчивые течения возникали при малых значениях  $Pr$  порядка 0.01.

Для задач термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска показательными и удобными численными тестами для определения зарождения колебаний служат течения в квадратной и прямоугольной областях в двумерной постановке для чисел  $Pr$  порядка 1. Использование именно этих тестовых задач обусловлено простотой их постановок и одновременной сложностью возникающих течений. Большое количество полученных для этих задач результатов позволяет объективно оценивать тестируемые методы. Особый интерес в данных задачах представляет переход от стационарного течения к нестационарному, который имеет место с ростом числа Грасгофа или Рэлея. Детальный обзор имеющихся результатов моделирования задач термогравитационной конвекции в прямоугольных областях с использованием разнообразных алгоритмов не представляется возможным. Среди результатов отметим несколько последних работ [4–9] и библиографии к ним. Здесь применялись методы высокого порядка точности по времени и пространству с использованием записи уравнений в переменных функция тока-вихрь скорости и скорость — давление [4, 5], подходы в рамках Лэттис-Больцман (Lattice-Boltzmann) алгоритмов для сжимаемого газа при малых числах Маха [6, 9], спектральные методы [7] и методы с локально-сгущающимися пространственными сетками [8]. Эти тесты использовались и для верификации отдельных аспектов открытого программного обеспечения для задач гидродинамики, обзор которых можно найти в [10].

В данной статье авторы используют задачу моделирования термогравитационной конвекции в квадратной и прямоугольной областях для проверки работы численного алгоритма, основанного на регуляризованных, или

квазигидродинамических (КГидД), уравнениях для описания течений вязкой несжимаемой жидкости. Описание КГидД-уравнений изложено, например, в [11–13]. Ряд результатов по тестированию численного алгоритма для указанных задач, проведенного в рамках исследовательских программ, приведено в [11–14]. Здесь рассматривались двумерные течения в плоской и цилиндрической геометрии, аппроксимация строилась на прямоугольных сетках, распараллеливание расчетов не проводилось. Позднее была создана усовершенствованная версия алгоритма, которая позволяет проводить расчеты на трехмерных неструктурированных сетках и допускает использование параллельных вычислений. Этот вариант алгоритма был включен в качестве отдельного вычислительного ядра в открытый программный комплекс OpenFOAM [15]. Последнее позволяет описывать сложные конфигурации расчетной области и использовать многопроцессорные вычислительные комплексы для ускорения вычислений. Первый вариант использования КГидД алгоритма для расчета термогравитационной конвекции в новой версии изложен в [16]. В данной работе проведено тестирование этого доработанного алгоритма на примере известных двумерных задач термогравитационной конвекции, включающих переход к нестационарному режиму течения при больших числах Грасгофа.

В первом разделе приведено описание КГидД-уравнений для задач термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска и краткое описание численного алгоритма. Во втором разделе рассмотрена соответствующая задача при больших числах Грасгофа в квадратной каверне. Прослежен переход от стационарного течения к нестационарному. Полученные результаты позволяют уточнить параметры настройки алгоритма, оценить сходимость численного решения на последовательности сгущающихся сеток и сопоставить полученные результаты с имеющимися в литературе данными. В третьем разделе рассматривается задача о нестационарном течении в прямоугольной каверне размером 1:8 с числом Рэлея  $Ra = 3.4 \times 10^5$ . Полученные выводы приведены в заключении.

## 2. КГидД-УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Для численного моделирования используется КГидД-метод, основой которого является регуляризация системы уравнений Навье–Стокса. Регуляризация уравнений основана на предположении, что массовая плотность потока жидкости отличается от среднего импульса единицы объема на малую величину. Это отличие приводит к появлению малых диссипативных добавок в исходной системе уравнений. Эти слагаемые имеют физичный характер и позволяют использовать условно устойчивую явную разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями.

Приведем вид КГидД-системы уравнений в приближении Обербека–Буссинеска согласно [11–14]:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}((\mathbf{u} - \mathbf{w}) \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho_0} \nabla p = \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \Pi - \beta \mathbf{g}(T - T_0), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}((\mathbf{u} - \mathbf{w})T) = \chi \Delta T. \quad (3)$$

Вектор поправки к скорости  $\mathbf{w}$  и тензор вязких напряжений  $\Pi$  вычисляются как

$$\mathbf{w} = \tau \left[ (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \beta \mathbf{g}(T - T_0) \right], \quad \Pi = \Pi_{NS} + \rho_0 \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}. \quad (4)$$

Здесь  $\tau$  – параметр регуляризации, который имеет размерность времени. КГидД-система тесно связана с исходной системой уравнений Навье–Стокса и имеет ряд точных решений, совпадающих с точными решениями исходной системы. В частности, точное решение стационарной задачи о течении между двумя вертикальными бесконечными разогретыми пластинами в поле силы тяжести в рамках уравнений Навье–Стокса, приведенное в [1] является также и точным решением этой задачи для КГидД-уравнений [11]. При  $\tau = 0$  регуляризованная система переходит в исходную систему уравнений.

Опыт численного моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости показал, что при больших скоростях вынужденной конвекции и малых значениях коэффициента теплопроводности в численном решении уравнения переноса для температуры (3) могут появляться нефизичные осцилляции. Это свидетельствует о недостаточности введенного в уравнение регуляризатора, который определяется величиной  $\mathbf{w}$  (4). Эти численные осцилляции сглаживаются при введении еще одного сглаживающего слагаемого в правую часть уравнения (3), которое принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}T) = \operatorname{div}(\mathbf{w}T) + \chi \Delta T + \operatorname{div}(\tau \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \nabla T)). \quad (5)$$

Именно такой вид регуляризации для уравнения переноса использован при реализации алгоритма в открытом комплексе OpenFOAM [12, 13].

В отличие от системы уравнений Навье–Стокса в КГидД-системе уравнение Пуассона для давления непосредственно следует из уравнения неразрывности. Действительно, подставляя в уравнение неразрывности (1) выражение для  $\mathbf{w}$  (4), сразу получаем уравнение для давления при постоянных значениях  $\rho_0$  и  $\tau$ :

$$\frac{1}{\rho_0} \Delta p = -\operatorname{div}[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] + \frac{1}{\tau} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div}(\beta \mathbf{g}(T - T_0)). \quad (6)$$

Граничные условия для давления в этом случае являются прямым следствием поставленных в задаче граничных условий для векторов скорости  $\mathbf{u}$  и добавки к скорости  $\mathbf{w}$ . Например, для твердой непроницаемой стенки в качестве граничного условия можно поставить равенства нулю нормальных к границе компоненты скорости  $\mathbf{u}_n = 0$  и добавки  $\mathbf{w}_n = 0$ . Из этих двух условий непосредственно следует граничное условие для давления в виде

$$\nabla p = -\rho_0 \beta \mathbf{g}(T - T_0). \quad (7)$$

Для проведения расчетов с применением КГидД-системы необходимо подбирать параметр регуляризации  $\tau$ . При слишком больших значениях  $\tau$  слагаемые, пропорциональные этому коэффициенту (регуляризаторы), начинают доминировать, что приводит сначала к искажению численного решения, а затем к его разрушению. Если  $\tau$  слишком мало, то для устойчивости численного решения требуется неприемлемо малый шаг по времени. Как показывает опыт вычислений, начиная с некоторого значения уменьшение параметра  $\tau$  перестает влиять на точность численного решения. Выбор параметра регуляризации определяет устойчивость алгоритма, его точность и трудоемкость, поэтому в расчете следует подбирать его оптимальное значение.

Как показывает вычислительная практика, шаг интегрирования по времени  $\Delta t$ , обеспечивающий условную устойчивость разностного алгоритма, близок к величине  $\tau$ .

Порядок базового значения коэффициента  $\tau_0$  определим из условия, чтобы коэффициент перед вязкими слагаемыми превосходил величину параметра регуляризации. Для этого приведем уравнение импульса (2) к безразмерному виду и оценим величины коэффициентов в правой части уравнения. Координаты, время, скорость, давление и температуру будем нормировать, соответственно, на величины  $H$ ,  $\frac{H}{u_0}$ ,  $u_0$ ,  $\rho_0 u_0^2$ ,  $\Delta T$ , где  $H$  и  $u_0$  — характерный размер и скорость в задаче,  $\Delta T$  — перепад температур между стенками. При переходе к безразмерным переменным уравнение (2) сохранит свой вид, но в слагаемых в его правой части появятся безразмерные коэффициенты, соответственно  $\frac{\nu}{H u_0} = \frac{1}{\operatorname{Re}}$  — коэффициент перед вязкими слагаемыми,  $\frac{\tau u_0}{H}$  — коэффициент перед дополнительными слагаемыми, и  $\frac{\beta g \Delta T H}{u_0^2}$  — коэффициент перед слагаемым с силой плавучести. Сравнивая коэффициенты перед первым и вторым слагаемым, в правой части уравнения получим условие на величину параметра  $\tau_0$ :

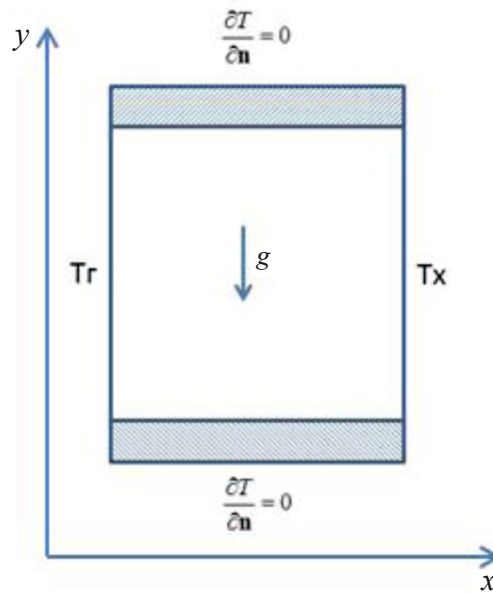
$$\tau = \tau_0 = \frac{\nu}{u_0^2} = \frac{\nu}{\beta g \Delta T H}. \quad (8)$$

Здесь значение характерной скорости течения выбрано в виде  $u_0^2 = \beta g \Delta T H$ , что принято в задачах естественной конвекции. При этом безразмерный коэффициент в слагаемом с выталкивающей силой обращается в 1. При выбранном способе обезразмеривания безразмерное значение параметра  $\tau_{0nd}$  связано с числом Грасгофа  $\operatorname{Gr} = \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu^2}$  в виде  $\tau_{0nd} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Gr}}}$ . Для проведения вычислений параметр  $\tau$  следует выбирать в виде  $\tau \leq \tau_0$ .

Пространственная аппроксимация строится с помощью метода конечных объемов с вычислением всех пространственных производных с помощью центральных разностей. Используется явная по времени разностная схема, а слагаемые с молекулярной вязкостью аппроксимируются в неявном виде. Устойчивость алгоритма обеспечивает искусственная диссипация, нелинейная структура которой подстраивает ее величину в зависимости от градиентов давления, температуры и скорости.

### 3. ЗАДАЧА О ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В КВАДРАТНОЙ ОБЛАСТИ

Моделирование гравитационной конвекции в квадратной области в силу простоты постановки и наглядности результатов долгое время является удобной тестовой задачей для демонстрации свойств численных алгоритмов, см., например, недавние работы [4, 5, 8]. При малых числах Грасгофа течение является стационарным, при значениях  $\operatorname{Gr} \geq 2 \cdot 10^8$  в области устанавливаются незатухающие колебания, которые в дальнейшем могут преобразоваться в двумерный аналог турбулентного течения.



Фиг. 1. Расчетная область. Слева горячая стенка с температурой  $T_g$ , справа – холодная с температурой  $T_x$ .

Ранее КГидД-алгоритм тестировался на этой задаче для небольших значений чисел Грасгофа  $Gr = 10^3, 10^4, 10^5$  соответствующих стационарному течению [11–14]. Результаты расчета сопоставлялись с данными, полученными на основе метода второго порядка точности, построенного в переменных функции тока – вихрь скорости, и с данными эксперимента. Была показана высокая точность КГидД-алгоритма даже на сетках с небольшим количеством узлов, сходимость решения при сгущении сетки и влияние на решение параметра регуляризации  $\tau$ . А именно, оптимальным значением параметра регуляризации является величина (8). При уменьшении коэффициента  $\tau$  точность решения не увеличивается, при его увеличении решение искажается. Далее приведено численное решение этой задачи в рамках пакета OpenFOAM при больших числах Грасгофа. Схема расчетной области и постановка граничных условий для температуры представлена на фиг. 1.

Расчетная область представляет из себя квадрат со стороной  $H$ . Система находится в поле силы тяжести  $g = 9.81 \text{ м/сек}^2$ . Сверху и снизу находятся адиабатические стенки, слева стенка является горячей, справа – холодной. На границах области ставятся условия прилипания и непротекания для скорости. Граничные условия для давления выбираются в виде (7). Последнее означает, что на вертикальных стенках задается равная нулю нормальная производная давления, на горизонтальных стенках производная давления по нормали определяется величиной температуры. То есть для давления на нижней и верхней стенках ставится условие  $\frac{\partial p}{\partial n} = -\beta \rho_0 g (T - T_0)$ , на боковых стенках ставится  $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ . Для скорости на всех границах ставится условие прилипания для скорости  $\mathbf{U} = 0$ . Верхняя и нижняя стенки полагаются теплоизолированными  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ .

При численном моделировании течения вязкой несжимаемой жидкости с помощью солвера mulesQHDFoam, имплементированного в открытый программный комплекс OpenFOAM, используются величины в размерном виде в системе Си. Результаты расчетов также представлены в системе Си, за исключением данных в табл. 3, которые представлены в безразмерном виде для сопоставления с эталонными данными.

Двумерный вариант расчета получен на основе пространственного алгоритма, в котором третье пространственное направление задается одной ячейкой. Все расчеты проведены на равномерных пространственных сетках с квадратными ячейками.

В начальный момент жидкость покоится, давление выбирается равным атмосферному, температура в области равна  $T = T_0 = 293.15^\circ\text{K}$  ( $20^\circ\text{C}$ ), температура стенки слева  $T_g = 313.15^\circ\text{K}$ , стенка справа  $T_x = 273.15^\circ\text{K}$ .

В качестве рабочего флюида выбирается воздух. Значения необходимых для расчета параметров воздуха приведены в табл. 1.

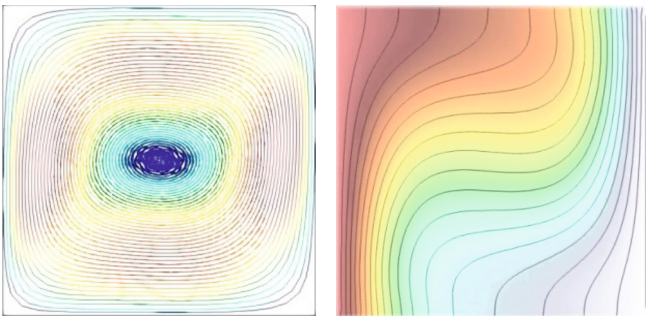
Число Грасгофа вычисляется по формуле  $Gr = \frac{\beta g \Delta T H^3}{\nu^2}$  для  $\Delta T = 40^\circ$ . Число Прандтля в расчетах было выбрано равным единице, поэтому число Рэлея  $Ra = Pr \cdot Gr = Gr$ . Как показывают результаты [4], для воздуха отличия в числе  $Pr = 0.7$  и  $Pr = 1$  очень мало влияют на величины скоростей в данной задаче.

Таблица 1. Параметры воздуха в размерном виде при нормальном давлении и температуре 20°C.

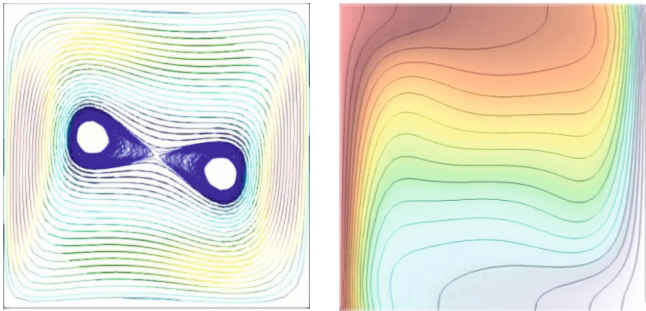
|                                            |                                             |
|--------------------------------------------|---------------------------------------------|
| Динамическая вязкость $\mu$                | $18.1 \times 10^{-6} \text{ кг/(м*сек)}$    |
| Кинематическая вязкость $\nu$              | $15.06 \times 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ |
| Коэффициент теплового расширения $\beta$   | $3.43 \times 10^{-3} \text{ К}^{-1}$        |
| Плотность $\rho_0$                         | $1.205 \text{ кг/м}^3$                      |
| Теплоемкость при постоянном давлении $C_p$ | $1005 \text{ Дж/(кг*К)}$                    |

Таблица 2. Размер расчетной области для разных чисел Грасгофа.

| № | Gr             | H, см  | $\tau$ , сек        |
|---|----------------|--------|---------------------|
| 1 | $10^4$         | 1.190  | $9.4 \cdot 10^{-4}$ |
| 2 | $10^5$         | 2.565  | $4.3 \cdot 10^{-4}$ |
| 3 | $10^6$         | 5.530  | $2.0 \cdot 10^{-4}$ |
| 4 | $10^7$         | 11.900 | $9.4 \cdot 10^{-5}$ |
| 5 | $10^8$         | 25.650 | $4.3 \cdot 10^{-5}$ |
| 6 | $2 \cdot 10^8$ | 32.300 | $3.5 \cdot 10^{-5}$ |
| 7 | $10^9$         | 55.300 | $2.0 \cdot 10^{-5}$ |



Фиг. 2. Gr = 10<sup>4</sup>.

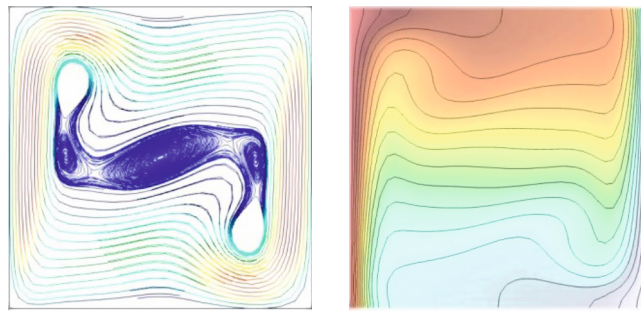


Фиг. 3. Gr = 10<sup>5</sup>.

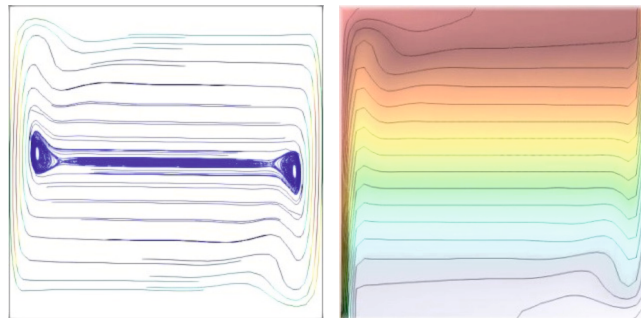
Изменение числа Gr достигается путем изменения размера области. Согласованные значения числа Грасгофа, параметра  $\tau$  и размера области приведены в табл. 2.

В расчетах использовались следующие заниженные значения  $\tau$  : для  $Gr = 10^4, 10^5$  и  $10^6$  параметр  $\tau = 10^{-4}$ . Для  $Gr = 10^7, 10^8$  и  $10^9$  —  $\tau = 10^{-5}$ . Шаг расчета по времени составлял  $2 \cdot 10^{-4}$  для  $Gr = 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$  и  $2 \cdot 10^{-5}$  для  $Gr = 2 \cdot 10^8, 10^9$ . В качестве начальных условий в вариантах 1–3 использовались нулевые значения скоростей и начальное значение температуры в области  $T = T_0 = 20^\circ\text{C}$ , в вариантах 4 и 5 использовались как эти же начальные условия, так и результаты расчета задачи при меньшем значении Gr на соответствующей сетке. Стационарные режимы течения не зависят от принятых начальных условий.

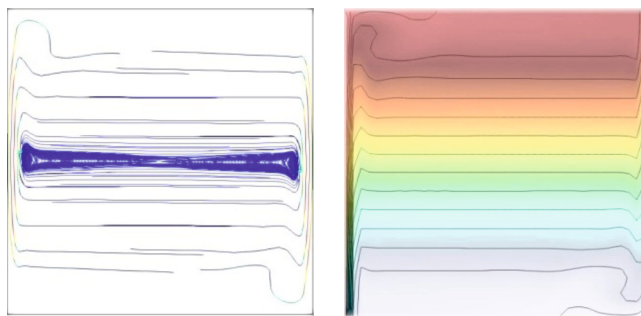
На фиг. 2 и 3 показаны установившиеся поля скорости и температуры в задаче о термогравитационной конвекции для указанных в табл. 2 чисел Грасгофа для сетки  $40 \times 40$ . Линии тока (слева) и изотермы (справа) для чисел Грасгофа  $Gr = 10^4, 10^5$  приведены на момент времени  $t = 40$  сек, а для  $Gr = 10^6, 10^7, 10^8$  — для  $t = 100$  сек.



