

Том 64, Номер 1

ISSN 0044-4669

Январь 2024

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



ФИЦ ИУ РАН



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 64, номер 1, 2024 год

Памяти Сергея Константиновича Годунова (17.07.1929—15.07.2023) 3

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Повышение точности экспоненциально сходящихся квадратур
А. А. Белов, В. С. Хохлачев 7

Оптимальные по порядку сплайн-методы решения особых
интегродифференциальных уравнений
Н. С. Габбасов 17

Проекторный подход к алгоритму Бутузова–Нефёдова асимптотического решения
одного класса дискретных задач с малым шагом
Г. А. Курина, Н. Т. Хоай 28

Сходимость некоторых разностных схем метода опорных операторов
для повторных ротационных операций
Ю. А. Повещенко, А. Ю. Круковский, В. О. Подрыга, П. И. Рагимли 41

Получение известных частных решений задачи о σ -коммутировании ($\sigma \neq 0, \pm 1$)
тёплицевой и ганкелевой матриц в рамках унифицированного подхода
В. Н. Чугунов, Х. Д. Икрамов 55

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

О сходимости численного метода решения задачи оптимального управления
в процессе формообразования панели в режиме ползучести
К. С. Бормотин 65

Задача мультипликативного управления для нелинейной модели реакции–диффузии
Р. В. Бризицкий, А. А. Дончак 77

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Моделирование доменных стенок: простые волны в уравнении магнитодинамики
Л. А. Калякин, Е. Г. Екомасов 94

Лакуны в спектре тонких волноводов с периодически расположенными
локальными деформациями стенок
С. А. Назаров 109

Интегральные представления для эллиптических систем второго порядка на плоскости
А. П. Солдатов 129

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Реальная точность линейных схем высокого порядка аппроксимации
в задачах газовой динамики

М. Д. Брагин

149

Численный анализ разрушения одномерного течения полимерной жидкости с фронтом

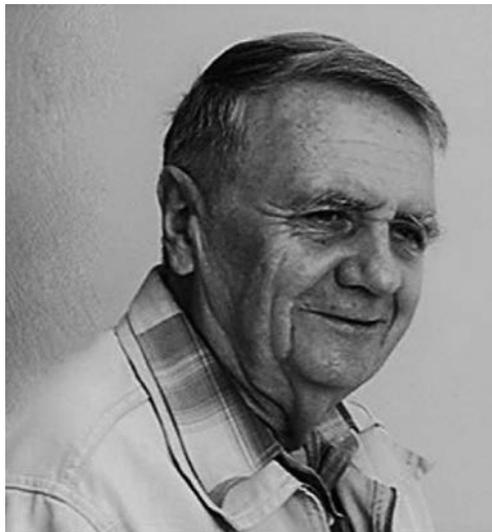
Л. С. Брындин, Б. В. Семисалов, В. А. Беляев, В. П. Шапеев

162

Чувствительность функционалов задачи вариационного усвоения данных
при восстановлении начального состояния и потока тепла
для модели термодинамики моря

В. П. Шутяев, Е. И. Пармузин

176



ПАМЯТИ СЕРГЕЯ КОНСТАНТИНОВИЧА ГОДУНОВА (17.07.1929–15.07.2023)

15 июля 2023 г. ушел из жизни накануне своего 94-летия Сергей Константинович Годунов, всемирно известный ученый, один из основоположников вычислительной математики, внесший заметный вклад в теорию дифференциальных уравнений, механику сплошных сред, линейную алгебру и их приложения. Его новаторские работы во многом определили характер современного численного анализа и наиболее перспективные направления его развития. Особенностью научного подхода С. К. Годунова является органичное сочетание глубоких знаний математических и численных методов с умением эффективно решать практические задачи.

В 1951–1953 гг. С. К. Годунов работал в Математическом институте им. В. А. Стеклова АН СССР. Затем он работает в Институте прикладной математики (ныне ИПМ им. М. В. Келдыша РАН), руководя в 1966–1969 гг. отделом этого института. Одновременно в 1952–1969 гг. он преподает на кафедре И. Г. Петровского в МГУ, сначала ассистентом, затем доцентом и профессором. В 1969 г. С. К. Годунов переезжает в Новосибирский Академгородок. Здесь он заведует лабораторией в ВЦ Сибирского отделения АН СССР, а затем с 1980 г. и до конца жизни работает в Институте математики (ныне Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН), занимая должности зав. отделом, зам. директора, и.о. директора (1981–1986).

Основные научные интересы С. К. Годунова — это корректные постановки задач для дифференциальных уравнений, теория разностных схем, вычислительная линейная алгебра, методы решения задач гидродинамики, модели вязкоупругих деформаций металлов в задачах высокоскоростного соударения, методы гарантированной точности для компьютерных расчетов.

Общей и типичной чертой многих нелинейных процессов является наличие особенностей. Например, в газодинамических явлениях, описываемых нелинейными гиперболическими уравнениями, возмущения распространяются по характеристикам с конечной скоростью. Однако, в отличие от линейного случая, они могут появляться самопроизвольно, вызывая образование ударных волн. До сих пор задача численного расчета разрывных решений уравнений газовой динамики остается сложной математической проблемой. Серьезной трудностью в развитии численных методов является отсутствие теоретических представлений о “гладкости” обобщенных решений задач газовой динамики [1960]. Это самое слабое место всех вычислительных задач, так как даже самые простые одномерные задачи часто чрезвычайно сложны для компьютерной реализации с математической точки зрения [1997]. Ясно только, что рациональная организация методов расчета разрывных решений задач газовой динамики (представляющих практический интерес) не может развиваться без учета классов корректности этих задач.

Иными словами, трудности численного решения этого класса задач связаны с отсутствием четких теоретических представлений о решениях квазилинейных гиперболических уравнений, в частности в момент появления их особенностей. По этой причине ценность методов, основанных на формальных подходах к задачам численного исследования, невелика. Отсюда также видно, что важна роль теоретических

исследований, способных уменьшить произвол в выборе метода численного исследования. Успешное использование информации о корректности задач для улучшения качественных характеристик численного метода является важным для вычислительной практики.

В 1954 г. С. К. Годунов предложил схему численного расчета задач одномерной газовой динамики с разрывными решениями — ударными волнами. Она была опубликована в статье [1959-а] и вскоре стала всемирно известной под названием схемы Годунова. Эта схема предназначена для расчета разрывных решений задач газодинамики, но сейчас имеет многочисленные обобщения. В ее основе лежит требование сохранения монотонности численного решения при переходе с каждого расчетного слоя по времени на следующий. Схема реализована С. К. Годуновым в терминах точного решения задачи Римана о распаде разрыва на каждой границе между соседними расчетными ячейками. Эта работа и ее развитие [1959-б], см. комментарии [1997, 2011], были настолько прорывными, что оказали существенное влияние на последующее развитие численных методов, рассматривая их на более высоком теоретическом уровне. В упомянутых работах представлены новые математические идеи, которые дают гораздо более глубокое понимание, чем очевидные факты, и составляют основу современных принципов построения численных методов. В качестве примеров можно привести известные методы коррекции потоков Дж. Бориса и Д. Бука и невозрастания полной вариации А. Хартена, которые естественно называть методами годуновского типа, поскольку они опираются на упомянутую выше идею сохранения монотонности. Сейчас метод Годунова продолжает триумфальное шествие по всему миру с многочисленными приложениями. Метод является инструментом для численного исследования задач и важным элементом математического образования специалистов.

Исследование С. К. Годуновым двумерных нестационарных задач газодинамики и стационарных задач трансзвукового обтекания легло в основу метода установления по времени [1961-а]. Эта техника общепризнана и широко используется во всем мире. Многолетний опыт применения схемы Годунова в ее оригинальной форме обобщен в монографии [1976], написанной Сергеем Константиновичем вместе с коллегами.

Пионерские исследования Годунова легли в основу систематического изучения систем квазилинейных уравнений, которые могут быть записаны в виде законов сохранения. Им выполнены оригинальные исследования решений систем квазилинейных гиперболических уравнений. Он обнаружил новый эффект сильной зависимости решений от малых диссипативных членов, введенных в гиперболическую систему. Эти результаты стимулировали исследования нелинейной теории упругости [1972, 1974].

С. К. Годунов сформулировал важный класс термодинамически совместимых систем, содержащий систему уравнений газодинамики, обобщил понятие энтропии и закон возрастания энтропии, нашел новые термодинамические соотношения (тождества), получившие название расширенной термодинамики. Эти исследования легли в основу описания структуры законов сохранения и систематизации уравнений механики сплошных сред. Так появилось фундаментальное понятие «термодинамически совместимая гиперболическая система законов сохранения», описывающая процесс движения в сплошной среде и ее термодинамические тождества.

Эти исследования привели к новому математическому подходу [1978, 1998], позволяющему сформулировать в изящном унифицированном виде принципы математического моделирования. Суть этого подхода заключается в переформулировке задачи и приведении ее к специальной консервативной (дивергентной) форме, более удобной как для теоретического, так и для численного исследования. Следствием такой формы уравнений является то, что уравнения могут быть представлены в симметричной t -гиперболической форме по Фридрихсу [2008, 2010, 2012]. Ее простейший вариант впервые был рассмотрен в [1961-с]. С. К. Годунов связал свойство гиперболичности с понятием корректности задачи и тем самым заложил основы современной теории численных методов для нелинейных уравнений гидродинамики. Эта взаимосвязь оказалась необходимой при построении эффективных вычислительных методов. Тот факт, что система уравнений может быть представлена в двух формах, консервативной и симметричной t -гиперболической, позволяет дискретизировать исследуемую задачу в два этапа. В силу гиперболичности на первом этапе формируется предиктор для расчета потоков в законах сохранения. На втором этапе в основу построения корректора положена консервативная форма уравнений. Этот шаг коррекции является ключевым, так как он учитывает некоторые дополнительные законы сохранения и закон возрастания энтропии.

Теория термодинамически совместимых систем позволяет сформулировать новые, математически корректные уравнения механики сплошных сред в виде законов сохранения. К таким системам относятся многие классические уравнения математической физики и механики сплошных сред: уравнения газовой динамики и гидродинамики, магнитной и релятивистской гидродинамики, теории упругости, уравнения Максвелла и др. (см. также [2008, 2010, 2012]).

С. К. Годунов внес значительный вклад в теорию разностных схем. Монография, написанная им совместно с В. С. Рябенским [1962], явилась первой на русском языке книгой, обобщающей создание, развитие и реализацию численных методов. Эта работа интенсивно проводилась в предшествующее

десятилетие в специально созданных научных институтах и организациях для срочного решения задач, необходимых в актуальных, как правило, закрытых приложениях. Впоследствии монография была переработана авторами в учебное пособие [1973], переизданное в 1978 г.

Уже в 1950-е гг. С. К. Годунов не ограничивается исследованиями в области вычислительных проблем газодинамики и создает метод ортогональной прогонки, успешно применяемый для расчета ядерных реакторов [1964].

С. К. Годунов ввел в вычислительную линейную алгебру новые фундаментальные понятия, такие как спектральный портрет матрицы, критерий качества дихотомии и критерий разбиения спектра, гарантированная точность компьютерных вычислений [1992, 1997, 2002].

Его научная деятельность и многообразный педагогический опыт наряду с идеями нового качества образования оказали значительное влияние на развитие науки. С. К. Годунов имеет более 50 лет общего педагогического стажа, сначала в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, а затем в Новосибирском государственном университете, где он стал профессором кафедры дифференциальных уравнений, а с 1977 г. много лет заведовал этой кафедрой. На механико-математическом и физическом факультетах НГУ он читал курсы лекций “Механика сплошных сред”, “Уравнения математической физики”, “Приближенные вычисления”, “Дифференциальные уравнения”, “Численные методы линейной алгебры”, “Современные аспекты линейной алгебры”, “Теория гиперболических уравнений”, “Уравнения нелинейной теории упругости”.

С. К. Годунов известен как превосходный педагог; его подробные и всеобъемлющие лекции ясны, логичны и просты для понимания. Как преподаватель, С. К. Годунов всегда был неумолимым реформатором. В основе его уникального научно-педагогического стиля лежат твердость и глубина понимания важности фундаментальной математики и того, как она определяет правильность концепций прикладной науки. Он обладал выдающейся способностью находить объединяющие понятия в математике и сосредотачиваться на наиболее важных и неотложных научных проблемах.

С. К. Годунов — автор более 300 научных работ, в том числе 17 монографий, некоторые из которых опубликованы на иностранных языках.

Участие С. К. Годунова в выполнении специальных государственных заданий, связанных с созданием новой военной техники (атомный проект и другие секретные работы) отмечено наградами: он лауреат Ленинской премии (1959), награжден орденами Трудового Красного Знамени (1956, 1975), орденом Почета (1954, 1981), орденом Александра Невского (2023), награжден академическими премиями им. А. Н. Крылова за научные работы по сварке взрывом (1972), им. М. А. Лаврентьева за книгу “Элементы механики сплошных сред” (1993), премией Фонда им. М. А. Лаврентьева “За выдающийся вклад в фундаментальную математику и ее приложения”, Золотой медалью им. Леонарда Эйлера (2022), премией Р. Агарвала за значительный научный и инженерный вклад в вычислительную гидродинамику (2020). С 1997 г. С. К. Годунов — почетный профессор Мичиганского университета в США.

Достижения Годунова широко известны в мировой науке. Многие современные программные продукты во всем мире основаны на использовании разностной схемы Годунова и ее модификаций. Некоторым из его методов были посвящены следующие всемирные конференции: “Метод Годунова для газовой динамики: современные приложения и будущие разработки” (1–3 мая 1997 г., Анн-Арбор, Мичиган, США), “Методы Годунова: теория и приложения” (12–22 октября 1999 г., Оксфорд, Великобритания), “Математика и ее приложения”, в честь 90-летия С. К. Годунова (4–10 августа 2019 г., Новосибирск, Россия). Ниже приводится список избранных трудов С. К. Годунова, упоминаемых в тексте. Полный список работ, опубликованных до 2019 г., представлен в библиографическом указателе [2019].

Сергей Константинович в течение нескольких десятилетий являлся активным и ответственным членом редакционной коллегии нашего журнала.

Члены редколлегии Журнала вычислительной математики и математической физики, сотрудники редакции и многочисленные авторы глубоко скорбят по случаю кончины Сергея Константиновича и будут помнить его светлый образ и сохранять его научное наследие.

СПИСОК ИЗБРАННЫХ ПУБЛИКАЦИЙ С. К. ГОДУНОВА (В ХРОНОЛОГИЧЕСКОМ ПОРЯДКЕ)

1. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. 1959. Т. 47 (89). № 3. С. 271–306.
2. Термодинамика газов и дифференциальные уравнения // Успехи матем. наук. 1959. Т. 14. № 5 (89). С. 97–116.

3. О понятии обобщенного решения // Докл. АН СССР. 1960. Т. 134. № 6. С. 1279–1282.
4. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т. 1. № 6. С. 1020–1050. Совм. с А. В. Забродиным, Г. П. Прокоповым.
5. Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 3. С. 521–523.
6. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. 340 с. Совм. с В. С. Рябенским.
7. Метод сферических гармоник в задаче о критических параметрах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 3. С. 473–484. Совм. с И. А. Адамской.
8. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26. № 3 (159). Совм. с У. М. Султангазиным.
9. О диссипативности граничных условий В. С. Владимирова для симметрической системы метода сферических гармоник // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971. Т. 11. № 3. Совм. с У. М. Султангазиным.
10. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с. То же на фр., исп., польск. языках.
11. Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // Прикл. механика и техн. физика. 1972. № 6. С. 124–144. Совм. с Е. И. Роменским.
12. Разностные схемы: введение в теорию. М.: Наука, 1973. 400 с. Совм. с В. С. Рябенским.
13. Уравнение состояния упругой энергии металлов при нешаровом тензоре деформации // Прикл. механика и техн. физика. 1974. № 2. С. 123. Совм. с Н. С. Козыным, Е. И. Роменским.
14. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с. Совм. с А. В. Забродиным, М. Я. Ивановым, А. Н. Крайко, Г. П. Прокоповым.
15. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.
16. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1988. 456 с. Совм. с А. Г. Антоновым, О. П. Кирилюком, В. И. Костиным.
17. Квазиизометрическая параметризация криволинейного четырехугольника и метрика постоянной кривизны // Siberian Advances in Mathematics. 1995. Т. 5. № 2. С. 1–20. Совм. с В. М. Гордиенко, Г. А. Чумаковым.
18. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Науч. книга, 1997. 390 с.
19. Воспоминания о разностных схемах: Докл. на Международном симпозиуме «Метод Годунова в газовой динамике». Мичиган. ун-т (США). Май, 1997. Новосибирск: Науч. книга, 1997. 40 с.
20. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Науч. книга, 1998. 267 с. Совм. с Е. И. Роменским.
21. Лекции по современным проблемам алгебры. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
22. Симметрические гиперболические уравнения нелинейной теории упругости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 6. С. 1034–1055. Совм. с И. М. Пешковым.
23. Термодинамически согласованная нелинейная модель упругопластической среды Максвелла // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 8. С. 1481–1498. Совм. с И. М. Пешковым.
24. Экспериментальный анализ сходимости численного решения к обобщенному решению в газовой динамике // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 1. Совм. с Ю. Д. Манузиной, М. А. Назарьевой.
25. Термодинамическая формализация уравнений гидродинамики заряженного диэлектрика в электромагнитном поле // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 52. № 5. С. 916–929.
26. Моделирование ударно-волновых процессов в упругопластических материалах на различных (атомный, мезо и термодинамический) структурных уровнях. М., Ижевск: Ижевский инст. компьют. исслед., 2014. 295 с. Совм. с С. П. Киселевым, И. М. Куликовым, В. И. Мали.
27. Экспериментальные исследования разностных моделей газовой динамики с ударными волнами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 8. С. 5–19. Совм. с Д. В. Ключинским, С. В. Фортовой, В. В. Шепелевым.
28. Годунов Сергей Константинович: Библиографический указатель. Сост. М. Л. Коноводченко, ред. В. Н. Бельх. 3-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2019.
29. Исследование энтропийных свойств линеаризованной редакции метода Годунова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 4. С. 639–651. Совм. с В. В. Денисенко, Д. В. Ключинским, С. В. Фортовой, В. В. Шепелевым.
30. Численный метод квазиизометрической параметризации для двумерных криволинейных областей // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 4. С. 578–589. Совм. с В. Т. Жуковым, О. Б. Феодоритовой.

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СХОДЯЩИХСЯ КВАДРАТУР¹⁾

© 2024 г. А. А. Белов^{1,2,*}, В. С. Хохлачев^{1,**}

¹119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 2, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия;

²117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

*e-mail: aa.belov@physics.msu.ru

**e-mail: valentin.mycroft@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.05.2023 г.

Переработанный вариант 24.05.2023 г.

Принята к публикации 25.07.2023 г.

Вычисление одномерных интегралов возникает во многих задачах физики и техники. Для этого чаще всего используются простейшие квадратуры средних, трапеций и Симпсона на равномерной сетке. Для интегралов от периодических функций по полному периоду сходимость этих квадратур резко ускоряется и зависит от числа шагов сетки по экспоненциальному закону. В данной работе получены новые асимптотически точные оценки погрешности таких квадратур. Они учитывают расположение и кратность полюсов подынтегральной функции в комплексной плоскости. Построено обобщение этих оценок на случай, когда априорная информация о полюсах подынтегральной функции отсутствует. Описана процедура экстраполяции погрешности, которая кардинально ускоряет сходимость квадратур. Библ. 19. Фиг. 3.

Ключевые слова: экспоненциальные квадратуры, контроль точности, экстраполяция погрешности.

DOI: 10.31857/S0044466924010015, **EDN:** ZKGAXU

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Прикладные задачи

Рассмотрим задачу о вычислении однократного интеграла от функции $f(x)$ по вещественному отрезку $x \in [0, T]$

$$I = \int_0^T f(x) dx. \quad (1)$$

Интегралы, не берущиеся в элементарных функциях, встречаются во многих физических приложениях. Приведем некоторые примеры:

1. Вычисление специальных функций математической физики: функции Ферми–Дирака, равные моментам фермиевского распределения, гамма-функция, цилиндрические функции, — W -функции Ламберта и ряд других.
2. Расчет скорости реакции по заданному сечению.
3. Расчет коэффициентов Фурье, преобразований Фурье и Лапласа заданной функции.
4. Численное решение интегральных уравнений, как корректно поставленных, так и некорректных.
5. Решение краевых задач для уравнений в частных производных (включая задачи на собственные значения), записанных в форме интегральных законов сохранения и т.д.

Такие интегралы необходимо вычислять с высокой точностью вплоть до ошибок компьютерного округления.

1.2. Вычисление квадратур

Как правило, для сеточного вычисления квадратур используют методы трапеций, средних и Симпсона на равномерной сетке [3]. Для этих методов хорошо известна мажорантная оценка погрешности. Для непериодических C^2 -гладких функций погрешность формул трапеций и средних есть $O(N^{-2})$, для

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта № 22-71-00028).

формулы Симпсона — $O(N^{-4})$, если подынтегральная функция является C^4 -гладкой. Здесь N — число шагов сетки. Если $f(x)$ можно периодически продолжить за пределы отрезка $(0, T)$, и это периодическое продолжение непрерывно вместе с p производными, то порядок точности указанных квадратур повышается на p единиц.

Если подынтегральная функция является периодической (т.е. периодическое продолжение является бесконечно гладким), и интеграл вычисляется по полному периоду, то сходимость резко ускоряется. Зависимость погрешности от шага становится не степенной, а экспоненциальной $\sim \exp(-const \cdot N)$ [5, 6, 18]. Это означает, что при уменьшении шага вдвое число верных знаков в ответе примерно удваивается. Эта скорость сходимости аналогична таковой в методе Ньютона.

Аналогичной скоростью сходимости обладают спектральные методы, основанные на аппроксимации первообразной полиномами Чебышёва I рода (см., например, [7–13, 15–17]). В методах этого класса для первообразной составляют дифференциальное уравнение, решение которого представляют в виде разложения по базису указанных полиномов с некоторыми коэффициентами. Однако трудоемкость расчета оказывается довольно высокой. Кроме того, система уравнений относительно коэффициентов порой оказывается плохо обусловленной, поэтому для ее обращения используют регуляризацию.

1.3. Контроль точности и экстраполяция погрешности

1. Проведем расчеты на нескольких сетках с числом шагов $N, 2N, 4N, \dots$, т.е. с шагом $h, h/2, h/4, \dots$. Получим последовательность сеточных значений квадратур $I_N, I_{2N}, I_{4N}, \dots$. Если, начиная с некоторого достаточно большого N , эта последовательность стремится к некоторому пределу, то можно констатировать сходимость квадратур.

Если известна зависимость погрешности δ от числа шагов, то можно построить асимптотически точные оценки точности. Например, для разностных формул порядка точности p имеем $\delta \sim N^{-p}$, т.е. при уменьшении шага вдвое главная асимптотика погрешности убывает в 2^p раз. Отсюда следуют хорошо известные оценки погрешности по методу Рундсона [4, 14]

$$\delta_{2N} = \frac{I_{2N} - I_N}{2^p - 1} \quad (2)$$

либо

$$\delta_N = 2^p \frac{I_{2N} - I_N}{2^p - 1}. \quad (3)$$

Форма записи (3) более предпочтительна, поскольку она работоспособна не только на участке регулярной сходимости $\delta \sim N^{-p}$, но и по достижении ошибок округления.

Оценки (2), (3) асимптотически точны. Поэтому их можно использовать для исключения главной асимптотики погрешности. Для этого вычтем оценку из квадратуры

$$\tilde{I}_{2N} = I_{2N} + \delta_{2N}. \quad (4)$$

Этот прием называется экстраполяцией точности. Он не требует априорной информации о подынтегральной функции (кроме естественных предположений о гладкости) и повышает порядок точности на 2 единицы.

2. Если известны производные подынтегральной функции в точках $x = 0$ и $x = T$ порядка до $2M - 1$ включительно, то погрешность можно оценить по формуле Эйлера-Маклорена

$$\delta = \sum_{m=1}^M c_m h^{2m} (f^{(2m-1)}(T) - f^{(2m-1)}(0)). \quad (5)$$

Пользуясь этой оценкой, можно провести экстраполяцию погрешности аналогично (4). Такое уточнение повышает порядок точности на $2M$ единиц. Выигрыш по точности оказывается существенно большим, чем при рундсоновской экстраполяции (4). Однако при этом требуется значительно больше априорной информации о подынтегральной функции.

3. Для случая, когда квадратуры средних и трапеций сходятся экспоненциально, известны оценки точности Трефетена–Вайдмана [18]. Однако они не являются асимптотически точными и поэтому непригодны для экстраполяции погрешности.

Нами ранее были построены апостериорные асимптотически точные оценки для сеточных методов с экспоненциальной сходимостью [19]. Они напоминают таковые в методе Рундсона. Эти оценки имеют вид

$$\delta_N = I_{2N} - I_N, \tag{6}$$

$$\delta_{4N} = \frac{(I_{4N} - I_{2N})^3}{(I_{2N} - I_N)^2}. \tag{7}$$

Оценка (6) основана на том, что в силу исключительно быстрой сходимости значение I_{2N} значительно ближе к точному ответу, чем I_N . Оценка (7) учитывает экспоненциальную зависимость погрешности от числа шагов.

В данной работе построены новые асимптотически точные оценки погрешности экспоненциально сходящихся квадратур трапеций и средних. Они учитывают расположение и кратность полюсов подынтегральной функции на комплексной плоскости. Предложено обобщение этих оценок на случай, когда априорная информация о полюсах подынтегральной функции отсутствует. Экстраполяция погрешности позволяет кардинально повысить точность таких квадратур. Приведены примеры, иллюстрирующие преимущества предлагаемых подходов.

2. ПОГРЕШНОСТЬ КВАДРАТУРЫ ТРАПЕЦИЙ

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ является периодической на отрезке $(0, T)$. С помощью замены переменной $z = \exp(2\pi i x / T)$ перейдем от (1) к интегралу по единичной окружности на комплексной плоскости z

$$I = \int_{|z|=1} g(z) dz, \tag{8}$$

где

$$g(z) = \frac{T}{2\pi iz} f(\ln z). \tag{9}$$

Введем на окружности $|z|=1$ сетку $z_n = \exp(2\pi i n / N)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, шаг сетки равен $h_n = 2\pi i N^{-1} z_n$. Запишем квадратуру трапеций для интеграла (8)

$$I_N = 2\pi i N^{-1} \sum_{n=0}^{n=N-1} g(z_n) z_n, \tag{10}$$

2.1. Оценка Трэфетена–Вайдемана

В работе [18] доказано следующее утверждение. Пусть $g(z)$ имеет полюс первого порядка при $z = 0$, функция $zg(z)$ аналитична и удовлетворяет неравенству $|zg(z)| < M$, $M = \text{const}$ в кольце $R^{-1} < |z| < R$ для некоторого R . Тогда для квадратуры (10) справедлива мажорантная оценка погрешности

$$\delta_N = |I - I_N| \leq 2M (R^N - 1)^{-1}. \tag{11}$$

Наш анализ показал следующее [2]. Во-первых, зависимость δ_N от N асимптотически точна, если все конечные особые точки $g(z)$ суть полюсы первого порядка, и ближайшая к контуру особая точка попадает на границу указанного кольца. В этом случае константа M формально обращается в бесконечность. Во-вторых, если ближайшая к контуру особая точка является полюсом порядка 2 и выше, то оценка (11) теряет применимость.

2.2. Единственный полюс

В данной работе найдена новая главная по N асимптотика погрешности квадратурной формулы (10), применимая к существенно более широкому классу подынтегральных функций, чем оценка Трэфетена–Вайдемана.

Сначала рассмотрим простейший случай: пусть $g(z)$ имеет единственный полюс порядка q , расположенный в точке $z = a$ внутри единичной окружности, и не имеет других конечных особых точек. Отметим, что при $q \geq 2$ даже этот простейший случай выходит за пределы применимости оценки (11).

Представим подынтегральную функцию в виде

$$g(z) = f(z)(z - a)^{-q} = ((q - 1)!)^{-1} \partial_a^{(q-1)} (f(z)(z - a)^{-1}), \tag{12}$$

где функция $f(z)$ не имеет конечных особых точек. Тогда нетрудно найти точное значение интеграла $I = ((q-1)!)^{-1} f^{(q-1)}(a)$.

Найдем численное значение интеграла. Разложим в ряды по степеням z функции $f(z)$ и $(z-a)^{-1}$

$$f(z) = \sum_{q=\emptyset}^{+\infty} f_q z^q, \quad (z-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k-1}. \quad (13)$$

Здесь f_q — коэффициенты ряда Тейлора функции $f(z)$. Подставим в (10) представление (12), (13)

$$I_N = 2\pi i N^{-1} ((q-1)!)^{-1} \partial_a^{(q-1)} \sum_{q,k=\emptyset}^{+\infty} f_q a^k \sum_{n=0}^{N-1} z_n^{q-k}. \quad (14)$$

Нетрудно показать, что сумма по n равна N , если $g-k$ кратно N , и нулю в остальных случаях. Поэтому в двойной сумме по q,k остаются только те слагаемые, у которых $q-k = sN$, где s — целое число. Его удобно выбрать в качестве нового индекса суммирования. Диапазон его изменения есть $-\infty < s < [q/N]$, где квадратные скобки обозначают взятие целой части. Имеем

$$I_N = ((q-1)!)^{-1} \partial_a^{(q-1)} \sum_{q=\emptyset}^{+\infty} f_q a^q \sum_{s=-\infty}^{[q/N]} a^{-sN}. \quad (15)$$

Внутренний ряд есть сумма геометрической прогрессии. Внешняя сумма в главной по N асимптотике равна ряду Тейлора для $f(a)$. Поэтому главная по N асимптотика для I_N равна

$$I_N|_{N \rightarrow \infty} = ((q-1)!)^{-1} \partial_a^{(q-1)} \left[f(a) (1-a^N)^{-1} \right]. \quad (16)$$

Найдем главную асимптотику погрешности квадратуры (10)

$$\delta_N = I - I_N|_{N \rightarrow \infty} = ((q-1)!)^{-1} \partial_a^{(q-1)} \left[f(a) \left(1 - (1-a^N)^{-1} \right) \right]. \quad (17)$$

2.3. Множественные полюсы произвольной кратности

Формула (17) обобщена на случай, когда подынтегральная функция имеет произвольное конечное число полюсов целого порядка как внутри, так и вне контура интегрирования. Пусть функция $g(z)$ имеет полюсы в точках a_1, a_2, \dots, a_m порядков q_1, q_2, \dots, q_m соответственно. Тогда

$$g(z) = f(z) (z-a_1)^{-q_1} (z-a_2)^{-q_2} \dots (z-a_m)^{-q_m}. \quad (18)$$

Здесь функция $f(z)$ не имеет конечных особых точек.

Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательный результат. Введем обозначения $q = q_1 + q_2 + \dots + q_m$, $A_j = (a_j - a_1)(a_j - a_2) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_m)$ и

$$L = \prod_{s=1}^m \frac{1}{(q_s - 1)!} \frac{\partial^{q-m}}{\partial a_1^{q_1-1} \partial a_2^{q_2-1} \dots \partial a_m^{q_m-1}}. \quad (19)$$

Главная по N асимптотика погрешности квадратуры (10) от функции (18) имеет вид

$$\delta_N|_{N \rightarrow \infty} = L \sum_k f(a_k) A_k^{-1} \left[1 - (1-a_k^N)^{-1} \right] - L \sum_j f(a_j) A_j^{-1} (a_j^N - 1)^{-1}. \quad (20)$$

Здесь первая сумма берется по всем индексам k таким, что $|a_k| < 1$; вторая сумма — по индексам j , для которых $|a_j| > 1$.

По построению, оценка (20) не мажорантна, а асимптотически точна. Она применима к существенно более широкому классу подынтегральных функций, чем оценка (11) из работы [18]. Поэтому оценка (20) кардинально превосходит мировой уровень.

2.4. Неизвестные параметры

Чтобы применять оценки (17) и (20), нужно знать положения a_k и кратности q_k полюсов подынтегральной функции. Такая априорная информация известна не всегда. Например, если подынтегральная функция сама является решением некоторой сеточной задачи, то отыскание ее полюсов

в комплексной плоскости представляет самостоятельную проблему (причем более сложную, чем расчет исходного интеграла).

Однако зависимость δ от N в оценке (17) является асимптотически точной. Это позволяет рассчитать неизвестное a_k для полюса, наиболее близкого к контуру интегрирования.

Пусть проведен расчет на наборе сеток с числами узлов $N, 2N, 4N, \dots$. Обозначим через I_{end} значение квадратуры с самой последней сетки. В силу исключительно быстрой сходимости это значение намного точнее расчетов с предыдущих сеток. Поэтому точность квадратур, вычисленных на всех сетках, кроме последней, можно оценить как

$$\tilde{\delta}_N = I_{\text{end}} - I_N. \quad (21)$$

Построим оценку точности для I_{end} .

Простой полюс. Пусть подынтегральная функция в (8) имеет один простой полюс в точке a внутри единичной окружности. Случай полюса, расположенного вне единичной окружности $|a| > 1$, сводится к предыдущему заменой $a \rightarrow 1/a$. Поэтому эти случаи можно рассматривать вместе.

Согласно (17), для погрешности квадратуры (10) имеет место оценка

$$\delta_N|_{N \rightarrow \infty} = (I - I_N)|_{N \rightarrow \infty} = f(a) \left[1 - (1 - a^N)^{-1} \right]. \quad (22)$$

С другой стороны, величину δ_N можно апостериорно оценить согласно (21).

Удобно ввести обозначения $A = f(a)$, $t = a^N$. Обе эти величины неизвестны. Запишем равенства (21), (22) для двух последовательных сеток, содержащих N и $2N$ шагов

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}_N &= A \left(1 - (1 - t)^{-1} \right), \\ \tilde{\delta}_{2N} &= A \left(1 - (1 - t^2)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Равенства (23) есть система уравнений относительно A, t . Ее решение имеет вид

$$t = 1 / (\xi - 1), \quad A = \tilde{\delta}_N (t - 1) / t. \quad (24)$$

Здесь для удобства введено обозначение $\xi = \tilde{\delta}_N / \tilde{\delta}_{2N}$.

Пользуясь найденными A и t , вычислим оценку погрешности, соответствующую сетке с $4N$ шагами

$$\delta_{4N} = A \left[1 - (1 - t^4)^{-1} \right] = At^4 / (t^4 - 1). \quad (25)$$

Формулу (25) можно использовать для контроля точности расчета на всех сетках, включая последнюю.

Полюс второго порядка. Аналогично рассмотрим случай полюса второго порядка. Пусть нам известны оценки погрешности на трех соседних сетках (содержащих $N, 2N, 4N$ шагов), и нужно оценить погрешность на следующей сетке ($8N$ шагов). Оценка (20) в этом случае примет вид

$$\delta_N = f'(a) \left[1 - (1 - a^N)^{-1} \right] - f(a) N a^{N-1} / (1 - a^N)^2. \quad (26)$$

С другой стороны, для δ_N справедлива апостериорная оценка (21).

Введем обозначения $A = f'(a)$, $B = f(a) / a$, $t = 1 / (1 - a^N)$. Эти величины являются неизвестными. Запишем оценки (21), (26) для сеток $N, 2N, 4N$

$$\begin{aligned} -\delta_N / (t - 1) &= A + B N t, \\ -\delta_{2N} \left(t^2 - (t - 1)^2 \right) / (t - 1)^2 &= A + 2 B N t^2 / \left(t^2 - (t - 1)^2 \right), \\ -\delta_{4N} \left(t^4 - (t - 1)^4 \right) / (t - 1)^4 &= A + 4 B N t^4 / \left(t^4 - (t - 1)^4 \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Равенства (27) есть система уравнений для определения A, B, t . Исключим из нее A и B и после несложных, но громоздких выкладок получим уравнение относительно t

$$E(t)(t-1)(\xi t^2 + (\xi - \eta)t + \xi) + \delta_{2N}(t-1)(t+1) + \delta_{4N} = 0, \quad (28)$$

где $\xi = 4\delta_{4N} + 2\delta_N - 6\delta_{2N}$ и $\eta = 8\delta_{4N} + 6\delta_N - 16\delta_{2N}$.

Уравнение (28) допускает точное решение в радикалах. Однако корни очень громоздки, поэтому мы их не приводим. Для их вычисления мы разработали программу на языке Matlab/Octave [1].

Альтернативным способом решения уравнения (28) является метод Ньютона. В нем важным аспектом является выбор начального приближения. Из явного вида уравнения (28) следует, что все 4 корня “слипаются” в один кратный корень $t = 1$, при $N \rightarrow \infty$ в силу сходимости метода средних. Поэтому в качестве начального приближения целесообразно брать $t = 1$. Однако численное отыскание нужного корня уравнения $E(t) = 0$ сталкивается с рядом трудностей, решение которых выходит за рамки данной работы.

Наконец, по найденным значениям A , B , t , вычислим оценку точности по формуле (26), заменяя $N \rightarrow 8N$. Эту оценку точности можно использовать для всех сеток, включая последнюю.

Полюсы высокой кратности. Аналогично, но существенно более громоздко рассматриваются случаи, когда ближайшие полюсы имеют кратность 3 и выше. Например, для полюса 3-го порядка оценка погрешности содержит члены $\sim a^{-N}$, Na^{-N} , N^2a^{-N} . Система уравнений, аналогичная (23), (27), включает 4 уравнения. После исключения части неизвестных она приводит к алгебраическому уравнению 6-й степени. Для его решения целесообразно использовать метод Ньютона. Соответствующие формулы весьма громоздки, поэтому мы их не приводим.

3. ФОРМУЛА СРЕДНИХ

Построенные выше оценки непосредственно переносятся на формулу средних. В самом деле, подынтегральная функция является периодической на единичной окружности. Поэтому поворот комплексной плоскости на произвольный угол не изменяет значение интеграла. В этом случае формула трапеций переходит в формулу средних при повороте на угол π / N . Это эквивалентно “переносу” полюсов подынтегральной функции $a_q \rightarrow a_q e^{-i\pi/N}$.

4. ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ ТОЧНОСТИ

Пусть ближайшие к контуру интегрирования особые точки подынтегральной функции являются полюсами. Применим построенные выше оценки для экстраполяции точности. Напомним, что это эквивалентно введению новой квадратуры повышенной точности

$$\tilde{I}_N = I_N + \delta_N. \quad (29)$$

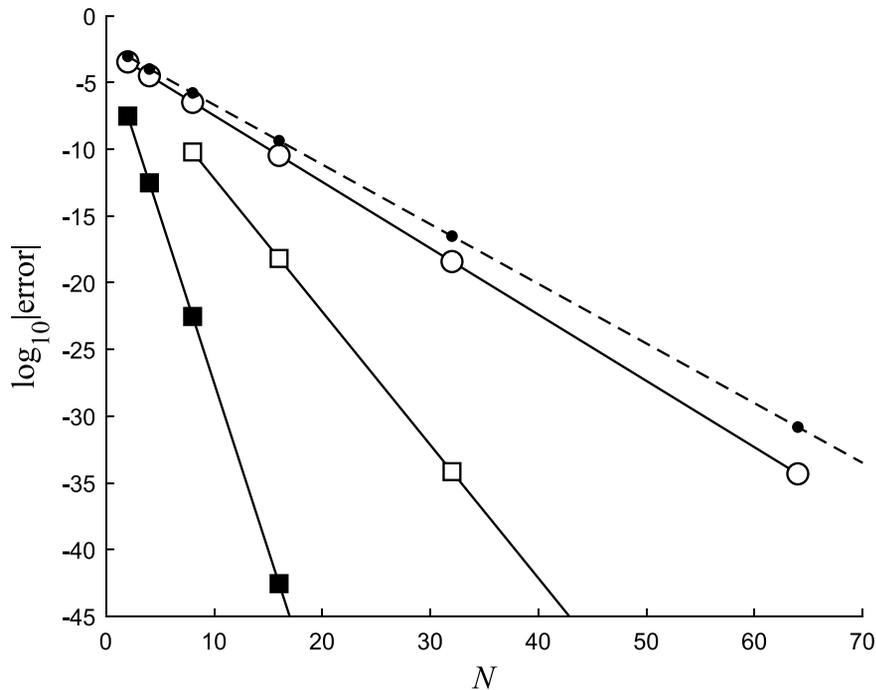
Априорная экстраполяция. Пусть положение полюсов известно точно. Тогда для экстраполяции можно воспользоваться оценкой (20). Такой способ повышения точности напоминает введение поправок Эйлера–Маклорена, но не для степенных по N членов, а для экспоненциальных. При этом вклад в погрешность всех полюсов исключается одновременно. Сходимость определяется расстоянием от контура интегрирования до ближайшей особой точки другого типа (точки ветвления либо существенно особой точки). В частности, если подынтегральная функция не имеет других конечных особых точек, то сходимость становится сверхэкспоненциальной.

Апостериорная экстраполяция. Пусть положения полюсов неизвестны. Построим оценку точности согласно алгоритму, описанному в п. 2.4. Эта оценка учитывает вклад полюса, ближайшего к контуру интегрирования. Затем проведем экстраполяцию и вычислим уточненную квадратуру (29).

Продолжая сгущение сеток и вычисление уточненной квадратуры, найдем вклад следующего полюса в погрешность и построим оценку точности согласно п. 2.4. Затем исключим эту оценку из уточненной квадратуры по формуле (29). Эту процедуру можно продолжать, пока не будет достигнута ближайшая особая точка другого типа.

Отметим один нюанс. Алгоритм, описанный в п. 2.4, есть некоторый сеточный метод расчета a^N . Входными данными этого алгоритма являются апостериорные оценки $\tilde{\delta}_N$, которые вычисляются с ошибкой. Поэтому найденные a^N являются не точными, а приближенными. Поэтому экстраполированная квадратура оказывается менее точной, чем при использовании оценки (20) с точно известными положениями полюсов.

5. ПРИМЕРЫ



Фиг. 1. Погрешность расчета тестового интеграла (30) при $a = \pi^{-1}$, $b = 10^{-3}\pi^{-1}$ и $q = 1$. Обозначения — см. текст.

Рассмотрим вычисление тестового интеграла

$$I = (2\pi i)^{-1} \int_{|z|=1} th\left((z-b)^{-1}\right)(z-a)^{-q} dz, \tag{30}$$

при различных значениях параметров a , b и q .

Простой полюс. Пусть подынтегральная функция в (30) имеет один простой полюс ($q = 1$) в точке $a = \pi^{-1} \approx 0.3183\dots$ и существенно особую точку (СОТ) $b = 10^3\pi^{-1} \approx 318.3098\dots$. Таким образом, ближайшей к контуру интегрирования ($|z|=1$) особой точкой является указанный полюс. Интеграл (30) в данном случае имеет точный ответ. Он равен $I = th\left((a-b)^{-1}\right) \approx -0.003144727024527\dots$. На фиг. 1 показана погрешность вычисления этого интеграла в зависимости от числа N шагов сетки. Масштаб графика полулогарифмический; экспоненциальной сходимости соответствует прямая линия.

Светлыми кружками обозначена фактическая погрешность квадратуры (10), равная разности численного и точного ответов. Видно, что это прямая линия, и значит погрешность убывает экспоненциально быстро.

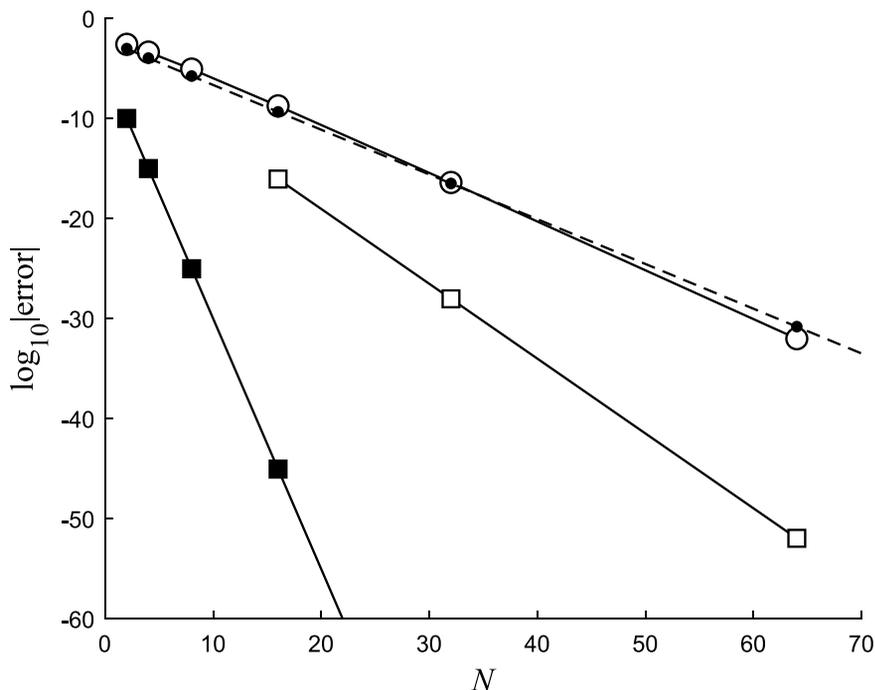
Темными кружками показана оценка (11) для $R = 2.8$ и, соответственно, $M \approx 0.00316946\dots$. Эта линия является прямой. Видно, что с ростом N оценка убывает медленнее фактической погрешности. При этом оценка (11) мажорирует фактическую погрешность.

Светлыми квадратами показана погрешность квадратуры (10) после апостериорной экстраполяции (29). Видно, что по точности она кардинально превосходит исходную квадратуру трапеций. В пределах графика выигрыш составляет от $\sim 10^3$ до $\sim 10^{18}$ раз. При дальнейшем увеличении N преимущество еще увеличивается. Погрешность порядка ошибок округления двойной точности $\sim 10^{-16}$ достигается уже при $N \sim 18$.

Темными квадратами показана погрешность квадратуры (10) после априорной экстраполяции (29) с помощью оценки (20). Она тоже представляется прямой линией. Такая квадратура сходится кардинально быстрее остальных. Точность $\sim 10^{-16}$ достигается уже при $N \sim 7$.

Отметим, что априорная экстраполяция погрешности дает тем больший выигрыш по точности, чем дальше расположена ближайшая особая точка, отличная от полюса. В данном и последующих примерах такая особая точка расположена достаточно далеко ($b \gg 1$). Это позволяет наглядно показать преимущества априорной экстраполяции и сравнить ее с апостериорной.

Полюс второго порядка. Рассмотрим тестовый интеграл (30) с полюсом порядка $q=2$ в точке $a = \pi^{-1}$ и СОТ в точке $b = 10^3 \pi^{-1}$. Его точное значение равно $I = -\cosh^{-2}((a-b)^{-1})(a-b)^{-2} \approx -0.000009889275459\dots$. Соответствующие погрешности показаны на фиг. 2. Обозначения соответствуют фиг. 1. Масштаб графика также полулогарифмический.



Фиг. 2. Погрешности расчета тестового интеграла (30) при $a = \pi^{-1}$, $b = 10^{-3} \pi^{-1}$ и $q = 2$. Обозначения — см. текст.

Из фиг. 2 видно, что поведение всех зависимостей на графике, кроме оценки (11), аналогично предыдущему случаю (фиг. 1). Кривая, соответствующая оценке (11), пересекает кривую погрешности относительно точного значения интеграла. Это означает, что оценка (11) в данном случае не является мажорантной.

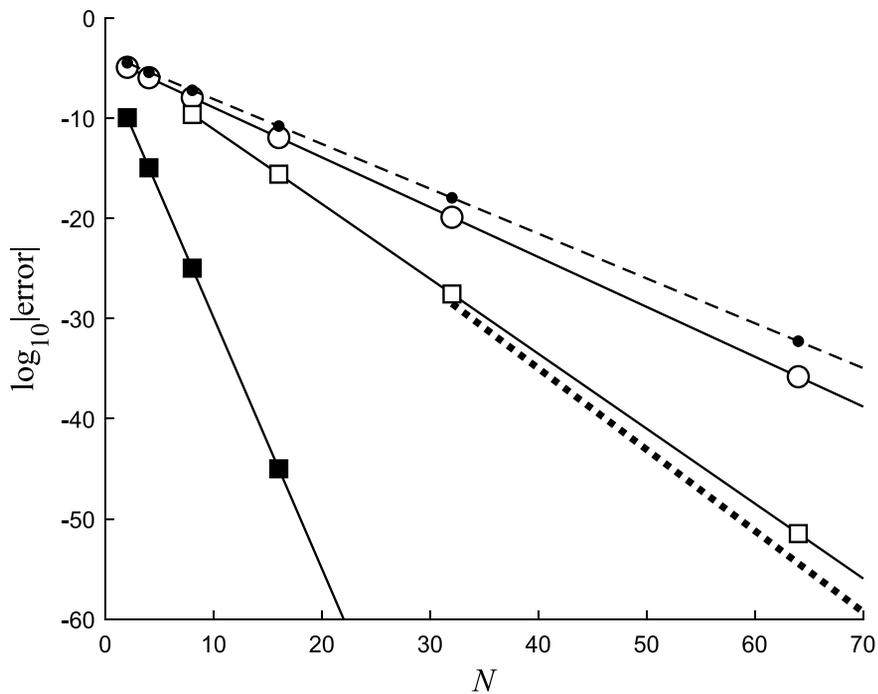
Видно, что процедура апостериорной экстраполяции дает значительный выигрыш в точности: от $\sim 10^7$ до $\sim 10^{20}$ раз. Таким образом, экстраполяционная квадратура (29) кардинально превосходит обычную квадратуру трапеций (10) по точности. Видно также, что априорная экстраполяция дает кардинальное ускорение сходимости. Выигрыш по точности составляет десятки порядков.

Два простых полюса. Для иллюстрации работы алгоритма рекуррентной экстраполяции рассмотрим следующий пример

$$I = (2\pi i)^{-1} \int_{|z|=1} th((z-b)^{-1})(z-a_1)^{-1}(z-a_2)^{-1} dz. \tag{31}$$

Положим $a_1 = \pi^{-1} \approx 0.3183\dots$, $a_2 = 10\pi \approx 31.4159\dots$ и $b = 10^3 \pi^{-1} \approx 318.3098\dots$. Точный ответ в этом случае будет равен $I = th((a_1-b)^{-1})(a_1-a_2)^{-1} \approx 0.000101124374255\dots$

Погрешности, полученные в этом примере, представлены на фиг. 3. Масштаб графика полулогарифмический. Видно, что оценка (11) является мажорантной, что согласуется с теорией. Апостериорная экстраполяция проводилась рекуррентно: первым исключался ближайший полюс, затем второй. Из фиг. 3 видно, что первая экстраполяция погрешности (светлые квадраты) дает существенное уточнение квадратуры по



Фиг. 3. Погрешности расчета тестового интеграла (31) при $a_1 = \pi^{-1}$, $a_2 = 10\pi$, $b = 10^3\pi^{-1}$. Обозначения — см. текст.

сравнению с фактической погрешностью. Вторая экстраполяция (пунктирная линия) также уточняет расчет, но заметно слабее. Как и в предыдущих примерах, хорошо видно, что априорная экстраполяция дает кардинальный выигрыш по точности (десятки порядков) и значительно превосходит апостериорную.

Было проведено большое количество расчетов других тестовых интегралов с различным расположением и порядком полюсов подынтегральной функции. Эти расчеты показали аналогичный результат.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные примеры наглядно показывают, что предложенная методика экстраполяции погрешности значительно повышает точность расчета. Такие экстраполяции возможны только на основе асимптотически точных оценок погрешности, поэтому последние представляют значительную ценность.

Отметим еще один нюанс. Формально оценки п. 2.3 и п. 2.4 являются асимптотически точными. Однако они не являются равноценными, поскольку дают существенно разную точность экстраполяции. Причина в том, что оценки п. 2.3, использующие известное расположение полюсов, передают не только главный член погрешности (причем точно), но и несколько последующих членов, соответствующих более удаленным полюсам. Эта ситуация иллюстрирует общий принцип, сформулированный А. Н. Тихоновым: чем больше у вычислителя априорной информации о задаче, тем точнее он может ее решить.

Таким образом, для периодических подынтегральных функций экстраполяционная квадратура кардинально превосходит по точности широкоупотребительную квадратуру трапеций. Поэтому она перспективна для экономических расчетов ряда специальных функций и интегральных преобразований.

REFERENCES

1. *Калиткин Н. Н., Альшина Е. А.* Численные методы. Т.1. Численный анализ. М.: Академия, 2013.
2. *Trefethen L. N., Weideman J. A. C.* The exponentially convergent trapezoidal rule // *SIAM Review*. 2014. Т. 56. № 3. С. 385–458.

3. *Kalitkin N. N., Kolganov S. A.* Quadrature formulas with exponential convergence and calculation of the fermi–dirac integrals // *Dokl. Math.* 2017. Т. 95. С. 157–160.
4. *Kalitkin N. N., Kolganov S. A.* Calculation of the fermi–dirac functions with exponentially convergent quadratures // *Math. Models Comput. Simul.* 2018. Т. 10. № 4. С. 472–482.
5. *Ловецкий К. П., Петров В. В.* Интегрирование быстро осциллирующих функций // *Вестн. РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика.* 2011. № 2. С. 92–97.
6. *Lovetskiy K. P., Sevastyanov L. A., Sevastyanov A. L., Mekeko N. M.* Integration of highly oscillatory functions // *Math. Modelling and Geometry.* 2014. Т. 2. № 3. С. 11–27.
7. *Ловецкий К. П., Мигаль И. А.* Сравнение методов вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций // *Интернет-журнал Науковедение.* 2015. Т. 7. № 2.
8. *Lovetskiy K. P., Sevastianov L. A., Nikolaev N. E.* Regularized computation of oscillatory integrals with stationary points // *Proc. Comput. Sci.* 2017. Т. 108. С. 998–1007.
9. *Lovetskiy K. P., Sevastianov L. A., Kulyabov D. S., Nikolaev N. E.* Regularized computation of oscillatory integrals with stationary points // *J. of Comput. Sci.* 2018. Т. 26. С. 22–27.
10. *Nhat L. A., Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S.* A new algorithm used the chebyshev pseudospectral method to solve the nonlinear second-order lienard differential equations // *J. of Physics: Conference Series.* 2019. Т. 1368. № 4. С. 042036.
11. *Sevastianov L. A., Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S.* An Effective Stable Numerical Method for Integrating Highly Oscillating Functions with a Linear Phase. NY: Springer, 2020.
12. *Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S., Hissein A. W.* Multistage pseudo-spectral method (method of collocations) for the approximate solution of an ordinary differential equation of the first order // *Discrete and Continuous Models and Applied Comput. Sci.* 2022. Т. 30. № 2. С. 127–138.
13. *Sevastianov L. A., Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S.* Multistage collocation pseudospectral method for the solution of the first order linear ODE. IEEE, 2022.
14. *Sevastianov L. A., Lovetskiy K. P., Kulyabov D. S.* A new approach to the formation of systems of linear algebraic equations for solving ordinary differential equations by the collocation method // *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics.* 2023. Т. 23. № 1. С. 36–47.
15. *Калиткин Н. Н., Альшин А. Б., Альшина Е. А., Rogov B. B.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
16. *Richardson L. F., Gaunt J. A.* The deferred approach to the limit // *Phil. Trans. A.* 1927. Т. 226. С. 299–349.
17. *Трушин С. М., Хохлачев В. С., Белов А. А., Калиткин Н. Н.* Обобщение метода Ричардсона для итерационных процессов высоких порядков // *Труды школы-семинара «Волны-2019». Секция 11. Математическое моделирование в радиофизике и оптике.* 2019. С. 57–59.
18. *Хохлачев В. С., Белов А. А., Калиткин Н. Н.* Улучшение оценок погрешности экспоненциально сходящихся квадратур // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2021. Т. 85. № 2. С. 282–288.
19. Expqu package. <https://github.com/ABelov91/ExpQu>.

УДК 519.642

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО ПОРЯДКУ СПЛАЙН-МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОСОБЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2024 г. Н. С. Габбасов

423810 Набережные Челны, пр-т Мира, 68/19, Набережночелнинский ин-т Казанского ун-та, Россия

e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru

Поступила в редакцию 05.07.2023 г.

Переработанный вариант 05.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Исследовано линейное интегродифференциальное уравнение с особым дифференциальным оператором в главной части. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложены и обоснованы специальные обобщенные варианты сплайн-методов. Установлена оптимальность по порядку точности построенных методов. Библ. 16.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, приближенное решение, прямой метод, теоретическое обоснование.

DOI: 10.31857/S0044466924010025 EDN: ZKEWPR

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена приближенному решению линейного интегродифференциального уравнения (ИДУ)

$$(Ax)(t) \equiv x^{(p)}(t) \prod_{j=1}^q (t - t_j)^{m_j} + \int_{-1}^1 K(t, s)x(s) ds = y(t), \quad (1.1)$$

в котором $t \in I \equiv [-1, 1]$, числа $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1, q}$ и $p \in \mathbb{Z}^+$ являются фиксированными; K и y — известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами “гладкости” точечного характера, а x — искомая функция. Очевидно, что задача об отыскании решения ИДУ (1.1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной. Следовательно, важен вопрос о построении основных пространств, обеспечивающих корректность данной задачи. При обсуждении этого вопроса вполне естественно учитывать то, что в случае $p = 0$ ИДУ (1.1) преобразуется в линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР) (т.е. в этом смысле эти уравнения являются “родственными”). Хорошо известно, что УТР находят все более широкие применения как в теории, так и в приложениях. В частности, УТР встречаются в ряде задач теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (см., например, [1; 2, с. 121–129]) и приведенную в них библиографию), в теории уравнений с частными производными смешанного типа [3], а также в теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщенных функций типа D или V . Под D (соответственно V) понимается пространство обобщенных функций, построенных с помощью функционала “дельта-функция Дирака” (соответственно функционала “конечная часть интеграла по Адамару”). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по УТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114]. На основе упомянутой выше связи между ИДУ (1.1) и УТР соответствующие идеи и результаты для УТР можно успешно использовать при корректной постановке задачи (1.1), разработке и теоретическом обосновании приближенных методов решения ИДУ (1.1) в пространствах обобщенных функций.

ИДУ (1.1) при $q = 1$, $t_1 = 0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], в которой с использованием известных результатов по УТР построена теория Нетера для такого уравнения в классах гладких и обобщенных функций типа D . В статье [8] построена полная теория разрешимости общего ИДУ (1.1) в некотором пространстве типа D обобщенных функций (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания

точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A). Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях. Поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближенного решения в пространствах обобщенных функций с соответствующим теоретическим обоснованием. Определенные результаты в этой области получены в работах [8, 9], в которых предложены и обоснованы прямые проекционные методы приближенного решения ИДУ вида (1.1), основанные на применении стандартных и некоторых специальных полиномов.

В настоящей статье предложены обобщенные варианты сплайн-методов, специально приспособленные к численному решению ИДУ (1.1) в некотором пространстве X обобщенных функций типа D . Проведено их теоретическое обоснование в смысле [10, гл. 1, § 1–5]) и установлено, что разработанные методы оптимальны по порядку точности на некотором классе F , порожденном классом H'_ω , среди всех прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений в пространстве X .

2. О ПРОСТРАНСТВАХ ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C \equiv C(I)$ — банахово пространство всех непрерывных на I функций с обычной \max -нормой и $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $C\{m; 0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$ множество всех функций $f \in C$, имеющих в точке $t = 0$ тейлоровскую производную $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (см., например, [11]). Его назовем классом “точечно-гладких” функций (естественно считаем, что $C\{0; 0\} \equiv C$). Построим теперь основное в наших исследованиях пространство:

$$Y \equiv C\{m, p; 0\} \equiv \left\{ y \in C\{m; 0\} : y^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{0, p-1}) \right\},$$

где число $p \in \mathbb{Z}^+$ удовлетворяет неравенству $p < m$. Снабдим его нормой

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_C + \sum_{i=p}^{m-1} |y^{\{i\}}(0)|, \quad (2.1)$$

где $T: Y \rightarrow C$ — “характеристический” оператор класса Y , определяемый следующим образом:

$$(Ty)(t) \equiv \left[y(t) - \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) t^i / i! \right] t^{-m} \equiv H(t) \in C, \quad H(0) \equiv \lim_{t \rightarrow 0} H(t).$$

Лемма 2.1 (см. [8]). *i) Включение $y \in Y$ равносильно выражению*

$$y(t) = t^m H(t) + \sum_{i=p}^{m-1} \alpha_i t^i, \quad (2.2)$$

причем $Ty = H \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t = 0$, а $y^{\{i\}}(0) = \alpha_i i!$ ($i = \overline{p, m-1}$).

ii) Пространство Y по норме (2.1) полно и нормально вложено в пространство C .

Обозначим через $C^{(p)} \equiv C^{(p)}(I)$ векторное пространство p раз непрерывно дифференцируемых на I функций, в котором введем специальную норму

$$\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C + \sum_{i=0}^{p-1} |z^{(i)}(-1)| \quad (z \in C^{(p)}), \quad (2.3)$$

где $Dz \equiv z^{(p)}(t) \in C$.

Лемма 2.2 (см. [8]). *Пространство $C^{(p)}$ с нормой (2.3) полно и нормально вложено в пространство C .*

Следствие 1. Обычная норма $\|\cdot\|_{C^{(p)}}$ в $C^{(p)}$ и норма (2.3) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d \geq 1$ такая, что $\|z\|_{(p)} \leq \|z\|_{C^{(p)}} \leq d \|z\|_{(p)}$ для любой функции $z \in C^{(p)}$, где $\|z\|_{C^{(p)}} \equiv \sum_{i=0}^p \|z^{(i)}\|_C$.

Пусть $C_{-1}^{(p)} \equiv C_{-1}^{(p)}(I) \equiv \left\{ z \in C^{(p)} : z^{(i)}(-1) = 0 \quad (i = \overline{0, p-1}) \right\}$ — банахово пространство гладких функций с нормой $\|z\|_{(p)} \equiv \|Dz\|_C$.

Теперь над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \tag{2.4}$$

где $t \in I, z \in C_{-1}^{(p)}, \gamma_i \in R$ — произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ — соответственно дельта-функция Дирака и ее “тейлоровские” производные, действующие на пространстве Y основных функций согласно следующему правилу:

$$\left(\delta^{\{i\}}, y\right) \equiv \int_{-1}^1 \delta^{\{i\}}(t) y(t) dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0) \quad (y \in Y, i = \overline{0, m-p-1}). \tag{2.5}$$

Очевидно, что векторное пространство X является банаховым относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(p)} + \sum_{i=0}^{m-p-1} |\gamma_i|. \tag{2.6}$$

3. ОБОБЩЕННЫЙ ПОЛИГОНАЛЬНЫЙ МЕТОД (ОПМ)

Пусть задано ИДУ (1.1). Для сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать $q = 1, t_1 = 0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t) \quad (t \in I), \tag{3.1}$$

$$V \equiv UD, Df \equiv f^{(p)}(t), Ug \equiv t^m g(t), Kx \equiv \int_{-1}^1 K(t, s)x(s)ds,$$

где $p \in N \cup \{0\}, m \in N, p < m; y \in Y \equiv C\{m, p; 0\}$, ядро K обладает следующими свойствами:

$$K(\cdot, s) \in C, K(t, \cdot) \in Y, \psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0) \in Y \quad (i = \overline{0, m-p-1}), \tag{3.2}$$

а $x \in X$ — искомый элемент. Фредгольмовость и достаточные условия непрерывной обратимости оператора $A : X \rightarrow Y$ установлены в работе [8]; там же указан метод отыскания точного решения ИДУ (1.1) в классе X .

Приближенное решение ИДУ (3.1) построим в виде агрегата

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv g_n(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} c_{i+n+1} \delta^{\{i\}}(t), \tag{3.3}$$

$$g_n(t) \equiv (Jz_n)(t), \quad z_n(t) \equiv \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(t), \quad n = 2, 3, \dots, \tag{3.4}$$

где

$$Jz \equiv (J_{p-1}z)(t) \equiv ((p-1)!)^{-1} \int_{-1}^t (t-s)^{p-1} z(s) ds;$$

при этом $J : C \rightarrow C^{(p)}, (Jz)^{(i)} = J_{p-i-1}z$ ($i = \overline{0, p-1}$), $DJz = z$. Здесь $\{\varphi_i\}_0^n$ — система обычных фундаментальных сплайнов первого порядка (см., например, [12]) по узлам $s_i \equiv -1 + 2i/n, i = \overline{0, n}$. Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)}, j = \overline{0, n+m-p}$, найдем согласно ОПМ из квадратной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $(n+m-p+1)$ -го порядка:

$$\int_{-1}^1 w_k(t)(T\rho_n)(t)dt = 0, \quad k = \overline{0, n}, \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}, \quad (3.5)$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ — невязка приближенного решения, а w_k — любая из следующих “весовых” функций:

(α) $w_k(t) = \delta(t - s_k)$ — дельта-функция Дирака;

$$(\beta) \quad w_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in [s_{k-1}, s_k], \\ 0, & t \notin [s_{k-1}, s_k], \end{cases} \quad k = \overline{0, n};$$

причем в последнем случае “веса” полагаем $s_{-1} \equiv s_0$, а также $c_0 \equiv c_n$ или $c_0 \equiv c_1$ (периодический или непериодический случай соответственно).

Следуя работе [13], примем соглашения, полезные при оформлении результатов по обоснованию приближенных методов. Во-первых, стандартное утверждение “при всех $n \in N$ ($n \geq n_0$) СЛАУ (3.5) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$ и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ уравнения (3.1) по норме пространства X ” заменим простой фразой “метод (3.3)–(3.5) обоснованно применим к уравнению (3.1)”. Во-вторых, для погрешности приближенного решения введем специальное обозначение $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|_X$; оценка этой величины определяет скорость сходимости приближенных решений x_n^* к точному решению x^* уравнения (3.1).

Обоснование вычислительного алгоритма (3.1)–(3.5) дается в следующей теореме.

Теорема 1. Если однородное ИДУ $Ax = 0$ имеет в X лишь нулевое решение (например, в условиях теоремы 2 из [8]), то прямой метод (3.3)–(3.5) обоснованно применим к уравнению (3.1), причем

$$\Delta x_n^* = O \left\{ \omega_t(h; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \omega(f_i; \Delta_n) + \omega(Ty; \Delta_n) \right\}, \quad (3.6)$$

где $\Delta_n \equiv 1/n$, $\omega(f; \Delta)$ — модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ ($0 < \Delta \leq 2$), $\omega_t(h; \Delta)$ — частный модуль непрерывности функции $h(t, s)$ по переменной t ; $h \equiv T_t K$, $f_i \equiv T_t \psi_i$, $i = \overline{0, m-p-1}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай (α) “веса” w_k . В условиях данной теоремы ИДУ (3.1) представляется в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y, \quad x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}, \quad y \in Y \equiv C\{m, p; 0\}, \quad (3.7)$$

в котором оператор $A : X \rightarrow Y$ непрерывно обратим.

Систему (3.3)–(3.5) требуется записать также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства основных пространств:

$$X \supset X_n \equiv J(S_n^1) \oplus \text{span} \left\{ \delta^{\{i\}}(t) \right\}_0^{m-p-1}, \quad Y \supset Y_n \equiv U(S_n^1) \oplus \text{span} \left\{ t^i \right\}_p^{m-1},$$

где $S_n^1 \equiv \text{span} \{ \varphi_i \}_0^n$ — пространство всех сплайнов первого порядка по системе узлов $\{s_i\}_0^n$. Далее зададим линейное проектирующее отображение $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m-p+1} : Y \rightarrow Y_n$ согласно правилу

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m-p+1}(y; t) \equiv (UP_n T y)(t) + \sum_{i=p}^{m-1} y^{\{i\}}(0) \frac{t^i}{i!}, \quad (3.8)$$

в котором линейный оператор $P_n : C \rightarrow S_n^1$ каждой функции $f \in C$ ставит в соответствие ее интерполяционный полигон (сплайн первого порядка) $(P_n f)(t) \equiv \sum_{i=0}^n f(s_i) \varphi_i(t)$.

Покажем теперь, что вычислительная схема (3.3)–(3.5) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Gamma_n A x_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \Gamma_n y \in Y_n. \quad (3.9)$$

Пусть $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ есть решение уравнения (3.9), т.е. $\Gamma_n \rho_n^* = 0$, $\rho_n^* \equiv A x_n^* - y$. В силу (3.8) и (2.2) последнее равносильно системе

$$(P_n T \rho_n^*)(t) \equiv 0, \quad (\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1},$$

или же

$$(T \rho_n^*)(s_k) = 0, \quad k = \overline{0, n}; \quad (\rho_n^*)^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{p, m-1}.$$

Итак, СЛАУ (3.5) при “весе” (α) имеет единственное решение $\{c_j^*\}_0^{n+m-p}$, т.е. решение уравнения (3.9) является решением системы (3.3)–(3.5).

Для получения обратного утверждения достаточно провести только что изложенные рассуждения в обратном порядке.

Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнений (3.9). В этих целях нам понадобится аппроксимативное свойство оператора Γ_n .