Фиг. 4.  $Gr = 10^6$ .



Фиг. 5.  $Gr = 10^7$ .



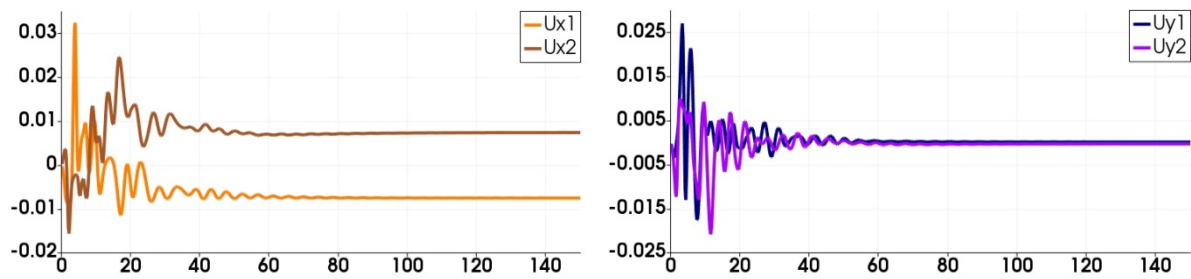
Фиг. 6.  $Gr = 10^8$ .

Рисунки 2–6 подтверждают известную из целого ряда работ картину эволюции течения с ростом числа  $Gr$ , а именно, что при  $Gr = 10^4$  течение представляет собой близкий к окружности вихрь, который искажает поле температуры. С увеличением числа Грасгофа форма вихревого течения также начинает искажаться, при  $Gr = 10^8$  вихрь сильно вытягивается по горизонтали и сжимается по вертикали. При этом вдали от стенок градиент температуры по горизонтали практически исчезает, в то время как градиент вблизи вертикальных стенок сильно возрастает. В ядре течения температура фактически меняется только по вертикали.

Типичный вид установления по времени компонент скорости приведен на фиг. 7 на примере установления стационарного режима для  $Gr = 10^8$  в точках 1 и 2 с координатами  $(0.064, 0.064, 0.0)$  и  $(0.064, 0.192, 0.0)$ .

Для количественной оценки полученных результатов было проведено их сравнение с данными расчетов [4, 5]. В этих работах расчеты термогравитационной конвекции в квадратной области выполнены в переменных функции тока - вихрь скорости с использованием подробных сеток. В [4] алгоритм высокого порядка точности с применением квазиволновой сингулярной свертки (DSC) сравнивался с методом конечных элементов Галеркина. В [5] в переменных функции тока - вихрь скорости использовалась противоточная схема третьего порядка (Opt-UCD3). В [4] показано, что при  $Gr \leq 10^8$  течение флюида является стационарным, при  $Gr = 2 \cdot 10^8$  формируется не устанавливающийся колебательный режим течения.

В табл. 3 приведено сопоставление полученных нами результатов по скорости течения с данными [4, 5] и результатами цитируемых там работ. Сравнение проведено для максимальной величины горизонтальной скоро-



Фиг. 7. Распределения компонент скорости в точках 1 и 2 для  $Gr = 10^8$ , сетка  $40 \times 40$ .

Таблица 3. Сводная таблица проведенных расчетов и их сравнение с результатами [4, 5].

| Число Грасгофа $Gr$ | Максимальная безразмерная горизонтальная скорость $\tilde{u}_x$ , данный расчет | Максимальная безразмерная горизонтальная скорость $\tilde{u}_x$ [4], диапазон скоростей для цитированных в [4] методов |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $10^4$              | 16.02, сетка $40 \times 40$                                                     | 15.967, 15.967–16.2                                                                                                    |
| $10^5$              | 33.30, сетка $40 \times 40$                                                     | 33.51, 33.39–34.81                                                                                                     |
| $10^6$              | 52.36, сетка $40 \times 40$                                                     | 65.55, 64.6912–65.55                                                                                                   |
| $10^7$              | 125.11, сетка $40 \times 40$                                                    | 145.06, 139.7–145.266                                                                                                  |
| $10^8$              | 250.00, сетка $40 \times 40$                                                    | 295.67, 283.689–296.71                                                                                                 |
| $2 \cdot 10^8$      | 282.46, сетка $40 \times 40$                                                    | Колебания [5]                                                                                                          |

сти, которая приведена к безразмерному виду согласно [4, 5]  $\tilde{u}_x = u_{x \text{ разм}} \cdot \frac{H}{v}$ ,  $t = \tilde{t} \frac{H^2}{v}$ . Безразмерные величины обозначены знаком “тильда”.

Далее в табл. 3 приведены значения максимальной безразмерной скорости  $\tilde{u}_x$  по координате  $y$  при  $x = 0.5 \cdot H$ .

Из табл. 3 следует, что при  $Gr = 10^4, 10^5$  на сетке  $40 \times 40$  КГидД-результаты хорошо соответствуют данным [4], полученным на сетке  $101 \times 101$ . Для  $Gr = 10^6$  для КГидД-алгоритма требуется сетка  $80 \times 80$ , чтобы соответствовать результатам [4], полученным на сетке  $101 \times 101$ . Для этого варианта показана сходимость по сетке КГидД-результатов. Для  $Gr = 10^7$  для достижения нужной точности требуется более подробная пространственная сетка. В [4] использовалась сетка  $301 \times 301$ . Для  $Gr = 10^8$  точность на сетке  $160 \times 160$  соответствует сетке  $301 \times 301$  из [4].

В [5] расчеты данной задачи проводились на сетках  $129 \times 129$  для  $Gr = 10^4, 10^5, 10^6$  и  $257 \times 257$  для  $Gr = 10^8$ . Для стационарных режимов результаты работ [4] и [5] близки между собой.

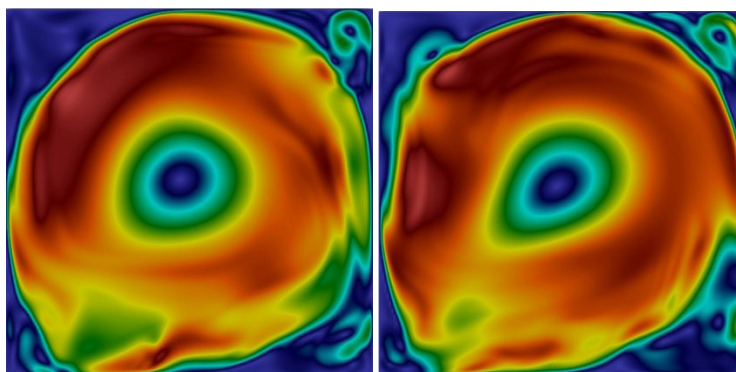
В [5] были получено и проанализировано возникновение нестационарных режимов течения в квадратной полости для чисел Грасгофа  $Gr = 2 \cdot 10^8$  и  $Gr = 10^9$ . Эти режимы удалось получить и в рамках КГидД-уравнений при сгущении пространственной сетки.

Для  $Gr = 2 \cdot 10^8$  на сетках  $40 \times 40$  и  $80 \times 80$  формируется стационарное течение. В расчете на сетке  $160 \times 160$  получено незатухающее непериодическое решение, вид которого соответствует данным [5], полученным на сетке  $257 \times 257$ . В качестве начального условия использовалось поле течения, полученное в расчете для  $Gr = 10^6$ . Характерные картины полей скорости и температуры на разные моменты времени для этого случая приведены на фиг. 8–9.

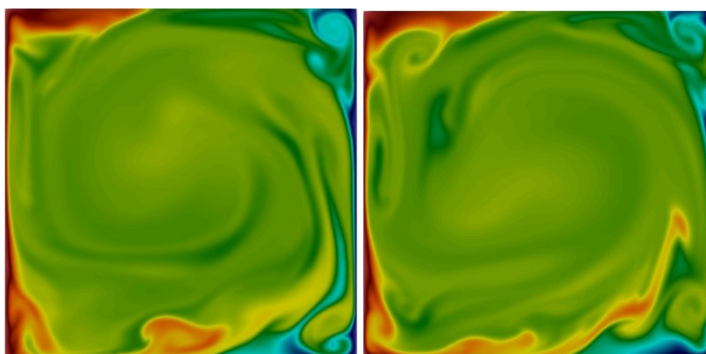
На фиг. 10 приведены зависимости от времени компонент скоростей и температуры в точках 1 и 2 с координатами (0.08, 0.08, 0.0) и (0.08, 0.242, 0.0) для  $Gr = 2 \cdot 10^8$ . Расчет проведен на сетке  $320 \times 320$ . В качестве начального условия также использовалось стационарное решение, полученное при  $Gr = 10^6$ .

4. ЗАДАЧА ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ  $H:8H$

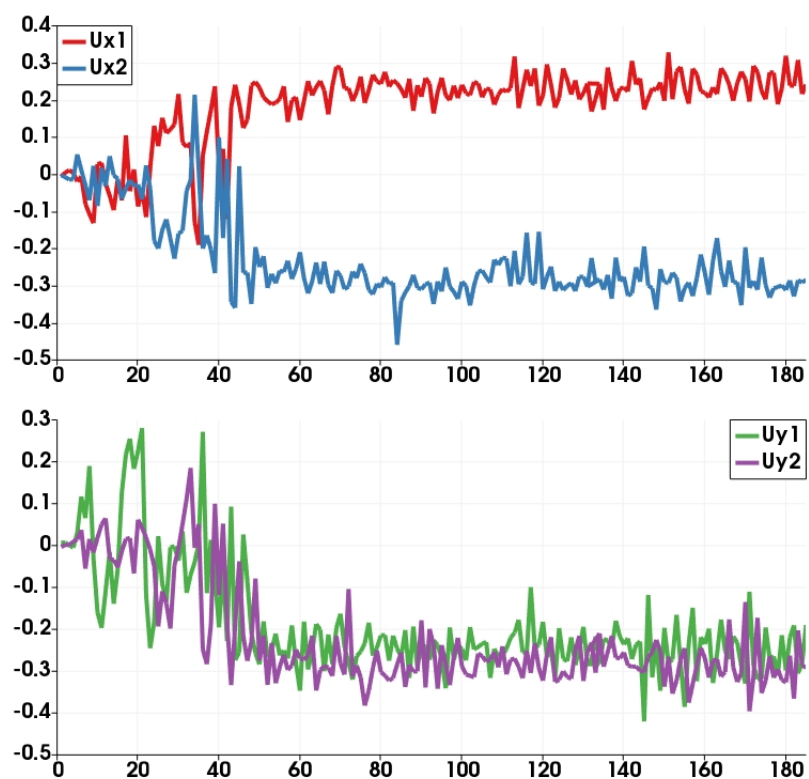
В каверне, представляющей собой вытянутый вверх прямоугольник, колебательные режимы возникают при меньших числах Грасгофа. Экспериментальные и численные исследования таких течений изложены в [2, 6–9]. В эксперименте с этиловым спиртом [2] ( $Pr$  порядка 20) наиболее интенсивные хаотические колебания наблюдались вблизи верхней и нижней границ каверны, а в центре области формировалась застойная зона с более слабыми осцилляциями.



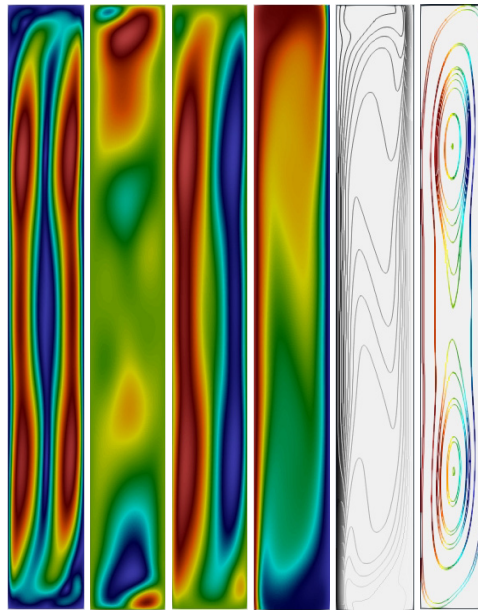
Фиг. 8. Модуль скорости. Максимальные значения 0.53 и 0.51 м/с.



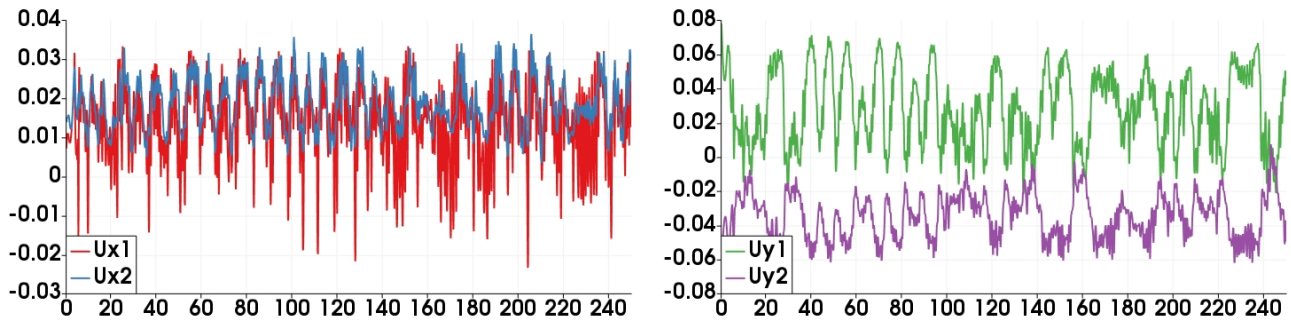
Фиг. 9. Температура. Пределы изменения от 2700 до 3100.



Фиг. 10. Зависимость от времени компонент скоростей в точках 1 и 2.  $Gr = 2 \cdot 10^8$ , сетка  $320 \times 320$ .



Фиг. 11. Картина осредненного течения. Модуль скорости,  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $T$ , изотермы, линии тока.



Фиг. 12. Зависимость от времени для компонент скоростей в точках 1 и 2.

Постановка приведенной далее задачи соответствует классическому вычислительному тесту, детально изложенному в [6–8]. В этих работах изучены варианты незатухающих хаотических осцилляций течения при числе Рэлея  $Ra = 3.4 \cdot 10^5$  в каверне с соотношением ширины и высоты  $H:8H$ .

В описанном далее расчете использовалась такая же конфигурация области с параметрами флюида  $Pr = 1.0$ ,  $Ra = Gr = 3.4 \cdot 10^5$ . В размерном виде стороны прямоугольника составляют 0.03855 и 0.3084 м, соответственно. Оценка (8) для параметра регуляризации в размерном виде дает величину  $\tau = \frac{\nu}{\beta g \Delta T H} = 3 \cdot 10^{-4}$ . Шаг по времени составлял  $10^{-4}$ . Использовались сетки  $48 \times 240$  и  $96 \times 240$ .

При выборе параметра регуляризации  $\tau = 3 \cdot 10^{-4}$  в расчете было получено стационарное распределение параметров течения. Уменьшение параметра численного сглаживания до значения  $\tau = 5 \cdot 10^{-5}$  позволяет моделировать неустанавливающееся, близкое к хаотическому, течение в области. Начальным значением для расчета является стационарный режим, полученный при  $\tau = 3 \cdot 10^{-4}$ . Изолинии для скоростей  $u_x$ ,  $u_y$ , температуры  $T$  и траектории частиц для осредненного по времени решения на интервале 250–270, приведены на фиг. 11 для сетки  $96 \times 240$ . При варьировании интервала осреднения в пределах 120–250 результаты осреднения практически не меняются.

На фиг. 12 представлена эволюция во времени компонент скорости в точках 1 (0.00698 0.28411 0.0) — вблизи левого верхнего угла каверны, и 2 (0.03 0.29 0.0) — вблизи правого верхнего угла каверны на момент времени 270.

Численное моделирование нестационарного течения в данной задаче было выполнено в [6] на существенно более подробных сетках с минимальным числом узлов  $75 \times 600$ . В [7] и [8] нестационарное течение в данной задаче на сетках  $252 \times 252$  и  $96 \times 480$  соответственно носит практически регулярный характер. Картина осредненного течения, приведенного на фиг. 11, качественно соответствует полям, приведенным в [6], [8] и [9]. Изотермы, приведенные в [6], [8] и [9] наилучшим образом соответствуют КГидД-расчетам в центре и по кра-

ям прямоугольной области. Эволюционные кривые фиг. 12 качественно соответствуют работе [9], в которой расчет проводился на сетке  $100 \times 800$ .

## 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Численные эксперименты показали, что для задач термогравитационной конвекции КГидД-алгоритм позволяет моделировать как стационарные течения так и формирование нестационарных режимов, которое наблюдается при увеличении числа Грасгофа. Для адекватного моделирования указанных задач требуется соответствующий выбор шага сетки для разрешения пограничных слоев и выбор параметра регуляризации, который определяет сглаживание в алгоритме.

При сравнении полученных численных решений с эталонными результатами для течений в квадратной и прямоугольной полостях показано, что КГидД-алгоритм по точности не уступает взятым за эталон методам. При этом требуемая точность вычисления скорости достигается на менее подробных сетках, чем в алгоритмах более сложной структуры с повышенным порядком аппроксимации. Возникновение колебательных режимов также получается в рамках КГидД-алгоритма для известных из эталонных расчетов числах Грасгофа.

Таким образом, реализованный в комплексе OpenFOAM КГидД-алгоритм представляется перспективным для решения задач термогравитационной конвекции.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Физматлит, 1989. 320 с. ISBN 5-02-014004-X.
2. Бердников Б.С., Гришков В.А. Ламинарно-турбулентный переход в свободном конвективном пограничном слое и теплоотдача вертикальных стенок // Труды 4-й РНКТ. 2006. Т. 3. Свободная конвекция. Тепломассообмен при химических превращениях. С. 67–70.
3. Простомолотов А.И., Вереzub Н.А. Механика процессов получения кристаллических материалов. М.: НИТУ “МИСиС”, 2023, ISBN 978-5-907560-57-4, 568 с.
4. Wan D.C., Patnaik B.S., Wei G.W. A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution // Numerical heat transfer, Part B. 2001. 40: P. 199–228.
5. Bingxin Zhao, Zhenfu Tian. High-resolution high-order upwind compact scheme-based numerical computation of the natural convection flows in a square cavity // Internat. Journal of Heat and Mass Transfer. 2016. 98. P. 313–328.
6. Trouette B. Lattice Boltzmann simulations of a time-dependent natural convection problem Computers-and-mathematics-with-applications Volume 66, Issue 8, November 2013. P. 1360–1371.
7. Oder J., Tisely I. Spectral Benchmark for Natural Convection Flow in a Tall Differentially Heated Cavity // 22nd International Conference Nuclear Energy for New Europe, September 9-12 BLED-SLOVENIA 2013. 227 p.
8. Nader Ben Cheikh, Brahim Ben Beya & Taieb Lili. Benchmark Solution for Time-Dependent Natural Convection Flows with an Accelerated Full-Multigrid Method // Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals: An International Journal of Computation and Methodology. 2007. 52:2. P. 131–151. DOI: 10.1080/10407790701347647
9. Yong-Liang Feng, Shao-Long Guo, Wen-Quan Tao, Pierre Sagaut. Regularized thermal lattice Boltzmann method for natural convection with large temperature differences // Internat. Journal of Heat and Mass Transfer. 2018. 125. P. 1379–1391. 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.05.051. hal-02114047.
10. Поляков С.В., Чурбанов А.Г. Свободное программное обеспечение для математического моделирования // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша 2019, № 145. 32 с.
11. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. М.: Ижевск, 2009.
12. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета газодинамических течений. М.: Научный мир, 2007. Перевод Elizarova T.G., Quasi-Gas Dynamic equations // Springer, Berlin, 2009)
13. Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В. Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. N 2. С. 239–255. Translation: Elizarova T.G., Sheretov Yu.V. (2001) Theoretical and Numerical Analysis of Quasi-Gasdynamic and Quasi-Fluid-Dynamic Equations // J. Comput. Math. and Math. Phys. 2001. V. 41. N 2. P. 219–234.

14. *Елизарова Т.Г., Калачинская И.С., Ключникова А.В., Шеретов Ю.В.* Использование квазигидродинамических уравнений для моделирования тепловой конвекции при малых числах Прандтля // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. N 10. С. 1732–1742.
15. *Kraposhin M.V., Ryazanov D.A., Elizarova T.G.* Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // Comp. Phys. Commun. 2022. V. 271. P. 108216.
16. *Кiryushina M.A., Elizarova T.G., Epihin A.S.* Моделирование течения расплава в методе Чохральского в рамках открытого пакета OpenFOAM с применением квазигидродинамического алгоритма // Матем. моделирование. 2023. Т. 35. N 8. С. 79–96.