Лемма 3.1. Для любой функции $y \in Y$ справедлива оценка

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \leq \omega(Ty; \Delta_n). \quad (3.10)$$

Доказательство данного утверждения легко следует из соотношений (2.2), (3.8), (2.1) и оценки (см., например, [12])

$$\|f - P_n f\|_C \leq \omega(f; \Delta_n), \quad f \in C. \quad (3.11)$$

Уточним структуру аппроксимирующего уравнения (3.9). Поскольку $\Gamma_n^2 = \Gamma_n$, имеем $\Gamma_n V x_n = V x_n \in Y_n$ при любом элементе $x_n \in X_n$. Следовательно, вычислительный алгоритм (3.3)–(3.5) равносильен функциональному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv V x_n + \Gamma_n K x_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \Gamma_n y \in Y_n. \quad (3.12)$$

Покажем теперь “близость” операторов A и A_n на подпространстве X_n в условиях (3.2). Используя уравнения (3.7) и (3.12), представления (2.2) и (3.8), норму (2.1), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|A x_n - A_n x_n\|_Y = \|K x_n - \Gamma_n K x_n\|_Y = \|TK x_n - P_n TK x_n\|_C. \quad (3.13)$$

На основании (3.1), (2.4), (2.5) и (3.2) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i \gamma_i \psi_i(t).$$

Следовательно,

$$(Kx_n)(t) = (Kg_n)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n+1} \psi_i(t),$$

и тогда справедливо равенство

$$(TKx_n)(t) = \int_{-1}^1 h(t,s) g_n(s) ds + \sum_{i=0}^{m-p-1} (-1)^i c_{i+n+1} f_i(t). \quad (3.14)$$

В силу (3.14), (3.11), леммы 2.2 и определения (2.6) последовательно выводим промежуточную оценку:

$$\|TKx_n - P_n TKx_n\|_C \equiv \max_{t \in I} \left| \int_{-1}^1 (h - P_n^t h)(t,s) g_n(s) ds + \sum_i (-1)^i c_{i+n+1} (f_i - P_n f_i)(t) \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq 2\|g_n\|_C \omega_t(h; \Delta_n) + \sum_i |c_{i+n+1}| \omega(f_i; \Delta_n) \leq 2\|g_n\|_{(p)} \omega_t(h; \Delta_n) + \\ &+ \|x_n\|_X \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \leq 2 \left[\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \right] \|x_n\|_X. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Из (3.13) и (3.15) следует искомая оценка “близости” операторов A и A_n :

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \rightarrow Y} \leq 2 \left[\omega_t(h; \Delta_n) + \sum_i \omega(f_i; \Delta_n) \right]. \tag{3.16}$$

На основании оценок (3.16) и (3.10) из теоремы 7 [10, гл. 1, § 4] вытекает утверждение теоремы 1 с оценкой погрешности (3.6).

В случае (β) “весовой” функции w_k вычислительная схема (3.3)–(3.5) равносильна операторному уравнению вида (3.9), в котором отображение Γ_n задано по правилу (3.8), где роль оператора P_n играет линейный оператор $Q_n : C \rightarrow S_n^1$, ставящий в соответствие каждой функции $f \in C$ ее “усредненный” интерполяционный сплайн [14]

$$(Q_n f)(t) \equiv \sum_{i=0}^n F_i(f) \varphi_i(t), \quad F_i(f) \equiv \frac{n}{2} \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(t) dt, \quad i = \overline{0, n},$$

причем $F_0(f) \equiv F_n(f)$ в периодическом случае, а в общем случае $F_0(f) \equiv F_1(f)$. Из соответствующих результатов работы [14] следует, что в рассматриваемом случае операторов Γ_n и Q_n также имеют место оценки вида (3.10), (3.11). Однако, как легко проверить, оператор Γ_n не является проекционным, т.е. $\Gamma_n^2 \neq \Gamma_n$. Поэтому наряду с уравнением (3.9) введем в рассмотрение операторное уравнение

$$B_n x_n \equiv Vx_n + \Gamma_n Kx_n = \Gamma_n y \quad x_n \in X_n, \Gamma_n y \in Y_n. \tag{3.17}$$

Аналогично случаю с “весом” (α) (заменой оператора A_n на B_n) получим оценки

$$\|B_n^{-1}\| = O(1), \quad B_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq n_1, \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}_n - x^*\|_X &\equiv O \left\{ \omega_t(h; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \omega(f_i; \Delta_n) + \omega(Ty; \Delta_n) \right\}, \\ x^* &= A^{-1}y, \quad \tilde{x}_n = B_n^{-1}\Gamma_n y. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Далее, используя известный способ функционального анализа (см., например, [5, гл. 4, § 3, с. 125]) с привлечением соотношений (3.17), (3.18), аппроксимативных свойств оператора Γ_n и “малой” теоремы Банаха, найдем, что

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq n_2. \tag{3.20}$$

Для оценки погрешности $\Delta x_n^* \equiv \|x_n^* - x^*\|$, $x_n^* = A_n^{-1}\Gamma_n y$, как и в [10, гл. 1, § 3, с. 18], имеем представление

$$x^* - x_n^* = (E - A_n^{-1}\Gamma_n A)(x^* - \tilde{x}_n), \quad x^* = A^{-1}y, \quad \tilde{x}_n = B_n^{-1}\Gamma_n y,$$

и, следовательно, с учетом (3.19) и (3.20) выводим требуемую оценку (3.6): $\Delta x_n^* = O(\|\tilde{x}_n - x^*\|)$. Теорема 1 полностью доказана.

Следствие 2. Если функции h (по t), f_i и Ty принадлежат классу $C^{(r)}$ (в случае (α) $r = \overline{0, 1}$, а для (β) $r = 0$), то в условиях теоремы 1 верна оценка

$$\Delta x_n^* = O \left\{ \Delta_n^r \left[\omega_t(h^{(r)}; \Delta_n) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \omega(f_i^{(r)}; \Delta_n) + \omega((Ty)^{(r)}; \Delta_n) \right] \right\}. \tag{3.21}$$

Для доказательства данного утверждения вместо использованной в теореме 1 оценки вида (3.11) следует использовать оценку [12]

$$\|f - R_n f\|_C \equiv O\left\{\Delta_n^r \omega\left(f^{(r)}; \Delta_n\right)\right\}, \quad f \in C^{(r)}, \quad (3.22)$$

где $R_n = P_n$ или $R_n = Q_n$ в зависимости от применяемого метода.

4. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОДОБЛАСТЕЙ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ (ОМППС)

Приближенное решение задачи (3.1), (3.2) будем искать в виде (3.3), (3.4), где параболический сплайн

$$z_n(t) \equiv \sum_{i=-1}^n c_i B_{2,i}(t)$$

удовлетворяет одному из краевых условий:

- (γ_1) $z_n(-1) = z_n(1), \quad z'_n(-1) = z'_n(1)$ (периодические условия);
- (γ_2) $z_n^{(2)}(s_j - 0) = z_n^{(2)}(s_j + 0), \quad j = 1, n - 1.$

Здесь базисные элементы $B_{2,i}(t)$ суть B -сплайны второго порядка на равномерной сетке с носителем (s_{i-1}, s_{i+2}) (см., например, [15, гл. 1, § 2]). Для определения всех функций $B_{2,i}(t)$ заданную сетку дополним равномерно расположенными узлами: $s_{-2} < s_{-1} < s_0 \equiv -1, \quad 1 \equiv s_n < s_{n+1} < s_{n+2}$. Набор $\{c_j\}_{-1}^{n+m-p}$ неизвестных параметров найдем согласно ОМППС из СЛАУ вида (3.5) в случае (β) “весовой” функции $w_k, \quad k = \overline{0, n}$.

Теорема 2. Если ИДУ $Ax = 0$ имеет в X лишь тривиальное решение и функции h ($no t$), $f_i, \quad i = \overline{0, m - p - 1}$, Ty принадлежат пространству $C^{(r)}$, $r = \overline{1, 2}$, то ОМППС обоснованно применим к уравнению (3.1) и для соответствующей погрешности Δx_n^* справедливо неравенство вида (3.21), в котором $r = \overline{1, 2}$.

Доказательство теоремы 2 по сути аналогично доказательству теоремы 1. При этом вычислительная схема ОМППС равносильна операторному уравнению вида (3.9), где $X_n \equiv J(S_n^2) \oplus \text{span}\{\delta^{(i)}(t)\}_0^{m-p-1}, Y_n \equiv U(S_n^2) \oplus \text{span}\{t^i\}_p^{m-1}, S_n^2$ – совокупность всех параболических сплайнов на равномерной сетке, обладающих одним из свойств (γ_1), (γ_2); отображение $\Gamma_n : Y \rightarrow Y_n$ определено согласно закону (3.8), в котором $P_n : C \rightarrow S_n^2$ обозначает сплайновый оператор, введенный и изученный в работе [14]. Там же, в частности, указано, что образ оператора P_n равен производной определенного интерполяционного кубического сплайна. Из соответствующих аппроксимативных свойств последнего (см., например, [15, гл. 2, § 4, с. 89, 93]) непосредственно следует оценка

$$\|f - P_n f\|_C \equiv O\left\{\Delta_n^r \omega\left(f^{(r)}; \Delta_n\right)\right\}, \quad f \in C^{(r)}, \quad r = \overline{1, 2},$$

откуда с учетом (2.2), (3.8) и (2.1) легко выводится соотношение

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \equiv O\left\{\Delta_n^r \omega\left((Ty)^{(r)}; \Delta_n\right)\right\}, \quad Ty \in C^{(r)}, \quad r = \overline{1, 2}.$$

Тогда с помощью этих двух оценок дальнейшее доказательство повторяет по существу доказательство теоремы 1 в случае (α) “веса” w_k

5. ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

В дальнейшем при оптимизации прямых проекционных методов решения ИДУ (3.1) существенную роль будет играть

Теорема 3. Пусть ИДУ (3.1) имеет решение вида

$$x^*(t) = z^*(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i^* \delta^{(i)}(t), \quad Dz^* = DTUx^* \in C^{(r)}$$

при данном $y \in Y$ и соответствующий аппроксимирующий оператор A_n в ОПМ и ОМППС непрерывно обратим. Тогда погрешность приближенного решения $x_n^* \in X_n$ для правой части $\Gamma_n y \in Y_n$ представима в виде

$$\Delta x_n^* = O \left\{ \Delta_n^r \omega \left((DTUx^*)^{(r)}; \Delta_n \right) \right\},$$

причем $r = 0$ для (β) ОПМ, $r = \overline{0,1}$ при (α) ОПМ и $r = \overline{0,2}$ в случае ОМППС.

Доказательство. В силу теоремы 6 из [10, гл. 1, § 3, с. 17] и (3.9) имеем

$$\Delta x_n^* = O \left\{ \|\Gamma_n\| \|x^* - x_n\|_X \right\},$$

где $x_n \in X_n$ — пока произвольный элемент. Выберем его следующим образом:

$$x_n(t) = (JP_n DTUx^*)(t) + \sum_{i=0}^{m-p-1} \gamma_i^* \delta^{\{i\}}(t),$$

где P_n — сплайновый оператор, соответствующий рассматриваемому методу. Тогда требуемая оценка следует из определений норм (2.6), (2.3) и аппроксимативных свойств оператора P_n (см., например, [12; 14; 15, гл. 2, § 4, с. 93]).

6. К ОПТИМИЗАЦИИ ПРЯМЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ИДУ

Предварительно приведем необходимые определения и постановку задачи. Пусть X и Y — банаховы пространства, а X_n и Y_n — их соответствующие произвольные подпространства одинаковой размерности $N = N(n) < +\infty$, $n \in N$, причем $N \rightarrow \infty$ при $(n \rightarrow \infty)$. Обозначим через $\Lambda_n \equiv \{\lambda_n\}$ некоторое множество линейных операторов λ_n , отображающих Y на Y_n . Далее рассмотрим два класса однозначно разрешимых линейных операторных уравнений

$$Ax = y, \quad x \in X, y \in Y, \tag{6.1}$$

и

$$\lambda_n Ax_n = \lambda_n y, \quad x_n \in X_n, \lambda_n \in \Lambda_n, n \in N, \tag{6.2}$$

соответственно. Пусть $x^* \in X$ и $x_n^* \in X_n$ — решения уравнений (6.1) и (6.2) соответственно, а $F \equiv \{f\}$ — класс коэффициентов (т.е. исходных данных) уравнения (6.1), порождающий класс $X^* \equiv \{x^*\}$ искомых элементов.

Следуя работе [10, гл. 2, § 1], величину

$$V_N(F) \equiv \inf_{X_n, Y_n} \inf_{\lambda_n \in \Lambda_n} V(F; \lambda_n; X_n, Y_n), \tag{6.3}$$

где

$$V(F; \lambda_n; X_n, Y_n) \equiv \sup_{f \in F} (f; \lambda_n; X_n, Y_n) = \sup_{x^* \in X^*} \|x^* - x_n^*\|_X,$$

назовем *оптимальной оценкой погрешности* всевозможных прямых проекционных методов λ_n ($\lambda_n \in \Lambda_n$) решения уравнения (6.1) на классе F .

Определение 1 (см. [10, гл. 2, § 1]). Пусть существуют подпространства $X_n^0 \subset X, Y_n^0 \subset Y$ размерности $N = N(n) < +\infty$ и операторы $\lambda_n^0 : Y \rightarrow Y_n^0, \lambda_n^0 \in \Lambda_n$, при которых выполняется условие

$$V_N(F) \succ\prec V(F; \lambda_n^0; X_n^0, Y_n^0), \quad N \rightarrow \infty, \tag{6.4}$$

где символ $\succ\prec$ означает, как обычно, слабую эквивалентность. Тогда метод (6.1), (6.2) при $X_n = X_n^0, Y_n = Y_n^0$ и $\lambda_n = \lambda_n^0$ называется *оптимальным по порядку точности* на классе F среди всех прямых проекционных методов λ_n ($\lambda_n \in \Lambda_n$) решения уравнений (6.1).

Рассмотрим теперь оптимизацию на классе однозначно разрешимых (равномерно относительно $K \in F$) ИДУ вида (3.1) в случае, когда исходные данные принадлежат семейству YH_ω^r , т.е. при K (по t), $\psi_i(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, 0)$, $i = \overline{0, m-p-1}$, $y \in YH_\omega^r \equiv \left\{ g \in Y \equiv C\{m, p; 0\} \mid Tg \in H_\omega^r \right\}$, где $H_\omega^r \equiv \left\{ f \in C^{(r)} \mid \omega(f^{(r)}; \Delta) \leq \omega(\Delta) \right\}$, $\omega(\Delta)$ — некоторый заданный модуль непрерывности; в частности, $H_\omega^r = H_\alpha^r(M)$ при $\omega(\Delta) = M\Delta^\alpha$, $M \equiv \text{const} > 0$, $0 < \alpha \leq 1$, $r+1 \in N$. Тогда в силу теоремы 2 из [8] имеем

$$X^* \equiv \left\{ x^* \in X \mid Ax^* = y; K, \psi_i, y \in YH_\omega^r \right\} = XH_\omega^r,$$

где $XH_\omega^r \equiv \left\{ x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\} \mid DTUx \in H_\omega^r \right\}$, $\omega^* \equiv e^* \omega$, $1 \leq e^* \equiv \text{const}$.

Далее пусть

$$X_n^0 \equiv J(S_n^k) \oplus \text{span} \left\{ \delta^{\{i\}}(t) \right\}_0^{m-p-1}, Y_n^0 \equiv U(S_n^k) \oplus \text{span} \left\{ t^i \right\}_p^{m-1},$$

где $k = 1$ для ОПМ, $k = 2$ в случае ОМППС; а $\Lambda_n^0 \equiv \{\lambda_n\}$ — семейство всех линейных операторов $\lambda_n : Y \rightarrow Y_n^0$.

Теорема 4. Пусть $F = YH_\omega^r$, $\Lambda_n = \Lambda_n^0$. Тогда

$$V_N(F) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}), \quad N = n + m - p + 1, \quad (6.5)$$

и этот оптимальный порядок реализуют ОМП и ОМППС, причем для (β) ОПМ $r = 0$, при (α) ОПМ $r = \overline{0, 1}$, а в случае ОМППС $r = \overline{0, 2}$.

Доказательство. Пусть $\Pi_l \equiv \text{span} \left\{ t^i \right\}_0^l$ — класс всех алгебраических полиномов степени не выше l и

$$X_n \equiv \Pi_{n+m-p-1}^\delta \equiv J(\Pi_{n-1}) \oplus \text{span} \left\{ \delta^{\{i\}}(t) \right\}_0^{m-p-1}$$

есть $(n + m - p)$ -мерное подпространство пространства X . Согласно формуле (2.6) введем величину

$$E_{n+m-p-1}^\delta(x) \equiv \inf_{x_n \in X_n} \|x - x_n\|_X, \quad x \in X, \quad (6.6)$$

называемую наилучшим приближением обобщенной функции $x \in X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ элементами из X_n . На основании доказательства теоремы 1.5.14 [5, гл. 1, § 5] ясно, что (6.6) просто выражается через наилучшее равномерное приближение:

$$E_{n+m-p-1}^\delta(x) \equiv E_{n-1}(DTUx), \quad (6.7)$$

где $E_l(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f \in C$ полиномами из Π_l , $l \geq 0$.

Далее заметим, что из определения N -го колмогоровского поперечника $d_N(L, X)$ множества L в пространстве $X \equiv D_{-1}^{(p)}\{m; 0\}$ (см., например, [16, гл. 1, § 1]) и соотношения (6.7) легко следует равенство

$$d_N(L, X) = d_{N-m+p}(DTU(L), C), \quad N > m - p,$$

откуда с учетом $d_l(H_\omega^r, C) \asymp l^{-r} \omega(l^{-1})$, $l \in N$ (см., например, [16, гл. 3, § 3]) вытекает слабая эквивалентность

$$d_N(XH_\omega^r, X) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}), \quad N > r + m - p, \quad r + 1 \in N. \quad (6.8)$$

Известно [10, гл. 4, § 2], что $V_N(F) \geq d_N(X^*, X)$. Следовательно, из (6.8) следует, что

$$V_N(F) \geq d_N(XH_\omega^r, X) \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}). \quad (6.9)$$

С другой стороны, согласно определению $V_N(F)$ (6.3) и теореме 3, находим верхнюю оценку

$$V_N(F) \leq \sup_{x^* \in XH_\omega^r} \|x^* - x_n^*\|_X = O \left\{ N^{-r} \omega(N^{-1}) \right\}, x_n^* = A_n^{-1} \Gamma_n y.$$

Отсюда и из соотношений (6.9), (6.4) получаем утверждение теоремы 4 с оценкой (6.5). Требуемое доказано.

Следствие 3. Если $F = YH_\alpha^r(M)$, то имеет место $V_N(F) \asymp MN^{-r-\alpha}$. При этом ОПМ и ОМППС оптимальны по порядку точности на классе F среди всех прямых проекционных методов решения ИДУ (3.1) в пространстве X , причем для (β) ОПМ $r + \alpha \leq 1$, при (α) ОПМ $r + \alpha \leq 2$, а в случае ОМППС $r + \alpha \leq 3$.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Замечание 1. При приближении решений операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемых методов. Один из результатов в этом направлении легко получить из теорем 1 и 2, а именно, из них вытекает простое следствие: если исходные данные h, f_i и Ty уравнения (3.1) принадлежат классу H_α^r (при (β) ОПМ $r = 0$, для (α) ОПМ $r = 0, 1$, в случае ОМППС $r = 0, 2$; $0 < \alpha \leq 1$), то в условиях теорем 1 и 2 соответственно справедлива оценка $\|\rho_n^*\|_Y = O(n^{-r-\alpha})$.

Замечание 2. В силу определения нормы в пространстве $X \equiv D_{-1}^{\{p\}}\{m; 0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности (x_n^*) приближенных решений к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в метрике X следует обычная сходимость в пространстве обобщенных функций, т.е. слабая сходимость.

Замечание 3. Определенный выбор “веса” w_k в ОПМ порождает конкретный прямой метод. Именно, в случае (α) (соответственно, (β)) имеем истинность установленных результатов для обобщенного метода коллокации (соответственно, подобластей) решения ИДУ (3.1).

Замечание 4. Так как в условиях теорем 1 и 2 соответствующие аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \rightarrow X_n, \quad n \geq n_3,$$

то ясно [10, гл. 1, § 5], что предложенные в настоящей работе прямые методы для ИДУ (3.1) устойчивы относительно малых возмущений исходных данных. Это позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперед заданной степенью точности. Более того, если ИДУ (3.1) хорошо обусловлено (см., например, [10, гл. 1, § 5, с. 24]), то хорошо обусловленной является также СЛАУ (3.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bart G. R., Warnock R. L.* Linear integral equations of the third-kind // *SIAM J. Math. Anal.* 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. *Кейз К. М., Цвайфель П. Ф.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
3. *Бжухатлов Х. Г.* Об одной краевой задаче со смещением // *Дифференц. ур-ния.* 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.
4. *Расламбеков С. Н.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщенных функций // *Изв. вузов. Математика.* 1983. № 10. С. 51–56.
5. *Габбасов Н. С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань.: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. 176 с.
6. *Замалиев Р. Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Казань: КФУ, 2012. 114 с.
7. *Абдурахман.* Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Ростов-на-Дону, 2003. 142 с.
8. *Габбасов Н. С.* Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // *Дифференц. ур-ния.* 2021. Т. 57. № 7. С. 889–899.
9. *Габбасов Н. С.* Коллокационные методы для одного класса особых интегро-дифференциальных уравнений // *Дифференц. ур-ния.* 2022. Т. 58. № 9. С. 1234–1241.
10. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. 232 с.
11. *Пресдорф З.* Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // *Матем. исследования.* 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
12. *Габдулхаев Б. Г., Душков П. Н.* О полигональном методе решения интегральных уравнений со слабой особенностью // *Приложения функционального анализа к приближенным вычислениям.* Казань, 1974. С. 37–57.

13. *Габбасов Н. С.* К численному решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 10. С. 1721–1733.
14. *Агачев Ю. Р.* О сходимости метода сплайн-подобластей для интегральных уравнений // *Изв. вузов. Математика.* 1981. № 6. С. 3–10.
15. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
16. *Даугавет И. К.* Введение в теорию приближения функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. 184 с.

ПРОЕКТОРНЫЙ ПОДХОД К АЛГОРИТМУ БУТУЗОВА–НЕФЁДОВА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ДИСКРЕТНЫХ ЗАДАЧ С МАЛЫМ ШАГОМ¹⁾

© 2024 г. Г. А. Курина^{1,*}, Н. Т. Хоай^{2,**}

¹394018 Воронеж, Университетская пл., 1, Воронежский гос. ун-т, Россия;

119333 Москва, ул. Вавилова, 44/2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

²Нгуен Трай, Тхань Сюань, Ун-т науки, Вьетнамский национальный ун-т, Ханой, Вьетнам

*e-mail: kurina@math.vsu.ru

**e-mail: nguyenthihoai@hus.edu.vn

Поступила в редакцию 03.05.2023 г.

Переработанный вариант 17.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

В. Ф. Бутузовым и Н. Н. Нефёдовым был предложен алгоритм построения асимптотики, содержащей пограничные функции двух типов, для решения дискретной начальной задачи с малым шагом ε^2 и нелинейным членом порядка ε в критическом случае, т.е. вырожденное уравнение при $\varepsilon = 0$ не разрешимо однозначно относительно неизвестной переменной. В настоящей статье построено асимптотическое решение этой же задачи при помощи нового подхода, использующего ортогональные проекторы на $\ker(B(t) - I)$ и $\ker(B(t) - I)'$, где $B(t)$ — матрица, стоящая перед неизвестной переменной в линейной части рассматриваемого уравнения, I — единичная матрица соответствующего размера, штрих означает транспонирование. Такой подход значительно упрощает понимание алгоритма построения асимптотики и позволяет представить задачи для нахождения членов асимптотики любого порядка в явном виде, что очень удобно для исследователей, применяющих асимптотические методы для решения практических задач. Библ. 14. Фиг. 1.

Ключевые слова: дискретные начальные задачи, малый шаг, критический случай, асимптотическое решение, проекторный подход.

DOI: 10.31857/S0044466924010035, EDN: ZJTENU

1. ВВЕДЕНИЕ

Асимптотическое поведение решения начальных задач для сингулярно возмущенных дифференциальных и дискретных (разностных) уравнений в так называемом критическом случае, когда вырожденная задача при нулевом значении параметра не является однозначно разрешимой, впервые изучалось А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузовым (см. [1]).

Многочисленные приложения сингулярно возмущенных систем в критическом случае приведены в [2]. Численные методы для сингулярно возмущенных начальных задач в критическом случае исследовались в [3]. Обзор публикаций, посвященных задачам управления дискретными системами с малым шагом, приведен в [4].

Начальная задача для слабонелинейного дискретного уравнения с малым шагом вида

$$x(t + \varepsilon^2, \varepsilon) = B(t)x(t, \varepsilon) + \varepsilon f(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (1)$$

$$x = x(t, \varepsilon) \in X, \quad t = 0, \varepsilon^2, 2\varepsilon^2, \dots (t \leq T),$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0 \quad (2)$$

в критическом случае рассматривалась в [5]. Здесь и далее $\varepsilon \geq 0$ означает малый параметр, X — вещественное m -мерное пространство, $B(t)$ $m \times m$ -матрица, $f(x, t, \varepsilon)$ есть m -мерная вектор-функция, $B(t)$

¹⁾ Работа Г. А. Куриной выполнена при частичной финансовой поддержке РНФ, грант 21-11-00202, а работа Н. Т. Хоай поддержана Вьетнамским национальным фондом развития науки и технологий (NAFOSTED), грант 101.02-2021.43.

и $f(x, t, \varepsilon)$ предполагаются достаточно гладкими по всем аргументам. Был предложен алгоритм построения асимптотики решения, содержащей пограничные функции двух типов, при этом явные формулировки задач были даны только для нахождения асимптотического решения первого порядка. В этой статье также объясняется причина изучения уравнений вида (1). Эта задача кратко обсуждалась и в [6].

В настоящей статье асимптотическое решение задачи (1), (2) строится с использованием ортогональных проекторов. Этот подход полезен для понимания алгоритма построения асимптотики. Он позволяет, в отличие от [5], получать представления задач для нахождения членов асимптотики любого порядка в явном виде, что очень удобно для исследователей, применяющих асимптотические методы для решения практических задач. Более того, благодаря явным формулам можно написать компьютерную программу для нахождения асимптотического решения любого порядка.

Насколько нам известно, проекторный подход в критическом случае впервые был использован в [7] для асимптотического решения начальной задачи для стандартного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с левой частью вида $\varepsilon dx/dt$ и нелинейным членом порядка ε . Для асимптотического решения дискретного аналога такой задачи этот подход применялся в [8].

Дифференциальным аналогом дискретного уравнения (1) является

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x, t, \varepsilon).$$

Используя проекторный подход, в [9] найдены в явном виде задачи для отыскания любого порядка членов асимптотического решения начальной задачи для последнего уравнения в критическом случае. Отметим, что для этой задачи в [5] приведены явные соотношения только для нахождения асимптотического решения первого порядка.

Предположим, что выполняются основные условия I, II из [5], т.е. для каждого $t \in [0, T]$ матрица $B(t)$ имеет m собственных значений $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_m(t)$, удовлетворяющих условиям [label=].

Условие I. $\lambda_j(t) \equiv 1$ для $j = 1, \dots, k$, $k < m$ и k собственных векторов $v_1(t), v_2(t), \dots, v_k(t)$ матрицы $B(t)$, соответствующих этому собственному значению, линейно независимы.

Условие II. $|\lambda_j(t)| < 1$ для $j = k + 1, \dots, m$.

В отличие от условия III в [5], мы предполагаем здесь достаточную гладкость заданных функций в рассматриваемой задаче во всем пространстве.

Следуя [5], будем использовать собственные векторы, имеющие ту же гладкость, что и матрица $B(t)$. Существование таких собственных векторов доказано в [10].

В дальнейшем условия 1 и 2 будут дополнены другими предположениями.

На протяжении всей статьи транспонирование обозначается штрихом, I , как обычно, означает тождественный оператор. Для разложения функции $w(t, \varepsilon)$ в ряд по целым неотрицательным степеням ε : $w(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j w_j(t)$ используется обозначение $[w(t, \varepsilon)]_j = w_j(t)$.

В разд. 2 система (1) стандартным образом разбивается на три системы относительно функций, зависящих от аргументов t и t / ε^i , $i = 1, 2$. В разд. 3 вводятся ортогональные проекторы, которые будут использоваться для нахождения членов асимптотики. Задачи для определения членов асимптотики нулевого и n -го порядков, $n \geq 1$ получаются в разд. 4 и 5 соответственно. В разд. 6 приводится пример, иллюстрирующий применение проекторного подхода к построению асимптотики первого порядка решения задачи вида (1), (2) в критическом случае.

2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ

Асимптотическое решение задачи (1), (2) аналогично [5] ищется в виде

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + \sum_{i=1}^2 \Pi_i x(\tau_i, \varepsilon), \tag{3}$$

где

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{x}_j(t), \quad \Pi_i x(\tau_i, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{ij} x(\tau_i), \quad \tau_i = t / \varepsilon^i, \quad i = 1, 2.$$

По традиции (см., например, [6]), ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{x}_j(t)$ с членами, зависящими от исходного аргумента t , называется регулярным рядом, в отличие от пограничных рядов $\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{ij}x(\tau_i)$, $i = 1, 2$, состоящих из так называемых пограничных функций, удовлетворяющих условию $\Pi_{ij}x(\tau_i) \rightarrow 0$ при $\tau_i \rightarrow +\infty$. Будет также использоваться представление

$$f(\bar{x}(t, \varepsilon) + \sum_{i=1}^2 \Pi_i x(\tau_i, \varepsilon), t, \varepsilon) \equiv \bar{f} + \sum_{i=1}^2 \Pi_i f, \quad (4)$$

где $\bar{f} = f(\bar{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \bar{f}_j(t)$, $\Pi_1 f = f(\bar{x}(\varepsilon\tau_1, \varepsilon) + \Pi_1 x(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon\tau_1, \varepsilon) - f(\bar{x}(\varepsilon\tau_1, \varepsilon), \varepsilon\tau_1, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{1j} f(\tau_1)$, и $\Pi_2 f = f(\bar{x}(\varepsilon^2\tau_2, \varepsilon) + \Pi_1 x(\varepsilon\tau_2, \varepsilon) + \Pi_2 x(\tau_2, \varepsilon), \varepsilon^2\tau_2, \varepsilon) - f(\bar{x}(\varepsilon^2\tau_2, \varepsilon) + \Pi_1 x(\varepsilon\tau_2, \varepsilon), \varepsilon^2\tau_2, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Pi_{2j} f(\tau_2)$.

Замечание 2.1. Как и в [5], функции $\bar{x}_j(t)$ при построении асимптотики будут рассматриваться для всех $t \in [0, T]$. В окончательной же асимптотике значения $\bar{x}_j(t)$ используются только при $t = 0, \varepsilon^2, 2\varepsilon^2, \dots$, что соответствует дискретному изменению t в исходном уравнении (1). Аналогично функции $\Pi_{1j}x(\tau_1)$ при построении асимптотики будут рассматриваться для всех $\tau_1 \geq 0$. В окончательной форме асимптотики значения $\Pi_{1j}x(\tau_1)$ используются только при $\tau_1 = 0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots$, в соответствии с дискретной заменой t в (1).

Подставляя разложение (3) в (1), используя представление (4) и приравнявая в разложениях по целым неотрицательным степеням ε коэффициенты при одинаковых степенях ε , отдельно зависящие от t и τ_i , $i = 1, 2$, получаем уравнения для коэффициентов рядов в (3)

$$\bar{x}_j(t) + \sum_{k=1}^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{1}{k!} \frac{d^k \bar{x}_{j-2k}(t)}{dt^k} = B(t)\bar{x}_j(t) + \bar{f}_{j-1}(t), \quad (5)$$

$$\Pi_{1j}x(\tau_1) + \sum_{k=1}^j \frac{1}{k!} \frac{d^k \Pi_{1(j-k)}x}{d\tau_1^k} = B(0)\Pi_{1j}x(\tau_1) + \Pi_{1(j-1)}f(\tau_1) + [(B(\varepsilon\tau_1) - B(0))\Pi_{1j}x(\tau_1, \varepsilon)]_j, \quad (6)$$

$$\Pi_{2j}x(\tau_2 + 1) = B(0)\Pi_{2j}x(\tau_2) + \Pi_{2(j-1)}f(\tau_2) + [(B(\varepsilon^2\tau_2) - B(0))\Pi_{2j}x(\tau_2, \varepsilon)]_j, \quad j \geq 0. \quad (7)$$

Для записи уравнений (5)–(7) в одинаковом виде для любого $j \geq 0$ будем полагать, что члены разложений с отрицательными индексами равны нулю.

Подставляя разложение (3) в (2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем равенства

$$\bar{x}_0(0) + \Pi_{10}x(0) + \Pi_{20}x(0) = x^0, \quad (8)$$

$$\bar{x}_j(0) + \Pi_{1j}x(0) + \Pi_{2j}x(0) = 0, \quad j > 0. \quad (9)$$

3. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПРОСТРАНСТВА

Положим $A(t) = B(t) - I$. Далее будем использовать разложения пространства X в ортогональные суммы (см., например, [11])

$$X = \ker A(t) \oplus \operatorname{im} A(t)' = \ker A(t)' \oplus \operatorname{im} A(t).$$

Ортогональные проекторы пространства X на подпространства $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$ в этих разложениях будем обозначать через $P(t)$ и $Q(t)$ соответственно. Эти проекторы могут быть записаны в явной форме. А именно, пусть $V(t) = (v_1(t), \dots, v_k(t))$ и $S(t) = (s_1(t), \dots, s_k(t))$, где $s_1(t), \dots, s_k(t)$ — собственные векторы матрицы $A(t)'$, соответствующие собственным значениям $\lambda(t) \equiv 0$. Из условия 1 следует, что матрицы $V(t)V(t)$ и $S(t)S(t)$ размера $k \times k$ обратимы. Легко проверить, что $P(t) = V(t)(V(t)'V(t))^{-1}V(t)'$

и $Q(t) = S(t)(S(t)'S(t))^{-1}S(t)'$ — ортогональные проекторы пространства X на подпространства $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$ соответственно (см. также [12]).

Нетрудно видеть, что λ является собственным значением матрицы $B(t)$ тогда и только тогда, когда $\lambda - 1$ — собственное значение матрицы $A(t)$. Следовательно, если $\lambda = 1$ — собственное значение матрицы $B(t)$, то $\lambda = 0$ — собственное значение матрицы $A(t)$, а если λ — собственное значение матрицы $B(t)$, удовлетворяющее неравенству $|\lambda| < 1$, то собственное значение $\lambda - 1$ оператора $A(t)$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re}(\lambda - 1) < 0$.

Оператор $(I - Q(t))A(t)(I - P(t)) : \operatorname{im}A(t)' \rightarrow \operatorname{im}A(t)$ имеет обратный оператор, который будет обозначаться $A(t)^+$.

Замечание 3.1. Из условия 1 следует, что для каждого $t \in [0, T]$ модуль собственных значений оператора $\tilde{B}(t) = (I - P(t))B(t)(I - P(t)) : \operatorname{im}A(t)' \rightarrow \operatorname{im}A(t)'$ меньше единицы и матрица $S(t)V(t)$ размера $k \times k$ обратима (см. [6]).

Несложно доказать (см., например, [8]), что оператор $Q(t)P(t) : \ker A(t) \rightarrow \ker A(t)'$ обратим для всех $t \in [0, T]$ и справедливо тождество (см. [9])

$$Q(t)\frac{dA}{dt}(t)P(t) = 0. \tag{10}$$

Предположим выполнение еще двух условий [label=, resume]

Условие III. Уравнение $Q(t)f(y(t), t, 0) = 0$, рассматриваемое при всех $t \in [0, T]$, имеет единственное достаточно гладкое изолированное решение $y(t) \in \ker A(t)$.

Условие IV. Оператор

$$(Q(t)P(t))^{-1}Q(t)\bar{f}_x(t)P(t) : \ker A(t) \rightarrow \ker A(t), \tag{11}$$

где $\bar{f}_x(t) = \partial f(\bar{x}_0(t), t, 0) / \partial x$, устойчив при всех $t \in [0, T]$.

Последнее предположение будет сформулировано в следующем разделе.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Из (5) при $j = 0$ следует

$$(I - P(t))\bar{x}_0(t) = 0. \tag{12}$$

Из (6) при $j = 0$ получаем

$$(I - P(0))\Pi_{10}x(\tau_1) = 0. \tag{13}$$

Учитывая (12) и (13), находим из (8) начальное значение

$$(I - P(0))\Pi_{20}x(0) = (I - P(0))x^0. \tag{14}$$

Дискретное уравнение для $\Pi_{20}x(\tau_2)$ следует из (7) при $j = 0$

$$\Pi_{20}x(\tau_2 + 1) = B(0)\Pi_{20}x(\tau_2). \tag{15}$$

Замечание 4.1. Легко видеть, что $B(t)|_{\ker A(t)} = I$. Следовательно, $(I - P(0))B(0)P(0)$ — нулевой оператор, а $P(0)B(0)P(0)$ — тождественный оператор на $\ker A(0)$.

Согласно этому замечанию, уравнение (15) эквивалентно системе двух уравнений

$$(I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2 + 1) = \tilde{B}(0)(I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2), \tag{16}$$

$$P(0)\Pi_{20}x(\tau_2 + 1) = P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) + P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2). \tag{17}$$

Учитывая замечание 3.1, мы получаем из (16), (14) единственную пограничную функцию

$$(I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2) = \tilde{B}(0)^{\tau_2}(I - P(0))x^0. \tag{18}$$

Используя формулу для решения неоднородного линейного дискретного уравнения (см., например, [13]) и условие $P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) \rightarrow 0$ при $\tau_2 \rightarrow +\infty$, получаем единственное решение $P(0)\Pi_{20}x(\tau_2)$ уравнения (17), которое является пограничной функцией, а именно

$$P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) = - \sum_{k=\tau_2}^{\infty} P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_{20}x(k), \quad (19)$$

где $(I - P(0))\Pi_{20}x(k)$ определяется формулой (18). Последнее выражение можно переписать в виде

$$P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) = P(0)B(0)(I - P(0))\tilde{B}(0)^{\tau_2} B_+(I - P(0))x^0, \quad (20)$$

где B_+ — обратный оператор для оператора $\tilde{B}(0) - I : \text{im}A(0)' \rightarrow \text{im}A(0)'$. В силу замечания 3.1 оператор B_+ существует.

Значит, пограничная функция $\Pi_{20}x(\tau_2)$ найдена.

Из (5) при $j = 1$ следует равенство

$$0 = A(t)\bar{x}_1(t) + \bar{f}_0(t).$$

В силу (12) отсюда имеем

$$Q(t)f(P(t)\bar{x}_0(t), t, 0) = 0. \quad (21)$$

Ввиду условия III из (21) определяется $P(t)\bar{x}_0(t)$. Итак, функция $\bar{x}_0(t)$ найдена.

Так как $\bar{x}_0(t)$ и $\Pi_{20}x(\tau_2)$ уже известны, из (8) находится начальное значение

$$P(0)\Pi_{10}x(0) = P(0)(x^0 - \bar{x}_0(0) - \Pi_{20}x(0)). \quad (22)$$

Из (6) при $j = 1$ получается уравнение

$$\frac{d\Pi_{10}x(\tau_1)}{d\tau_1} = A(0)\Pi_{11}x(\tau_1) + \tau_1 \frac{dB}{dt}(0)\Pi_{10}x(\tau_1) + \Pi_{10}f(\tau_1),$$

откуда следует

$$Q(0) \frac{d\Pi_{10}x(\tau_1)}{d\tau_1} = Q(0) \left(\tau_1 \frac{dB}{dt}(0)\Pi_{10}x(\tau_1) + \Pi_{10}f(\tau_1) \right).$$

Учитывая (13), (10), (12) и (21), получаем уравнение

$$Q(0) \frac{d(P(0)\Pi_{10}x(\tau_1))}{d\tau_1} = Q(0)f(P(0)\bar{x}_0(0) + P(0)\Pi_{10}x(\tau_1), 0, 0),$$

т.е.

$$\frac{d(P(0)\Pi_{10}x(\tau_1))}{d\tau_1} = (Q(0)P(0))^{-1}Q(0)f(P(0)\bar{x}_0(0) + P(0)\Pi_{10}x(\tau_1), 0, 0). \quad (23)$$

В силу (21) функция $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1) = 0$ является точкой покоя системы (23). Предположим выполнение последнего условия [label=, resume].

Условие V. Начальное значение (22) для $P(0)\Pi_{10}x(0)$ принадлежит области влияния точки покоя $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1) = 0$ (соответствующее определение см. в [14]).

Ввиду условия V решение $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1)$ начальной задачи (23), (22) является пограничной функцией (см. Лемму 3.1 в [14]). Значит, функция $\Pi_{10}x(\tau_1)$ определена, и найдена асимптотика нулевого порядка решения задачи (1), (2).

Следующие формулы иллюстрируют последовательность нахождения членов асимптотики нулевого порядка. Представим эти члены в виде суммы компонент из подпространств

$$\bar{x}_0(t) = (I - P(t))\bar{x}_0(t) + P(t)\bar{x}_0(t),$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} 2 & 6 \\ \Pi_{10}x(\tau_1) = (I - P(0))\Pi_{10}x(\tau_1) + P(0)\Pi_{10}x(\tau_1), \end{matrix} \\ & \begin{matrix} 3 & 4 \\ \Pi_{20}x(\tau_2) = (I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2) + P(0)\Pi_{20}x(\tau_2). \end{matrix} \end{aligned}$$

Цифры над слагаемыми означают последовательность определения этих слагаемых.

Замечание 4.2. Задача (23), (22) для нахождения члена асимптотики нулевого порядка для пограничной функции первого типа $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1)$, зависящей от аргумента $\tau_1 = t / \varepsilon$, совпадает с соответствующей задачей в случае аналогичной задачи для дифференциального уравнения в этом критическом случае в [9].

Замечание 4.3. Условия III–V аналогичны соответствующим предположениям, сделанным в [5].

Легко видеть, что записанное с помощью ортогональных проекторов уравнение в условии III, разрешимость которого требуется в данной статье, совпадает с уравнением (17) в [5], разрешимость которого требуется в условии IV из [5].

Совпадение условия IV с соответствующим предположением V в [5] доказано в [9].

Для доказательства утверждения замечания 4.3, касающегося условия V, рассмотрим выражение (12) из [5], записанное в виде $\Pi_{10}x(\tau_1) = P(0)\Pi_{10}x(\tau_1) = V(0)b_0(\tau_1)$, где функция $b_0(\tau_1)$ используется в предположении VI из [5]. Условие V в этой статье аналогично предположению VI из [5], поскольку уравнение (23) можно записать, используя наши обозначения, в виде $db_0(\tau_1) / d\tau_1 = S(0)\Pi_0f$, что эквивалентно уравнению (20) из [5].

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Предположим, что члены асимптотики (3) до порядка $n - 1$, $n \geq 1$, включительно уже определены.

Из уравнения (5) при $j = n$ получаем

$$A(t)\bar{x}_n(t) = \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{k!} \frac{d^k \bar{x}_{n-2k}(t)}{dt^k} - \bar{f}_{n-1}(t) = \zeta_{n-1}(t),$$

где $\zeta_{n-1}(t)$ — известная функция.

После применения к этому уравнению оператора $I - Q(t)$ имеем

$$(I - Q(t))A(t)(I - P(t))\bar{x}_n(t) = (I - Q(t))\zeta_{n-1}(t).$$

Находим отсюда

$$(I - P(t))\bar{x}_n(t) = A(t)^+(I - Q(t))\zeta_{n-1}(t). \tag{24}$$

Уравнение (6) при $j = n$ имеет вид

$$A(0)\Pi_{1n}x(\tau_1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k \Pi_{1(n-k)}x}{d\tau_1^k} - \Pi_{1(n-1)}f(\tau_1) - [(B(\varepsilon\tau_1) - B(0))\Pi_1x(\tau_1, \varepsilon)]_n = \Pi_{1(n-1)}\zeta(\tau_1),$$

где $\Pi_{1(n-1)}\zeta(\tau_1)$ — известная пограничная функция.

Отсюда получаем пограничную функцию

$$(I - P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1) = A(0)^+(I - Q(0))\Pi_{1(n-1)}\zeta(\tau_1). \tag{25}$$

Используя (24), (25), находим из (9) при $j = n$ начальное значение

$$(I - P(0))\Pi_{2n}x(0) = - (I - P(0))\bar{x}_n(0) - (I - P(0))\Pi_{1n}x(0). \tag{26}$$

Из (7) при $j = n$ получаем уравнение для $\Pi_{2n}x(\tau_2)$

$$\Pi_{2n}x(\tau_2 + 1) = B(0)\Pi_{2n}x(\tau_2) + \Pi_{2(n-1)}f(\tau_2) + [(B(\varepsilon^2\tau_2) - B(0))\Pi_2x(\tau_2, \varepsilon)]_n = B(0)\Pi_{2n}x(\tau_2) + \Pi_{2(n-1)}\zeta(\tau_2),$$

где $\Pi_{2(n-1)}\zeta(\tau_2)$ — известная пограничная функция.

Ввиду замечания 4.1 это уравнение эквивалентно системе двух уравнений

$$(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2 + 1) = \tilde{B}(0)(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2) + (I - P(0))\Pi_{2(n-1)}\zeta(\tau_2), \quad (27)$$

$$P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2 + 1) = P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2) + P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2) + P(0)\Pi_{2(n-1)}\zeta(\tau_2). \quad (28)$$

Учитывая замечание 3.1, из (27), (26) находим пограничную функцию

$$(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2) = \tilde{B}(0)^{\tau_2} (I - P(0))\Pi_{2n}x(0) + \sum_{i=0}^{\tau_2-1} \tilde{B}(0)^{\tau_2-1-i} (I - P(0))\Pi_{2(n-1)}\zeta(i), \quad (29)$$

где $(I - P(0))\Pi_{2n}x(0)$ задается формулой (26).

Используя формулу для решения неоднородного линейного дискретного уравнения (см., например, [13]) и учитывая, что $P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2) \rightarrow 0$ при $\tau_2 \rightarrow +\infty$, получаем единственное решение $P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2)$ уравнения (28), а именно,

$$P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2) = - \sum_{k=\tau_2}^{\infty} (P(0)\Pi_{2(n-1)}\zeta(k) + P(0)B(0)(I - P(0))\Pi_{2n}x(k)), \quad (30)$$

где $(I - P(0))\Pi_{2n}x(k)$ задается формулой (29).

Итак, пограничная функция $\Pi_{2n}x(\tau_2)$ найдена.

Запишем уравнение (5) при $j = n + 1$

$$A(t)\bar{x}_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^{[(n+1)/2]} \frac{1}{k!} \frac{d^k \bar{x}_{n+1-2k}(t)}{dt^k} - \bar{f}_n(t). \quad (31)$$

Легко видеть, что сумма в правой части последнего соотношения известна и $\bar{f}_n(t)$ можно представить в виде

$$\bar{f}_n(t) = \bar{f}_x(t)P(t)\bar{x}_n(t) + \zeta_n(t),$$

где $\zeta_n(t)$ — известная функция, зависящая от $\bar{x}_j(t)$, $j < n$, и известного члена $(I - P(t))\bar{x}_n(t)$. Следовательно, уравнение (31) можно переписать в виде

$$A(t)\bar{x}_{n+1}(t) = -\bar{f}_x(t)P(t)\bar{x}_n(t) + \tilde{\zeta}_n(t),$$

где $\tilde{\zeta}_n(t)$ — известная функция.

Из последнего уравнения получаем

$$Q(t)\left(-\bar{f}_x(t)P(t)\bar{x}_n(t) + \tilde{\zeta}_n(t)\right) = 0. \quad (32)$$

В силу условия IV оператор $Q(t)\bar{f}_x(t)P(t) : \text{Ker } A(t) \rightarrow \text{Ker } A(t)'$ обратим, и мы можем однозначно определить из (32) функцию $P(t)\bar{x}_n(t)$. Значит, функция $\bar{x}_n(t)$ определена.

Затем из (9) при $j = n$ находим начальное значение

$$P(0)\Pi_{1n}x(0) = -P(0)(\bar{x}_n(0) + \Pi_{2n}x(0)). \quad (33)$$

Из (6) при $j = n + 1$ следует уравнение

$$\frac{d\Pi_{1n}x}{d\tau_1} = A(0)\Pi_{1(n+1)}x(\tau_1) + \Pi_{1n}f(\tau_1) + [(B(\varepsilon\tau_1) - B(0))\Pi_{1n}x(\tau_1, \varepsilon)]_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}\Pi_{1(n-k)}x}{d\tau_1^{k+1}}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \frac{d(P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1))}{d\tau_1} &= (Q(0)P(0))^{-1}Q(0)\left(\Pi_{1n}f(\tau_1) - \frac{d((I - P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1))}{d\tau_1} + \right. \\ &\left. + [(B(\varepsilon\tau_1) - B(0))\Pi_{1n}x(\tau_1, \varepsilon)]_{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^{k+1}\Pi_{1(n-k)}x}{d\tau_1^{k+1}}\right). \end{aligned} \tag{34}$$

В силу (10) и (25) функция

$$\begin{aligned} Q(0)[(B(\varepsilon\tau_1) - B(0))\Pi_{1n}x(\tau_1, \varepsilon)]_{n+1} &= Q(0)\left(\tau_1 \frac{dA}{dt}(0)(I - P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1) + \right. \\ &\left. + [(A(\varepsilon\tau_1) - A(0) - \varepsilon\tau_1 \frac{dA}{dt}(0)(I - P(0)))\Pi_{1n}x(\tau_1, \varepsilon)]_{n+1}\right) \end{aligned}$$

является известной пограничной функцией.

Так как функция $(I - P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1)$ известна, функция $\Pi_{1n}f(\tau_1)$ имеет вид

$$\Pi_{1n}f(\tau_1) = f_x(\bar{x}_0(0) + \Pi_{10}x(\tau_1), 0, 0)P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1) + \Pi_{1n}\zeta_n(\tau_1),$$

где $\Pi_{1n}\zeta_n(\tau_1)$ — известная пограничная функция, зависящая от $\Pi_{1j}x(\tau_1)$, $j < n$.

Следовательно, уравнение (34) линейно относительно $P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1)$. В [14, Лемма 3.1] установлено, что решение задачи (34), (33) при условии IV является пограничной функцией экспоненциального типа.

Результатом предшествующих рассуждений является

Теорема 5.1. *Задачи для определения членов асимптотики вида (3) любого порядка в явном виде могут быть найдены для решения задачи (1), (2) при условиях I–V с помощью ортогональных проекторов $P(t)$ на $\ker A(t)$ и $Q(t)$ на $\ker A(t)'$. Порядок нахождения членов асимптотики следующий: $(I - P(t))x_j(t)$, $(I - P(0))\Pi_{1j}x(\tau_1)$, $(I - P(0))\Pi_{2j}x(\tau_2)$, $P(0)\Pi_{2j}x(\tau_2)$, $P(t)x_j(t)$, и $P(0)\Pi_{1j}x(\tau_1)$, $j \geq 0$.*

Замечание 5.1. Хотя исходная задача (1), (2) является дискретной, из дискретных уравнений входят только члены асимптотики пограничного ряда второго типа, зависящие от аргумента $\tau_2 = t / \varepsilon^2$.

Замечание 5.2. Несмотря на то что, в отличие от [9], в настоящей статье рассматривается дискретное, а не дифференциальное уравнение и тип уравнений (5)–(7) для членов асимптотики отличается существенно от (2.2)–(2.4) в [9], в итоге последовательность нахождения компонент членов асимптотики такая же.

6. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим начальную задачу вида (1), (2) на отрезке $[0, 0.0032]$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y(t + \varepsilon^2, \varepsilon) \\ z(t + \varepsilon^2, \varepsilon) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \\ &+ \varepsilon \begin{pmatrix} -z(t, \varepsilon) + t - 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t = 0, \varepsilon^2, 2\varepsilon^2, \dots, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{pmatrix} y(0, \varepsilon) \\ z(0, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

6.1. Точное решение

Если $t = \varepsilon^2 k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то второе уравнение в (35) имеет вид

$$z(\varepsilon^2(k+1), \varepsilon) = y(\varepsilon^2 k, \varepsilon). \tag{37}$$

Отсюда $z(\varepsilon^2 k, \varepsilon) = y(\varepsilon^2(k-1), \varepsilon)$. Подставляя это соотношение в первое уравнение (35), получаем

$$y(\varepsilon^2(k+1), \varepsilon) = \frac{3}{2}y(\varepsilon^2 k, \varepsilon) - \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)y(\varepsilon^2(k-1), \varepsilon) + \varepsilon(\varepsilon^2 k - 10).$$

Пусть $q(k) = y(\varepsilon^2 k, \varepsilon)$. Ввиду последнего уравнения и первого уравнения в (35) при $t = 0$ имеем начальную задачу

$$\begin{aligned} q(k+1) &= \frac{3}{2}q(k) - \left(\varepsilon + \frac{1}{2}\right)q(k-1) + \varepsilon(\varepsilon^2 k - 10), \\ q(0) &= y(0) = 1, \\ q(1) &= y(\varepsilon^2) = 2 - 9\varepsilon. \end{aligned} \quad (38)$$

Единственным решением задачи (38) является

$$q(k) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k + \varepsilon^2 k - 10 - \frac{1}{2}\varepsilon + \varepsilon^2,$$

где $\lambda_1 = (3 + \sqrt{1 - 16\varepsilon}) / 4$, $\lambda_2 = (3 - \sqrt{1 - 16\varepsilon}) / 4$ и

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{32\varepsilon^3 - 18\varepsilon^2 - 351\varepsilon + 22 - (10\varepsilon^2 + 71\varepsilon - 30)\sqrt{1 - 16\varepsilon}}{4(1 - 16\varepsilon)}, \\ c_2 &= \frac{32\varepsilon^3 - 18\varepsilon^2 - 351\varepsilon + 22 + (10\varepsilon^2 + 71\varepsilon - 30)\sqrt{1 - 16\varepsilon}}{4(1 - 16\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем решение задачи (35), (36)

$$\begin{aligned} y(t, \varepsilon) &= y(\varepsilon^2 k, \varepsilon) = c_1 \lambda_1^{t/\varepsilon^2} + c_2 \lambda_2^{t/\varepsilon^2} + t - 10 - \varepsilon / 2 + \varepsilon^2, \\ z(t, \varepsilon) &= z(\varepsilon^2 k, \varepsilon) = c_1 \lambda_1^{t/\varepsilon^2 - 1} + c_2 \lambda_2^{t/\varepsilon^2 - 1} + t - 10 - \varepsilon / 2. \end{aligned}$$

6.2. Проекторы и вспомогательные операторы

Сравнивая (35), (36) с (1), (2), имеем

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \begin{pmatrix} y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ A &= B - I = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ f(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon) &= \begin{pmatrix} -z(t, \varepsilon) + t - 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t, \varepsilon) \\ z(t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ x^0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как матрица B постоянная, то, опуская для краткости аргумент t в обозначениях, находим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \lambda_2 = 0.5, \ker A = \{(a, a)'\}, \\ V &= (1, 1)', \ker A' = \{(-2a, a)'\}, S = (-2, 1)', \\ \operatorname{im} A &= \{(a, 2a)'\}, \\ \operatorname{im} A' &= \{(a, -a)'\}, \\ P &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \\ Q &= \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \text{im } A \rightarrow \text{im } A',$$

$$(QP)^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 5/2 & 0 \end{pmatrix} : \text{ker } A' \rightarrow \text{ker } A,$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} : \text{im } A' \rightarrow \text{im } A',$$

$$\tilde{B} - I = \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -3/4 \end{pmatrix} : \text{im } A' \rightarrow \text{im } A'.$$

Последний оператор имеет обратный $B_+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \text{im } A' \rightarrow \text{im } A'$.

Используя ортогональные проекторы P и Q , построим асимптотическое решение задачи (35), (36) первого порядка.

6.3. Асимптотическое приближение нулевого порядка

Из (12) получаем

$$\bar{y}_0(t) - \bar{z}_0(t) = 0. \tag{39}$$

Из (13) следует, что

$$\Pi_{10}y(\tau_1) - \Pi_{10}z(\tau_1) = 0. \tag{40}$$

Из (18) имеем

$$\Pi_{20}y(\tau_2) - \Pi_{20}z(\tau_2) = \frac{1}{2^{\tau_2-1}},$$

а из (20) следует

$$\Pi_{20}y(\tau_2) + \Pi_{20}z(\tau_2) = -\frac{3}{2^{\tau_2-1}}.$$

Из двух последних равенств получаем $\Pi_{20}y(\tau_2) = -1/2^{\tau_2-1}$, $\Pi_{20}z(\tau_2) = -1/2^{\tau_2-2}$. Решая уравнение (21), получаем

$$\bar{y}_0(t) + \bar{z}_0(t) = 2(t - 10).$$

Отсюда и из (39) следует $\bar{y}_0(t) = \bar{z}_0(t) = t - 10$.

Учитывая (23) и (22), можем записать начальную задачу для $\Pi_{10}y(\tau_1) + \Pi_{10}z(\tau_1)$

$$\frac{d}{d\tau_1}(\Pi_{10}y(\tau_1) + \Pi_{10}z(\tau_1)) = -2(\Pi_{10}y(\tau_1) + \Pi_{10}z(\tau_1)),$$

$$\Pi_{10}y(0) + \Pi_{10}z(0) = 26.$$

Решая эту задачу, получаем $\Pi_{10}y(\tau_1) + \Pi_{10}z(\tau_1) = 26e^{-2\tau_1}$. Отсюда и из (40) получаем $\Pi_{10}y(\tau_1) = \Pi_{10}z(\tau_1) = 13e^{-2\tau_1}$.

Таким образом, мы нашли приближение нулевого порядка асимптотического решения задачи (35), (36)

$$\tilde{y}_0(t, \varepsilon) = t - 10 + 13e^{-2t/\varepsilon} - 2^{1-t/\varepsilon^2},$$

$$\tilde{z}_0(t, \varepsilon) = t - 10 + 13e^{-2t/\varepsilon} - 2^{2-t/\varepsilon^2}.$$

6.4. Асимптотическое приближение первого порядка

Из (24) при $n = 1$ получаем

$$\bar{y}_1(t) - \bar{z}_1(t) = 0, \quad (41)$$

а из (25) при $n = 1$ следует

$$\Pi_{11}y(\tau_1) - \Pi_{11}z(\tau_1) = -26e^{-2\tau_1}. \quad (42)$$

Из (27) и (26) имеем начальную задачу для $\Pi_{21}y(\tau_2) - \Pi_{21}z(\tau_2)$

$$\Pi_{21}y(\tau_2 + 1) - \Pi_{21}z(\tau_2 + 1) = \frac{1}{2}(\Pi_{21}y(\tau_2) - \Pi_{21}z(\tau_2)) + \frac{1}{2^{\tau_2 - 2}},$$

$$\Pi_{21}y(0) - \Pi_{21}z(0) = 26.$$

Используя формулу для решения дискретной начальной задачи, получаем решение последней задачи

$$\Pi_{21}y(\tau_2) - \Pi_{21}z(\tau_2) = 2(4\tau_2 + 13) \frac{1}{2^{\tau_2}}. \quad (43)$$

Из (30) с учетом (43), учитывая, что $\sum_{k=0}^{\infty} (k / 2^k) = 2$, находим

$$\Pi_{21}y(\tau_2) + \Pi_{21}z(\tau_2) = -(24\tau_2 + 110) \frac{1}{2^{\tau_2}}.$$

Отсюда и из (43) следует $\Pi_{21}y(\tau_2) = -(4\tau_2 + 21) / 2^{\tau_2 - 1}$, $\Pi_{21}z(\tau_2) = -(4\tau_2 + 17) / 2^{\tau_2 - 2}$.

Из (32) получаем

$$2 \left(\frac{d\bar{y}_0(t)}{dt} + \bar{z}_1 \right) - \frac{d\bar{z}_0(t)}{dt} = 0.$$

Отсюда и из (41) находим $\bar{y}_1(t) = \bar{z}_1(t) = -1 / 2$.

Из (34), (42) и (33) получаем следующую начальную задачу

$$\frac{d\Pi_{11}z}{d\tau_1} = -2\Pi_{11}z - 130e^{-2\tau_1},$$

$$\Pi_{11}z(0) = 137 / 2.$$

Решая эту задачу, с учетом (42) получаем

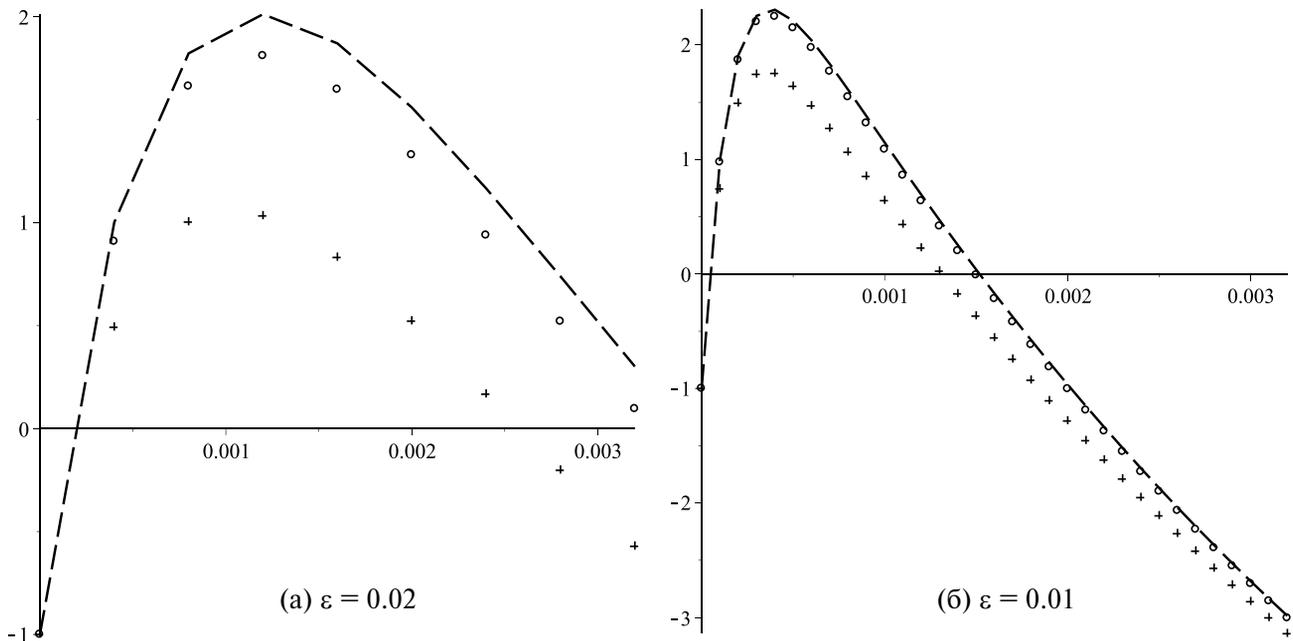
$$\Pi_{11}y(\tau_1) = \left(-130\tau_1 + \frac{85}{2} \right) e^{-2\tau_1},$$

$$\Pi_{11}z(\tau_1) = \left(-130\tau_1 + \frac{137}{2} \right) e^{-2\tau_1}.$$

В результате находим приближение первого порядка асимптотического решения задачи (35), (36)

$$\tilde{y}_1(t, \varepsilon) = \tilde{y}_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} + \left(-130 \frac{t}{\varepsilon} + \frac{85}{2} \right) e^{-2t/\varepsilon} - 2 \left(4 \frac{t}{\varepsilon^2} + 21 \right) 2^{-t/\varepsilon^2} \right),$$

$$\tilde{z}_1(t, \varepsilon) = \tilde{z}_0(t, \varepsilon) + \varepsilon \left(-\frac{1}{2} + \left(-130 \frac{t}{\varepsilon} + \frac{137}{2} \right) e^{-2t/\varepsilon} - 4 \left(4 \frac{t}{\varepsilon^2} + 17 \right) 2^{-t/\varepsilon^2} \right).$$



Фиг. 1. Траектория $z(t, \varepsilon)$ и ее приближения.

Если разложить точное решение и построенное асимптотическое решение первого порядка при $t = \varepsilon^2 k$ в ряды по целым неотрицательным степеням ε , то получим совпадение соответствующих коэффициентов при ε^0 и ε^1 в обоих рядах.

Результаты, полученные с помощью Maple 17, представлены на фиг. 1 для траектории $z(t, \varepsilon)$ при (а) $\varepsilon = 0.02$ и (б) $\varepsilon = 0.01$. Штриховая линия соединяет точки, соответствующие значениям точного решения при $t = 0, \varepsilon^2, 2\varepsilon^2, \dots$, линия, состоящая из крестиков, представляет приближение нулевого порядка, а линия, состоящая из кружочков, — приближение первого порядка. В силу (37) график $y(\varepsilon^2 k, \varepsilon)$ отличается от графика $z(\varepsilon^2 k, \varepsilon)$ только сдвигом на ε^2 единиц влево.

Статья написана во время работы авторов во Вьетнамском институте перспективных исследований в области математики (VIASM). Авторы хотели бы поблагодарить VIASM за создание плодотворной исследовательской среды во время визита.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутузov В. Ф., Васильева А. Б. Дифференциальные и разностные системы уравнений с малым параметром в случае, когда невозмущенная (вырожденная) система находится на спектре // Дифференц. ур-ния. 1970. Т. 6. № 4. С. 650–664.
2. Gu Z. M., Nefedov N. N., O'Malley R. E. Jr. On Singular Singularly Perturbed Initial Value Problems // SIAM J. Appl. Math. 1989. V. 49. No. 1. P. 1–25.
3. O'Malley R. E. Jr., Flaherty J. E. Analytical and Numerical Methods for Nonlinear Singular Singularly-Perturbed Initial Value Problems // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 38. No. 2. P. 225–248.
4. Kurina G. A., Dmitriev M. G., Naidu D. S. Discrete singularly perturbed control problems (a survey) // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2017. V. 24. P. 335–370.
5. Бутузov В. Ф., Нефёдов Н. Н. Об одной задаче теории сингулярных возмущений // Дифференц. ур-ния. 1976. Т. 12. № 10. С. 1736–1747.
6. Васильева А. Б., Бутузov В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: МГУ, 1978.
7. Kurina G. A. Projector Approach to Constructing Asymptotic Solution of Initial Value Problems for Singularly Perturbed Systems in Critical Case // Axioms. 2019. V. 8. No. 2. P. 56.

8. *Курина Г. А., Хоай Н. Т.* Проекторный подход к построению асимптотики решения начальных задач для слабо нелинейных дискретных систем с малым шагом в критическом случае // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 1. С. 73–84.
9. *Курина Г. А., Хоай Н. Т.* Проекторный подход к алгоритму Бутузова–Нефёдова асимптотического решения одного класса сингулярно возмущенных задач в критическом случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 12. С. 2073–2084.
10. *Sibuya Y.* Some global properties of matrices of functions of one variable // Math. Ann. 1965. V. 161. P. 67–77.
11. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. Berlin, Heidelberg: Springer, 1966.
12. *Bretscher O.* Linear Algebra with Applications, 5th ed. Pearson, 2012.
13. *Гайшун И. В.* Системы с дискретным временем. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2001.
14. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.

УДК 620.193.013

СХОДИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МЕТОДА ОПОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ ПОВТОРНЫХ РОТАЦИОННЫХ ОПЕРАЦИЙ

© 2024 г. Ю. А. Повещенко^{1,*}, А. Ю. Круковский¹, В. О. Подрыга^{1,**}, П. И. Рагимли¹

¹125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия

*e-mail: hecon@mail.ru

**e-mail: PVictoria@list.ru

Поступила в редакцию 21.03.2023 г.

Переработанный вариант 18.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

В настоящей работе предложен подход к описанию метрических свойств разностной сетки для дискретизации повторных ротационных операций векторного анализа применительно к моделированию электромагнитных полей. На основе метода опорных операторов в данной работе построены интегрально-согласованные операции (градиент, дивергенция и ротор), которые необходимы для получения оценок сходимости разностных схем для повторных ротационных операций, для решения конкретных задач магнитной гидродинамики. На гладких решениях модельной магнитостатической задачи с первым порядком точности доказана сходимость построенных в работе разностных схем с нулевым собственным значением спектральной задачи. На разностную тетраэдрическую сетку не накладывается при этом никаких ограничений, кроме ее невырожденности. В настоящей работе приводится расчет электромагнитных полей для трехмерной задачи магнитной гидродинамики в двухтемпературном приближении с полной конфигурацией скорости и электромагнитных полей. Динамика электромагнитных полей развивается на фоне ротационной диффузии вектора магнитного поля. Библ. 16. Фиг. 7.

Ключевые слова: нерегулярные разностные сетки, метод опорных операторов, повторные ротационные операции, вычислительный эксперимент.

DOI: 10.31857/S0044466924010049 EDN: ZKCDXD

1. ВВЕДЕНИЕ

Повторные ротационные операции тензорного анализа используются для моделирования широкого класса практических задач (таких как физика плазмы, астрофизика, лазерный термоядерный синтез и др.) [1–6]. Метод опорных операторов (МОО) (см., например, [7–9]) при построении разностных схем используется для согласованной в смысле ряда интегральных тождеств аппроксимации сопряженных операций векторного анализа (таких как градиент, дивергенция, ротор и их комбинации и др.), необходимых для проведения широкомасштабного вычислительного эксперимента. Данный метод позволил построить разностные схемы на нерегулярных разностных сетках для некоторых уравнений из этого класса, включая нелинейные, с выполнением принципа полной консервативности [10]. В настоящей работе на классических решениях модельной магнитостатической задачи приводится доказательство сходимости разностных схем МОО для повторных ротационных операций векторного анализа с нулевым собственным значением спектральной задачи. Все эти уравнения линейны, причем с постоянными коэффициентами. Данный выбор объясняется стремлением выделить проблемы, связанные исключительно с нерегулярностью разностной сетки, и показать подходы к их численному моделированию. Сходимость доказывается на геометрическом уровне. Предполагается, что решение исходной задачи обладает достаточной необходимой гладкостью.

Рассматриваемые разностные схемы на нерегулярных сетках не аппроксимируют уравнений в локальном смысле, следовательно, доказательство сходимости возможно только после анализа структуры погрешности аппроксимации. Исследование данного вопроса приводит к расщеплению пространства векторных сеточных функций в ортогональную прямую сумму подпространств — как потенциальных, так и вихревых. Применительно к разностной схеме МОО для магнитостатической задачи разностный ротор ошибки вычисления циркуляций отсутствует (т.е. равен нулю). Поэтому данная ошибка является градиентом некоторой сеточной функции ($\text{grad}\xi$). Норма циркуляционной ошибки $\text{grad}\xi$ определяется энергией метрического оператора разностной сетки G [11]. Действие данного оператора на площади

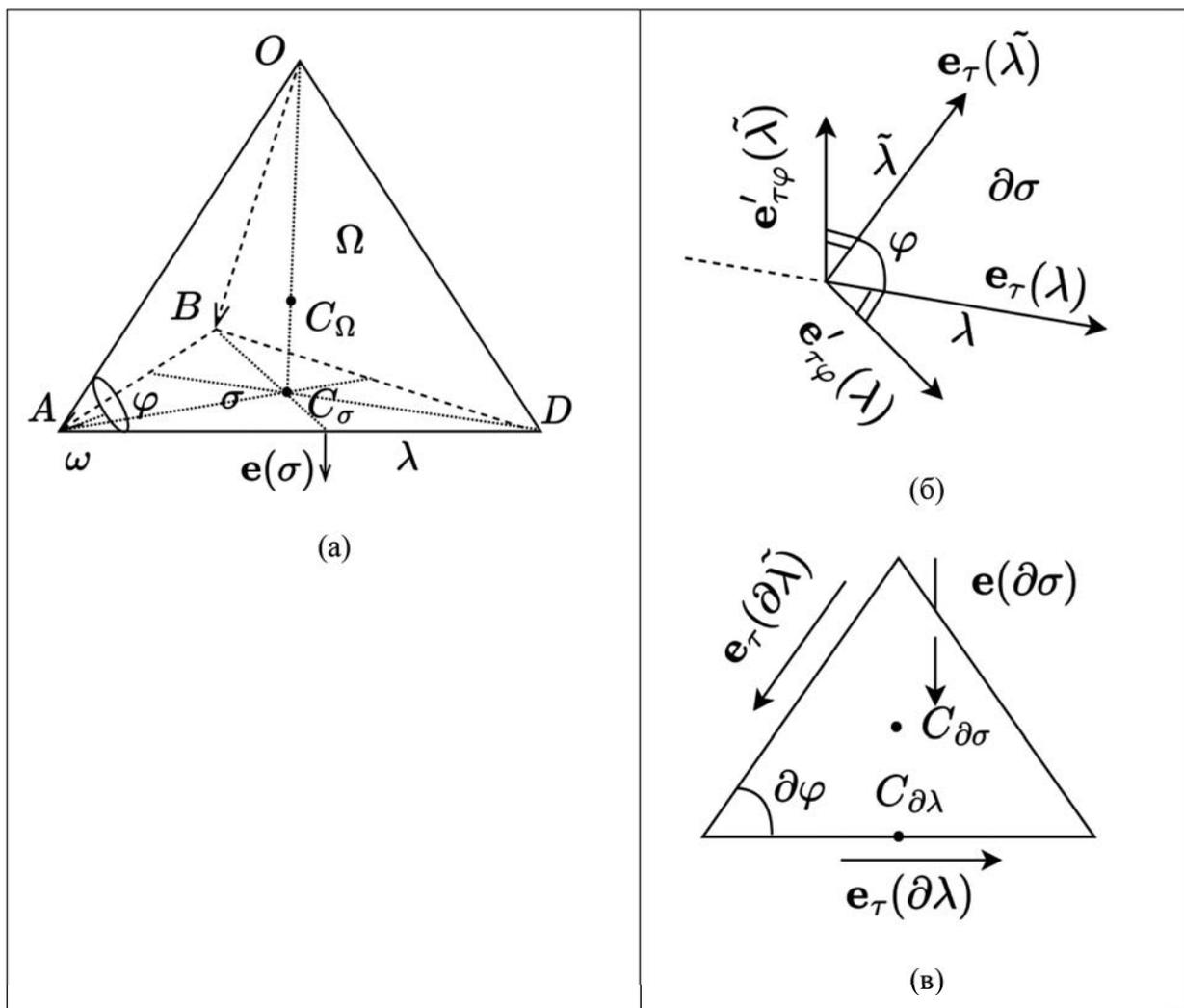
граней ячеек S разностной сетки согласовано с размерами этих ячеек (т.е. расположением центров тяжести ячеек, граней и ребер). Разложение пространства векторных функций в ортогональную прямую сумму подпространств потенциальных и вихревых полей вводится таким образом, чтобы ошибка вычисления циркуляций являлась потенциальной функцией.

В работе на достаточно гладких решениях дифференциальной задачи с первым порядком точности доказана сходимость разностных схем МОО для повторных ротационных операций с нулевым собственным значением спектральной задачи. На разностную тетраэдрическую сетку не накладывается никаких ограничений, кроме ее невырожденности.

В данной работе приведены результаты численного расчета динамики электромагнитных полей для трехмерной задачи магнитной гидродинамики в двухтемпературном приближении с учетом излучения реального уравнения вещества, замагниченности коэффициентов теплопроводности и электропроводности. Скорость и электромагнитные поля имеют полную конфигурацию. Развитие динамики магнитных полей разворачивается при их ротационной диффузии.

2. МЕТРИЧЕСКИЕ РАЗНОСТНЫЕ СЕТКИ МЕТОДА ОПОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Сетки данного типа [7, 11] состоят из ячеек (Ω), которые образуются узлами (ω) и гранями (σ) (см. фиг. 1а). Узлам $\omega(\Omega)$ соответствуют базисы $\varphi(\Omega)$ в ячейке Ω , состоящие из единичных нормалей



Фиг. 1. Ячейки разностной сетки: а) тетраэдрическая ячейка; б) к расчету поверхностной аппроксимации вектора Пойнтинга; в) расчет циркуляции магнитного поля на элементе контура граничной грани $C_{\partial\sigma}C_{\partial\lambda}$, $S_{\sigma}(\lambda) = -1$, $S_{\partial\sigma} = -1$, ячейка $\partial\Omega$ находится под гранью $\partial\sigma$.

$\mathbf{e}(\sigma)$ к граням σ , которые образуют базис. Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе объемов базисов $V_\varphi > 0$ при следующей нормировке $\sum_{\varphi(\Omega)} V_\varphi = V_\Omega$. Компоненты напряженности магнитного поля относятся к сетке $(\sigma), (\varphi)$, которая состоит из грани σ с нормальными к ним $\mathbf{e}(\sigma)$.

Введем сеточное скалярное произведение $(u_1, u_2)_\sigma = \sum_{\sigma} V_\sigma u_1(\sigma) u_2(\sigma)$ с весом $V_\sigma = \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi > 0$. Скалярное произведение $\int_O (\mathbf{u}, \mathbf{g}) dV$ в области O аппроксимируется на сетке $(\sigma), (\varphi)$ ковариантным представлением скалярного сеточного произведения

$$(\bar{u}, g')_\sigma = \sum_{\varphi} V_\varphi \sum_{\sigma(\varphi), \tilde{\sigma}(\varphi)} \text{Gr}'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) u'(\tilde{\sigma}) g'(\sigma).$$

Здесь $\bar{u}(\sigma) = 1/V_\sigma \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} \text{Gr}'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) u'(\tilde{\sigma})$ (в операторной форме $\bar{u} = Gu'$). Следовательно, на сетке $(\sigma), (\varphi)$ введен самосопряженный положительно-определенный метрический оператор $G : (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, $G = G^* > 0$, который задается семейством базисных матриц Грама $\text{Gr}'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) = (\mathbf{e}'_\varphi(\sigma), \mathbf{e}'_\varphi(\tilde{\sigma}))$. В этих матрицах $\mathbf{e}'_\varphi(\sigma)$ — взаимные (контравариантные) в локальных базисах φ векторы по отношению к исходным (ковариантным) нормальным $\mathbf{e}(\sigma)$ к граням σ . Данный оператор переводит сеточный аналог ковариантного представления $u'(\sigma)$, называемый сопряженным представлением векторного поля \mathbf{u} , в сеточное контравариантное представление $u(\sigma)$. Базисы φ создаются системой ковариантных ортов \mathbf{e} .

Базисный объем задается формулой $V_\varphi = \frac{1}{6} |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|$ (см. [7]) для треугольных (двумерный случай) ячеек Ω (\mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — стороны треугольника, образующие базис φ). Аналогично для четырехугольной ячейки Ω базисный объем задается формулой $V_\varphi = \frac{1}{4} |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|$. В случае трехмерных призм эти значения V_φ умножаются на половины толщин призматических ячеек Ω , содержащих соответствующие трехмерные базисы φ . Для тетраэдрических разностных ячеек Ω выбирается $V_\varphi = \frac{1}{4} V_\Omega$, где $\varphi \in \Omega$. Для гексаэдрических ячеек Ω , близких к объемным параллелепипедам, $V_\varphi = \frac{1}{8} V_\Omega$, где $\varphi \in \Omega$.

Все результаты разд. 2 обобщаются на случай неединичных нормалей $\mathbf{e}(\sigma)$ к граням σ .

Разностную дивергенцию определим по следующей формуле:

$$\text{DIV} \mathbf{g} = \frac{1}{V_\Omega} \sum_{\sigma(\Omega)} s_\sigma(\Omega) g'(\sigma) S(\sigma). \tag{2.1}$$

Здесь $S(\sigma)$ — удельная площадь грани, т.е. площадь грани σ , деленная на длину орта $\mathbf{e}(\sigma)$, равную $\sqrt{(\mathbf{e}(\sigma), \mathbf{e}(\sigma))}$; $s_\sigma(\Omega)$ — знаковая функция, которая равна единице, если нормаль $\mathbf{e}(\sigma)$ для ячейки Ω внешняя, и минус единице — если нормаль $\mathbf{e}(\sigma)$ внутренняя.

Введем скалярное произведение в ячейках следующим образом:

$$(F_1, F_2)_\Omega = \sum_{\Omega} V_\Omega F_{1\Omega} F_{2\Omega}.$$

Смоделируем интегральное соотношение

$$\int_O \text{grad} F \mathbf{u} dV + \int_O F \text{div} \mathbf{u} dV = \int_\Sigma F \mathbf{u} d\mathbf{S}$$

для области O , ограниченной поверхностью Σ .

Определим оператор $\text{GRAD} : (\Omega) \rightarrow (\sigma)$

$$\overline{(\text{GRAD} F, u')}_\sigma + (F, \text{DIV} \mathbf{u})_\Omega = \sum_{\partial\sigma} s_{\partial\sigma} F_{\partial\sigma} u'(\partial\sigma) S(\partial\sigma). \tag{2.2}$$

Для граничной грани $\partial\sigma$: $S(\partial\sigma)$ — ее удельная площадь; $s_{\partial\sigma}$ — единица, если нормаль $\mathbf{e}(\partial\sigma)$ — внешняя к области O ; $F_{\partial\sigma}$ — сеточная функция F на граничной грани $\partial\sigma$. Заметим, что F и $\bar{u} = Gu'$ — любые сеточные функции. Поэтому на грани σ имеем

$$\overline{\text{GRAD} F} = \frac{\Delta F}{h'}, \quad h' = \frac{V_\sigma}{S(\sigma)},$$

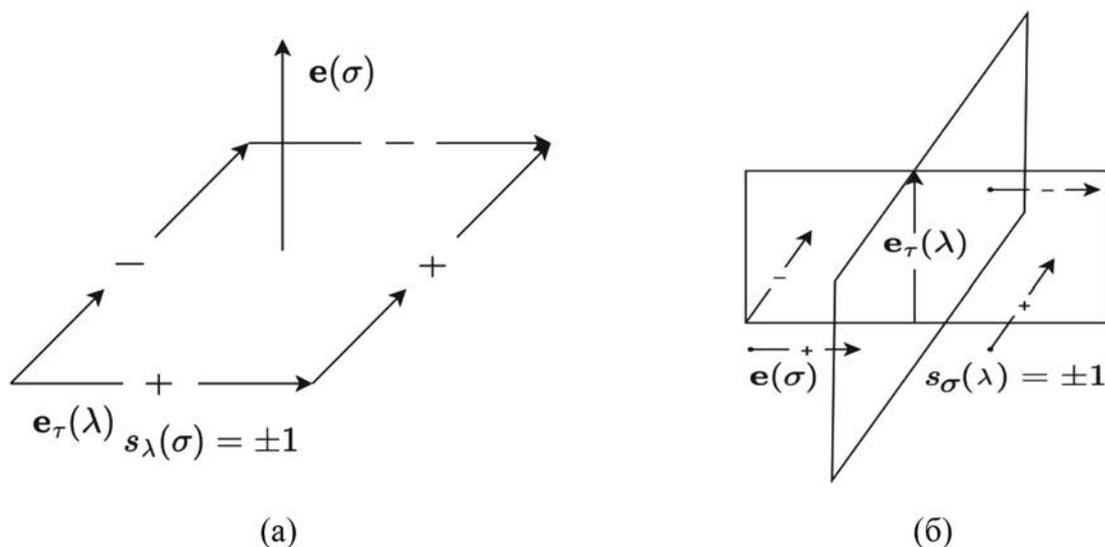
где

$$\Delta F = - \sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma}(\Omega) F_{\Omega} + s_{\partial\sigma} F_{\partial\Omega}.$$

Последнее слагаемое в приращении ΔF через грань σ существует только при условии, что эта грань является граничной.

3. ДИСКРЕТНАЯ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ МАГНИТНОЙ ЭНЕРГИИ

3.1. Разностные сетки метода опорных операторов для моделирования электромагнитных процессов



Фиг. 2. Согласование граней и ребер сетки.

Любому ориентированному ребру λ с ортом $e_{\tau}(\lambda)$ ставится в соответствие его удельная длина $h_{\tau}(\lambda) > 0$ (длина ребра λ , деленная на длину орта $e_{\tau}(\lambda)$). Каждому поверхностному базису $\partial\varphi$ ставится в соответствие его часть площади грани $S_{\partial\varphi}$ с нормировкой $S_{\partial\sigma} = \sum_{\partial\varphi(\partial\sigma)} S_{\partial\varphi}$. На граничных ребрах $\partial\lambda$ определим также величины $S_{\partial\lambda} = \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)} S_{\partial\varphi}$ и $h_{\Sigma}(\partial\lambda) = S_{\partial\lambda} / h_{\tau}(\partial\lambda)$. Рассмотрим сетку $(\lambda).(\varphi)$, которая состоит из ребер λ с направленными вдоль них векторами $e_{\tau}(\lambda)$, упорядоченными в систему локальных базисов (φ) . К данной разностной сетке с метрическим оператором G_{τ} отнесем компоненты напряженности электрического поля w . Для сетки $(\lambda).(\varphi)$ вводится скалярное произведение: $(w_1, w_2)_{\lambda} = \sum_{\lambda} V_{\lambda} w_1(\lambda) w_2(\lambda)$ с весом $V_{\lambda} = \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} > 0$ (приреберный объем). Скалярное произведение $\int_O (w, b) dV$ в области O аппроксимируется следующим образом:

$$(\bar{w}, b')_{\lambda} = \sum_{\varphi} V_{\varphi} \sum_{\tilde{\lambda}(\varphi), \lambda(\varphi)} G_{\tau\varphi}'(\lambda, \tilde{\lambda}) w'(\tilde{\lambda}) b'(\lambda).$$

Здесь $\bar{w}(\lambda) = 1/V_{\lambda} \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi} \sum_{\tilde{\lambda}(\varphi)} G_{\tau\varphi}'(\lambda, \tilde{\lambda}) w'(\tilde{\lambda})$ (в операторной форме $\bar{w} = G_{\tau} w'$). Следовательно, на сетке $(\lambda).(\varphi)$ вводится самосопряженный положительно-определенный метрический сеточный оператор $G_{\tau} : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$, $G_{\tau} = G_{\tau}^* > 0$, задается семейством базисных матриц Грама $G_{\tau\varphi}'(\lambda, \tilde{\lambda}) = (e'_{\tau\varphi}(\lambda), e'_{\tau\varphi}(\tilde{\lambda}))$.

В данных матрицах $\mathbf{e}'_{\tau\varphi}(\lambda)$ — контравариантные в локальных базисах φ орты по отношению к ковариантным векторам $\mathbf{e}_\tau(\lambda)$, направленным вдоль ребер λ . Индексом τ помечаются величины, которые отнесены к сетке $(\lambda) \cdot (\varphi)$.

Определим разностный оператор, моделирующий ротор, который действует на компоненты напряженности электрического поля \mathbf{w} , как $\text{ROD} : (\lambda) \rightarrow (\sigma)$ по формуле (см. фиг. 2а), аппроксимирующей теорему Стокса:

$$(\text{ROD } \mathbf{w})' = 1/S(\sigma) \sum_{\lambda(\sigma)} s_\lambda(\sigma) w'(\lambda) h_\tau(\lambda). \quad (3.1)$$

Здесь $S(\sigma)$ — удельная площадь грани σ , знаковые функции $s_\lambda(\sigma) = \pm 1$ и $s_\sigma(\lambda) = \pm 1$ ($s_\lambda(\sigma) = s_\sigma(\lambda)$) определены, как указано на фиг. 2. Определим граничную знаковую функцию $s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} = +1$, при условии что вращение в направлении от орта $\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda)$ к его дополняющему (в базисе $\partial\varphi(\partial\sigma)$) дает направление внешней нормали к области O . Если же вращение в направлении от орта $\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda)$ к его дополняющему в этом поверхностном базисе дает направление внутренней нормали к этой области, то $s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} = -1$.

Вместе с сеточными компонентами магнитного поля $u'(\sigma)$ и $\bar{u}(\sigma)$ на гранях разностной сетки $(\sigma) \cdot (\varphi)$ в области O определим поверхностное тангенциальное магнитное поле \mathbf{u}_τ с компонентами $u'_\tau(\partial\lambda)$, которое задано на граничных ребрах $\partial\lambda$.

Для области O с поверхностью Σ используем следующее интегральное соотношение:

$$\int_O \mathbf{w} \text{rot } \mathbf{u} \, dV - \int_O \mathbf{u} \text{rot } \mathbf{w} \, dV = \int_\Sigma [\mathbf{u}_\tau \times \mathbf{w}] \, ds \quad (3.2)$$

и определим оператор, моделирующий ротор, который действует на компоненты напряженности магнитного поля \mathbf{u} , как $\text{ROG} : ((\sigma) \cup (\partial\lambda)) \rightarrow (\lambda)$ из разностного аналога этого соотношения

$$\left(w', \overline{\text{ROGu}} \right)_\lambda - \left(\bar{u}, (\text{RODw})' \right)_\sigma = \sum_{\partial\lambda} w'(\partial\lambda) h_\tau(\partial\lambda) (\mathbf{u} \, d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda). \quad (3.3)$$

Элемент поверхностной магнитной циркуляции, поперечной к ребру $\partial\lambda$ (между центрами тяжести поверхностных треугольных граней $\partial\sigma$ через середину их смежного ребра $\partial\lambda$), определим из аппроксимации произведения векторов $[\mathbf{u}_\tau \times \mathbf{w}] ds$:

$$(\mathbf{u} \, d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda) = -1 / h_\tau(\partial\lambda) \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)} \frac{s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} \cdot S_{\partial\varphi}}{\sqrt{\det \|\text{Gr}_{\tau\partial\varphi}\|}} u'_\tau(\partial\tilde{\lambda}) \Big|_{\partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi) \neq \partial\lambda}. \quad (3.4)$$

Определитель матрицы Грама $\text{Gr}_{\tau\partial\varphi}$ в поверхностном базисе $\partial\varphi$, который состоит из ортов $\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda)$ и $\mathbf{e}_\tau(\partial\tilde{\lambda})$, определяется следующим образом:

$$\det \|\text{Gr}_{\tau\partial\varphi}\| = (\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda), \mathbf{e}_\tau(\partial\tilde{\lambda})) \cdot (\mathbf{e}_\tau(\partial\tilde{\lambda}), \mathbf{e}_\tau(\partial\lambda)) \cdot \sin^2 \widehat{\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda) \mathbf{e}_\tau(\partial\tilde{\lambda})} \Big|_{\partial\lambda(\partial\varphi) \neq \partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi)}. \quad (3.5)$$

Здесь используется

$$\left[\left[\mathbf{e}'_{\tau\varphi}(\lambda) \times \mathbf{e}'_{\tau\varphi}(\tilde{\lambda}) \right] \right] = \sin(\pi - \varphi) / \left\{ |\mathbf{e}_\tau(\lambda)| \cdot |\mathbf{e}_\tau(\tilde{\lambda})| \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right\} = 1 / \sqrt{\det \|\text{Gr}_{\tau\partial\varphi}\|}$$

при $\varphi = \widehat{\mathbf{e}_\tau(\partial\lambda) \mathbf{e}_\tau(\partial\tilde{\lambda})}$.

Искомый оператор ROG , который сопряжен базовому оператору ROD , определяется из приведенного выше разностного аналога интегрального соотношения следующим образом:

$$\overline{\text{ROGu}} = 1/S'_\tau \times \left[\sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \bar{u}(\sigma) h'(\sigma) + (\mathbf{u} \, d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda) \right], \quad (3.6)$$

$$S'_\tau = V_\lambda / h_\tau.$$

На граничных ребрах $\partial\lambda = \{\partial_1 \lambda \mid \partial_0 \lambda\}$ зададим поверхностную магнитную циркуляцию $(\mathbf{u} \, d\mathbf{L})_\Sigma(\partial_1 \lambda)$, замыкающую контур вокруг ребра $\partial_1 \lambda$ в операторе ROG , — первая краевая задача, или поверхностную

электрическую циркуляцию $w'(\partial_0\lambda) \cdot h_\tau(\partial_0\lambda)$ вдоль ребра $\partial_0\lambda$, замыкающую соответствующий граничный контур в операторе ROD. Оператор $ROD\,ROG : (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, такой, что $ROD\,ROG = (ROD\,ROG)^* \geq 0$, является самосопряженным и неотрицательным (см. (3.3)). Самосопряженным и неотрицательным оказывается и оператор $ROG\,ROD : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$. Очевидны свойства операторов $DIV\,ROD\,w = 0$ в ячейках разностной сетки Ω , аппроксимирующих континуальные операции векторного анализа $div\,rot\,w = 0$.

3.2. Обоснование аппроксимаций интегрально-согласованных операций rot

Исследуем аппроксимацию формулы (3.6) для оператора \overline{ROGu} , которая получена из интегрального тождества (3.3).

На тетраэдрических сетках определяется вид магнитного циркуляционного контура вокруг ребра λ и его замкнутость. Рассмотрим контур магнитной циркуляции вокруг ребра λ с примыкающими к нему тетраэдрами. Центры ячеек, граней и ребер обозначим как

$$c_\Omega = \frac{1}{4} \sum_{\omega(\Omega)} r_\omega, \quad c_\sigma = \frac{1}{3} \sum_{\omega(\sigma)} r_\omega \quad \text{и} \quad c_\lambda = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\lambda)} r_\omega.$$

Здесь r_ω — радиус-векторы узлов сетки соответствующих вершин тетраэдра. Выбрав начало координат в вершине O (см. фиг. 1a), имеем

$$OC_\Omega = \frac{1}{4}(OA + OB + OD), \quad OC_\sigma = \frac{1}{3}(OA + OB + OD),$$

$$OC_\lambda = \frac{1}{2}(OA + OD), \quad C_\Omega C_\sigma = OC_\sigma - OC_\Omega.$$

Кроме того

$$S'_\tau \overline{ROGu} - (u\,dL)_\Sigma(\partial\lambda) = \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \bar{u}(\sigma) h'(\sigma) = \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) (Gu')(\sigma) h'(\sigma) =$$

$$= \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \frac{1}{V_\sigma} \sum_{\varphi(\sigma)} V_\varphi \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} Gr'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) u'(\tilde{\sigma}) \frac{V_\sigma}{S(\sigma)} = \sum_{\sigma(\lambda)} \frac{s_\sigma(\lambda)}{S(\sigma)} \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} V_\varphi e'_\varphi(\sigma) \cdot u_\varphi =$$

$$= \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} h_{\Omega\perp\sigma} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} e'_{1\varphi}(\sigma) \cdot u_\varphi.$$

Здесь $u_\varphi = \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} u'(\tilde{\sigma}) e'_\varphi(\tilde{\sigma})$; $h_{\Omega\perp\sigma}$ — высота в тетраэдрической ячейке Ω , опущенная на грань σ . Под $e'_{1\varphi}(\sigma)$ понимается контравариантный в локальном базисе φ вектор по отношению к ковариантной единичной нормали к грани $e_1(\sigma)$. Кроме того, имеет место следующее тождество:

$$\frac{1}{12} h_{\Omega\perp\sigma} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} e'_{1\varphi}(\sigma) = s_\sigma(\Omega) C_\Omega C_\sigma.$$

Поэтому, введя аппроксимацию циркуляции магнитного поля на элементе контура, соединяющего центры тяжести ячейки Ω и грани σ ,

$$s_\sigma(\Omega) \left(\int_{C_\Omega}^{C_\sigma} u\,dL \right)_\Delta = \frac{1}{12} h_{\Omega\perp\sigma} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} e'_{1\varphi}(\sigma) u_\varphi,$$

получим

$$S'_\tau \overline{ROGu} - (u\,dL)_\Sigma(\partial\lambda) = \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \cdot \left(\int_{C_\Omega}^{C_\sigma} u\,dL \right)_\Delta.$$

Рассмотрим согласованную с вектором Пойнтинга аппроксимацию циркуляции магнитного поля на элементе контура поверхностной грани $\partial\sigma$, который соединяет центры тяжести этой грани и середины ребра $\partial\lambda(\partial\sigma)$. Будет иметь место тождество

$$s_{\sigma}(\lambda)s_{\partial\sigma}\mathbf{C}_{\partial\sigma}\mathbf{C}_{\partial\lambda} = -1/h_{\tau}(\partial\lambda) \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)\in\partial\sigma} \frac{s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} \cdot S_{\partial\varphi}}{\sqrt{\det \|\text{Gr}_{\tau\partial\varphi}\|}} \mathbf{e}_{\tau}(\partial\tilde{\lambda}) \Big|_{\partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi)\neq\partial\lambda}.$$

Вектор $\mathbf{C}_{\partial\sigma}\mathbf{C}_{\partial\lambda}$ отложен от центра тяжести $C_{\partial\sigma}$ треугольной граничной грани $\partial\sigma$ к середине $C_{\partial\lambda}$ граничного ребра $\partial\lambda(\partial\sigma)$; $\partial\varphi$ — поверхностные базисы внутри грани $\partial\sigma$; $S_{\partial\varphi} = \frac{1}{3}S_{\partial\sigma\supset\partial\varphi}$; $S_{\partial\sigma\supset\partial\varphi}$ — площадь треугольной грани $\partial\sigma$, содержащей поверхностный базис $\partial\varphi$. Аналогично $s_{\sigma}(\Omega)$ введена граничная знаковая функция $s_{\partial\sigma}$, равная единице, когда нормаль $\mathbf{e}(\partial\sigma)$ — внешняя к аппроксимации области O , и минус единице, если нормаль $\mathbf{e}(\partial\sigma)$ — внутренняя к аппроксимации данной области.

Введя аппроксимации циркуляции магнитного поля на элементе контура $\mathbf{C}_{\partial\sigma}\mathbf{C}_{\partial\lambda}$ следующим образом:

$$s_{\sigma}(\lambda)s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{u} d\mathbf{L} \right)_{\Delta} = \frac{-1}{h_{\tau}(\partial\lambda)} \sum_{\partial\varphi(\partial\lambda)\in\partial\sigma} \frac{s_{\partial\lambda(\partial\varphi)} \cdot S_{\partial\varphi}}{\sqrt{\det \|\text{Gr}_{\tau\partial\varphi}\|}} u'_{\tau}(\partial\tilde{\lambda}) \Big|_{\partial\tilde{\lambda}(\partial\varphi)\neq\partial\lambda},$$

получим

$$S'_{\tau} \overline{\text{ROGu}} = \sum_{\sigma(\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma}(\Omega) \left(\int_{C_{\Omega}}^{C_{\sigma}} \mathbf{u} d\mathbf{L} \right)_{\Delta} + \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{u} d\mathbf{L} \right)_{\Delta}. \tag{3.7}$$

Таким образом, аппроксимация операции $S'_{\tau} \overline{\text{ROGu}}(\lambda)$ состоит из циркуляций магнитного поля на замкнутом контуре вокруг ребра λ , соединяющем центры тяжести ячеек и граней, или, когда грань $\partial\sigma$ оказывается граничной, то соединяющем центр тяжести такой грани с серединой ребра $\partial\lambda(\partial\sigma)$; $\text{ROGu} \equiv 0$ при $\mathbf{u} = \text{const}$ в силу замкнутости рассмотренного выше контура вокруг ребра λ .

4. СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МЕТОДА ОПОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим на достаточно гладких решениях аппроксимацию разностными схемами метода опорных операторов следующую задачу:

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \tag{4.1}$$

$$\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{E} \tag{4.2}$$

с соленоидальным магнитным полем, для которого существует некоторое поле \mathbf{E} и выполнено (4.2) (см. [12]). Предполагаем также явно заданными некоторое распределение плотностей токов $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ и граничные тангенциальные компоненты магнитного поля $\mathbf{H}_{\tau}|_{\Sigma}$. “Электрическое” поле \mathbf{E} определяется с точностью до константы, при этом однородная спектральная задача обладает нулевым собственным значением.

Для соленоидальности функции \mathbf{f} необходимо и достаточно [12] существование функции \mathbf{F} , такой что $\mathbf{f} = \text{rot}\mathbf{F}$. Рассмотрим для системы уравнений (4.1), (4.2) краевую задачу с заданными на границе Σ области O тангенциальными компонентами магнитного поля

$$\mathbf{H}_{\tau}|_{\Sigma} = \mathbf{F}_{\tau}|_{\Sigma}. \tag{4.3}$$

Для любого замкнутого контура Γ , ограничивающего поверхности Σ_{Γ} , выполняется

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{L} = \int_{\Sigma_{\Gamma}} \mathbf{f} d\mathbf{S}.$$

Разностная схема метода опорных операторов имеет вид

$$V_{\lambda} \overline{\text{ROGu}} = f_{\lambda}, \tag{4.4}$$

$$u' = (\text{ROD}\mathbf{w})'. \tag{4.5}$$

При исследовании сходимости разностной схемы (4.4), (4.5) удельные длины ребер $h_\tau(\lambda)$ и площадей граней $S(\sigma)$ считаем единичными.

Электрический поток f_λ через площадку $S_\lambda = \bigcup_{(\Omega(\lambda), \sigma(\lambda) \in \Omega)} S_{\Omega\sigma\lambda}$, которую пронизывает вектор $e_\tau(\lambda)$, представим в следующем виде:

$$f_\lambda = \sum_{\Omega(\lambda)} \sum_{\sigma(\lambda) \in \Omega} \int_{S_{\Omega\sigma\lambda}} \mathbf{f}(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \left(\int_{C_\Omega}^{C_\sigma} \mathbf{F} d\mathbf{L} \right) + \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_\sigma(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{F} d\mathbf{L} \right). \quad (4.6)$$

Здесь $S_{\Omega\sigma\lambda}$ — вектор площади треугольника, соединяющего центры тяжести ячейки C_Ω , грани C_σ и ребра C_λ , который ориентирован в сторону вектора $e_\tau(\lambda)$ (фиг. 1а). Равенство (4.6) получено с использованием теоремы Стокса для объединенного контура из треугольников S_λ вокруг ребра λ .

В силу рассуждений п. 3.2 считаем, что

$$f_\lambda = V_\lambda \overline{\text{ROGF}}, \quad (4.7)$$

полагая

$$\overline{F}(\sigma) h'(\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \left(\int_{C_\Omega}^{C_\sigma} \mathbf{F} d\mathbf{L} \right), \quad (4.8)$$

$$(\mathbf{F}d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda) = \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_\sigma(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{F} d\mathbf{L} \right). \quad (4.9)$$

В силу (4.3) при исследовании сходимости разностной схемы (4.4), (4.5) считаем

$$(\mathbf{u}d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda) = \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_\sigma(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{H} d\mathbf{L} \right), \quad (4.10)$$

$$\int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{H} d\mathbf{L} = \int_{C_{\partial\sigma}}^{C_{\partial\lambda}} \mathbf{F} d\mathbf{L}. \quad (4.11)$$

4.2. Разрешимость разностной задачи метода опорных операторов

Исследуем условия разрешимости задачи (4.4), (4.5), (4.11). Определим операцию внутренней ротации $\text{RNG} : (\sigma) \rightarrow (\lambda)$ как

$$S'_\tau \overline{\text{RNGu}} = \sum_{\sigma(\lambda)} s_\sigma(\lambda) \overline{u}(\sigma) h'(\sigma) = S'_\tau \overline{\text{ROGu}} - (\mathbf{u}d\mathbf{L})_\Sigma(\partial\lambda),$$

$$S'_\tau(\lambda) = V_\lambda / h_\tau(\lambda), \quad h'(\sigma) = V_\sigma / S(\sigma).$$

Из (3.3) следует

$$(w', \overline{\text{RNGu}})_\lambda = (\overline{u}, (\text{ROD}w)')_\sigma.$$

Однородная система уравнений, которая соответствует задаче (4.4), (4.5), (4.11), имеет следующий вид:

$$V_\lambda \overline{\text{RNGu}} = 0, \quad u' = (\text{ROD}w)'. \quad (4.12)$$

$$(w', \overline{\text{RNGu}})_\lambda = (\overline{u}, (\text{ROD}w)')_\sigma = (G(\text{ROD}w)', (\text{ROD}w)')_\sigma \geq 0.$$

Таким образом, оператор однородной системы $\text{RNG ROD} : (\lambda) \rightarrow (\lambda)$ самосопряжен и неотрицателен. Решение сопряженной однородной системы обладает свойством $(\text{ROD}w)' = 0$. Условие ортогональности с правой частью в (4.4) имеет следующий вид:

$$\sum_{\lambda} w'(\lambda)[f_{\lambda} - (\mathbf{u}d\mathbf{L})_{\Sigma}(\partial\lambda)] = 0,$$

или

$$(w', \overline{\text{RGNF}})_{\lambda} = (\overline{F}, (\text{ROD}\mathbf{w})')_{\sigma} = 0.$$

Поскольку $(\text{ROD}\mathbf{w})' = 0$, то для любого \mathbf{F} (в соленоидальном представлении $\mathbf{f} = \text{rot}\mathbf{F}$) выполнено условие ортогональности решения однородной сопряженной системы уравнений (4.12) и правой части (4.4) при условии (4.11). Данное условие и есть разрешимость задачи (4.4), (4.5), (4.11) по матричной теореме Фредгольма (см. [13]).

4.3. Точность разностной схемы метода опорных операторов

Рассмотрим вопрос о точности разностной схемы (4.4), (4.5), (4.11).

Проинтегрировав (4.1) по площадке S_{λ} вокруг ребра λ , получим

$$V_{\lambda} \overline{\text{ROGH}} = f_{\lambda},$$

где

$$\overline{H}(\sigma)h'(\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma}(\Omega) \left(\int_{C_{\Omega}} \mathbf{H}d\mathbf{L} \right), \quad (4.13)$$

$$(\mathbf{H}d\mathbf{L})_{\Sigma}(\partial\lambda) = \sum_{\partial\sigma(\partial\lambda)} s_{\sigma}(\lambda) s_{\partial\sigma} \left(\int_{C_{\partial\sigma}} \mathbf{H}d\mathbf{L} \right),$$

и, вычитая из этого уравнения (4.4), имеем

$$V_{\lambda} \overline{\text{RGN}(\mathbf{H} - \mathbf{u})} = 0. \quad (4.14)$$

Из (4.14) следует, что в ячейке Ω существует такая сеточная функция ξ_{Ω} , что

$$\overline{H} - \bar{u} = \overline{\text{GRAD}\xi} = \frac{\Delta\xi}{h'},$$

и она является постоянной на граничных гранях $\partial\sigma$, т.е. $\xi_{\partial\sigma} = \text{const}$. Эту константу можно считать равной нулю. Имеем уравнение, которому удовлетворяет функция ξ :

$$G^{-1} \overline{\text{GRAD}\xi} = H' - u', \quad G H' = \overline{H}.$$

Просуммировав данное равенство по граням ячейки Ω , и учитывая, что $\text{DIV}\mathbf{u} = 0$, имеем

$$\text{DIV}G\text{GRAD}\xi = \text{DIV}\mathbf{H},$$

в силу (2.2) с учетом $\xi_{\partial\sigma} = 0$ получим

$$(G(\text{GRAD}\xi)', (\text{GRAD}\xi)')_{\sigma} = (G(\text{GRAD}\xi)', H')_{\sigma} \geq 0.$$

Из (2.2) при $\xi_{\partial\sigma} = 0$ для любой разностной соленоидальной функции $\overline{\text{RODE}}$ в силу ее ортогональности к $\overline{\text{GRAD}\xi}$ имеем

$$\|\overline{\text{GRAD}\xi}\|_{\sigma}^2 = (G(\text{GRAD}\xi)', H' - (\text{RODE})')_{\sigma} \leq \|\overline{\text{GRAD}\xi}\|_{\sigma} \cdot \|H - \text{RODE}\|_{\sigma}.$$

Применительно к (3.1), определяющему $(\text{RODE})'$, получим

Из (4.14) следует, что в ячейке Ω существует такая сеточная функция ξ_{Ω} , что

$$\overline{H} - \bar{u} = \overline{\text{GRAD}\xi} = \frac{\Delta\xi}{h'},$$

и она является постоянной на граничных гранях $\partial\sigma$, т.е. $\xi_{\partial\sigma} = \text{const.}$. Эту константу можно считать равной нулю. Имеем уравнение, которому удовлетворяет функция ξ :

$$G^{-1}\overline{\text{GRAD}\xi} = H' - u', \quad G H' = \overline{H}.$$

Просуммировав данное равенство по граням ячейки Ω , и учитывая, что $\text{DIV}u = 0$, имеем

$$\text{DIV}G\text{GRAD}\xi = \text{DIV}H,$$

в силу (2.2) с учетом $\xi_{\partial\sigma} = 0$ получим

$$(G(\text{GRAD}\xi)', (\text{GRAD}\xi)')_{\sigma} = (G(\text{GRAD}\xi)', H')_{\sigma} \geq 0.$$

Из (2.2) при $\xi_{\partial\sigma} = 0$ для любой разностной соленоидальной функции $\overline{\text{RODE}}$ в силу ее ортогональности к $\overline{\text{GRAD}\xi}$ имеем

$$\|\text{GRAD}\xi\|_{\sigma}^2 = (G(\text{GRAD}\xi)', H' - (\text{RODE})')_{\sigma} \leq \|\text{GRAD}\xi\|_{\sigma} \cdot \|H - \text{RODE}\|_{\sigma}.$$

Применительно к (3.1), определяющему $(\text{RODE})'$, получим

$$E'(\lambda)h_{\tau}(\lambda) = \int_{\lambda} E dL, \quad (4.15)$$

и интегралы от точного решения E берутся вдоль ориентированных по $e_{\tau}(\lambda)$ ребер λ . Под нормами сеточных векторов на гранях σ понимаются $\|X\|_{\sigma} = \sqrt{(GX', X')_{\sigma}}$ и $\|X\|_* = \sqrt{(X, X)_*}$, $(X, Y)_* = \sum_{\sigma} X(\sigma) \cdot Y(\sigma)$.

Границы спектра самосопряженного положительно-определенного оператора $V_{\sigma}G : (\sigma) \rightarrow (\sigma)$, состоящего из матриц Грама $G\Gamma'_{\phi}(\sigma, \tilde{\sigma})$ во взаимных базисах, при условии невырожденности разностной сетки оцениваются следующим образом:

$$0 < \frac{\gamma_1}{h}(X, X)_* \leq (V_{\sigma}GX, X)_* \leq \frac{\gamma_2}{h}(X, X)_*.$$

Аналогичная оценка для обратного оператора принимает вид

$$0 < \frac{h}{\gamma_2}(X, X)_* \leq ((V_{\sigma}G)^{-1}X, X)_* \leq \frac{h}{\gamma_1}(X, X)_*.$$

Здесь γ_1 и γ_2 являются ограниченными, не стремящимися к нулю величинами, которые не зависят от шага разностной сетки.

Сетку считают невырожденной в следующих случаях.

1. Существует параметр h , характеризующий подробность разбиения расчетной области O и имеющий смысл линейных размеров элементов разностной сетки.

2. Неудельные размеры элементов разностной сетки равномерно оцениваются для всего семейства разностных сеток:

$$a_1 h^3 \leq V_{\Omega} \leq a_2 h^3, \quad b_1 h^2 \leq S(\sigma) \leq b_2 h^2, \quad c_1 h \leq h_{\tau}(\lambda) \leq c_2 h.$$

3. Отношение неудельных площадей граней $S(\sigma)$ и длин ребер $h_{\tau}(\lambda)$, входящих в один базис ϕ , равномерно по h не стремится к нулю и ограничено сверху числом A .

4. Среди двухгранных и плоских углов ячеек Ω нет слишком острых и слишком тупых, все они равномерно по h заключены в пределах от Θ до $\pi - \Theta$ с не стремящимся к нулю углом Θ .

Имеем

$$\|\text{GRAD}\xi\|_{\sigma}^2 \leq \|H - \text{RODE}\|_{\sigma}^2 = ((H' - (\text{RODE})'), (V_{\sigma}G)(H' - (\text{RODE})'))_* \leq \frac{h}{\gamma_1} \|(V_{\sigma}G)(H' - (\text{RODE})')\|_*^2.$$

На грани σ получим

$$[(V_{\sigma}G)H'](\sigma) = \overline{H}(\sigma)h'(\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} s_{\sigma}(\Omega) [\mathbf{H}_{\tau\sigma} \cdot \mathbf{C}_{\Omega} \mathbf{C}_{\sigma} + O(h^2)].$$

Здесь $\mathbf{H}_{c\sigma}$ — магнитное поле решения задачи (4.1), (4.2), (4.11) в центре тяжести C_σ грани σ (фиг. 1а). Согласно (3.1) и (4.15), на грани σ имеем

$$(\text{RODE})'(\tilde{\sigma}) = \frac{1}{S(\tilde{\sigma})} \sum_{\lambda(\tilde{\sigma})} s_\lambda(\tilde{\sigma}) \int_{\lambda} \mathbf{E} d\mathbf{L} = \frac{1}{S(\tilde{\sigma})} \int_{\tilde{\sigma}} \text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{S(\tilde{\sigma})} \int_{\tilde{\sigma}} \mathbf{H} d\mathbf{S} = [\mathbf{H}_{c\sigma} + O(h)] \mathbf{e}(\tilde{\sigma}).$$

Этот интеграл берется по ориентированной площади грани $S(\tilde{\sigma})\mathbf{e}(\tilde{\sigma})$ из шаблона оператора $V_\sigma G$ на грани σ ; $S(\tilde{\sigma})$ — удельная площадь грани $\tilde{\sigma}$.

На грани σ получим

$$[(V_\sigma G)\mathbf{e}](\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} V_\varphi G r'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) \mathbf{e}(\tilde{\sigma}) = \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} V_\varphi \mathbf{e}'_\varphi(\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \cdot \mathbf{C}_\Omega \mathbf{C}_\sigma.$$

Поэтому имеем

$$[(V_\sigma G)(\text{RODE})'](\sigma) = \sum_{\Omega(\sigma)} \sum_{\varphi(\sigma) \in \Omega} \sum_{\tilde{\sigma}(\varphi)} V_\varphi G r'_\varphi(\sigma, \tilde{\sigma}) [\mathbf{H}_{c\sigma} + O(h)] \mathbf{e}(\tilde{\sigma}) = \mathbf{H}_{c\sigma} \sum_{\Omega(\sigma)} s_\sigma(\Omega) \mathbf{C}_\Omega \mathbf{C}_\sigma + O(h^2).$$

Тогда

$$[(V_\sigma G)(H' - (\text{RODE})')](\sigma) = O(h^2)$$

или

$$\|H - u\|_\sigma^2 \leq \frac{h}{\gamma_1} \sum_{\sigma} O(h^4) = O(h^2),$$

поскольку слагаемых в суммировании \sum_{σ} содержится $O(h^{-3})$.

Окончательная оценка имеет следующий вид:

$$\|H - u\|_\sigma = O(h).$$

Данная оценка показывает сходимость задачи (4.4), (4.5), (4.11) к континуальной задаче (4.1), (4.2) с граничным условием $\mathbf{H}_\tau|_\Sigma$ с первым порядком точности на гладких решениях. При наличии сеточной пространственной симметрии порядок точности может быть повышен до второго. Примером такой сетки могут быть ячеечные параллелепипеды, центры которых соединены с центрами граней так, что при каждой из них образуется по четыре тетраэдра внутри параллелепипедной ячейки. При этом центры прямоугольной грани параллелепипеда соединяются с ее вершинами ребрами.

5. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

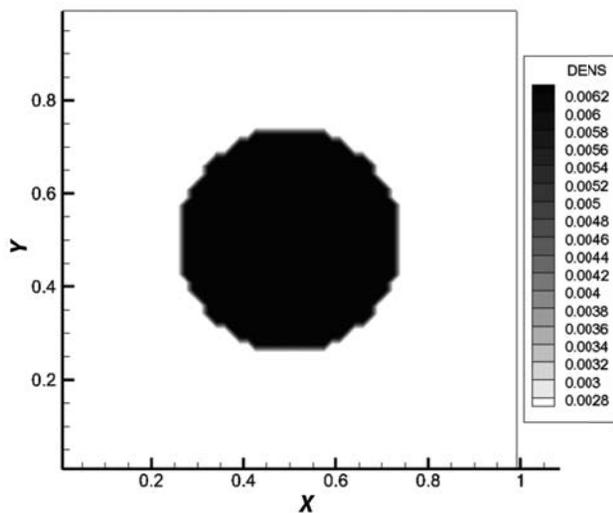
В данном разделе рассмотрим динамику электромагнитных полей, которая развивается на фоне ротационной диффузии вектора магнитного поля. Для данной задачи использовалась разностная схема на регулярной разностной сетке, подробно описанная в [7, 10, 14].

Исследуется сжатие вольфрамовой плазмы магнитными полями, заданными на границе области. В начальный момент времени неподвижная плазма с плотностью $\rho = \rho_0$ занимает цилиндр $\sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2} \leq 0.25$ см с осью $0 \leq z \leq 1$ см. Данный цилиндр вписан в куб с размерами $0 \leq x \leq 1$ см, $0 \leq y \leq 1$ см, $0 \leq z \leq 1$ см, внутри которого находится плазма с плотностью вне цилиндра $\rho = 0.4\rho_0$, где $\rho_0 = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{\pi}$ г/см³. Во всей расчетной области начальная температура $T_e = T_i = 0.8$ эВ.

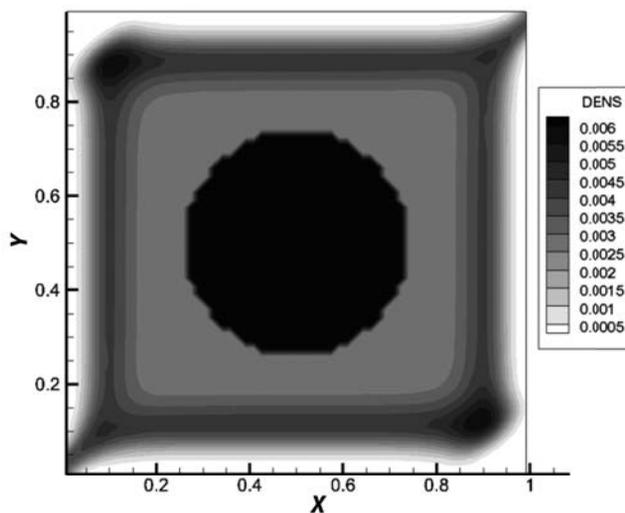
Профиль начальной плотности ($t = 0$) при $z = 0.5$ изображен на фиг. 3.

В работе исследуются компоненты вектора магнитного поля B_x, B_y, B_z , которые в начальный момент времени равны нулю: $B_x = 0, B_y = 0, B_z = 0$.

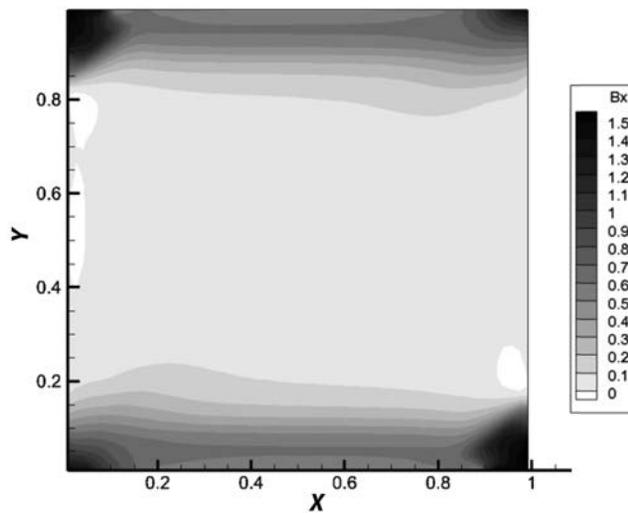
На внешней границе значения компонент вектора магнитного поля определены следующим образом:



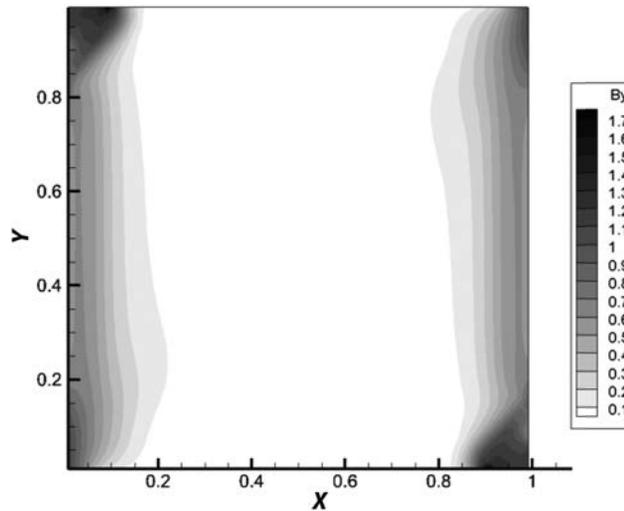
Фиг. 3. Начальное распределение плотности, $z = 0.5$.



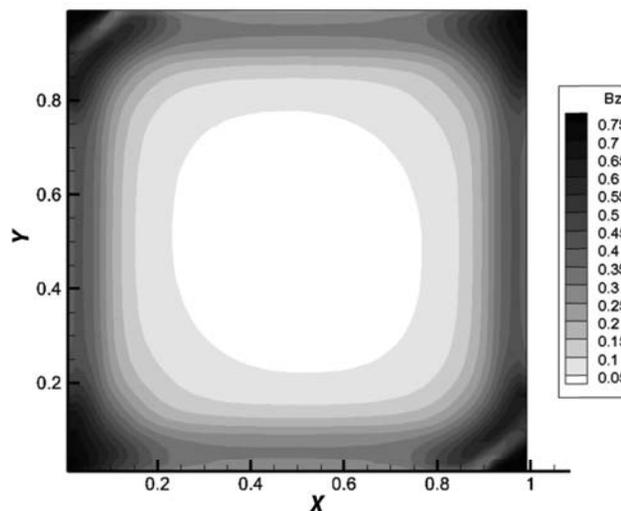
Фиг. 4. Распределение плотности на момент времени 0.05 мкс, $z = 0.5$.



Фиг. 5. Распределение компоненты магнитной индукции B_x на момент времени 0.05 мкс, $z = 0.5$.



Фиг. 6. Распределение компоненты магнитной индукции B_y на момент времени 0.05 мкс, $z = 0.5$.



Фиг. 7. Распределение компоненты магнитной индукции B_z на момент времени 0.05 мкс, $z = 0.5$.

$$B_{x_{zp}} = B_{x0} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{0.18}\right), \quad B_{y_{zp}} = B_{y0} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{0.18}\right), \quad B_{z_{zp}} = B_{z0} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{0.18}\right),$$

где $B_{x0} = 2$ МГц, $B_{y0} = 1.5$ МГц, $B_{z0} = 1$ МГц. Формулы справедливы при времени расчета $t \leq 0.18$ мкс. При $t > 0.18$ мкс все граничные поля равны нулю.

Уравнения состояния электронного и ионного газа, а также коэффициенты электронной и ионной теплопроводности, электропроводности и др. необходимые коэффициенты приводятся в работе [15].

Методика расчета была представлена в работе [16], теоретическое обоснование которой приведено в разд. 1–4 данной работы.

На фиг. 4–7 представлены результаты расчетов плотности и магнитных полей в момент времени 0.05 мкс. На фиг. 4 изображено распределение плотности, на котором можно увидеть, что под воздействием магнитных полей происходит сжатие плотности к центру расчетной области.

На фиг. 5–7 представлены компоненты магнитной индукции B_x, B_y, B_z . Асимметрия, которую можно увидеть на данных рисунках, возникла в результате определения различных значений констант B_{x0}, B_{y0}, B_{z0} . Как и следует из уравнений Максвелла, на фиг. 5 распределение компоненты магнитной

индукции B_y носит выраженный профильный характер, в то время как на фиг. 6 магнитная индукция B_y распределена латеральным образом.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе на классических решениях модельной магнитостатической задачи с первым порядком точности доказана сходимость разностных схем метода опорных операторов для повторных ротационных операций векторного анализа с нулевым собственным значением спектральной задачи. Сходимость доказана в сеточно-зависимых нормах, которые связаны с энергией метрического разностного оператора нерегулярной тетраэдрической сетки. Единственным ограничением, которое накладывается на тетраэдрическую разностную сетку, является ее невырожденность. В данной работе также приведено численное моделирование динамики электромагнитных полей для трехмерной задачи магнитной гидродинамики в двухтемпературном приближении, которая развивается на фоне ротационной диффузии магнитных полей. Для данной задачи скорость движения вещества и электромагнитные поля имеют полную конфигурацию: $U = (u, w, v)$, $B = (B_x, B_y, B_z)$, $E = (E_x, E_y, E_z)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галанин М. П., Савенков Е. Б. Методы численного анализа математических моделей. 2-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2018. 591 с.
2. Петров И. Б., Тормасов А. Г. О численном исследовании трехмерных задач обтекания волнами сжатия препятствия или полости в упругопластическом полупространстве // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 4. С. 817–820.
3. Бойков Д. С., Ольховская О. Г., Гасилов В. А. Моделирование газодинамических и упругопластических явлений при интенсивном энерговыделении в твердый материал // Матем. моделирование. 2021. Т. 33. № 12. С. 82–102.
4. Кербер М. Л., Виноградов В. М., Головкин Г. С. и др. Полимерные композиционные материалы: структура, свойства, технология. Учеб. пособие. СПб.: Профессия, 2008. 560 с.
5. Linde P., Schulz A., Rust W. Influence of modelling and solution methods on the FE-simulation of the post-buckling behaviour of stiffened aircraft fuselage panels // Composite Structures. 2006. V. 73. No. 2. P. 229–236.
6. Буланов И. М., Воробей В. В. Технология ракетных и аэрокосмических конструкций из композиционных материалов. Учеб. для вузов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1998. 516 с.
7. Самарский А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО «Критерий», 1996. 276 с.
8. Shashkov M. Conservative finite-difference methods on general grids. Boca Raton, FL: CRC Press, 1996. 359 p.
9. Lipnikov K., Manzini G., Shashkov M. Mimetic finite difference method // J. of Comput. Physics. 2013. V. 257. Part B. P. 1163–1227.
10. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. 424 с.
11. Повещенко Ю. А., Подрыга В. О., Шарова Ю. С. Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2018. № 160. 21 с.
12. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1973. 832 с.
13. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
14. Круковский А. Ю., Новиков В. Г., Цыгвинцев И. В. Численные алгоритмы для решения трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2014. № 6. 20 с.
15. Никифоров А. Ф., Новиков В. Г., Уваров В. Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: Физматлит, 2000. 400 с.
16. Poveshchenko Yu., Podryga V., Rahimly O. On some integral-consistent methods for calculating magnetohydrodynamic phenomena in problems of computational astrophysics // Math. Methods in the Appl. Sciences. 2020. V. 43. Issue 13. P. 7825–7833. DOI: 10.1002/mma.6349

УДК 512.643.8

ПОЛУЧЕНИЕ ИЗВЕСТНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О σ -КОММУТИРОВАНИИ ($\sigma \neq 0, \pm 1$) ТЁПЛИЦЕВОЙ И ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦ В РАМКАХ УНИФИЦИРОВАННОГО ПОДХОДА¹⁾

© 2024 г. В. Н. Чугунов^{1,*}, Х. Д. Икрамов^{2,**}

¹Москва, ИВМ РАН, Россия

²119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

*e-mail: chugunov.vadim@gmail.com

**e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 07.05.2023 г.

Переработанный вариант 07.05.2023г.

Принята к публикации 16.09.2023г.

В предыдущей публикации авторов был предложен унифицированный подход к конструированию пар матриц (T, H) , решающих задачу о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц. В данной статье этот подход применяется к выводу двух классов решений, полученных В. Н. Чугуновым ранее из частных соображений. Библ. 7.

Ключевые слова: тёплицева матрица, ганкелева матрица, σ -коммутирование, φ -циркулянт.

DOI: 10.31857/S0044466924010057, **DOI:** ZKAYOS

1. ВВЕДЕНИЕ

Тёплицевой называется комплексная $n \times n$ -матрица T , имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

а *ганкелевой* называется комплексная $n \times n$ -матрица H вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Переставив столбцы тёплицевой матрицы в обратном порядке, получим ганкелеву матрицу. Напротив, всякая ганкелева матрица H может быть получена указанным способом из соответствующей тёплицевой матрицы T . Эту связь между H и T можно описать матричным соотношением

$$H = TP_n,$$

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Чугунова В.Н. Московским центром фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (Соглашение № 075-15-2022-286 с Минобрнауки РФ).

где \mathcal{P}_n есть так называемая переединичная матрица:

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \dots \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Тёплицева матрица (1) называется *циркулянтом*, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

косым циркулянтом при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

φ -*циркулянтом*, когда

$$t_{-j} = \varphi t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $\varphi \in \mathbb{C}$.

Матрицы K и M σ -коммутируют (или квазикоммутируют), если найдется такое число σ , что $KM = \sigma MK$ (см. [1]). В этой же работе [1] отмечается, что квазикоммутативность является важным соотношением в квантовой физике ([2,3]), а также в теории представлений аффинных алгебр Гекке (Hecke) ([4]).

Задача о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц заключается в описании пар ненулевых матриц (T, H) таких, что T — тёплицева, H — ганкелева и выполняется соотношение

$$TH = \sigma HT. \quad (3)$$

Необходимо сказать несколько слов о параметре σ . Произвольный выбор σ возможен лишь в случае, когда хотя бы одна из матриц T или H вырождена. Если же обе матрицы невырождены, то σ является одним из корней n -й степени из единицы. В данной работе от параметра σ мы требуем, чтобы $\sigma \neq 0, \pm 1$.

Заметим, что, так как след произведения двух матриц не меняется при перестановке сомножителей и $\sigma \neq 1$, то матрицы TH и HT имеют нулевой след.

В работе [5] сформулирована и доказана следующая

Теорема 1. *Ненулевые тёплицева матрица T и ганкелева матрица H σ -коммутируют ($\sigma \neq 0, \pm 1$), если T и H входят хотя бы в один из описываемых ниже классов:*

Класс 1. Матрица T является циркулянтом

$$T = F_n^* D_1 F_n,$$

а H — ганкелевым циркулянтом

$$H = F_n^* D_2 F_n P_n.$$

Здесь F_n — (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \dots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \dots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \dots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ — первообразный корень n -й степени из единицы; $D_1 = \text{diag}(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)})$

и $D_2 = \text{diag}(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)})$ — диагональные матрицы; при этом

$$d_1^{(2)}d_1^{(1)} = 0,$$

$$d_j^{(2)}(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+2-j}^{(1)}) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Класс 2. Матрица T является косым циркулянтном

$$T = G_{-1}F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

а H — ганкелевым косым циркулянтном

$$H = G_{-1}F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* P_n,$$

где

$$G_{-1} = \text{diag}(1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{n-1}),$$

$\psi = e^{\frac{i\pi}{n}}$ — корень n -й степени из (-1) . Диагональные матрицы $D_1 = \text{diag}(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)})$

и $D_2 = \text{diag}(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)})$ должны удовлетворять соотношениям

$$d_1^{(2)}(d_1^{(1)} - \sigma d_2^{(1)}) = 0, \quad d_2^{(2)}(d_2^{(1)} - \sigma d_1^{(1)}) = 0,$$

$$d_j^{(2)}(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+3-j}^{(1)}) = 0, \quad j = 3, 4, \dots, n.$$

Класс 3. Пусть $n = 2r$, матрицы T и H имеют вид

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \sigma P_r \end{pmatrix},$$

где α и β — произвольные числа, $0_{r,r}$ — нулевая $r \times r$ -матрица.

Класс 4. Пусть $n = 2r$, матрицы T и H имеют вид

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \sigma P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & P_r \end{pmatrix}.$$

Здесь α и β — произвольные числа.

Матричные классы, описанные в этой теореме, найдены из разных соображений, а именно благодаря искусственно придуманным ограничениям на форму тёплицевой и ганкелевой матриц. Они соответствуют наиболее простым множествам решений. Однако в [6] авторами предложен унифицированный подход к получению полного решения. Сущность его состоит в сужении множества всех пар матриц (T, H) до множества, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи, после чего задача о σ -коммутировании исследуется на каждой конкретной более узкой комбинации наборов (T, H) . В упомянутой работе [6] в рамках новой схемы строится множество решений рассматриваемой задачи, являющееся частным случаем объединения классов 3 и 4 теоремы 1:

Теорема 2. *Ненулевые тёплицева матрица T и ганкелева матрица H σ -коммутируют при $\sigma = ik$, $k = \pm 1$, если эти матрицы имеют четный порядок $n = 2r$ и следующий вид:*

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 + \kappa\nu)I_r \\ i(\nu - \kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$H = \beta \begin{pmatrix} P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & i\nu P_r \end{pmatrix},$$

где $\nu = \pm 1$, α и β — произвольные числа.

Цель настоящей публикации — показать, что все пары матриц из классов 3 и 4 теоремы 1 также могут быть получены на основе метода, изложенного в [6].

Структура статьи следующая. В разд. 2 кратко изложен прием сужения множества всех пар матриц (T, H) до множеств, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи; далее в разд. 3 демонстрируется применение этого приема к выводу в полном объеме классов 3 и 4 теоремы 1.

Для дальнейшего нам понадобится следующий факт.

Лемма 1 (см. [7]). *Две нескаларные тѐплицевы матрицы \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 коммутируют тогда и только тогда, когда \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 принадлежат хотя бы одному из следующих классов:*

Класс 1'. Обе матрицы \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 верхнетреугольные или же обе нижнетреугольные.

Класс 2'. Матрицы \tilde{T}_1 и \tilde{T}_2 суть φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$.

Класс 3'. Одна из матриц \tilde{T}_1 или \tilde{T}_2 является линейной функцией от другой.

2. КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О σ -КОММУТИРОВАНИИ ТѐПЛИЦЕВОЙ И ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦ

Здесь мы кратко напомним предложенный в [6] процесс построения множеств наборов пар матриц (T, H) , объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи. Основную роль в этом процессе играет следующее утверждение.

Лемма 2 (см. [6]). *Всякую пару (T, H) , решающую задачу о σ -коммутировании тѐплицевой и ганкелевой матриц, можно представить в виде*

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 (A - \sigma A^T), \\ H &= \beta_1 B P_n, \end{aligned} \quad (4)$$

где A и B — нескаларные тѐплицевы матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} AB &= BA, \\ A^T B + B A^T &= \mu AB, \\ \mu &= \frac{1 + \sigma^2}{\sigma}, \\ \mu &\neq \pm 2, \end{aligned} \quad (5)$$

α_1, β_1 — произвольные числа.

Сформулированная лемма позволяет считать основным уравнением соотношение

$$A^T B + B A^T = \mu AB. \quad (6)$$

Обозначим элементы первой строки матрицы A через a_0, a_1, \dots, a_{n-1} , а элементы ее первого столбца — через $a_0, a_{-1}, \dots, a_{-(n-1)}$. Аналогично, элементы первой строки матрицы B обозначим через b_0, b_1, \dots, b_{n-1} , а элементы первого столбца — через $b_0, b_{-1}, \dots, b_{-(n-1)}$.

Согласно лемме 1, для коммутирующих тѐплицевых матриц A и B возможны лишь следующие четыре случая: 1) обе матрицы A и B являются верхними треугольными; 2) обе матрицы A и B — нижние треугольные; 3) обе матрицы A и B суть φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$; 4) $B = \theta A + \omega I_n$.

Для получения классов 3 и 4 теоремы 1 мы уделим особое внимание третьему случаю, а именно рассмотрим уравнение (6), когда A и B — φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0, \pm 1$. Матрица в правой части является тѐплицевой, значит, и матрица в левой части должна быть тѐплицевой, что может быть достигнуто благодаря лемме 3.

Лемма 3 (см. [6]). *Пусть A и B — φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0, \pm 1$. Матрица $A^T B + B A^T$ является тѐплицевой тогда и только тогда, когда A и B представимы в виде*

$$A = \gamma (a_0 I_n + U^c + \varphi U^T), \quad B = \delta (b_0 I_n + U + \varphi U^{cT}), \quad (7)$$

где U и U^c — строго верхние треугольные тёплицевы матрицы с элементами первых строк $0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ и $0, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1$ соответственно, а γ и δ — произвольные числа.

Кроме того, матрица в правой части соотношения (6) является φ -циркулянтном как произведение φ -циркулянтов, поэтому и в его левой части должен стоять φ -циркулянт. Условия для этого дает

Лемма 4 (см. [6]). Пусть A и B — φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0, \pm 1$. Матрица $A^T B + B A^T$ является φ -циркулянтном тогда и только тогда, когда B — скалярное кратное инволютивного φ -циркулянта.

Так как матрица B может быть определена с точностью до скалярного кратного, то, не ограничивая общности, будем считать, что B — инволютивный φ -циркулянт.