## VERIFICATION OF A NUMERICAL ALGORITHM BASED ON QUASI-HYDRODYNAMIC EQUATIONS USING THE EXAMPLE OF MODELING THERMOGRAVITATIONAL CONVECTION PROBLEMS

M. A. Kiryushina<sup>a,\*</sup>, T. G. Elizarova<sup>a</sup>, A. S. Yepikhin<sup>b</sup>

<sup>a</sup> 125047 Moscow, Miusskaya pl., 4, Keldysh IAM RAS, Russia

<sup>b</sup> 109004 Moscow, A. Solzhenitsyn str., 25, V.P.Ivannikov ISP RAS, Russia

\*e-mail: m\_ist@mail.ru

Received: 23.11.2023

Revised: 18.04.2024

Accepted: 28.06.2024

**Abstract.** It is shown that the quasi-hydrodynamic algorithm makes it possible to simulate the flow of a viscous incompressible fluid in problems of thermogravitational convection at large Grashof numbers, including a correct description of the occurrence of an oscillatory process. The tests for square and rectangular areas are given. The calculations were performed within the framework of the implementation of the quasi-hydrodynamic algorithm in the open package OpenFOAM.

**Keywords:** s: control volume method, OpenFOAM open package, quasi-hydrodynamic algorithm, viscous incompressible liquid, gravitational convection.

# КОНВЕКТИВНОЕ УРАВНЕНИЕ КАНА–ХИЛЛИАРДА–ООНО<sup>1)</sup>

© 2024 г. А.Н. Куликов<sup>1</sup>, \*, Д.А.Куликов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 150000 Ярославль, ул.Советская, 14, Ярославский гос. ун-т им. Демидова, Россия

\*e-mail: anat\_kulikov@mail.ru

Поступила в редакцию 11.10.2023 г.

Переработанный вариант 06.05.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Рассматривается нелинейное эволюционное уравнение с частными производными, которое получено как естественное с физической точки зрения обобщение широко известного уравнения Кана–Хиллиарда. В обобщенный вариант добавлены слагаемые, отвечающие за учет конвекции и диссипации. Новый вариант уравнения рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана. У такой краевой задачи изучаются локальные бифуркации коразмерности 1 и 2. В обоих случаях проанализированы вопросы о существовании, устойчивости и асимптотическом представлении пространственно неоднородных состояний равновесия, а также инвариантных многообразий, сформированных такими решениями краевой задачи. Для обоснования результатов использованы методы современной теории бесконечномерных динамических систем, включая метод интегральных многообразий, аппарат теории нормальных форм Пуанкаре. Указаны различия между результатами анализа бифуркаций в краевой задаче Неймана с выводами при анализе периодической краевой задачи, изученной авторами статьи в предшествующих публикациях. Библ. 25. Фиг. 1.

**Ключевые слова:** конвективное уравнение Кана–Хиллиарда–Ооно, краевая задача, устойчивость, бифуркации, нормальные формы, асимптотические формулы.

DOI: 10.31857/S0044466924100151, EDN: JYUFVE

## ВВЕДЕНИЕ

В работе предполагается рассмотреть следующее нелинейное уравнение с частными производными:

$$u_t + u_{xxxx} + bu_{xx} + au + c(u^2)_x + d(u^3)_{xx} = 0, \quad (1)$$

где  $u = u(t, x)$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . При этом  $a \geq 0$ ,  $c^2 + d^2 \neq 0$ . Уравнение (1) можно называть конвективным уравнением Кана–Хиллиарда–Ооно [1, 2]. Если  $a = c = 0$ , то получаем одну из версий классического уравнения Кана–Хиллиарда. При  $a = 0$ ,  $c \neq 0$  данное уравнение называют конвективным уравнением Кана–Хиллиарда [3–5]. Наконец, если  $c = 0$ , а постоянная  $a > 0$ , то в уравнении (1) добавлен диссипативный член и предложенный вариант получил название “уравнение Кана–Хиллиарда–Ооно” [2].

Неизвестная функция  $u(t, x)$  допускает различные интерпретации. Так, например, если это уравнение используют в качестве математической модели для описания эволюции разделения фаз в бинарных сплавах (смесях), то  $u(t, x)$  представляет концентрацию одной из двух компонент [6] или разность концентраций двух смешиваемых компонент [7]. В работе [8] одну из модификаций уравнения Кана–Хиллиарда используют для описания поведения границы раздела между двумя слоями жидкости (см., также, [9]). Более детальное обсуждение физических аспектов, связанных с уравнением Кана–Хиллиарда можно найти в работах [2–9], а также в статьях, процитированных в них.

Эти замечания частично оправдывают название, предложенное для уравнения (1). Включение в уравнение (1) дополнительного слагаемого  $c(u^2)_x$  позволяет получить уравнение Курамото–Сивашинского [10, 11], если положить  $a = 0$ ,  $d = 0$ . Подчеркнем, что при  $d = 0$ ,  $a > 0$  получаем уравнение, которое было получено в статье [11] на одном из этапов вывода традиционного варианта уравнения Курамото–Сивашинского.

В большинстве работ уравнение (1) дополняют краевыми условиями, среди которых наиболее часто используются периодические краевые условия или однородные краевые условия Неймана. В задачах, имеющих приложения в физике и химии, однородные краевые условия Неймана называют условиями непроницаемости.

<sup>1)</sup>Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

С учетом нормировки пространственной переменной  $x$  можно сразу считать, что эти краевые условия могут быть записаны в следующем образом:

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (2)$$

если речь идет о периодических краевых условиях или

$$u_x|_{x=0, x=\pi} = u_{xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad (3)$$

если используются однородные краевые условия Неймана.

Пусть сначала  $a > 0$ . При этом варианте выбора  $a$  обе краевые задачи (КЗ): (1), (2) и (1), (3) имеют в качестве пространственно однородного состояния равновесия только решение  $u(t, x) = 0$ . Подчеркнем, что при  $a = 0$  обе КЗ ((1), (2) и (1), (3)) имеют однопараметрические семейства однородных состояний равновесия  $u(t, x) = \alpha \in \mathbb{R}$ . Уже только по этой причине вариант с  $a = 0$  заслуживает отдельного изучения.

В статье основное внимание будет уделено анализу окрестности решения  $u = 0$  КЗ (1), (3), если  $a > 0$ , а также некоторым аналогичным вопросам, если  $a = 0$ .

Эту работу можно рассматривать как продолжение исследований локальной динамики решений КЗ для уравнения Кана–Хиллиарда, его обобщений и модификаций (см. [12–14]). В трех указанных статьях рассматривались уравнения типа Кана–Хиллиарда, включая его классический вариант, в случае выбора периодических краевых условий. Подчеркнем, что вариант КЗ (1), (3) имеет определенные отличия от КЗ (1), (2) при анализе локальных бифуркаций в окрестности состояния равновесия  $u = 0$ , которые достаточно выпукло проявляют себя при  $a > 0, c \neq 0$ . Более детально это будет обсуждено после анализа КЗ (1), (3). Впрочем, отличия проявляют себя и при  $a = c = 0$ . Добавим, что вариант однородных краевых условий Неймана достаточно часто рассматривался в работах Р. Темама [15], других авторов (см. библиографию из монографии [15]) в связи с анализом вопроса о существовании и свойствах глобальных аттракторов нелинейных эволюционных уравнений.

Кроме краевых условий Неймана, периодических краевых условий, уравнение (1) может быть рассмотрено вместе с однородными краевыми условиями Дирихле

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0. \quad (4)$$

В некоторых разделах физики (например, теории упругости) такие условия иногда называют краевыми условиями шарнирного опирания.

КЗ (1), (4) также заслуживает внимания. Изложению результатов анализа локальных бифуркаций в КЗ (1), (4) целесообразно посвятить отдельную публикацию, так как они во многом отличны от выводов, полученных при изучении КЗ (1), (2) и (1), (3).

## 1. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ КЗ

В данном разделе рассмотрим линеаризованные в нуле КЗ (1), (3) и (1), (4), т.е. две следующие линейные КЗ:

$$u_t = Au, \quad u_x|_{x=0, x=\pi} = u_{xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0 \quad (5)$$

и

$$u_t = Au, \quad u|_{x=0, x=\pi} = u_{xx}|_{x=0, x=\pi} = 0. \quad (6)$$

В обоих случаях

$$A = -\partial_{xxx} - b\partial_{xx} - a.$$

Если же выбрать в качестве области определения ( $D(A)$ ) достаточно гладкие функции, удовлетворяющие однородным краевым условиям Неймана, то линейный дифференциальный оператор (ЛДО)  $A$  в таком случае имеет счетный набор действительных собственных значений  $\lambda_n = -n^4 + bn^2 - a$ , отвечающих собственным функциям  $\cos nx$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). При выборе краевых условий Дирихле ЛДО  $A$  имеет собственные числа  $\lambda_k = -k^4 + bk^2 - a, k = 1, 2, 3, \dots$ , но при таком варианте выбора краевых условий собственными элементами будут функции  $\{\sin kx\}$ . Подчеркнем, что обе системы функций:  $\{1, \cos nx\}$  и  $\{\sin kx\}$  формируют полные ортогональные системы в гильбертовом пространстве  $\mathbb{L}_2(0, \pi)$ .

Эти замечания позволяют утверждать, что при любом выборе коэффициентов  $a$  и  $b$  ЛДО  $A$  является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве  $\mathbb{L}_2(0, \pi)$  [16]. Особо отметим, что это свойство ЛДО  $A$ , а также свойства нелинейных слагаемых уравнения (1) позволяют заключить, что КЗ (1), (3) и (1), (4) дополненные начальным условием  $u(0, x) = f(x)$  формируют смешанные (начально-краевые) задачи, которые локально корректно разрешимы [17].

В случае КЗ (1), (3) в качестве пространства начальных условий (фазового пространства) удобно и естественно выбрать  $\mathbb{W}_{2,N}^4[0, \pi]$  — подпространство функционального пространства Соболева  $\mathbb{W}_2^4[0, \pi]$  (см., например, [18]). Здесь  $f(x) \in \mathbb{W}_{2,N}^4[0, \pi]$ , если  $f(x) \in \mathbb{W}_2^4[0, \pi]$  и удовлетворяет краевым условиям (3).

При анализе КЗ (1), (4) в качестве фазового пространства уместно выбрать  $\mathbb{W}_{2,D}^4[0, \pi]$ , где  $f(x) \in \mathbb{W}_{2,D}^4[0, \pi]$ , если  $f(x) \in \mathbb{W}_2^4[0, \pi]$  и функция  $f(x)$  удовлетворяет однородным краевым условиям Дирихле (4).

Из приведенных построений вытекает следующее. Пусть рассматривается линейная КЗ (5) и собственные значения ЛДО из правой части таковы, что выполнены неравенства  $\lambda_n < 0$ , то решения линейной КЗ (5) асимптотически устойчивы. Асимптотически устойчивым будет и нулевое решение КЗ (1), (3). Если же существует такой номер  $k$ , для которого  $\lambda_k > 0$ , то решения линейной КЗ (5) и нулевое решение КЗ (1), (3) будут уже неустойчивыми. Аналогичные замечания справедливы для КЗ (6) и нелинейной КЗ (1), (4).

Особый случай возникает, если  $\lambda_n \leq 0$  и  $\lambda_m = 0$  при некоторых  $m$ . Тогда при анализе устойчивости нулевых решений у КЗ (1), (3) и (1), (4) возникают критические случаи.

Обозначим через  $D_1$  множество параметров  $(b, a)$ , при которых нулевое решение соответствующей КЗ асимптотически устойчиво, через  $D_2$  — множество тех пар  $(b, a)$ , при выборе которых нулевое решение неустойчиво. Наконец, множество  $D_3$  содержит те пары  $(b, a)$ , при которых получаем критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения нелинейной КЗ.

Пусть сначала рассматривается КЗ (1), (3). Рассмотрим ломанную  $(P_0, P_1, \dots, P_m, \dots)$ , состоящую из отрезков прямых, соединяющую вершины  $P_m$  со следующими координатами:

$$P_0(-\infty, 0), P_1(1, 0), \dots, P_m(b_m, a_m), \dots,$$

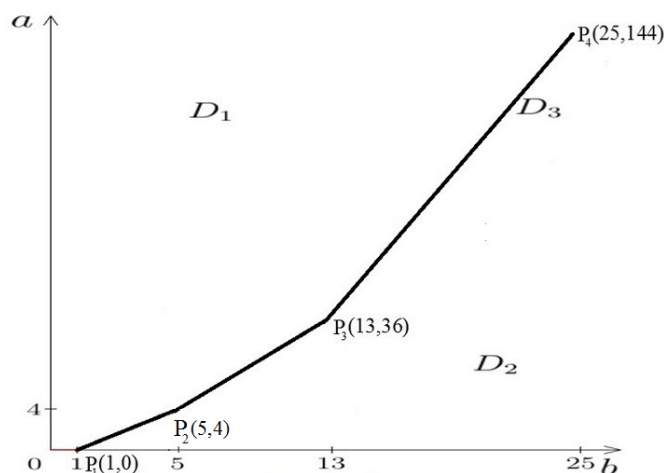
где  $b_m = m^2 + (m+1)^2$ ,  $a_m = m^2(m+1)^2$  (см. фиг. 1). Звенья этой ломанной можно задать следующим образом:

0) если  $b \leq 1$ , то  $a = 0$ ; 1) если  $b \in [1, 5]$ , то  $a = b - 1$ ; ...  $m$ ) если  $b \in [m^2, (m+1)^2]$ , то  $a = bm^2 - m^4$ .

Выше ломанной  $P_0, P_1, \dots, P_m, \dots$  расположены точки  $M(b, a)$ , координаты которых обладают следующим свойством: квадратный трехчлен  $Q_2(k^2) = -k^4 + bk^2 - a < 0$  ( $Q_2(k^2) = \lambda_k$ ) при всех целых  $k$ . Ниже ломанной  $P_0, P_1, \dots, P_m$  лежат точки с координатами  $(b, a)$ , при выборе которых у квадратного трехчлена  $Q_2(k^2)$  есть положительные значения хотя бы при одном  $m$ . Наконец, для координат точек, расположенных на ломанной, характерна реализация критического случая, т.е.  $Q_2(k^2) \leq 0$  и  $Q_2(m^2) = 0$  при некоторых  $m$ . Доказательство этих замечаний вытекает из анализа квадратного трехчлена  $R_2(\eta) = \eta^2 - b\eta + a$ , где при  $\eta = k^2$  справедливо равенство  $R_2(\eta) = -Q_2(k^2)$ . В частности, при  $b = m^2 + (m+1)^2$ ,  $a = m^2(m+1)^2$  он имеет корни  $m^2, (m+1)^2$ . Если же  $b = m^2 + (m+\delta)^2$ ,  $a = m^2(m+\delta)^2$ , где  $\delta \in (-1, 1)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , то квадратный трехчлен  $R_2(\eta)$  имеет натуральный корень  $\eta_1 = m^2$ , а  $\eta_2 = (m+\delta)^2$ , т.е. второй корень находится ближе к  $\eta_1$ , чем числа  $(m-1)^2$  и  $(m+1)^2$ . При  $\delta = 0$  квадратный трехчлен  $R_2(\eta)$  имеет двукратный корень  $\eta = m^2$ .

Если же рассмотреть КЗ (1), (3) при  $a = 0$ ,  $c = 0$ , то в таком случае она имеет однопараметрическое семейство пространственно однородных состояний равновесия  $u(t, x) = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Добавим, что если обозначить через

$$M_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(t, x) dx,$$



Фиг. 1.

то справедливо равенство  $M_0(u) = \beta$ , где  $\beta = M_0(f(x))$ ,  $u(0, x) = f(x)$ . Следовательно, в пространстве начальных условий аффинное подпространство функций  $f(x)$ , для которых  $M(f) = \beta$ , будет инвариантным подпространством для решений КЗ (1), (3). При  $\beta = 0$  оно будет уже линейным, а не аффинным.

Отметим, что при анализе устойчивости нулевого решения КЗ (1), (4) в линейном приближении справедливы аналогичные выводы, но с одним небольшим отличием. Звено  $P_0 P_1$  ломанной  $P_0, P_1, \dots, P_m, \dots$  принадлежит области  $D_1$ , а не  $D_3$ .

Далее анализ нелинейного дифференциального уравнения (1) предполагает, что оно дополнено краевыми условиями (3).

## 2. ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 1 В КОНВЕКТИВНОМ УРАВНЕНИИ КАНА–ХИЛЛИАРДА–ОНО

В данном разделе рассмотрим КЗ (1), (3) при

$$a = a_m(\delta)(1 - \alpha_1 \varepsilon), b = b_m(\delta)(1 + \alpha_2 \varepsilon),$$

где, в свою очередь,  $a_m(\delta) = m^2(m + \delta)^2$ ,  $b_m(\delta) = m^2 + (m + \delta)^2$ ,  $\delta \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ , т.е. при  $\varepsilon = 0$  при анализе устойчивости нулевого решения КЗ (1), (3) реализуется критический случай простого нулевого собственного значения спектра устойчивости. Подчеркнем, что вариант  $\delta = 0$  следует рассматривать отдельно и такой вариант будет рассмотрен в конце данного раздела. Наконец,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $0 < \varepsilon_0 < 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

При отмеченном в начале раздела выборе коэффициентов  $a$  и  $b$  КЗ (1), (3) можно переписать в следующем виде:

$$u_t = A(\varepsilon)u + F(u), \quad (7)$$

$$u_x|_{x=0, x=\pi} = u_{xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0. \quad (8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A(\varepsilon)u &= A_0u + \varepsilon A_1u, \quad A_0u = -u_{xxxx} - b_m(\delta)u_{xx} - a_m(\delta)u, \\ A_1u &= -b_m(\delta)\alpha_2 u_{xx} + a_m(\delta)\alpha_1 u, \quad F(u) = -c(u^2)_x - d(u^3)_{xx}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что ЛДО  $A(\varepsilon)$  в нашем случае имеет простое собственное число  $\lambda_m(\varepsilon) = (\alpha_2 b_m(\delta)m^2 + \alpha_1 a_m(\delta))\varepsilon$ , а остальные значения лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством  $\operatorname{Re} \lambda_k(\varepsilon) \leq -\alpha_0 < 0$ ,  $k \neq m$ . Ясно, что  $\lambda_m(0) = 0$  и  $\lambda'_m(0) = \gamma_m = \alpha_2 b_m(\delta)m^2 + \alpha_1 a_m(\delta) \neq 0$ , если не выбирать  $\alpha_2$  и  $\alpha_1$  специальным образом.

Из работ [19, 20] вытекает, что КЗ (7), (8) в окрестности нулевого решения имеет одномерное инвариантное многообразие  $V_1(\varepsilon)$ . Решения КЗ (7), (8), принадлежащие  $V_1(\varepsilon)$ , могут быть восстановлены после анализа скалярного дифференциального уравнения

$$z_t = \varphi(z, \varepsilon) = \varphi_0(z) + \varepsilon \varphi_1(z, \varepsilon), \quad (9)$$

для вспомогательной переменной  $z(t)$ , где  $\varphi_0(z)$ ,  $\varphi_1(z, \varepsilon)$  достаточно гладкие функции переменных  $z$  и  $\varepsilon$ , если  $|z| < \delta_0$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . При этом  $\varphi_0(0) = 0$ ,  $\varphi'_0(0) = 0$ ,  $\varphi_1(0, \varepsilon) = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}|_{z=0} = \varepsilon \gamma_m$ ,  $\gamma_m = \alpha_2 b_m(\delta)m^2 + \alpha_1 a_m(\delta) \neq 0$ .

Следовательно, основную нагрузку несет слагаемое  $\varphi_0(z)$  или иначе вспомогательное дифференциальное уравнение

$$z_t = \varphi_0(z). \quad (10)$$

Уравнение (10) это уравнение на одномерном инвариантном многообразии  $V_1(0)$  КЗ (7), (8), рассматриваемой при  $\varepsilon = 0$ .

Для определения правой части уравнения (10) используем алгоритм, который ведет свое начало от работ А.М. Ляпунова, Н.Н. Боголюбова, Н.М. Крылова. Согласно этому методу построения уравнения (10) (и впоследствии (9)) решения КЗ (7), (8) при  $\varepsilon = 0$ , принадлежащие  $V_1(\varepsilon)$ , следует искать в виде суммы

$$u(t, x) = zv_m(x) + z^2 w_m(x) + z^3 y_m(x) + o(z^3), \quad (11)$$

где  $z = z(t)$ ,  $v_m(x) = \cos mx$ , функции  $w_m(x)$ ,  $y_m(x)$  подлежат определению как соответствующие решения вспомогательных линейных неоднородных КЗ,  $z(t)$  — решения обыкновенного дифференциального уравнения (10). При этом

$$\varphi_0(z) = l_2 z^2 + l_3 z^3 + o(z^3).$$

Постоянные  $l_2, l_3$  могут быть определены в процессе реализации алгоритма построения правой части уравнения (10) и членов суммы (11).