Учитывая коммутирование матриц A и B , перепишем решаемое уравнение в виде

$$\left(A^T - \frac{\mu}{2} A \right) B + B \left(A^T - \frac{\mu}{2} A \right) = 0,$$

или, в силу инволютивности B ,

$$B \left(A^T - \frac{\mu}{2} A \right) B = - \left(A^T - \frac{\mu}{2} A \right).$$

При преобразовании подобия след матрицы не меняется, поэтому матрица $A^T - \frac{\mu}{2} A$ имеет нулевой след, а из ее тёплицевости следует, что $\left(1 - \frac{\mu}{2} \right) a_0 = 0$ и, так как $\mu \neq 2$, то $a_0 = 0$. Благодаря леммам 3 и 4 можем записать выражения для матриц A и B в виде

$$A = \gamma \left(U^c + \varphi U^T \right), \quad B = \delta \left(b_0 I_n + U + \varphi U^{cT} \right).$$

Так как из уравнения (6) следует, что матрицы A и B могут быть определены с точностью до скалярного кратного, то, используя (7), будем считать справедливым следующее представление

$$A = U^c + \varphi U^T, \quad B = b_0 I_n + U + \varphi U^{cT}. \tag{8}$$

3. ВЫВОД КЛАССОВ 3 И 4

В данном разделе на основании выражений (8) для матриц A и B покажем, что классы 3 и 4 теоремы 1 являются решением задачи о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц в случае $A = B - b_0 I_n$. Уравнение (6) приобретает вид

$$(B - b_0 I_n)^T B + B (B - b_0 I_n)^T = \mu (B - b_0 I_n) B,$$

упрощаемый до соотношения

$$B^T B + B B^T = \mu I_n + (2 - \mu) b_0 B. \tag{9}$$

Введем циркулянт C и косой циркулянт S с одинаковой первой строкой

$$\frac{1}{2} (0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}).$$

С помощью этих матриц можем записать выражения для U и U^c

$$U = C + S, \quad U^c = C^T - S^T, \tag{10}$$

откуда

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} (U + U^{cT}), \\ S &= \frac{1}{2} (U - U^{cT}). \end{aligned} \tag{11}$$

Использование (8) и (10) позволяет представить матрицы B и A как

$$\begin{aligned} B &= b_0 I_n + U + \varphi U^{cT} = b_0 I_n + C + S + \varphi(C - S) = b_0 I_n + (1 + \varphi)C + (1 - \varphi)S, \\ A &= U^c + \varphi U^T = C^T - S^T + \varphi C^T + \varphi S^T = (1 + \varphi)C^T - (1 - \varphi)S^T. \end{aligned}$$

Так как $A = B - b_0 I_n$, то $C^T = C$ и $S^T = -S$.

Подставляя выражение для B в уравнение (9), получаем условие

$$\begin{aligned} &(b_0 I_n + (1 + \varphi)C + (1 - \varphi)S) \times (b_0 I_n + (1 + \varphi)C - (1 - \varphi)S) + \\ &+ (b_0 I_n + (1 + \varphi)C - (1 - \varphi)S) \times (b_0 I_n + (1 + \varphi)C + (1 - \varphi)S) = \\ &= \mu I_n + (2 - \mu)b_0 \times (b_0 I_n + (1 + \varphi)C + (1 - \varphi)S). \end{aligned}$$

Раскроем здесь скобки:

$$\begin{aligned} &2b_0^2 I_n + 4b_0(1 + \varphi)C + 2(1 + \varphi)^2 C^2 - 2(1 - \varphi)^2 S^2 + (1 - \varphi^2) \times (SC - CS + CS - SC) = \\ &= 2b_0^2 I_n + (1 - b_0^2)\mu I_n + (2 - \mu)b_0 \times (1 + \varphi)C + (2 - \mu)b_0(1 - \varphi)S. \end{aligned}$$

Это соотношение может быть записано в виде

$$(2 + \mu)b_0(1 + \varphi)C + 2(1 + \varphi)^2 C^2 = (1 - b_0^2)\mu I_n + (2 - \mu)b_0 \times (1 - \varphi)S + 2(1 - \varphi)^2 S^2.$$

Матрица, стоящая в левой части, является циркулянтном, а матрица в правой части — косым циркулянтном, поэтому последнее равенство возможно лишь в виде системы

$$\begin{aligned} (2 + \mu)b_0(1 + \varphi)C + 2(1 + \varphi)^2 C^2 &= \xi I_n, \\ (2 - \mu)b_0(1 - \varphi)S + 2(1 - \varphi)^2 S^2 &= \left(\xi - (1 - b_0^2)\mu\right) I_n. \end{aligned}$$

Деля первое уравнение на $(1 + \varphi)^2 / 2$, а второе на $(1 - \varphi)^2 / 2$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{(2 + \mu)b_0}{(1 + \varphi)} 2C + 4C^2 &= \frac{2\xi}{(1 + \varphi)^2} I_n, \\ \frac{(2 - \mu)b_0}{(1 - \varphi)} 2S + 4S^2 &= \frac{2(\xi - (1 - b_0^2)\mu)}{(1 - \varphi)^2} I_n, \end{aligned}$$

а с учетом (11) имеем совокупность уравнений

$$\begin{aligned} \frac{(2 + \mu)b_0}{(1 + \varphi)} (U + U^{cT}) + (U + U^{cT})^2 &= \frac{2\xi}{(1 + \varphi)^2} I_n, \\ \frac{(2 - \mu)b_0}{(1 - \varphi)} (U - U^{cT}) + (U - U^{cT})^2 &= \frac{2(\xi - (1 - b_0^2)\mu)}{(1 - \varphi)^2} I_n, \end{aligned}$$

или систему

$$\begin{aligned} \frac{(2 + \mu)b_0}{(1 + \varphi)} U + \frac{(2 + \mu)b_0}{(1 + \varphi)} U^{cT} + U^2 + UU^{cT} + U^{cT}U + (U^{cT})^2 &= \frac{2\xi}{(1 + \varphi)^2} I_n, \\ \frac{(2 - \mu)b_0}{(1 - \varphi)} U - \frac{(2 - \mu)b_0}{(1 - \varphi)} U^{cT} + U^2 - UU^{cT} - U^{cT}U + (U^{cT})^2 &= \frac{2(\xi - (1 - b_0^2)\mu)}{(1 - \varphi)^2} I_n. \end{aligned}$$

Сумму уравнений этой системы

$$\frac{(4 - 2\varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U + \frac{(-4\varphi + 2\mu)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U^{cT} + 2U^2 + 2(U^{cT})^2 = \frac{2(1 - \varphi^2)\xi + 2(\xi - (1 - b_0^2)\mu)(1 + \varphi)^2}{(1 + \varphi)^2(1 - \varphi)^2}I_n$$

после деления на 2 запишем в виде

$$\frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U + \frac{(\mu - 2\varphi)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U^{cT} + U^2 + (U^{cT})^2 = \frac{(1 - \varphi^2)\xi + (\xi - (1 - b_0^2)\mu)(1 + \varphi)^2}{(1 + \varphi)^2(1 - \varphi)^2}I_n.$$

Так как U — трёхдиагональная строго верхняя треугольная матрица, то последнее соотношение эквивалентно системе

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \varphi^2)\xi + (\xi - (1 - b_0^2)\mu)(1 + \varphi)^2}{(1 + \varphi)^2(1 - \varphi)^2}I_n &= 0, \\ \frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U + U^2 &= 0, \\ \frac{(\mu - 2\varphi)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}U^{cT} + (U^{cT})^2 &= 0, \end{aligned}$$

которая может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} \frac{(1 - \varphi^2)\xi + (\xi - (1 - b_0^2)\mu)(1 + \varphi)^2}{(1 + \varphi)^2(1 - \varphi)^2}I_n &= 0, \\ \left(\frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}I_n + U \right)U &= 0, \\ \left(\frac{(\mu - 2\varphi)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}I_n + U^{cT} \right)U^{cT} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим второе уравнение системы (12). Если величина $\frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}$ не равна нулю, то матрица $\frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}I_n + U$ невырождена и $U = 0$. Следовательно, для получения решения в рассматриваемом случае должно выполняться равенство

$$\frac{(2 - \varphi\mu)b_0}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)} = 0. \tag{13}$$

Рассуждая аналогично относительно третьего уравнения системы (12), заключаем, что если выражение $\frac{(\mu - 2\varphi)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)}$ отлично от нуля, то $U^{cT} = 0$ и потому $U = 0$. Значит, нужно наложить ограничение

$$\frac{(\mu - 2\varphi)b_0\varphi}{(1 + \varphi)(1 - \varphi)} = 0. \tag{14}$$

Так как $\varphi \neq 0, \pm 1$, то условия (13) и (14) можно записать как систему

$$\begin{aligned} (2 - \varphi\mu)b_0 &= 0, \\ (\mu - 2\varphi)b_0 &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет только решение $b_0 = 0$. Если же $b_0 \neq 0$, то $\mu = 2\varphi$ и должно выполняться соотношение $\varphi^2 = 1$, что противоречит условию задачи. Итак, $b_0 = 0$ и система (12) сводится к виду

$$U^2 = (U^{cT})^2 = 0. \quad (15)$$

Для исследования этих условий будем различать случаи четного и нечетного порядка n . Если $n = 2r + 1$, то условие $U^2 = 0$ влечет за собой равенства $\{U\}_{1,2} = \{U\}_{1,3} = \dots = \{U\}_{1,r+1} = 0$, или $u_1 = u_2 = \dots = u_r = 0$, а условие $(U^c)^2 = 0$ влечет соотношения $\{U^c\}_{1,2} = \{U^c\}_{1,3} = \dots = \{U^c\}_{1,r+1} = 0$, или $u_{n-1} = u_{n-2} = \dots = u_{r+1} = 0$, что в совокупности означает $U = 0$.

При $n = 2r$ условия (15) позволяют указать следующий вид матрицы U :

$$U = \nu \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

В этом случае $U = U^c$, матрицы A и B совпадают и являются скалярным кратным матрицы

$$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы A и B в уравнении (6) определены с точностью до скалярных множителей, то это уравнение, расписанное как

$$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \mu \varphi \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & I_r \end{pmatrix},$$

преобразуется к виду

$$\begin{pmatrix} \varphi^2 I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & I_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \varphi^2 I_r \end{pmatrix} = \mu \varphi \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & I_r \end{pmatrix},$$

что можно записать как

$$\begin{pmatrix} (\varphi^2 + 1)I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & (\varphi^2 + 1)I_r \end{pmatrix} = \mu \varphi \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & I_r \end{pmatrix}.$$

Приходим к соотношению

$$\varphi^2 + 1 = \mu \varphi.$$

В силу определения μ оно эквивалентно равенству

$$\frac{1 + \varphi^2}{\varphi} = \frac{1 + \sigma^2}{\sigma},$$

которое, благодаря условиям $\varphi \neq 0$ и $\sigma \neq 0$, можно преобразовать к виду

$$\sigma + \varphi^2 \sigma - \varphi - \sigma^2 \varphi = 0,$$

или

$$(\sigma - \varphi)(1 - \varphi \sigma) = 0.$$

Последнее равенство возможно, если

$$\sigma = \varphi \text{ или } \sigma = \frac{1}{\varphi}.$$

Используя лемму 2, получаем

$$T = \alpha_1 [A - \sigma A^T] = \alpha_1 \left[\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \right] = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 - \sigma\varphi)I_r \\ (\varphi - \sigma)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$H = \beta_1 B P_n = \beta_1 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} P_n = \beta_1 \begin{pmatrix} P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \varphi P_r \end{pmatrix}.$$

Если $\sigma = \varphi$, то, положив $\alpha_1 = \frac{\alpha}{1 - \varphi^2}$ и $\beta_1 = \beta$, имеем

$$T = \frac{\alpha}{1 - \varphi^2} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 - \varphi^2)I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$H = \beta \begin{pmatrix} P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \varphi P_r \end{pmatrix};$$

$$TH = \alpha\beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi P_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$HT = \alpha\beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & P_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$TH = \varphi HT.$$

Матрицы T и H являются σ -коммутирующими для $\sigma = \varphi$. Приходим к классу 3 теоремы 1.

При $\sigma = \frac{1}{\varphi}$ для $\alpha_1 = \frac{\alpha\varphi}{\varphi^2 - 1}$ и $\beta_1 = \beta$

$$T = \frac{\alpha\varphi}{\varphi^2 - 1} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \left(\varphi - \frac{1}{\varphi}\right)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$H = \beta \begin{pmatrix} P_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \varphi P_r \end{pmatrix};$$

$$TH = \alpha\beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ P_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$HT = \alpha\beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \varphi P_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Теперь

$$TH = \frac{1}{\varphi} HT.$$

Матрицы T и H являются σ -коммутирующими для $\sigma = \frac{1}{\varphi}$. Получаем класс 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guterman A. E., Markova O. V., Mehrmann V.* Length realizability for pairs of quasi-commuting matrices// *Linear Algebra and Appl.* 2019. V. 568. P. 135–154.
2. *Kassel C.* *Quantum Groups*, Grad. Texts in Math. V. 155. New York: Springer-Verlag, 1995.
3. *Manin Yu. I.* *Quantum Groups and Non-commutative Geometry*. CRM. Montréal. 1988.
4. *Chriss N., Ginzburg V.* *Representation Theory and Complex Geometry*. Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 1997.
5. *Чугунов В. Н.* О некоторых множествах пар σ -коммутирующих ($\sigma \neq 0, \pm 1$) трёхмерной и ганкелевой матриц // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXXII. Зап. научн. сем. ПОМИ. Т. 482, ПОМИ, СПб. 2019. С. 288–294.
6. *Чугунов В. Н., Икрамов Х. Д.* Об одном частном решении задачи о σ -коммутировании ($\sigma \neq 0, \pm 1$) трёхмерной и ганкелевой матриц // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 63. № 11. С. 1817–1828.
7. *Гельфгат В. И.* Условия коммутирования трёхмерных матриц // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1998. Т. 38. № 1. С. 11–14.

О СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПАНЕЛИ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ¹⁾

© 2024 г. К. С. Бормотин^{1,*}

¹681013 Комсомольск-на-Амуре, пр-т Ленина, 27,
Комсомольский-на-Амуре государственный университет, Россия
*e-mail: cvmi@knastu.ru

Поступила в редакцию 02.06.2023 г.
Переработанный вариант 28.07.2023 г.
Принята к публикации 16.09.2023 г.

Для численного решения задач оптимального управления в процессах формообразования элементов конструкций в ползучести рассматривается метод динамического программирования. Предлагается реализация разработанного метода в комплексе программ конечно-элементного анализа. Приводится анализ устойчивости данного метода. Библ. 25. Фиг. 7.

Ключевые слова: задачи оптимального управления, формообразование, метод динамического программирования, метод конечных элементов, ползучесть.

DOI: 10.31857/S0044466924010066, **EDN:** ZJYLKT

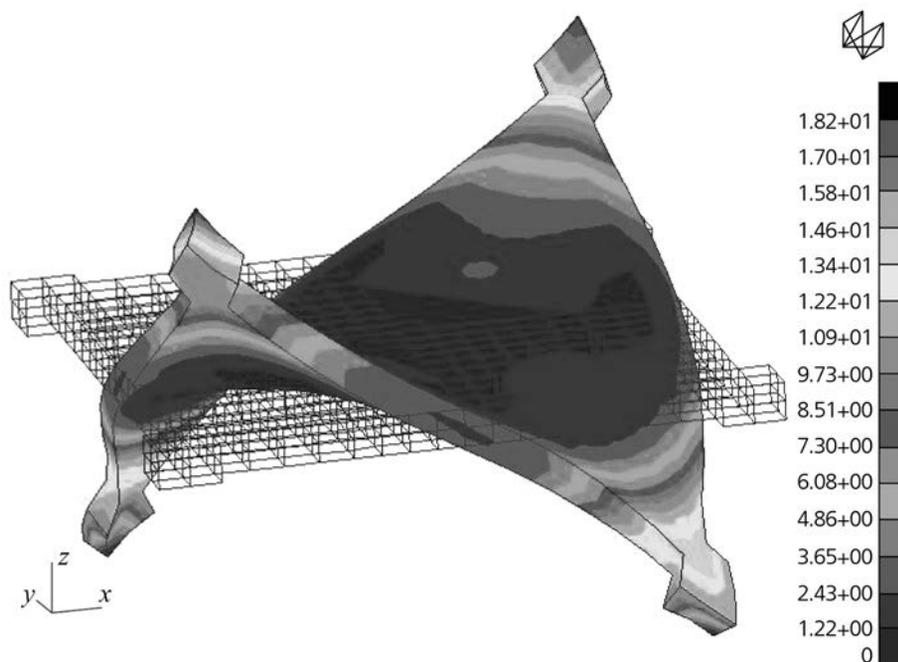
ВВЕДЕНИЕ

В технологиях формообразования монолитных деталей могут использоваться медленные высокотемпературные режимы деформирования (см. [1–5]). Данные режимы в ползучести позволяют управлять повреждаемостью за счет выбора кинематической схемы деформирования и сберечь ресурс изделий на стадии изготовления. В результате возникает задача о нахождении оптимального пути деформирования, приводящего за заданное время к заданным остаточным деформациям при наименьшей поврежденности (см. [6]).

Актуальна оптимизация кинематических схем для оборудования с числовым программным управлением, в частности для реконфигурируемого стержневого пуансона (матрицы) (см. [7; 8]). Формующая поверхность как пуансона, так и матрицы, образованная двумя системами соосно расположенных стержней, позволяет адаптировать оснастку для изготовления деталей из листов различной конфигурации. Современные изделия, получаемые путем формообразования, могут иметь сложную внутреннюю гравюру, вырезы, ребра жесткости и обладать такими свойствами как анизотропия, разное сопротивление растяжению и сжатию (см. [9; 10]). В этом случае для определения оптимальных условий процесса формирования геометрии заготовок актуальны численные методы. В предлагаемом методе, основанном на методе динамического программирования в отличие от [11], допустимое пространство решений задач оптимального управления включает немонотонные траектории деформирования, учитывающие частичную разгрузку.

С помощью разработанного численного метода определяются рациональные кинематические режимы формования заготовок, которые сравниваются с известными аналитическими решениями для идеальных пластин и оболочек (см. [6; 12]). При анализе алгоритма численного решения задач оптимального управления рассматривается проблема устойчивости и определяется зависимость решения от характера дробления шагов разностной схемы.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 21-11-00165).



Фиг. 1. Деформированная конфигурация пластинки и распределение значений работы рассеяния.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ФОРМООБРАЗОВАНИИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Пусть $V \subset R^3$ — область деформируемого тела с границей S . Поверхность с заданными кинематическими условиями обозначается через S^* ($S^* \subset S$). Обозначим через $u = (u_1, u_2, u_3)$ вектор перемещений деформируемого тела.

Математическая формулировка задачи формообразования в условиях ползучести с учетом малых деформаций, но больших перемещений и поворотов (общая Лагранжева формулировка, см. [13]) представляется в виде квазистатического вариационного принципа с функционалом

$$J(\dot{u}) = a(\dot{u}, \dot{u}) \text{ при } \dot{u}|_{S^*} = \dot{u}^*, \quad (1.1)$$

где \dot{u}^* — заданные скорости перемещений в момент времени t ; $t \in [0, T]$ — время деформирования тела под нагрузкой; потенциальная форма определяется в виде $a(\dot{u}, \delta\dot{u}) = \int_V [\partial E(\dot{u}_{i,j}) / \partial \dot{u}_{i,j}] \delta \dot{u}_{i,j} dV$, где $E(\dot{u}_{i,j}) = (1/2)c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{pl} - c_{ijpl} \dot{\epsilon}_{ij} \eta_{pl} + (1/2)\sigma_{ij} \dot{u}_{p,i} \dot{u}_{p,j}$, c_{ijpl} — компоненты тензора упругих констант, $\dot{\epsilon}_{ij} = (1/2)(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{p,i} u_{p,j} + u_{p,i} \dot{u}_{p,j})$ — компоненты скоростей деформаций, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$; η_{pl} — компоненты скоростей деформаций ползучести, определяемые по закону установившейся ползучести (см. [13]):

$$\eta_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{n-1} s_{ij}, \quad (1.2)$$

s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений, $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$ — эффективное напряжение (интенсивность напряжений), B, n — константы материала; точкой сверху обозначены скорости перемещений \dot{u}_i , $i, j, p, l = 1, 2, 3$.

Компоненты скорости второго тензора напряжений Пиола–Кирхгофа определяются соотношениями

$$\dot{\sigma}_{ij} = c_{ijpl} (\dot{\epsilon}_{pl} - \eta_{pl}).$$

Таким образом, математическая формулировка задачи оптимального управления включает уравнения механики деформируемого твердого тела, полученные из условий стационарности (1.1), и функционал оптимизации:

$$A = \max_V \int_0^T \sigma_{ij} \eta_{ij} dt \rightarrow \inf. \quad (1.3)$$

Данный функционал представляет максимальное значение работы рассеяния и характеризует параметр поврежденности (см. [14]).

В качестве функций управления принимаются перемещения $u(t) = f(t)u^*$, заданные на границе S^* , а в качестве функции состояния — перемещения, деформации, напряжения в теле V . Таким образом, определив некоторое решение u^* обратной задачи (см. [15]), решается задача поиска оптимальной функции $f(t)$.

В случае весьма тонкой пластинки, прогибы которой могут во много раз превысить ее толщину, задача сводится к нахождению прогиба w гибкой мембраны [16]. В этом случае деформации и скорости деформаций соответственно примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta}, \\ \dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\dot{u}_{\alpha,\beta} + \dot{u}_{\beta,\alpha}) + \frac{1}{2}\dot{w}_{,\alpha}w_{,\beta} + \frac{1}{2}w_{,\alpha}\dot{w}_{,\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Известно, что для пластин в случае малых прогибов оптимальное деформирование происходит по линейному закону $w(t) = \frac{t}{T}w^*$, а в случае больших прогибов оптимальное деформирование происходит по

нелинейному закону $w(t) = \sqrt{\frac{t}{T}}w^*$, где w^* — прогиб в конечный момент времени (см. [6; 12]).

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ПАНЕЛЕЙ В РЕЖИМЕ ПОЛЗУЧЕСТИ

Применяя основные процедуры метода конечных элементов к вариационному уравнению с функционалом (1.1), строятся дискретные уравнения задачи деформирования (см. [13; 17])

$${}^{t+dt}K^{(r-1)}\Delta U^{(r)} = {}^{t+dt}R^{(r-1)}, \quad (2.1)$$

где ${}^{t+dt}K^{(r-1)}$ — симметричная матрица касательной жесткости, ${}^{t+dt}R^{(r-1)}$ — вектор внутренних и внешних сил, $\Delta U^{(r)}$ — узловые приращения перемещений. Верхние индексы величины $t + dt$ указывают значение времени нагружения, для которого она вычисляется. Верхние индексы величины $(r - 1)$ указывают на номер итерации при уточнении решения методом Ньютона—Рафсона.

Наряду с дискретизацией по параметру t , вызванной решением нелинейных задач механики методом конечных элементов, для приближенного решения задачи оптимального управления вводится дополнительная сетка: $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$. Учитывая дискретные по времени уравнения пошаговой процедуры интегрирования (2.1) при условии $dt \leq \tau = t_{k+1} - t_k$, минимизируемый функционал (1.3) заменяется формулой

$$A = \max_V \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} \eta_{ij} dt = \max_V \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=t_k+1}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij}^c \rightarrow \inf, \quad (2.2)$$

где $\Delta \varepsilon_{ij}^c$ — компоненты приращений деформаций ползучести, вычисленные методом конечных элементов. В данном случае дискретная задача оптимального управления будет включать дискретные по времени уравнения пошаговой процедуры интегрирования (2.1) и минимизируемый функционал (2.2). В такой постановке строится функция Беллмана и задача решается методом динамического программирования (см. [18; 19]).

Решение задачи оптимизации траекторий деформирования рассматривается на примере формообразования квадратной пластинки с выступами толщиной 12 мм и длиной стороны 180 мм. Выступы

необходимы для расчета остаточной формы пластинки с двойной кривизной (см. [20]). Таким образом, находится прогиб пластинки, моделирующий кручение (см. [20]) в виде узловых перемещений по координате, нормальной к поверхности пластинки (значения максимальных перемещений в углах — 80 мм). Данная величина прогиба выбрана с целью уменьшения сопротивления пластинки изгибу и сведения задачи к нахождению прогиба гибкой мембраны (см. [16]). Для более полного анализа рассматривается объемная постановка задачи (фиг. 1) с 8-узловыми изопараметрическими шестигранными конечными элементами с трилинейной аппроксимацией функций. При вычислениях в системе MSC.Marc подключаются дополнительные параметры, улучшающие характеристики сдвига (или изгиба) и описывающие несжимаемое поведение материала путем использования альтернативной функции интерполяции и альтернативной процедуры интегрирования (см. [21]). Количество элементов в модели определено в соответствии с проведенным ранее анализом (см. [20]) и обеспечивает достаточную точность при относительно небольшом времени расчета.

В расчетах деформирования пластины используются характеристики материала АК4–1Т (алюминиевого сплава) (см. [20; 22]). В соответствии с этими данными, материал изотропен с параметрами упругости: модуль Юнга $E=7000$ кГ/мм², коэффициент Пуассона $\nu=0.4$. При температуре $T=200$ °С стадия установившейся ползучести при сжатии и при растяжении описывается законом Нортона с разными значениями коэффициентов. В данном случае для упрощения вывода условий сходимости метода динамического программирования в задачах оптимального формообразования принимается описание закона ползучести в течение 260 ч с одинаковыми коэффициентами при сжатии и растяжении: $B = 2.5 \cdot 10^{-15} (\text{кГ/мм}^2)^{-n} (\text{час})^{-1}$, $n = 8$.

При решении аддитивных задач применяется алгоритм, основное содержание которого состоит в формулировке правил последовательного сжатия множества конкурентоспособных вариантов (см. [18; 19]). Алгоритм представляет собой многошаговый процесс, на каждом шаге которого производится исключение некоторого множества вариантов, о котором в процессе работы алгоритма становится известным, что он не содержит оптимального варианта.

Для разработки алгоритма оптимизации при деформировании заготовки в качестве управляющих параметров вводится вектор-функция перемещений узловых точек тела на границе S^* в виде $U_z(t) = f(t)U_z^*$, где U_z^* — решение обратной задачи с линейной функцией $f(t)$ (см. [15]), обеспечивающее необходимую остаточную форму панели. В этом случае строится сетка в пространстве (t, z) . Шаг по аргументу t задан и равен $\tau = t_{k+1} - t_k$, по переменной z — Δz . Узлы сетки обозначим через $P_g(k)$. Индекс k означает номер гиперплоскости Σ_k при заданном значении t , а индекс g означает номер узла в гиперплоскости Σ_k . Каждые два узла, лежащие в гиперплоскостях $P_q(k)$ и $P_g(k+1)$, соединены отрезками, длины этих отрезков обозначаются $l_{qg}(k) = f_k(P_q(k), P_g(k+1))$ (см. [18]).

В результате таких операций можно получить граф, в котором роль вершин играют узлы $P_g(k)$, и вместо исходной задачи будет рассматриваться задача поиска на этом графе кратчайшего пути, соединяющего гиперплоскости Σ_0 и Σ_N . Обозначая через $l_q(k)$ ломаную кратчайшей длины, соединяющую узел $P_q(k)$ с гиперплоскостью Σ_0 , можно прийти к рекуррентному соотношению (см. [18])

$$l_g(k+1) = \min_q \{l_q(k) + l_{qg}(k)\}.$$

Минимум берется по тем номерам q , для которых узлы лежат в допустимой области G_k и принадлежат гиперплоскости Σ_k .

Для программной реализации метода динамического программирования и построения функции $U_z(t) = f(t)U_z^*$ предлагается следующий способ задания граничных условий для рассматриваемой сетки при решении задач (2.1). Шаги метода динамического программирования вычисляются по формуле

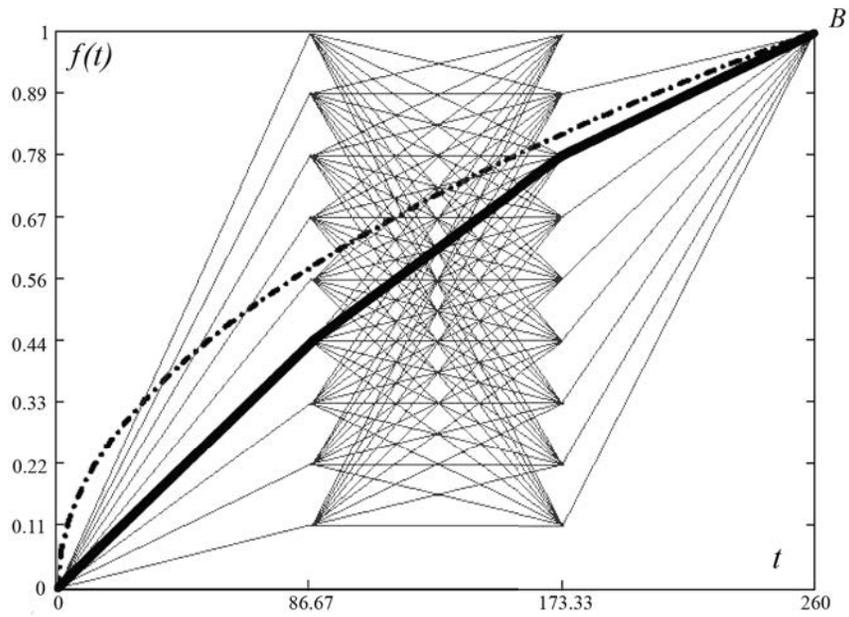
$$\tau = t_k - t_{k-1} = \frac{T}{N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad t_0 = 0, \quad \Delta z = \frac{U_z^*}{M}. \quad (2.3)$$

На каждом интервале $[t_{k-1}, t_k]$ при решении задачи уравнениями (2.1) задаются граничные условия на перемещения ΔU_z по следующему алгоритму:

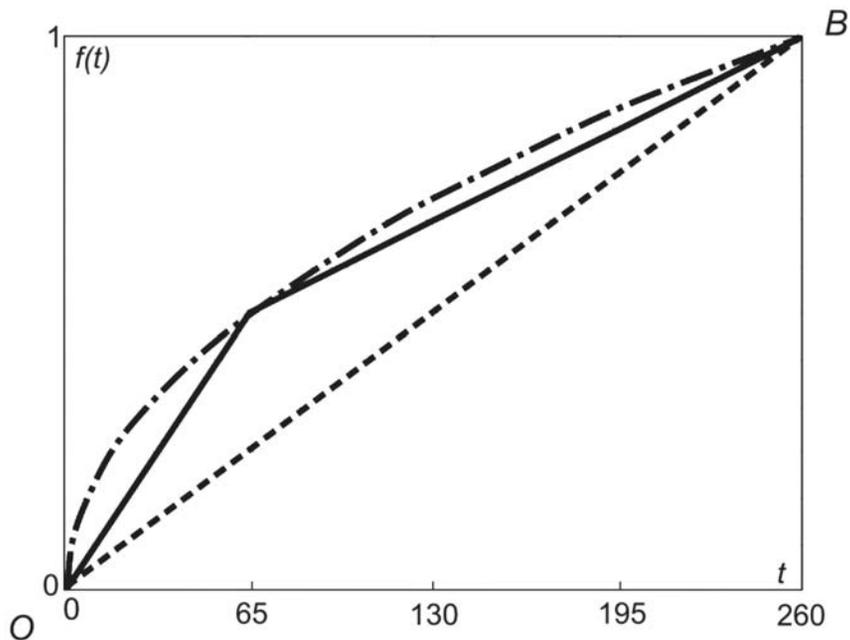
$$\Delta t_{\text{step}} = \xi_k \tau,$$

$$\Delta U_z = (\zeta_k - \zeta_{k-1}) \frac{\Delta z}{\tau} dt, \quad \text{пока } \Delta t_{\text{step}} \leq t + dt, \quad \text{иначе } k = k + 1 \text{ и повторное выполнение операций.}$$

Граничные условия на всех интервалах $[t_{k-1}, t_k]$ могут быть представлены с помощью системы параметров



Фиг. 2. Траектория деформирования пластинки при $N = 3, M = 9$.

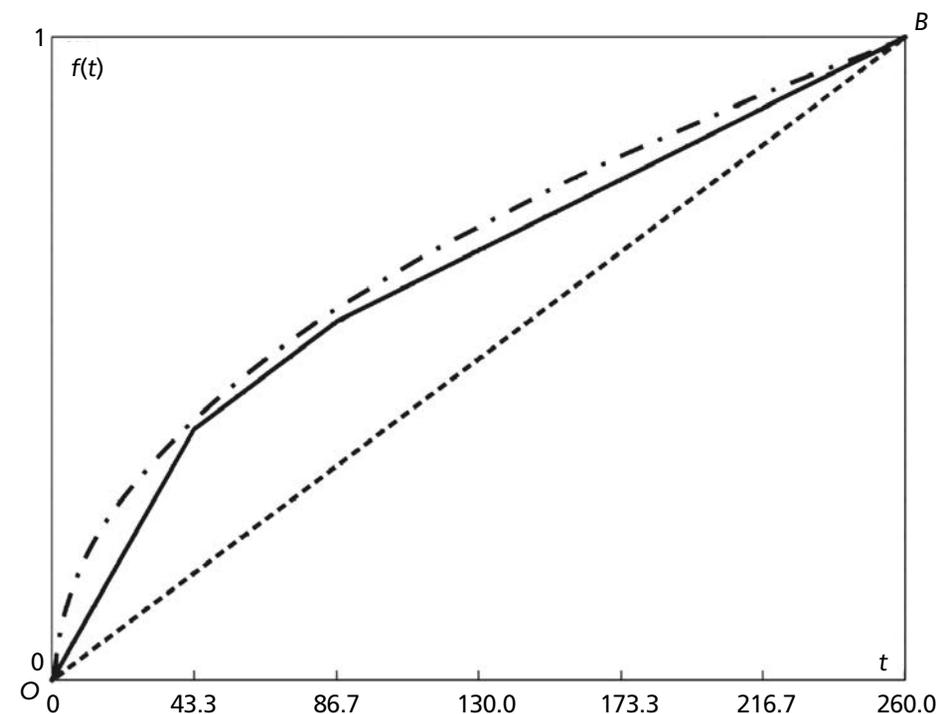


Фиг. 3. Траектория деформирования пластинки при $N = 4, M = 12$.

$$[\xi_1, \zeta_1; \xi_2, \zeta_2; \dots; \xi_N, \zeta_N],$$

где ξ_k могут принимать значения $0, 1, \dots, N$ (при условии $\xi_k > \xi_{k-1}$), а ζ_k — значения $0, 1, \dots, M$.

Вычисления рекуррентных соотношений выполняются путем построения итераций с различными системами параметров и решения уравнений (2.1) в системе MSC.Marc (см. [21]). Ввод граничных условий и вывод значения критерия оптимизации выполняется с помощью разработанных пользовательских программ.



Фиг. 4. Траектория деформирования пластинки при $N = 6$, $M = 18$.

Численное решение задачи оптимизации траектории деформирования сводится к перебору вариантов при каждом параметре t_k . Набор вариантов функции $f(t)$ задается ломаными линиями, проходящими от точки O к точке B (фиг. 2). В результате оптимальное решение, полученное методом динамического программирования при $N=3$, $M=9$, $N=4$, $M=12$ и $N=6$, $M=18$ (фиг. 2–4), приближается к аналитической кривой и не совпадает с линейной функцией (жирная кривая — численные результаты, штрихпунктирная кривая — аналитические данные для больших прогибов пластины, см. [6; 12]). Вычисленное максимальное значение работы рассеяния в пластинке по аналитической траектории в случае больших прогибов оказывается меньшим по сравнению со всеми возможными траекториями, определенными методом динамического программирования.

При значительном увеличении N наблюдается расхождение от аналитических кривых.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ОПТИМИЗАЦИИ

Пусть сетка Q_m характеризуется шагом τ_m по временной переменной и шагом Δz_m по пространственной переменной. Последовательность сеток такова, что $\tau_m \rightarrow 0$, $\Delta z_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Каждой сетке Q_m можно поставить в соответствие конечное множество траекторий $\{f(t, m)\}$, построенных с помощью элементарной операции (см. [18; 19]). Данные траектории представляют собой ломаные, которые проходят через узлы, лежащие на гиперплоскостях $\sum_k (t = k\tau_m)$. С помощью метода динамического программирования можно определить ломаную, соединяющую начальную и конечную точки и имеющую минимальную длину. Под длиной понимается величина диссипируемой работы (2.2)

$$A(f(t, m)) = \max_V \sum_{k=0}^{N_m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} \eta_{ij} dt,$$

где $N_m = T / \tau_m$, $t_k = k\tau_m$.

Обозначим

$$\Delta_m = |A(f(t, m)) - A^0|, \quad (3.1)$$

где диссипируемая работа A^0 определяется по оптимальной криволинейной траектории $f(t)$, а A — по оптимальной ломаной траектории $f(t, m)$, найденной с помощью метода динамического программирования.

Согласно лемме из [18], если $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m = 0$, то траектория деформирования $f(t, m)$ сходится слабо к оптимальной $f(t)$.

При известном потенциале скоростей ползучести можно записать (см. [23])

$$\eta_{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Тогда, если удельная мощность рассеянной при ползучести энергии $W = W(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \eta_{ij}$ есть однородная функция напряжений степени $n+1$, то $\Phi(\sigma_{ij}) = \frac{1}{n+1} W(\sigma_{ij})$ (см. [23]).

Отсюда следуют и обратные соотношения

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \eta_{ij}}.$$

В этом случае можно определить $U(\eta_{ij}) = \frac{n}{n+1} W(\eta_{ij})$ (см. [24]). Условие устойчивости в малом эквивалентно условию выпуклости функций $W(\sigma_{ij})$ и $W(\eta_{ij})$ (см. [6]).

В силу выпуклости закона выполняется неравенство для любых двух путей деформирования η_{ij}, η_{ij}^0 (см. [19]):

$$W^0 - W \geq \frac{n+1}{n} \sigma_{ij} (\eta_{ij}^0 - \eta_{ij}) \text{ или } W - W^0 \leq \frac{n+1}{n} \sigma_{ij} (\eta_{ij} - \eta_{ij}^0).$$

Далее будем обозначать с помощью индекса «0» все величины, относящиеся к оптимальному пути деформирования, тогда $W - W^0 \geq 0$ и разница диссипируемой работы примет вид

$$A - A^0 = \max_V \int_0^T (W - W^0) dt = \max_V \int_0^T (\sigma_{ij} \eta_{ij} - \sigma_{ij}^0 \eta_{ij}^0) dt \leq \frac{n+1}{n} \max_V \int_0^T \sigma_{ij} (\eta_{ij} - \eta_{ij}^0) dt.$$

Таким образом, (3.1) примет вид

$$\Delta_m \leq \frac{n+1}{n} \max_V \left| \sum_{k=0}^{N-m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} (\eta_{ij} - \eta_{ij}^0) dt \right| \leq \frac{n+1}{n} \max_V \sum_{k=0}^{N-m-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma_{ij} (\eta_{ij} - \eta_{ij}^0) dt \right|. \quad (3.2)$$

Считая, что изменения объема на установившейся стадии ползучести не происходит, т.е. $\eta_{11} + \eta_{22} + \eta_{33} = 0$ (см. [23]), тензор скорости деформаций ползучести может рассматриваться как девиатор скорости деформаций ползучести. Так как гидростатическое напряжение работы не совершает, то тензор напряжений может быть заменен девиатором тензора. В этом случае мощность рассеяния энергии при ползучести может быть представлена в виде $W = s_{ij} \eta_{ij}$.

Представим мощность удельной рассеянной при ползучести энергии в виде (см. [6])

$$W = \sigma_e \eta_e, \quad (3.3)$$

где интенсивность скоростей деформаций ползучести $\eta_e = \sqrt{\frac{2}{3} \eta_{ij} \eta_{ij}}$.

Умножим (1.2) на s_{ij} и свернем: $W = B \sigma_e^{n+1}$. Сравнивая с (3.3), получим $\eta_e = B \sigma_e^n$, откуда $\eta_{ij} = B \sigma_e^n \frac{\partial \sigma_e}{\partial s_{ij}}$ совпадает с (1.2). Тогда $s_{ij} \eta_{ij} = \sigma_e \eta_e$ продифференцируем по η_{kl} :

$$s_{kl} + \eta_{ij} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \eta_{kl}} = \sigma_e \frac{\partial \eta_e}{\partial \eta_{kl}} + \eta_e \frac{\partial \sigma_e}{\partial \eta_{kl}} = \sigma_e \frac{\partial \eta_e}{\partial \eta_{kl}} + \eta_e \frac{\partial \sigma_e}{\partial s_{ij}} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \eta_{kl}}, \text{ но } \eta_e \frac{\partial \sigma_e}{\partial s_{ij}} = \eta_{ij}.$$

Откуда получим $s_{kl} = \sigma_e \frac{\partial \eta_e}{\partial \eta_{kl}}$. Но $\sigma_e = B^{-\frac{1}{n}} \eta_e^{\frac{1}{n}}$, тогда $s_{kl} = B^{-\frac{1}{n}} \eta_e^{\frac{1}{n}} \frac{\partial \eta_e}{\partial \eta_{kl}} = \frac{2}{3} B^{-\frac{1}{n}} \eta_e^{\frac{1}{n}-1} \eta_{kl}$. Таким образом, напряжения определяются по скоростям деформаций ползучести с помощью соотношения

$$s_{ij} = \frac{2}{3} B^{-\frac{1}{n}} \eta_e^{\frac{1}{n}-1} \eta_{ij}. \quad (3.4)$$

Для оценки Δ_m в (3.2), будет использоваться модель гибкой мембраны, для которой скорости деформаций определяются по (1.4). Мембрана толщиной h занимает в плоскости $x_1 O x_2$ область S . Примем такие же допущения, как и в [6]:

1) если время деформирования велико, то компонентами скоростей упругих деформаций можно пренебречь, таким образом, принимаем $\dot{\epsilon}_{\alpha\beta} \approx \eta_{\alpha\beta}$;

2) при деформировании тонких пластин остаточная форма в основном определяется прогибом w , так как перемещения u_α в плоскости пластин много меньше w .

Пусть искомый прогиб имеет вид

$$w(t, x_1, x_2) = f(t) w^*(x_1, x_2). \quad (3.5)$$

Тогда в силу указанных предположений и (1.4) $\eta_{\alpha\beta} \approx \frac{1}{2} \dot{w}_{,\alpha} w_{,\beta} + \frac{1}{2} w_{,\alpha} \dot{w}_{,\beta} = \dot{f} f (w^*_{,\alpha} w^*_{,\beta})$. Используя (3.4) с учетом $\eta_e = \dot{f} \sqrt{\frac{2}{3} w^*_{,\alpha} w^*_{,\beta} w^*_{,\alpha} w^*_{,\beta}}$, найдем напряжения

$$\begin{aligned} s_{\gamma\lambda} &= \frac{2}{3} B^{-\frac{1}{n}} (\dot{f} f)^{\frac{1-n}{n}} \times \\ &\times \dot{f} f \left(\frac{2}{3} w^*_{,\alpha} w^*_{,\beta} w^*_{,\alpha} w^*_{,\beta} \right)^{\frac{1-n}{2n}} (w^*_{,\gamma} w^*_{,\lambda}) = \\ &= \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1+n}{2n}} B^{-\frac{1}{n}} (\dot{f} f)^{\frac{1}{n}} \frac{(w^*_{,\gamma} w^*_{,\lambda})}{(w^*_{,\alpha} w^*_{,\beta} w^*_{,\alpha} w^*_{,\beta})^{\frac{n-1}{2n}}} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \lambda = 1, 2). \end{aligned}$$

В этом случае (3.2) примет вид

$$\Delta_m \leq \frac{n+1}{n} \max_S h \times \sum_{k=0}^{N_m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\dot{f} f - \dot{f}^0 f^0) s_{\alpha\beta} w^*_{,\alpha} w^*_{,\beta} dt = C \sum_{k=0}^{N_m-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\dot{f} f - \dot{f}^0 f^0) (\dot{f} f)^{\frac{1}{n}} dt \right|, \quad (3.6)$$

где $C = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1+n}{2n}} \frac{n+1}{n} B^{-\frac{1}{n}} h \max_S \left| (w^*_{,\alpha} w^*_{,\beta} w^*_{,\alpha} w^*_{,\beta})^{\frac{n+1}{2n}} \right|$.

Отрезки, соединяющие точки с соседних гиперповерхностей, описываются уравнениями $f(t) = f(t_k) + \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\tau_m} (t - t_k)$, тогда $\dot{f}(t) = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{\tau_m}$.

Обозначив значения функций в моменты времени $f(t_k) = f_k$, можно записать $\dot{f}(t) = \frac{f_{k+1} - f_k}{\tau_m}$ и $\dot{f} f = \frac{f_{k+1} - f_k}{\tau_m} f_{k+1}$. Положим, что $f_k = f_k^0 + \Delta f_k$, тогда

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f_{k+1} - f_k}{\tau_m} f_{k+1} \right| = \left| \frac{f_{k+1}^0 + \Delta f_{k+1} - f_k^0 - \Delta f_k}{\tau_m} (f_{k+1}^0 + \Delta f_{k+1}) \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{f_{k+1}^0 - f_k^0}{\tau_m} (f_{k+1}^0 + \Delta f_{k+1}) \right| + \left| \frac{\Delta f_{k+1} - \Delta f_k}{\tau_m} (f_{k+1}^0 + \Delta f_{k+1}) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\tau_m} |(f_{k+1}^0 - f_k^0) f_{k+1}^0| + \frac{1}{\tau_m} |(f_{k+1}^0 - f_k^0) \Delta f_{k+1}| + \frac{1}{\tau_m} |(\Delta f_{k+1} - \Delta f_k) f_{k+1}^0| + \frac{1}{\tau_m} |(\Delta f_{k+1} - \Delta f_k) \Delta f_{k+1}| \leq \\ &\leq \frac{a}{\tau_m} + \frac{b}{\tau_m} \Delta z_m + \frac{c}{\tau_m} \Delta z_m + \frac{d}{\tau_m} \Delta z_m^2 = \frac{1}{\tau_m} (a + e \Delta z_m + d \Delta z_m^2), \end{aligned}$$

где использованы обозначения $|\Delta f_{k+1} - \Delta f_k| \leq \Delta z_m$, $|\Delta f_k| \leq \frac{1}{2} \Delta z_m$, $a = \max_t |(f^0_{k+1} - f^0_k) f^0_{k+1}|$,

$$b = \max_t \frac{1}{2} |f^0_{k+1} - f^0_k|, c = \max_t |f^0_{k+1}|, d = \frac{1}{2}, e = b + c.$$

Аналогично оценим выражение

$$\begin{aligned} |ff - f^0 f^0| &= \left| \frac{f^0_{k+1} + \Delta f_{k+1} - f^0_k - \Delta f_k}{\tau_m} \times (f^0_{k+1} + \Delta f_{k+1}) - \frac{f^0_{k+1} - f^0_k}{\tau_m} f^0_{k+1} \right| = \\ &= \left| \frac{f^0_{k+1} - f^0_k}{\tau_m} \Delta f_{k+1} + \frac{\Delta f_{k+1} - \Delta f_k}{\tau_m} \times (f^0_{k+1} + \Delta f_{k+1}) \right| \leq \frac{1}{\tau_m} \times (b \Delta z_m + c \Delta z_m + d \Delta z_m^2) = \\ &= \frac{1}{\tau_m} (e \Delta z_m + d \Delta z_m^2). \end{aligned}$$

Тогда для подынтегрального выражения (3.6) будет выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \left| (ff - f^0 f^0) (ff)^{\frac{1}{n}} \right| &\leq \frac{1}{\tau_m} (e \Delta z_m + d \Delta z_m^2) \times \left[\frac{1}{\tau_m} (a + e \Delta z_m + d \Delta z_m^2) \right]^{\frac{1}{n}} = \\ &= \frac{1}{\tau_m} \mu_m \left[\frac{1}{\tau_m} (a + \mu_m) \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\tau_m^{\frac{n+1}{n}}} \left[(a \mu_m^n + \mu_m^{n+1}) \right]^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

где $\mu_m = e \Delta z_m + d \Delta z_m^2$.

В результате (3.2) примет вид

$$\Delta_m \leq CN_m \tau_m \frac{1}{\tau_m^{\frac{n+1}{n}}} \left[(a \mu_m^n + \mu_m^{n+1}) \right]^{\frac{1}{n}} = CT \frac{1}{\tau_m^{\frac{n+1}{n}}} \left[(a \mu_m^n + \mu_m^{n+1}) \right]^{\frac{1}{n}}. \quad (3.7)$$

Сравнивая функцию оптимального деформирования, полученного аналитически в случае больших прогибов, с (3.5), найдем $f^0(t) = \sqrt{\frac{t}{T}}$. Используя разложение в ряд Тейлора, ограничиваясь членами

$$\text{первого порядка, можно получить } f^0(t_{k+1}) \approx f^0(t_k) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau_m}{T}} \frac{1}{\sqrt{k}} \approx f^0(t_k) + \frac{1}{2\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

В этом случае коэффициенты могут быть заданы значениями

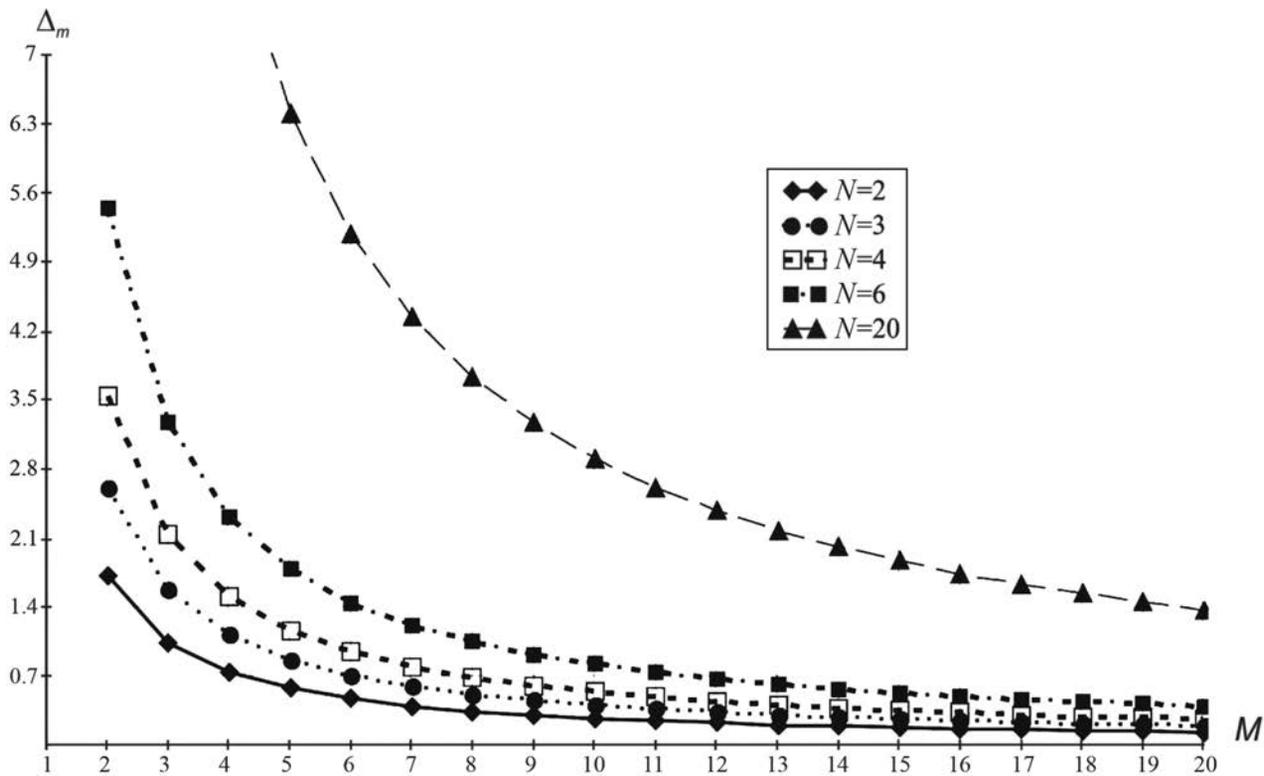
$$a = \frac{1}{2\sqrt{N}}, b = \frac{1}{4\sqrt{N}}, c = 1, e = \frac{1}{4\sqrt{N}} + 1.$$

Таким образом, для сходимости решения задачи, полученного методом динамического программирования, к точному достаточно, чтобы шаги по пространственной и временной переменным удовлетворяли условию

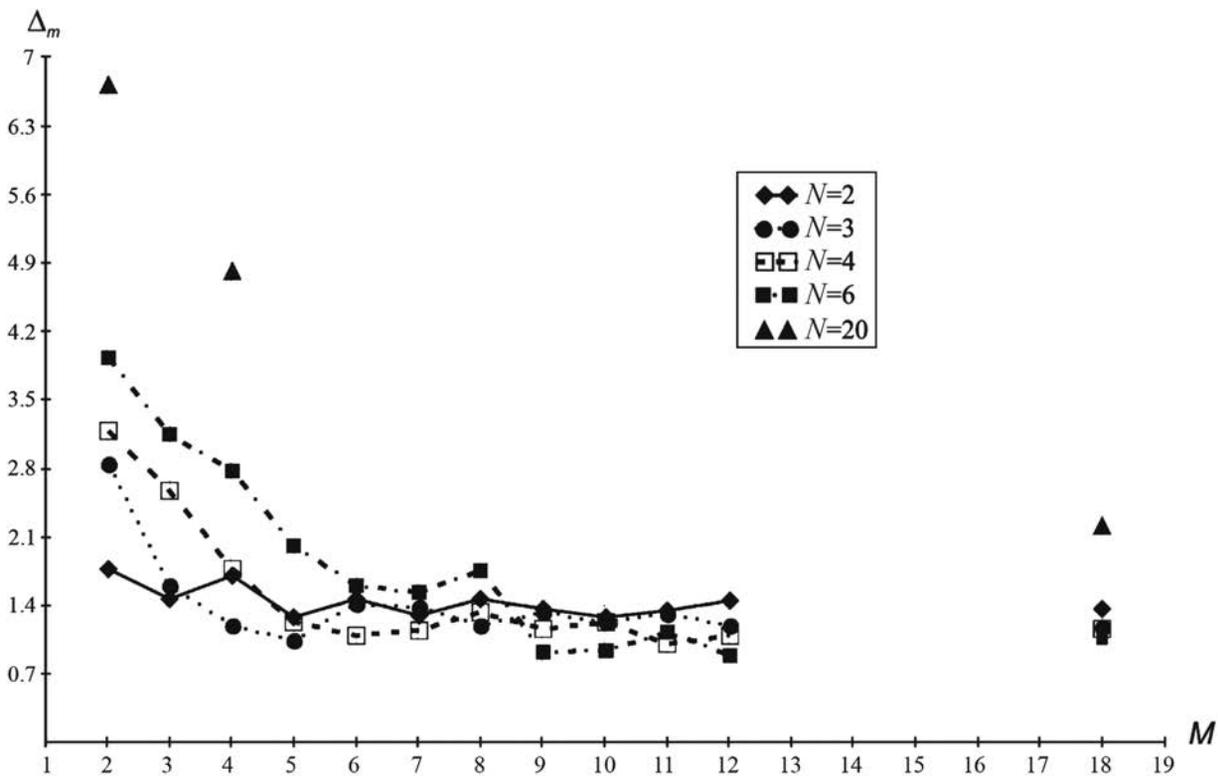
$$a(e \Delta z_m + d \Delta z_m^2)^n + (e \Delta z_m + d \Delta z_m^2)^{n+1} = \rho \tau_m^{n+1+\varepsilon}, \quad (3.8)$$

где ρ, ε — произвольные положительные постоянные.

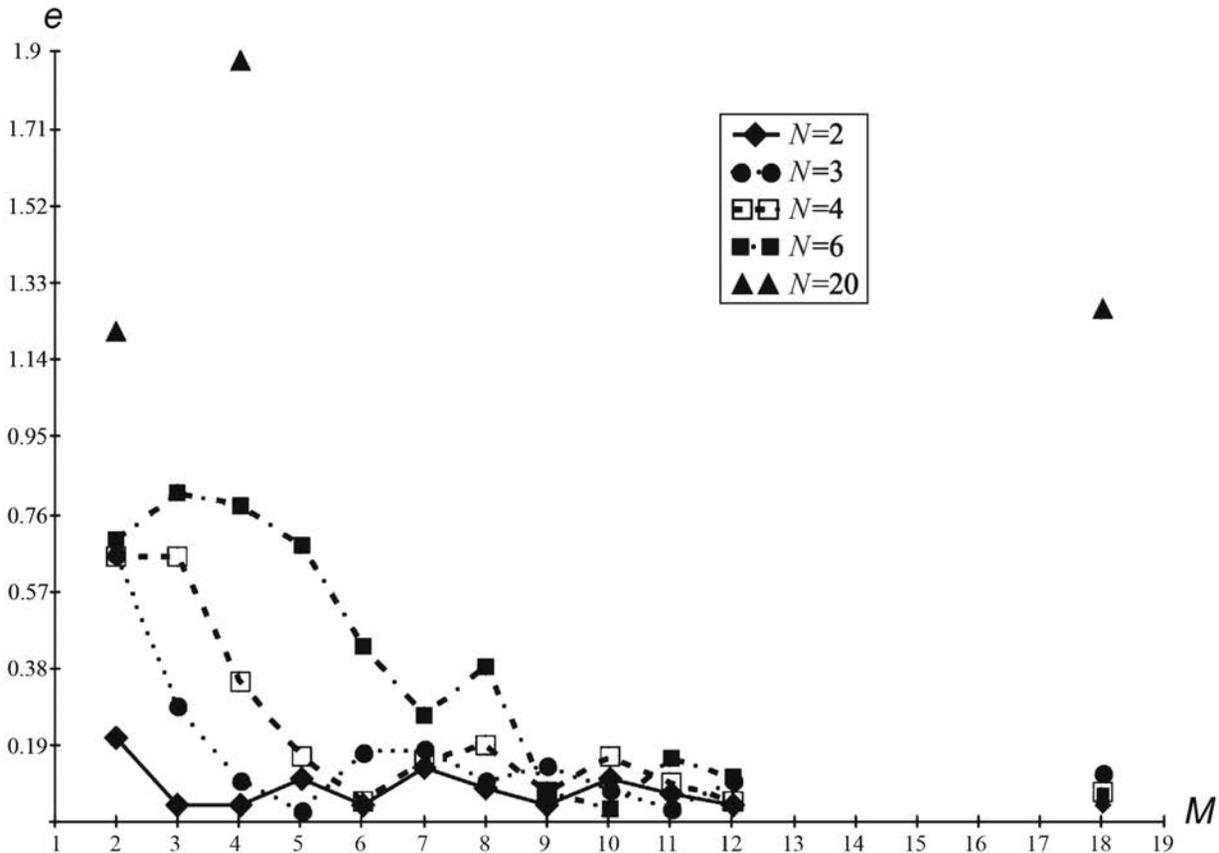
Графики изменения величины Δ_m , вычисленной по формуле (3.7), в зависимости от значений шагов по пространственной и временной переменным, определенных по N, M в (2.3), представлены на фиг. 5. Константа C в (3.7) выбрана при условии совпадения аналитических и численных значений Δ_m при $N=2$.



Фиг. 5. Изменение Δ_m в зависимости от N, M по формуле (3.7).



Фиг. 6. Численные результаты изменения Δ_m в зависимости от N, M .

Фиг. 7. Численные результаты изменения e в зависимости от N, M .

По результатам численного решения методом динамического программирования задачи оптимального деформирования пластинки (фиг. 1) с разными значениями N, M вычислены значения Δ_m по (3.1)

$$\text{и } e = \left(\sum_{k=0}^{N-1} (f(t_k, m) - f^0(t_k))^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ которые представлены на фиг. 6, 7.}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлен анализ сходимости метода динамического программирования для задач оптимального формообразования в ползучести и получены аналитические зависимости влияния величин шагов пространственной и временной переменных на сходимость. Численные и аналитические данные о сходимости метода оптимизации с различными размерами сеток демонстрируют качественное совпадение. Различие этих данных увеличивается при уменьшении шага по времени, что может быть вызвано выбором максимальных коэффициентов, не зависящих от времени, а также исключением в аналитическом варианте скоростей деформаций упругости (см. [6]). Таким образом, для обеспечения устойчивого решения задачи необходимо учитывать соотношения между пространственной и временной переменными (3.8).

Разработанный метод оптимизации уменьшает объем вычислений в сравнении с перебором всевозможных путей деформирования, т.к. в процессе расчета исключаются неоптимальные траектории. Несмотря на это, незначительное увеличение параметров метода, в частности, размерности, приводит к требованию значительных вычислительных ресурсов. С учетом развития вычислительных технологий разработанный метод позволяет на стадии подготовки производства оптимизировать параметры технологического процесса, в частности, для формообразования деталей в реконфигурируемом стержневом пуансоне определить оптимальную систему траекторий деформирования для разных точек пластины при учете разносопротивляемости и анизотропии в ползучести (см. [25]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аннин Б. Д., Олейников А. И., Бормотин К. С. Моделирование процессов формообразования панелей крыла самолета SSJ-100 // Прикл. механ. и техн. физ. 2010. Т. 51. № 4. С. 155–165.
2. Горев Б. В., Клопотов И. Д., Раевская Г. А., Соснин О. В. К вопросу обработки материалов давлением в режиме ползучести // Прикл. механ. и техн. физ. 1980. № 5. С. 185–191.
3. Huang Lin, Wan Min, Chi Cailou, Ji Xiusheng. FEM analysis of spring-backs in age forming of aluminum alloy plates // Chinese J. of Aeronautics. 2007. V. 20. P. 564–569.
4. Lihua Z., Jianguo L., Minghui H. Study on springback behavior in creep age forming of aluminium sheets // Adv. Sci. Lett. 2013. V. 19. No. 1. P. 75–79.
5. Ribeiro F. C., Marinho E. P., Inforzato D. J., Costa P. R., Batalha G. F. Creep age forming: a short review of fundamentals and applications // J. of Achievements in Materials and Manufacturing Engineer. 2010. V. 43. No. 1.
6. Цвелодуб И. Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
7. Соснин О. В., Шубин И. А., Горев Б. В., Раевская Г. А. Способ формообразования деталей двойной крутизны и устройство для его осуществления. А.с. 1147471 СССР // Б.И. 1985. № 12.
8. Simon D., Kern L., Wagner J., Reinhart G. A reconfigurable tooling system for producing plastic shields // Procedia CIRP. 2014. V. 17. P. 853–858.
9. Банщикова И. А. Построение определяющих уравнений для ортотропных при ползучести материалов с различными свойствами при растяжении и сжатии // Прикл. механ. и техн. физ. 2020. Т. 61. № 1. С. 102–117.
10. Соснин О. В. Об анизотропной ползучести материалов // Прикл. механ. и техн. физ. 1965. № 6. С. 99–104.
11. Бормотин К. С., Вин Аунг. Метод динамического программирования в задачах оптимального деформирования панели в режиме ползучести // Вычисл. методы и программирование. 2018. Т. 19. С. 470–478.
12. Бормотин К. С., Олейников А. И. Вариационные принципы и оптимальные решения обратных задач изгиба пластин при ползучести // Прикл. механ. и техн. физ. 2012. Т. 53. № 5. С. 136–146.
13. Коробейников С. Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
14. Соснин О. В., Никитенко А. Ф., Горев Б. В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов // Прикл. механ. и техн. физ. 2010. Т. 51. № 4. С. 188–197.
15. Бормотин К. С. Итеративный метод решения геометрически нелинейных обратных задач формообразования элементов конструкций в режиме ползучести // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 12. С. 145–153.
16. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966.
17. Wriggers P. Computational contact mechanics. Heidelberg: Springer, 2006.
18. Муссеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
19. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
20. Коробейников С. Н., Олейников А. И., Горев Б. В., Бормотин К. С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычисл. методы и программирование: новые вычисл. технологии. 2008. Т. 9. № 1. С. 346–365.
21. Marc 2021, Vol A: Theory and User Information, <http://hexagon.com/products/marc/product/marc>.
22. Соснин О. В., Горев Б. В., Рубанов В. В. Кручение квадратной пластинки из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию при ползучести // Расчеты прочности судовых конструкций и механизмов. Сб. тр. НИИВТа № 117. Новосибирск: Новоси�. ин-т инженеров вод. трансп. 1976. С. 78–88.
23. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
24. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Гостехиздат, 1960.
25. Бормотин К. С., Кривенко А. А. Численная оптимизация кинематической схемы многоточечного формообразования панелей в условиях ползучести // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2022. № 5. С. 150–163.

УДК 517.95

ЗАДАЧА МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ¹⁾

© 2024 г. Р. В. Бризицкий^{1,2,*}, А. А. Дончак^{2,**}

¹690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия

²690922 Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10, ДВФУ, Россия

*e-mail: mlnwizard@mail.ru

**e-mail: geliadonchak@mail.ru

Поступила в редакцию 03.07.2023 г.

Переработанный вариант 11.09.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Исследуется задача мультипликативного управления для уравнения реакции–диффузии, в котором коэффициент реакции нелинейно зависит от концентрации вещества, а также от пространственных переменных. Роль мультипликативных управлений играют коэффициенты диффузии и массообмена. Доказывается разрешимость экстремальной задачи, для конкретного коэффициента реакции выводятся системы оптимальности. На основе анализа данных систем устанавливается свойство релейности мультипликативного и распределенного управлений, а также выводятся оценки локальной устойчивости оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества, так и одной из заданных функций краевой задачи. Библиография: 36.

Ключевые слова: нелинейная модель реакции–диффузии, глобальная разрешимость, принцип максимума, задача мультипликативного управления, система оптимальности, свойство релейности управлений, принцип bang–bang, оценки локальной устойчивости.

DOI: 10.31857/S0044466924010077, EDN: ZJXXWC

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Поиск эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах остается важной прикладной задачей на протяжении многих лет. Значимый вклад в эти исследования вносит качественный анализ решений краевых и экстремальных задач для моделей тепломассопереноса. В первую очередь отметим работы [1–7], посвященные исследованию краевых и экстремальных задач для моделей тепломассопереноса в приближении Буссинеска. Статьи [8–14] по исследованию моделей реакции–диффузии–конвекции с зависимыми от решения младшими коэффициентами занимают промежуточное место между работами в рамках приближения Буссинеска и его обобщением. Здесь же отметим статьи [15–19], в которых исследованы близкие модели сложного теплообмена.

В работах [20–27] исследованы краевые и экстремальные задачи для моделей тепломассопереноса, обобщающих приближение Буссинеска. Можно надеяться, что в рамках моделей с наименьшим числом упрощающих предположений могут быть реализованы более реалистичные механизмы управления. Также отметим статьи [28–31] по исследованию усложненных моделей гидродинамики, учитывающих в т.ч. реологию.

В настоящей статье исследуется задача мультипликативного управления для уравнения реакции–диффузии, в котором коэффициент реакции нелинейно зависит от концентрации вещества, а также от пространственных переменных. Роль мультипликативных управлений играют зависящие от пространственных переменных коэффициенты реакции и массообмена в уравнении и граничном условии модели. Основной акцент делается на качественном анализе свойств решений рассматриваемой экстремальной задачи, обладающей повышенной нелинейностью. При этом отсутствие конвекции не упрощает исследование данной задачи, но позволяет установить ее новые свойства.

¹⁾ Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ ДВО РАН (№ 075-01290-23-00) и при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект № 075-02-2023-946).

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ , состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N , рассматривается следующая краевая задача:

$$-\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + k(\varphi, \mathbf{x})\varphi = f \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\varphi = \psi \text{ на } \Gamma_D, \lambda(\mathbf{x})(\partial\varphi / \partial n + \alpha(\mathbf{x})\varphi) = \chi \text{ на } \Gamma_N. \quad (2)$$

Здесь φ — концентрация загрязняющего вещества, $\lambda = \lambda(\mathbf{x}) > 0$ — коэффициент диффузии, f — объемная плотность внешних источников, $k = k(\varphi, \mathbf{x})$ — коэффициент реакции, где $\mathbf{x} \in \Omega$, $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ — коэффициент массообмена. Ниже на задачу (1), (2) при заданных функциях $f, \lambda, k, \alpha, \chi$ и ψ будем ссылаться как на задачу 1.

Глобальная разрешимость и единственность решения задачи 1 вытекает из результатов [9] для монотонной нелинейности $k(\varphi, \mathbf{x})\varphi$. Также отметим работу [14], в которой доказана глобальная разрешимость близкой краевой задачи с двумя нелинейностями: $k(\varphi, \mathbf{x})\varphi$ в уравнении и $\alpha(\varphi, \mathbf{x})\varphi$ в граничном условии. Поскольку мы используем операторную конструкцию k , обобщающую зависимость четвертой степени от концентрации φ , то это ближе к [9]. В настоящей работе для задачи 1 доказывается разрешимость задачи управления с мультипликативными управлениями λ и α и распределенным управлением f . При этом требования на гладкость управления λ снижены, например, по сравнению с [26] и близкими работами.

При $k(\varphi) = \varkappa\varphi^4$, где \varkappa — размерный параметр, для задачи управления выводятся системы оптимальности. На основе анализа данных систем для двухпараметрической задачи управления, не использующей регуляризацию, установлено, что управления α и f удовлетворяют свойству релейности, иначе, для них справедлив принцип bang–bang. При работе с управлением α используется принцип максимума для концентрации φ , установленный в [13]. Для управления f , применяя подход [19], основанный на результатах [32], устанавливается строгое свойство релейности (см. подробнее в [14; 19]). Отметим, что для модели (1), (2) данный подход применим из-за отсутствия конвекции.

В заключительном разделе с использованием системы оптимальности для двухпараметрической задачи мультипликативного управления выводятся оценки локальной устойчивости оптимальных решений относительно малых возмущений как функционалов качества, так и заданной функций ψ .

2. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

При анализе краевой задачи и задач управления будем использовать функциональные пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает область Ω , либо некоторую подобласть $Q \subset \Omega$, либо часть Γ_D границы Γ . Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot, \cdot)_{s,Q}$ будем обозначать норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(D)$. Нормы и скалярные произведения в $L^2(Q)$, $L^2(\Omega)$ либо в $L^2(\Gamma_N)$ будем обозначать соответственно через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot, \cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ и (\cdot, \cdot) либо $\|\cdot\|_{\Gamma_N}$ и $(\cdot, \cdot)_{\Gamma_N}$.

Введем пространство тестовых функций для концентрации вещества

$$\mathcal{T} = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}$$

и функциональные множества $L^p_+(D) = \{k \in L^p(D) : k \geq 0\}$, $p \geq 3/2$,

$$H^s_{\lambda_0}(\Omega) = \{h \in L^\infty(\Omega) \cap H^s(\Omega) \cap L^\infty_+(\Gamma_N) : h \geq \lambda_0 > 0 \text{ в } \Omega\}, s > 1/2,$$

$$\mathcal{H}^r_{\lambda_0}(\Omega) = \{h \in H^r(\Omega) : h \geq \lambda_0 > 0 \text{ в } \Omega\}, r > 3/2.$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

(i) Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^3 с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из замыканий двух непересекающихся открытых участков Γ_D и Γ_N ($\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$), при этом поверхностная мера $\operatorname{meas} \Gamma_D > 0$ и граница Γ_D участка Γ_D состоит из конечного числа липшицевых кривых или является n -угольником;

(ii) $\lambda \in \mathcal{H}^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $s > 1/2$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, $\alpha \in L^2_+(\Gamma_N)$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$;

(iii) для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ справедливо вложение $k(v, \cdot) \in L^p_+(\Omega)$ для некоторого $p \geq 3/2$, не зависящего от v , и на любом шаре $B_r = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r выполняется неравенство

$$\|k(v_1, \cdot) - k(v_2, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq L \|v_1 - v_2\|_{L^6(\Omega)} \quad \forall v_1, v_2 \in B_r,$$

где константа L зависит от r , но не зависит от $v_1, v_2 \in B_r$;

(iv) нелинейность $k(\varphi, \cdot)\varphi$ является монотонной в следующем смысле:

$$(k(\varphi_1, \cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2, \cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0 \text{ для всех } \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega);$$

(v) функция $k(\varphi, \cdot)$ ограничена в том смысле, что существуют положительные константы A_1, B_1 , зависящие от k , такие, что

$$\|k(\varphi, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq A_1 \|\varphi\|_{1, \Omega}^r + B_1 \text{ для всех } \varphi \in H^1(\Omega) \text{ при } p \geq 3/2, r \geq 0.$$

Отметим, что условия (iii)–(v) описывают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, $p \geq 3/2$, позволяющий учитывать достаточно произвольную зависимость коэффициента реакции, как от концентрации φ , так и от пространственных переменных. Например,

$$k = \varphi^4 \text{ в подобласти } Q \subset \Omega \text{ и } k = k_0(x) \in L_+^{3/2}(\Omega \setminus \bar{Q}) \text{ в } \Omega \setminus \bar{Q}.$$

Напомним также, что в силу теоремы вложения Соболева пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leq 6$ и компактно при $s < 6$, и с некоторой константой C_s , зависящей от s и Ω , справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \leq C_s \|\varphi\|_{1, \Omega} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{3}$$

Пространство $H^{1/2}(\Gamma_N)$ вкладывается в пространство $L^q(\Gamma_N)$ непрерывно при $q \leq 4$ и компактно при $q < 4$. В силу непрерывности оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ (и его сужения $\gamma|_{\Gamma_N}$ на $\Gamma_N \subset \Gamma$) с константой \tilde{C}_q , зависящей от q и Γ_N , справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^q(\Gamma_N)} \leq \tilde{C}_q \|\varphi\|_{1, \Omega} \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{4}$$

Справедлива следующая техническая лемма (см. [33]).

Лемма 2.1. При выполнении условий (i), (ii) $k_0 \in L_+^p(\Omega)$, $p \geq 3/2$, $\lambda \in H_{\lambda_0}^s(\Omega)$, $s > 3/2$, $\chi \in L^2(\Gamma_N)$ и $\alpha \in L_+^2(\Gamma_N)$ существуют положительные константы $C_1, \delta_0, \delta_1, \gamma_p, \gamma_1$ и γ_2 , зависящие от λ или от α и p , такие, что имеют место следующие соотношения:

$$|(\lambda \nabla h, \nabla \eta)| \leq C_1 \|\lambda\|_{s, \Omega} \|h\|_{1, \Omega} \|\eta\|_{1, \Omega}, | (k_0 h, \eta) | \leq \gamma_p \|k_0\|_{L^p(\Omega)} \|h\|_{1, \Omega} \|\eta\|_{1, \Omega}, \tag{5}$$

$$|(\chi, \varphi)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_1 \|\chi\|_{\Gamma_N} \|\varphi\|_{1, \Omega}, |(\lambda \alpha \varphi, \eta)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_2 \|\lambda\|_{s, \Omega} \|\alpha\|_{\Gamma_N} \|\varphi\|_{1, \Omega} \|\eta\|_{1, \Omega} \quad \forall \varphi, \eta \in H^1(\Omega), \tag{6}$$

$$(\lambda \nabla h, \nabla h) \geq \lambda_* \|h\|_{1, \Omega}^2 \quad \forall h \in \mathcal{T}, \lambda_* \equiv \delta_1 \lambda_0. \tag{7}$$

Из второй оценки в (5) вытекает следующее неравенство для функции $k(\varphi, \cdot)$, удовлетворяющей условию (iv):

$$|((k(\varphi_1, \cdot) - k(\varphi_2, \cdot))\varphi, \eta)| \leq \gamma_p L \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^6(\Omega)} \|\varphi\|_{1, \Omega} \|\eta\|_{1, \Omega} \quad \forall \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \eta \in H^1(\Omega). \tag{8}$$

Умножим уравнение (1) на $h \in \mathcal{T}$ и проинтегрируем по Ω , применяя формулу Грина. Учитывая (2), получим

$$(\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (k(\varphi, \cdot)\varphi, h) + (\lambda \alpha \varphi, h)_{\Gamma_N} = (f, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \forall h \in \mathcal{T}, \varphi|_{\Gamma_D} = \psi. \tag{9}$$

Определение 2.1. Функцию $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую (9), назовем *слабым решением задачи 1*.

Для доказательства разрешимости задачи 1 используется следующая лемма (см. [33]).

Лемма 2.2. Пусть выполняются условия (i). Тогда для любой функции $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует функция $\varphi_0 \in H^1(\Omega)$, такая, что $\varphi_0 = \psi$ на Γ_D , и с некоторой константой C_Γ , зависящей от Ω и Γ_D , справедлива оценка $\|\varphi_0\|_{1, \Omega} \leq C_\Gamma \|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}$.

Из результатов [9], [14] вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. При выполнении условий (i)–(v) существует единственное слабое решение $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи 1, для которого справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{1, \Omega} \leq M_\varphi \equiv C_* M + C_\Gamma \|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}, \tag{10}$$

где C_Γ — константа из леммы 1.2, и

$$M \equiv \|f\|_{\Omega} + \gamma_1 \|\chi\|_{\Gamma_N} + C_{\Gamma} \|\lambda\|_{L^{\infty}(\Omega)} \|\psi\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)} + \\ + C_{\Gamma} \left(\gamma_p \left(A_1 C_{\Gamma}^r \|\psi\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}^r + B_1 \right) + \tilde{C}_4^2 \|\lambda\|_{L^{\infty}(\Gamma_N)} \|\alpha\|_{\Gamma_N} \right) \|\psi\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}. \quad (11)$$

Пусть в дополнение к (i)–(v) выполняется следующее условие:

(vi) $\psi_{\min} \leq \psi \leq \psi_{\max}$ п.в. на Γ_D , $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$ и $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}$ п.в. в Ω , $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ и $\chi_{\min} \leq \chi \leq \chi_{\max}$ п.в. на Γ_N .

Здесь ψ_{\min} , ψ_{\max} , f_{\min} , f_{\max} , χ_{\min} , χ_{\max} — неотрицательные числа, а α_{\min} , α_{\max} и λ_{\min} , λ_{\max} — положительные числа.

Кроме того, будем считать, что коэффициент реакции k удовлетворяет условию

(vii) $k = k_1(\varphi)$, где $k_1(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная функция, при этом функциональные уравнения относительно M_1 и m_1 :

$$k_1(M_1)M_1 = f_{\max} \quad \text{и} \quad k_1(m_1)m_1 = f_{\min}, \quad (12)$$

имеют хотя бы по одному решению.

Положим

$$M = \max\{\psi_{\max}, \chi_{\max} / \lambda_{\min} \alpha_{\min}, M_1\}, \quad m = \min\{\psi_{\min}, \chi_{\min} / \lambda_{\max} \alpha_{\max}, m_1\}. \quad (13)$$

Справедлива следующая теорема (см. [13]).

Теорема 2.2. Пусть выполняются условия (i)–(vii). Тогда для решения $\varphi \in H^1(\Omega)$ задачи 1 выполняется следующий принцип максимума и минимума:

$$m \leq \varphi \leq M \quad \text{п.в. в } \Omega. \quad (14)$$

Здесь константы m и M определены в (13), где M_1 — минимальный корень первого уравнения в (12) и m_1 — максимальный корень второго уравнения в (12).

Замечание 2.1. Для степенных коэффициентов реакции $k_1(\varphi) = \varphi^2$, $k_2(\varphi) = \varphi^2 |\varphi|$ и $k_3(\varphi) = \varphi^4$ из работ [9–11 и 15; 16], образующих монотонные нелинейности $k_i(\varphi)\varphi$, $i = 1, 2, 3$, параметры m_1 и M_1 легко вычисляются.

3. ЗАДАЧА МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В этом разделе исследуется задача управления для системы (1), (2) с двумя мультипликативными управлениями λ , α и распределенным управлением f .

Предположим, что λ , α и f могут изменяться в подмножествах K_1 , K_2 , K_1 , K_2 и K_3 соответственно, которые удовлетворяют следующему условию:

(j) $K_1 \subset H_{\lambda_0}^s(\Omega)$, $s \geq 7/6$, $K_2 \subset L_+^2(\Gamma_N)$ и $K_3 \subset L^2(\Omega)$ — непустые выпуклые замкнутые множества.

Пусть в дополнение к (iii)–(v) коэффициент реакции $k(\varphi, \cdot)$ удовлетворяет условию

(viii) для любых $w_1, w_2 \in B_r = \{w \in H^1(\Omega) : \|w\|_{H^1(\Omega)} \leq r\}$ справедлива оценка

$$\|k(w_1, \cdot) - k(w_2, \cdot)\|_{L^{6/5}(\Omega)} \leq L_1 \|w_1 - w_2\|_{L^5(\Omega)}^r, \quad r > 0,$$

где L_1 — константа, зависящая от r , но не зависящая от w_1, w_2 .

Несложно проверить, что $k(\varphi) = \varphi^4$ удовлетворяет условию (viii) так же, как и условиям (iii)–(v).

Введем функциональное пространство $Y = T^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$, положим $u = (\lambda, \alpha, f)$, $K = K_1 \times K_2 \times K_3$ и введем оператор $F = (F_1, F_2) : H^1(\Omega) \times K \rightarrow Y$ по формулам

$$\langle F_1(\varphi, u), h \rangle = (\lambda \nabla \varphi, \nabla h) + (k(\varphi, \cdot)\varphi, h) + (\lambda \alpha \varphi, h)_{\Gamma_N} - (f, h) - (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \forall h \in \mathcal{T},$$

$$F_2(\varphi) = \varphi|_{\Gamma_D} - \psi \in H^{1/2}(\Gamma_D),$$

и перепишем слабую формулировку (9) задачи 1 в виде операторного уравнения $F(\varphi, u) = 0$.

Пусть $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ — слабополунепрерывный снизу функционал. Рассмотрим следующую задачу мультипликативного управления:

$$J(\varphi, u) \equiv \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \frac{\mu_3}{2} \|f\|_{\Omega}^2 \rightarrow \inf, \quad (15)$$

$$F(\varphi, u) = 0, (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K, s \geq 7/6.$$

Через

$$Z_{ad} = \{(\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K : F(\varphi, u) = 0, J(\varphi, u) < \infty\}$$

обозначим множество допустимых пар для задачи (15).

Пусть в дополнение к (j) выполняются условия:

(jj) множество K_1 ограничено в $L^\infty(\Omega)$ и $L^\infty(\Gamma_N)$;

(jjj) $\mu_0 > 0$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, и множество K_1 ограничено по норме $H^s(\Omega)$, $s \geq 7/6$, а множества K_2 и K_3 ограничены в своих нормах или $\alpha_i > 0$, $i = 0, 1, 2, 3$, и функционал I ограничен снизу.

Будем использовать следующие функционалы качества (см. [33]):

$$I_1(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2 = \int_Q |\varphi - \varphi^d|^2 dx, \quad I_2(\varphi) = \|\varphi - \varphi^d\|_{l, Q}^2. \quad (16)$$

Здесь функция $\varphi^d \in L^2(Q)$ имеет смысл концентрации вещества, измеренной в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$.

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия (i)–(v) и (j)–(jjj). Пусть $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ — слабополунепрерывный снизу функционал и $Z_{ad} \neq \emptyset$. Тогда существует хотя бы одно решение $(x, u) \in X \times K$ задачи управления (15).

Доказательство. Пусть $(\varphi_m, u_m) = (\varphi_m, \lambda_m, \alpha_m, f_m) \in Z_{ad}$ — минимизирующая последовательность, для которой справедливо равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(\varphi_m, u_m) = \inf_{(\varphi, u) \in Z_{ad}} J(\varphi, u) \equiv J^*.$$

Из условий (jj), (jjj) и теоремы 2.1 следует, что выполняются оценки

$$\begin{aligned} \|\lambda_m\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\lambda_m\|_{L^\infty(\Gamma_N)} + \|\lambda_m\|_{s, \Omega} &\leq c_1, \quad s \geq 7/6, \\ \|\alpha_m\|_{\Gamma_N} &\leq c_2, \quad \|f_m\|_{\Omega} \leq c_3, \quad \|\varphi_m\|_{1, \Omega} \leq c_4, \end{aligned} \quad (17)$$

где константы c_1, c_2, c_3 и v_4 не зависят от m .

Из оценки (17) и условия (j) вытекает существование слабых пределов $\lambda^* \in K_1$, $\alpha^* \in K_2$, $f^* \in K_3$ и $\varphi^* \in H^1(\Omega)$ некоторых подпоследовательностей последовательностей соответственно $\{\lambda_m\}$, $\{\alpha_m\}$, $\{f_m\}$ и $\{\varphi_m\}$. С учетом этого при $m \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_m &\rightarrow \varphi^* \text{ слабо в } H^1(\Omega) \text{ и сильно в } L^s(\Omega), \quad s < 6, \\ \varphi_m|_{\Gamma_N} &\rightarrow \varphi^*|_{\Gamma_N} \text{ слабо в } H^{1/2}(\Gamma_N) \text{ и сильно в } L^q(\Gamma_N), \quad q < 4, \\ f_m &\rightarrow f^* \text{ слабо в } L^2(\Omega), \quad \alpha_m \rightarrow \alpha^* \text{ слабо в } L^2(\Gamma_N), \\ \lambda_m &\rightarrow \lambda^* \text{ слабо в } H^r(\Omega) \text{ и сильно в } L^6(\Omega), \quad r \geq 7/6, \\ \lambda_m|_{\Gamma_N} &\rightarrow \lambda^*|_{\Gamma_N} \text{ слабо в } H^{r-1/2}(\Gamma_N) \text{ и сильно в } L^4(\Gamma_N). \end{aligned} \quad (18)$$

Ясно, что $F_2(\varphi^*) = 0$. Покажем, что $F_1(\varphi^*, u^*) = 0$, т.е. что

$$(\lambda^* \nabla \varphi^*, \nabla h) + (k(\varphi^*, \cdot) \varphi^*, h) + (\lambda^* \alpha^* \varphi^*, h)_{\Gamma_N} = (f^*, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \forall h \in \mathcal{T}. \quad (19)$$

При этом пара (φ_m, u_m) удовлетворяет равенству

$$(\lambda_m \nabla \varphi_m, \nabla h) + (k(\varphi_m, \cdot) \varphi_m, h) + (\lambda_m \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N} = (f_m, h) + (\chi, h)_{\Gamma_N} \quad \forall h \in \mathcal{T}. \quad (20)$$

Перейдем в (20) к пределу при $m \rightarrow \infty$. Из (18) следует, что все линейные слагаемые в (20) переходят в соответствующие слагаемые в (19). Поэтому перейдем к нелинейным слагаемым, начиная с $(k(\varphi_m, \cdot) \varphi_m, h)$. Рассуждая как в [9], получаем, что

$$|(k(\varphi_m, \cdot)\varphi_m - k(\varphi^*, \cdot)\varphi^*, h)| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \forall h \in \mathcal{T}.$$

Рассмотрим далее нелинейные слагаемые, содержащие мультипликативные управления. Для $(\lambda_m \nabla \varphi_m, \nabla h)$ справедливо равенство

$$(\lambda_m \nabla \varphi_m, \nabla h) - (\lambda^* \nabla \varphi^*, \nabla h) = ((\lambda_m - \lambda^*) \nabla \varphi_m, \nabla h) + (\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h). \quad (21)$$

Поскольку $\lambda^* \nabla h \in L^2(\Omega)^3$, то в силу (18) получаем, что

$$(\nabla(\varphi_m - \varphi^*), \lambda^* \nabla h) \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \forall h \in \mathcal{T}. \quad (22)$$

Используя последовательность $\{h_n\} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, сходящуюся к h в $H^{-1}(\Omega)$, для первого слагаемого в (21) получаем равенство

$$((\lambda_m - \lambda^*) \nabla \varphi_m, \nabla h) = ((\lambda_m - \lambda^*) \nabla \varphi_m, \nabla h_n) + ((\lambda_m - \lambda^*) \nabla \varphi_m, \nabla(h - h_n)). \quad (23)$$

В силу равномерной ограниченности величин $\|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Omega)}$ и $\|\nabla \varphi_m\|_\Omega$ по m существует такой номер $N = N(\varepsilon, h)$, что для второго слагаемого в (23) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & |((\lambda_m - \lambda^*) \nabla \varphi_m, \nabla(h - h_n))| \leq \\ & \leq \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \varphi_m\|_\Omega \|\nabla(h - h_n)\|_\Omega \leq \varepsilon / 2, \quad n \geq N, m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из равномерной ограниченности величин $\|\nabla h_n\|_{L^\infty(\Omega)}$ по n и $\|\nabla \varphi_m\|_\Omega$ по m и из (18) следует существование такого номера $M = M(\varepsilon, h)$, что для первого слагаемого в (23) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & |((\lambda_m - \lambda^*) \nabla \varphi_m, \nabla h_n)| \leq \\ & \leq \|\lambda_m - \lambda^*\|_\Omega \|\nabla \varphi_m\|_\Omega \|\nabla h_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \varepsilon / 2, \quad m \geq M, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (25)$$

Тогда из (23)–(25) вытекает, что

$$((\lambda_m - \lambda^*) \nabla \varphi_m, \nabla h) \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \forall h \in \mathcal{T}. \quad (26)$$

В таком случае $(\lambda_m \nabla \varphi_m, \nabla h) \rightarrow (\lambda^* \nabla \varphi^*, \nabla h)$ при $m \rightarrow \infty$ для всех $h \in \mathcal{T}$. Отсюда с учетом (22) заключаем, что

$$(\lambda_m \nabla \varphi_m, \nabla h) \rightarrow (\lambda^* \nabla \varphi^*, \nabla h) \text{ при } m \rightarrow \infty \forall h \in \mathcal{T}. \quad (27)$$

Для нелинейного слагаемого $(\lambda_m \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N}$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & (\lambda_m \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N} - (\lambda^* \alpha^* \varphi^*, h)_{\Gamma_N} = \\ & = ((\lambda_m - \lambda^*) \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N} + (\lambda^* \alpha_m (\varphi_m - \varphi^*), h)_{\Gamma_N} + (\lambda^* (\alpha_m - \alpha^*) \varphi^*, h)_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку $\lambda^* \varphi^* h \in L^2(\Gamma_N)$, то для третьего слагаемого в правой части (28) имеем

$$(\alpha_m - \alpha^*, \lambda^* \varphi^* h)_{\Gamma_N} \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \forall h \in \mathcal{T}. \quad (29)$$

Используя $\{h_n\}$, для второго слагаемого получаем

$$(\lambda^* \alpha_m (\varphi_m - \varphi^*), h)_{\Gamma_N} = (\lambda^* \alpha_m (\varphi_m - \varphi^*), h_n)_{\Gamma_N} + (\lambda^* \alpha_m (\varphi_m - \varphi^*), h - h_n)_{\Gamma_N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

В силу равномерной ограниченности по m величин $\|\alpha_m\|_{\Gamma_N}$ и $\|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^4(\Gamma_N)}$, существует такое число $N = N(\varepsilon, h)$, с которым для второго слагаемого в (30) выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & |(\lambda^* \alpha_m (\varphi_m - \varphi^*), h - h_n)_{\Gamma_N}| \leq \\ & \leq \|\lambda^*\|_{L^\infty(\Gamma_N)} \|\alpha_m\|_{\Gamma_N} \|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^4(\Gamma_N)} \|h_n - h\|_{L^4(\Gamma_N)} \leq \varepsilon / 2, \quad n \geq N, m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (31)$$

В силу равномерной ограниченности по m и n соответственно величин $\|\alpha_m\|_{L^2(\Gamma_N)}$ и $\|h_n\|_{L^6(\Gamma_N)}$, существует число $M = M(\varepsilon, h)$, с которым первое слагаемое в (30) удовлетворяет неравенству

$$|(\lambda^* \alpha_m (\varphi_m - \varphi^*), h_n)_{\Gamma_N}| \leq \|\lambda^*\|_{L^\infty(\Gamma_N)} \|\alpha_m\|_{\Gamma_N} \|\varphi_m - \varphi^*\|_{L^3(\Gamma_N)} \|h_n\|_{L^6(\Gamma_N)} \leq \varepsilon / 2, \quad m \geq M, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (32)$$

Тогда из (31) и (32) вытекает, что

$$|(\lambda^* \alpha_m (\varphi_m - \varphi^*), h)_{\Gamma_N}| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \quad \forall h \in \mathcal{T}. \quad (33)$$

Аналогично для первого слагаемого в (28) справедливо равенство

$$((\lambda_m - \lambda^*) \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N} = ((\lambda_m - \lambda^*) \alpha_m \varphi_m, h_n)_{\Gamma_N} + ((\lambda_m - \lambda^*) \alpha_m \varphi_m, h - h_n)_{\Gamma_N}. \quad (34)$$

В силу равномерной ограниченности по m и n соответственно величин $\|\alpha_m\|_{L^2(\Gamma_N)}$ и $\|h_n\|_{L^\infty(\Gamma_N)}$, существует число $M = M(\varepsilon, h)$, с которым первое слагаемое в (34) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} & |((\lambda_m - \lambda^*) \alpha_m \varphi_m, h_n)_{\Gamma_N}| \leq \\ & \leq \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^4(\Gamma_N)} \|\alpha_m\|_{\Gamma_N} \|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)} \|h_n\|_{L^\infty(\Gamma_N)} \leq \varepsilon / 2, \quad m \geq M, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (35)$$

В силу равномерной ограниченности по m и n соответственно величин

$\|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Gamma_N)}$, $\|\alpha_m\|_{L^2(\Gamma_N)}$ и $\|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)}$, существует число $N = N(\varepsilon, h)$, с которым первое слагаемое в (34) удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} & |((\lambda_m - \lambda^*) \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N}| \leq \\ & \leq \|\lambda_m - \lambda^*\|_{L^\infty(\Gamma_N)} \|\alpha_m\|_{\Gamma_N} \|\varphi_m\|_{L^4(\Gamma_N)} \|h - h_n\|_{L^4(\Gamma_N)} \leq \varepsilon / 2, \quad m \geq N, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из (35) и (36) вытекает, что

$$|(\lambda_m \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N} - (\lambda^* \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N}| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \quad \forall h \in \mathcal{T}. \quad (37)$$

В таком случае из (29), (33) и (37) заключаем, что

$$|(\lambda_m \alpha_m \varphi_m, h)_{\Gamma_N} - (\lambda^* \alpha^* \varphi^*, h)_{\Gamma_N}| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \quad \forall h \in \mathcal{T}.$$

Поскольку функционал J слабополунепрерывен снизу на $H^1(\Omega) \times K$, тогда из (17) следует, что $J(\varphi^*, u^*) = J^*$. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Отметим, что требования на гладкость λ уменьшены по сравнению с [26], но остаются высокими, поскольку управления λ и α мультипликативно входят в граничное условие на Γ_N . Для сравнения при условии Дирихле можно ограничиться тем, что $\lambda \in H^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $s > 1/2$ (см. [34]).

Замечание 3.2. Ясно, что все функционалы качества из (16) удовлетворяют условиям теоремы 3.1.

4. СИСТЕМА ОПТИМАЛЬНОСТИ И ПРИНЦИП BANG–BANG

В этом разделе и далее будем считать, что $k = \varkappa \varphi^4$, где \varkappa — размерный параметр. Через $Y^* = \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)^*$ обозначим двойственное пространство к пространству Y , введенному в разд. 3.

Легко показать, что производная Фреше оператора $F : H^1(\Omega) \times K \rightarrow Y$ по φ в каждой точке $(\hat{\varphi}, \hat{u}) = (\hat{\varphi}, \hat{\lambda}, \hat{\alpha}, \hat{f})$ является линейным непрерывным оператором $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : X \rightarrow Y$, отображающим каждый элемент $\tau \in X$ в элемент $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})\tau = (\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in Y$.

Здесь элементы $\hat{y}_1 \in \mathcal{T}^*$, $\hat{y}_2 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ определяются следующими соотношениями:

$$\langle \hat{y}_1, \tau \rangle = (\hat{\lambda} \nabla \tau, \nabla h) + 5\varkappa(\hat{\varphi}^4 \tau, h) + (\hat{\lambda} \hat{\alpha} \tau, h)_{\Gamma_N} \quad \forall h \in \mathcal{T}, \quad \hat{y}_2 = \tau|_{\Gamma_D}. \quad (38)$$

Через $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})^* : Y^* \rightarrow H^1(\Omega)^*$ обозначим оператор, сопряженный с оператором $F'_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u})$.

В соответствии с общей теорией гладковыпуклых экстремальных задач (см. [35]) введем элемент $y^* = (\theta, \zeta) \in Y^* = \mathcal{T} \times H^{1/2}(\Gamma_D)$, на который будем ссылаться как на сопряженное состояние, и определим Лагранжиан $\mathcal{L} : H^1(\Omega) \times K \times Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ по формуле

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi, u, y^*) &= J(\varphi, u) + \langle y^*, F(\varphi, u) \rangle_{Y^* \times Y} \equiv J(\varphi, u) + \\ &+ \langle F_1(\varphi, u), \theta \rangle_{T^* \times T} + \langle \zeta, F_2(\varphi) \rangle_{1/2, \Gamma_D}. \end{aligned} \quad (39)$$

Из лемм 2.1, 2.2 и теоремы Лакса–Мильграма вытекает, что для любой пары $(f_0, \psi_0) \in T^* \times H^{1/2}(\Gamma_D)$ существует единственное решение $\tau \in H^1(\Omega)$ линейной задачи

$$(\hat{\lambda} \nabla \tau, \nabla h) + 5\alpha(\hat{\varphi}^4 \tau, h) + (\hat{\lambda} \hat{\alpha} \tau, h)_{\Gamma_N} = \langle f_0, h \rangle_{T^* \times T} \quad \forall h \in T, \quad \tau|_{\Gamma_D} = \psi_0. \quad (40)$$

Тогда оператор $F_\varphi(\hat{\varphi}, \hat{u}) : X \rightarrow Y$ — изоморфизм, а из гл. 6 [33] вытекает следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия (i), (ii) и (j)–(iii), при этом $k = \alpha\varphi^4$ и элемент $(\hat{\varphi}, \hat{u}) \in H^1(\Omega) \times K$ является локальным минимумом задачи (15). Предположим также, что функционал качества $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируем по Фреше по состоянию φ в точке $\hat{\varphi}$. Тогда

1) существует ненулевой множитель Лагранжа $y^* = (\theta, \zeta) \in Y^*$ такой, что имеет место уравнение Эйлера–Лагранжа $F'_\varphi(\hat{\varphi}, u)^* y^* = -J'_\varphi(\hat{\varphi}, u) \hat{a} \in H^1(\Omega)^*$, эквивалентное соотношению

$$(\hat{\lambda} \nabla \tau, \nabla \theta) + 5\alpha(\hat{\varphi}^4 \tau, \theta) + (\hat{\lambda} \hat{\alpha} \tau, \theta)_{\Gamma_N} + \langle \zeta, \tau \rangle_{1/2, \Gamma_D} = -(\mu_0 / 2) \langle I'_\varphi(\hat{\varphi}), \tau \rangle \quad \forall \tau \in H^1(\Omega), \quad (41)$$

2) выполняется принцип минимума $L(\hat{\varphi}, \hat{u}, y^*) \leq L(\hat{\varphi}, u, y^*) \quad \forall u \in K$, эквивалентный неравенствам

$$\mu_1(\hat{\lambda}, \lambda - \hat{\lambda})_{s, \Omega} + ((\lambda - \hat{\lambda}) \nabla \hat{\varphi}, \nabla \theta) + ((\lambda - \hat{\lambda}) \hat{\alpha} \hat{\varphi}, \theta)_{\Gamma_N} \geq 0 \quad \forall \lambda \in K_1, \quad (42)$$

$$\mu_2(\hat{\alpha}, \alpha - \hat{\alpha})_{\Gamma_N} + (\hat{\lambda}(\alpha - \hat{\alpha}) \hat{\varphi}, \theta)_{\Gamma_N} \geq 0 \quad \forall \alpha \in K_2, \quad (43)$$

$$\mu_3(\hat{f}, f - \hat{f}) - (f - \hat{f}, \theta) \geq 0 \quad \forall f \in K_3. \quad (44)$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа (41), неравенства (42)–(44) и слабая формулировка (9) задачи 1 представляют собой систему оптимальности для задачи управления (15).

С использованием системы оптимальности, в большей степени принципа минимума, установим свойство релейности управлений α и f для задачи управления, отвечающей функционалу качества $I_1(\varphi)$ из (16) и в случае, когда $k(\varphi) = \alpha\varphi^4$, $\lambda \equiv \text{const} > 0$:

$$J(\varphi) \equiv \mu_0 \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2 \rightarrow \inf, \quad F(\varphi, (\alpha, f)) = 0, \quad (\varphi, (\alpha, f)) \in H^1(\Omega) \times K_2 \times K_3. \quad (45)$$

Пусть выполняется условие

(j') $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ п.в. на Γ_N для всех $\alpha \in K_2$ и $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$ п.в. в Ω для всех $f \in K_3$.

Здесь $\alpha_{\min}, \alpha_{\max}, f_{\min}, f_{\max}$ — положительные числа.

Для задачи (45) неравенства (43), (44) принимают следующий вид:

$$((\alpha - \hat{\alpha}) \hat{\varphi}, \theta)_{\Gamma_N} \geq 0 \quad \forall \alpha \in K_2, \quad (46)$$

$$-(f - \hat{f}, \theta) \geq 0 \quad \forall f \in K_3. \quad (47)$$

Из (46), (47) несложно получить (например, методом от противного) неравенства

$$(\alpha - \hat{\alpha}) \hat{\varphi} \geq 0 \text{ п.в. на } \Gamma_N \quad \forall \alpha \in K_2, \quad -(f - \hat{f}) \theta \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega \quad \forall f \in K_3.$$

Если справедлив принцип максимума и минимума для концентрации φ , то из него вытекает неравенство $\varphi \geq m$ на Γ_N . С учетом этого из последних неравенств получаем следующий принцип минимума для экстремальной задачи (45):

$$(\alpha - \hat{\alpha}) \theta \geq 0 \text{ п.в. на } \Gamma_N \quad \forall \alpha \in K_2, \quad (48)$$

$$-(f - \hat{f}) \theta \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega \quad \forall f \in K_3. \quad (49)$$

Из неравенств (48), (49) вытекает, что оптимальные управления $\alpha(x)$ и $f(x)$ задачи (45) могут принимать, в зависимости от знака множителя Лагранжа $\theta(x)$, только максимальные и минимальные значения $\alpha_{\max}, \alpha_{\min}$ и f_{\max}, f_{\min} соответственно.

В таком случае говорят, что оптимальные управления α и f удовлетворяют *свойству релейности*, иначе, для этих управлений справедлив *принцип bang–bang*. Другими словами, подобное поведение оптимального управления интерпретируют как переключение между двумя состояниями или скачки из одного состояния в другое.

Если не удастся исключить ситуацию, когда $\theta = 0$ на некоторых подмножествах $D_0 \subset \Omega$ и $\Gamma_N^0 \subset \Gamma_N$ положительной меры, которая приводит к неопределенности, в рамках которой управления f и α на указанных подмножествах могут как перескочить из одного граничного значения в другое, так и не совершать такой скачок (см. (48), (49)), тогда свойство релейности называют *нестрогим*.

Покажем, что для управления f справедлив *строгий* принцип bang–bang, при котором указанная выше неопределенность не возникает. Для этого достаточно показать, что $\theta \neq 0$ п.в. в Ω .

Из уравнения Эйлера–Лагранжа (41) при $I(\varphi) = I_1(\varphi)$ приходим к равенству

$$-\Delta\theta + 5\alpha\lambda^{-1}\hat{\varphi}^4\theta = -\lambda^{-1}\mu_0(\hat{\varphi} - \varphi_d) \text{ п.в. в } \Omega. \tag{50}$$

Из (50) вытекает, что если $\hat{\varphi} \neq \varphi_d$ п.в. в Ω , то $\theta \neq 0$ п.в. в Ω . В таком случае говорят, что имеет место *строгое* свойство релейности.

Если $\varphi = \varphi^d$ в некоторой подобласти $Q \subset \Omega$ положительной меры, то из уравнения (50) вытекает, что

$$-\Delta\theta + \tilde{k}\theta = 0 \text{ п.в. в } Q, \quad \tilde{k} = 5\alpha\lambda^{-1}\hat{\varphi}^4 \in L^{3/2}(\Omega). \tag{51}$$

В то же время, если $\theta = 0$ п.в. в $Q_0 \subset Q \subset \Omega$, $\mu(Q_0) > 0$, то $\theta = 0$ п.в. в Ω , что вытекает из свойства единственности продолжения для эллиптических уравнений (см. [19], [32]). Но равенство $\theta = 0$ п.в. в Ω противоречит теореме 4.1. Таким образом, $\theta \neq 0$ п.в. в Ω .

Из вышесказанного следует, что для управления f справедлив *строгий* принцип bang–bang или управление f удовлетворяет *строгому* свойству релейности. Здесь же отметим работы [14]–[18], посвященные исследованию свойства релейности оптимального управления.

5. СИСТЕМА ОПТИМАЛЬНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Нашей дальнейшей целью является анализ единственности и устойчивости (оптимальных) решений задачи (15) только с двумя мультипликативными управлениями λ и α . При этом требования на функцию λ будут более жесткими.

Будем считать, что вместо (j) и (jjj) выполняются условия

(j₀) $K_1 \subset H_{\lambda_0}^r(\Omega)$, $r \geq 3/2$, и $K_2 \subset L_+^2(\Gamma_N)$ — непустые выпуклые замкнутые множества;

(jjj₀) $\mu_0 > 0$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, 2$, и множество $K = K_1 \times K_2$ ограничено или $\mu_i > 0$, $i = 0, 1, 2$, и функционал I ограничен снизу.

Вместо (15) будем рассматривать следующую задачу управления:

$$\begin{aligned} J(\varphi, u) &\equiv \frac{\mu_0}{2} I(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \\ F(\varphi, u) &= 0, (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K, u = (\lambda, \alpha), s > 3/2. \end{aligned} \tag{52}$$

Замечание 5.1. Ясно, что для задачи (52) как для частного случая задачи (15), но при более жестких условиях на управление λ , справедливы соответствующие аналоги теорем 3.1 и 4.1.

Далее нам понадобятся дополнительные свойства оптимальных решений задачи (52). Чтобы их получить, вместе с исходной задачей управления (52), рассмотрим возмущенную задачу

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\varphi, u) &\equiv \frac{\mu_0}{2} \tilde{I}(\varphi) + \frac{\mu_1}{2} \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + \frac{\mu_2}{2} \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, s > 3/2, \\ F(\varphi, u) &= 0, (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K, \end{aligned} \tag{53}$$

заменяя функционал $I : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ в (52) возмущенным функционалом $\tilde{I} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть $(\varphi_i, u_i) = (\varphi_i, \lambda_i, \alpha_i) \in H^1(\Omega) \times K$ — решения задачи (52) при $i = 1$ и решение задачи (53) при $i = 2$. Из теорем 3.1 и 2.1 вытекает, что для управлений (λ_i, α_i) и состояния φ_i справедливы следующие оценки:

$$\|\lambda_i\|_{s, \Omega} \leq C_\lambda, \|\alpha_i\|_{\Gamma_N} \leq C_\alpha, \|\varphi_i\|_{1, \Omega} \leq M_\varphi. \tag{54}$$

Здесь C_λ и C_α — положительные константы, а константа M_φ определена в (10).

Через $y_i^* \equiv (\theta_i, \zeta_i)$, $i = 1, 2$, обозначим нетривиальные множители Лагранжа, отвечающие решениям (φ_i, u_i) задачи (52). В силу теоремы 4.1 указанные множители определяются однозначно и удовлетворяют соотношениям

$$(\lambda_i \nabla \tau, \nabla \theta_i) + 5\kappa(\varphi_i^4 \tau, \theta_i) + (\lambda_i \alpha_i \tau, \theta_i)_{\Gamma_N} + \langle \zeta_i, \tau \rangle_{\Gamma_D} = -(\mu_0 / 2) \langle I'_\varphi(\varphi_i), \tau \rangle \quad \forall \tau \in H^1(\Omega). \quad (55)$$

Положим

$$\begin{aligned} v_i &= \lambda_i \alpha_i, i = 1, 2, \lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \alpha = \alpha_1 - \alpha_2, v = v_1 - v_2 = \lambda \alpha_1 + \lambda_2 \alpha = \lambda_1 \alpha + \lambda \alpha_2, \\ \varphi &= \varphi_1 - \varphi_2, \psi = \psi_1 - \psi_2, \theta = \theta_1 - \theta_2, \zeta = \zeta_1 - \zeta_2. \end{aligned} \quad (56)$$

Первым из важных свойств представленных оптимальных решений является алгебраическое неравенство, показывающее связь разностей (56) и производных Фреше функционалов $I(\varphi)$ и $\tilde{I}(\varphi)$ в точках φ_1 и φ_2 . Этот факт отражен в следующей теореме.

Теорема 5.1. Пусть выполняются условия (i), (ii) и (j_0) , (jjj_0) , $k(\varphi) = \kappa \varphi^4$, и пусть функционалы I и \tilde{I} непрерывно дифференцируемы по φ . Пусть тройки $(\varphi_1, \lambda_1, \alpha_1)$ и $(\varphi_2, \lambda_2, \alpha_2) \in H^1(\Omega) \times K$ являются решениями соответственно задач (52) и (53), и пусть $y_i^* = (\theta_i, \zeta_i) \in Y^*$, $i = 1, 2$, — множители Лагранжа, соответствующие решениям $\varphi_i, \lambda_i, \alpha_i$, $i = 1, 2$. Тогда для разностей φ, λ, α и θ, ζ , определенных в (56), справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &(\mu_0 / 2) \langle I_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle + \langle \zeta, \psi \rangle_{\Gamma_D} + \mu_1 \| \lambda \|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu_2 \| \alpha \|_{\Gamma_N}^2 \leq A \equiv \\ &\equiv -\kappa[(k_1 \varphi, \theta) + 5(k_2 \varphi^2, \theta_2)] - (\lambda \nabla \varphi, \nabla(\theta_1 + \theta_2)) - (\lambda \alpha, \varphi_1 \theta_1 + \varphi_2 \theta_2)_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (57)$$

Доказательство. Вычтем равенство (9) при $k(\varphi) = \kappa \varphi^4$, записанное для (φ_2, u_2) , из (9) при $k(\varphi) = \kappa \varphi^4$, записанного для (φ_1, u_1) . Учитывая соотношения

$$\varphi_1^5 - \varphi_2^5 = (\varphi_1 - \varphi_2)(\varphi_1^4 + \varphi_1^3 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_2^3 + \varphi_2^4) \equiv k_0 \varphi, k_0 = \varphi_1^4 + \varphi_1^3 \varphi_2 + \varphi_1^2 \varphi_2^2 + \varphi_1 \varphi_2^3 + \varphi_2^4 \geq 0,$$

$$(\lambda_1 \nabla \varphi_1, \nabla h) - (\lambda_2 \nabla \varphi_2, \nabla h) = (\lambda_1 \nabla \varphi, \nabla h) + (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla h),$$

$$(v_1 \varphi_1, h)_{\Gamma_N} - (v_2 \varphi_2, h)_{\Gamma_N} = (v_1, \varphi h)_{\Gamma_N} + (v, \varphi_2 h)_{\Gamma_N}, v_i = \lambda_i \alpha_i, v = v_1 - v_2, i = 1, 2,$$

приходим к равенству

$$(\lambda_1 \nabla \varphi, \nabla h) + (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla h)_{\Gamma_N} + \kappa(k_0 \varphi, h) + (v_1, \varphi h)_{\Gamma_N} + (v, \varphi_2 h)_{\Gamma_N} = 0 \quad \forall h \in \mathcal{T}. \quad (58)$$

Положим далее $h = \theta$ в (58). Будем иметь

$$(\lambda_1 \nabla \varphi, \nabla \theta) + (\lambda \varphi_2, \theta) + \kappa(k_0 \varphi, \theta) + (v_1, \varphi \theta)_{\Gamma_N} + (v, \varphi_2 \theta)_{\Gamma_N} = 0. \quad (59)$$

Вычитая (55) при $i = 2$ из (55) при $i = 1$, с учетом соотношений

$$(\varphi_1^4 \tau, \theta_1) - (\varphi_2^4 \tau, \theta_2) = (\varphi_1^4 \tau, \theta) + ((\varphi_1^4 - \varphi_2^4) \tau, \theta_2) = (\varphi_1^4 \tau, \theta) + ((\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \tau, \theta_2),$$

$$(\lambda_1 \nabla \tau, \nabla \theta_1) - (\lambda_2 \nabla \tau, \nabla \theta_2) = (\lambda \nabla \tau, \nabla \theta_1) + (\lambda_2 \nabla \tau, \nabla \theta),$$

$$(v_1 \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} - (v_2 \tau, \theta_2)_{\Gamma_N} = (v, \tau \theta_1)_{\Gamma_N} + (v_2 \tau, \theta)_{\Gamma_N},$$

получим

$$\begin{aligned} &(\lambda \nabla \tau, \nabla \theta_1) + (\lambda_2 \nabla \tau, \nabla \theta) + 5\kappa(\varphi_1^4 \tau, \theta) + 5\kappa((\varphi_1^4 - \varphi_2^4) \tau, \theta_2) + \\ &+ (v \tau, \theta_1)_{\Gamma_N} + (v_2 \tau, \theta)_{\Gamma_N} + \langle \zeta, h \rangle_{\Gamma_D} = -(\mu_0 / 2) \langle I'_\varphi(\varphi) - I'_\varphi(\varphi_2), \tau \rangle \quad \forall \tau \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (60)$$

Подставляя $\tau = \varphi$ в (60), получим

$$(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_1) + (\lambda_2 \nabla \varphi, \nabla \theta) + 5\kappa(\varphi_1^4 \varphi, \theta) + 5\kappa((\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) \varphi^2, \theta_2) +$$

$$+(v\varphi, \theta)_{\Gamma_N} + (v_2\varphi, \theta)_{\Gamma_N} + \langle \zeta, \psi \rangle_{\Gamma_D} = -(\mu_0 / 2) \langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle. \quad (61)$$

Вычитая (59) из (61), с учетом соотношений

$$\begin{aligned} & (\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_1) + (\lambda_2 \nabla \varphi, \nabla \theta) - (\lambda_1 \nabla \varphi, \nabla \theta) - (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta) = \\ & = (\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_1) - (\lambda \nabla \varphi_1, \nabla \theta) = -(\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta) - (\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_1) + (\lambda \nabla \varphi, \nabla (\theta_1 + \theta_2)), \\ & (v, \varphi \theta_1)_{\Gamma_N} + (v_2 \varphi, \theta)_{\Gamma_N} - (v_1, \varphi \theta)_{\Gamma_N} - (v, \varphi_2 \theta)_{\Gamma_N} = \\ & = (v, \varphi \theta_1)_{\Gamma_N} - (v, \varphi_1 \theta)_{\Gamma_N} = -(v, \varphi_2 \theta)_{\Gamma_N} - (v, \varphi \theta_1)_{\Gamma_N} + (v \varphi, \theta_1 + \theta_2)_{\Gamma_N}, \\ & 5\kappa(\varphi_1^4 \varphi, \theta) + 5\kappa((\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi^2, \theta_2) - \kappa(k_0 \varphi, \theta) = \kappa(k_1 \varphi, \theta) + 5\kappa(k_2 \varphi^2, \theta_2), \\ & k_1 \equiv 4\varphi_1^4 - \varphi_1^3 \varphi_2 - \varphi_1^2 \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2^3 - \varphi_2^4, \quad k_2 \equiv (\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2), \end{aligned} \quad (62)$$

получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \kappa(k_1 \varphi, \theta) + 5\kappa(k_2 \varphi^2, \theta_2) - (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta) - (\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_1) + (\lambda \nabla \varphi, \nabla (\theta_1 + \theta_2)) - \\ & -(v, \varphi_2 \theta)_{\Gamma_N} - (v, \varphi \theta_1)_{\Gamma_N} + (v \varphi, \theta_1 + \theta_2)_{\Gamma_N} + \langle \zeta, \psi \rangle_{\Gamma_D} = -(\mu_0 / 2) \langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (63)$$

Положим $\lambda = \lambda_2$ в неравенстве (42), записанном при $\hat{\lambda} = \lambda_1$, $\hat{\alpha} = \alpha_1$, $\hat{\varphi} = \varphi_1$ и $\theta = \theta_1$. С учетом обозначений (56) получим

$$-\mu_1(\lambda_1, \lambda)_{s, \Omega} - (\lambda \nabla \varphi_1, \nabla \theta_1) - (\lambda \alpha_1 \varphi_1, \theta_1)_{\Gamma_N} \geq 0.$$

Полагая $\lambda = \lambda_1$ в неравенстве (42), записанном для $\hat{\lambda} = \lambda_2$, $\hat{\alpha} = \alpha_2$, $\hat{\varphi} = \varphi_2$ и $\theta = \theta_2$, получим

$$\mu_1(\lambda_2, \lambda)_{s, \Omega} + (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta_2) + (\lambda \alpha_2 \varphi_2, \theta_2)_{\Gamma_N} \geq 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к следующей оценке:

$$-(\lambda \nabla \varphi_1, \nabla \theta_1) + (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta_2) - (\lambda \alpha_1 \varphi_1, \theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda \alpha_2 \varphi_2, \theta_2)_{\Gamma_N} \geq \mu_1 \|\lambda\|_{s, \Omega}^2. \quad (64)$$

Положим $\alpha = \alpha_2$ в неравенстве (43), записанном при $\hat{\alpha} = \alpha_1$, $\hat{\lambda} = \lambda_1$, $\hat{\varphi} = \varphi_1$ и $\theta = \theta_1$. С учетом обозначений (56) выводим

$$-\mu_2(\alpha_1, \alpha)_{\Gamma_N} - (\lambda_1 \alpha \varphi_1, \theta_1)_{\Gamma_N} \geq 0.$$

Полагая $\alpha = \alpha_1$ в (43), записанном для $\hat{\alpha} = \alpha_2$, $\hat{\lambda} = \lambda_2$, $\hat{\varphi} = \varphi_2$ и $\theta = \theta_2$, получим

$$\mu_2(\alpha_2, \alpha)_{\Gamma_N} + (\lambda_2 \alpha \varphi_2, \theta_2)_{\Gamma_N} \geq 0.$$

Складывая эти неравенства, приходим к оценке

$$-(\lambda_1 \alpha \varphi_1, \theta_1)_{\Gamma_N} + (\lambda_2 \alpha \varphi_2, \theta_2)_{\Gamma_N} \geq \mu_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2. \quad (65)$$

В свою очередь, складывая (64) и (65) и рассуждая как в [26], получаем

$$\begin{aligned} & -(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_1) - (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \theta) - (v, \varphi \theta_1)_{\Gamma_N} - (v, \varphi_2 \theta)_{\Gamma_N} \geq \\ & \geq \mu_1 \|\lambda\|_{s, \Omega}^2 + \mu_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + (\lambda \alpha, \varphi \theta_1 + \varphi_2 \theta_2)_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (66)$$

Наконец, с учетом (66) из (63) мы выводим основное неравенство (57). Теорема доказана.

В заключение раздела выведем оценку нормы разности φ через соответствующие нормы разностей управлений λ , α и возмущенной функции ψ . Для этого обратимся к равенству (58), в дополнение к (56) полагая

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0, \quad (67)$$

где $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2 \in \mathcal{T}$, $\varphi_0 = \varphi_0^1 - \varphi_0^2 \in H^1(\Omega)$.

Из леммы 2.2 и линейности оператора частичного следа $\gamma|_{\Gamma_D}$ вытекает

$$\|\varphi_0\|_{1,\Omega} \leq C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}. \quad (68)$$

Используя представление (67) и полагая $h = \tilde{\varphi}$ в (58), получим

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \nabla \tilde{\varphi}, \nabla \tilde{\varphi}) + \kappa(k_0 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) + (v_1 \tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N} &= -(\lambda_1 \nabla \varphi_0, \nabla \tilde{\varphi}) - (\lambda \nabla \varphi_2, \nabla \tilde{\varphi})_{\Gamma_N} - \\ &- (v_1 \varphi_0, \tilde{\varphi})_{\Gamma_N} - \kappa(k_0 \varphi_0, \tilde{\varphi}) - (v, \varphi_2 \tilde{\varphi})_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (69)$$

Поскольку $k_0 \in L^p_+(\Omega)$, $p \geq 3/2$, $v_1 = \alpha_1 \lambda_1 \geq 0$ на Γ_N , то, применяя лемму 2.1, с учетом оценок (54) и обозначений (56) из (69) приходим к оценке

$$\begin{aligned} \lambda_* \|\tilde{\varphi}\|_{1,\Omega} &\leq C_1 C_\lambda C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + C_1 M_\varphi \|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \\ &+ 5\kappa C_6^6 M_\varphi^4 C_\Gamma \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \gamma_2 M_\varphi (C_\lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N} + C_\alpha \|\lambda\|_{s,\Omega}) = \\ &= C_\Gamma (C_1 C_\lambda + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha + 5\kappa C_6^6 M_\varphi^4) \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + M_\varphi (C_1 + \gamma_2 C_\alpha) \|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_2 M_\varphi C_\lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N}. \end{aligned}$$

С учетом (68) оценка для нормы разности φ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{1,\Omega} &\leq \omega_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \omega_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \omega_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}, \\ \omega_1 &= C_* M_\varphi (C_1 + \gamma_2 C_\alpha), \quad \omega_2 = \gamma_2 C_* C_\lambda M_\varphi, \\ \omega_3 &= C_* C_\Gamma (C_1 C_\lambda + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha + 5\kappa C_6^6 M_\varphi^4 + \lambda_*). \end{aligned} \quad (70)$$

6. ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Используя теорему 5.1, выведем в данном разделе оценки локальной устойчивости оптимальных решений задачи (52) для конкретных функционалов качества.

Рассмотрим следующую задачу управления:

$$\begin{aligned} J(\varphi, u) &= (\mu_0 / 2) \|\varphi - \varphi^d\|_Q^2 + (\mu_1 / 2) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (\mu_2 / 2) \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \rightarrow \inf, \\ F(\varphi, u) &= 0, (\varphi, u) \in H^1(\Omega) \times K, s > 3/2, \end{aligned} \quad (71)$$

отвечающую функционалу качества $I_1(\varphi)$.

Через $(\varphi_1, u_1) \in H^1(\Omega) \times K$ обозначим решение задачи (71), отвечающее заданным функциям $\varphi^d = \varphi_1^d \in L^2(Q)$ и $\psi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$, а через $(\varphi_2, u_2) \in H^1(\Omega) \times K$ обозначим решение задачи (71), отвечающее возмущенным функциям $\tilde{\varphi}^d \equiv \varphi_2^d \in L^2(Q)$ и $\psi_2 \in H^{1/2}(\Gamma_D)$.

В дополнение к (56) положим $\varphi^d = \varphi_1^d - \varphi_2^d$. В случае задачи (71) справедливо равенство

$$\langle I'_\varphi(\varphi_1) - \tilde{I}'_\varphi(\varphi_2), \varphi \rangle = 2(\varphi - \varphi^d, \varphi)_Q = 2(\|\varphi\|_Q^2 - (\varphi, \varphi^d)_Q). \quad (72)$$

С учетом (72) неравенство (57) и соотношения (55), (19) для множителей Лагранжа θ_i, ζ_i , отвечающих решениям $(\varphi_i, \lambda_i, \alpha_i)$, $i = 1, 2$, принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_0 (\|\varphi\|_Q^2 - (\varphi, \varphi^d)_Q) + \langle \zeta, \psi \rangle_{\Gamma_D} + \mu_1 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \mu_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \leq \\ A \equiv -\kappa((k_1 \varphi, \theta) + 5(k_2 \varphi^2, \theta_2)) - (\lambda \nabla \varphi, \nabla(\theta_1 + \theta_2)) - (\lambda \alpha, \varphi_1 \theta_1 + \varphi_2 \theta_2)_{\Gamma_N}, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_i \nabla \tau, \nabla \theta_i) + 5\kappa(\varphi_i^4 \tau, \theta_i) + (\lambda_i \alpha_i \tau, \theta_i)_{\Gamma_N} + \langle \zeta_i, h \rangle_{\Gamma_D} = \\ = -\mu_0(\varphi_i - \varphi_i^d, \tau)_Q \quad \forall \tau \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (74)$$

Справедлива оценка

$$|(\varphi_i - \varphi_i^d, \theta_i)_Q| \leq M_\varphi^0 \|\theta_i\|_{1,\Omega}, M_\varphi^0 \equiv M_\varphi + \max(\|\varphi_1^d\|_Q, \|\varphi_2^d\|_Q). \quad (75)$$

Полагая $\tau = \theta_i$ в (74), с учетом (75) выводим

$$\|\theta_i\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 C_* M_\varphi^0, C_* = \lambda_*^{-1}. \quad (76)$$

С помощью оценки (70) и неравенств леммы 2.1 оценим слагаемые, входящие в выражение (73) для A , через нормы разностей λ , α и ψ . Начнем со второго слагаемого. С учетом обозначений (62) получим

$$\begin{aligned} 5 |(k_2 \varphi^2, \theta_2)| &\leq 5 |(\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi^2, \theta_2| \leq 20\mu_0 C_6^6 C_* M_\varphi^3 M_\varphi^0 \|\varphi\|_{1,\Omega}^2 \leq \\ &\leq 60\mu_0 C_6^6 C_* M_\varphi^3 M_\varphi^0 (\omega_1^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \omega_2^2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \omega_3^2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2), \\ |(\lambda\alpha, \varphi_1\theta_1 + \varphi_2\theta_2)_{\Gamma_N}| &\leq \mu_0 \gamma_2 C_* M_\varphi M_\varphi^0 (\|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2), \\ |(\lambda\nabla\varphi, \nabla(\theta_1 + \theta_2))| &\leq 2\mu_0 C_1 C_* M_\varphi^0 \|\lambda\|_{s,\Omega} (\omega_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \omega_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \omega_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}) \leq \\ &\leq \mu_0 C_1 C_* M_\varphi^0 [(2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \omega_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \omega_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2]. \end{aligned} \quad (77)$$

Далее выведем аналогичную оценку для первого слагаемого в выражении для A , оценив норму разности $\theta = \theta_1 - \theta_2$ через нормы разностей λ , α и ψ .

Положим далее $\tau = \theta$ в соотношении (60), записанном для $I_1(\varphi)$. Получим

$$\begin{aligned} &(\lambda_2 \nabla\theta, \nabla\theta) + 5\kappa(\varphi_1^4 \theta, \theta) + (v_2 \theta, \theta)_{\Gamma_N} = \\ &= -(\lambda \nabla\theta, \nabla\theta_1) - 5\kappa((\varphi_1^4 - \varphi_2^4)\theta, \theta_2) - (v\theta, \theta_1)_{\Gamma_N} - \mu_0(\varphi - \varphi^d, \theta)_Q. \end{aligned} \quad (78)$$

Учитывая, что

$$v = \lambda_1 \alpha_1 - \lambda_2 \alpha_2 = \lambda \alpha_1 + \alpha \lambda_2,$$

из (78) приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \lambda_* \|\theta\|_{1,\Omega} &\leq \mu_0 C_1 C_* M_\varphi^0 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \\ &+ 20\mu_0 \kappa C_6^6 M_\varphi C_* M_\varphi^0 \|\varphi\|_{1,\Omega} + \mu_0 \gamma_2 C_* M_\varphi^0 (C_\alpha \|\lambda\|_{s,\Omega} + C_\lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N}) + \mu_0 (C_2 \|\varphi\|_{1,\Omega} + \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq \mu_0 [(20\kappa C_6^6 C_* M_\varphi M_\varphi^0 + C_2) \|\varphi\|_{1,\Omega} + C_* M_\varphi^0 (C_1 + \gamma_2 C_\alpha) \|\lambda\|_{s,\Omega} + \gamma_2 C_* M_\varphi^0 C_\lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \|\varphi^d\|_Q]. \end{aligned} \quad (79)$$

С учетом неравенства (70) из (79) получаем следующую оценку для $\|\theta\|_{1,\Omega}$:

$$\|\theta\|_{1,\Omega} \leq \mu_0 (\kappa_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \kappa_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \kappa_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \kappa_4 \|\varphi^d\|_Q). \quad (80)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= C_* [(20\kappa C_6^6 C_* M_\varphi M_\varphi^0 + C_2)\omega_1 + C_* M_\varphi^0 (C_1 + \gamma_2 C_\alpha)], \\ \kappa_2 &= C_* [(20\kappa C_6^6 C_* M_\varphi M_\varphi^0 + C_2)\omega_2 + \gamma_2 C_* M_\varphi^0 C_\lambda], \\ \kappa_3 &= C_* (20\kappa C_6^6 C_* M_\varphi M_\varphi^0 + C_2)\omega_3, \quad \kappa_4 = C_*. \end{aligned} \quad (81)$$

Наконец, используя (80), с учетом обозначений (62) мы можем оценить первое слагаемое в выражении для A в (73):

$$\begin{aligned} |(k_1 \varphi, \theta)| &\leq |((4\varphi_1^4 - \varphi_1^3 \varphi_2 - \varphi_1^2 \varphi_2^2 - \varphi_1 \varphi_2^3 - \varphi_2^4)\varphi, \theta)| \leq \\ &8\mu_0 C_6^6 M_\varphi^4 (\omega_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \omega_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \omega_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}) (\kappa_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \kappa_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \kappa_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \kappa_4 \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq 8\mu_0 C_6^6 M_\varphi^4 [(\omega_1 \kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (\omega_2 \kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2) \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2] + \\ &+ 8\mu_0 C_6^6 M_\varphi^4 [(\omega_3 \kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2) \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + 1.5\kappa_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2]. \end{aligned} \quad (82)$$

С учетом (77) и (82) для A из (73) получаем оценку

$$|A| \leq \mu_0(\eta_1^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \eta_2^2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \eta_3^2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \eta_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2). \quad (83)$$

Здесь положительные константы η_1, η_2, η_3 и η_4 , зависящие от величин M_φ и M_φ^0 , определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_1^2 &= 8\kappa C_6^6 M_\varphi^3 (7.5C_* M_\varphi^0 \omega_1^2 + M_\varphi (\omega_1 \kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2)) + C_* M_\varphi^0 (\gamma_2 M_\varphi + C_1 (2\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)), \\ \eta_2^2 &= 8\kappa C_6^6 M_\varphi^3 (7.5C_* M_\varphi^0 \omega_2^2 + M_\varphi (\omega_2 \kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2)) + C_* M_\varphi^0 (\gamma_2 M_\varphi + C_1 \omega_2), \\ \eta_3^2 &= 8\kappa C_6^6 M_\varphi^3 (7.5C_* M_\varphi^0 \omega_3^2 + M_\varphi (\omega_3 \kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2)) + C_1 C_* M_\varphi^0 \omega_3, \quad \eta_4^2 = 12\kappa C_6^6 M_\varphi^4 \kappa_4^2. \end{aligned} \quad (84)$$

Для того чтобы оценить слагаемое $\langle \zeta, \psi \rangle_{\Gamma_D}$, запишем равенство (61) для функционала $I_1(\varphi)$ в виде

$$\begin{aligned} \langle \zeta, \psi \rangle_{\Gamma_D} &= -(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_1) - (\lambda_2 \nabla \varphi, \nabla \theta) - 5\kappa(\varphi_1^4 \varphi, \theta) - 5\kappa((\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi^2, \theta_2) - \\ &\quad - (v\varphi, \theta_1)_{\Gamma_N} - (v_2 \varphi, \theta)_{\Gamma_N} - \mu_0(\varphi - \varphi^d, \varphi)_Q. \end{aligned} \quad (85)$$

Рассуждая как и выше, последовательно оценим слагаемые в правой части (85). Справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &|(\lambda \nabla \varphi, \nabla \theta_1)| \leq \mu_0 C_1 C_* M_\varphi^0 \|\lambda\|_{s,\Omega} \|\varphi\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq \mu_0 C_1 C_* M_\varphi^0 [(\omega_1 + 0.5\omega_2 + 0.5\omega_3) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + 0.5\omega_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + 0.5\omega_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2], \\ &|(\lambda_2 \nabla \varphi, \nabla \theta)| \leq \\ &\leq \mu_0 C_1 C_\lambda (\omega_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \omega_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \omega_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}) (\kappa_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \kappa_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \kappa_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D} + \kappa_4 \|\varphi^d\|_Q) \leq \\ &\leq \mu_0 C_1 C_\lambda [(\omega_1 \kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (\omega_2 \kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2) \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2] + \\ &\quad + \mu_0 C_1 C_\lambda [(\omega_3 \kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2) \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + 1.5\kappa_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2], \\ &|5\kappa(\varphi_1^4 \varphi, \theta)| \leq 5\mu_0 \kappa C_6^6 M_\varphi^4 (\omega_1 \kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (\omega_2 \kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2) \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2] + \\ &\quad + 5\mu_0 \kappa C_6^6 M_\varphi^4 [(\omega_3 \kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2) \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + 1.5\kappa_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2], \\ &|5\kappa((\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\varphi^2, \theta_2)| \leq 60\mu_0 \kappa C_6^6 C_* M_\varphi^0 M_\varphi^3 (\omega_1^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \omega_2^2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \omega_3^2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2), \\ &|(v\varphi, \theta_1)_{\Gamma_N}| = |((\lambda \alpha_1 + \alpha \lambda_2)\varphi, \theta_1)_{\Gamma_N}| \leq \mu_0 \gamma_2 C_* M_\varphi^0 (C_\alpha \|\lambda\|_{s,\Omega} + C_\lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N}) \|\varphi\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq \mu_0 \gamma_2 C_* M_\varphi^0 (C_\alpha \|\lambda\|_{s,\Omega} + C_\lambda \|\alpha\|_{\Gamma_N}) (\omega_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} + \omega_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N} + \omega_3 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}) \leq \\ &\leq \mu_0 \gamma_2 C_* M_\varphi^0 [(C_\alpha \omega_1 + C_\alpha + 0.5\omega_1^2) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (C_\lambda \omega_2 + C_\lambda + 0.5\omega_2^2) \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \omega_3^2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2], \\ &|(v_2 \varphi, \theta)_{\Gamma_N}| = |(\lambda_2 \alpha_2 \varphi, \theta)_{\Gamma_N}| \leq \gamma_2 C_\lambda C_\alpha \|\varphi\|_{1,\Omega} \|\theta\|_{1,\Omega} \leq \\ &\leq \mu_0 \gamma_2 C_\lambda C_\alpha [(\omega_1 \kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2) \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + (\omega_2 \kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2) \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \\ &\quad + (\omega_3 \kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2) \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + 1.5\kappa_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2], \\ &|\mu_0(\varphi - \varphi^d, \varphi)_Q| \leq \mu_0 (1.5C_2^2 \|\varphi\|_{1,\Omega}^2 + 0.5 \|\varphi^d\|_Q^2) \leq \\ &\leq \mu_0 \left(4.5C_2^2 (\omega_1^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \omega_2^2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \omega_3^2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2) + 0.5 \|\varphi^d\|_Q^2 \right). \end{aligned} \quad (86)$$

Из неравенств (86) приходим к оценке

$$|\langle \zeta, \psi \rangle_{\Gamma_D}| \leq \mu_0 (\xi_1^2 \|\lambda\|_{s,\Omega}^2 + \xi_2^2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + \xi_3^2 \|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}^2 + \xi_4^2 \|\varphi^d\|_Q^2). \quad (87)$$

Здесь положительные константы ξ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, определяются формулами

$$\begin{aligned} \xi_1^2 &= (\omega_1 \kappa_1 + 1.5\omega_1^2 + \kappa_1^2)(C_1 C_\lambda + 5\kappa C_6^6 M_\phi^4 + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha) + \\ &+ C_* M_\phi^0 [C_1(\omega_1 + 0.5\omega_2 + 0.5\omega_3) + 60\kappa C_6^6 \omega_1^2 M_\phi^3 + \gamma_2(C_\alpha \omega_1 + C_\alpha + 0.5\omega_1^2)] + 4.5C_2^2 \omega_1^2, \\ \xi_2^2 &= (\omega_2 \kappa_2 + 1.5\omega_2^2 + \kappa_2^2)(C_1 C_\lambda + 5\kappa C_6^6 M_\phi^4 + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha) + \\ &+ C_* M_\phi^0 [0.5C_1 \omega_2 + 60\kappa C_6^6 \omega_2^2 M_\phi^3 + \gamma_2(C_\lambda \omega_2 + C_\lambda + 0.5\omega_2^2)] + 4.5C_2^2 \omega_2^2, \\ \xi_3^2 &= (\omega_3 \kappa_3 + 1.5\omega_3^2 + \kappa_3^2)(C_1 C_\lambda + 5\kappa C_6^6 M_\phi^4 + \gamma_2 C_\lambda C_\alpha) + C_* M_\phi^0 (0.5\omega_3 + 60\kappa C_6^6 M_\phi^3 \omega_3^2 + \gamma_2 \omega_3^2) + 4.5C_2^2 \omega_3^2, \\ \xi_4^2 &= 1.5C_\lambda (C_1 + \gamma_2 C_\alpha) \kappa_4^2 + 7.5\kappa C_6^6 \kappa_4^2 + 0.5. \end{aligned} \quad (88)$$

Пусть исходные данные задачи (71) удовлетворяют условиям

$$(\eta_1^2 + \xi_1^2)\mu_0 \leq (1 - \varepsilon_1)\mu_1, \quad (\eta_2^2 + \xi_2^2)\mu_0 \leq (1 - \varepsilon_2)\mu_2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, 1). \quad (89)$$

С учетом (89) из (73) выводим

$$\mu_0 \|\varphi\|_Q^2 \leq \mu_0(\varphi, \varphi^d)_Q - \varepsilon_1 \mu_1 \|\lambda\|_{S, \Omega}^2 - \varepsilon_2 \mu_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 + C_* M_\phi^0 (0.5\omega_3 + 60\kappa C_6^6 M_\phi^3 \omega_3^2 + \gamma_2 \omega_3^2) + 4.5C_2^2 \omega_3^2, \quad (90)$$

Отбрасывая неположительное слагаемое $-\varepsilon_1 \mu_1 \|\lambda\|_{S, \Omega}^2 - \varepsilon_2 \mu_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2$ в правой части (90), получаем

$$\|\varphi\|_Q^2 \leq \|\varphi\|_Q \|\varphi^d\|_Q + (\eta_3^2 + \xi_3^2) \|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}^2 + (\eta_4^2 + \xi_4^2) \|\varphi^d\|_Q^2. \quad (91)$$

Решив квадратичное относительно $\|\varphi\|_Q$ неравенство (91), выводим оценку

$$\|\varphi\|_Q \leq (\eta_4 + \xi_4 + 1) \|\varphi^d\|_Q + (\eta_3 + \xi_3) \|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}.$$

Поскольку $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi^d = \varphi_1^d - \varphi_2^d$ и $\psi = \psi_1 - \psi_2$, то последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_Q \leq (\eta_4 + \xi_4 + 1) \|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q + (\eta_3 + \xi_3) \|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2, \Gamma_D}. \quad (92)$$

В случае, когда $Q = \Omega$, неравенство (92) имеет смысл $L^2(\Omega)$ -оценки устойчивости компоненты $\hat{\varphi}$ решения $(\hat{\varphi}, \hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ задачи (71) относительно малых возмущений функций $\varphi^d \in L^2(\Omega)$ и $\psi \in H^{1/2}(\Gamma_D)$.