**Замечание 1.** В теории динамических систем уравнения (9), (10) принято называть нормальными формами (НФ). Добавим, что согласно методу инвариантных (интегральных) многообразий функции  $w_m(x)$ ,  $y_m(x)$  должны удовлетворять равенствам

$$M_m(w_m(x)) = M_m(y_m(x)) = 0,$$

где

$$m \in \mathbb{N}, M_m(\varphi(x)) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \cos mx dx.$$

При реализации алгоритма построения инвариантного многообразия  $V_1(0)$  и правой части НФ (10) следует различать два случая.

**Случай 1:**  $m = 2k - 1$ ;

**Случай 2:**  $m = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

**Замечание 2.** Рассмотрим неоднородную КЗ

$$A_0 p(x) = f(x), \quad p_x(x)|_{x=0, x=\pi} = p_{xxx}(x)|_{x=0, x=\pi} = 0.$$

Она имеет решение, если  $M_m(f(x)) = 0$ , а условие  $M_m(p(x)) = 0$  выделяет единственное решение последней КЗ (см., например, [21]).

Подставим сумму (11) с учетом уравнения (10) в КЗ (7), (8), рассматриваемую при  $\varepsilon = 0$ . После выделения слагаемых при одинаковых степенях  $z$  получим следующие неоднородные КЗ для определения функций  $w_m(x)$ ,  $y_m(x)$ :

$$-A_0 w_m = -l_2 v_m(x) - c(v_m^2(x))_x, \quad (12)$$

$$w_{m_x}|_{x=0, x=\pi} = w_{m_{xxx}}|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad M_m(w_m) = 0, \quad (13)$$

$$-A_0 y_m = -l_3 v_m(x) - 2l_2 w_m(x) - 2c(v_m(x)w_m(x))_x - d(v_m^3)_{xx}, \quad (14)$$

$$y_{m_x}|_{x=0, x=\pi} = y_{m_{xxx}}|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad M_m(y_m) = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим КЗ (12), (13). При нечетном  $m$  ( $m = 2k - 1$ ) она разрешима, если  $l_2 = 8c/(3\pi)$  и  $l_2 \neq 0$  при  $c \neq 0$ . Случай  $c = 0$  будет рассмотрен отдельно. Что касается четного  $m$ , то в этом случае КЗ (12), (13) имеет решение, если  $l_2 = 0$ .

Итак, при нечетном  $m$  получаем, что

$$\varphi_0(x) = \frac{8c}{3\pi} z^2 + O(z^3).$$

При  $c \neq 0$ , как хорошо известно (см., например, [22, 23]), этого достаточно для анализа локальных бифуркаций.

Иная ситуация складывается при  $m = 2k$ , если  $c \neq 0$ , а также при  $m = 2k - 1$ , если  $c = 0$ . В таком случае необходимо определить величину  $l_3$ .

Рассмотрим сначала вариант, когда  $m = 2k$ . В таком случае ( $c \neq 0$ ) после стандартных, но достаточно громоздких вычислений можно показать, что

$$w_{2k}(x) = cQ_0(Q_1 \cos(2k + \delta)x - Q_2 \sin(2k + \delta)x + Q_3 \sin 2kx + Q_4 \sin 4kx),$$

где, в свою очередь,

$$Q_0 = \frac{4k}{(4k + \delta)\delta(12k^2 - 4k\delta - \delta^2)}, \quad Q_1 = \frac{2k(1 - \cos \pi\delta)}{(2k + \delta) \sin \pi\delta},$$

$$Q_2 = \frac{2k}{2k + \delta}, \quad Q_3 = \frac{12k^2 - 4k\delta - \delta^2}{12k^2}, \quad Q_4 = \frac{(4k + \delta)\delta}{24k^2}.$$

Из условий разрешимости КЗ (14), (15) после вычисления соответствующих интегралов вытекает, что

$$l_3 = l_{31} + l_{32}, \quad l_{31} = 3k^2 d,$$

$$l_{32} = -\frac{4c^2 Q_0}{\pi} \left[ \left( \frac{4k^2}{(6k + \delta)(2k - \delta)} - 1 \right) (Q_1(1 - \cos \pi\delta) + Q_2 \sin \pi\delta) + \frac{\pi Q_4 k}{2} \right].$$

Естественно, что в общем случае  $l_3 \neq 0$ .

Как отмечалось ранее, случай, когда  $c = 0$  заслуживает отдельного изучения. При таком варианте выбора  $c$  КЗ (12), (13) разрешима, если  $l_2 = 0$ . При этом КЗ (12), (13) имеет в качестве подходящего решения  $w_m = 0$ .

Такой вывод справедлив при любом  $m$ : четном и нечетном. Наконец, анализ неоднородной КЗ (14), (15) позволяет заключить, что  $l_3 = 3dm^2/4$ . Ляпуновская величина  $l_3 \neq 0$ , если  $d \neq 0$ .

Перейдем теперь к анализу НФ (9). Это дифференциальное уравнение следует изучить в трех случаях:

$$1) m = 2k - 1; \quad 2) m = 2k; \quad 3) c = 0; \quad m \in \mathbb{N}.$$

В первом случае получаем, что уравнение (9) приобретает следующий вид:

$$z_t = \varepsilon \gamma_{2k-1} z + l_2 z^2 + \varphi_2(z, \varepsilon) \quad (l_2 \neq 0), \quad (16)$$

где  $\varphi_2(z, \varepsilon)$  — достаточно гладкая функция, для которой справедливо следующее неравенство:

$$|\varphi_2(z, \varepsilon)| \leq K(|z|^3 + \varepsilon^2|z| + \varepsilon|z|^2).$$

Наконец,  $\gamma_{2k-1} = \alpha_2 b_{2k-1}(\delta)(2k-1)^2 + \alpha_1 a_{2k-1}(\delta)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Во втором и третьем случаях НФ (9) может быть записана в следующем виде:

$$z_t = \varepsilon \gamma_m z + l_3 z^3 + \varphi_3(z, \varepsilon), \quad (17)$$

где  $\varphi_3(z, \varepsilon)$  — достаточно гладкая функция, для которой справедливо следующее неравенство:

$$|\varphi_3(z, \varepsilon)| \leq K(|z|^4 + \varepsilon^2|z| + \varepsilon|z|^2).$$

При этом, если реализуется второй случай, то  $\gamma_m = \gamma_{2k}$ , а  $l_3 = l_{31}(2k) + l_{32}(2k)$ .

В третьем случае  $l_3 = l_{31}(m) = 3dm^2/4$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Объединяя второй и третий случаи, будем писать  $\gamma_m$  и  $l_3$ .

Используя результаты методов теории возмущений, можно доказать два утверждения.

**Лемма 1.** Пусть  $\gamma_{2k-1}, l_2 \neq 0$ . Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  ( $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m)$ ) дифференциальное уравнение (16) имеет ненулевое состояние равновесия

$$S_2 : z = -\varepsilon \frac{\gamma_{2k-1}}{l_2} + o(\varepsilon).$$

Состояние равновесия  $S_2$  асимптотически устойчиво, если  $\gamma_{2k-1} > 0$  и неустойчиво при  $\gamma_{2k-1} < 0$ . Нулевое состояние равновесия  $S_1$  асимптотически устойчиво, если  $\gamma_{2k-1} < 0$  и неустойчиво при  $\gamma_{2k-1} > 0$ .

Анализ устойчивости использует в рассмотренном случае теорему об устойчивости по первому (линейному) приближению.

**Замечание 3.** Пусть  $\gamma_{2k-1} = 0$  или  $\varepsilon = 0$ , тогда при  $l_2 \neq 0$  НФ (16) не имеет ненулевых состояний равновесия. При этом нулевое состояние равновесия неустойчиво. Последний вывод вытекает из известной теоремы Четаева (см., например, [24]).

Перейдем теперь к анализу НФ (17).

**Лемма 2.** Пусть  $l_3, \gamma_m \neq 0$  ( $m = 2k, c \neq 0$  или  $m \in \mathbb{N}$ , но  $c = 0$ ). Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$  ( $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m)$ ) такое, что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  дифференциальное уравнение (17) имеет два ненулевых состояния равновесия

$$S_{\pm} : z_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{\varepsilon \gamma_m}{l_3}} + o(\varepsilon^{1/2}),$$

если справедливо неравенство  $\gamma_m l_3 < 0$ .

Каждое из этих двух состояний равновесия асимптотически устойчиво, если  $\gamma_m > 0$  ( $l_3 < 0$ ) и неустойчиво, если  $\gamma_m < 0$  ( $l_3 > 0$ ). Нулевое состояние равновесия  $S_1$  НФ (17) асимптотически устойчиво при  $\gamma_m < 0$  и оно неустойчиво, если  $\gamma_m > 0$ .

**Замечание 4.** Если  $\gamma_m = 0$  или  $\varepsilon = 0$ , а  $l_3 \neq 0$ , то НФ (17) не имеет ненулевых состояний равновесия. При этом нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво, если  $l_3 < 0$  и оно неустойчиво, если  $l_3 > 0$ . Отметим, что коэффициент  $l_3$  достаточно часто называют ляпуновской величиной, так как именно знак этого коэффициента в критическом случае определяет устойчивость тривиального состояния равновесия.

Доказательство замечания 4 основано на использовании функции Ляпунова (функции Четаева)  $V(z) = z^2$  (см. [24]).

Из результатов работ [19, 20, 25] (см. также [12–14]) и лемм 1, 2 вытекает справедливость следующих двух утверждений, соответствующих леммам 1 и 2.

**Теорема 1.** Пусть  $m = 2k - 1, k = 1, 2, 3, \dots$ , т.е.  $m$  — нечетно. Тогда существует  $\varepsilon_0 > 0$  ( $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m)$ ) такое, что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  состоянию равновесия  $S_2$  НФ (16) соответствует пространственно неоднородное состояние равновесия КЗ (1), (3)

$$S_2(\varepsilon) : u(t, x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) = -\varepsilon \frac{\gamma_{2k-1}}{l_2} \cos(2k-1)x + o(\varepsilon).$$

При этом состояние равновесия  $S_2(\varepsilon)$  наследует устойчивость состояния равновесия  $S_2$  НФ (16). Нулевое состояние равновесия КЗ (1), (3) наследует устойчивость нулевого состояния равновесия  $S_1$  НФ (16).

**Теорема 2.** Пусть  $c \neq 0, m = 2k, k = 1, 2, 3, \dots$  или  $c = 0, a \in \mathbb{N}$ . Тогда можно указать  $\varepsilon_0 > 0$  ( $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m)$ ) такое, что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  состояниям равновесия  $S_{\pm}$  НФ (17) соответствуют два следующих состояния равновесия КЗ (1), (3)

$$S_{\pm}(\varepsilon) : u(t, x, \varepsilon) = u_{\pm}(x, \varepsilon) = \pm \sqrt{-\frac{\varepsilon \gamma_m}{l_3}} \cos mx - \frac{\varepsilon \gamma_m}{l_3} w_m(x) + o(\varepsilon),$$

где функция  $w_m(x)$  была указана ранее в процессе построения уравнения интегрального многообразия, т.е. в процессе определения коэффициентов суммы (11).

Состояния равновесия  $S_{\pm}(\varepsilon)$  асимптотически устойчивы (неустойчивы), если асимптотически устойчивы (неустойчивы) состояния равновесия  $S_{\pm}$  НФ (17).

Нулевое состояние равновесия КЗ (1), (3) в данном случае наследует устойчивость нулевого решения НФ (17).

**Замечание 5.** Пусть  $\delta = 0$ . Следовательно, в КЗ (7), (8) изменится только коэффициенты ЛДО  $A(\varepsilon)$ . Теперь

$$\begin{aligned} A(\varepsilon)u &= A_0u + \varepsilon A_1u, \quad A_0u = -u_{xxxx} - b_mu_{xx} - a_mu, \\ A_1u &= -b_m\alpha_2u_{xx} + a_m\alpha_1u, \quad b_m = 2m^2, \quad a_m = m^4. \end{aligned}$$

Несмотря на это обстоятельство в новой редакции для КЗ (7), (8) реализуется случай близкий к критическому простого нулевого собственного значения. Как и при  $\delta \neq 0$  в рассматриваемой в данном замечании ситуации следует различать три случая:

$$1) m = 2k - 1; \quad 2) m = 2k; \quad 3) c = 0 \text{ и } m \in \mathbb{N}.$$

Сразу отметим, что надкритичности  $\gamma_m$  вычисляются одинаково при всех вариантах выбора  $m$  и  $c$ . Ясно что в данном случае

$$\gamma_m = \alpha_2 b_m(0)m^2 + \alpha_1 a_m(0) = 2\alpha_2 m^4 + \alpha_1 m^4.$$

При анализе задачи в нелинейной постановке, т.е. при сведении бифуркационной задачи к анализу НФ в случаях 1) и 3) нет ничего нового по сравнению с аналогичными построениями при  $\delta \neq 0$ . При  $m = 2k - 1$  получаем НФ (16), в которой  $\gamma_{2k-1} = (2\alpha_2 + \alpha_1)(2k - 1)^4$ , а для  $l_2$  получаем уже приведенное ранее выражение. Аналогичное замечание справедливо и при  $c = 0$ .

Пусть теперь  $m = 2k$  и  $c \neq 0$ . Тогда можно отметить некоторые изменения при определении коэффициентов  $l_3$  НФ (17). Изменится слагаемое в сумме (11)

$$w_2(x) = \eta(3\pi k \cos 2kx + \sin 2kx - 6kx \cos 2kx + \sin 4kx),$$

а  $\eta = c/(72k^3)$ . Наконец, ляпуновская величина из НФ (17) будет иметь следующий вид:

$$l_3 = l_{31} + l_{32} = 3k^2 d + \frac{7c^2}{36k^2}.$$

Все эти пояснения показывают, что при  $\delta = 0$  теорема 2 остается также справедливой в целом, и изменения касаются лишь асимптотической формулы для пространственно неоднородных решений, в которых второе слагаемое, естественно, приобретает иной вид.

### 3. БИФУРКАЦИОННАЯ ЗАДАЧА КОРАЗМЕРНОСТИ 2

Рассмотрим теперь КЗ (1), (3), если

$$b(\varepsilon) = b_m(1)(1 + \alpha_2\varepsilon), \quad a(\varepsilon) = a_m(1)(1 - \alpha_1\varepsilon),$$

где  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, a_m(1) = m^2(m + 1)^2, b_m(1) = m^2 + (m + 1)^2, m = 1, 2, 3, \dots, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . При таком выборе коэффициентов в уравнении (1) для КЗ (1), (3) реализуется случай, близкий к критическому, двукратного нулевого значения у ЛДО  $A_0 = A(0)$ . Напомним, что в таком случае у ЛДО  $A_0$  есть двукратное нулевое собственное число, которому отвечают два собственных элемента  $\cos mx, \cos(m + 1)x$ . В свою очередь, у ЛДО  $A(\varepsilon) = -\partial^4 - b(\varepsilon)\partial^2 - a(\varepsilon)$  есть собственные значения  $\lambda_m(\varepsilon)$  и  $\lambda_{m+1}(\varepsilon)$ , где

$$\begin{aligned} \lambda_m(\varepsilon) &= \gamma_m\varepsilon, \quad \lambda_{m+1}(\varepsilon) = \gamma_{m+1}\varepsilon, \\ \gamma_m &= m^2(m^2 + (m + 1)^2)\alpha_2 + m^2(m + 1)^2\alpha_1, \quad \gamma_{m+1} = (m + 1)^2(m^2 + (m + 1)^2)\alpha_2 + m^2(m + 1)^2\alpha_1, \end{aligned}$$

отвечающие соответственно собственным функциям  $\cos mx, \cos(m+1)x$ . Остальные собственные значения ЛДО  $A(\varepsilon)$  лежат в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq -\alpha_0 < 0$  ( $k \neq m, m+1$ ), если, конечно, величина  $\varepsilon$  достаточно мала.

Итак, в этом разделе будем изучать КЗ

$$u_t = A(\varepsilon)u - c(u^2)_x - d(u^3)_{xx}, \quad (18)$$

$$u_x|_{x=0, x=\pi} = u_{xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0. \quad (19)$$

При данном выборе параметров задачи (коэффициентов ЛДО  $A(\varepsilon)$ ) КЗ (18), (19) в окрестности нулевого состояния равновесия имеет локально инвариантное многообразие  $V_2(\varepsilon)$ , размерность которого равна двум. При этом решения КЗ (18), (19), принадлежащие  $V_2(\varepsilon)$  и достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия, можно искать в следующем виде (см. [14]):

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon(z_1 \cos mx + z_2 \cos(m+1)x) + \varepsilon^2 w(x, z_1, z_2) + O(\varepsilon^3), \quad (20)$$

где  $z_1 = z_1(s), z_2 = z_2(s), s = \varepsilon t$  — медленное время,  $w(x, z_1, z_2)$  — гладкая функция переменных  $x, z_1, z_2$ , если  $x \in [0, \pi], z_1^2 + z_2^2 < \mu^2$ , где  $\mu$  — некоторое положительное число. Функция  $w(x, z_1, z_2)$  удовлетворяет при всех рассматриваемых  $z_1, z_2$  однородным краевым условиям Неймана (3), а также справедливы тождества

$$M_m(w) = M_{m+1}(w) = 0,$$

где

$$M_m(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi w(x, z_1, z_2) \cos mx dx, \quad M_{m+1}(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi w(x, z_1, z_2) \cos(m+1)x dx.$$

**Замечание 6.** Рассмотрим КЗ

$$A_0 \varphi(x) = \psi(x), \quad \varphi_x|_{x=0, x=\pi} = \varphi_{xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0.$$

Как известно, она разрешима [21], если выполнены равенства

$$M_m(\psi) = M_{m+1}(\psi) = 0,$$

а равенство  $M_m(\varphi) = M_{m+1}(\varphi) = 0$  выделяет одно решение последней КЗ.

Сумма (20) содержит две вспомогательные переменные  $z_1(s), z_2(s)$ , которые находим как решения системы дифференциальных уравнений (НФ)

$$z'_1 = \varphi_1(z_1, z_2, \varepsilon), \quad z'_2 = \varphi_2(z_1, z_2, \varepsilon). \quad (21)$$

В ситуации общего положения для анализа бифуркаций вполне достаточно изучения укороченного варианта системы (21), т.е.

$$z'_1 = \psi_1(z_1, z_2), \quad z'_2 = \psi_2(z_1, z_2), \quad (22)$$

где  $\psi_j(z_1, z_2) = \varphi_j(z_1, z_2, 0), j = 1, 2$ , а  $z'_1, z'_2$  — производные функций  $z_1(s), z_2(s)$  по  $s$ .

Найдем функции  $\psi_1(z_1, z_2), \psi_2(z_1, z_2)$  из правых частей системы (22). Для этого сумму (20) подставим в КЗ (18), (19) и выделим слагаемые при  $\varepsilon^2$ . В результате получим линейную неоднородную КЗ для определения  $w(x, z_1, z_2)$ , которую можно записать в следующем виде:

$$-A_0 w = -(z'_1 \cos mx + z'_2 \cos(m+1)x) + A_1(z_1 \cos mx + z_2 \cos(m+1)x) - c((z_1 \cos mx + z_2 \cos(m+1)x)^2)_x, \quad (23)$$

$$w_x|_{x=0, x=\pi} = w_{xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad M_m(w) = M_{m+1}(w) = 0. \quad (24)$$

Напомним, что  $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1$ , где  $A_0 = -\partial^4 - b_m(1)\partial^2 - a_m(1)$ ,  $A_1 = -b_m(1)\alpha_2\partial^2 + a_m(1)\alpha_1$ .

Условия разрешимости КЗ (23), (24) позволяют определить вид функций  $\psi_1(z_1, z_2), \psi_2(z_1, z_2)$ . После вычисления соответствующих интегралов в случае четного  $m$  ( $m = 2k$ ) получим следующую систему:

$$z'_1 = \gamma_{2k} z_1 + \alpha_{2k} z_1 z_2, \quad z'_2 = \gamma_{2k+1} z_2 + \beta_{2k} z_1^2 + \delta_{2k} z_2^2, \quad (25)$$

где

$$\gamma_{2k} = 4k^2(\alpha_2(4k^2 + (2k+1)^2) + \alpha_1(2k+1)^2), \quad \gamma_{2k+1} = (2k+1)^2(\alpha_2(4k^2 + (2k+1)^2) + \alpha_1 4k^2), \quad (26)$$

$$\alpha_{2k} = \frac{8c(16k^3 - 6k - 1)}{\pi(6k + 1)(4k^2 - 1)}, \quad \beta_{2k} = \frac{32ck^2}{\pi(6k + 1)(2k - 1)}, \quad \delta_{2k} = \frac{8c}{3\pi}.$$

Подчеркнем, что  $\alpha_{2k}, \beta_{2k}, \delta_{2k} > 0$ .

Если же  $m = 2k - 1$ , то получаем систему дифференциальных уравнений

$$z'_1 = v_{2k-1}z_1 + \beta_{2k-1}z_1^2 + \delta_{2k-1}z_2^2, \quad z'_2 = v_{2k}z_2 + \alpha_{2k-1}z_1z_2, \quad (27)$$

где

$$v_{2k-1} = (2k - 1)^2(\alpha_2((2k - 1)^2 + 4k^2) + \alpha_1 4k^2), \quad v_{2k} = 4k^2(\alpha_2((2k - 1)^2 + 4k^2) + \alpha_1(2k - 1)^2), \quad (28)$$

$$\beta_{2k-1} = \frac{8c}{3\pi}, \quad \delta_{2k-1} = \frac{32ck^2}{\pi(6k - 1)(2k + 1)}, \quad \alpha_{2k-1} = \frac{8c(16k^3 - 6k + 1)}{\pi(6k - 1)(4k^2 - 1)}.$$

В данном случае также справедливы неравенства  $\beta_{2k-1} > 0, \delta_{2k-1} > 0, \alpha_{2k-1} > 0$ .

Отметим, что равенства (26), а также равенства (28) можно интерпретировать как системы линейных алгебраических уравнений для определения  $\alpha_1, \alpha_2$ , считая пары  $(\gamma_{2k}, \gamma_{2k+1})$  и  $(v_{2k-1}, v_{2k})$  заданными параметрами. Обе системы однозначно разрешимы. Следовательно, пары  $(\gamma_{2k}, \gamma_{2k+1})$  и  $(v_{2k-1}, v_{2k})$  можно и удобно считать независимыми параметрами при анализе соответствующих НФ (25) и (27).

Системы дифференциальных уравнений (25), (27) (НФ (25), (27)) рассмотрим отдельно. При этом анализ НФ содержателен, если  $c \neq 0$ .

**Лемма 3.** НФ (25) имеет следующие состояния равновесия:

$$S_0 : z_1 = z_2 = 0; \quad S_1 : z_1 = 0, \quad z_2 = -\frac{\gamma_{2k+1}}{\delta_{2k}};$$

$$S_{2\pm} : z_{1\pm} = \pm \sqrt{\frac{\gamma_{2k}(\gamma_{2k+1}\alpha_{2k} - \delta_{2k}\gamma_{2k})}{\alpha_{2k}^2\beta_{2k}}}, \quad z_{2\pm} = -\frac{\gamma_{2k}}{\alpha_{2k}}(z_{2+} = z_{2-}).$$

Состояния равновесия  $S_{2\pm}$  существуют и будут иметь обе ненулевые компоненты, если подкоренное выражение положительно. В рассмотренной ситуации оба эти состояния равновесия неустойчивы (седловые) при любом выборе параметров.

Состояние равновесия  $S_1$  асимптотически устойчиво, если справедливы два следующих неравенства:

$$\Delta_1 = \frac{\gamma_{2k}\delta_{2k} - \alpha_{2k}\gamma_{2k-1}}{\delta_{2k}} < 0, \quad \Delta_2 = -\gamma_{2k+1} < 0$$

и оно неустойчиво, если хотя бы одна из величин  $\Delta_1, \Delta_2$  положительна.

Наконец, состояние равновесия  $S_0$  асимптотически устойчиво, если  $\gamma_{2k}$  и  $\gamma_{2k+1}$  отрицательны и оно неустойчиво, если хотя бы одна из этих величин положительна.

Условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) получены на основе использования теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Отметим, что варианты, когда  $\Delta_1, \Delta_2 \leq 0$  и хотя бы одна из этих величин равна нулю, приводит к критическому случаю в задаче об устойчивости состояния равновесия  $S_1$ . При этом требуется учет слагаемых более высокого порядка малости в НФ (25). Аналогичные замечания относятся и к результатам анализа состояния равновесия  $S_0$ , т.е. при  $\gamma_{2k}, \gamma_{2k+1} \leq 0$  и равенстве нулю хотя бы одной из указанных постоянных также реализуется критический случай в задаче об устойчивости в смысле теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости в линейном приближении.

Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 4.** НФ (27) имеет следующие состояния равновесия:

$$S_0 : z_1 = z_2 = 0; \quad S_1 : z_1 = -\frac{v_{2k-1}}{\beta_{2k-1}}, \quad z_2 = 0;$$

$$S_{2\pm} : z_1 = -\frac{v_{2k}}{\alpha_{2k-1}}, \quad z_{2\pm} = \pm \sqrt{\frac{v_{2k}(v_{2k-1}\alpha_{2k-1} - \beta_{2k-1}v_{2k})}{\alpha_{2k-1}^2\delta_{2k-1}}}.$$

Состояния равновесия  $S_{2\pm}$  существуют, если подкоренное выражение положительно. Данные состояния равновесия, как и аналогичном случае при анализе НФ (25), седловые.

Состояние равновесия  $S_1$  асимптотически устойчиво, если

$$\Delta_1 = -\gamma_{2k-1} < 0 \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \frac{v_{2k}\beta_{2k-1} - \alpha_{2k-1}v_{2k-1}}{\beta_{2k-1}} < 0.$$

Если же хотя бы одна из этих величин положительна, то  $S_1$  неустойчиво.

Наконец,  $S_0$  асимптотически устойчиво, если  $v_{2k-1}, v_{2k} < 0$  и оно неустойчиво, если хотя бы одна из этих величин положительна.

Из результатов работ [19, 20, 25] вытекает справедливость двух следующих утверждений.

**Теорема 3.** Существует такая положительная постоянная  $\varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(m)$ ), что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  ненулевым состояниям равновесия  $S_1, S_{2\pm}$  НФ (25) соответствуют следующие пространственно неоднородные состояния равновесия КЗ (1), (3), в которой  $a = a_m(1)(1 - \alpha_1\varepsilon)$ ,  $b = b_m(1)(1 + \alpha_2\varepsilon)$ ,  $m = 2k, k \in \mathbb{N}$ . Так состоянию равновесия  $S_1$  соответствует пространственно неоднородное состояние равновесия

$$S_1(\varepsilon) : u = u(x, \varepsilon) = \varepsilon \left( -\frac{\gamma_{2k+1}}{\delta_{2k}} \cos(2k+1)x \right) + O(\varepsilon^2).$$

Данное состояние равновесия асимптотически устойчиво (неустойчиво), если этим свойством обладает состояние равновесия  $S_1$  НФ (25).

Состояниям равновесия  $S_{2\pm}$  НФ (25) соответствуют два неустойчивых пространственно неоднородных состояния равновесия  $S_{2\pm}(\varepsilon)$  КЗ (1), (3). Для них справедливы асимптотические формулы

$$S_{2\pm}(\varepsilon) : u = u_{\pm}(x, \varepsilon) = \varepsilon \left( \pm \eta_1 \cos 2kx + \eta_2 \cos(2k+1)x \right) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\gamma_{2k}(\gamma_{2k+1}\alpha_{2k} - \delta_{2k}\gamma_{2k})}{\alpha_{2k}^2\beta_{2k}}}, \quad \eta_2 = -\frac{\gamma_{2k}}{\alpha_{2k}}.$$

Перейдем теперь к варианту, если  $m = 2k - 1$ , т.е. НФ (27).

**Теорема 4.** Существует такая положительная постоянная  $\varepsilon_2$  ( $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(m)$ ), что каждому ненулевому состоянию равновесия НФ (27) соответствует пространственно неоднородное состояние равновесия КЗ (1), (3):  $S_1 \rightarrow S_1(\varepsilon)$ ,  $S_{2\pm} \rightarrow S_{2\pm}(\varepsilon)$ . Для таких состояний равновесия справедливы асимптотические формулы

$$S_1(\varepsilon) : u = u(x, \varepsilon) = \varepsilon \left( -\frac{v_{2k-1}}{\beta_{2k-1}} \cos(2k-1)x \right) + O(\varepsilon^2).$$

Состояния равновесия  $S_1(\varepsilon)$  наследуют устойчивость состояния равновесия  $S_1$  НФ (27).

Наконец, состояниям равновесия  $S_{2\pm}$  НФ (27) соответствуют два пространственно неоднородных неустойчивых (седловых) состояния равновесия КЗ (1), (3), для которых справедливы асимптотические формулы

$$S_{2\pm}(\varepsilon) : u_{\pm} = u_{\pm}(x, \varepsilon) = \varepsilon(\eta_3 \cos(2k-1)x \pm \eta_4 \cos 2kx) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\eta_3 = -\frac{v_{2k}}{\alpha_{2k-1}}, \quad \eta_4 = \sqrt{\frac{v_{2k}(v_{2k-1}\alpha_{2k-1} - \beta_{2k-1}v_{2k})}{\delta_{2k-1}\alpha_{2k-1}^2}}.$$

В данном разделе был рассмотрен вариант задачи, когда  $c \neq 0$ , т.е. учтена конвекция. Если же  $c = 0$ , то характер задачи изменяется и такой ее вариант будет изучаться в следующем разделе.

#### 4. БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 В УРАВНЕНИИ КАНА–ХИЛЛИАРДА–ОНО

Здесь будем изучать КЗ (18), (19) при  $c = 0$ . В таком случае уравнение (18), как уже отмечалось ранее, и получило название уравнение Кана–Хиллиарда–Оно. Сразу отметим, что в этом разделе бифуркационная задача достаточно существенно отличается от той, которая была изучена ранее в п. 3 (при  $c \neq 0$ ). Впрочем многие моменты анализа совпадают с построениями из предыдущего раздела. Здесь постараемся изложить относительно детально лишь те фрагменты, которые существенно отличаются от построений разд. 3.

Решения на инвариантном многообразии  $V_2(\varepsilon)$  будем искать в виде суммы

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}u_1(x, z_1, z_2) + \varepsilon u_2(x, z_1, z_2) + \varepsilon^{3/2}u_3(x, z_1, z_2) + O(\varepsilon^2), \quad (29)$$

где  $u_1(x, z_1, z_2) = z_1(s) \cos mx + z_2(s) \cos(m+1)x$ , функции  $u_2(x, z_1, z_2)$ ,  $u_3(x, z_1, z_2)$  достаточно гладко зависят от  $x \in [0, \pi]$  и от  $z_1, z_2$ , если пара  $(z_1, z_2)$  принадлежит малой окрестности точки  $(0, 0)$  пространства  $\mathbb{R}^2$ . Кроме того, они удовлетворяют краевым условиям (3), а также выполнены тождества

$$M_m(u_2) = M_m(u_3) = 0.$$

Функции  $z_1(s), z_2(s)$  зависят от  $s$ , где  $s = \varepsilon t$ .

В результате подстановки суммы (29) в нелинейную КЗ (18), (19) для функций  $u_2, u_3$  сформируются две линейные КЗ. Для  $u_2$  получаем однородную КЗ

$$u_{2t} - A_0 u_2 = 0 \quad (30)$$

$$u_{2x}|_{x=0, x=\pi} = u_{2xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad M_m(u_2) = M_{m+1}(u_2) = 0. \quad (31)$$

Наконец, для  $u_3$  получаем неоднородную КЗ

$$u_{3t} - A_0 u_3 = -z'_1(s) \cos mx - z'_2(s) \cos(m+1)x - d(u_1^3)_{xx} + A_1 u_1, \quad (32)$$

$$u_{3x}|_{x=0, x=\pi} = u_{3xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad M_m(u_3) = M_{m+1}(u_3) = 0. \quad (33)$$

Операторы  $A_0, A_1$  были определены ранее.

Сразу отметим, что КЗ (30), (31) имеет решение  $u_2 = 0$ . Из условий разрешимости (см. замечание 6) вытекает, что в КЗ (32), (33) функции  $z_1(s), z_2(s)$  следует искать из следующей системы дифференциальных уравнений (укороченной НФ)

$$z'_1 = m^2 \left( \mu_m z_1 + \frac{3}{4} dz_1(z_1^2 + 2z_2^2) \right), \quad z'_2 = (m+1)^2 \left( \mu_{m+1} z_2 + \frac{3}{4} dz_2(2z_1^2 + z_2^2) \right), \quad (34)$$

где  $\mu_m = (m^2 + (m+1)^2)\alpha_2 + (m+1)^2\alpha_1$ ,  $\mu_{m+1} = (m^2 + (m+1)^2)\alpha_2 + m^2\alpha_1$ .

Положим

$$z_1 = \left( 2\sqrt{\frac{1}{3|d|}} \right) y_1, \quad z_2 = \left( 2\sqrt{\frac{1}{3|d|}} \right) y_2.$$

В результате последней нормировки получаем два варианта системы (34)

$$y'_1 = m^2(\mu_m y_1 - (y_1^2 + 2y_2^2)y_1), \quad y'_2 = (m+1)^2(\mu_{m+1} y_2 - (2y_1^2 + y_2^2)y_2), \quad (35)$$

если  $d < 0$  и

$$y'_1 = m^2(\mu_m y_1 + (y_1^2 + 2y_2^2)y_1), \quad y'_2 = (m+1)^2(\mu_{m+1} y_2 + (2y_1^2 + y_2^2)y_2), \quad (36)$$

если  $d > 0$ .

Вариант  $d \neq 0$  исключен. По очереди проанализируем системы (35), (36). После стандартных построений получаем, что справедливы утверждения.

**Лемма 5.** Система дифференциальных уравнений (35) имеет нулевое состояние равновесия:

$$S_0 : y_1 = y_2 = 0,$$

а также может иметь следующие ненулевые состояния равновесия:

$$S_{1\pm} : y_1 = \pm\sqrt{\mu_m}, y_2 = 0; \quad S_{2\pm} : y_1 = 0, y_2 = \pm\sqrt{\mu_{m+1}};$$

$$S_{3,j} : y_1 = \pm\sqrt{\eta_1}, y_2 = \pm\sqrt{\eta_2} \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

где  $\eta_1 = (2\mu_{m+1} - \mu_m)/3$ ,  $\eta_2 = (2\mu_m - \mu_{m+1})/3$ .

Состояния равновесия  $S_{1\pm}$  существуют, если  $\mu_m > 0$  и они асимптотически устойчивы, если выполнено неравенство  $\mu_{m+1} - 2\mu_m < 0$ .

Состояния равновесия  $S_{2\pm}$  существуют, если  $\mu_{m+1} > 0$  и они асимптотически устойчивы, если  $\mu_m - 2\mu_{m+1} < 0$ .

Наконец, четыре состояния равновесия  $S_{3,j}$  существуют, если  $2\mu_{m+1} - \mu_m, 2\mu_m - \mu_{m+1}$  положительны и они всегда неустойчивы.

Нулевое состояние равновесия  $S_0$  асимптотически устойчиво, если выполнены следующие два неравенства  $\mu_m < 0, \mu_{m+1} < 0$ .

Вопрос о существовании состояний равновесия сводится к анализу системы

$$y_1(\mu_m - (y_1^2 + 2y_2^2)) = 0, \quad y_2(\mu_{m+1} - (y_1^2 + 2y_2^2)) = 0.$$

Перейдем к результатам анализа второй версии НФ (34), т.е. системы (36).

**Лемма 6.** Система дифференциальных уравнений (36) имеет следующие состояния равновесия:

$$S_0 : y_1 = y_2 = 0; \quad S_{1\pm} : y_1 = \pm\sqrt{-\mu_m}, y_2 = 0, \quad \text{если } \mu_m < 0;$$

$$S_{2\pm} : y_1 = 0, y_2 = \pm\sqrt{-\mu_{m+1}}, \quad \text{если } \mu_{m+1} < 0;$$

$$S_{3,j} : y_1 = \pm\sqrt{\xi_1}, y_2 = \pm\sqrt{\xi_2}, \quad \text{где } \xi_1 = \frac{\mu_m - 2\mu_{m+1}}{3}, \xi_2 = \frac{\mu_{m+1} - 2\mu_m}{3}, j = 1, 2, 3, 4,$$

если выполнены неравенства  $\mu_m - 2\mu_{m+1} > 0$ ,  $\mu_{m+1} - 2\mu_m > 0$ .

Все ненулевые состояния равновесия неустойчивы, а состояние равновесия  $S_0$  асимптотически устойчиво при  $\mu_m < 0$ ,  $\mu_{m+1} < 0$  и неустойчиво, если хотя бы выполнено одно из двух неравенств  $\mu_m > 0$ ,  $\mu_{m+1} > 0$ .

Как и при анализе системы дифференциальных уравнений (35) координаты состояний равновесия системы (36) находим как решения соответствующей системы алгебраических уравнений

$$y_1(\mu_m + y_1^2 + 2y_2^2) = 0, \quad y_2(\mu_{m+1} + 2y_1^2 + y_2^2) = 0.$$

Анализ устойчивости состояний равновесия в обоих леммах использует теорему А.М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Подчеркнем, что состояния равновесия  $S_{1\pm}, S_{2\pm}$  НФ (35) существуют, если  $\mu_m, \mu_{m+1} > 0$ . При этом, если они оба асимптотически устойчивы, то четыре состояния равновесия  $S_{3,j}$  существуют. Если же  $S_{3,j}$  не существуют, то, по крайней мере, одна из двух пар состояний равновесия  $S_{1\pm}, S_{2\pm}$  неустойчива.

Справедливы два следующих утверждения.

**Теорема 5.** Существует такая положительная постоянная  $\varepsilon_3$  ( $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(m)$ ), что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$  и выбранных  $a$  и  $b$  ( $a = a_m(1)(1 - \alpha_1\varepsilon)$ ,  $b = b_m(1)(1 + \alpha_2\varepsilon)$ ), а также  $d < 0$  КЗ (1), (3) имеет ненулевые состояния равновесия  $S_{1\pm}(\varepsilon)$ ,  $S_{2\pm}(\varepsilon)$ ,  $S_{3,j}(\varepsilon)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , соответствующие состояниям равновесия  $S_{1\pm}, S_{2\pm}, S_{3,j}$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  НФ (35) с наследованием устойчивости. Для них справедливы асимптотические формулы

$$S_{1\pm}(\varepsilon) : u(t, x, \varepsilon) = u_{\pm}(x, \varepsilon) = \pm 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{\mu_m}{3|d|}} \cos mx + O(\varepsilon^{3/2});$$

$$S_{2\pm}(\varepsilon) : u(t, x, \varepsilon) = u_{\pm}(x, \varepsilon) = \pm 2\varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{\mu_{m+1}}{3|d|}} \cos(m+1)x + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Наконец,

$$S_{3,j}(\varepsilon) : u(t, x, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2} \left( \pm \sqrt{\frac{\eta_1}{3|d|}} \cos mx \pm \sqrt{\frac{\eta_2}{3|d|}} \cos(m+1)x \right) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

В последней формуле возможно любое сочетание знаков. Подчеркнем, что все состояния равновесия  $S_{3,j}(\varepsilon)$  неустойчивы ( $S_{3,j}$  из леммы 5 неустойчивы).

Перейдем к утверждению основанному на использовании НФ (36).

**Теорема 6.** Существует постоянная  $\varepsilon_4 > 0$  ( $\varepsilon_4 = \varepsilon_4(m)$ ) такая, что каждому ненулевому состоянию равновесия НФ (36)  $S_{1\pm}, S_{2\pm}, S_{3,j}$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) соответствуют пространственно неоднородные неустойчивые состояния равновесия КЗ (1), (3), если  $a, b$  выбраны как указано в теореме 5, но  $d > 0$ .

Все эти неоднородные состояния равновесия неустойчивы и для них справедливы асимптотические формулы, аналогичные формулам из теоремы 5.

## 5. ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАНТА УРАВНЕНИЯ КАНА–ХИЛЛИАРДА

В этом разделе рассмотрим КЗ (1), (3) в случае, если  $a = c = 0$ . Итак, рассмотрим КЗ

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} - d(u^3)_{xx}, \quad (37)$$

$$u_x|_{x=0, x=\pi} = u_{xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0. \quad (38)$$

Сразу отметим, что для КЗ (37), (38) справедливы утверждения.

**Лемма 7.** КЗ (37), (38) имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия

$$u(t, x) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Лемма 8.** Пусть  $M(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(t, x) dx$ , а  $u(t, x)$  – решение КЗ (37), (38). Тогда

$$M(u(t, x)) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Последнее равенство выделяет множество решений КЗ, которые формируют аффинное подпространство фазового пространства КЗ (37), (38). Если  $\alpha = 0$ , то оно будет линейным одномерным подпространством фазового пространства.

Напомним, что у КЗ (37), (38) в качестве фазового пространства можно выбрать функциональное пространство  $\mathbb{W}_{2,N}^4[0, \pi]$  (см. введение).

В силу последних замечаний можно положить

$$u(t, x) = \alpha + v(t, x), \quad M(u) = \alpha, \quad M(v) = 0 \quad (39)$$

и, следовательно, замена (39) позволяет для  $v(t, x) = v(t, x, \alpha)$  получить уже следующую вспомогательную КЗ:

$$v_t = Av - 3d\alpha(v^2)_{xx} - d(v^3)_{xx}, \quad (40)$$

$$v_x|_{x=0, x=\pi} = v_{xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad M(v) = 0, \quad (41)$$

где теперь ЛДО  $A$  определен равенством

$$Av = A_\alpha v = -v_{xxxx} - b_\alpha v_{xx}, \quad b_\alpha = b + 3\alpha^2 d.$$

Нетрудно убедиться, что ЛДО  $A_\alpha$  имеет счетный набор собственных значений  $\lambda_n = \lambda_n(\alpha) = -n^4 + b_\alpha n^2$ , соответствующий собственным функциям  $\cos nx$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . В силу полноты семейства функций  $\{\cos nx\}$  в подпространстве  $\mathbb{L}_{2,0}(0, \pi)$  пространства  $\mathbb{L}_2(0, \pi)$  иных собственных значений у ЛДО  $A_\alpha$  нет ( $f(x) \in \mathbb{L}_{2,0}[0, \pi]$ , если  $f(x) \in \mathbb{L}_2(0, \pi)$  и  $M(f) = 0$ ).