Если $\varphi_1^d = \varphi_2^d$ и $\psi_1 = \psi_2$, то из неравенства (92) вытекает, что $\varphi_1 = \varphi_2$ в Q . Тогда из (90) при $\mu_1 > 0$ и $\mu_2 > 0$ вытекает, что $\lambda = 0$ в Ω и $\alpha = 0$ на Γ_N , а из (70) при $\lambda = 0$ и $\alpha = 0$ получаем, что $\varphi = 0$ или $\varphi_1 = \varphi_2$ в Ω . В таком случае при выполнении условия (89) решение задачи (71) единственно.

В общем случае, когда $\varphi_1^d \neq \varphi_2^d$, с помощью неравенства

$$\|\varphi\|_Q \|\varphi^d\|_Q \leq \|\varphi\|_Q^2 + (1/4) \|\varphi^d\|_Q^2,$$

вытекающего из неравенства Юнга, из (90) выводим, что

$$\varepsilon_1 \mu_1 \|\lambda\|_{S, \Omega}^2 + \varepsilon_2 \mu_2 \|\alpha\|_{\Gamma_N}^2 \leq (\mu_0 / 4) \|\varphi^d\|_Q^2 + \mu_0 (\eta_4^2 + \xi_4^2) \|\varphi^d\|_Q^2 + \mu_0 (\eta_3^2 + \xi_3^2) \|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}^2. \quad (93)$$

Из формулы (93) вытекают следующие оценки устойчивости, которые мы запишем в обозначениях (56):

$$\|\lambda_1 - \lambda_2\|_{S, \Omega} \leq \sqrt{\mu_0 / (\varepsilon_1 \mu_1)} \left[(0.5 + (\eta_4 + \xi_4)) \|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q + (\eta_3 + \xi_3) \|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2, \Gamma_D} \right], \quad (94)$$

$$\|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\Gamma_N} \leq \sqrt{\mu_0 / (\varepsilon_2 \mu_2)} \left[(0.5 + (\eta_4 + \xi_4)) \|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q + (\eta_3 + \xi_3) \|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2, \Gamma_D} \right]. \quad (95)$$

Из оценок (94), (95) и (70) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1, \Omega} \leq & \left(\omega_1 \sqrt{\mu_0 / (\varepsilon_1 \mu_1)} + \omega_2 \sqrt{\mu_0 / (\varepsilon_2 \mu_2)} \right) \left[(0.5 + (\eta_4 + \xi_4)) \|\varphi_1^d - \varphi_2^d\|_Q + \right. \\ & \left. + (\eta_3 + \xi_3) \|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2, \Gamma_D} \right] + \omega_3 \|\psi_1 - \psi_2\|_{1/2, \Gamma_D}, \end{aligned} \quad (96)$$

где параметры η_i и ξ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, и параметры ω_j , $j = 1, 2, 3$, определены соответственно в (70), (84) и (88).

Сформулируем один из основных результатов статьи в виде следующей теоремы.

Теорема 6.1. Пусть выполняются условия (i), (ii), (j_0) , (jj_0) и (89), $k(\varphi) = \kappa\varphi^4$. Пусть $(\varphi_i, \lambda_i, \alpha_i) \in H^1(\Omega) \times K$ — решения задачи (71), отвечающие заданным функциям $\varphi_i^d \in L^2(\Omega)$ и ψ_i , $i = 1, 2$, и исходные данные задачи (71) или параметры μ_0, μ_1, μ_2 удовлетворяют условиям (89). Тогда справедливы оценки устойчивости (94)–(96).

В заключение отметим, что вывод оценок устойчивости оптимального управления, учитывающих возмущение граничной функции ψ , существенно сложнее вывода аналогичных оценок, отвечающих выбору ψ в качестве управления (см. [8]). В последнем случае отношение двойственности $\langle \zeta, \psi \rangle_{\Gamma_D}$ легко оценивается через квадрат нормы $\|\psi\|_{1/2, \Gamma_D}$ с использованием соответствующего принципа минимума из системы оптимальности. Также отметим, что при доказательстве разрешимости экстремальной задачи и выводе оценок устойчивости ее оптимальных решений используются некоторые технические приемы работ [9, 26].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ito K., Kunish K. Estimation of the convection coefficient in elliptic equations // *Inv. Probl.* 1997. V. 14. P. 995–1013.
2. Alekseev G. V., Tereshko D. A. On solvability of inverse extremal problems for stationary equations of viscous heat conducting fluid // *J. Inv. Ill-Posed Probl.* 1998. V. 9. P. 521–562.
3. Nguyen P. A., Raymond J.-P. Control problems for convection–diffusion–reaction with control localized on manifolds // *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* 2001. V. 6. P. 467–488.
4. Алексеев Г. В., Вахитов И. С., Соболева О. В. Оценки устойчивости в задачах идентификации для уравнения конвекции–диффузии–реакции // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2012. Т. 52. № 12. С. 2190–2205.
5. Nguyen P. A., Raymond J.-P. Pointwise control of the Boussinesq system // *Systems Control Lett.* 2011. V. 60. No. 4. P. 249–255.
6. Короткий А. И., Ковтунов Д. А. Оптимальное управление тепловой конвекцией // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2010. Т. 16. № 5. С. 103–112.
7. Короткий А. И., Литвиненко А. Л. Разрешимость одной смешанной краевой задачи для стационарной модели реакции–конвекции–диффузии // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2018. Т. 24. № 1. С. 106–120.
8. Бризицкий Р. В., Саричкая Ж. Ю. Устойчивость решений экстремальных задач для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции при условии Дирихле // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2016. Т. 56. № 12. С. 2042–2053.
9. Бризицкий Р. В., Саричкая Ж. Ю. Об устойчивости решений задач управления для уравнения реакции–диффузии–конвекции с сильной нелинейностью // *Дифференц. уравнения.* 2017. Т. 53. № 4. С. 493–504.
10. Brizitskii R. V., Saritskaya Z. Y. Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection–diffusion–reaction equation // *J. Inv. Ill-Posed Probl.* 2018. V. 9. P. 821–834.
11. Бризицкий Р. В., Саричкая Ж. Ю. Обратные коэффициентные задачи для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2018. Т. 82. Вып. 1. С. 17–33.
12. Бризицкий Р. В., Саричкая Ж. Ю. Задача граничного управления для нелинейного уравнения конвекции–диффузии–реакции // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 12. С. 2139–2152.
13. Alekseev G. V., Brizitskii R. V. Analysis of the boundary value and control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection equation // *Журнал СВУ. Сер. матем. и физ.* 2021. Т. 14. № 4. С. 452–462.
14. Бризицкий Р. В., Быстрова В. С., Саричкая Ж. Ю. Теоретический анализ краевых и экстремальных задач для нелинейного уравнения реакции–диффузии–конвекции // *Дифференц. уравнения.* 2021. Т. 57. № 5. С. 615–629.
15. Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., Hoffmann K.-H. Diffusion approximation of the radiative–conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // *Commun. Nonlinear Sci. Num. Simulat.* 2018. V. 57. P. 290–298.
16. Chebotarev A. Yu., Grenkin G. V., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D., Hoffmann K.-H. Inverse problem with finite overdetermination for steady–state equations of radiative heat exchange // *J. Math. Anal. Appl.* 2018. V. 460. No. 2. P. 737–744.
17. Chebotarev A. Yu., Kovtanyuk A. E., Botkin N. D. Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type // *Commun. Nonlinear Sci. Num. Simulat.* 2019. V. 75. P. 262–269.
18. Kovtanyuk A. E., Chebotarev A. Yu., Botkin N. D., Hoffmann K.-H. Optimal boundary control of a steady–state heat transfer model accounting for radiative effects // *J. Math. Anal. Appl.* 2016. V. 439. P. 678–689.

19. *Чеботарев А. Ю.* Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 3. С. 381–390.
20. *Lorca S. A., Boldrini J. L.* Stationary solutions for generalized Boussinesq models // J. Dif. Eq. 1996. V. 124. P. 389–406.
21. *Belmiloudi A.* Robin-type boundary control problems for the nonlinear Boussinesq type equations // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 273. P. 428–456.
22. *Bermudez A., Munoz-Sola R., Vazquez R.* Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 368. P. 444–468.
23. *Барановский Е. С.* Задача оптимального управления с обратной связью для сетевой модели движения вязкой жидкости // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 1. С. 31–47.
24. *Барановский Е. С.* Задача оптимального стартового управления для двумерных уравнений Буссинеска // Изв. РАН. Сер. матем. 2022. Т. 86. № 2. С. 3–24.
25. *Барановский Е. С.* Оптимальное граничное управление течением нелинейно-вязкой жидкости // Матем. сб. 2020. Т. 211. № 4. С. 27–43.
26. *Brizitskii R. V., Saritskaia Zh. Yu.* Multiplicative control problems for nonlinear reaction-diffusion-convection model // J. Dyn. Contr. Sys. 2021. V. 27. No. 2. P. 379–402.
27. *Alekseev G. V., Brizitskii R. V.* Theoretical analysis of boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer with variable coefficients // Symmetry 14. 2022. V. 12. Article ID2580.
28. *Ruzicka M., Shelukhin V., dos Santos M. M.* Steady flows of Cosserat-Bingham fluids // Math. Meth. Appl. Sc. 2017. V. 40. P. 2746–2761.
29. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids // J. Math. Fluid Mech. 2019. V. 21. № 1.
30. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость нестационарных уравнений трехмерного движения теплопроводных вязких сжимаемых двухкомпонентных жидкостей // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 4. С. 147–204.
31. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Стационарные решения краевой задачи для уравнений баротропного течения многокомпонентных сред // Сиб. электрон. матем. изв. 2022. Т. 19. № 2. С. 959–971.
32. *Wolf T. H.* A property of measure in R^n and an application to unique continuation // Geomet. and Function. Anal. 1992. V. 2. No. 2. P. 225–284.
33. *Алексеев Г. В.* Оптимизация в стационарных задачах тепломассопереноса и магнитной гидродинамики. М.: Научный мир, 2010. 412 с.
34. *Бризицкий Р. В., Максимова Н. Н., Масловская А. Г.* Обратные задачи для диффузионно-дрейфовой модели зарядки неоднородного полярного диэлектрика // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 9. С. 1537–1552.
35. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научн. книга, 1999. 352 с.
36. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.968

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДОМЕННЫХ СТЕНОК:
ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В УРАВНЕНИИ МАГНИТОДИНАМИКИ**

© 2024 г. Л. А. Калякин^{1*}, Е. Г. Екомасов^{2,**}

¹450077 Уфа, ул. Чернышевского, 112, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Россия

²450077 Уфа, ул. Заки Валиди, 32, Уфимский университет науки и технологий, Россия

*e-mail: klenru@mail.ru

Поступила в редакцию 19.07.2023 г.

Переработанный вариант 19.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Рассматривается дифференциальное уравнение в частных производных, моделирующее движение доменной стенки при учете внешних магнитных полей и затухания. В случае постоянных коэффициентов уравнение имеет набор тривиальных решений — равновесий. Исследуются решения в виде простых (бегущих) волн, которые соответствуют динамическому переходу из одного равновесия в другое. Перечислены возможные типы волн, устойчивых в линейном приближении. Указан рецепт вычисления скорости таких волн. Библ. 26. Фиг. 8.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, равновесие, простая волна, фазовая траектория, доменная стенка.

DOI: 10.31857/S0044466924010087, **EDN:** ZJNKUN

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе под простой волной понимается функция со специфической зависимостью от переменных: $\phi(x, t) = \Phi(x - vt)$. При $v = \text{const}$ функция $\Phi(s)$ от аргумента $s = x - vt$ интерпретируется как волна, бегущая по оси x со скоростью v . Отыскание решений в такой форме дает один из способов редукции задач к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Для приложений интерес представляют простые волны, которые на фазовой плоскости $(\Phi, \dot{\Phi})$ соответствуют траекториям, соединяющим неподвижные точки. Они связываются с описанием динамического перехода от одного равновесия к другому. Для уравнения sine-Gordon $\phi_{tt} + \phi_{xx} + \sin\phi \cos\phi = 0$ примером такой волны является кинк:

$$\Phi_0(s) = 2 \arctan \exp(s\Lambda), \quad \Lambda = 1 / \sqrt{1 - v^2}. \tag{1}$$

В простейшей модели магнитодинамики для постоянного по величине вектора намагниченности (при отсутствии внешних магнитных полей и затухания) эта функция описывает динамический переход между равновесиями 0 и π и интерпретируется как доменная стенка (см. [1]); иногда используется термин “доменная граница” (ДГ). Скорость такой волны может быть любой в интервале $0 < v < 1$. При учете внешних магнитных полей и затухания модельное уравнение выглядит сложнее из-за дополнительных слагаемых с коэффициентами w, h, α :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sin\phi \cos\phi + w \sin\phi + \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} = h, \quad t > 0, \quad x \in \mathcal{R}. \tag{2}$$

В случае $w, \alpha = \text{const} \neq 0, h = 0$ тот же кинк (1) будет решением уравнения (2), но только при одной скорости $v = v_0$, определяемой соотношением $\alpha v_0 / \sqrt{1 - v_0^2} = w$ (см. [2]).

В настоящей работе анализируется уравнение (2) в общем случае $w, h, \alpha = \text{const} \neq 0$. Из соображений симметрии коэффициенты $w, h = \text{const} \geq 0$ можно считать неотрицательными. Коэффициент затухания $\alpha = \text{const} > 0$ положительный по физическому смыслу. Целью работы является выявление всевозможных простых волн, бегущих от одного равновесия к другому. Важным свойством выделяемых здесь

решений является их устойчивость в линейном приближении. Это позволяет обнаружить такие волны в численных расчетах и связать с динамикой доменных границ в реальных физических экспериментах.

В представленном виде уравнение (2) было выведено из системы Ландау–Лифшица (см. [1; 2]) для описания одномерной динамики одиночной 180-градусной доменной границы в кристалле редкоземельного ортоферрита. Параметры w и h связаны с внешним магнитным полем, $\alpha > 0$ — безразмерный параметр затухания. Коэффициенты $w, h = \text{const} \neq 0$ получаются постоянными и отличными от нуля в случае, когда они соответствуют двум разным компонентами внешнего поля, одна из которых постоянна, а вторая меняется линейно по времени. Это бывает, например, в высокотемпературной магнитной фазе ортоферритов для ДГ ас-типа (см. [1; 2]).

В случае $h = 0$ задача о ДГ в рамках модели (2) исследована довольно полно как аналитическими (см. [2–5]), так и численными методами (см. [6; 7]). Учет влияния параметра $h \neq 0$ был проведен только для однородно намагниченного магнетика (см. [8–10]), влияние на динамику ДГ не исследовалось. Отметим, что уравнение (2) возникает также в модели джозефсоновских контактов, где слагаемое с $h \neq 0$ играет существенную роль (см. [11]). Таким образом, исследование влияния параметра p на динамику простых волн в модели (2) представляет интерес для разных задач.

Использование простых волн дает эффективный способ аналитического исследования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Общеизвестным образом в этом направлении является работа Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП) (см. [12]). К настоящему времени имеется много похожих результатов о простых волнах для уравнений параболического типа, которые возникают при математическом моделировании в биологии и в химии (в частности, в теории горения) (см. [13–16]). Многочисленные примеры из биологии приведены в монографии Стрижевского [17]. Этот подход применим и к гиперболическим уравнениям. Мы продемонстрируем его на конкретном уравнении (2), которое имеет прикладной интерес.

2. УТОЧНЕНИЕ ЗАДАЧИ

2.1. Равновесия

Уравнение (2) может иметь тривиальные решения — равновесия $\phi \equiv \Phi_{eq} = \text{const}$. Это будут корни тригонометрического уравнения

$$F(\phi) \equiv \sin \phi \cos \phi + w \sin \phi = h. \tag{3}$$

На промежутке периода 2π таких равновесий может быть не больше четырех, как это видно на фиг. 1. Мы ограничимся случаем простых корней: $0 < \Phi_0 < \Phi_0^+ < \Phi_1 < \Phi_1^+ < 2\pi + \Phi_0$. Очевидно, все остальные равновесия получаются сдвигами на $2\pi n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$

На множестве параметров в квадранте $w \geq 0, h \geq 0$ выделим подобласти, которые отличаются числом равновесий на периоде 2π . Формулы для границ выписываются через положительные экстремумы функции $F(\phi)$. Первый экстремум в точке

$$\phi_0(w) = \text{Arccos} \left[\frac{1}{4} [-w + \sqrt{w + 8}] \right], \quad 0 \leq \phi_0 < \pi / 2,$$

существует всегда; второй экстремум в точке

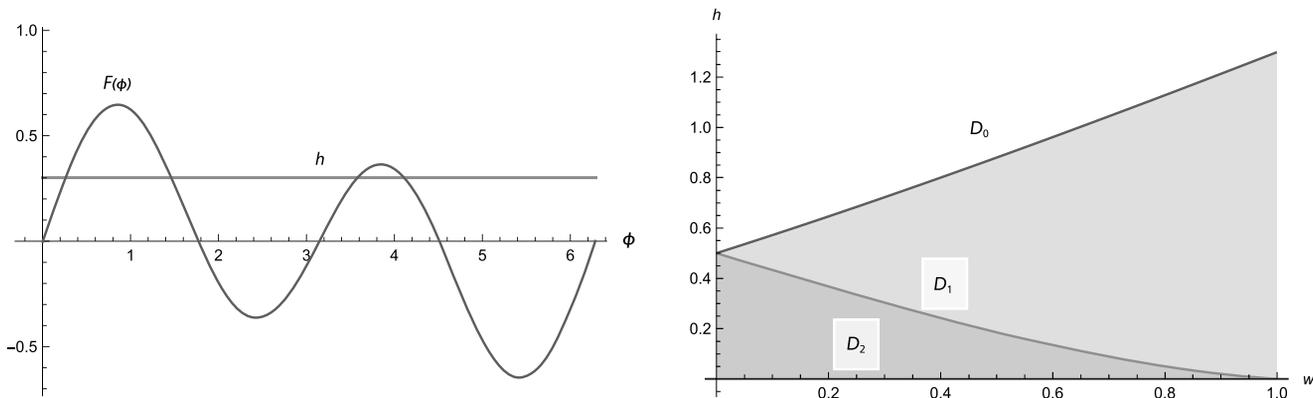
$$\phi_1(w) = \text{Arccos} \left[-\frac{1}{4} [w + \sqrt{w + 8}] \right], \quad \pi \leq \phi_1 < 3\pi / 2,$$

существует только при $w < 1$. Значения F в этих экстремумах определяют пару функций от параметра w : $M_k(w) = F(\phi_k(w)), k = 0, 1$. Учитывая соотношения в экстремумах $F(\phi_k) = \sin^3 \phi_k / \cos \phi_k$ и $|\cos \phi_1| > \cos \phi_0$ получаем неравенство $0 < M_1(w) < M_0(w)$ на промежутке $0 \leq w < 1$.

Утверждение 1. 1) Для параметров из области $D_0 = \{w, h : h > M_0(w)\}$ равновесия отсутствуют.

2) Для параметров из области $D_1 = \{w, h : M_1(w) < h < M_0(w), h > 0\}$ существует пара равновесий $0 < \Phi_0 < \Phi_0^+ < \pi$.

3) Для параметров из области $D_2 = \{w, h : 0 < h < M_1(w), w < 1\}$ существует четыре равновесия: $0 < \Phi_0 < \Phi_0^+ < \Phi_1 < \Phi_1^+ < 2\pi + \Phi_0$.



Фиг. 1. Число корней зависит от соотношений параметров w, h .

2.2. Устойчивость равновесий в линейном приближении

В ситуации общего положения (по параметрам w, h) равновесия являются простыми корнями уравнения (3). Вопрос устойчивости в линейном приближении, как обычно, сводится к анализу линеаризованного уравнения. В данном случае это будет уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + F'(\Phi_{eq})\varphi + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathcal{R}.$$

Имея в виду разложение Фурье, достаточно проанализировать частные решения вида $\varphi = \exp(i\lambda x + \mu t)$ при разных $\lambda \in \mathcal{R}$. Такая функция будет решением при связи: $2\mu = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4F'(\Phi_{eq}) - 4\lambda^2}$. Значение производной $F'(\Phi_{eq}) \neq 0$ в точках Φ_0 и Φ_1 будет положительным, а в точках Φ_0^+ и Φ_1^+ будет отрицательным. В первом случае показатель μ будет иметь отрицательную действительную часть при всех λ и решение стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Во втором случае для $\lambda^2 < -F'(\Phi_{eq})$ решение экспоненциально растет по t . Таким образом, имеет место следующее

Утверждение 2. Если корни уравнения (3) простые, то при $\alpha > 0$ равновесия F_0 и F_1 будут устойчивы в линейном приближении, а равновесия Φ_0^+ и Φ_1^+ неустойчивы.

В случае однородных возмущений (не зависящих от пространственной переменной x) утверждение 2 характеризует устойчивость равновесий для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} + \sin \phi \cos \phi + w \sin \phi + \alpha \frac{d\phi}{dt} = h, \quad t > 0. \tag{4}$$

2.3. Постановка задачи

Для магнитодинамики интерес представляют решения уравнения (2), которые соответствуют переходу из одного равновесия в другое. Они выделяются краевыми условиями на бесконечности

$$\phi(x, t) \rightarrow \Phi_- \text{ при } x \rightarrow -\infty, \quad \phi(x, t) \rightarrow \Phi_+ \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

в предположении, что предельные значения Φ_{\pm} являются корнями уравнения (3). Целью настоящей работы является отыскание для задачи (2),(5) решений в виде простой волны. Требуется указать возможные типы волн, условия их существования и скорость в зависимости от исходных параметров h, w, α . Начальные условия не ставятся. Проблема стабилизации каких-либо решений к простой волне в стиле работ [12, 18, 19] здесь не обсуждается.

3. УРАВНЕНИЕ ПРОСТОЙ ВОЛНЫ

Для волны с “досветовой” скоростью $0 < v < 1$ решение удобно искать в виде $\phi(x, t) = \Phi(s)$ с аргументом $s = (x - vt) / \sqrt{1 - v^2}$. Ее отыскание сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} - \sin\Phi \cos\Phi - w \sin\Phi + \gamma \frac{d\Phi}{ds} = -h, \quad \gamma = \frac{\alpha v}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (6)$$

Уравнение дополняется краевыми условиями, которые соответствуют выходу на соответствующие равновесия:

$$\Phi(s) \rightarrow \Phi_- \text{ при } s \rightarrow -\infty, \quad \Phi(s) \rightarrow \Phi_+ \text{ при } s \rightarrow +\infty.$$

Получается задача, похожая на спектральную: требуется найти функцию $\Phi(s)$ и коэффициент γ (или, что то же, скорость v). В общей ситуации при произвольных Φ_{\pm} такая задача неразрешима. В настоящей работе выясняется, что постановка правильных краевых условий зависит от параметров w, h .

Основные результаты опираются на исследование деформации фазового портрета уравнения (5) при изменении коэффициента эффективной диссипации γ . Подходящие решения соответствуют фазовым траекториям — сепаратрисам, которые соединяют пару неподвижных точек. Константа сдвига по независимой переменной s не учитывается, поскольку не играет роли в рассматриваемой задаче.

В случае $h = 0$ решение, найденное Звездиным в виде кинка (1), соответствует сепаратрисе из 0 в π . Симметричная сепаратриса из 2π в π дает второе решение — антикинк $2\pi - \Phi_0(s)$. Другие решения отличаются на $2\pi n$ и не представляют интереса.

В случае $h \neq 0$ возможности значительно расширяются. Однако в отличие от результатов Звездина [2] явных представлений решений через элементарные функции при $h \neq 0$ получить не удается. Здесь приводятся только теоремы существования и указывается рецепт для вычисления скорости.

Уравнения (4) и (5) похожи и имеют одинаковые равновесия. Однако свойства их неподвижных точек по устойчивости различаются, как это видно из сравнения соответствующих характеристических уравнений.

Утверждение 3. *Если корни уравнения (3) простые, то для дифференциального уравнения (5) равновесия F_1 и F_1 будут неустойчивы (неподвижные точки имеют тип седла), а равновесия Φ_0^+ и Φ_1^+ будут асимптотически устойчивы (неподвижные точки имеют тип фокус либо узел).*

4. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ

При отсутствии диссипации, когда $\gamma = 0$, уравнение (5) описывает маятник с постоянным моментом h и для него выписывается первый интеграл¹

$$I(\Phi, \dot{\Phi}) = (\dot{\Phi})^2 + \frac{1}{2} \cos 2\Phi + 2w \cos \Phi + 2h\Phi, \quad \dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{ds}. \quad (7)$$

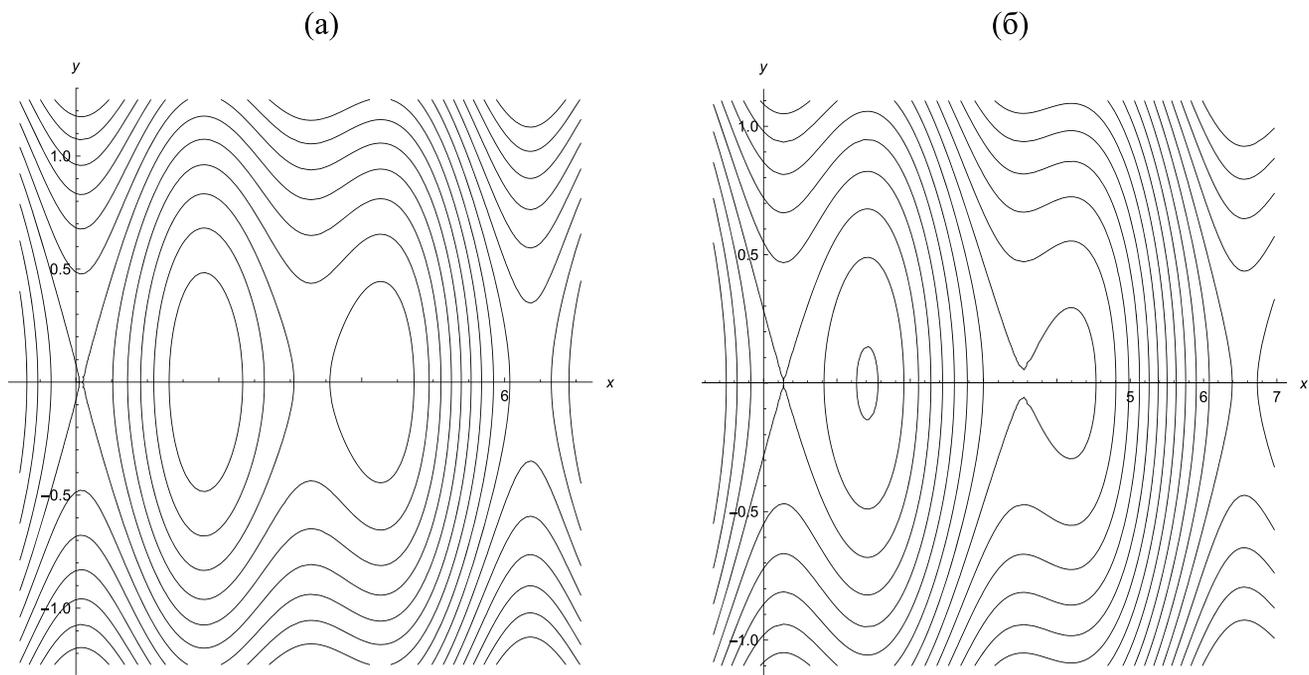
Линии уровня функции $I(\Phi, \dot{\Phi})$ представляют собой фазовые траектории. Картина фазового портрета зависит от параметров w, h . При наличии четырех неподвижных точек на периоде, когда $(w, h) \in D_2$, возможны два топологически различных варианта. Отличия показаны на фиг. 2: незамкнутые траектории, уходящие на бесконечность, либо отделяют седловые точки F_0, F_1 , либо не отделяют. Ниже будет показано, что два случая различаются посредством первых интегралов в седловых точках: $I(\Phi_0, 0)$ и $I(\Phi_1, 0)$. Равновесие $\Phi_0 + 2\pi$ всегда отделено незамкнутыми траекториями от Φ_0 и Φ_1 .

Для изображения фазового портрета будем использовать плоскость; при учете диссипации это удобнее цилиндра. Если $\gamma > 0$, то неподвижные точки остаются на месте, а остальные траектории смещаются (фиг. 3). Направление смещения можно понять из соотношения, которое вытекает из уравнения (5):

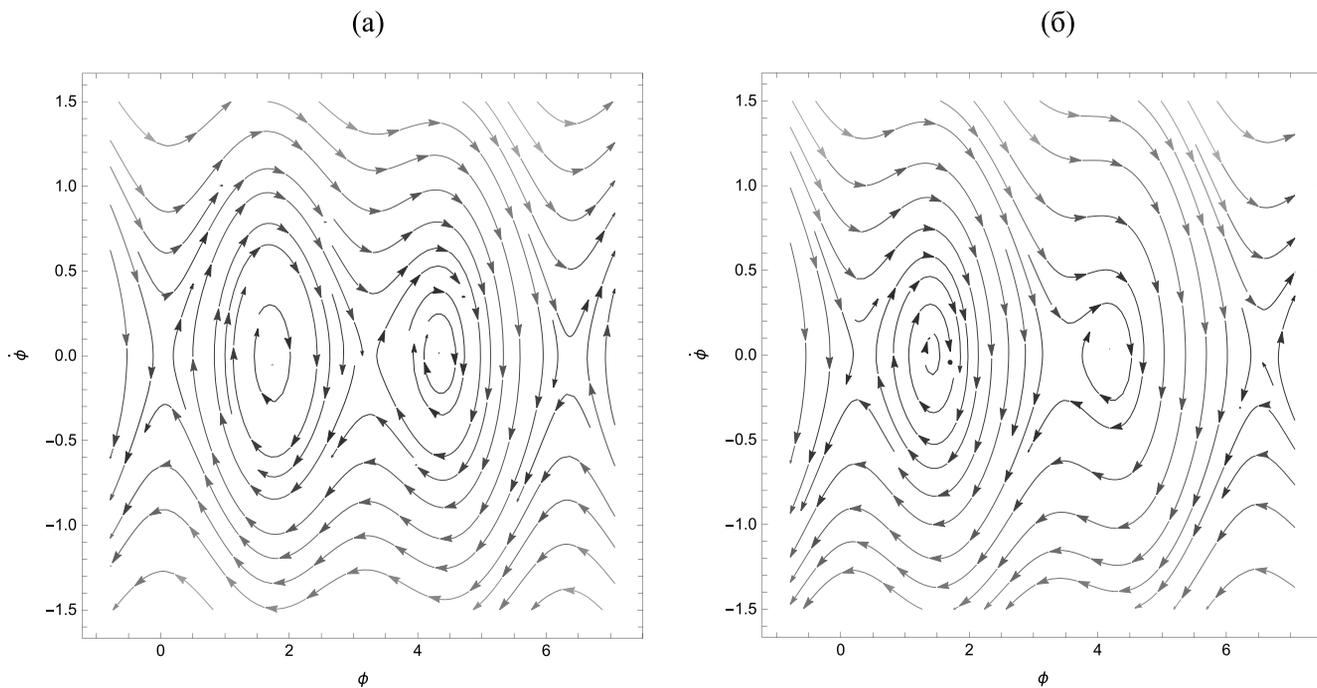
$$\frac{d}{ds} I(\Phi, \dot{\Phi}) = -2\gamma \dot{\Phi}^2. \quad (8)$$

Как видим, функция $I(\Phi, \dot{\Phi})$ вдоль траектории убывает. Следовательно любая траектория пересекает линии уровня бездиссипативной системы. Для наших целей важны траектории, выходящие из седловых точек. С ростом γ они почти всегда входят в устойчивые равновесия $\Phi_0^+ + 2\pi n, \Phi_1^+ + 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \dots$). При вариации коэффициента γ может случиться попадание на значение $\gamma_*(w, h)$, при котором траектория, вышедшая из седла, входит в другое седло. На этих траекториях реализуются решения в виде искомого простых волн. Наличие подходящих траекторий (и соответствующих решений) зависит от

¹ Обратим внимание, что первый интеграл не является периодической функцией по Φ .

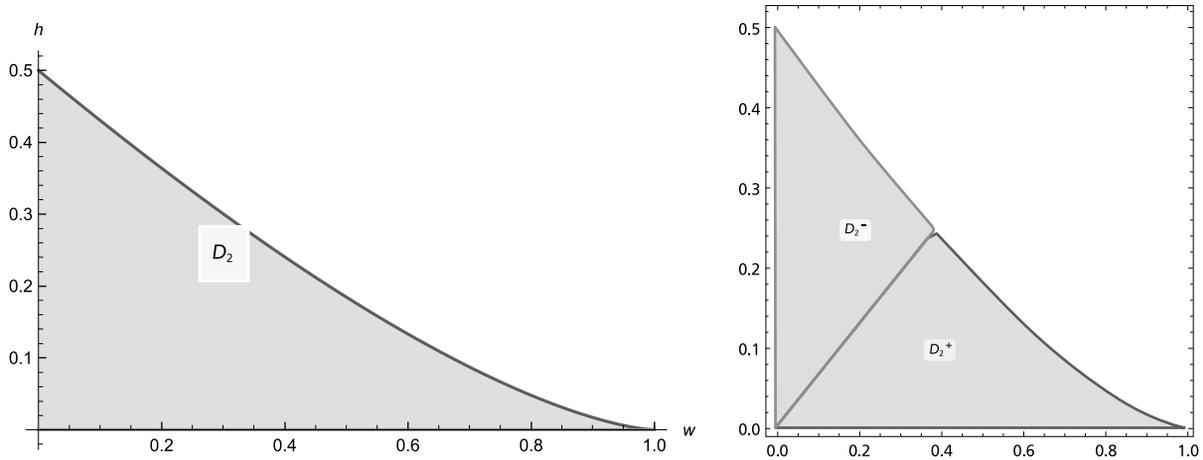


Фиг. 2. Структура фазового портрета уравнения простой волны при отсутствии диссипации $\gamma = 0$ зависит от соотношения параметров h, ω : (а) — для $h = 0.1, \omega = 0.3$, (б) — для $h = 0.3, \omega = 0.15$.



Фиг. 3. Структура фазового портрета уравнения простой волны зависит от параметров γ, h, w : (а) — для $\gamma = 0.05, h = 0.1, w = 0.3$, (б) — для $\gamma = 0.07, h = 0.3, w = 0.15$.

параметров w, h . Для $(w, h) \in D_0$ таких траекторий не бывает, поскольку нет неподвижных точек. Наиболее богатые возможности появляются для w, h из области D_2 , когда существуют четыре неподвижные точки на периоде.



Фиг. 4. Область параметров D_2 разбита на подобласти D_2^- и D_2^+ . Граница раздела в асимптотическом приближении — прямая $w = h\pi / 2$.

5. ВЫДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ

На множестве параметров $w, h > 0$ выделим области, для которых фазовые портреты бездиссипативного уравнения (при $\gamma = 0$) отличаются по своей структуре. Для $(w, h) \in D_1$ структура фазового портрета довольно проста и не меняется при изменении этих параметров. В случае $(w, h) \in D_2$ структура фазового портрета меняется, как это видно на фиг. 2. Область D_2 делится на две подобласти D_2^+ и D_2^- (фиг. 4). Граница раздела определяется равенством первых интегралов, вычисленных в седловых точках: $I(\Phi_0, 0) = I(\Phi_1, 0)$. Это соотношение описывает кривую в плоскости параметров, поскольку равновесия $\Phi_0(w, h)$ и $\Phi_1(w, h)$ зависят от (w, h) . Соответствующие подобласти определяются неравенствами

$$D_2^+ = \{(w, h) \in D_2 : I(\Phi_0, 0) > I(\Phi_1, 0)\},$$

$$D_2^- = \{(w, h) \in D_2 : I(\Phi_0, 0) < I(\Phi_1, 0)\}.$$

Отличия в структуре фазовых портретов описаны с следующим утверждением.

Лемма 1. Для параметров из области D_2^+ сепаратрисная петля из седловой точки $(\Phi_0, 0)$ охватывает седловую точку $(\Phi_1, 0)$. Для параметров из области D_2^- седловая точка $(\Phi_1, 0)$ находится вне петли из седловой точки $(\Phi_0, 0)$.

Доказательство. Значения первого интеграла в седловой точке и на сепаратрисах совпадают. Равенство первых интегралов означает, что седловые точки соединены сепаратрисами. Если при изменении параметров h, w равенство нарушается, то происходит разрыв сепаратрис у одной точки и образование петли у другой. Возможные сценарии можно усмотреть на фиг. 2. Окончание доказательства следует из монотонности первого интеграла в направлении, трансверсальном к линиям уровня.

Граница раздела областей D_2^\pm на плоскости параметров w, h описывается уравнением

$$\frac{1}{2} \cos 2\Phi_0 + 2w \cos \Phi_0 + 2h\Phi_0 = \frac{1}{2} \cos 2\Phi_1 + 2w \cos \Phi_1 + 2h\Phi_1$$

с учетом зависимости равновесий $\Phi_0(w, h)$ и $\Phi_1(w, h)$ от w, h . Это уравнение можно представить в упрощенной (приближенной) форме, используя асимптотику при $h \rightarrow 0$.

Лемма 2. Граница раздела областей D_2^\pm имеет асимптотику

$$w = \frac{\pi}{2}h + \mathcal{O}(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

Доказательство. Сначала вычисляется асимптотика соответствующих корней уравнения $F(\Phi) \equiv \sin \Phi \cos \Phi + w \sin \Phi = h$:

$$\Phi_0(w, h) = \sum_{n=1}^{\infty} h^n \phi_{0,n}(w), \quad \Phi_1(w, h) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty} h^n \phi_{1,n}(w), \quad h \rightarrow 0. \tag{9}$$

Коэффициенты рядов вычисляются по рекуррентным формулам, например в первой поправке $\phi_{0,1} = 1 / (1 + w)$, $\phi_{1,1} = 1 / (1 - w)$. На основе этих формул вычисляется асимптотика первых интегралов:

$$I(\Phi_0(w, h), 0) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n J_{0,n}(w), \quad I(\Phi_1(w, h), 0) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n J_{1,n}(w), \quad h \rightarrow 0.$$

Коэффициенты вычисляются по рекуррентным формулам, например

$$J_{0,0} = \frac{1}{2} + 2w, J_{0,1} = 0; \quad J_{1,0} = \frac{1}{2} - 2w, J_{1,1} = 2\pi.$$

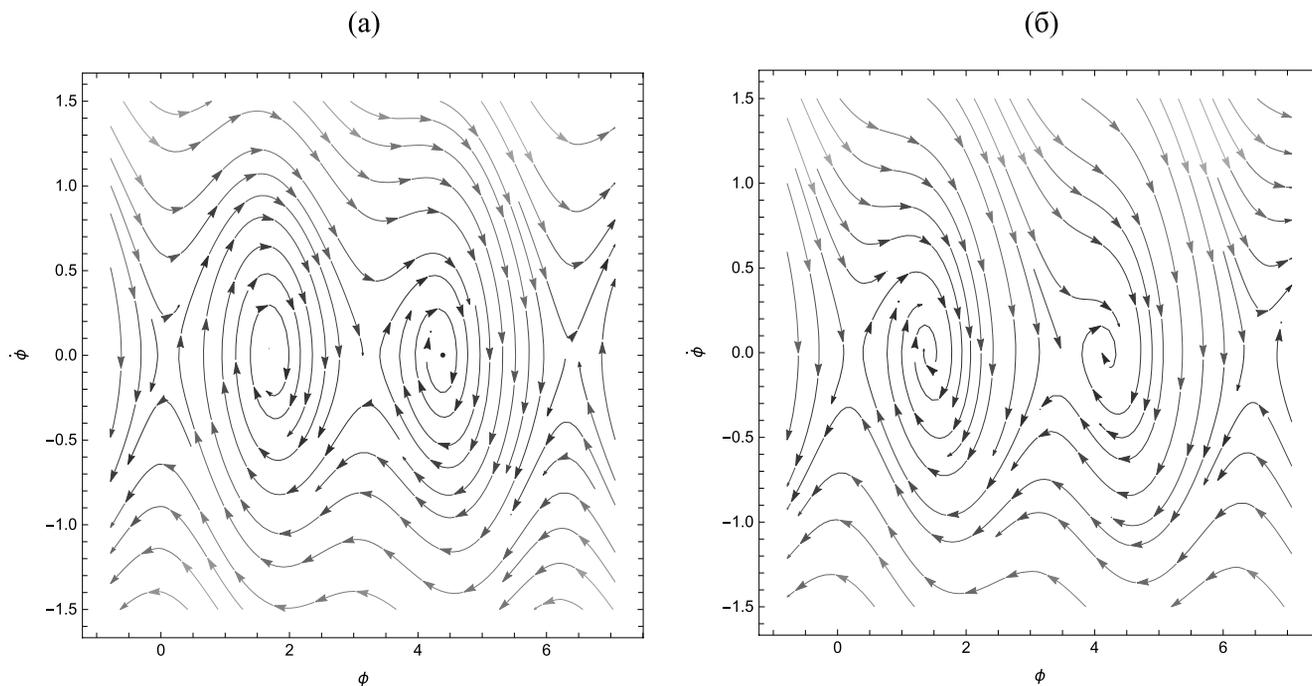
Подстановка этих рядов в уравнение $I(\Phi_0, 0) = I(\Phi_1, 0)$ позволяет найти асимптотическое решения относительно w как функции от h :

$$w(h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n w_n, \quad h \rightarrow 0.$$

Для первых коэффициентов получаем выражения $w_0 = 0, w_1 = \pi / 2$, что доказывает лемму.

6. СЕПАРАТРИСЫ СЕДЛО–СЕДЛО

Для уравнения (5) рассмотрим на фазовой плоскости тройку ближайших неподвижных точек типа седла с координатами $0 < \Phi_0 < \Phi_1 < \Phi_0 + 2\pi$. При наличии диссипации, когда $\gamma > 0$, сепаратрисы в общем случае не связывают между собой разные седла; они уходят в устойчивые неподвижные точки типа фокус или узел. Однако бывают исключительные (критические) значения параметра γ , при которых сепаратриса, выходящая из одного седла, входит в другое. Этот факт легко понять, рассматривая деформацию фазового портрета (или векторного поля) при росте параметра γ (фиг. 5). Ниже приводятся формальные доказательства такого свойства. Естественно, что критические значения γ зависят от параметров w, h . Термины “выходит” и “входит” соответствуют асимптотике решения при $s \rightarrow -\infty$ и при $s \rightarrow +\infty$ соответственно.



Фиг. 5. В сравнении с фиг. 3 фазовый поток уравнения простой волны сжимается с ростом коэффициента диссипации γ : (а) — для $\gamma = 0.15, h = 0.1, w = 0.25$, (б) — для $\gamma = 0.33, h = 0.3, \omega = 0.15$.

Теорема 1. 1) Для любой пары параметров $(w, h) \in D_1 \cup D_2$ существует значение коэффициента диссипации $\gamma_1 = \gamma_1(w, h)$, при котором сепаратриса из седла $2\pi + \Phi_0$ монотонно входит в седло Φ_0 .

2) Для любой пары параметров $(w, h) \in D_2$ существует значение коэффициента диссипации $\gamma_2 = \gamma_2(w, h)$, при котором сепаратриса из седла $2\pi + \Phi_0$ монотонно входит в седло Φ_1 .

3) Для любой пары параметров $(w, h) \in D_2^+$ существует значение коэффициента диссипации $\gamma_2^+ = \gamma_2^+(w, h)$, при котором сепаратриса из седла Φ_0 монотонно входит в седло Φ_1 .

4) Для любой пары параметров $(w, h) \in D_2^-$ существует значение коэффициента диссипации $\gamma_2^- = \gamma_2^-(w, h)$, при котором сепаратриса из седла Φ_1 монотонно входит в седло Φ_0 .

Монотонность означает отличную от нуля производную $\dot{\Phi}(s) \neq 0$ на всей траектории $-\infty < s < +\infty$.

Доказательство во всех случаях схоже и будет дано для первого случая. На фазовой плоскости с координатами $x = \Phi, y = \dot{\Phi}$ фазовые траектории автономного уравнения (5) касаются векторного поля

$$\dot{x} = y, \dot{y} = \sin x \cos x + w \sin x - h - \gamma y.$$

Рассмотрим семейство, зависящее от γ , сепаратрисных траекторий, которые выходят из седловой точки $(2\pi + \Phi_0, 0)$ в нижнюю полуплоскость $y < 0$. Запишем их в виде интегральных кривых $y = Y(x; \gamma)$ соответствующего уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cos x + w \sin x - h}{y} - \gamma. \tag{10}$$

Начальная точка $(2\pi + \Phi_0, 0)$ является особой. Тем не менее функция $Y(x; \gamma)$ непрерывна по параметру γ , поскольку вектор, касательный к сепаратрисе, непрерывен по γ в начальной точке в силу уравнения (10).

В точках фиксированной кривой $y = Y(x; \gamma_1)$ поле направлений, соответствующее параметру $\gamma \neq \gamma_1$, отличается от касательного. Отличие на величину $-(\gamma - \gamma_1)y$ содержится во второй компоненте. При $\gamma > \gamma_1$ в нижней полуплоскости $y < 0$ это отличие описывает поворот вектора направо по ходу движения по “временной” переменной s . Поэтому при увеличении γ фазовая кривая $y = Y(x; \gamma)$, фиксированная условием при $s \rightarrow -\infty$, смещается вправо и не пересекает кривую с меньшим значением γ .

Обозначим через $y_0(\gamma) = Y(\Phi_0; \gamma)$ координату y точки пересечения рассматриваемой сепаратрисы с прямой $x = \Phi_0$. При $\gamma = 0$ имеет место первый интеграл (6). Записанный в форме

$$I(x, y) \equiv y^2 + \frac{1}{2} \cos 2x + 2w \cos x + 2hx = \text{const},$$

он позволяет вычислить значение $y_0(0) = -2h\pi < 0$. Из предыдущего рассуждения следует, что функция $y_0(\gamma)$ монотонно растет при увеличении γ . По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра эта функция непрерывна, пока остается отрицательной (вне неподвижной точки).

Промежуток определения функции $y_0(\gamma)$ ограничен, поскольку при достаточно больших γ траектория $y = Y(x; \gamma)$ не пересекает прямую $x = \Phi_0$. Для доказательства заметим, что для векторного поля в достаточно малой окрестности седловой точки $0 < x - \Phi_0 < \delta, y < 0$ компонента $\dot{y} = \sin x \cos x + w \sin x - h > 0$ положительна. Направление касательной к фазовой кривой определяется производной, которая оказывается отрицательной в нижней полуплоскости и оценивается сверху в силу уравнения (9): $dy/dx < -\gamma$ равномерно в полосе $0 < x - \Phi_0 < \delta, y < 0$. Пересечение бездиссипативной траектории $y = Y(x; 0)$ с границей полосы $x - \Phi_0 = \delta$ определяет точку $(\Phi_0 + \delta, y_\delta)$ с координатой $y_\delta = Y(\delta; 0) < 0$. Эта точка соединена с неподвижной точкой $(\Phi_0, 0)$ посредством прямой $y = (x - \Phi_0)y_\delta / \delta$. Если параметр γ берется достаточно большой $\gamma > -y_\delta / \delta$, то направление этой прямой мажорирует направления касательных к фазовым траекториям $y = Y(x; \gamma)$ для всех точек в треугольнике $0 < x - \Phi_0 < \delta, (x - \Phi_0)y_\delta / \delta < y < 0$. Поскольку при $\gamma > 0$ траектория пересекает границу $y_\delta < Y(\delta; \gamma) < 0$, то для больших $\gamma > -y_\delta / \delta$ траектория остается в треугольнике до выхода через верхнюю границу $y = 0$.

Теперь остается сделать заключение для функции $y_0(\gamma)$, которая непрерывна, ограничена нулем сверху, монотонно растет и определена на конечном промежутке. Граница промежутка (предельное значение g_1) определяется как предел обратной к $g_0(\gamma)$ монотонной функции $\gamma = \gamma(y_0)$ при $y_0 \rightarrow 0$. При этом значении параметра $\gamma = \gamma_1$ сепаратриса из седла $(2\pi + \Phi_0, 0)$ входит в седло $(\Phi_0, 0)$. Значение $\gamma_1 = \gamma_1(h, w)$ зависит от параметров (h, w) посредством равновесия $\Phi_0 = \Phi_0(h, w)$ и траектории $y = Y(x; \gamma; h, w)$. Теорема доказана.

Замечание. Для уравнения (5) с $h > 0$ существуют сепаратрисы из седел с координатами $\Phi_0 + 2\pi l$ при $l = \pm 1, \pm 2, \dots$, которые в бездиссипативной системе ($\gamma = 0$) уходят на бесконечность (фиг. 2). При увеличении коэффициента $\gamma > 0$ происходит деформация сепаратрис, и при критических значениях g_n они по очереди входят в разные равновесия, расположенные левее на оси Φ . Аналогичная ситуация с равновесиями $\Phi_1 + 2\pi l$ при параметрах $(w, h) \in D_2^-$. В интерпретации магнитодинамики такие траектории соответствуют вращению вектора намагниченности с последующей стабилизацией. При $h = 0$ таких траекторий (с вращением) не бывает.

7. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ

7.1. Существование

Результаты о существовании сепаратрисных траекторий из седла в седло позволяют сформулировать условия существования соответствующих простых волн $\phi(x, t) = \Phi(s)$, $s = (x - vt) / \sqrt{1 - v^2}$. Для разных наборов исходных параметров w, h, α существуют разные типы волн, которые отличаются условиями на бесконечностях при $x \rightarrow \pm\infty$. Для разных волн скорости различны; они определяются из алгебраических уравнений

$$\alpha v / \sqrt{1 - v^2} = \gamma(w, h). \quad (11)$$

Правая часть здесь представляет коэффициент эффективной диссипации простой волны для уравнения (5), который вычисляется из требования вхождения сепаратрисы из седла в седло. Существование таких $\gamma(w, h)$ доказано в теореме 1, переформулировка которой приведена ниже.

Теорема 2. 1) Для любой пары параметров $(w, h) \in D_1 \cup D_2$ существует простая волна в виде монотонного решения дифференциального уравнения (5), бегущая из равновесия $2\pi + \Phi_0$ в равновесие Φ_0 :

$\Phi(s) \rightarrow 2\pi + \Phi_0$ при $s \rightarrow -\infty$, $\Phi(s) \rightarrow \Phi_0$ при $s \rightarrow +\infty$. Скорость волны определяется из уравнения (10) при $\gamma = \gamma_1(w, h)$.

2) Для любой пары параметров $(w, h) \in D_2$ существуют простая волна в виде монотонного решения дифференциального уравнения (5), бегущая из равновесия $2\pi + \Phi_0$ в равновесие Φ_1 :

$$\Phi(s) \rightarrow 2\pi + \Phi_0 \text{ при } s \rightarrow -\infty, \quad \Phi(s) \rightarrow \Phi_1 \text{ при } s \rightarrow +\infty.$$

Скорость волны определяется из уравнения (10) при $\gamma = \gamma_2(w, h)$.

3) Для любой пары параметров $(w, h) \in D_2^+$ существует простая волна в виде монотонного решения дифференциального уравнения (5), бегущая из равновесия Φ_0 в равновесие Φ_1 :

$$\Phi(s) \rightarrow \Phi_0 \text{ при } s \rightarrow -\infty, \quad \Phi(s) \rightarrow \Phi_1 \text{ при } s \rightarrow +\infty.$$

Скорость волны определяется из уравнения (10) при $\gamma = \gamma_2^+(w, h)$.

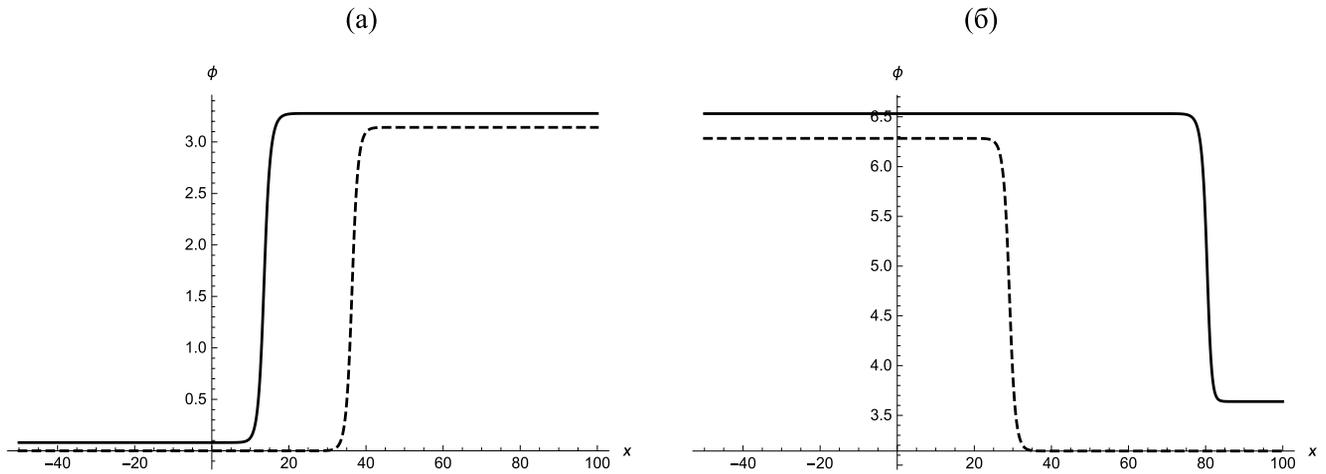
4) Для любой пары параметров $(w, h) \in D_2^-$ существует простая волна в виде монотонного решения дифференциального уравнения (5), бегущая из равновесия Φ_1 в равновесие Φ_0 :

$$\Phi(s) \rightarrow \Phi_1 \text{ при } s \rightarrow -\infty, \quad \Phi(s) \rightarrow \Phi_0 \text{ при } s \rightarrow +\infty.$$

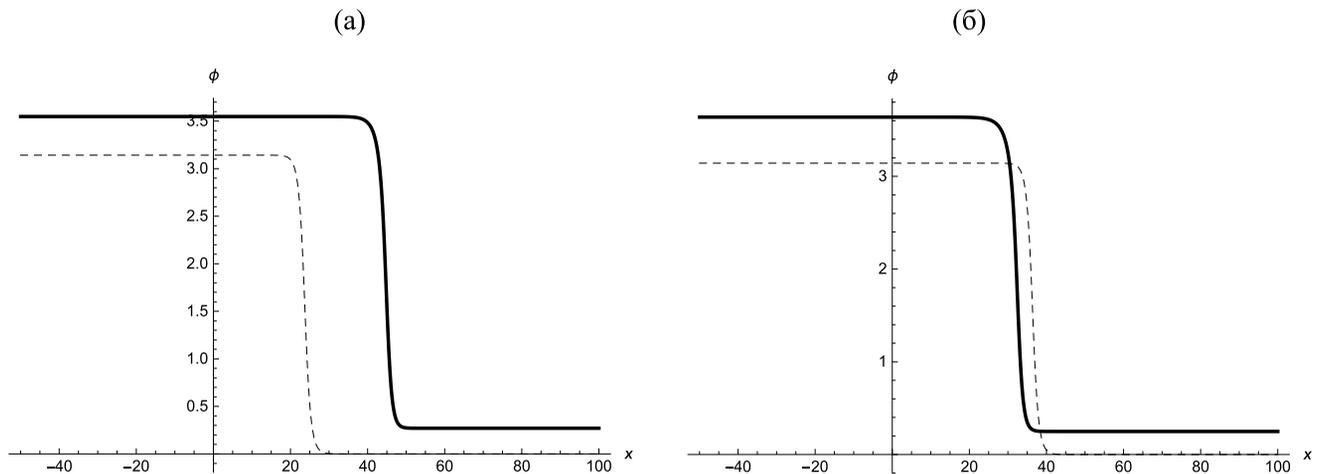
Скорость волны определяется из уравнения (10) при $\gamma = \gamma_2^-(w, h)$.

В качестве иллюстрации на фиг. 6, 7 приведены результаты численных экспериментов с уравнением (2) на большом промежутке $-L < x < L$ при параметрах $w, h, \alpha \approx 1$. Начальные данные берутся соответствующие кинку (1) либо антикинку. Краевые условия соответствуют равновесиям. Сплошная линия представляет график решения в далекий момент времени $T \approx L$. Штриховая линия соответствует решению в случае $h = 0$, когда скорость волны $v = v_0$ определяется по формуле Звездина $\alpha v_0 / \sqrt{1 - v_0^2} = w$. При $h \neq 0$ скорость волны значительно отличается от v_0 . Отличия сохраняются при малых α, h, ω .

Для случая волны из Φ_1 в Φ_0 при параметрах $(w, h) \in D_2^-$ решения при $h = 0$ не существует. Штриховая линия на фиг. 7 соответствует сдвигу начальной волны на расстояние $v_0 T$ и приведена для сравнения скоростей.



Фиг. 6. Волны в Φ_1 при большой диссипации $\alpha = 1$, соответствующие параметрам из разных областей D_2^+ : (а) — для $w = 0.25$, $h = 0.1$, (б) — для $w = 0.25$, $h = 0.3$.



Фиг. 7. Волны из Φ_1 в Φ_0 при большой диссипации $\alpha = 1$, параметры (w, h) из области D_2^- : (а) — для $w = 0.16$, $h = 0.3$, (б) — для $w = 0.25$, $h = 0.3$.

Отметим, что начальные данные могут быть не согласованы с используемыми краевыми условиями и даже отличаться от кинка. Несмотря на это, решение быстро стабилизируется к волне с используемыми значениями на краях. Вопрос об области притяжения к той или иной волне (т.е. о множестве начальных данных) остается открытым. Для диссипативных волн в параболических уравнениях эта проблема была решена в [12; 18; 19].

7.2. Устойчивость по линейному приближению

Устойчивость волны $\phi(x, t) = \Phi(s), s = (x - vt) / \sqrt{1 - v^2}$ понимается как устойчивость решения начально-краевой задачи для дифференциального уравнения (2) в линейном приближении. Линейное приближение означает, что при анализе возмущенного решения

$$\phi(x, t) = \Phi(s) + \tilde{\phi}(s, t)[1 + o(1)], \quad s = (x - vt) / \sqrt{1 - v^2}, \quad |\tilde{\phi}(s, t)| \ll 1,$$

малая поправка $\tilde{\phi}(s, t)$ определяется из линеаризованного уравнения с нулевыми условиями на бесконечности и с ненулевыми начальными данными. Имея в виду метод разделения переменных, можно ограничиться анализом поправки специального вида $\tilde{\phi}(s, t) = \exp(\mu t)\phi(s), \mu = \text{const}$. Это приводит к спектральной задаче на оси $-\infty < s < +\infty$ по определению $\phi(s)$ и μ :

$$\mathbb{L}_\mu \varphi \equiv \left[-\frac{d^2}{ds^2} - \left(\gamma + 2\mu \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right) \frac{d}{ds} + Q(s) \right] \varphi = -(\mu^2 + \alpha\mu) \varphi.$$

Здесь $Q(s) = F'(\Phi(s)) = \cos 2\Phi(s) + w \cos \Phi(s)$. Спектральная задача приводится к самосопряженной форме заменой функции

$$\varphi(s) = \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\gamma + 2\mu \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \right] s \right) \psi(s).$$

При этом уравнение приобретает вид

$$L\psi \equiv \left[-\frac{d^2}{ds^2} + [Q(s) + \frac{\gamma^2}{4}] \right] \psi = \frac{1}{1-v^2} \lambda \psi, \quad -\infty < s < +\infty,$$

где $\lambda = -(\mu^2 + \alpha\mu)$. Поскольку $2\mu = [-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \lambda}]$, то опасность для устойчивости представляют значения $\lambda < 0$, при которых встречаются $\mu > 0$, из-за чего поправка $\tilde{\varphi}(s, t)$ оказывается экспоненциально растущей по времени. Таким образом, устойчивость в линейном приближении идентифицируется с отсутствием спектра на левой полуоси $\lambda < 0$ для самосопряженного оператора L . Подобные задачи (типа Штурма–Лиувилля) хорошо исследованы в общем случае.

В рассматриваемой задаче производная исходного решения $\Phi'(s)$ удовлетворяет линейаризованному однородному уравнению: $\mathbb{L}_0 \Phi'(s) = 0$. Поэтому для $\psi_0(s) \equiv \exp(\gamma s / 2) \Phi'(s)$ выполняется соотношение $L\psi_0(s) = 0$. Это будет собственная функция оператора L , соответствующая нулевому собственному значению, если еще выполнены краевые условия $\psi_0(s) \equiv \exp(\gamma s / 2) \Phi'(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \pm\infty$.

Очевидно, краевое условие при $s \rightarrow -\infty$ выполняется. Поведение производной $\Phi'(s)$ на переднем фронте при $s \rightarrow +\infty$ играет принципиальную роль в обосновании устойчивости. Для уравнения простой волны (5) асимптотика решения при входе траектории в равновесии Φ_+ имеет вид

$$\Phi(s) = \Phi_+ + \mathcal{O}(\exp(vs)), \quad s \rightarrow +\infty.$$

Соответственно, $\Phi'(s) = \mathcal{O}(\exp(vs)), s \rightarrow +\infty$. Показатель v берется из характеристического уравнения $v^2 + \gamma v - Q_+ = 0$, где $Q_+ = F'(\Phi_+)$. В случае седла величина $Q_+ > 0$ положительна и входящая траектория единственна с показателем $v = [-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4Q_+}] / 2$. В случае узла выполняется неравенство $-\gamma^2 < 4Q_+ < 0$ и все траектории (в окрестности) входят в узел. При этом почти на всех траекториях асимптотика соответствует общему решению линейаризованного уравнения с наибольшим показателем $v = [-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4Q_+}] / 2$. Только на одной исключительной траектории асимптотика соответствует частному решению с наименьшим показателем $v = [-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4Q_+}] / 2$.

Из полученной таким образом оценки для производной $\Phi'(s)$ следует, что $\psi_0(s)$ будет собственной функцией оператора L , если траектория либо входит в седло, либо входит в узел по исключительному направлению (см. также [17, с. 126]). Точка спектра $\lambda = 0$ будет простой, поскольку второе (линейно независимое к ψ_0) решение уравнения $L\psi = 0$ экспоненциально растет при $s \rightarrow +\infty$.

Наличие других собственных значений $\lambda < 0$ зависит от нулей функции $\psi_0(s)$. Если $\psi_0(s)$ не имеет нулей при $-\infty < s < +\infty$, то собственных значений на левой полуоси $\lambda < 0$ нет. Доказательство от противного: если при $\lambda < 0$ существует собственная функция $\psi_\lambda(s)$, то в силу ортогональности к $\psi_0(s)$ она обязана иметь нуль² в конечной точке $s_\lambda \in (-\infty, +\infty)$. Рассуждения, аналогичные теореме Штурма о решениях $\psi_0(s), \psi_\lambda(s)$ на промежутке $(-\infty, s_\lambda)$, приводят к противоречию.

Отсутствие нулей у $\psi_0(s)$ соответствует монотонности $\Phi'(s)$. В итоге приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Монотонные решения уравнения (5), которые соответствуют сепаратрисам из седла в седло, представляют собой простые волны для уравнения (2), устойчивые в линейном приближении.*

² Более одного нуля с конечными значениями координаты не бывает по теореме Штурма.

Замечание. При $(w, h) \in D_2^+$ существуют такие значения γ , что сепаратриса из седла Φ_0 (либо из $2\pi + \Phi_0$) в седло Φ_1 оказывается немонотонной: фазовая траектория пересекает ось Φ , где обращается в нуль производная. Волна с соответствующей скоростью будет неустойчива.

7.3. Скорость

Вычисление скорости волны при заданных параметрах (w, h) сводится к нахождению подходящего значения эффективной диссипации $\gamma = \gamma(h, w)$. Это значение определяется требованием вхождения сепаратрисы из седла в седло. По сути, здесь сформулирована нелинейная спектральная задача. Ее можно решать приближенно численными методами.

Фазовая траектория представляет собой интегральную кривую уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \cos x + \omega^2 \sin x - h}{y} - \gamma. \quad (11)$$

Искомая траектория выходит из особой точки (седла), что неудобно при использовании стандартных численных методов. Поэтому начальную точку (x_0, y_0) следует брать вблизи сепаратрисы вне особой точки. Практически реализуемый вариант: точка (x_0, y_0) берется на касательной к сепаратрисе вблизи исходного седла. Затем в уравнении (11) подбирается коэффициент γ , при котором интегральная кривая проходит вблизи другого седла. Фактически это приближенный способ решения спектральной задачи.

Замечание. Для волн, бегущих из $\Phi_0 + 2\pi$ и из Φ_1 в различные равновесия (левее на оси Φ), существует иерархия скоростей. В силу (7) деформация сепаратрис увеличивается с ростом γ . Поэтому с учетом уравнения для скорости (10) можно сделать вывод: чем короче траектория волны (чем меньше вращается вектор намагниченности), тем выше ее скорость.

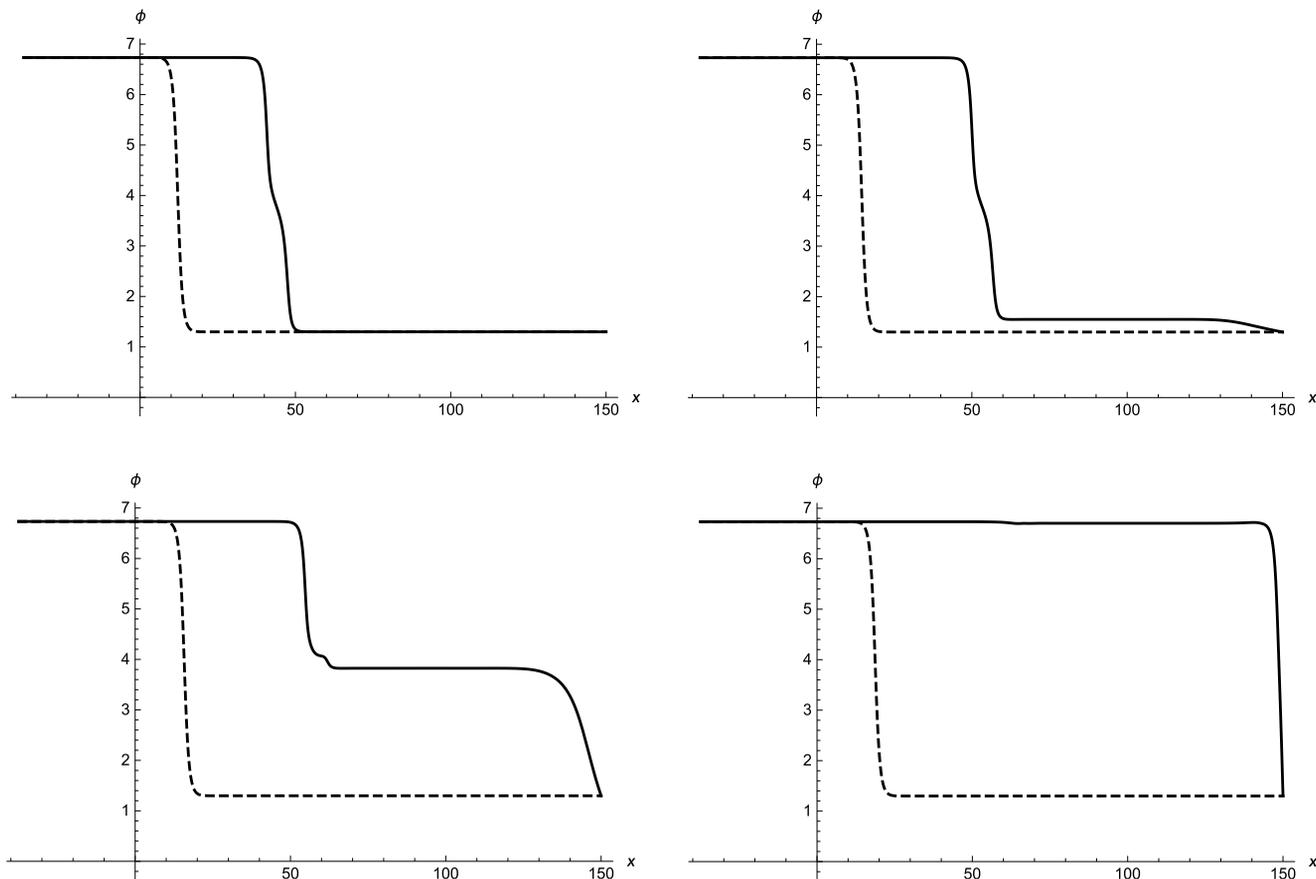
8. ТРАЕКТОРИИ СЕДЛО–УЗЕЛ

На фазовом портрете уравнения простой волны (5) при $\gamma > 0$ всегда присутствуют устойчивые неподвижные точки Φ_0^+, Φ_1^+ типа фокус или узел (фиг. 5). Фазовые траектории из седел в такие точки существуют почти при всех значениях $\gamma > 0$. Они определяют простые волны с соответствующими скоростями. Однако для исходного уравнения в частных производных (2) однородные состояния $\phi \equiv \Phi_0^+$ и $\phi \equiv \Phi_1^+$ неустойчивы. Эта неустойчивость проявляется и на простой волне. Как правило, такие волны неустойчивы в линейном приближении из-за немонотонности, и они практически не обнаруживаются в численных экспериментах.