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом варианте постановки задачи ЛДО  $A_\alpha$  имеет собственные числа  $\lambda_n(\alpha) = -n^4 + b_\alpha n^2$ ,  $n = 1, 2$ . Зафиксируем  $\alpha$  и в такой ситуации рассмотрим КЗ (40), (41). При  $b_\alpha < 1$  у нее нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво. Если же  $b_\alpha > 1$ , то оно неустойчиво. При  $b_\alpha = 1$  реализуется критический случай нулевого собственного значения, которому отвечает собственная функция  $\cos x$ .

Пусть теперь  $b_\alpha(\varepsilon) = 1 + v\varepsilon$ , где  $v = \pm 1$  или  $v = 0$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $0 < \varepsilon_0 < 1$ . Тогда у КЗ (40), (41) при так выбранном  $b_\alpha$  реализуется случай близкий к критическому простого нулевого собственного значения: у ЛДО

$$A_\alpha(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1, \quad A_0 = -\partial^4 - \partial^2, \quad A_1 = -v\partial^2$$

в нашем случае есть собственное число  $\lambda_1(\varepsilon) = v\varepsilon$ , а остальные его собственные значения лежат в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda_k \leq -\alpha_0 < 0$  (где в качестве  $\alpha_0$  можно взять, например,  $-11$ ).

КЗ (40), (41) имеет одномерное локально инвариантное многообразие  $V_1(\varepsilon)$  и вопрос о поведении решений этой КЗ может быть сведен к анализу НФ

$$z' = \varphi(z, \varepsilon), \quad (42)$$

или ее укороченному варианту НФ (42), т.е. к дифференциальному уравнению вида

$$z' = \psi(z), \quad \psi(z) = \varphi(z, 0), \quad (43)$$

где  $z = z(s)$ ,  $s = \varepsilon t$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $\varphi(z, \varepsilon)$ ,  $\psi(z)$  — достаточно гладкие функции.

При этом решения, принадлежащие локально-инвариантному многообразию  $V_1(\varepsilon)$ , можно искать как и в работах [13, 14, 22] в следующем виде:

$$v(t, x, \varepsilon) = v(x, z, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} v_1(x, z) + \varepsilon v_2(x, z) + \varepsilon^{3/2} v_3(x, z) + O(\varepsilon^2). \quad (44)$$

Здесь  $v_1(x, z) = z(s) \cos x$ , а функции  $v_2(x, z)$ ,  $v_3(x, z)$  подлежат определению как решения вспомогательных линейных неоднородных КЗ, которые получаем после подстановки суммы (44) в КЗ (40), (41) и выделения слагаемых при одинаковых степенях  $\varepsilon^{1/2}$ . При  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^{3/2}$  получаем неоднородные КЗ (см. разд. 2).

Прежде чем выписать эти КЗ найдем те  $\alpha$ , которые обеспечивают выполнение равенства  $b_\alpha = b + 3\alpha^2 d = 1 + v\varepsilon$ .

Если  $b \neq 1$ , то

$$\alpha_\pm(\varepsilon) = \alpha_0(1 + \beta_1 \varepsilon + o(\varepsilon)), \quad \alpha_0 = \pm \sqrt{\frac{1-b}{3d}}, \quad \beta_1 = \frac{v}{2(1-b)}.$$

Если же  $b = 1$ , то  $\alpha_\pm(\varepsilon) = \pm \sqrt{\frac{v\varepsilon}{3d}}$ . Впрочем, этот вариант выбора коэффициента  $b$  далее изучать не будем. При реализации алгоритма построения НФ необходимо функции  $\alpha_\pm$  также разложить по степеням  $\varepsilon$ . При получении укороченного варианта НФ (43) следует положить  $\varepsilon = 0$ , т.е.  $\alpha = \alpha_0$ . В нашем случае  $\alpha_0 = \pm \sqrt{(1-b)/(3d)}$ , где  $(1-b)/d > 0$ .

Итак, для определения  $v_2(x, z)$  получим неоднородную КЗ:

$$-A_0 v_2 = -3d\alpha_0(v_1^2)_{xx},$$

$$v_{2x}|_{x=0, x=\pi} = v_{2xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad M(v_2) = 0.$$

Учитывая, что  $v_1(x, z) = z(s) \cos x$ , нетрудно найти  $v_2(x, z) = \eta_2 z^2 \cos 2x$ , где  $\eta_2 = d\alpha_0/2$ .

На третьем шаге получим, что функцию  $v_3(x, z)$  следует находить как решение следующей линейной неоднородной КЗ:

$$-A_0 v_3 = -z' \cos x - d(v_1^3)_{xx} - 6d\alpha_0(v_1 v_2)_{xx} + A_1 v_1, \quad (45)$$

$$v_{3x}|_{x=0, x=\pi} = v_{3xxx}|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad M(v_3) = 0. \quad (46)$$

Из условий разрешимости КЗ (45), (46) вытекает, что правая часть НФ функция

$$\psi(z) = vz + lz^3, \quad l = \frac{3}{4}d + \frac{3}{2}\alpha_0^2 d^2 = \frac{1}{4}(5 - 2b)d.$$

Следовательно, в рассматриваемом в этом разделе варианте постановки задачи справедливо утверждение.

**Лемма 9.** НФ (43) имеет 2 ненулевых состояния равновесия

$$z_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{v}{l}},$$

которые существуют, если  $v/l < 0$ , т.е. при  $l < 0$  необходимо выбрать  $v = 1$  и  $v = -1$ , если оказалось, что  $l > 0$ .

Если  $l < 0$ , то оба состояния равновесия  $z_{\pm}$  асимптотически устойчивы, а при  $l > 0$  они неустойчивы. Наконец, нулевое решение асимптотически устойчиво, если  $v < 0$  и неустойчиво при  $v > 0$ .

При  $v = 0$  нулевое решение НФ (43) асимптотически устойчиво при  $l < 0$  и оно неустойчиво, если  $l > 0$ .

Как и ранее, в предыдущих разделах, из этих построений вытекает, что справедливо утверждение.

**Теорема 7.** Существует положительная постоянная  $\varepsilon_0$  такая, что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  каждому состоянию равновесия  $z_{\pm}$  НФ (43) соответствуют пространственно неоднородные состояния равновесия  $S_{\pm}(\alpha, \varepsilon)$  КЗ (40), (41). Они наследуют устойчивость состояний равновесия  $z_{\pm}$  и для них справедливы асимптотические формулы

$$v = v_{\pm}(x, \varepsilon, \alpha_{\pm}) = \varepsilon^{1/2} z_{\pm} \cos x + \varepsilon \eta_2 z_{\pm}^2 \cos 2x + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Возвратимся теперь к КЗ (37), (38). Пусть  $\alpha_{\pm}(\varepsilon) = \alpha_0(1 + \beta_1 \varepsilon + o(\varepsilon))$ , где  $\alpha_0, \beta_1$  были указаны ранее. Тогда справедливо утверждение которое является следствием теоремы 7.

**Теорема 8.** Пусть  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , тогда каждому решению  $v_{\pm}(x, \varepsilon, \alpha_{\pm})$  соответствует состояние равновесия КЗ (37), (38)

$$u = u_{\pm}(x, \varepsilon, \alpha(\varepsilon)) = \alpha_{\pm}(\varepsilon) + v_{\pm}(x, \varepsilon, \alpha_{\pm}).$$

Каждое из этих решений устойчиво, если асимптотически устойчиво решение  $v_{\pm}(x, \varepsilon, \alpha_{\pm})$  вспомогательной КЗ (40), (41) и решения  $u_{\pm}(x, \varepsilon, \alpha(\varepsilon))$  неустойчивы, если неустойчивы решения  $v_{\pm}(x, \varepsilon, \alpha_{\pm})$ , где  $\alpha_{\pm} = \alpha_{\pm}(0)$ .

Подчеркнем, что двупараметрическое семейство решений  $u_{+}(x, \varepsilon, \alpha(\varepsilon))$  и  $u_{-}(x, \varepsilon, \alpha(\varepsilon))$  содержат состояния равновесия КЗ (37), (38). Они не могут быть асимптотически устойчивыми, так как в окрестности каждого из них находится состояние равновесия, в котором  $\varepsilon_{\Delta} = \varepsilon + \Delta$  ( $\Delta < 1$ ).

При анализе КЗ (37), (38), а также вспомогательной КЗ (40), (41) определяющую роль играет НФ (43). В свою очередь, анализ НФ (43) существенным образом зависит от коэффициента  $l$ , который часто называют ляпуновской величиной. В нашем случае  $l = (5 - 2b)d/4$ . Вместе с тем состояния равновесия возникают в окрестности однородных состояний равновесия КЗ (37), (38). Такие состояния равновесия существуют, если  $(1-b)/(3d) > 0, d \neq 0$ . Последнее неравенство позволяет проанализировать вопрос о неоднородных состояниях равновесия КЗ (37), (38) более детально.

Пусть  $d > 0$ . Тогда с необходимостью  $1 - b > 0$ , т.е.  $b < 1$ . Следовательно,  $l > 0$  и НФ (43) имеет состояния равновесия, если  $v < 0$  ( $v = -1$ ), т.е. у КЗ (37), (38) реализуется докритический вариант бифуркаций неоднородных состояний равновесия, которые неустойчивы.

Если же  $d < 0$ , то  $b > 1$  и в этом случае у КЗ (37), (38) могут быть реализованы как докритические, так и послекритические бифуркации неоднородных состояний равновесия. При  $d < 0$  неоднородные состояния равновесия существуют, когда  $b > 1$ . Пусть  $b \in (1, 5/2)$ . Тогда  $l < 0$  и существуют устойчивые неоднородные состояния равновесия. Если же  $b \in (5/2, \infty)$ , то  $l > 0$  и эти состояния равновесия неустойчивы.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были изложены результаты анализа одной из возможных версий уравнения Кана–Хиллиарда–Оно. Это уравнение изучалось вместе с однородными краевыми условиями Неймана [13]. Это же уравнение в работе [13] было рассмотрено вместе с периодическими краевыми условиями (2). Результаты анализа КЗ (1), (3) и (1), (2) внешне достаточно похожи, но, тем не менее есть, по-крайней мере, два существенных отличия.

Во-первых, при изучении спектра ЛДО  $A$  в случае условий Неймана все собственные значения простые, а в случае периодических краевых условий они за исключением одного собственного значения двукратны. Во-вторых, анализ задачи в аналогичной постановке показал, что в случае периодических краевых условий характерны бифуркации  $t$  периодических решений. В тоже время, при анализе КЗ (1), (3) речь идет о бифуркациях пространственно неоднородных состояний равновесия. При этом характер бифуркаций в случае коразмерности 1 существенным образом зависит от четности или нечетности ведущей моды.

В данной работе рассматривается уравнение (1), если  $x$  принадлежит ограниченному множеству, т.е.  $x \in [0, l]$  и после масштабирования (выбора иной системы измерений) можно считать, что  $x \in [0, \pi]$ . То, что пространственная координата (в нашем случае  $x$ ) принадлежит ограниченному множеству достаточно естественное условие с физической точки зрения, так как смешивание компонент происходит, в принципе, в ограниченном объеме. Это замечание остается справедливым и в других приложениях для изучаемого уравнения.

Поэтому, естественно, в таком случае требуется для математической корректности дополнить уравнение какими-либо краевыми условиями. В работе выбраны краевые условия, которые в физике и химии принято называть условиями “непроницаемости”. Впрочем, краевые условия могут быть и иными, если они достаточно естественны с прикладной точки зрения. Добавим, что уравнение (1) вместе с краевыми условиями (3) записаны в аналогичном виде, как и в известной монографии [15]. Такой вариант записи, дополненный начальными условиями  $u(0, x) = f(x)$ , позволяет утверждать, что изучаемая в работе смешанная (начально-краевая) задача корректна (см., например, [15, 17]).

Рассматриваемый вариант КЗ позволяет для анализа поведения решений использовать методы теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий. В данной работе это метод инвариантных (интегральных) многообразий и НФ. Построения предполагают использование модифицированного алгоритма построения НФ, который ведет свое начало от известного в математической и теоретической физике метода Крылова–Боголюбова. Отметим также, что в монографии Темама [15] рассмотренное уравнение Кана–Хиллиарда содержит нелинейность более общего вида: многочлен произвольной нечетной степени. В нашем случае он кубический. Отметим, что основной вариант, который рассматривается в [15] предполагает, что  $d < 0$ . Вместе с тем там же отмечается, что вариант  $d > 0$  не может быть исключен полностью и ведет к выявлению эффекта “отрицательной вязкости”.

Отметим, что, как вытекает из результатов данной статьи, при  $d < 0$  КЗ (1), (2) может иметь диссипативные структуры (локально устойчивые паттерны). Одним из существенных моментов следует считать то, что для найденных паттернов исследован вопрос об устойчивости, формирующих их решений, т.е. вопрос об их физической реализуемости. Отметим особо, что если  $c \neq 0, a \neq 0$ , при анализе уже самой простой версии постановки задачи в случае нечетности ведущей моды принципиальная часть ответа не зависит от  $d$  и устойчивые паттерны могут появиться при любом знаке этого коэффициента.

По-видимому, уместно отметить, что в статьях [3–5], где рассматривается конвективное уравнение Кана–Хиллиарда ( $c \neq 0, a = 0$ ) оно записано в иной форме, при ином масштабировании. Применительно к задаче из данной работы этот вариант должен выглядеть следующим образом:

$$w_\tau + w_{yyyy} + w_{yy} + c_0(w^2)_y + a_0 w - (w^3)_{yy} = 0. \quad (47)$$

В этих работах при  $a_0 = 0$  был рассмотрен вопрос о существовании у уравнения (47) решений в виде бегущих волн, т.е. при  $y \in \mathbb{R}$ . Такой переход от уравнения (1) к уравнению (47) и обратно (если  $b > 0, d < 0$ ) может быть реализован с помощью замен

$$t = \frac{\tau}{b^2}, \quad x = \frac{y}{b^{1/2}}, \quad u = \sqrt{-\frac{b}{d}} w. \quad (48)$$

При этом  $a_0 = a/b^2, c_0 = c/b^{1/2}$ . В редакции (47) конвективное уравнение Кана–Хиллиарда имеет на два параметра меньше. Но в нашем случае уравнение (47) следует дополнить краевыми условиями

$$w_y|_{y=0, y=l} = w_{yyy}|_{y=0, y=l} = 0, \quad l = \pi b^{1/2}. \quad (49)$$

Пусть  $a_0 = a_0(\delta)(1 - \alpha_1 \varepsilon)$ , где  $a_0(\delta) = a_m(\delta)/b_m^2(\delta), b = b_m(\delta)(1 + \alpha_2 \varepsilon)$ , а выбор  $a_m(\delta), b_m(\delta)$  указан в начале разд. 2 и пусть  $m = 2k - 1$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Тогда справедливо утверждение.

**Следствие (из теоремы 1).** Существует положительная постоянная  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m)$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  состоянию равновесия  $S_2$  НФ (16) соответствует состояние равновесия  $S_{2*}(\varepsilon)$  КЗ (47), (49):

$$S_{2*}(\varepsilon) : w(t, x, \varepsilon) = w(x, \varepsilon) = \sqrt{-\frac{b}{d}} \left( -\varepsilon \frac{\gamma_{2k-1}}{l_2} \cos(2k-1) \frac{y}{b^{1/2}} + o(\varepsilon) \right).$$

При этом состояние равновесия  $S_{2*}(\varepsilon)$  наследует устойчивость  $S_2$  — состояния равновесия НФ (16).

Аналогично, используя замены (48), можно по очереди переформулировать все остальные теоремы из данной работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cahn J.W., Hilliard J. E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1959. V. 28. № 2. P. 258–267.
2. Miranville A. The Cahn–Hilliard equation and some of its variants // AIMS Math. 2017. V.2. № 3. P. 479–544.
3. Golovin A.A., Davis S. H., Nepomnyashchy A.A. A convective Cahn–Hilliard model for the formation of facets and corners in crystal growth // Physica D. 1998. V. 118. P. 202–230.
4. Podolny A., Nepomnyashchy A.A., Zaks M.A., Rubinstein B.Y., Golovin A.A. Dynamics of domain walls governed by the convective Cahn–Hilliard model // Physica D. 2005. V. 201. P. 291–305.
5. Watson S.J., Otto F., Rubinstein B.Y. Coarsening dynamics for the convective Cahn–Hilliard equation // Liepzig. Preprint. 2002. № 35. 21 p.
6. Novick-Cohen A., Shishkov A. Upper bounds for coarsening for the degenerate Cahn–Hilliard equation // Discrete Contin. Dyn. Syst. B. 2009. V. 25. P. 251–272.
7. Chao S.M., Chung S.K., Kim K.I. Conservative nonlinear difference scheme for the Cahn–Hilliard equation - II // Computers and Mathematics with applications. 2000. V. 39. P. 229–243.
8. Frolovskaya O.A., Admaev O.V., Pukhnachev V.V. Special case of the Cahn–Hilliard equation // Siberian electronic mathematical reports. 2013. V. 10. P. 324–334.
9. Теодорович Э.В. Точное автомодельное решение некоторого уравнения нелинейной диффузии с диссипацией // ПММ. 2014. Т. 78. В. 4. С. 493–500.
10. Kuramoto Y. Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984.
11. Sivashinsky G.I. Weak turbulence in periodic flow // Physica D. 1985. V. 28. № 3. P. 234–255.
12. Kulikov A. N., Kulikov D. A. Local bifurcations in the generalized Cahn–Hilliard equation // Springer Proc. Math.Stat. 2020. V. 333. P. 167–179.
13. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Local Bifurcations of Invariant Manifolds of the Cahn–Hilliard–Oono Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44. № 3. P. 996–1010.
14. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Локальные бифуркации в уравнениях Кана–Хилларда, Курамото–Сивашинского и их обобщениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 670–683.
15. Temam R. Infinite–dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New–York: Springer, 1997.
16. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
17. Соболевский П.Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 297–350.
18. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: ЛГУ, 1950.
19. Куликов А.Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // В сб. “Исследования по устойчивости и теории колебаний”. Ярославль. 1976. С. 114–129.
20. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

21. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит, 1969.
22. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
23. *Guckenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New–York: Springer, 1983.
24. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.
25. *Куликов А.Н.* Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве // Итоги науки и техники. Серия “Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры”. 2020. Т. 186. С. 57–66.

## THE CAHN–HILLARD–OONO CONVECTIVE EQUATION

A.N. Kulikov\*, D.A. Kulikov

150003 Yaroslavl, Sovetskaya Str., 14, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Russia

\*e-mail: anat\_kulikov@mail.ru

Received: 11.10.2023

Revised: 06.05.2024

Accepted: 28.06.2024

**Abstract.** A nonlinear partial differential evolutionary equation is considered, which is obtained as a natural generalization of the well-known Cahn–Hilliard–Oono equation from a physical point of view. The terms responsible for accounting for convection and dissipation have been added to the generalized version. A new version of the equation is considered together with homogeneous Neumann boundary conditions. For such a boundary value problem, local bifurcations of codimension 1 and 2 are studied. In both cases, questions about the existence, stability, and asymptotic representation of spatially inhomogeneous equilibrium states, as well as invariant manifolds formed by such solutions to the boundary value problem, are analyzed. To substantiate the results, the methods of the modern theory of infinite-dimensional dynamical systems, including the method of integral manifolds, the apparatus of the theory of Poincaré normal forms, are used. The differences between the results of the analysis of bifurcations in the Neumann boundary value problem are indicated with conclusions in the analysis of the periodic boundary value problem studied by the authors of the article in previous publications.

**Keywords:** Cahn–Hilliard–Oono convective equation, boundary value problem, stability, bifurcations, normal forms, asymptotic formulas.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С АКТИВНОЙ ПРИМЕСЬЮ<sup>1)</sup>

© 2024 г. Т.С. Шарифуллина<sup>1,\*</sup>, А.А. Черевко<sup>1,\*\*</sup>, В.В. Остапенко<sup>1,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>630090 Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 15, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева  
Сибирского отделения Российской академии наук, Россия

\*e-mail: tatiana\_06.08@mail.ru

\*\*e-mail: cherevko@mail.ru

\*\*\*e-mail: ostigil@mail.ru

Поступила в редакцию 09.04.2024 г.

Переработанный вариант 09.04.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Проведен сравнительный анализ точности схемы CABARET (второго порядка) со схемами WENO5 и A-WENO (пятого порядка по пространству и четвертого порядка по времени) при расчете различных задач Римана для невыпуклой системы законов сохранения модели двухфазной фильтрации с активной примесью. Показано, что при расчете этих задач схема CABARET имеет существенно более высокую точность по сравнению со схемами WENO, особенно в тех областях точного решения, где к ударным волнам примыкают центрированные волны разрежения. Библ. 30. Фиг. 4.

**Ключевые слова:** уравнения газовой динамики, ударные волны, схемы сквозного счета повышенной точности.

DOI: 10.31857/S0044466924100168, EDN: JYQJOY

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Поскольку в классической работе [1] было показано, что среди двухслойных по времени линейных численных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации, то развитие теории схем сквозного счета для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого “запрета Годунова”. В результате были разработаны различные классы численных схем [2–7], в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигались за счет нелинейной коррекции потоков, в силу чего эти схемы являются нелинейными при аппроксимации линейных гиперболических уравнений и систем. Укажем основные классы таких схем, которые будем сокращенно называть NFC (Nonlinear Flux Correction) схемами: MUSCL [8], TVD [9], Central [10], WENO [11], DG [2], CABARET [12]. Основное достоинство этих схем заключается в том, что при аппроксимации скалярного закона сохранения с выпуклым потоком или выпуклой системы законов сохранения такие схемы с высокой точностью локализируют сильные и слабые разрывы точного решения при отсутствии существенных нефизических осцилляций на фронтах ударных волн. В качестве характерного примера выпуклой гиперболической системы можно привести систему уравнений газовой динамики с выпуклым уравнением состояния [3], для которой решения задач Римана состоят из простых волн (ударных волн, контактных разрывов и центрированных волн разрежения), разделенных областями постоянного течения.

При расчете по стандартным NFC-схемам скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком или невыпуклой системы законов сохранения [13] для численных решений этих схем может отсутствовать сходимость к точному разрывному решению аппроксимируемой гиперболической задачи, особенно в областях, где центрированная волна разрежения примыкает к ударной волне (характерным примером невыпуклой гиперболической системы является система уравнений газовой динамики с невыпуклым уравнением состояния). Для эффективного расчета разрывных решений невыпуклых гиперболических уравнений и систем были разработаны [14–20] различные модификации стандартных NFC-схем, позволяющие с достаточно высокой точностью локализовать сильные и слабые разрывы точного решения. В частности, в [20] была построена монотонная модификация

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 22-11-00060), <https://rscf.ru/project/22-11-00060/> (разд. 1 и 2) и (код проекта 22-11-00264), <https://rscf.ru/project/22-11-00264/> (разд. 3 и 4).

схемы CABARET, аппроксимирующая скалярный закон сохранения с невыпуклым потоком. При расчете разрывных решений уравнений Баклея–Левретта эта модификация схемы CABARET показала [21] существенно более высокую точность по сравнению со схемами WENO3 и WENO5 из [22], в которых для аппроксимации по времени используется TVD метод Рунге-Кутты четвертого порядка, предложенный в [23].

В настоящей работе модифицированный алгоритм схемы CABARET второго порядка применяется при расчете задач Римана для невыпуклой системы законов сохранения модели двухфазной фильтрации с активной примесью [24]. Показано, что при расчете этих задач схема CABARET имеет существенно более высокую точность по сравнению со схемами WENO5 [22] и A-WENO [25] пятого порядка по пространству и четвертого порядка по времени [23], особенно в тех областях точного решения, где к ударным волнам примыкают централизованные волны разрежения.

## 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С АКТИВНОЙ ПРИМЕСЬЮ

Рассмотрим модель приближенно описывающую одномерную нестационарную фильтрацию двух вязких несмешивающихся жидкостей, когда фильтрация фаз происходит при наличии в потоке активной примеси, которая может сорбироваться в скелете пористой среды и влиять на гидродинамические характеристики течения. Будем считать, что примесь отсутствует в вытесняемой фазе, а концентрация примеси в вытесняющей фазе влияет на ее фазовую проницаемость. Концентрацию примеси будем считать малой, не изменяющей объема и плотности фазы. Тогда дивергентная форма записи системы уравнений двухфазной фильтрации с активной примесью в одномерном случае имеет вид [24]

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2.1)$$

где

$$u = \begin{pmatrix} s \\ (s + \beta)c \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} \alpha F \\ \alpha c F \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$F = F(s, c) = \frac{f_1(s, c)}{\mu_1} \left( \frac{f_1(s, c)}{\mu_1} + \frac{f_2(s)}{\mu_2} \right)^{-1}, \quad (2.3)$$

где  $s = s(x, t) \in [0, 1]$  — насыщенность порового пространства вытесняющей фазой,  $c = c(x, t)$  — характеризует относительное количество активной примеси в вытесняющей фазе и без ограничения общности может быть взято равным от 0 до 1,  $\alpha = V/m$ ,  $\beta = \gamma/m$ ,  $V$  — совместная скорость фильтрации фаз,  $m$  — пористость среды,  $\gamma$  — коэффициент в линейном законе сорбции,  $f_1(s, c)$  и  $f_2(s)$  — относительные проницаемости, а  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — коэффициенты вязкости для вытесняющей и вытесняемой фаз, соответственно. Функция  $F(s, c)$  задает долю вытесняющей фазы в суммарном потоке. Первое уравнение системы (2.1), (2.2) описывает течение жидкости, а второе — перенос активной примеси в вытесняющей фазе. Мы будем рассматриваться случай, когда  $F_c \leq 0$ , при котором доля вытесняющей фазы уменьшается при увеличении концентрации примеси.

Записывая систему (2.1), (2.2) в недивергентной форме

$$\bar{u}_t + A(\bar{u})\bar{u}_x = 0, \quad (2.4)$$

где

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}, \quad A(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \alpha F_s & \alpha F_c \\ 0 & \Psi \end{pmatrix}, \quad \Psi = \frac{\alpha F}{s + \beta}, \quad (2.5)$$

получаем, что скорости распространения характеристик в этой системе, определяемые собственными значениями матрицы  $A(\bar{u})$ , задаются формулами

$$\lambda_1 = \alpha F_s, \quad \lambda_2 = \Psi. \quad (2.6)$$

Инварианты системы (2.1), (2.2), распространяющиеся вдоль этих характеристик, имеют вид

$$w_1 = \Psi, \quad w_2 = c. \quad (2.7)$$

Нам понадобится запись соотношения (2.7) в векторной форме  $w = W(\bar{u})$ , где  $w = (w_1, w_2)$  — вектор инвариантов.

На ударных волнах системы законов сохранения (2.1), (2.2) выполнены условия Гюгонио

$$D[s] = [\alpha F], \quad D[(s + \beta)c] = [\alpha c F], \quad (2.8)$$

в которых  $D = x'(t)$  — скорость распространения ударной волны  $x = x(t)$ , где введено обозначение

$$[f] = f_1 - f_0$$

для скачка функции  $f(x, t)$  на фронте ударной волны,

$$f_0 = f(x(t) + 0, t), \quad f_1 = f(x(t) - 0, t).$$

Ударную волну, на которую приходят две характеристики первого семейства, вдоль которых переносятся два значения инварианта  $w_1$ , и одна характеристика второго семейства, вдоль которой переносится инвариант  $w_2 = c$ , будем называть *ударной волной индекса 1*. На такой ударной волне условия Гюгонио (2.8) имеют решение, в котором

$$[c] = c_1 - c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = c_0. \quad (2.9)$$

Действительно, с учетом (2.9) второе условие (2.8) можно записать в виде

$$Dc_0[s + \beta] = c_0[\alpha F]. \quad (2.10)$$

Если  $c_0 = 0$ , то равенство (2.10) выполняется автоматически, если  $c_0 \neq 0$ , то (после сокращения на  $c_0$ ) равенство (2.10) с учетом того, что  $[\beta] = 0$ , переходит в первое условие Гюгонио (2.8), из которого следует, что при  $[s] \neq 0$  ударная волна распространяется со скоростью

$$D = [\alpha F]/[s] = \alpha(F_1 - F_0)/(s_1 - s_0).$$

Таким образом, на ударной волне индекса 1 сильный разрыв имеет функция  $s(x, t)$ , а функция  $c(x, t)$  является непрерывной. Ударную волну, на которую приходят две характеристики второго семейства, принося два различных значения инварианта  $w_2 = c$ , и одна характеристика первого семейства, будем называть *ударной волной индекса 2*. На такой ударной волне сильный разрыв имеют обе базисные функции  $s$  и  $c$ .

Следуя [26, 27], в приводимых далее численных расчетах имеем

$$\mu_1 = 2, \mu_2 = 1; \quad V = m = 1 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = \gamma;$$

$$f_1(s, c) = as^3/(\gamma c + a), \quad f_2(s) = (1 - s)^3, \quad (2.11)$$

где  $a = 0.1$  и  $\gamma = 0.2$ . Из формул (2.11) следует, что функция  $F(s, c)$  является невыпуклой относительно переменной  $s$ , в силу чего система (2.1), (2.2) представляет собой невыпуклую гиперболическую систему законов сохранения, решения которой допускают центрированные волны, примыкающие к ударным волнам понижения и повышения концентрации.

Из первой формулы (2.2) следует, что векторные функции  $u$  и  $\bar{u}$  связаны невырожденным преобразованием

$$u = U(\bar{u}) \Rightarrow \bar{u} = U^{-1}(u),$$

где  $U^{-1}$  — оператор обратный к оператору  $U$ . С учетом этого поставим для системы (2.4), (2.5) задачу Римана со следующими кусочно-постоянными начальными данными для функции  $\bar{u}$ :

$$\bar{u}(x, 0) = \begin{cases} \bar{u}_1, & x \leq 0, \\ \bar{u}_0, & x > 0. \end{cases}$$

Для данной задачи будем использовать аббревиатуру SRP (Special Riemann Problem). Поскольку с учетом формул (2.3) и (2.11) скорости характеристик (2.6) являются положительными, то задача SRP эквивалентна для системы (2.4), (2.5) следующей начально-краевой задаче:

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{u}_0, \quad x > 0; \quad \bar{u}(0, t) = \bar{u}_1, \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

В общем случае, решение задачи Римана для гиперболической системы законов сохранения второго порядка (состоящей из двух скалярных дивергентных уравнений), допускает автомодельные центрированные волны разрежения индексов 1 и 2. В центрированной волне индекса 2 постоянным является инвариант  $w_1$ , а инвариант  $w_2$  определяется из уравнения

$$\lambda_2(w_1, w_2) = x/t. \quad (2.13)$$

Однако, из формул (2.6) и (2.7) следует, что  $\lambda_2 = w_1$ , в силу чего уравнение (2.13) вырождается и принимает вид

$$x/t = w_1 = \text{const.}$$

Это означает, что задача SRP не допускает автомодельных центрированных волн разрежения индекса 2. Таким образом, точные решения задачи SRP могут содержать ударные волны индексов 1 и 2, а также центрированные волны разрежения индекса 1 (для этих волн будем использовать сокращенные обозначения  $S_1$ ,  $S_2$  и  $R_1$ ). С учетом того, что  $w_2 = c$  и  $[c] = 0$  на ударных волнах  $S_1$ , концентрация  $c(x, t)$  в решениях задач SRP представляет собой кусочно-постоянную функцию, имеющую сильный разрыв на ударной волне  $S_2$ , по обе стороны от которого она принимает постоянные значения.

### 3. РАССМАТРИВАЕМЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ

Численное решение по схемам CABARET, WENO5 и A-WENO задачи SRP будем строить на прямоугольной сетке

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, 0 \leq j \leq M; t_{n+1} = t_n + \tau_n, t_0 = 0\}, \quad (3.1)$$

заданной на пространственном интервале  $[0, X]$ , где  $X = hM$ ,  $h$  — шаг сетки по пространству,  $\tau_n$  — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости Куранта

$$\tau_n = \frac{zh}{\max_{i=1,2} \max_{0 \leq j \leq M} |\lambda_i(\bar{v}_j^n)|}, \quad z \in (0, 1), \quad (3.2)$$

$\bar{v}_j^n = \bar{v}(x_j, t_n)$  — численное решение, соответствующее вектор функции  $\bar{u}$ ,  $z$  — коэффициент запаса. Начальные и граничные условия для численного решения будем задавать путем точной аппроксимации условий (2.12) по формулам

$$\bar{v}_j^0 = \bar{u}_0, \quad v_j^0 = U(\bar{u}_0), \quad 1 \leq j \leq M; \quad \bar{v}_0^n = \bar{u}_1, \quad v_0^n = U(\bar{u}_1), \quad n \geq 0, \quad (3.3)$$

где  $v_j^n = v(x_j, t_n)$  — численное решение, соответствующее векторному решению  $u$ .

Приведем описание рассматриваемых схем.

#### 3.1. WENO схемы

WENO-схемы [11, 22] были построены в результате модификации ENO-схем [28], которые, в свою очередь, были получены путем модификации TVD-схемы [9] с целью сохранения повышенной точности при аппроксимации локальных экстремумов в гладких частях рассчитываемых решений. При этом, в отличие от TVD-схемы, построенной в результате монотонизации схемы Лакса-Вендрофа [29], ENO и WENO-схемы удовлетворяют TVD свойству лишь приближенно. Ключевая идея ENO-схем, связанная с выбором наиболее гладкого шаблона из нескольких кандидатов при аппроксимации потоков, в WENO-схемах видоизменяется следующим образом: используется выпуклая комбинация всех подходящих шаблонов, каждому из которых присваивается весовой коэффициент, определяющий его вклад в окончательную аппроксимацию численного потока.

В отличие от других классов NFC-схем, в которых для монотонизации разностного решения используются различные типы минимаксной коррекции потоков, что приводит к существенному снижению их гладкости, в WENO-схемах такая коррекция достигается за счет введения весовых коэффициентов, что позволяет сохранить повышенную гладкость функций численных потоков. В настоящее время WENO-схемы, особенно их современные модификации [7], широко применяются для численного моделирования различных прикладных задач газо- и гидродинамики. В настоящей работе мы тестируем схемы WENO5 [22] и A-WENO [25] пятого порядка по пространству, в которых для аппроксимации по времени используется TVD метод Рунге-Кутты четвертого порядка [23]. Для малого эвристического параметра, входящего в эти схемы, по аналогии с [30], используется значение  $\varepsilon = 10^{-12}$ .

#### 3.2. Алгоритм схемы CABARET

В схеме CABARET [6, 12] наряду с переменными  $v_j^n$ , которые называются *потокowymi*, используются консервативные переменные  $v_{j+1/2}^n = v(x_{j+1/2}, t_n)$ , заданные в полуцелых пространственных узлах  $x_{j+1/2} = x_j + h/2$  сетки (3.1). Предположим, что на  $n$ -м временном слое численное решение  $v_j^n$ ,  $v_{j+1/2}^n$  известно; при  $n = 0$  это точная аппроксимация начальных данных задачи (2.12), задаваемая формулами (3.3) в целых узлах  $x_j$  сетки (3.1) и аналогичными формулами

$$v_{j+1/2}^0 = \bar{u}_0, \quad v_{j+1/2}^0 = U(\bar{u}_0), \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

в полуцелых узлах  $x_{j+1/2}$  этой сетки. Тогда решение на  $(n+1)$ -м временном слое строится в несколько этапов.

На первом этапе по разностным уравнениям имеем

$$\frac{v_{j+1/2}^{n+1/2} - v_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = 0, \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

где  $f_j^n = f(v_j^n)$ , вычисляются значения консервативных переменных  $v_{j+1/2}^{n+1/2}$  на полуцелом временном слое  $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$ . На втором этапе по формулам

$$\bar{v}_j^n = U^{-1}(v_j^n), \quad 0 \leq j \leq M, \quad \bar{v}_{j+1/2}^{n+1/2} = U^{-1}(v_{j+1/2}^{n+1/2}), \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

находятся сеточные значения вектор функции  $\bar{u}$ , а затем по формулам

$$\omega_j^n = W(v_j^n), \quad 0 \leq j \leq M, \quad \omega_{j+1/2}^{n+1/2} = W(v_{j+1/2}^{n+1/2}), \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

находятся сеточные значения вектора инвариантов  $w$  на временных слоях  $n$  и  $n+1/2$ .

Поскольку в рассматриваемой задаче скорости характеристик (2.6) положительны, то на третьем этапе по экстраполяционной формуле

$$\hat{\omega}_{j+1}^{n+1} = 2\omega_{j+1/2}^{n+1/2} - \omega_j^n, \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

определяются предварительные значения  $\hat{\omega}_{j+1}^{n+1}$  сеточного вектора инвариантов на  $(n+1)$ -м временном слое. На четвертом этапе при помощи функции двухстороннего ограничения

$$F(u, m, M) = \begin{cases} m, & u \leq m, \\ u, & m \leq u \leq M, \\ M, & u \geq M, \end{cases}$$

компоненты  $(\hat{\omega}_i)_j^{n+1}$  вектора  $\hat{\omega}_j^{n+1}$  корректируются по следующим формулам (при записи которых индекс  $i$  для краткости опускается)

$$\omega_j^{n+1} = F(\hat{\omega}_j^{n+1}, m_j^n, M_j^n), \quad 1 \leq j \leq M,$$

где

$$m_j^n = \min(\omega_{j-1}^n, \omega_{j-1/2}^n, \omega_j^n), \quad M_j^n = \max(\omega_{j-1}^n, \omega_{j-1/2}^n, \omega_j^n).$$

В результате получаются окончательные значения сеточного вектора инвариантов

$$\omega_j^{n+1} = ((\omega_1)_j^{n+1}, (\omega_2)_j^{n+1}), \quad 1 \leq j \leq M.$$

На пятом этапе в каждом узле  $(x_j, t_{n+1})$  из векторного уравнения

$$W(\bar{v}_j^{n+1}) = \omega_j^{n+1}, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (3.4)$$

находится значение сеточной вектор функции  $\bar{v}_j^{n+1}$ . В силу невыпуклости функции  $F(s, c)$  относительно переменной  $s$  решение уравнения (3.4) может определяться неоднозначно, поскольку графики функций (2.7) могут пересекаться в одной или двух точках (фиг. 1). Если эти графики пересекаются в двух точках, то выбирается то решение  $\bar{v}_j^{n+1}$  системы (2.7), которое наиболее близко к известному вектору  $\bar{v}_{j+1/2}^{n+1/2}$ , т.е. для которого величина  $|\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_{j+1/2}^{n+1/2}|$  является минимальной. Если графики функций (2.7) пересекаются в одной точке, то это означает, что график функции  $w_2 = c$ , представляющий собой на плоскости переменных  $(s, c)$  горизонтальную прямую линию (фиг. 1), проходит через максимум функции  $w_1 = \Psi$ . В этом случае компоненты  $((\bar{v}_1)_j^{n+1}, (\bar{v}_2)_j^{n+1})$  вектора  $\bar{v}_j^{n+1}$  находятся из системы уравнений

$$(\omega_1)_j^{n+1} = F'_s((\bar{v}_1)_j^{n+1}, (\bar{v}_2)_j^{n+1}), \quad (\omega_2)_j^{n+1} = (\bar{v}_2)_j^{n+1}, \quad (3.5)$$

получаемой из условия экстремума функции  $w_1 = \Psi$ . После вычисления функции  $\bar{v}_j^{n+1}$  по формуле

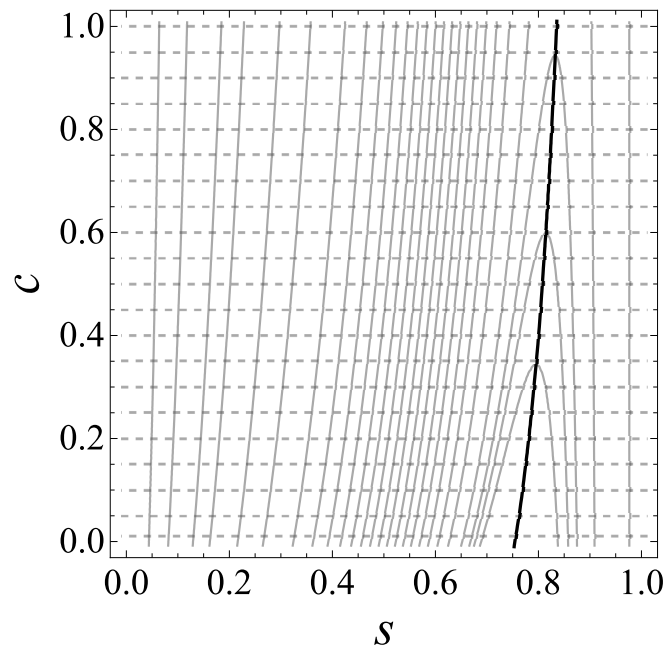
$$v_j^{n+1} = U(\bar{v}_j^{n+1}), \quad 1 \leq j \leq M,$$

определяются численные значения вектора базисных переменных  $u$  в узлах  $(x_j, t_{n+1})$  сетки (3.1).