Свойство монотонности волны необходимо для устойчивости. Для обсуждаемого случая это бывает, когда неподвижная точка, в которую входит фазовая траектория, оказывается узлом. Условие узла накладывает ограничения на коэффициент эффективной диссипации (а следовательно, на скорость волны): $\gamma^2 \geq -4F'(\Phi_n^+) > 0 (n = 0, 1)$. Как было показано выше, устойчивость волны из седла в узел бывает при тех γ , для которых траектория из седла входит в узел по исключительному направлению (см. также [17, с. 126]). Именно это свойство обеспечивает применимость результатов спектральной теории. В общем случае (при произвольном значении γ) траектория не будет исключительной, и устойчивость соответствующего решения не гарантируется.

В случае $h = 0$ одна из таких волн найдена Звездиным (см. [2]) в явной форме (1); скорость определяется из соотношения $\gamma = w$. Для параметра $w \in (0, 1)$ решение $\Phi_0(s)$ соответствует траектории из седла в седло. Поэтому найденная скорость единственна, и указанная волна устойчива. При $1 < w < 2$ из асимптотики явного решения (1) видно, что оно соответствует траектории из седла в узел по исключительному направлению. Таким образом, в этом случае волна Звездина остается устойчивой. При $w \geq 2$ формула Звездина (1) сохраняется, но соответствующая траектория не является исключительной и поэтому устойчивость волны не гарантируется. Не гарантируется устойчивость и при $1 < w < 2$ для волн с неподходящей скоростью, когда $\gamma \neq w$. Но в этом случае нет и явной формулы для решения.

В случае $h > 0$ для уравнения простой волны с параметрами $(w, h) \in D_1 \cup D_2$ имеется одно либо два равновесия Φ_0^+ и Φ_1^+ на периоде, которые будут узлами при соответствующих ограничениях на γ . Существует много подходящих γ , при которых траектории из седел Φ_0, Φ_1 и $\Phi_0 + 2\pi$ входят в эти узлы. Возможные варианты можно усмотреть из картины деформации фазового портрета при изменении γ . Таким образом, существует много простых волн со стабилизацией в равновесиях Φ_0^+ либо Φ_1^+ при $s \rightarrow +\infty$. Однако явные формулы отсутствуют, и устойчивость какой-либо из таких волн не установлена. Аналогичная ситуация в равновесиях, сдвинутых на $2\pi n$.



Фиг. 8. Эволюция волны на траектории седло-узел при параметрах $\alpha = 1, h = 0.5, w = 0.25$, в моменты $t = 55, 60, 65, 77$. Со временем передний фронт волны, соответствующий узлу, отрывается от неустойчивого равновесия, и решение выходит на устойчивое состояние $\Phi_0 + 2\pi$. Пунктирная линия – сдвиг начальной волны на v_0t приведена для сравнения скоростей.

В численных экспериментах ситуация с неустойчивой волной из седла в узел похожа на ту, что случается в задаче для (параболического) уравнения КПП. Эти волны обнаруживаются численно. Для уравнения (2) такая волна со временем (медленно) разрушается и решение выходит на устойчивое однородное состояние (фиг. 8). Краевое условие на переднем фронте (при $x = L$), используемое в численном эксперименте, не удерживает процесс отрыва. Этот эффект наблюдается, например, в случае Звездина при $h = 0, w \geq 2$. Отметим, что для уравнения КПП разрушения подобной волны не наблюдается вовсе. Правдоподобное объяснение эффекта затягивания устойчивости приведено в [17, с. 127]. В качестве аргумента приводится факт конечности промежутка по x , используемого в численных расчетах.

Фиг. 8. Эволюция волны на траектории седло–узел при параметрах $\alpha = 1, h = 0.5, w = 0.25$ в моменты $t = 55, 60, 65, 77$. Со временем передний фронт волны, соответствующий узлу, отрывается от неустойчивого равновесия и решение выходит на устойчивое состояние $\Phi_0 + 2\pi$. Пунктирная линия — сдвиг начальной волны на v_0t , приведена для сравнения скоростей.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для уравнения (2) найдены разного типа устойчивые простые волны, структура и скорость которых зависит от параметров w, h, α . Указан способ вычисления скорости. Новые результаты связаны с выявлением роли параметра h . Во-первых, наличие $h \neq 0$ приводит к смещению равновесий от значений 0 и π . При малых h это смещение невелико, как видно из асимптотики (8): $\Phi_0(h) = \mathcal{O}(h), \Phi_1(h) = \pi + \mathcal{O}(h), h \rightarrow 0$. Более важным является появление волны из Φ_1 в Φ_0 , аналога которой не существует при $h = 0$. Более того, при параметрах $(w, h) \in D_2^-$ все возможные волны оказываются типа антикинк. Они соответствуют сепаратрисам в нижней полуплоскости $\dot{\Phi} < 0$. В интерпретации магнитодинамики этот факт

свидетельствует о нарушении симметрии с появлением предпочтительного направления поворота вектора намагниченности.

Полученные результаты могут быть использованы при планировании, проведении и интерпретации одномерной динамики доменных границ (ДГ) в редкоземельных ортоферритах. Эти магнетики с 60-х гг. XX в. привлекают внимание многочисленных исследователей в области физики магнитных явлений обилием открытых в них эффектов и возможностями практического применения (см. [1; 2; 20–23]). Не потеряли они своей актуальности и сейчас, т.к. получены тонкие пленки и нанокристаллы из этих материалов (см. [24; 25]). Например, в них наблюдается лоренц-инвариантная динамика ДГ, что позволяет исследовать экспериментально релятивистские эффекты (см. [1; 21]). Долгое время иттриевый ортоферрит был рекордсменом по максимальной скорости движения ДГ в магнитных материалах — 20 км/с. В настоящее время в Mn_2Au эту скорость даже повысили до 40 км/с (см. [26]). Такие скорости движения ДГ очень интересны при увеличении быстродействия электронных устройств. Однако пока большинство теоретических работ по динамике ДГ проведены в предположении малых величин скоростей, магнитных и электрических полей, без учета возможного изменения структуры динамической ДГ. Теория, представленная в настоящей работе, позволяет выйти за рамки этих приближений. Также она представляет большой интерес для планирования новых экспериментов по одномерной динамике ДГ, т.к. предсказывает новые возможности для управления величиной стационарной скорости ДГ с помощью переменного магнитного поля, конкурирующего с постоянным внешним магнитным полем, направленным ему перпендикулярно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bar'yakhtar V. G., Chetkin M. V., Ivanov B. A., Gadetskii S. N.* Dynamics of topological magnetic solitons. Springer Tracts in Modern Physics (STMP) V. 129, 1994.
2. *Zvezdin A. K.* Dynamics of domain walls in weak ferromagnets // Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 29. Вып. 10. С. 605–610. arXiv preprint arXiv:1703.01502 (2017).
3. *Гареева З. В., Чен С. М.* Сверхбыстрая динамика доменных границ в антиферромагнетиках и ферромагнетиках с температурами компенсации магнитного и углового моментов (мини-обзор) // Письма в ЖЭТФ. 2021. Т. 114. Вып. 4. С. 250–262. DOI: 10.31857/S1234567821160084
4. *Калякин Л. А.* Возмущение простой волны в системе с диссипацией // Матем. заметки. 2022. Т. 112. Вып. 4. С. 553–566. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13730>
5. *Kalyakin L. A.* Perturbation of a Simple Wave in a Domain Wall Model // Proceed. of the Steklov Inst. of Math. 2023. V. 321. Suppl. 1. P. S90–S100.
6. *Шапаева Т. Б., Муртазин Р. Р., Екомасов Е. Г.* Динамика доменной границы под действием импульсного и градиентного магнитных полей в редкоземельных ортоферритах // Изв. РАН. Сер. физ. 2014. Т. 78. № 2. С. 155–158. DOI: 10.7868/S0367676514020264
7. *Шапаева Т. Б., Юмагузин А. Р., Курбатова Ю. Н., Вахитов Р. М.* Влияние параметров управляющего импульса магнитного поля на динамику доменной границы // Физика металлов и металловедение. 2022. Т. 123. № 3. С. 284–290. DOI: 10.31857/S0015323022030111
8. *Звездин А. К., Мухин А. А.* Новые нелинейные динамические эффекты в антиферромагнетиках // Краткие сообщения по физике. ФИАН. 1981. № 12. С. 10–15.
9. *Звездин А. К., Звездин К. А.* Классические и квантовые эффекты в динамике мезоскопического магнита индуцированные спиновым током // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. Вып. 4 (10). С. 879–885.
10. *Kim T. H., Gruenberg P., Han S. H., Cho B. K.* Field-driven dynamics and time-resolved measurement of Dzyaloshinskii-Moriya torque in canted antiferromagnet $YFeO_3$ // Sci. Rep. 2017. V. 7. P. 4515. DOI: 10.1038/s41598-017-04883-3
11. *Ustinov A. V., Coqui C., Kemp A., Zolotaryuk Y., Salerno M.* Ratchetlike dynamics of fluxons in annular Josephson junctions driven by biharmonic microwave fields // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. No. 8. 087001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.93.087001
12. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастаньем вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Матем., мех. Т. 1. Вып. 6. 1937. С. 1–25.
13. *Fischer R. A.* The wave of advance of advantageous genes // Ann. Eugenics. 1937. V. 7. P. 355–369.
14. *Марри Дж.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.

15. Зельдович Я. Б., Баренблат Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М. Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
16. Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.
17. Свирежев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. М.: Наука, 1987.
18. Канель Я. И. О стабилизации решений задачи Коши для уравнений, встречающихся в теории горения // Матем. сб. 1962. Т. 59. № 101 (дополнительный). С. 245–288.
19. Uchiyama K. The behavior of solutions of some non-linear diffusion equations for large time // J. Math. Kyoto Univ. 1978. V. 18. No. 3. P. 453–508.
20. Kim K. J., Kim S. K., Hirata Y., Oh S. H., Tono T., Kim D. H., Okuno T., Ham W. S., Kim S., Go G., Tserkovnyak Y., Tsukamoto A., Moriyama T., Lee K. J., Ono T. Fast domain wall motion in the vicinity of the angular momentum compensation temperature of ferrimagnets // Nature Materials. 2017. V. 16. No. 12. P. 1187–1192. DOI: 10.1038/nmat4990
21. Барьяхтар В. Г., Иванов Б. А., Четкин М. В. Динамика доменных границ в слабых ферромагнетиках // УФН. 1985. Т. 146. С. 417–458.
22. Konishi S., Miyama T., Ikeda K. Domain wall velocity in orthoferrites // J. Appl. Phys. Lett. 1975. V. 22. P. 258–259.
23. Шамсутдинов М. А., Ломакина И. Ю., Назаров В. Н., Харисов А. Т. Ферро- и антиферродинамика. М.: Наука, 2009. 455 с.
24. Mittova I. Ya., Perov N. S., Alekhina Yu. A., Mittova V. O., Nguyen A. T., Kopeychenko E. I., Sladkopevtsev B. V. Size and magnetic characteristics of YFeO₃ nanocrystals // Inorganic Materials. 2022. V. 58. No. 3. P. 271–277. DOI: 10.1134/S0020168522030116
25. Оглобличев В. В., Изюров В. И., Пискунов Ю. В., Смольников А. Г., Садыков С. А., Чупраков А. Ф., Дубинин С. С., Наумов С. В., Носов А. П. Неоднородное магнитное состояние тонких пленок YFeO₃ по данным ЯМР-спектроскопии // Письма в ЖЭТФ. 2021. Т. 114. Вып. 1. С. 24–30. DOI: 10.31857/S1234567821130061
26. Otxoa R. M., Atxitia U., Roy P. E., Chubykalo-Fesenko O. Giant localised spin-Peltier effect due to ultrafast domain wall motion in antiferromagnetic metals // Commun. Phys. 2020. V. 3. P. 31. DOI: 10.1038/s42005-020-0296-4.

УДК 517.956.328:517.956.8;517.958:535.4

ЛАКУНЫ В СПЕКТРЕ ТОНКИХ ВОЛНОВОДОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПОЛОЖЕННЫМИ ЛОКАЛЬНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ СТЕНОК¹⁾

© 2024 г. С. А. Назаров

1190178 С.-Петербург, Большой проспект, В.О, 61, ИПМаш РАН, Россия

e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 15.07.2023 г.

Переработанный вариант 15.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Исследуется строение спектров квантового и акустического волноводов, полученных из тонкого цилиндра присоединением периодического семейства мелких узлов. Получены асимптотические разложения собственных значений модельной задачи на ячейке периодичности, на основе которых выведены асимптотические формулы для положения и размеров лакун в спектрах соответствующих задач Дирихле и Неймана для оператора Лапласа. Найдены геометрические и интегральные характеристики волновода, обеспечивающие раскрытие нескольких спектральных лакун. Библ. 36. Фиг. 3.

Ключевые слова: квантовый и акустический волноводы, задачи Дирихле и Неймана для оператора Лапласа, периодическое возмущение тонкого цилиндра мелкими узлами, спектр, асимптотика собственных значений, спектральные сегменты и лакуны.

DOI: 10.31857/S0044466924010098, EDN: ZJLNPN

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ И СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Пусть Ξ — область (фиг. 1а) в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, совпадающая со связным цилиндром $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$ вне слоя $\Lambda_R = \{\xi = (\xi', \xi_d) : \xi' \in \mathbb{R}^{d-1}, |\xi_d| < R\}$ при некотором $R > 0$, однако $\Xi \neq \Omega$, т.е. стенки волновода Ξ обязательно локально деформированы. Сечение ω имеет компактное замыкание $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$, а граница $\partial\Xi$ липшицева. Кроме того, Π^h — периодический, квантовый или акустический (см. [1] и [2] соответственно) волновод, образованный сдвигами $\mathfrak{W}^h(p) = \{x : (x', x_d - p) \in \bar{\omega}^h\}$ ячейки периодичности

$$\mathfrak{W}^h = \{x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^d : \xi := h^{-1}x \in \Xi, |x_d| < 1/2\}, \quad (1)$$

т.е.

$$\overline{\Pi^h} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \overline{\mathfrak{W}^h(p)}, \quad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (2)$$

Масштабированием период сведен к единице, а значит, сделаны безразмерными декартовы системы координат x и ξ в \mathbb{R}^d , а также все геометрические параметры, в частности малый $h \in (0, h_0]$, причем величина $h_0 > 0$ зафиксирована так, что $2hR < 1$ и волновод Π^h имеет изображенный на фиг. 1б вид. Подобные формы можно обнаружить у линий высоковольтных передач с шарами-маркерами на проводах (предупреждение пилотам) или у деревянных и медных духовых инструментов (при закрытых клапанах). Список объектов можно расширить, придав размеру h порядок единицы и сделав период большим.

В тонком периодическом волноводе Π^h с периодически деформированными стенками рассмотрим спектральную задачу Дирихле или задачу Неймана:

$$-\Delta_\xi u^h(x) = \lambda^h u^h(x), \quad x \in \Pi^h, \quad (3)$$

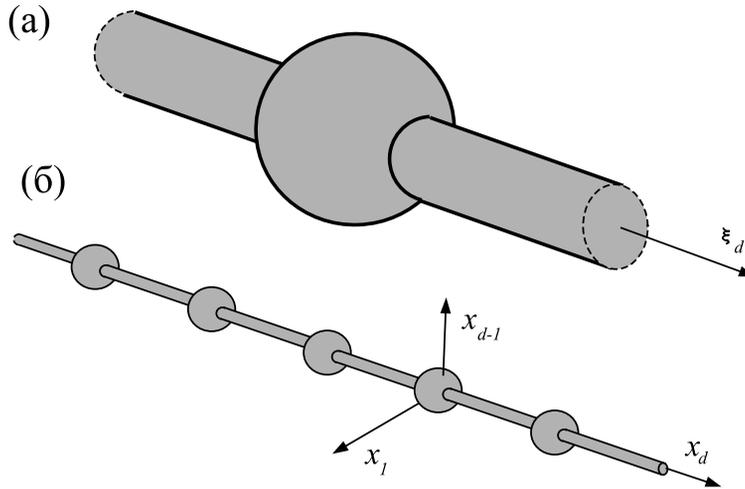
$$u^h(x) = 0 \text{ или } \partial_\nu u^h(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi^h, \quad (4)$$

и ее вариационную формулировку (см. [3, 4])

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 22-11-00046).

$$(\nabla_x u^h, \nabla_x \psi^h)_{\Pi^h} = \lambda^h(u^h, \psi^h)_{\Pi^h} \quad \forall \psi^h \in H_K^1(\Pi^h). \tag{5}$$

Здесь $\nabla_x = \text{grad}$ и $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа, λ^h — спектральный параметр, ∂_ν — производная вдоль внешней нормали, определенная почти всюду на липшицевой поверхности $\partial\Pi^h$, $(\cdot, \cdot)_{\Pi^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi^h)$, а $H_D^1(\Pi^h) = H_0^1(\Pi^h)$ и $H_N^1(\Pi^h) = H^1(\Pi^h)$ — пространства Соболева, но в случае $K = D$ для функций u^h и ψ^h выполнено (устойчивое) условие Дирихле $(4)_D$. Условие Неймана $(4)_N$ является *естественным* (терминология [4]) и не включено в пространство $H_K^1(\Pi^h)$ при $K = N$.



Фиг. 1. Волновод с резонатором (а) и тонкий цилиндр с периодическим семейством узлов (б).

Билинейная форма из левой части интегрального тождества (5) симметрична, положительна и замкнута в $H_K^1(\Pi^h)$, и, следовательно, согласно [5, гл. 10] задача (5) (или (3), (4) в дифференциальной постановке) соотносится с положительным неограниченным самосопряженным оператором \mathcal{A}_K^h в гильбертовом пространстве $L^2(\Pi^h)$. Ввиду отсутствия компактности у множества (2) спектр S_K^h оператора \mathcal{A}_K^h существенный. Известно (см. [6, 7, 8, 9] и др.), что

$$S_K^h = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{Kj}^h, \tag{6}$$

а спектральные сегменты

$$\mathcal{B}_{Kj}^h = \{\Lambda_{Kj}^h(\theta) | \theta \in [0, 2\pi]\} \tag{7}$$

определены по собственным значениям

$$\Lambda_{K1}^h(\theta) \leq \Lambda_{K2}^h(\theta) \leq \Lambda_{K3}^h(\theta) \leq \dots \leq \Lambda_{Kp}^h(\theta) \leq \dots \rightarrow +\infty \tag{8}$$

вспомогательной задачи на ячейке периодичности (1), полученной из задачи (3), (4) посредством преобразования Гельфанда [10] и зависящей от его двойственной переменной — параметра Флоке $\theta \in [-\pi, \pi]$:

$$-\Delta_x U^h(x; \theta) = \Lambda^h(\theta) U^h(x; \theta), \quad x \in \omega^h, \tag{9}$$

$$U^h(x', \frac{1}{2}; \theta) = e^{i\theta} U^h(x', -\frac{1}{2}; \theta), \quad \frac{\partial U^h}{\partial x_d}(x', \frac{1}{2}; \theta) = e^{i\theta} \frac{\partial U^h}{\partial x_d}(x', -\frac{1}{2}; \theta), \quad x' \in \omega^h, \tag{10}$$

$$U^h(x; \theta) = 0 \text{ или } \partial_\nu U^h(x; \theta) = 0, \quad x \in \partial\omega^h \setminus \bigcup_{\pm} \overline{\omega^h(\pm \frac{1}{2})}. \quad (11)$$

При этом i — мнимая единица, $\omega^h = \{x' \in \mathbb{R}^{d-1} : \xi' = h^{-1}x' \in \omega\}$ — сечение тонкого конечного цилиндра $\Omega_\#^h = \omega^h \times (-1/2, 1/2) \subset \Omega^h = \omega^h \times \mathbb{R}$, $\omega^h(\pm 1/2) = \omega^h \times \{\pm 1/2\}$ — торцы ячейки, а вариационная постановка задачи (9)–(11) при $K = D, N$

$$(\nabla_x U^h, \nabla_x \Psi^h)_{\omega^h} = \Lambda^h(\theta)(U^h, \Psi^h)_{\omega^h} \quad \forall \Psi^h \in H_K^{1,0}(\omega^h), \quad (12)$$

осуществляется на пространстве $H_K^{1,0}(\omega^h)$ функций $U^h \in H^1(\omega^h)$, подчиненных условию Дирихле (11)_D в случае $K = D$ и первому условию квазипериодичности (10) при $K = N, D$. По-прежнему задаче (12) ставится в соответствие положительный самосопряженный оператор $A_K^h(\theta)$ в $L^2(\omega^h)$, однако по причине компактности вложения $H^1(\omega^h) \subset L^2(\omega^h)$ (область ω^h ограничена) теоремы 10.1.5 и 10.2.1 из [5] гарантируют, что спектр оператора $A_K^h(\theta)$ оказывается дискретным и образует последовательность (8) нормальных собственных значений задачи (12) или (9)–(10). Более того, функции

$$[-\pi, \pi] \ni \theta \mapsto \Lambda_{Kj}^h(\theta), \quad j \in \mathbb{N},$$

непрерывны и 2π -периодичны (см. [10, 11]), а значит, в самом деле \mathcal{B}_{Kj}^h — компактные связные множества на замкнутой положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Наконец,

$$\Lambda_{D1}^h(\theta) > \Lambda_{D1}^h(0) > 0 \text{ и } \Lambda_{N1}^h(\theta) > \Lambda_{N1}^h(0) = 0 \text{ при } \theta \in [-\pi, \pi], \theta \neq 0. \quad (13)$$

Собственные функции подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(U_{Kp}^h, U_{Kq}^h)_{\omega^h} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

где $\delta_{p,q}$ — символ Кронекера.

Посредством асимптотического анализа собственных пар $\{\Lambda_{Kp}^h(\theta); U_{Kp}^h(\cdot; \theta)\}$ задачи (9), (10)_K в тонкой сингулярной области (см. [12, гл. 15, 16; 13; 14 и др.]) найдены геометрические характеристики (положение и размеры) спектральных сегментов (7) и условия раскрытия лакун между соседними сегментами \mathcal{B}_{Kj}^h и \mathcal{B}_{Kj+1}^h , т.е. непустоты интервала

$$\mathcal{G}_{Kj}^h = \left(\max_{\theta \in [-\pi, \pi]} \Lambda_{Kj}^h(\theta), \min_{\theta \in [-\pi, \pi]} \Lambda_{Kj+1}^h(\theta) \right). \quad (15)$$

Асимптотическое строение спектров задач Дирихле и Неймана различается существенно. Так, в силу формул (13) спектр \mathcal{S}_N^h примыкает к началу координат, но, как станет понятно далее, спектр \mathcal{S}_D^h удален на большое расстояние $O(h^{-2})$ от точки $\Lambda = 0$. В спектре задачи (3), (4)_N спектральные сегменты имеют длину $O(1)$ и между ними могут быть раскрыты лакуны шириной $O(h)$ (теорема 1). Спектральные сегменты \mathcal{B}_{Dj}^h , наоборот, обладают бесконечно малыми при $h \rightarrow +0$ длинами: порядка $e^{-\delta_j/h}$ в среднечастотном диапазоне и порядка h в высокочастотном. Соответственно ширина лакун (15) в спектре задачи Дирихле (3), (11)_D составляет $O(h^{-2})$ и $O(1)$ (теорема 2). Впрочем, в обоих случаях бывают исключения — некоторые лакуны закрываются или приобретают меньшие по порядку размеры.

Первостепенное значение в проведенном спектральном анализе приобретает явление пограничного слоя, описываемое задачами Неймана и Дирихле в бесконечной области Ξ на фиг. 1а (см. разд. 2 и разд. 4). В случае краевого условия Неймана дискретный спектр пуст, непрерывный — замкнутая положительная полуось и реализуется правильный пороговый резонанс кратности 1, однако в случае условий Дирихле известны примеры волноводов с непустым дискретным спектром и пороговыми резонансами разных качеств. Далее вскрыты три механизма раскрытия лакун, представленных в разд. 3 и разд. 5 с различной степенью детализации.

Механизм, наиболее сложный как в части формальных асимптотических конструкций, использующих разномасштабные разложения, так и в части их оправдания, требующего рассмотрения нескольких зон изменения переменной Флоке, представлен в разд. 3 на примере задачи Неймана (см. также п. 5, 3°, по поводу задачи Дирихле). Он позволяет изучить образование узких лакун вследствие распада узлов ферм дисперсионных кривых, т.е., в частности, анализирует иррегулярные возмущения спектральных

сегментов. Второй и третий механизмы целиком относятся к задаче Дирихле (см. п. 5, 1° и п. 5, 2°) и имеют дело с обратным, но регуляризованным процессом “схлопывания” спектрального сегмента в точку при $h \rightarrow +0$. Подобные эффекты возникают при наличии дискретного спектра или отсутствии правильного порогового резонанса в спектральной задаче Дирихле для оператора Лапласа в бесконечном волноводе Ξ , причем исчезающе малые сегменты чередуются с широкими лагунами. Следует признаться, что последствия возникновения пороговых резонансов (см. разд. 4 и п. 5, 3°) не исследованы досконально потому, что, с одной стороны, гипотетически их проявления весьма разнообразны, но с другой стороны, во многих случаях до сих пор неизвестны конкретные формы, для которых те или иные возможности реализуются в геометрически просто устроенных квантовых волноводах. Вместе с тем автор вполне уверен, что акустическим и квантовым волноводам присущи именно описанные три механизма раскрытия спектральных лагун при сингулярных периодических возмущениях их изначально цилиндрической формы.

2. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА

Разрешимость и свойства решений задачи в волноводе Ξ (фиг. 1а)

$$-\Delta w(\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \Xi, \quad \partial_{\nu} w(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Xi, \quad (16)$$

изучены целиком (см. [9, гл. 5; 15; 2] по поводу общих формально самосопряженных эллиптических краевых задач и переложение результатов для оператора Лапласа, например, в [16]). Поэтому ограничимся перечислением специальных решений при $f = 0$ и $f = 1$, востребованных в следующем разделе при построении асимптотик.

Пространство решений однородной ($f = 0$) задачи (16) с полиномиальным ростом на бесконечности имеет размерность 2 (по числу выходов области Ξ на бесконечность) и натянута на функции w_0 и w_1 : постоянную $w_0 = 1$ и заданную своим разложением на бесконечности

$$w_1(\xi) = \tilde{w}_1(\xi) + \sum_{\pm} \chi_R^{\pm}(\xi_d) \left(\frac{\xi_d}{|\omega|} \pm m_{\Xi} \right). \quad (17)$$

Здесь $\tilde{w}_1 \in H^1(\Xi)$ — остаток, затухающий при $\xi_d \rightarrow \pm\infty$ с экспоненциальной скоростью, через $|\omega|$ обозначена $(d-1)$ -мерная площадь сечения ω цилиндра Ω , $\chi_R^{\pm} \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ — срезающая функция,

$$\chi_R^{\pm}(\xi_d) = 1 \text{ при } \pm \xi_d > 2R, \quad \chi_R^{\pm}(\xi_d) = 0 \text{ при } \pm \xi_d < R, \quad 0 \leq \chi_R^{\pm} \leq 1, \quad (18)$$

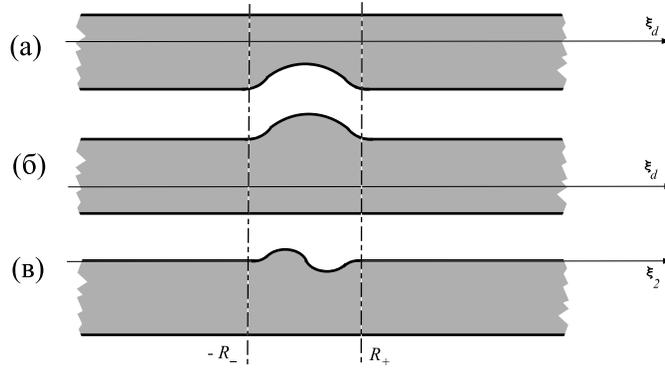
а m_{Ξ} — некоторая величина, зависящая от формы области Ξ в целом и являющаяся аналогом таких классических интегральных характеристик множеств в гармоническом анализе, как емкость и тензоры виртуальной массы и поляризации (см., например, [17]).

Решение задачи (16) при $f = 1$ обладает квадратичным ростом на бесконечности и представимо в виде

$$W(\xi) = \tilde{W}(\xi) - \frac{1}{2} \xi_d^2 + \sum_{\pm} \chi_R^{\pm}(\xi_d) (\pm M_{\Xi} \frac{\xi_d}{|\omega|} \pm \mathbf{m}_{\Xi}), \quad (19)$$

где $\tilde{W} \in H^1(\Xi)$ — затухающий остаток, M_{Ξ} — еще одна характеристика области Ξ , уже чисто геометрическая (см. предложение 1), а постоянная \mathbf{m}_{Ξ} далее востребована не будет.

Поясним строение неубывающих членов в формулах (17) и (19). Во-первых, одинаковые множители $|\omega|^{-1}$ при мономе ξ_d нужны для обращения в нуль потока гармонической функции w_1 на бесконечность (сумма интегралов по сечениям ω от производных $\pm \partial w_1 / \partial \xi_d$ при $\pm \xi_d > R$). Во-вторых, метод Фурье предопределяет при $\pm \xi_d > R$ у решения w_1 линейные составляющие $|\omega|^{-1} \xi_d - m_{\pm}$ с какими-то m_{\pm} , однако добавление к нему постоянной $w_0(m_{+} + m_{-}) / 2$ позволяет добиться представления (17) с общим коэффициентом $m_0 = (m_{-} - m_{+}) / 2$. Наконец, в разложении какого-либо решения задачи (16) с правой частью $f = 1$ появляются квадратные трехчлены $-\frac{1}{2} \xi_d^2 + a_{\pm}^1 \xi_d + a_{\pm}^0$ с некоторыми множителями a_{\pm}^q , но присоединение к ним линейной комбинации $c_0 w_0 + c_1 w_1$ с подходящими коэффициентами c_q придает функции W вид (19). Подчеркнем, что предложенный выбор поведения при $\xi_d \rightarrow \pm\infty$ фиксирует единственным образом решения w_1 и W , а значит, и характеристики m_{Ξ} и M_{Ξ} волновода Ξ , которые играют особую роль в асимптотическом анализе спектра задачи (3), (4). Обсудим свойства этих характеристик.



Фиг. 2. Цилиндры с утончением (а) и утолщением (б). Возмущение полосы при сохранении площади резонатора, отсеченного штрихпунктирными линиями (в).

Следующие две формулы проверены в [16] для волноводов более общего строения, однако ввиду их важности и для удобства читателя приведем сжатые доказательства. Обозначим через $\pm R_{\pm}$ минимальные величины, при которых (ср. фиг. 2)

$$\begin{aligned} & \{\xi \in \Xi : \xi_d \notin [-R_-, R_+]\} = \\ & = \{\xi \in \Omega : \xi_d \notin [-R_-, R_+]\} = \\ & = \omega \times ((-\infty, -R_-) \cup (R_+, +\infty)). \end{aligned} \tag{20}$$

Множество $\Theta = \{\xi \in \Xi : \xi_d \in (-R_-, R_+)\}$ называем резонатором волновода Ξ ; $|\Theta|$ — его d -мерный объем. Остальная часть (20) — два полубесконечных цилиндрических рукава $\Omega^{\pm} = \{\xi \in \Omega : \pm \xi_d > \pm R_{\pm}\}$. Соответственно мелкий узел Θ^h тонкой области ω^h получается сжатием множества Θ в h^{-1} раз.

Предложение 1. Верны соотношения

$$2m_{\Xi} > -(R_+ + R_-) |\omega|^{-1}, \tag{21}$$

$$2M_{\Xi} = |\Theta| -(R_+ + R_-) |\omega|. \tag{22}$$

Доказательство. Применим формулу интегрирования по частям в длинном ($T \rightarrow +\infty$) усеченном волноводе $\Xi_T = \{\xi \in \Xi : |\xi_d| < T\}$:

$$|\Theta| + (2T - R_+ - R_-) |\omega| = |\Xi_T| = - \int_{\Xi_T} \Delta_{\xi} W(\xi) d\xi = \sum_{\pm} \pm \int_{\omega} \frac{\partial W}{\partial \xi_d}(\xi', \pm T) d\xi' = 2(T |\omega| + M_{\Xi}) + o(1).$$

Отсюда вытекает соотношение (22). Теперь введем непрерывную функцию $w_{\#}$, совпадающую с w_1 на Θ , но равную $w_1(\xi) - |\omega|^{-1} (\xi_d \mp R_{\pm})$ на Ω^{\pm} . Она сохраняет гармоничность внутри Θ и Ω^{\pm} , а также обладает конечным интегралом Дирихле на этих множествах, поскольку стабилизируется при $\xi_d \rightarrow \pm\infty$ к постоянным $\pm(m_{\Xi} + |\omega|^{-1} R_{\pm})$. Вместе с тем у ее производной появились скачки

$$[\frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d}]_{\pm}(\xi') := \frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d}(\xi', \pm R_{\pm} + 0) - \frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d}(\xi', \pm R_{\pm} - 0) = -\frac{1}{|\omega|}$$

на сечениях $\omega(\pm R_{\pm})$. Таким образом, формулы Грина показывают, что

$$\begin{aligned} 0 < \|\nabla_{\xi} w_{\#}; L^2(\Xi)\|^2 &= \sum_{\pm} \mp \int_{\omega} w_{\#}(\xi', \pm R_{\pm}) \left[\frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d} \right]_{\pm}(\xi') d\xi' = \\ &= \sum_{\pm} \mp \int_{\omega} (w_1(\xi', \pm R_{\pm}) [\frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d}](\xi', \pm R_{\pm}) - [w_{\#}](\xi', \pm R_{\pm}) \frac{\partial w_1}{\partial \xi_d}(\xi', \pm R_{\pm})) d\xi' = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \mp \int_{\omega} (w_1(\xi', \pm T) \frac{\partial w_{\#}}{\partial \xi_d}(\xi', \pm T) - w_{\#}(\xi', \pm T) \frac{\partial w_1}{\partial \xi_d}(\xi', \pm T)) d\xi' = 2m_{\Xi} + \frac{R_+ + R_-}{|\omega|}. \end{aligned}$$

Неравенство (21) также доказано.

Формула (22) позволяет легко вычислить величину M_{Ξ} , но формула (21) дает мало информации о величине m_{Ξ} . Обсудим специфические волноводы, изображенные на фиг. 2а и б.

(i) *Сужение участка волновода*: $\Xi \subset \Omega$ (фиг. 2а). Пусть $\Upsilon = \Omega \setminus \bar{\Xi} \neq \emptyset$ и $\Sigma = \partial\Upsilon \setminus \partial\Omega \subset \partial\Xi$. Заметим, что $M_{\Xi} = -\frac{1}{2} |\Upsilon|$ в силу равенства (22). Введем функцию

$$\widehat{w}_1(\xi) = w_1(\xi) - |\omega|^{-1} \xi_d. \tag{23}$$

Имеем

$$\begin{aligned} I &:= \frac{1}{|\omega|} \int_{\Sigma} w_1(\xi) \partial_{\nu} \xi_d ds_{\xi} = \frac{1}{|\omega|^2} \int_{\Sigma} \xi_d \partial_{\nu} \xi_d ds_{\xi} - \frac{1}{|\omega|} \int_{\Sigma} \widehat{w}_1(\xi) \partial_{\nu} \widehat{w}_1(\xi) ds_{\xi} = \\ &= -\frac{|\Upsilon|}{|\omega|^2} - \|\nabla_{\xi} \widehat{w}_1; L^2(\Xi)\|^2 < 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь применена формула интегрирования по частям в областях Υ и Ξ , причем $\nabla_{\xi} \widehat{w}_1 \in L^2(\Xi)$ в силу определений (17) и (23), а ∂_{ν} — производная вдоль внутренней нормали для Υ . С другой стороны,

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\Sigma} (w_1(\xi) \partial_{\nu} \widehat{w}_1(\xi) - \widehat{w}_1(\xi) \partial_{\nu} w_1(\xi)) ds_{\xi} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm \int_{\omega} (w_1(\xi) \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial \xi_d}(\xi) - \widehat{w}_1(\xi) \frac{\partial w_1}{\partial \xi_d}(\xi)) \times |_{\xi_d = \pm T} d\xi' = -2m_{\Xi}. \end{aligned} \tag{25}$$

Сначала воспользовались тем, что $\partial_{\nu} w_1 = 0$ и $\partial_{\nu} \widehat{w}_1 = -\partial_{\nu} \xi_d$ на Σ , а затем применили формулу Грина в усеченном волноводе $\Xi_T = \{\xi \in \Xi : |\xi_d| < T\}$ и вычислили возникшие интегралы по удаленным ($|\xi_d| = T \rightarrow +\infty$) сечениям, подставив разложения функций w_1 и \widehat{w}_1 .

Соотношения (25) и (24) показывают, что $m_{\Xi} > 0$.

(ii) *Расширение участка волновода*: $\Omega \subset \Xi$ (фиг. 2б). Пусть $\Upsilon = \Xi \setminus \bar{\Omega} \neq \emptyset$. При помощи равенства (22) находим $M_{\Xi} = \frac{1}{2} |\Upsilon| > 0$. Введем функцию \widehat{w}_1 , совпадающую с w_1 на Υ , но заданную равенством (23) на цилиндре Ω . Эта функция приобретает скачок $[w_1](\xi) = \xi_d$ на поверхности $\Sigma = \partial\Upsilon \setminus \partial\Xi \subset \partial\Omega$, но $[\partial_{\nu} w_1](\xi) = 0$ при $\xi \in \Sigma$ (скачки вычисляются в направлении обратном внешней нормали для тела Ξ). Сразу же получаем соотношение

$$I := \int_{\Sigma} [\widehat{w}_1](\xi) \partial_{\nu} \widehat{w}_1(\xi) ds_{\xi} = -\|\nabla_{\xi} w_1; L^2(\Upsilon)\|^2 - \|\nabla_{\xi} \widehat{w}_1; L^2(\Omega)\|^2 < 0.$$

Поскольку $\partial_{\nu} \xi_d = 0$ на Σ , аналогично выкладке (25) выводим цепочку равенств

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Sigma} ([\widehat{w}_1](\xi) \partial_{\nu} w_1(\xi) - w_1(\xi) [\partial_{\nu} \widehat{w}_1(\xi)]) ds_{\xi} = \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm \int_{\omega} (\widehat{w}_1(\xi) \frac{\partial w_1}{\partial \xi_d}(\xi) - w_1(\xi) \frac{\partial \widehat{w}_1}{\partial \xi_d}(\xi)) |_{\xi_d = \pm T} d\xi' = 2m_{\Xi}. \end{aligned}$$

В итоге обнаруживаем, что, как и в ситуации (i), характеристики m_{Ξ} и M_{Ξ} имеют разные знаки и не обращаются в нуль.

При построении асимптотик в разд. 3 важную роль играют величины

$$N_{\Xi}^{\pm} = M_{\Xi} |\omega|^{-1} \pm m_{\Xi} |\omega|. \tag{26}$$

Предложение 2. 1) В силу предложения 1 справедливо неравенство

$$N_{\Xi}^+ > 2 |\omega|^{-1} |\Theta| - 4(R_+ + R_-),$$

т.е. $N_{\Xi}^+ > 0$ при фиксированной “ширине” $R_+ + R_-$ и большом объеме $|\Xi|$ волновода Ξ .

2) В ситуациях (i) и (ii) (фиг. 2а и б) величина N_{Ξ}^- отрицательна и положительна соответственно, но существуют такие волноводы Ξ , что $N_{\Xi}^- = 0$.

К сожалению, для произвольной формы резонатора Θ знаки величин N_{Ξ}^{\pm} неизвестны. Они непрерывно изменяются при регулярной вариации поверхности [11, гл. 6, 5], и поэтому действительно $N_{\Xi}^{-} = 0$ у волноводов Ξ каких-то конкретных форм. Пример области Ξ , для которой $N_{\Xi}^{+} \leq 0$, не найден.

Замечание 1. Пусть $d = 2$ и $\Omega = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1 \in (-1, 0), \xi_2 \in \mathbb{R}\}$ — единичная полоса, т.е. ω — отрезок единичной длины. Придадим ее стороне пологое локальное возмущение:

$$\Xi^{\varepsilon} = \{\xi : \xi_2 \in \mathbb{R}, -1 < \xi_1 < \varepsilon H(\xi_2)\}. \tag{27}$$

При этом ε — малый положительный параметр, а профильная функция $H \in C_c^{\infty}(-R, R)$ обладает нулевым средним (см. фиг. 2в) и, значит,

$$M_{\Xi^{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} H(\xi_2) d\xi_2 = 0.$$

Асимптотику при $\varepsilon \rightarrow +0$ решения w_1^{ε} однородной задачи (16) в регулярно возмущенной полосе (27) (см. [11, гл. 6,5]) ищем в виде

$$w_1^{\varepsilon}(\xi) = \xi_2 + \varepsilon w_1'(\xi) + \varepsilon^2 w_1''(\xi) + \dots \tag{28}$$

Поскольку

$$\partial_{\nu^{\varepsilon}} = (1 + \varepsilon^2 | \frac{dH}{d\xi_2}(\xi_2) |^2)^2 \times (\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \frac{dH}{d\xi_2}(\xi_2) \frac{\partial}{\partial \xi_2})$$

на искривленной стенке волновода, для поправочного члена w_1' получаем задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_{\xi} w_1'(\xi) &= 0, \quad \xi \in \Xi, \\ \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) &= g'(\xi_2) := \frac{dH}{d\xi_2}(\xi_2), \\ \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(-1, \xi_2) &= 0, \quad \xi_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{29}$$

Заметив, что $g' \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ и $\int_{\mathbb{R}} g'(\xi_2) d\xi_2 = 0$, находим ограниченное решение задачи Неймана (29)

$$w_1'(\xi) = \tilde{w}_1'(\xi) + \sum_{\pm} \pm \chi_R^{\pm}(\xi_2) m', \tag{30}$$

а коэффициент m' вычисляем следующим образом:

$$\begin{aligned} 2m' &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm \int_{-1}^0 w_1'(\xi_1, \pm T) d\xi_1 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{\pm} \pm \int_{-1}^0 (w_1'(\xi) \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_2} - \xi_2 \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_2}(\xi)) |_{\xi_2 = \pm T} d\xi_1 = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \xi_2 \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) d\xi_2 = \int_{\mathbb{R}} \xi_2 g'(\xi_2) d\xi_2 = \int_{\mathbb{R}} \xi_2 \frac{dH}{d\xi_2}(\xi_2) d\xi_2 = - \int_{\mathbb{R}} H(\xi_2) d\xi_2 = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Найдем третий член анзаца (28). При учете формулы Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(\varepsilon H(\xi_2), \xi_2) &= \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) + \varepsilon H(\xi_2) \frac{\partial^2 w_1'}{\partial \xi_1^2}(0, \xi_2) + O(\varepsilon^2) = \\ &= g'(\xi_2) - \varepsilon H(\xi_2) \frac{\partial^2 w_1'}{\partial \xi_2^2}(0, \xi_2) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

обнаруживаем, что правая часть условия Неймана в задаче

$$-\Delta_{\xi} w_1''(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi, \quad \frac{\partial w_1''}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) = g''(\xi_2), \quad \frac{\partial w_1''}{\partial \xi_1}(-1, \xi_2) = 0, \quad \xi_2 \in \mathbb{R},$$

принимает вид

$$g''(\xi_2) = \frac{dH}{d\xi_2}(\xi_2) \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_2}(0, \xi_2) + H(\xi_2) \frac{\partial^2 w_1'}{\partial \xi_2^2}(0, \xi_2) = \frac{d}{d\xi_2}(H(\xi_2) \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(0, \xi_2)).$$

Функция $g'' \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ обладает нулевым средним, а коэффициент m'' в аналогичном (30) разложении ограниченного решения w'' вычисляется по формуле (ср. выкладку (31))

$$\begin{aligned} 2m'' &= \int_{\mathbb{R}} \xi_2 g''(\xi_2) d\xi_2 = - \int_{\mathbb{R}} H(\xi_2) \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_2}(0, \xi_2) d\xi_2 = \int_{\mathbb{R}} g'(\xi_2) w_1'(0, \xi_2) d\xi_2 = \\ &= \int_{\mathbb{R}} w_1'(0, \xi_2) \frac{\partial w_1'}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) d\xi_2 = \| \nabla_{\xi} w_1'; L^2(\Omega) \|^2 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при пологом возмущении полосы, не изменяющем объем волновода, для величин (26) выполнены соотношения $\pm N_{\pm \varepsilon}^{\pm} \geq c_H \varepsilon^2$, $c_H > 0$.

Подчеркнем, что приемы, разработанные в [18, 19], позволяют построить нетривиальный профиль $H^\varepsilon(\xi_2) = H(\xi_2) + O(\varepsilon)$ деформированной стенки волновода (27), при котором $N_{\pm \varepsilon}^- = 0$.

3. СПЕКТР АКУСТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА

Алгоритм построения асимптотики собственных пар $\{\Lambda^h(\theta); U^h(\cdot; \theta)\}$ задачи Неймана (9)–(11) N разработан в полной мере (см. [12, гл. 15, 16; 20; 14; 21; 22] и др.). В частности, известно, что главные члены асимптотических анзацев

$$\Lambda^h(\theta) = \Lambda^0(\theta) + h\Lambda^1(\theta) + \dots, \tag{32}$$

$$U^h(x; \theta) = v^0(x_d; \theta) + hv^1(x_d; \theta) + h^2(v''(x_d; \theta) + V(\xi', x_d; \theta)) + \dots, \tag{33}$$

в которых многие ингредиенты далее востребованы не будут, а многоточие замещает младшие члены, “не замечают” малое локальное возмущение тонкой области \mathfrak{w}^h и удовлетворяют следующей задаче для обыкновенного дифференциального по переменной $z = x_d$ уравнения на оси цилиндра $\Big|_{\#}^h$:

$$\begin{aligned} -\partial_z^2 v^0(z; \theta) &= \Lambda^0(\theta) v^0(z; \theta), \quad z \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ v^0\left(\frac{1}{2}; \theta\right) &= e^{i\theta} v^0\left(-\frac{1}{2}; \theta\right), \quad \frac{dv^0}{dz}\left(\frac{1}{2}; \theta\right) = e^{i\theta} \frac{dv^0}{dz}\left(-\frac{1}{2}; \theta\right). \end{aligned} \tag{34}$$

Следовательно,

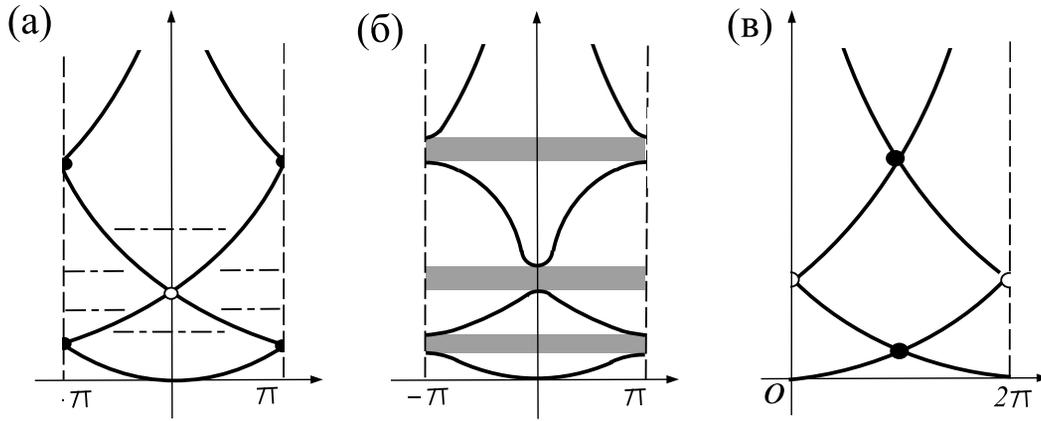
$$\begin{aligned} \Lambda_{p\pm}^0(\theta) &= (\theta \pm \pi(2p + (1 \mp 1)))^2, \\ v_{p\pm}^0(z; \theta) &= e^{iz(\theta \pm \pi(2p + (1 \mp 1)))}, \\ p \in \mathbb{N}_0 &:= \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned} \tag{35}$$

Соответствующие дисперсионные кривые, составляющие бесконечную ферму шириной 2π , изображены на фиг. 3а.

При нахождении поправочного члена анзаца (32) приходится учитывать малые возмущения формы ячейки \mathfrak{w}^h , для чего применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [23; 24; 12, гл. 2] и др.), и в качестве внутреннего, приемлемого в непосредственной близости от узла $\Theta^h \subset \mathfrak{w}^h$, разложения возьмем линейную комбинацию с неизвестными коэффициентами

$$\begin{aligned} U_{p\pm}^h(x; \theta) &= v_{p\pm}^0(0; \theta) + h(\partial_z v_{p\pm}^0(0; \theta) | \omega | w_1(\xi) + b_{p\pm}^1(\theta)) + \\ &+ h^2(b_{p\pm}''(\theta) + a_{p\pm}''(\theta) | \omega | w_1(\xi) + \Lambda_{p\pm}^0(\theta) W(\xi)) + \dots \end{aligned} \tag{36}$$

Анзац (33) интерпретируем как внутренние разложения (их два — на отрезках $(0, 1/2)$ и $(-1/2, 0)$), к которым следует применить формулу Тейлора



Фиг. 3. Фермы дисперсионных кривых (а) и (в) предельной задачи при разных определениях параметра Флоке. Узлы помечены значками \circ и \bullet , но масштаб в вертикальном направлении не соблюден. Ферма дисперсионных кривых исходной задачи (б), а лакуны — проекции тонированных прямоугольников на ось ординат. Вспомогательные штрихпунктирные линии (а).

$$v_{p\pm}^0(z; \theta) = 1 + iz(\theta \pm \pi(2p + (1 \mp 1))) - \Lambda_{p\pm}^0(\theta) \frac{z^2}{2} + O(|z|^3). \tag{37}$$

В формуле (37) были приняты во внимание явные выражения (35), но в сумме (36) — только в последнем слагаемом.

Произведем сращивание принятых разложений в промежуточных зонах $\pm z \sim \sqrt{h}$ и обнаружим, что в силу представления (17) решения w_1 задачи (16) слагаемые порядка единицы уже согласованы, а согласование слагаемых порядка h приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} b_{p\pm}'(\theta) + \partial_z v_{p\pm}^0(0, \theta) | \omega | m_{\Xi} &= v_{p\pm}'(+0; \vartheta), \\ b_{p\pm}'(\theta) - \partial_z v_{p\pm}^0(0, \theta) | \omega | m_{\Xi} &= v_{p\pm}'(-0; \vartheta), \end{aligned}$$

которые превращаем в условие скачка решения

$$[v_{p\pm}'(\theta)] := v_{p\pm}'(+0; \vartheta) - v_{p\pm}'(-0; \vartheta) = 2m_{\Xi} | \omega | \partial_z v_{p\pm}^0(0; \theta). \tag{38}$$

При сращивании разложений на уровне h^2 нужно учесть формулы (37) и (36), (19). Слагаемые порядка $z^2 = h^2 \xi_d^2$ оказываются согласованными автоматически, а согласование слагаемых порядка $hz = h^2 \xi_d$ порождает соотношения

$$\begin{aligned} \partial_z v_{p\pm}'(+0; \theta) &= a_{p\pm}'' + M_{\Xi} | \omega |^{-1} \Lambda_{p\pm}^0(\theta) v_{p\pm}^0(0; \theta), \\ \partial_z v_{p\pm}'(-0; \theta) &= a_{p\pm}'' - M_{\Xi} | \omega |^{-1} \Lambda_{p\pm}^0(\theta) v_{p\pm}^0(0; \theta). \end{aligned}$$

В итоге выводим условие скачка производной решения

$$[\partial_z v_{p\pm}'(\theta)] := \partial_z v_{p\pm}'(+0; \theta) - \partial_z v_{p\pm}'(-0; \theta) = 2M_{\Xi} | \omega |^{-1} \Lambda_{p\pm}^0(\theta) v_{p\pm}^0(0; \theta), \tag{39}$$

замыкающее задачу для поправочных членов анзацев (32) и (33):

$$\begin{aligned} -\partial_z^2 v_{p\pm}'(z; \theta) - \Lambda_{p\pm}^0(\theta) v_{p\pm}'(z; \theta) &= \Lambda_{p\pm}'(\theta) v_{p\pm}^0(z; \theta), \quad z \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}), \\ v_{p\pm}'(\frac{1}{2}; \theta) &= e^{i\theta} v_{p\pm}'(-\frac{1}{2}; \theta), \quad \frac{dv_{p\pm}'}{dz}(\frac{1}{2}; \theta) = e^{i\theta} \frac{dv_{p\pm}'}{dz}(-\frac{1}{2}; \theta). \end{aligned} \tag{40}$$

Если $\Lambda_{p\pm}'(\theta)$ — простое собственное значение, то выполнение (единственного) условия разрешимости задачи (38)–(40)

$$\begin{aligned} \Lambda'_{p\pm}(\theta) &= \Lambda'_{p\pm}(\theta) \int_{-1/2}^{1/2} |v_{p\pm}^0(z;\theta)|^2 dz = - \int_{-1/2}^{1/2} v_{p\pm}^0(z;\theta)(\partial_z^2 v'_{p\pm}(z;\theta) + \Lambda_{p\pm}^0(\theta)v'_{p\pm}(z;\theta))dz = \\ &= \sum_{\alpha=\pm} \alpha \left(\overline{v_{p\pm}^0(0;\theta)} \partial_z v'_{p\pm}(\alpha 0;\theta) - \overline{\partial_z v_{p\pm}^0(0;\theta)} v'_{p\pm}(\alpha 0;\theta) \right) = \\ &= M_{\Xi} |\omega|^{-1} \Lambda_{p\pm}^0(\theta) |v_{p\pm}^0(0;\theta)|^2 - 2m_{\Xi} |\omega| |\partial_z v_{p\pm}^0(0;\theta)|^2 \end{aligned}$$

влечет за собой формулу для поправочного слагаемого анзаца (32)

$$\Lambda'_{p\pm}(\theta) = 2N_{\Xi}^{-} \Lambda_{p\pm}^0(\theta). \tag{41}$$

Соотношение (41) показывает, что в зависимости от знака величины N_{Ξ}^{-} (см. определение (26), а также предложение 2 и замечание 1) участки дисперсионных кривых между точками их пересечений и изломов, помеченных значками \circ и половинками значков \bullet на фиг. 3а, сдвигаются вверх или вниз на фиг. 3б. Нижняя дисперсионная дуга также деформируется, но точка $(\theta, \Lambda) = (0, 0)$ остается неподвижной по причине последнего сомножителя в правой части (41). Вместе с тем поведение кривых около самих узлов

$$\begin{aligned} P_{\circ}^q &= (0, 4\pi^2 q^2) \text{ и } P_{\bullet}^q = (\pm\pi, \pi^2(2q-1)^2), \\ q &\in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{42}$$

(напоминаем, что 2π -периодичность отождествляет точки $\pm\pi$), требует более тщательного анализа хотя бы потому, что собственные значения

$$\begin{aligned} \Lambda_{p+}^0(0) &= \Lambda_{(p-1)-}^0(0) \text{ и } \Lambda_{p+}^0(\pi) = \Lambda_{(p-1)-}^0(-\pi), \\ p &\in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{43}$$

двукратные. Подчеркнем, что узлы (42), заданные разными выражениями, по сути не отличаются один от другого — это нетрудно усмотреть на фиг. 3в, где новая ферма, полученная допустимой заменой параметра Флоке $[0, 2\pi] \ni \theta \mapsto O_- = \theta - \pi \in [-\pi, \pi]$, содержит целые значки \bullet , но рассеченные значки \circ .

Следуя [25] (см. также [26, 27, 19] и др.), согласованно с формулой (42) введем “быструю” переменную Флоке

$$t_{\circ} = h^{-1}\theta \text{ или } t_{\bullet} = h^{-1}(\theta \mp \pi).$$

Рассмотрим узлы P_{\circ}^q на оси ординат — узлы P_{\bullet}^q обрабатываются по той же схеме (см. замечание 2 и ср. [25], где была использована именно “ферма” на фиг. 3в). Индекс \circ по возможности не пишем.

Общее решение задачи (34) с параметром $\Lambda^{q0} = 4\pi^2 q^2$ (новое обозначение) принимает вид

$$v^{q0}(z) = a_{+}^q e^{+i2\pi qz} + a_{-}^q e^{-i2\pi qz}. \tag{44}$$

В окрестности каждого из узлов у задачи (9)–(11)_N имеется пара собственных значений, для которых примем асимптотические анзацы

$$\Lambda_{\alpha}^{qh}(t) = \Lambda^{q0} + h\Lambda_{\alpha}^{q'}(t) + \tilde{\Lambda}_{\alpha}^{qh}(t), \quad \alpha = \pm. \tag{45}$$

Внешние разложения для соответствующих собственных функций $U_{\pm}^{hq}(\cdot; t)$ ищем в виде

$$U_{\alpha}^{qh}(\cdot; t) = v_{\alpha}^{q0}(z; t) + hv_{\alpha}^{q'}(z; t) + \dots, \quad \alpha = \pm, \tag{46}$$

где v_{α}^{q0} — линейная комбинация (44) с неизвестным столбцом коэффициентов $a^{q\alpha}(t) = (a_{+}^{q\alpha}(t), a_{-}^{q\alpha}(t))$. Выражение (36) с понятными изменениями по-прежнему выберем как внутреннее разложение около мелкого узла G^h . В результате для поправочных членов анзацев (45) и (46) выводим уравнение

$$-\partial_z^2 v_{\alpha}^{q'}(z; t) - \Lambda^{q0} v_{\alpha}^{q'}(z; t) = \Lambda_{\alpha}^{q'}(t) v_{\alpha}^{q0}(z; t), \quad z \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}), \tag{47}$$

с полученными прежним способом условиями скачков

$$\begin{aligned} [v_{\alpha}^{q'}(t)] &= 2m_{\Xi} |\omega| |\partial_z v_{\alpha}^{q0}(0; t), \\ [\partial_z v_{\pm}^{q'}(t)] &= 2M_{\Xi} |\omega|^{-1} \Lambda^{q0} v_{\alpha}^{q0}(0; t). \end{aligned} \tag{48}$$

При $\theta = 0$ условия квазипериодичности (10) становятся обычными условиями периодичности, однако ввиду малого возмущения параметра Флоке $\theta = ht$ и формулы $e^{iht} = 1 + iht + O(h^2)$ они теперь оказываются неоднородными:

$$v_{\alpha}^{q'}\left(\frac{1}{2}; t\right) - v_{\alpha}^{q'}\left(-\frac{1}{2}; t\right) = -itv_{\alpha}^{q0}\left(-\frac{1}{2}; t\right), \quad \frac{dv_{\alpha}^{q'}}{dz}\left(\frac{1}{2}; t\right) - \frac{dv_{\alpha}^{q'}}{dz}\left(-\frac{1}{2}; t\right) = -it\frac{dv_{\alpha}^{q0}}{dz}\left(-\frac{1}{2}; t\right). \quad (49)$$

Поскольку собственное значение Λ^{q0} двукратное, у задачи (47)–(49) появляются два условия разрешимости, которые при помощи формулы Грина, а также неоднородных точечных условий превращаем в систему двух ($\alpha = \pm$) алгебраических уравнений для столбца $a^{q\pm}(t)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha}^{q'}(t)a_{\pm}^{q\alpha}(t) &= \Lambda_{\alpha}^{q'}(t) \int_{-1/2}^{1/2} e^{\pm i2\pi qz} v_{\alpha}^{q0}(z; t) dz = - \int_{-1/2}^{1/2} e^{\pm i2\pi qz} \left(\partial_z^2 v_{\alpha}^{q'}(z; t) + \Lambda^{q0} v_{\alpha}^{q'}(z; t) \right) dz = \\ &= \left(v_{\alpha}^{q'}(z; t) \partial_z e^{\pm i2\pi qz} - \partial_z v_{\alpha}^{q'}(z; t) e^{\pm i2\pi qz} \right) \Big|_{z=-1/2}^{1/2} - \left(v_{\alpha}^{q'}(z; t) \partial_z e^{\pm i2\pi qz} - \partial_z v_{\alpha}^{q'}(z; t) e^{\pm i2\pi qz} \right) \Big|_{z=0}^{+0} = \\ &= \mp 2\pi qt (a_{+}^{q\alpha} + a_{-}^{q\alpha}) - 2\pi qt (a_{+}^{q\alpha} - a_{-}^{q\alpha}) \mp 2\Lambda^{q0} m_{\pm} | \omega | (a_{+}^{q\alpha} - a_{-}^{q\alpha}) + 2\Lambda^{q0} M_{\pm} | \omega |^{-1} (a_{+}^{q\alpha} + a_{-}^{q\alpha}). \end{aligned}$$

с матрицей

$$\mathcal{M}^q(t) = \begin{pmatrix} -4\pi qt + 2\Lambda^{q0}(M_{\pm} | \omega |^{-1} - m_{\pm} | \omega |) & 2\Lambda^{q0}(M_{\pm} | \omega |^{-1} + m_{\pm} | \omega |) \\ 2\Lambda^{q0}(M_{\pm} | \omega |^{-1} + m_{\pm} | \omega |) & 4\pi qt + 2\Lambda^{q0}(M_{\pm} | \omega |^{-1} - m_{\pm} | \omega |) \end{pmatrix},$$

собственные значения которой имеют вид

$$\Lambda_{\alpha}^{q'}(t) = 2\Lambda^{q0}(M_{\pm} | \omega |^{-1} - m_{\pm} | \omega |) + \alpha \Lambda^{q0} \sqrt{t^2 + 4(M_{\pm} | \omega |^{-1} + m_{\pm} | \omega |)^2}, \quad (50)$$

$$\alpha = \pm.$$

Эта формула содержит обе величины (26), причем предположение $N_{\pm}^{\pm} \neq 0$ показывает, что

$$\min_{t \in \mathbb{R}} (\Lambda^{q0} + h\Lambda_{+}^{q'}(t)) = \Lambda^{q0} (1 + 2h(N_{\pm}^{-} + |N_{\pm}^{+}|)) > \Lambda^{q0} (1 + 2h(N_{\pm}^{-} - |N_{\pm}^{+}|)) = \max_{t \in \mathbb{R}} (\Lambda^{q0} + h\Lambda_{-}^{q'}(t)).$$

В итоге видим, что вблизи узла P_{∞}^q две пересекающиеся предельные дисперсионные кривые (см. формулу (42) и фиг. 3а) распадаются и согласно определению (15) раскрывают лакуну \mathcal{G}_{2q}^h при малом $h > 0$ так, как указано на фиг. 3б для случая $q = 1$. При $N_{\pm}^{\pm} = 0$ такой вывод сделать нельзя, поскольку согласно (50) графики функций $t \mapsto \Lambda^{q0} + h\Lambda_{\pm}^{q'}(t)$ остаются пересекающимися прямыми, а их общая точка пересечения сдвигается вдоль оси ординат по закону (41).

Замечание 2. Узлу P_{∞}^q и соответствующему собственному значению

$$\Lambda_{\bullet}^{q0} = \Lambda_{q-1+}^0(\pi) = \Lambda_{q-2-}^0(-\pi) = \pi^2(2q-1)^2, \quad (51)$$

$$q \in \mathbb{N},$$

из списка (43) отвечают следующие две собственные функции предельной задачи (34):

$$v_{\bullet+}^q(z) := v_{q-1+}^0(z) = e^{+i(2q-1)z},$$

$$v_{\bullet-}^q(z) := v_{q-2-}^0(z) = e^{+i(2q-1)z}.$$

Повторение вычислений показывает, что выражение (50) для поправочного члена анзаца (45) сохраняется, но содержит новый множитель (51).

Сформулируем результат проведенного асимптотического анализа, а затем прокомментируем процедуру обоснования асимптотических формул.

Теорема 1. Пусть $N_{\pm}^{\pm} \neq 0$ (см. формулы (26), (17), (19) и предложение 2). Для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные h_k и C_k , что при $h \in (0, h_k]$ в спектре (6) оператора задачи (3), (4) N раскрыта лакуна

$$\mathcal{G}_{Nk}^h \supset [\pi^2 k^2 (1 + 2h(N_{\pm}^{-} - |N_{\pm}^{+}|)) + C_k h^2, \pi^2 k^2 (1 + 2h(N_{\pm}^{-} + |N_{\pm}^{+}|)) - C_k h^2].$$

шириной $4\pi^2 k^2 |N_{\Xi}^+| h + O(h^2)$. При $h \rightarrow +0$ количество раскрытых лакун (15) неограниченно возрастает, а соседние \mathcal{G}_{Nk}^h и \mathcal{G}_{Nk+2}^h отделены одна от другой спектральным сегментом \mathcal{B}_{Nk+1}^h с длиной $O(\pi^2(2k+1))$.

Обоснование индивидуальных асимптотик собственных пар $\{\Lambda_{Np}^h(\theta); U_{Np}^h(\cdot; \theta)\}$ задачи (9)–(11)_N, т.е. вывод оценок асимптотических остатков в представлении (32) собственного значения и в подходящим образом “склеенных” разложениях (33) и (36) собственной функции (см. [24; 12, гл. 2] и др.) проводится по стандартной, неоднократно опубликованной и подробно прокомментированной схеме, включающей применение леммы о “почти собственных” значениях и векторах (см. [28]), а также проверке утверждения о сходимости

$$\Lambda_{Nk}^h(\theta) \rightarrow \Lambda_k^h(\theta) \text{ при } h \rightarrow +0.$$

Реализация этих элементов схемы для рассмотренной задачи Неймана не встречает сколь-нибудь заметных затруднений (ср. [14, 16]). Осложнения возникают при асимптотическом анализе спектральных сегментов и лакун: для оправдания асимптотики концевых точек интервалов (15) нужны равномерные относительно параметра $\theta \in [-\pi, \pi]$ оценки. В [18] и [19] предложено несколько подходов к преодолению препятствий. Каждый из них вполне доступен в рассматриваемой задаче (например, достаточно проверить простой факт: для пар $\{\theta, \Lambda\}$, взятых со штрихпунктирных линий на фиг. 3в и удаленных от предельных дисперсионных кривых, задача (9)–(11)_N однозначно разрешима). Вместе с тем их исполнение достаточно громоздко, но в значительной степени повторяет уже публиковавшиеся рассуждения и выкладки. Избегая крупных заимствований, воспроизведем в п. 5, 1° лишь наиболее краткий из способов вывода равномерных по параметру Флоке оценок асимптотических остатков в представлениях собственных значений.

4. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ

Спектр \wp квантового волновода Ξ (фиг. 1а), описываемого задачей Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta w(\xi) &= \mu w(\xi), \quad \xi \in \Xi, \\ w(\xi) &= 0, \quad \xi \in \partial\Xi, \end{aligned} \quad (52)$$

исследован полностью (см., например, обширный список литературы в [1]). Сообщим сведения, используемые в следующем разделе.

Непрерывный спектр \wp_c оператора задачи (52) — луч $[\mu_+, +\infty)$, точка отсечки которого $\mu_+ > 0$ — первое собственное значение задачи Дирихле для оператора Лапласа $-\Delta_{\xi}$ на сечении ω цилиндра Ω ; соответствующую собственную функцию V нормируем в пространстве Лебега $L^2(\omega)$.

В ситуации (i) (фиг. 2а) дискретный спектр $\wp_d \subset (0, \mu_+)$ пустой (следствие неравенства Фридрихса: первое собственное значение смешанной краевой задачи для оператора Лапласа $-\Delta_{\xi}$ на резонаторе $\Theta \subsetneq \omega \times (-R_-, R_+)$ превосходит μ_+), но в ситуации (ii) (фиг. 2б) в \wp_d есть хотя бы одна точка. Более того, размерность $\#\wp_d(R)$ дискретного спектра волновода $\Xi(R) = \Omega \cup \Theta(R)$ с увеличивающимся резонатором $\Theta(R) = \{\xi : R^{-1}\xi \in \Theta\}$ неограниченно возрастает при $R \rightarrow +\infty$ (см. [29]). Ввиду устойчивости собственных значений внутри дискретного спектра его насыщение может происходить исключительно вследствие отщепления собственных значений от точки отсечки μ_+ непрерывного спектра, которое обязательно сопровождается возникновением порогового резонанса (см. [30, 14, 31] и др.). Сам пороговый резонанс случается тогда, когда у задачи (52) с параметром $\mu = \mu_+$ имеется ограниченное решение

$$W_0(\xi) = \widetilde{W}_0(\xi) + \sum_{\pm} \chi_R^{\pm}(\xi_d) K_{\pm} V(\xi'), \quad (53)$$

где помимо привлечения собственной функции $V \in H_0^1(\omega)$ и коэффициентов $K_{\pm} \in \mathbb{R}$ обозначения вполне аналогичны использованным в формуле (17), в частности, χ_R^{\pm} — срезки (18). Если $K_{\pm} = 0$ и функция (53) затухает на бесконечности, то $\{\mu_+; w_+\} \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Xi)$ — истинная собственная пара задачи (52). Если же $|K_+|^2 + |K_-|^2 > 0$ и функция (53) только стабилизируется при $\xi_d \rightarrow \pm\infty$, то пороговый резонанс называется *правильным* (терминология из [31]). Как неоднократно отмечалось в предшествующих публикациях (см., например, [13; 14; 12, гл. 16]) и станет понятно в разд. 5, отсутствие или наличие порогового

резонанса, а также его качество существенно влияют на асимптотическое строение спектра задачи (9), (10).