На заключительном шестом этапе из разностных уравнений

$$\frac{v_{j+1/2}^{n+1} - v_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{h} = 0, \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

где  $f_j^{n+1} = f(v_j^{n+1})$ , находится вектор консервативных переменных  $v_{j+1/2}^{n+1}$  в полуцелых пространственных узлах  $(n+1)$ -го временного слоя.



**Фиг. 1.** Линии уровня инвариантов  $w_1$  (сплошные линии) и  $w_2$  (пунктирные линии) на плоскости базисных переменных  $(s, c)$ . Жирная сплошная линия проходит через максимумы функций  $\Psi(s, c) = w_1$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На фиг. 2–4 приведены результаты расчетов задачи SRP по схемам CABARET, WENO5 и A-WENO на численной сетке (3.1), где шаг по пространству  $h = 0.1$  и в условии устойчивости (3.2) коэффициент запаса  $z = 0.4$ .

На фиг. 2 показаны расчеты задачи SRP1 с начальными данными

$$s(x, 0) = \begin{cases} 0.9, & x \leq 0, \\ 0.2, & x > 0, \end{cases} \quad c(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

на фиг. 3 – задачи SRP2 с начальными данными

$$s(x, 0) = \begin{cases} 0.45, & x \leq 0, \\ 0.9, & x > 0, \end{cases} \quad c(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

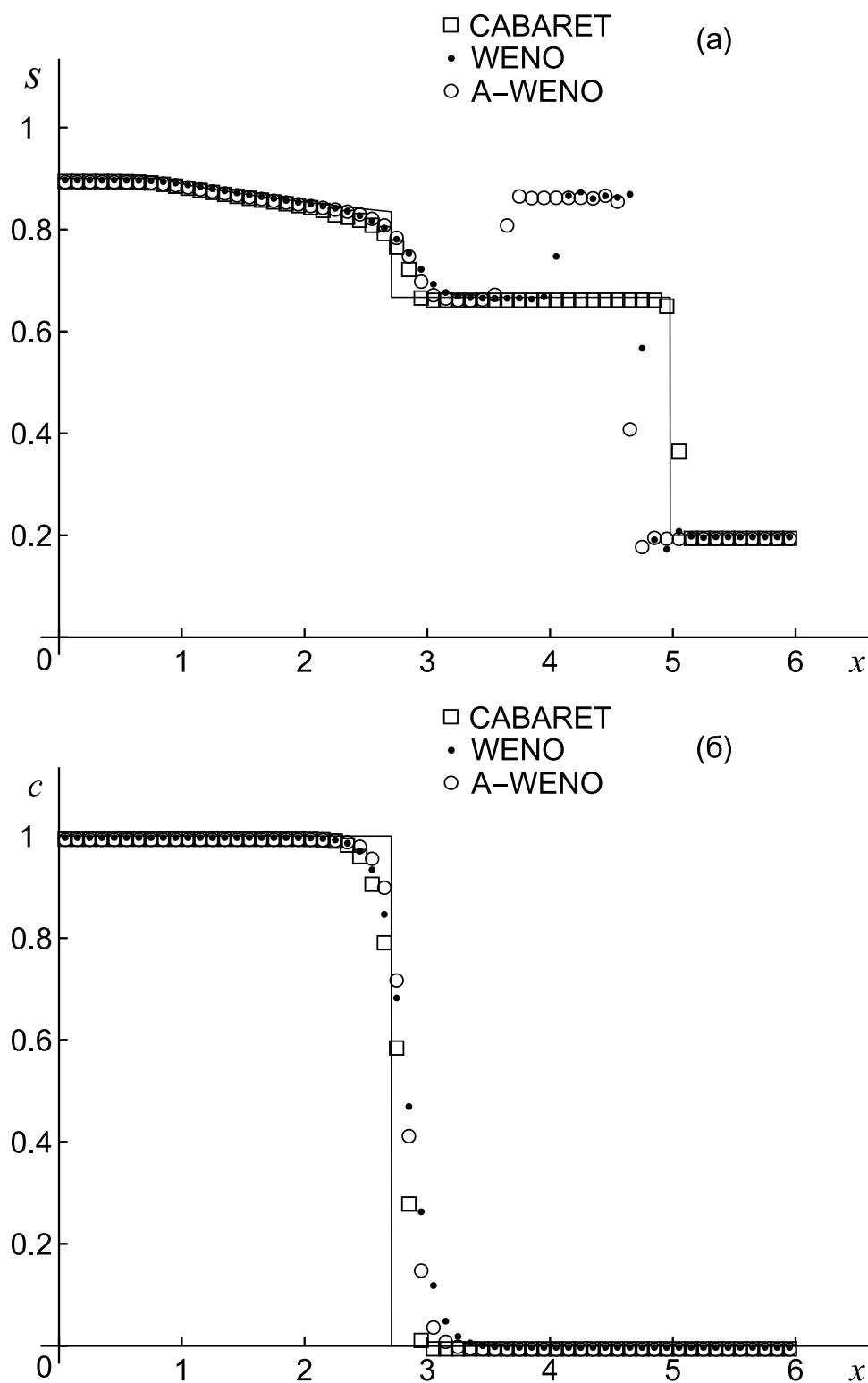
и на фиг. 4 – задачи SRP3 с начальными данными

$$s(x, 0) = \begin{cases} 0.9, & x \leq 0, \\ 0.78, & x > 0, \end{cases} \quad c(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

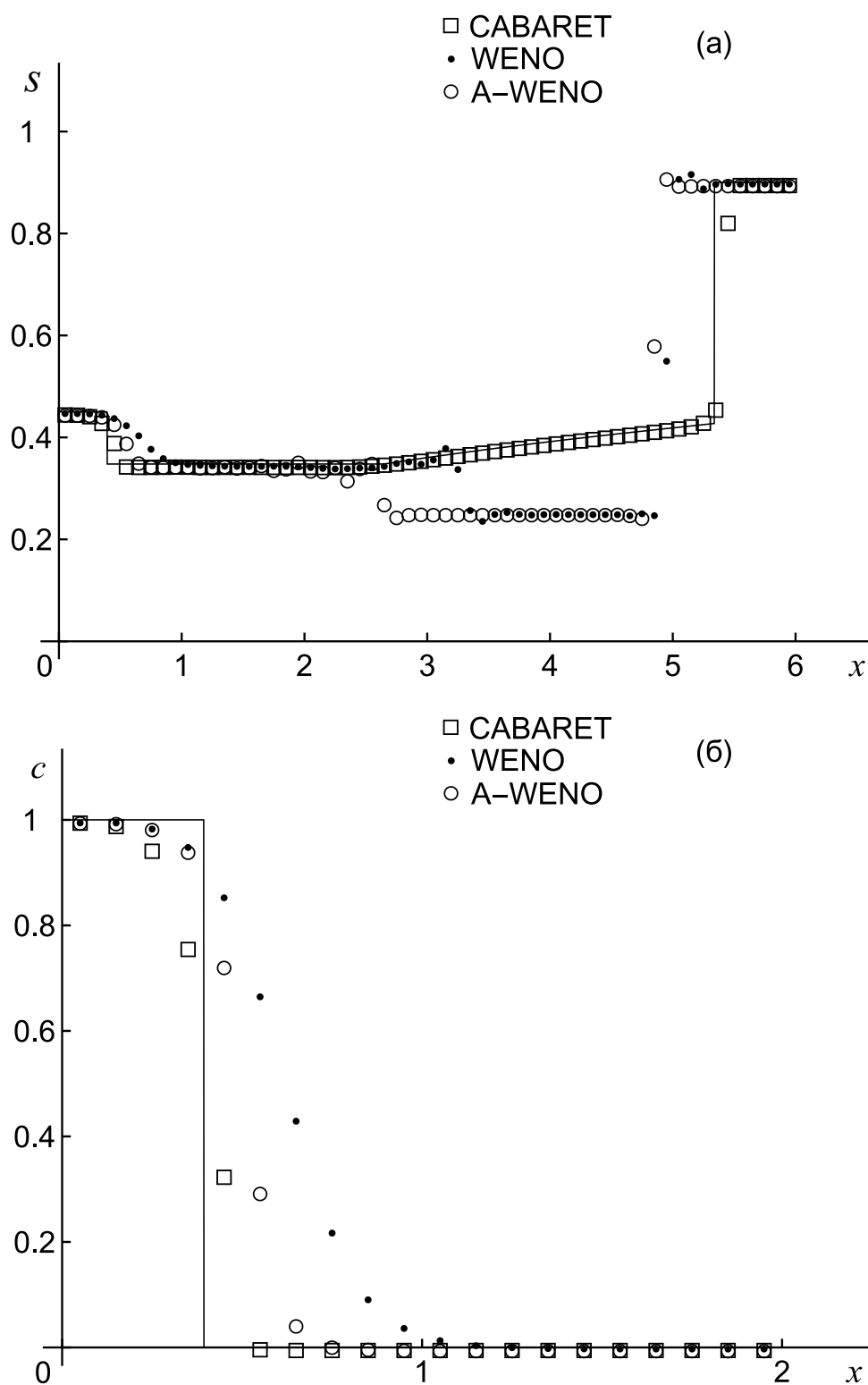
Отметим, что такие начальные данные соответствуют тестовым примерам для конкретных прикладных задач [26, 27]. При этом для схем WENO использовалось приближенное начальное условие  $c(x, 0) = 10^{-8}$ ,  $x > 0$ , поскольку при условии  $c(x, 0) = 0$ ,  $x > 0$ , решение, получаемое по таким схемам, становится неустойчивым.

При решении всех трех рассматриваемых задач формируются ударные волны  $S_1$  и  $S_2$ , а также центрированная волна разрежения  $R_1$ , примыкающая к одной из ударных волн; причем волна  $S_1$  всегда распространяется с большей скоростью, чем волна  $S_2$ . В решениях задач SRP1 (фиг. 2а) и SRP3 (фиг. 4а) волна разрежения  $R_1$  примыкает к ударной волне  $S_2$  и функция  $s(x, t)$  в волне  $R_1$  монотонно убывает. При решении задачи SRP2 (фиг. 3а) волна разрежения  $R_1$  примыкает к ударной волне  $S_1$  и функция  $s(x, t)$  в волне  $R_1$  монотонно возрастает. Следует заметить, что для других начальных данных существуют решения, в которых волна разрежения  $R_1$  примыкает к обоим скачкам  $S_1$  и  $S_2$ , а также решения, которые содержат скачки  $S_1$  и  $S_2$  без волн разрежения. Поведение численных решений для этих случаев качественно совпадает с приведенными в работе примерами.

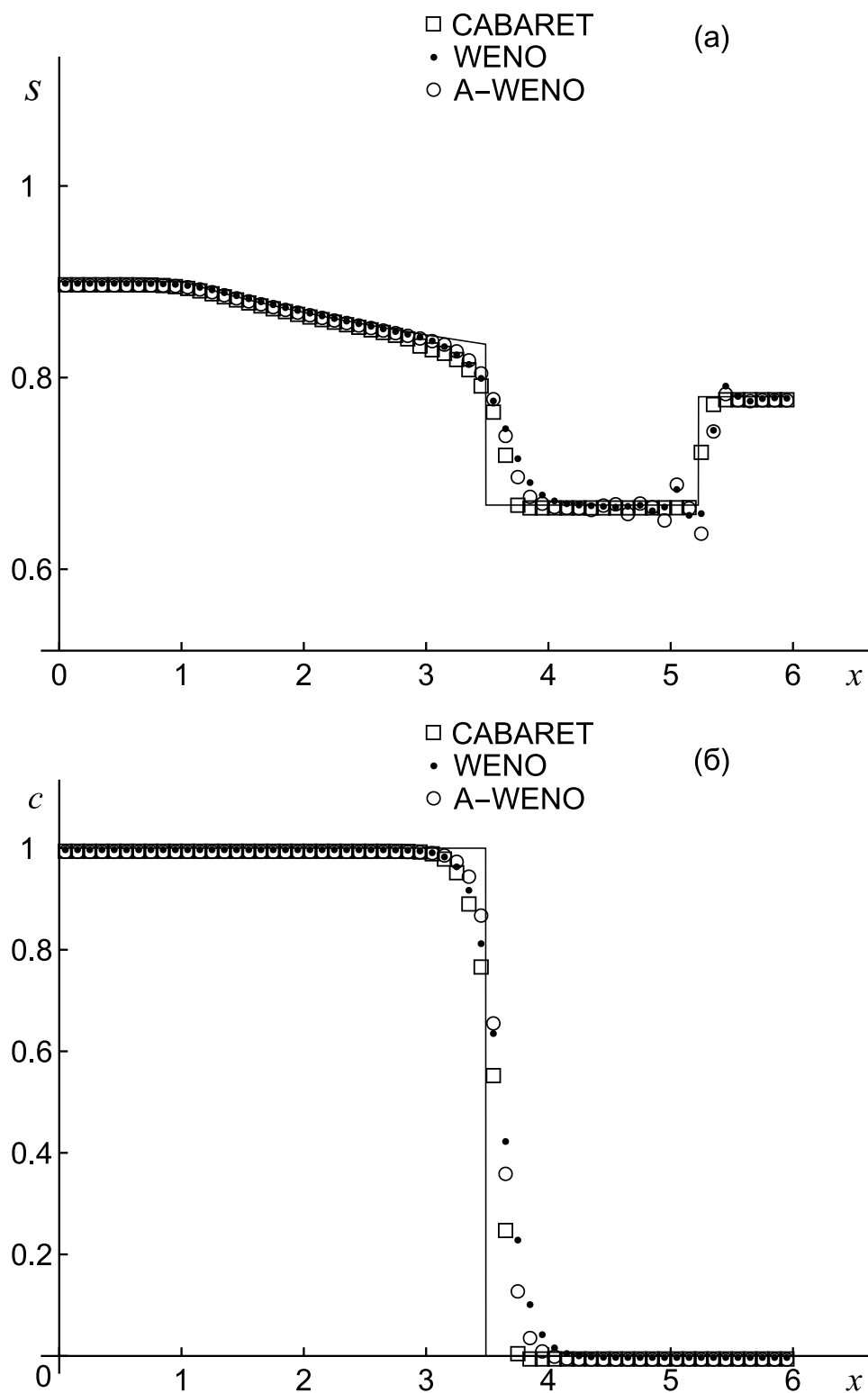
Из фиг. 2б, 3б и 4б следует, что при решении задач SRP1, SRP2 и SRP3 все три схемы с достаточно высокой точностью локализуют сильный разрыв функции  $c(x, t)$  на фронте ударной волны  $S_2$ . Однако при расчете функции  $s(x, t)$  точность схем CABARET и WENO существенно различается (фиг. 2а, 3а и 4а).



**Фиг. 2.** Сравнение в момент времени  $t = 2.93$  точного (сплошная линия) и численных решений задачи SRP1 по схемам CABARET (квадратики), WENO5 (точки) и A-WENO (кружки).



**Фиг. 3.** Сравнение в момент времени  $t = 3.06$  точного (сплошная линия) и численных решений задачи SRP2 по схемам CABARET (квадратики), WENO5 (точки) и A-WENO (кружки).



**Фиг. 4.** Сравнение в момент времени  $t = 3.78$  точного (сплошная линия) и численных решений задачи SRP3 по схемам CABARET (квадратики), WENO5 (точки) и A-WENO (кружки).

Если численные решения всех трех задач SRP, получаемые по схеме CABARET, сходятся к точному решению для функции  $s(x, t)$  и хорошо локализуют сильные и слабые разрывы этого решения, то в численных решениях задач SRP1 (фиг. 2а) и SRP2 (фиг. 3а), получаемым по WENO-схемам, отсутствует сходимость к точным значениям функции  $s(x, t)$  в области постоянного течения за фронтом ударной волны  $S_1$ . Численные решения задачи SRP3 (фиг. 4а), получаемым по WENO-схемам, сходятся к точному решению для функции  $s(x, t)$ , однако, в отличие от схемы CABARET, имеют заметные нефизические осцилляции в окрестности ударной волны  $S_1$ .

Таким образом, при расчете задач SRP1, SRP2 и SRP3 схема CABARET имеет существенные преимущества по сравнению со схемами WENO5 и A-WENO, тем более, что время расчета данных задач по схеме CABARET почти на порядок меньше, чем по WENO-схемам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Cockburn B., Shu C.W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // J. Sci. Comput. 2001. V. 16. № 3. P. 173–261.
3. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
4. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
5. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
6. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд. МГУ, 2013.
7. Shu C.W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes // Acta Numer. 2020. V. 29. P. 701–762.
8. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136.
9. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
10. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. N. 2. P. 408–463.
11. Liu X.D., Osher T., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. 1994. V. 115. N. 1. P. 200–212.
12. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451.
13. Yang H. Convergence of Godunov type schemes // Appl. Math. Letters. 1996. V. 9. P. 63–67.
14. Bell P., Colella P., Trangenstein J. Higher order Godunov methods for general systems of hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1989. V. 82. P. 362–397.
15. Saurel R., Larini M., Loraud J.C. Exact and approximate Riemann solvers for real gases // J. Comput. Phys. 1994. V. 112. P. 126–137.
16. Wang B., Glaz H. Second order Godunov-like schemes for gas dynamics with a nonconvex equation of state // 14th Computational Fluid Dynamics Conference AIAA Report AIAA-99-3256. 1999.
17. Kurganov A., Petrova G., Popov B. Adaptive semidiscrete central-upwind schemes for nonconvex hyperbolic conservation laws // SIAM J. Scient. Comp. 2007. V. 29. P. 2381–2401.
18. Qiu J.M., Shu C.W. Convergence of high order finite volume weighted essentially non-oscillatory scheme and discontinuous Galerkin method for nonconvex conservation laws // SIAM J. Scient. Comp. 2008. V. 31. P. 584–607.

19. *Cai X., Qiu J., Qiu J.* Finite volume HWENO schemes for nonconvex conservation laws // *SIAM J. Scient. Comp.* 2017. V. 75. P. 65–82.
20. *Остапенко В.В., Черевко А.А.* Применение схемы КАБАРЕ для расчета разрывных решений скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком // *Докл. АН.* 2017. Т. 476. № 5. С. 518–522.
21. *Gologush T.S., Cherevko A.A., Ostapenko V.V.* Comparison of the WENO and CABARET schemes at calculation of the scalar conservation law with a nonconvex flux // *AIP Conference Proc.* 2020. V. 2293. № 370006. P. 1–4.
22. *Jiang G.S., Shu C.W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // *J. Comput. Phys.* 1996. V. 126. P. 202–228.
23. *S. Gottlieb, D. Ketcheson and C.-W. Shu* Strong stability preserving Runge-Kutta and multistep time discretizations. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2011.
24. *Ентов В.М., Зазовский А.Ф.* Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 1989.
25. *Wang B.S., Don W.S., Kurganov A., Liu Y.* Fifth-order A-WENO schemes based on the adaptive diffusion central-upwind Rankine-Hugoniot fluxes // *Commun. Appl. Math. Comput.* 2023. V. 5. P. 295–314.
26. *Ентов В.М., Хавкин А.Я., Чен-Син Э.* Расчеты процессов вытеснения нефти раствором активной примеси // Труды III всесоюзного семинара: Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. 1977. С. 87–96.
27. *Тимофеева Т.С., Алексеева А.Г.* Неизотермическое вытеснение нефти раствором активной примеси // Матем. заметки СВФУ. 2010. Т. 17. № 2. С. 170–176.
28. *Harten A., Osher S.* Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes // *SIAM J. Numer. Anal.* 1987. V. 24. N. 2 P. 279–309.
29. *Lax P., Wendroff B.* Systems of conservation laws // *Commun. Pure Appl. Math.* 1960. V. 13. P. 217–237.
30. *Chu S., Kovyrkina O.A., Kurganov A., Ostapenko V.V.* Experimental convergence rate study for three shock-capturing schemes and development of highly accurate combined schemes // *Numer. Meth. Part. Diff. Eq.* 2023. V. 5. P. 1–30.

## NUMERICAL SIMULATION OF THE TWO-PHASE FILTRATION PROCESS WITH AN ACTIVE IMPURITY

T. S. Sharifullina\*, A. A. Cherevko\*\*, V. V. Ostapenko\*\*\*

*630090 Novosibirsk, Lavrentiev Ave., 15, M. A. Lavrentiev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch  
of the Russian Academy of Sciences, Russia*

*\*e-mail: tatiana\_06.08@mail.ru*

*\*\*e-mail: cherevko@mail.ru*

*\*\*\*e-mail: ostigil@mail.ru*

Received: 09.04.2024

Revised: 09.04.2024

Accepted: 28.06.2024

**Abstract.** A comparative analysis of the accuracy of the CABARET (second-order) scheme with the WENO5 and A-WENO (fifth-order in space and fourth-order in time) schemes is carried out when calculating various Riemann problems for a non-convex system of conservation laws of a two-phase filtration model with an active impurity. It is shown that when calculating these problems, the CABARET scheme has significantly higher accuracy compared to the WENO schemes, especially in those areas of precise solution where centered rarefaction waves are adjacent to shock waves.

**Keywords:** equations of gas dynamics, shock waves, high-precision through calculation schemes.