Пороговый резонанс заведомо отсутствует для волновода на фиг. 2а, т.е. в ситуации (i) (см. достаточное условие из [32] или первый критерий в [33]). Пример волновода $\Xi(R)$ с раздувающимся резонатором показывает, что существует такая положительная неограниченная монотонно возрастающая последовательность $\{R_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, что в волноводах $\Xi(R_j)$ реализуются пороговые резонансы. Другой способ образования резонанса состоит в возмущении прямого цилиндра $\Xi^0 = \Omega = \omega \times \mathbb{R}$, для которого наличие простого правильного порогового резонанса очевидно: нужное решение (53) имеет вид $w_{\dagger}(\xi) = V(\xi')$ и $K_{\pm} = 1$. Именно, в [31] разработана процедура поиска такой профильной функции $H \in C_c^\infty(\partial\Omega)$ (ср. замечание 1), что при малом $\varepsilon > 0$ деформация стенки $\partial\Xi^0 = \partial\omega \times \mathbb{R}$ вдоль нормали на величину $\varepsilon H(\xi)$ порождает правильный пороговый резонанс или делает точку отсечки μ_{\dagger} собственным значением задачи (52) в Ξ^ε . Вместе с тем следует подчеркнуть, что пороговый резонанс в задаче Дирихле — явление редкое и неустойчивое, т.е. ситуация общего положения — его отсутствие.

При зеркальной симметрии цилиндра Ω и резонатора G относительно гиперплоскости $\{\xi : \xi_1 = 0\}$ можно превратить порог μ_{\dagger} в собственное значение задачи (52) в $\Xi(R)$ при раздутии резонатора путем постановки искуственных условий Дирихле на рассекающей поверхности $\Gamma(R) = \{\xi \in \Xi(R) : \xi_1 = 0\}$ (см. [34]), которые сдвигают вверх точку отсечки $\mu_{\dagger}^+ > \mu_{\dagger}$, а увеличение размера R резонатора $\Theta(R)$ отцепляет от точки μ_{\dagger}^+ собственные значения задачи Дирихле в верхней половине волновода $\Xi^+(R) = \{\xi \in \Xi(R) : \xi_1 > 0\}$ и спускает их вниз до нуля при $R \rightarrow +\infty$. Таким образом, они многократно пересекают исходную точку отсечки μ_{\dagger} , а нечетное продолжение соответствующих собственных функций $V^+(\cdot; R) \in H_0^1(\Xi^+(R))$ через $\Gamma(R)$ порождает собственные пары $\{\mu_{\dagger}; V(\cdot; R)\}$ в исходном волноводе $\Xi(R)$. Разумеется, при богатой геометрической симметрии сечения ω точку отсечки μ_{\dagger} можно сделать кратным собственным значением, т.е. придать пороговому резонансу любую заданную наперед кратность.

Кратность *правильного* порогового резонанса не может превосходить двух, т.к. в разложении не затухающего решения (53) фигурирует лишь пара коэффициентов K_+ и K_- . К сожалению, до сих пор не опубликован пример квантового волновода с двумя цилиндрическими выходами на бесконечность, у которого реализуется правильный пороговый резонанс с кратностью 2, т.е. у задачи (52) есть решения (53) с векторами коэффициентов $(K_+, K_-) = (1, 0)$ и $(K_+, K_-) = (0, 1)$. Отметим, что у задачи Неймана пороговый резонанс в точке $\mu_{\dagger} = 0$ всегда имеет кратность 1 и является правильным, что и породило возникшие в разд. 3 асимптотические анзацы. В [35] приведен акустический волновод довольно причудливой формы, у которого на втором простом пороге внутри непрерывного спектра возникает двукратный правильный пороговый резонанс, однако соответствующие конструкции непригодны для условий Дирихле.

Если правильный пороговый резонанс отсутствует, то у задачи (52) появляются два ($\alpha = \pm$) решения с линейным ростом в рукавах Ω^+ и Ω^- , а именно

$$W_{\dagger\alpha}(\xi) = \widetilde{W}_{\dagger\alpha}(\xi) + V(\xi')(\chi_R^\alpha(\xi_d)(\alpha\xi_d) + \sum_{\pm} \chi_R^\pm(\xi_d)K_{\alpha\pm}). \tag{54}$$

Матрица K , составленная из (вещественных) коэффициентов $K_{\alpha\pm}$ разложений (54) и имеющая размер 2×2 , симметричная (см. [36]). Если же правильный пороговый простой (его кратность равна 1), то в дополнение к ограниченному решению (53) у задачи (52) есть решение с таким поведением на бесконечности:

$$W_{\dagger 1}(\xi) = \widetilde{W}_{\dagger 1}(\xi) + \sum_{\pm} \chi_R^\pm(\xi_d) (\pm K_{\pm}^1 \xi_d + K_{\pm}^0) V(\xi'), \tag{55}$$

Коэффициенты разложений (55) и (53) подчинены связям

$$\begin{aligned} K_+ K_+^1 + K_- K_-^1 &= 0, \\ K_+ K_+^0 + K_- K_-^0 &= 0, \end{aligned} \tag{56}$$

причем первая возникает по необходимости (проверяется применением формулы Грина в усеченном волноводе Ξ_T и предельным переходом $T \rightarrow +\infty$; ср. разд. 2), а последняя достигается прибавлением слагаемого $SW_{\dagger 0}$ с подходящим множителем S и фиксирует функцию $W_{\dagger 1}$.

Подчеркнем, что размерность пространства решений с полиномиальным ростом на бесконечности у однородной задача (52) на пороге $\mu = \mu_{\dagger}$ равна двум (количество выходов на бесконечность у Ξ), т.е.

во всех рассмотренных ситуациях указан базис в этом пространстве. К сожалению, из-за того, что $\mu_{\dagger} > 0$ в уравнении Гельмгольца из задачи Дирихле (52), для коэффициентов представлений указанных специальных решений недоступны сколь-нибудь полезные интегральные формулы, похожие на полученные в разд. 2 для задачи Неймана (16), в которой $\mu_{\dagger} = 0$ в уравнении Лапласа. Таким образом, асимптотические конструкции в разд. 5 носят условный характер.

5. СПЕКТР ПЕРИОДИЧЕСКОГО КВАНТОВОГО ВОЛНОВОДА

Как упоминалось, асимптотическое строение спектра задачи Дирихле (9)–(11)_D существенно зависит от того, есть ли дискретный спектр у задачи (52) в бесконечном квантовом волноводе Ξ и возникает ли у нее пороговый резонанс. Разберем несколько ситуаций, упомянутых в разд. 4.

5.1. Точки дискретного спектра

Пусть дискретный спектр задачи (52) состоит из точек

$$\mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \leq \mu_J \quad (57)$$

на интервале $(0, \mu_{\dagger})$. Согласно [14] (см. также [13] и [12, гл. 16]), в этом случае формальная асимптотика собственных пар задачи (9)–(11)_D выглядит просто:

$$\begin{aligned} \Lambda_p^h(\theta) &= h^{-2}\mu_p + \tilde{\Lambda}_p^h(\theta), \\ U_p^h(x; \theta) &= h^{-d/2}\chi(x_d)w_p(\xi) + \tilde{U}_p^h(x; \theta), \\ p &= 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь $w_p \in H_0^1(\Xi)$ — собственная функция задачи (52), отвечающая ее собственному значению μ_p , а $\chi \in C_c^\infty(-1/2, 1/2)$, равная единице при $|x_d| \leq 1/4$. Благодаря экспоненциальному затуханию функций w_p при $\xi_d \rightarrow \pm\infty$ результаты из [14; 12, гл. 16], а также упоминавшаяся в конце разд. 3 лемма о “почти собственных” значениях и векторах (см. [28]) позволяет при фиксированном параметре Флоке установить оценки для асимптотических остатков в представлениях (58)

$$\begin{aligned} |\tilde{\Lambda}_p^h(\theta)| &\leq c_p(\theta)e^{-\delta_p/h}, \\ \|\tilde{U}_p^h(\cdot; \theta); L^2(\Pi^h)\| &\leq c_p(\theta)e^{-\delta_p/h}, \\ p &= 1, \dots, J, \end{aligned} \quad (59)$$

где δ_p — некоторые положительные показатели. Выбрать общий для всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ множитель C_p в оценках (59) позволяет следующее утверждение.

Предложение 3. Пусть $\Lambda_p^h(\theta) \leq h^{-2}(\mu - t)$ при некоторых $p \in \mathbb{N}$, $t > 0$ и $\theta \in [-\pi, \pi]$. Тогда найдутся такие положительные и не зависящие от параметра θ числа β_t , h_t и c_t , что при $h \in (0, h_t]$ для нормированной в пространстве $L^2(\Pi^h)$ собственной функции $U_p^h(\cdot; \theta) \in H_0^{1,0}(\mathfrak{w}^h)$ задачи (9)–(11)_D верна весовая оценка

$$h^2 \|e^{\beta_t x_d} \nabla_x U_p^h(\cdot; \theta); L^2(\Pi^h)\|^2 + \|e^{\beta_t x_d} U_p^h(\cdot; \theta); L^2(\Pi^h)\| \leq c_t. \quad (60)$$

Доказательство. Индексы p , t и параметр θ не пишем. Введем кусочно-гладкую непрерывную весовую функцию \mathcal{R}_β^h , равную $e^{\beta|x_d|/h}$ при $|x_d| \in [hR, 1/4]$, $e^{\beta/4h}$ при $|x_d| \geq 1/4$ и $e^{\beta R}$ на мелком узле $\Theta^h = \{x \in \mathfrak{w}^h : |x_d| < hR\}$. Заметим, что

$$\nabla_x \mathcal{R}_\beta^h(x) = 0 \text{ при } |x_d| \notin [hR, 1/4] \text{ и } \mathcal{R}_\beta^h(x)^{-1} |\nabla_x \mathcal{R}_\beta^h(x)| \leq \beta h^{-1}. \quad (61)$$

В интегральное тождество (12) подставим пробную функцию $\Psi^h = \mathcal{R}_\beta^h \mathcal{U}_\beta^h$, где $\mathcal{U}_\beta^h = \mathcal{R}_\beta^h U_p^h(\cdot; \theta)$. Условия квазипериодичности сохраняются потому, что весовая функция \mathcal{R}_β^h приобретает одинаковые

постоянные значения около торцов $\omega^h(\pm 1/2)$ ячейки \mathfrak{w}^h . После неоднократного коммутирования оператор-градиента с весовой функцией приходим к равенству

$$\| \nabla_x \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 - \| \mathcal{U}_\beta^h (\mathcal{R}_\beta^h)^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 = \Lambda^h \| \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2.$$

Отсюда при учете условия нормировки (14), формул (61) и неравенства Фридрикса

$$\| \nabla_x \mathcal{U}_\beta^h(\cdot, x_d); L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 \geq \mu h^{-2} \| \mathcal{U}_\beta^h(\cdot, x_d); L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2,$$

проинтегрированного по $|x_d| \in (hR, 1/2)$, выводим оценку

$$\begin{aligned} \Lambda^h e^{\beta R} &\geq \Lambda^h e^{\beta R} \| U^h; L^2(\Theta^h) \|^2 = \Lambda^h \| \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\Theta^h) \|^2 = \\ &= \| \nabla_x \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 - \| \mathcal{U}_\beta^h (\mathcal{R}_\beta^h)^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h \setminus \Theta^h) \|^2 - \\ &\quad - \Lambda^h(\theta) \| \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h \setminus \Theta^h) \|^2 \geq \| \partial_{x_d} \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 + \\ &\quad + \tau \| \nabla_x \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2 + h^{-2} \{ (1 - \tau) \mu - h^2 \Lambda^h - \beta \} \| \mathcal{U}_\beta^h; L^2(\mathfrak{w}^h \setminus \Theta^h) \|^2. \end{aligned} \tag{62}$$

В силу условия, наложенного на собственное значение, видим, что левая часть соотношения (62) не превосходит $h^{-2} \mu e^{\beta R}$. Числа $\tau = \tau_l > 0$, $\beta = \beta_l > 0$ и $h_l > 0$ берем настолько малыми, чтобы множитель, выделенный фигурными скобками в последней строке формулы (62), был положителен при $h \in (0, h_l]$. Для проверки неравенства (60) осталось сделать несложные преобразования, причем при оценивании нормы производной $\partial_{x_2} U^h$ еще раз применить формулы (61). Предложение доказано.

Убедимся в равномерной относительно параметра $\theta \in [-\pi, \pi]$ ограниченности множителя $c_p(\theta)$ из оценок (59). Благодаря установленному экспоненциальному затуханию собственных функций максимизальный принцип (см., например, [5, теорема 10.2.2])

$$\Lambda_p^h(\theta) = \max_{\mathcal{E}_p^h(\theta) \Psi^h \in \mathcal{E}_p^h(\theta) \setminus \{0\}} \inf_{\Psi^h; L^2(\mathfrak{w}^h)} \frac{\| \nabla_x \Psi^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2}{\| \Psi^h; L^2(\mathfrak{w}^h) \|^2}, \tag{63}$$

$p \in \mathbb{N}$,

в котором $\mathcal{E}_p^h(\theta)$ — любое подпространство в $H_0^{1,0}(\mathfrak{w}^h)$ с коразмерностью $p - 1$, позволяет доказать неравенство с общей для всех $\theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi]$ мажорантой

$$\begin{aligned} | \Lambda_p^h(\theta_1) - \Lambda_p^h(\theta_2) | &\leq c_p e^{-\delta_p/h}, \\ \delta_p &> 0. \end{aligned} \tag{64}$$

В самом деле, согласно предложению 3 и условиям ортогональности и нормировки (14), произведения $\chi U_1^h(\cdot; \theta_1), \dots, \chi U_p^h(\cdot; \theta_1)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} (\chi U_j^h(\cdot; \theta_1), \chi U_k^h(\cdot; \theta_1))_{\mathfrak{w}^h} &= \delta_{j,k} + O(e^{-\delta_k/h} + e^{-\delta_k/h}), \\ j, k &= 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Следовательно, эти произведения остаются линейно независимыми. В итоге каждое подпространство $\mathcal{E}_p^h(\theta_2)$ из (63) содержит нетривиальную линейную комбинацию

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{E}_p^h(\theta_2)}^h(x) &= \sum_{j=1}^p C_j^j \chi(x_d) U_k^h(x; \theta_1), \\ \sum_{j=1}^p | C_j^j |^2 &= 1, \end{aligned}$$

которая попадает в пространство $H_0^{1, \theta_2}(\mathfrak{w}^h)$ при любом параметре θ_2 , так как согласно определению срезающей функции χ указанные произведения обращаются в нуль около торцов $\mathfrak{w}^h(\pm 1/2)$ ячейки \mathfrak{w}^h и потому удовлетворяют условиям квазипериодичности (11) при любом θ . Наконец, весовая оценка (60) позволяет обработать дробь Рэлея из формулы (63) и получить соотношение

$$\Lambda_p^h(\theta) \leq \max_{\varepsilon_p^h(\theta)} \frac{\|\nabla_x \Psi_{\varepsilon_p^h(\theta_2)}^h; L^2(\mathfrak{w}^h)\|^2}{\|\Psi_{\varepsilon_p^h(\theta_2)}^h; L^2(\mathfrak{w}^h)\|^2} \leq \max_{\varepsilon_p^h(\theta)} \frac{\sum_{j=1}^p \Lambda_j^h(\theta_1) |C_{\varepsilon_p^h(\theta_2)}^j|^2 + c_p^+ e^{-\delta_p/h}}{\sum_{j=1}^p |C_{\varepsilon_p^h(\theta_2)}^j|^2 - c_p^- e^{-\delta_p/h}} \leq \Lambda_p^h(\theta_1) + C_p e^{-\delta_p/h}.$$

Поменяв ролями параметры θ_2 и θ_1 , приходим к неравенству (64), которое вместе с первой оценкой (59) обеспечивает первую часть формулируемой ниже теоремы 2.

5.2. Пороговый резонанс отсутствует

В силу результата из [14] (см. также [13; 12, гл. 16] по поводу общих краевых задач) в указанном случае предельными краевыми условиями в точке $z = 0$ оказываются условия Дирихле. Поэтому примем следующие асимптотические анзацы для собственных пар задачи (9)–(11)_D:

$$\Lambda^h(\theta) = h^{-2}\mu + \kappa^0 + h\kappa'(\theta) + \tilde{\Lambda}^h(\theta), \tag{65}$$

$$U^h(\theta) = v^0(z; \theta)V(\xi') + hv'(z; \theta)V(\xi') + \dots \tag{66}$$

Как упоминалось, функция v удовлетворяет условиям

$$v^0(\pm 0; \theta) = 0, \tag{67}$$

но функции v' разрешено иметь скачок в точке $z = 0$. При этом в качестве внутреннего разложения около узла Θ^h возьмем линейную комбинацию решений (54) задачи (52)

$$U^h(\theta) = hW_+(\xi)\partial_z v^0(+0; \theta) - hW_-(\xi)\partial_z v^0(-0; \theta) + \dots \tag{68}$$

Подстановка анзацев (65) и (66) в равенства (9)–(11)_D на ячейке \mathfrak{w}^h и ее границе вне ядра Θ^h дает соотношения

$$-\partial_z^2 v^0(z; \theta) = \kappa^0 v^0(z; \theta), \quad z \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}), \tag{69}$$

$$v^0(\frac{1}{2}; \theta) = e^{i\theta} v^0(-\frac{1}{2}; \theta), \quad \frac{dv^0}{dz}(\frac{1}{2}; \theta) = e^{i\theta} \frac{dv^0}{dz}(-\frac{1}{2}; \theta), \tag{70}$$

а решениями задачи (69), (70), (67) служат такие пары $\{\kappa_q^0; v_q^0\}$ при $q \in \mathbb{N}$:

$$\kappa_q^0 = \pi^2 q^2, v_q^0(z; \theta) = \sin(\pi q z) \text{ при } z \in (0, \frac{1}{2}), \quad v_q^0(z; \theta) = (-1)^q e^{-i\theta} \sin(\pi q z) \text{ при } z \in (-\frac{1}{2}, 0).$$

Зависимость собственных функций v_q^0 от переменной Флоке фиктивная — она устраняется естественным переходом к задаче Дирихле на интервале $(0, 1) \ni z$.

Поправочные члены анзацев определяются из уравнения

$$-\partial_z^2 v_q'(z; \theta) - \kappa_q^0 v_q'(z; \theta) = \kappa_q' v_q^0(z; \theta), \quad z \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}),$$

с прежними условиями квазипериодичности (70) и неоднородными условиями Дирихле, проистекающими от согласования внешних разложений (66) с внутренним (68) при учете представлений (54) решений W_{\pm} задачи (52), а именно

$$v_q'(\pm 0; \theta) = \sum_{\alpha=\pm} \alpha K_{\alpha\pm} \partial_z v_q^0(\alpha 0; \theta). \tag{71}$$

Как обычно, условие разрешимости сформированной задачи, единственное в силу простоты собственного значения, вместе с соотношениями (70) и (71) обеспечивают формулу

$$\begin{aligned} \kappa'_q(\theta) &= \kappa'_q(\theta) \int_{-1/2}^{1/2} |v_q^0(z; \theta)|^2 dz = - \int_{-1/2}^{1/2} v_q^0(z; \theta) \left(\partial_z^2 v'_q(z; \theta) + \kappa_q v'_q(z; \theta) \right) dz = \\ &= \sum_{\pm} \mp v'_q(\pm 0; \theta) \overline{\partial_z v_q^0(\pm 0; \theta)} = -\pi^2 q^2 (K_{++}^2 - K_{--}^2 + 2(-1)^q K_{+-} \cos \theta) \end{aligned} \tag{72}$$

для поправочного члена порядка h в анзаце (65). Оценка $|\tilde{\Lambda}_q^h| \leq c_q(\theta)h^2$ асимптотического остатка в анзаце обеспечена, например, результатами из [14], а равномерная относительно $\theta \in [-\pi, \pi]$ ограниченность множителя $c_q(\theta)$ проверяется при помощи подходов из [18] или [16].

Сформулируем утверждение, заканчивающее асимптотический анализ из этого и предыдущего пунктов.

Теорема 2. Пусть дискретный спектр задачи (52) состоит из точек (57) и у нее отсутствует пороговый резонанс.

1. При $j = 1, \dots, J$ и $h \in (0, h_j]$ сегменты $\mathcal{B}_{D_j}^h$ в спектре задачи (9)–(11)_D содержатся в отрезках $[h^{-2}(\mu_j - c_j e^{-\delta_j}), h^{-2}(\mu_j + c_j e^{-\delta_j})]$. Здесь h_j, δ_j и c_j — некоторые положительные числа. Если $\mu_j < \mu_{j+1}$ (например, $j = 1$), то между сегментами $\mathcal{B}_{D_j}^h$ и $\mathcal{B}_{D_{j+1}}^h$ раскрыта спектральная лакуна $\mathcal{G}_{D_j}^h$ шириной $h^{-2}(\mu_{j+1} - \mu_j) + O(e^{\min\{\delta_j, \delta_{j+1}\}/h})$.

2. При $j = J + q$ и $q \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные числа h_q и c_q , что при $h \in (0, h_q]$ справедливо включение $\mathcal{B}_{D_j}^h \subset [h^{-2}(\mu_{\pm} + \pi^2 q^2(1 - 2hK_{+-})) - c_q h^2, h^{-2}(\mu_{\pm} + \pi^2 q^2(1 + 2hK_{+-})) + c_q h^2]$, где $\mu_{\pm} > 0$ — точка отсечки непрерывного спектра задачи (52), а $K_{+-} = K_{-+}$ — коэффициент в разложениях (54) ее решений W_{\pm} . Между соседними сегментами $\mathcal{B}_{D_j}^h$ и $\mathcal{B}_{D_{j+1}}^h$ раскрыта спектральная лакуна $\mathcal{G}_{D_j}^h$ шириной $\pi^2(2q + 1)(1 - 4hK_{+-}) + O(h^2)$.

3. Лакуна $\mathcal{G}_{D_j}^h$ раскрыта наверняка и имеет ширину $h^{-2}(\mu_{\pm} - \mu_j) + \pi^2(1 - 2hK_{+-}) + O(h^2)$.

Замечание 3. 1. Если $\mu_j = \dots = \mu_{j+\rho_j-1}$ — собственное значение задачи (52) с кратностью $\rho_j > 1$, то осталось неизвестным, раскрыты или нет лакуны между спектральными сегментами $\mathcal{B}_{D_j}^h, \dots, \mathcal{B}_{D_{j+\rho_j-1}}^h$.

В случае симметрии волновода Ξ относительно плоскостей $\{\xi : \xi_k = 0\}, k \in \{1, \dots, d - 1\}$, несколько сегментов совпадают и лагун между ними, разумеется, нет. В общей ситуации для ответа на вопрос о раскрытии лагун нужно построить младшие асимптотические члены собственных значений (8) задачи (9)–(11)_D, которые (члены) привлекают характеристики волновода Ξ , отличающиеся от введенных в разд. 4, и потому в данной статье не вычисляются, хотя соответствующие итерационные процессы известны (см., например, [12]).

2. Если $\mu_{j+1} = \mu_{\pm}$ — собственное значение оператора задачи (52), вкрапленное в его непрерывный спектр \wp_c , но правильный пороговый резонанс отсутствует, то в спектре (6) задачи (9)–(11)_D появляется сегмент $\mathcal{B}_{D_{j+1}}^h \subset [h^{-2}\mu_{\pm} - c_{\pm} h, h^{-2}\mu_{\pm} + c_{\pm} h]$ с некоторым числом $c_{\pm} > 0$. Первое утверждение теоремы 2 сохраняется полностью, во втором нужно сделать замену $j \mapsto j + 1$, а вместо одной лакуны в третьем утверждении обнаруживаются две лакуны $\mathcal{G}_{D_j}^h$ и $\mathcal{G}_{D_{j+1}}^h$, у которых ширина равна $O(h^{-2}(\mu_{\pm} - \mu_j))$ и $O(h^2)$ соответственно.

3. Согласно формуле (72), диагональные элементы $K_{\pm\pm}$ матрицы K коэффициентов представлений (54) определяют положение сегментов $\mathcal{B}_{D_{j+q}}^h$, а антидиагональные элементы $K_{+-} = K_{-+}$ — их размеры. В случае $K_{\pm\mp} = 0$ длина сегментов уменьшается по крайней мере до $O(h^2)$.

5.3. Простой правильный пороговый резонанс

Пусть у задачи (52) с параметром $\mu = \mu_{\pm}$ имеются решения (54) и (55), но захваченных волн нет, т.е. точка отсечки не является собственным значением. Тогда асимптотические анзацы (65) и (66) для собственных пар задачи (9)–(11)_D остаются прежними. Для главных асимптотических членов κ^0 и v^0 по-прежнему верны уравнения (69) и условия квазипериодичности (70), однако процедура срашивания обеспечивает новые условия скачков в точке $z = 0$. Именно, согласование внутреннего разложения

$$\begin{aligned}
 U^h(x; \theta) &= c_0 W_{+0}(\xi) + h(c_1 W_{+1}(\xi) + c'_0 W_{+0}(\xi)) + \dots = \\
 &= c_0 K_{\pm} + h(c_1 (\pm K_{\pm}^1 \xi_d + K_{\pm}^0) + c'_0 K_{\pm}) + \dots \text{ при } \pm \xi_d \gg R
 \end{aligned}$$

с внешними разложениями (66), к главным членам которых применена формула Тейлора

$$\begin{aligned}
 v^0(z; \theta) &= v^0(\pm 0; \theta) + z \partial_z v^0(\pm 0; \theta) + \frac{z^2}{2} \partial_z^2 v^0(\pm 0; \theta) + O(|z|^3) = \\
 &= v^0(\pm 0; \theta) + h \xi_d \partial_z v^0(\pm 0; \theta) + h^2 \frac{\xi_d^2}{2} \partial_z^2 v^0(\pm 0; \theta) + O(h^3 |\xi_d|^3),
 \end{aligned}$$

после исключения неизвестных коэффициентов c_0 и c_1 приводит к таким равенствам:

$$\begin{aligned}
 K_- v^0(+0; \theta) &= K_+ v^0(-0; \theta), \\
 K_-^1 \partial_z v^0(+0; \theta) + K_+^1 \partial_z v^0(-0; \theta) &= 0.
 \end{aligned} \tag{73}$$

Оба коэффициента K_{\pm} не могут обратиться в нуль, так как по предположению решение (53) не попадает в пространство $H_0^1(\Xi)$. Если

$$K_+ = 0, K_- \neq 0 \quad \text{или} \quad K_- = 0, K_+ \neq 0,$$

то соответственно $K_-^1 = 0, K_+^1 \neq 0$ или $K_+^1 = 0, K_-^1 \neq 0$ в согласии с первой связью (56). Следовательно, условия сопряжения (73) распадаются и, превращаясь в краевые условия

$$v^0(+0; \theta) = 0, \partial_z v^0(-0; \theta) = 0 \quad \text{или} \quad v^0(-0; \theta) = 0, \partial_z v^0(+0; \theta) = 0,$$

делают задачу (69), (70), (73) с вещественным параметром Флоке формально самосопряженной, а дисперсионные кривые в этой задаче — прямыми отрезками $\kappa = \pi^2(q = 1/2)^2, q \in \mathbb{N}$. В итоге, как и при отсутствии порогового резонанса, спектр (6) исходной задачи (9)–(11) D на тонкой ячейке периодичности ϖ^h состоит из коротких сегментов (7), разделенных широкими лагунами (15). Вычисление размеров сегментов и лагун почти дословно повторяет выкладки из п. 3, 2°, — воспроизводить их не будем.

Обратимся теперь к ситуации

$$K_{\pm} \neq 0 \Rightarrow \mathbf{k} = \frac{K_+}{K_-} = -\frac{K_-^1}{K_+^1} \tag{74}$$

и перепишем условия сопряжения (73) следующим образом:

$$v^0(+0; \theta) = \mathbf{k} v^0(-0; \theta), \quad \mathbf{k} \partial_z v^0(+0; \theta) = \partial_z v^0(-0; \theta). \tag{75}$$

Задача (69), (70), (75) с параметром Флоке $\theta \in [-\pi, \pi]$ по-прежнему формально самосопряженная, а ее дисперсионные кривые $\kappa = \kappa(\theta)$ находятся из трансцендентного уравнения:

$$\cos \sqrt{\kappa} = \frac{2\mathbf{k}}{1 + \mathbf{k}^2} \cos \theta. \tag{76}$$

В случае $\mathbf{k} = 1$ соотношения (75) превращаются в условия непрерывности, а решения уравнения (76) заданы первой формулой (35), т.е. ферма дисперсионных кривых принимает тот же вид, что и на фиг. 3а. При $\mathbf{k} \neq 1$ ферма искажается, а простые выражения (42) для ее узлов пропадают. Несмотря на то, что в целом изучение расщепления узлов искаженной фермы требует применения той же асимптотической процедуры, что и в разд. 3, отсутствие необходимой информации о кратных собственных значениях и специальных решениях (55), (54) (ср. выражения (41)–(43) и предложения 1, 2 в случае условий Неймана) делает доступные результаты условными, а финальные формулы — излишне громоздкими и потому бесполезными. Впрочем, имеется один случай $\mathbf{k} = -1$ в формуле (74), для которого выкладки и результаты мало отличаются от представленных в разд. 3. При этом требуемое соотношение $K_+ = -K_-$

реализуется, например, тогда, когда правильный пороговый резонанс возникает в задаче Дирихле на уполовиненном волноводе $\{\xi \in \Xi : \xi_d > 0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Exner P., Kovarik H.* Quantum waveguides. Theoretical and Mathematical Physics. Cham: Springer, 2015.
2. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974.
3. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
4. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
5. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
6. *Reed M., Simon B.* Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 3. New York: Academic Press Inc., 1980.
7. *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. Т. 171. Ленинград: Наука, 1985. 122 с.
8. *Kuchment P.* Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birkhäuser, 1993.
9. *Nazarov S. A., Plamenevsky B. A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
10. *Гельфанд И. М.* Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
12. *Mazja W. G., Nazarov S. A., Plamenevski B. A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1991 (англ. перевод: *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1. Basel: Birkhäuser Verlag, 2000).
13. *Назаров С. А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестник ЛГУ. Серия 1. 1982. Вып. 2. № 7. С. 65–68.
14. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
15. *Назаров С. А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
16. *Назаров С. А.* Об одномерных асимптотических моделях тонких решеток Неймана // Сибирск. матем. журнал. 2023. Т. 64. № 2. С. 362–382.
17. *Полюа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
18. *Гомес Д., Назаров С. А., Ориве-Иллерра Р., Перес М.-Е.* Замечания об обосновании асимптотики спектра цилиндрических волноводов с периодическими сингулярными возмущениями границы и коэффициентов // Проблемы матем. анализа. Вып. 111. Новосибирск, 2021. С. 43–65.
19. *Gómez D., Nazarov S. A., Orive-Illera R., Pérez-Martinez M.-E.* Spectral gaps in a double-periodic perforated Neumann waveguide // Asymptotic Analysis. 2023. V. 131. P. 385–441.
20. *Назаров С. А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2002.
21. *Panassenko G.* Multi-scale modelling for structures and composites. Dordrecht: Springer, 2005.
22. *Post O.* Spectral analysis on graph-like spaces. Lecture Notes in Mathematics, 2039. Heidelberg: Springer, 2012.
23. *Ван-Дайк М. Д.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
24. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
25. *Назаров С. А.* Открытие лакуны в непрерывном спектре периодически возмущенного волновода // Матем. заметки. 2010. Т. 87. № 5. С. 764–786.
26. *Назаров С. А.* Асимптотика спектральных лакун в регулярно возмущенном периодическом волноводе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2013. Вып. 2. № 7. С. 54–63.
27. *Борисов Д. И., Панкрашкин К. В.* Открытие лакун и расщепление краев зон для волноводов, соединенных периодической системой малых окон // Матем. заметки. 2013. Т. 93. № 5. С. 665–683.
28. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.

29. *Jones D. S.* The eigenvalues of $\nabla^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains // Proc. Camb. Phil. Soc. 1953. V. 49. P. 668–684.
30. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. No. 2. P. 533–559.
31. *Назаров С. А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Известия РАН. Серия матем. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
32. *Pankrashkin K.* Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions // J. of Math. Anal. and Appl. 2017. V. 449. No. 1. P. 907–925.
33. *Бахарев Ф. Л., Назаров С. А.* Критерии наличия и отсутствия ограниченных решений на пороге непрерывного спектра в объединении квантовых волноводов // Алгебра и анализ. 2020. Т. 32. № 6. С. 1–23.
34. *Evans D. V., Levitin M., Vasil'ev D.* Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.
35. *Назаров С. А.* Волновод с двойным пороговым резонансом на простом пороге // Матем. сборник. 2020. Т. 211. № 8. С. 20–67.
36. *Korolkov A. I., Nazarov S. A., Shanin A. V.* Stabilizing solutions at thresholds of the continuous spectrum and anomalous transmission of waves // ZAMM. 2016. V. 96. No. 10. P. 1245–1260.

УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

© 2024 г. А. П. Солдатов

119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

e-mail: soldatov48@gmail.com

Поступила в редакцию 07.07.2023 г.

Переработанный вариант 07.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Построена фундаментальная матрица решений эллиптических систем второго порядка с постоянными старшими коэффициентами. С помощью нее получено интегральное представление функций, принадлежащих классу Гельдера в замкнутой области с ляпуновской границей. В случае бесконечной области эти функции подчинены степенной асимптотике на бесконечности. Данное представление применено к исследованию смешанно-контактной краевой задачи для эллиптической системы второго порядка с кусочно-постоянными старшими коэффициентами. Эта задача редуцирована к системе интегральных уравнений, фредгольмовых в области и сингулярных на ее границе. Библ. 24.

Ключевые слова: эллиптическая система, второй порядок, фундаментальная матрица, смешанно-контактная задача, интегральное уравнение, фредгольмовость, индекс.

DOI: 10.31857/S0044466924010103, **EDN:** ZIXVFT

1. ПОСТАНОВКА СМЕШАННО-КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

В открытом множестве D , ограниченном гладким контуром Γ , для l -вектор-функции $u(z) = (u_1(z), \dots, u_l(z))$, $z = x + iy$, рассмотрим эллиптическую систему

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + L^0 u = f \quad (1.1)$$

с постоянными матричными коэффициентами $a_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ и подчиненным оператором первого порядка

$$L^0 u = a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_0 u.$$

Условие эллиптичности состоит в том, что матрицы a_{11}, a_{22} обратимы и характеристический многочлен

$$\chi(\zeta) = \det[a_{11} + \zeta(a_{12} + a_{21}) + \zeta^2 a_{22}] \quad (1.2)$$

не имеет вещественных корней.

Кривую Γ разобьем на два контура Γ^0 и Γ^+ , предполагая, что D лежит по обе стороны от Γ^0 и по одну сторону от Γ^+ , при этом Γ^0 ориентируем произвольно, а Γ^+ ориентируем так, чтобы множество D оставалось слева. Для краткости D называем (составной) областью, состоящей из некоторого числа связных компонент D^1, \dots, D^n , при $n = 1$ говорим о простой области D . Область D предполагается конечной, т.е. она лежит внутри некоторого круга. Случай “бесконечного” множества D , когда оно содержит внешность некоторого круга, рассмотрим ниже в отдельном разделе.

Связные компоненты контуров Γ^0 и Γ^+ перенумеруем в виде семейств $\Gamma_j^0, 1 \leq j \leq m^0$, и $\Gamma_j^+, 1 \leq j \leq m^+$, соответственно и положим $m = m^+ + 2m^0$. Очевидно, m совпадает с суммарным числом связных компонент контуров $\partial D^s, 1 \leq s \leq n$. Введем “одностороннее” замыкание \bar{D} области D , рассматривая окрестности точек контура Γ^0 , лежащие слева и справа от него. Непрерывные в \bar{D} функции по отношению к D являются кусочно-непрерывными. Другими словами, функция $u \in C(D)$ кусочно-непрерывна в области

D , если она непрерывна в замыкании \overline{D}^s каждой связной компоненте области D . Поэтому u допускает соответствующие односторонние граничные значения

$$u^\pm \in C(\Gamma^0), \quad u^+ \in C(\Gamma^+) \quad (1.3)$$

на контурах Γ^0 и Γ^+ . Класс всех кусочно-непрерывных функций обозначим $C(\widehat{D})$. Аналогичный смысл имеет классы $C^1(\widehat{D})$ дифференцируемых функций, а также соответствующие классы $C^\mu(\widehat{D})$, $C^{1,\mu}(\widehat{D})$ кусочно-гельдеровых функций. Эти обозначения используются также для вектор- или матриц-функций. Для класса кусочно-постоянных функций со значениями в некотором конечномерном пространстве X используем обозначение $X(\widehat{D})$. Аналогичный смысл имеет класс $X(\Gamma)$ для кусочно-постоянных функций на контуре Γ (т.е. постоянных на его компонентах). Например, в этих обозначениях кусочно-постоянные старшие коэффициенты a_{ij} уравнения (1.1) принадлежат $\mathbb{R}^{2 \times 2}(\widehat{D})$. В дальнейшем относительно границы Γ составной области D и младших коэффициентов уравнения (1.1) предполагается, что

$$\Gamma = \Gamma^0 \cup \Gamma^+ \in C^{1,\nu}, \quad a_j \in C^\mu(\widehat{D}), \quad 0 < \mu < \nu < 1. \quad (1.4)$$

Обозначим $e = e_1 + ie_2$ комплекснозначную функцию на Γ , который геометрически в точке t контура представляет собой единичный касательный вектор, направленный согласно выбранной ориентации контура. Тогда $n = -ie$ в точке t является единичным вектором нормали к Γ , внешним к D в случае $t \in \Gamma^+$. Матрицы a_{ij} определяют конормальные граничные значения

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = n_1 \left(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^+ + n_2 \left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right)^+ \quad (1.5)$$

на контуре Γ^+ и аналогичные граничные значения со знаками \pm на Γ^0 .

Пусть Γ^+ разбит на два контура $\Gamma_{(1)}^+$ и $\Gamma_{(2)}^+$, которые составлены, соответственно, из $m_{(1)}^+$ и $m_{(2)}^+$ простых контуров, так что

$$m^+ = m_{(1)}^+ + m_{(2)}^+. \quad (1.6)$$

Смешанно-контактная задача для системы (1.1) определяется смешанными краевыми условиями

$$u^+ |_{\Gamma_{(1)}^+} = g_1^+, \quad \frac{\partial u^+}{\partial \nu} |_{\Gamma_{(2)}^+} = h^+, \quad (1.7)$$

и контактными условиями

$$(u^+ - u^-) \Big|_{\Gamma^0} = g_1^0, \quad \left(\frac{\partial u^+}{\partial \nu} - \frac{\partial u^-}{\partial \nu} \right) \Big|_{\Gamma^0} = h^0, \quad (1.8)$$

В предположении (1.4) решение этой задачи ищется в классе $C^{1,\mu}(\widehat{D}) \cap C^2(D)$.

При $\Gamma^+ = \Gamma_{(1)}^+$ и $\Gamma^+ = \Gamma_{(2)}^+$ имеем, соответственно, первую и вторую контактные задачи. Если контур Γ^0 отсутствует и, следовательно, D является простой областью, частными случаями этой задачи служат задача Дирихле

$$u^+ = g \quad (1.9)$$

и Неймана

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = h, \quad (1.10)$$

называемые также первой и второй краевыми задачами.

Применительно к однородной эллиптической системе

$$Lu \equiv a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12} + a_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.11)$$

можно ввести понятие сопряженной функции v к ее решениям u с помощью соотношений

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.12)$$

В силу (1.11) это определение корректно, т.е. форма $dv = v_x dx + v_y dy$ в каждой простой подобласти D^s замкнута. Очевидно, в этой подобласти функция v определена по u единственным образом с точностью до постоянного вектора $\xi \in \mathbb{R}^l$ и, вообще говоря, многозначна. При этом

$$\int_{\partial D^s} \frac{\partial u^+}{\partial \nu^s} d_1 t = 0.$$

Суммируя это равенство по s и учитывая, что на каждой компоненте контура Γ^0 определена пара противоположных векторов ν^s и ν^r , приходим к соотношению

$$\int_{\Gamma^0} \left(\frac{\partial u^+}{\partial \nu} - \frac{\partial u^-}{\partial \nu}\right) d_1 t + \int_{\Gamma^+} \frac{\partial u^+}{\partial \nu} d_1 t = 0, \quad (1.13)$$

которое справедливо для любого решения $u \in C^1(\widehat{D})$ системы (1.11). В частности, при $\Gamma_{(2)}^+ = \Gamma^+$ правая часть второй контактной задачи должна удовлетворять необходимому условию ортогональности

$$\int_{\Gamma^0} h^0(t) d_1 t + \int_{\Gamma^+} h^+(t) d_1 t = 0. \quad (1.14)$$

С учетом (1.5) и равенства $n = -ie$ из определения (1.12) сопряженной функции следует, что на внешней границе Γ^+ имеем соотношение

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu} = e_1 \frac{\partial v^+}{\partial x} + e_2 \frac{\partial v^+}{\partial y} = (v^+)',$$

где штрих означает производную по параметру длины дуги на контуре. Поэтому краевое условие (1.10) можно переписать в форме $(v^+)' = g$ с вообще говоря многозначной функцией v^+ , производная которой однозначна.

Аналогичным образом краевые условия (1.7), (1.8) для уравнения (1.11) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} u^+ |_{\Gamma_{(1)}^+} &= g_1^+, \quad (v^+)' |_{\Gamma_{(2)}^+} = (g_2^+)', \\ (u^+ - u^-) |_{\Gamma^0} &= g_1^0, \quad (v^+ - v^-)' |_{\Gamma^0} = (g_2^0)'. \end{aligned}$$

Остановимся подробнее на задачах Дирихле (1.9) и Неймана (1.10) для однородной системы (1.11) в области D , ограниченной ляпуновским контуром Γ .

В 1948 г. А. В. Бицадзе [1] был построен пример эллиптической системы (1.11) с коэффициентами

$$a_{11} = -a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

для которой однородная задача Дирихле в единичном круге имеет бесконечное число линейно независимых решений. Позднее А. В. Бицадзе [2] был описан класс эллиптических систем, названных им слабо связанными, для которых задача Дирихле фредгольмова. Этот класс может быть описан следующими образом [3]. С каждой системой (1.11) можно связать такие матрицы $b, J \in \mathbb{C}^{l \times l}$, что

$$\det \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \bar{b}J \end{pmatrix} \neq 0, \quad a_{11}b + (a_{11} + a_{11})bJ + a_{11}bJ^2 = 0.$$

При этом матрица J есть прямая сумма верхне-треугольных клеток Жордана, диагональные элементы которой составляют множество корней характеристического уравнения (1.2) в верхней полуплоскости, а матрица b определена с точностью до умножения справа на обратимую матрицу, коммутирующую с J . Тогда условия (1.16) не зависят от указанного выбора b . В этих обозначениях класс слабо связанных систем описывается условием

$$\det b \neq 0. \quad (1.17)$$

Принадлежность этому классу необходима и достаточна [2, 4] для фредгольмовости задачи (1.9), (1.11). С другой стороны, с точки зрения современной общей эллиптической теории [5] фредгольмовость задачи Дирихле обеспечивается так называемым условием дополненности. Можно показать [6], что это условие необходимо и достаточно для слабой связанности эллиптической системы.

Работа А. В. Бицадзе [1] стимулировала появление различных классов эллиптических систем, для которых задача Дирихле всегда фредгольмова. Наиболее важным из них является введенное М. И. Вишиком [7] понятие сильной эллиптичности. Оно заключается в положительной определенности для всех $z = x + iy \neq 0$ матрицы

$$x^2 a_{11} + xy(a_{12} + a_{21}) + y^2 a_{22}. \quad (1.18)$$

Можно проверить непосредственно [3], что для этих матриц условие (1.17) выполнено. Примером сильно эллиптической системы служит система (1.11) с коэффициентами

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = a_{21}^T = p, \quad (1.19)$$

где p — ортогональная матрица, не имеющая вещественных собственных значений. В частности, порядок l системы должен быть обязательно четным. Для этой системы матрицу (1.18) можно записать в виде $(x + yp^T)(x + yp)$, так что она положительно определена.

Еще более узкий класс составляют введенные в [8] так называемые усиленно эллиптические системы. В дополнение к условию эллиптичности он описывается требованием неотрицательной определенности $2l \times 2l$ -матрицы

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

или, что равносильно, условием

$$a_{ji}^T = a_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^2 (a_{ij} \xi_j) \xi_i \geq 0 \quad (1.21)$$

для любых $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^l$.

Примером подобной системы служит 2×2 -система Ламе плоской анизотропной теории упругости [9] с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, & a_{12} &= \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \\ a_{21} &= \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, & a_{22} &= \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Элементы α_j этих коэффициентов, называемые модулями упругости, подчиняются требованию положительной определенности матрицы.

Составленная из коэффициентов 4×4 -матрица (1.20) неотрицательно определена. В самом деле, одновременная перестановка ее строк и столбцов с номерами 2 и 4 приводит к матрице, которая получается добавлением к 3×3 -матрице (1.23) четвертой строки и столбца $(\alpha_6, \alpha_5, \alpha_3, \alpha_3)$ и которая, очевидно, неотрицательно определена.

Если $(a\xi)\xi = 0$, то $a\xi = 0$ и, значит, $\xi = (0, \nu, -\nu, 0)$ с некоторым ν . Поскольку векторы $\xi_1 = (0, \nu)$ и $\xi_2 = (-\nu, 0)$ линейно зависимы только при $\nu = 0$, отсюда следует, что система (1.11), (1.22) эллиптическая и, следовательно, усиленно-эллиптическая.

Иначе выглядит критерий фредгольмовости задачи Неймана (1.11), (1.10), изученной в [2, 10, 11]. Его можно сформулировать следующим образом [6, 12]: задача Неймана фредгольмова тогда и только тогда, когда

$$\det c \neq 0, \quad c = a_{21}b + a_{22}bJ. \quad (1.24)$$

В отличие от задачи Дирихле, это требование может быть нарушено даже для усиленно эллиптических систем. Как установлено в [6, 12], любое решение однородной задачи Неймана в конечной области D принадлежит $C^1(\bar{D})$ и интеграл

$$\int_D \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_1 dx_2 = 0.$$

На основании (1.21) отсюда

$$a_{i1} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad i = 1, 2.$$

или, что равносильно, сопряженная функция v к решению u , определяемая соотношениями (1.12), постоянна. Такие решения системы (1.11) назовем вырожденными.

Например, для системы (1.11), (1.19) пространство вырожденных решений содержит решения эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

и, следовательно, бесконечномерно. В частности, для этой системы определитель матрицы (1.24) равен нулю.

Частным случаем вырожденных решений служат многочлены первой степени $u(x, y) = \xi_0 + x\xi_1 + y\xi_2$, коэффициенты $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^l$ которых удовлетворяют системе

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 = 0, \quad i = 1, 2.$$

Многочлены этого вида назовем тривиальными решениями системы (1.1).

Как установлено в [13,] (теорема 5)], для усиленно эллиптической системы условие (1.24) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\xi = a_{11}^{-1}a_{12}a_{22}^{-1}a_{21}\xi = a_{22}^{-1}a_{21}a_{11}^{-1}a_{12}\xi \Rightarrow \xi = 0, \quad (1.25)$$

и при выполнении этого условия любое ее вырожденное решение является тривиальным. Кроме того, условие (1.24) заведомо выполнено в случае, когда ранг матрицы (1.20) не меньше $2l - 1$.

Как было отмечено выше, система Ламе (1.11), (1.22) усиленно эллиптическая. Нетрудно убедиться, что она также обладает и свойством (1.25). В самом деле, матрица $\beta = \alpha^* = (\det \alpha)\alpha^{-1}$, присоединенная к матрице (1.23), также положительно определена. В явном виде

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_4 & \beta_6 \\ \beta_4 & \beta_2 & \beta_5 \\ \beta_6 & \beta_5 & \beta_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \beta_1 = \alpha_2\alpha_3 - \alpha_5^2 & \beta_2 = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_6^2, \\ \beta_3 = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 & \beta_4 = \alpha_5\alpha_6 - \alpha_3\alpha_4, \\ \beta_5 = \alpha_4\alpha_6 - \alpha_1\alpha_5, & \beta_6 = \alpha_4\alpha_5 - \alpha_2\alpha_6. \end{matrix}$$

В терминах элементов этой матрицы

$$a_{11}^{-1}a_{12} = \frac{1}{\beta_2} \begin{pmatrix} 0 & -\beta_4 \\ \beta_2 & -\beta_6 \end{pmatrix}, \quad a_{22}^{-1}a_{21} = \frac{1}{\beta_1} \begin{pmatrix} \beta_6 & \beta_1 \\ -\beta_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому если $\xi \in \mathbb{R}^2$ удовлетворяет системе в левой части (1.25), то $\delta\xi_1 = \delta\xi_2 = 0$ с множителем $\delta = \beta_1\beta_2 - \beta_4^2$, который в силу положительной определенности матрицы β положителен.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим эллиптическую систему (1.11) в области D , ограниченной ляпуновским контуром Γ . Классический метод исследования задач Дирихле и Неймана для этой системы основан [2] на представлении ее общего решения через набор аналитических функций и последующим использованием интегралов типа Коши. К сожалению, наличие в этом представлении производных аналитических функций приводит к определенным затруднениям. С другой стороны, это представление существенно упрощается, если вместо аналитических функций использовать решения эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

которая при $J = i$ переходит в классическую систему Коши–Римана.

Для тёмпицевой матрицы J решения этой системы отвечают аналитическим функциям от гиперкомплексного аргумента, изученным в 1953 г. А. Дуглисом [14]. В общем случае они были подробно изучены в [15]. По этой причине решения системы (2.1) называем J -аналитическими, или функциями, аналитическими по Дуглису. Принятый термин мотивируется, тем, что для функций класса C^1 система (2.1) равносильна существованию в каждой точке z обобщенной производной

$$\phi'(z) = \lim_{t \rightarrow z} (t - z)_J^{-1} [\phi(t) - \phi(z)],$$

которая совпадает с частной производной по x . Здесь и ниже с комплексным числом $z = x + iy$ связывается матрица $z_J = x + yJ$, где $x = x1$ означает скалярную матрицу. Аналогичный смысл имеет и матричный дифференциал $dz_J = dx + Jdy$ в криволинейных интегралах.

Напомним, что J представляет собой жорданову матрицу $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_n)$ с верхне-треугольными клетками Жордана J_i . Если эта матрица имеет единственное собственное значение ν , то существует обратимое преобразование $\phi = E\psi$, переводящее аналитические l -вектор-функции ψ комплексной переменной $x + \nu y$ в J -аналитические вектор-функции по формуле

$$\phi(x + iy) = \sum_{k \geq 0} \frac{y^k}{k!} (J - \nu)^k \psi^{(k)}(x + \nu y). \quad (2.2)$$

Здесь учтено, что $(J - \nu)^l = 0$ и суммирование фактически ведется по $0 \leq k \leq l - 1$. Обратное преобразование дается аналогичной формулой

$$\psi(x + \nu y) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-y)^k}{k!} (J - \nu)^k \phi^{(k)}(x + iy), \quad \phi^{(k)} = \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}.$$

В общем случае в соответствии с блочно-диагональной структурой матрицы J преобразование E определяется поблочно.

Отметим, что если роль ψ играет скалярная функция $f(x + \nu y)$, то формулу (2.2) можно рассматривать как значение $f(z_J)$ аналитической функции f от матрицы z_J или, что равносильно, как значение $h(J)$ аналитической функции $h(\zeta) = f(x + \zeta y)$ от матрицы J . В этом случае матрица-функция $\phi(z) = f(z_J)$ коммутирует с J и удовлетворяет системе (2.1). В частности, ее столбцы являются J -аналитическими вектор-функциями.

Связь J -аналитических функций с решениями системы (1.11) описывается следующим образом [6]. В обозначениях (1.16) общее решение $u(z)$ системы (1.11) в односвязной области представимо в виде

$$u = \text{Re}b\phi, \quad (2.3)$$

где J -аналитическая функция ϕ определяется по u с точностью до постоянного слагаемого однозначно. Более точно, справедливо равенство

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2 \left(b^0 \frac{\partial u}{\partial x} + b^1 \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \begin{pmatrix} b^0 & b^1 \\ \bar{b}^0 & \bar{b}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \bar{b}J \end{pmatrix}^{-1}.$$

При этом для функции v , сопряженной к решению u , имеет место выражение

$$v = \text{Re}c\phi + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l, \tag{2.4}$$

с матрицей c , фигурирующей в (1.24).

Существуют и другие теоретико-функциональные подходы (см., например, [16, 17]) к исследованию системы (1.11).

Подстановка преобразования (2.2) в (2.3) приводит к известному представлению А. В. Бицадзе [2] общего представления решений системы (1.11) через аналитические функции. С другой стороны, представление (2.3) существенно проще, и, кроме того, для функций, аналитических по Дуглису, справедливы все основные результаты классической теории аналитических функций, основанные на интеграле Коши [15].

Именно, если функция ϕ аналитична по Дуглису в области D , то она бесконечно дифференцируема в этой области и в окрестности каждой точки $z_0 \in D$ раскладывается в ряд Тейлора

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)_J^k \frac{\phi^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad \phi^{(k)} = \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}.$$

Если область D ограничена гладким контуром и $\phi \in C(\bar{D})$, то, как и в классической теории, имеют место теорема и формула Коши

$$\int_{\Gamma} dt_J \phi^+(t) = 0; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (t - z)_J^{-1} dt_J \phi^+(t) = \begin{cases} \phi(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \bar{D}, \end{cases} \tag{2.5}$$

где контур Γ ориентирован положительно по отношению к области D .

Если область D многосвязна, то функция ϕ многозначна и при обходе связанных компонент границы допускает, вообще говоря, ненулевые приращения, хотя ее производная ϕ' однозначна. Чтобы оставаться в классе однозначных функций, необходимо выделить конечномерное подпространство решений системы (1.11), приводящих к многозначным сопряженным функциям.

Теорема 2.1. Пусть область D ограничена гладким контуром Γ , состоящим из m компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ и ориентированным положительно по отношению к D .

Тогда существуют такие $l \times l$ -матрицы-функции $u_1, \dots, u_{m-1} \in C^\infty(\bar{D})$, столбцы которых являются решениями системы (1.11), что любое ее решение $u \in C^{1,\mu}(\bar{D})$ представимо в виде

$$u = u_1 \xi_1 + \dots + u_{m-1} \xi_{m-1} + \text{Re}(b\phi), \quad \xi_j \in \mathbb{R}^l, \tag{2.6}$$

где функция $\phi \in C^{1,\mu}(\bar{D})$ однозначна и J -аналитична в области D , так что

$$\frac{\partial u^+}{\partial v} = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial u_j^+}{\partial v} \xi_j + [\text{Re}(c\phi)]'. \tag{2.7}$$

При этом $u = 0$ в данном представлении влечет $\xi_1 = \dots = \xi_{m-1} = 0$ и $\phi = \eta \in \mathbb{C}^l$.

Доказательство. Пусть для определенности контур Γ_m является внешним, т.е. охватывает все остальные компоненты (которые называем внутренними контурами). В силу замкнутости формы $dv = v_x dx + v_y dy$ имеем равенство

$$\int_{\Gamma} dv = 0,$$

поэтому функция v однозначна тогда и только тогда, когда

$$\int_{\Gamma_j} dv = 0, \quad 1 \leq j \leq m - 1. \tag{2.9}$$

С другой стороны, из первого условия (1.16), очевидного равенства

$$\begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \bar{b}J \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

и формул (2.3), (2.4) следует, что функция однозначна тогда и только тогда, когда этим свойством обладает v .

Поэтому с каждой внутренней компонентой Γ_j достаточно построить такую 2×2 -матрицу-функцию $u_j \in C^\infty(D)$, столбцы которых являются решениями системы (1.1), что сопряженные к ним многозначные матрицы v_j удовлетворяют условию

$$\int_{\Gamma_i} dv_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, 1 \leq i, j \leq m-1. \end{cases} \quad (2.10)$$

Пусть точка $z_{j'}$ лежит внутри Γ_j , $1 \leq j \leq m-1$. Следуя [15], рассмотрим многозначную матрицу функцию $\ln(z - z_{j'})_J$, которая понимается как значение аналитической функции $\ln(z - z_{j'})_\zeta$ комплексной переменной ζ в верхней полуплоскости $\text{Im}\zeta > 0$ от матрицы J . Как отмечено выше, ее столбцы которой являются J -аналитическими функциями. При обходе точки $z_{j'}$ против часовой стрелки матрица-функция $\ln(z - z_{j'})_J$ получает приращение, равное скалярной матрице $2\pi i$. В силу обратимости матрицы (2.9) существует единственный вектор $\eta_j \in \mathbb{C}^2$, для которого

$$\text{Re}\left[b \frac{\eta_j}{2\pi i}\right] = 0, \quad \text{Re}\left[c \frac{\eta_j}{2\pi i}\right] = 1.$$

Поэтому матрица-функция

$$v_j(z) = \text{Re}\left[c \frac{\eta_j}{2\pi i} \ln(z - z_{j'})_J\right],$$

сопряженная к

$$u_j(z) = \text{Re}\left[b \frac{\eta_j}{2\pi i} \ln(z - z_{j'})_J\right],$$

будет удовлетворять условиям (2.10).

Как и в случае классических аналитических функций, можем ввести обобщенный интеграл типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (t - z)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad z \notin \Gamma, \quad (2.11)$$

определяющий J -аналитическую функцию $\phi = I\varphi$, и соответствующий сингулярный интеграл Коши

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} (t - t_0)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \quad (2.12)$$

который понимается в смысле главного значения. Как показано в [18], интеграл типа Коши как линейный оператор I ограничен в пространстве Гельдера $C^\mu(\Gamma) \rightarrow C^\mu(D)$ и справедлива формула Сохоцкого–Племеля

$$2\phi^\pm = \pm\varphi + K\varphi \quad (2.13)$$

для граничных значений функции $\phi = I\varphi$. Если дополнительно выполнено условие гладкости $\Gamma \in C^{1,\nu}$ контура Γ , то этот оператор ограничен и $C^{1,\mu}(\Gamma) \rightarrow C^{1,\mu}(D)$, $0 < \mu < \nu$. В частности, отсюда следует ограниченность сингулярного оператора K в пространствах $C^\mu(\Gamma)$ и $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Отметим, что в $C^{1,\mu}$ -случае существенно используется [18] формула дифференцирования интегралов (2.5), (2.6).

Обсудим еще связь оператора K с классическим сингулярным оператором Коши S , который на ориентируемом составном контуре $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_m$ действует вдоль его компонент Γ_j по формуле

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j} \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma_j, 1 \leq j \leq m. \quad (2.14)$$

Лемма 2.1. Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$, и оператор \bar{S} действует по формуле $\bar{S}\varphi = \overline{S\bar{\varphi}}$, где черта справа означает комплексное сопряжение.

Тогда каждый из операторов $K - S$, $\bar{S} + S$ компактен в пространствах $C^\mu(\Gamma)$ и $C^{1,\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$.

Хорошо известна теорема Н. И. Мусхелишвили [19] о представлении аналитических функций интегралами типа Коши с вещественной плотностью. Аналог этой теоремы справедлив [20] и для J -аналитических функций. Его удобно объединить вместе с теоремой 2.1.

Теорема 2.2. Пусть область D ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, состоящим из m компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, последняя из которых является внешним контуром.

Тогда любое решение $u \in C^{1,\mu}(\bar{D})$ системы (1.11) единственным образом представимо в виде

$$u = u_1 \xi_1 + \dots + u_m \xi_m + \operatorname{Re}(bI\varphi), \quad \xi_j \in \mathbb{R}^l, \tag{2.15}$$

где $u_m = \operatorname{Im}b$, матрицы-функции $u_1, \dots, u_{m-1} \in C^\infty(\bar{D})$ фигурируют в теореме 2.2 и вещественная l -вектор-функция $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t = 0, 1 \leq j \leq m-1, \quad \int_{\Gamma_m} [(\operatorname{Re}bJ)\varphi + (\operatorname{Im}bJ)\xi_m] d_1 t = 0. \tag{2.16}$$

Доказательство. Аналог теоремы Н. И. Мусхелишвили, о котором шла речь выше, формулируется следующим образом [20]. Любая J -аналитическая в области D функция $\phi \in C^{1,\mu}(\bar{D})$ единственным образом представима в виде $\phi = I\varphi - i\xi$ с некоторыми $\xi \in \mathbb{R}^l$ и вещественной l -вектор-функцией $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$, удовлетворяющей первым $m-1$ условиям (2.16). При этом $\phi \in C^l$ влечет

$$\varphi|_{\Gamma_m} = \xi' \in \mathbb{R}^l, \quad I\varphi = \xi'.$$

Совместно с теоремой 2.1 отсюда следует представление (2.15) с $\xi_m = \xi$, причем $u = 0$ влечет $\operatorname{Re}(I\varphi - i\xi) = 0$. Но тогда имеем равенства (2.17), так что с учетом последнего условия (2.16) получим

$$\operatorname{Re}[b(\xi' - i\xi)] = 0, \quad \int_{\Gamma_m} \operatorname{Re}[bJ(\xi' - i\xi)] d_1 t = 0. \tag{2.17}$$

Таким образом, $\operatorname{Re}[b(\xi' - i\xi)] = \operatorname{Re}[bJ(\xi' - i\xi)] = 0$ и на основании (1.16) отсюда $\xi = \xi' = 0$.

Для неоднородной системы (1.1) можно построить фундаментальную матрицу решений, позволяющую свести дело к однородной системе (1.11). В случае системы Ламе с коэффициентами (1.22) подобная матрица была описана в [21]. Аналогичные построения можно провести и в общем случае. Несколько отступая от (1.18), введем матричный многочлен

$$\sigma(z) = y^2 a_{11} - xy(a_{12} + a_{21}) + x^2 a_{22}, \quad z = x + iy,$$

и положим

$$e_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma^{-1}(z) d_1 z, \tag{2.18}$$

$$e_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma^{-1}(z) [xy(a_{11} - a_{22}) - y^2(a_{12} + a_{21})] d_1 z,$$

где \mathbb{T} означает единичную окружность и $d_1 z$ есть элемент длины дуги.

Лемма 2.2. Матрица-функция

$$h_0(\theta) = \sigma^{-1}(e^{i\theta}) \left[\cos\theta \sin\theta (a_{11} - a_{22}) e_1 + \sin^2\theta (a_{12} + a_{21}) e_1 + a_{22} e_2 a_{22}^{-1} \right] \tag{2.19}$$

допускает π -периодическую первообразную $h(\theta)$.

Доказательство. В обозначениях (2.18) необходимо показать, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_0(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_0(\theta) d\theta = (e_2 + e_1 a_{33}) e_1 + e_1 a_{22} e_2 a_{22}^{-1} = 0, \tag{2.20}$$

где для краткости положено $a_{33} = a_{12} + a_{21}$. С этой целью рассмотрим блочную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_{22}^{-1} a_{11} & -a_{22}^{-1} a_{33} \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Соотношение

$$(\zeta - A) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \zeta + a_{22}^{-1}a_{33} & a_{22}^{-1}a_{11} + \zeta^2 + \zeta a_{22}^{-1}a_{33} \end{pmatrix}$$

показывает, что собственные значения матрицы A совпадают с корнями характеристического многочлена (1.2) и, в частности, не лежат на вещественной оси. Введем матрицу

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (x + yA)^{-1} (-y + xA) d_1z = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (x + yA)^{-1} (dx + A dy), \quad (2.22)$$

где во втором интеграле окружность ориентирована против часовой стрелки. Аналогично [22] убеждаемся, что правую часть этого равенства можно рассматривать как значение $h(A)$ аналитической вне вещественной прямой функции

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{dx + \zeta dy}{x + \zeta y}$$

от матрицы A . Поскольку $h(\zeta) = \pm i$ в полуплоскости $\pm \text{Im} \zeta > 0$, то $[\chi(A)]^2 = \chi^2(A) = -1$. Таким образом, матрица E обратима и

$$E^2 = -1. \quad (2.23)$$

Прямая проверка показывает, что

$$(x + yA)^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xa_{22} - ya_{33} & -y \\ ya_{11} & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (x + yA)^{-1} (-y + xA) &= \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} xa_{22} - ya_{33} & -y \\ ya_{11} & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y & x \\ -xa_{11} & -ya_{22} - xa_{33} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma^{-1}(z) & 0 \\ 0 & \sigma^{-1}(z) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xy(a_{11} - a_{22}) + y^2 a_{33} & (x^2 + y^2) a_{22} \\ -(x^2 + y^2) a_{11} & xy(a_{11} - a_{22}) - x^2 a_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому в блочном 2×2 -виде матрица E определяется равенством

$$E = \begin{pmatrix} e_2 & e_1 \\ -e_1 a_{11} & e_2 \end{pmatrix},$$

где в дополнение к (2.18) положено

$$e_{2'} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma^{-1}(z) [xy(a_{11} - a_{22}) + y^2 a_{33}] d_1z = e_2 + e_1 a_{33}.$$

С учетом (2.23) отсюда $(E^2)_{12} = (e_2 + e_1 a_{33}) e_1 a_{22} + e_1 a_{22} e_1 = 0$, что доказывает (2.25).

В обозначениях леммы 2.2 положим

$$\omega(z) = (\ln|z|) e_1 + h(\arg z). \quad (2.25)$$

Теорема 2.3. Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$.

Тогда оператор

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_D \omega(\zeta - z) f(\zeta) d_2\zeta, \quad z \in D,$$

ограничен $C^\mu(\bar{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\bar{D})$, $0 < \mu < \nu$, и служит правым обратным к оператору L в (1.11), т.е. функция $u = Tf$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ в области D .

Теорема означает, в частности, что с точностью до постоянного множителя ω представляет собой фундаментальную матрицу решений системы (1.1).

Доказательство. Исходя из матрицы (2.21), удобно с каждым комплексным числом $z = x + iy$ связать матрицу $z_A = xI + yA$, которая при $z \neq 0$ обратима. Рассмотрим интеграл

$$U(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_D (\zeta - z)_A^{-1} \varphi(\zeta) d_2\zeta, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.27}$$

с векторной плотностью $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C^\mu(\bar{D})$. Как установлено в [18] (см. лемму 3.5.2), эта функция непрерывно дифференцируема в области D и ее производные вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \alpha_1 \varphi(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} (\zeta - z)_A^{-2} \varphi(\zeta) d_2\zeta, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \alpha_2 \varphi(z) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} A (\zeta - z)_A^{-2} \varphi(\zeta) d_2\zeta, \end{aligned}$$

с матричными коэффициентами

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} x (x + yA)^{-1} d_1z, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} y (x + yA)^{-1} d_1z,$$

и двумерными сингулярными интегралами.

Таким образом, функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} = -E\varphi$$

с матрицей $E = -\alpha_2 + \alpha_1 A$, фигурирующей в (2.22).

Выберем теперь плотность $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ интеграла (2.27) в форме

$$\varphi = E\tilde{\varphi}; \quad \tilde{\varphi} = (0, a_{22}^{-1}f). \tag{2.28}$$

Тогда с учетом (2.23)

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A \frac{\partial U}{\partial x} = \tilde{\varphi}.$$

Полагая $U = (u_1, u_2)$, в обозначениях (2.21) это уравнение можем записать в форме системы

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \quad a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial y} + a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{33} \frac{\partial u_2}{\partial x} = f. \tag{2.29}$$

В силу (2.22), (2.28) вектор $\varphi = (e_1 f, e_2 a_{22}^{-1} f)$. Следовательно, вектор U имеет своими компонентами

$$u_k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left\{ \left[(\zeta - z)_A^{-1} \right]_{k1} e_1 + \left[(\zeta - z)_A^{-1} \right]_{k2} e_2 a_{22}^{-1} \right\} f(\zeta) d_2\zeta, \quad k = 1, 2.$$

Расписывая элементы матрицы (2.24), в соответствии с (2.18) отсюда приходим к выражениям

$$u_k(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \omega_k(\zeta - z) f(\zeta) d_2\zeta, \quad k = 1, 2,$$

с ядрами

$$\omega_1(z) = \sigma^{-1}(z) \left[x a_{22} e_1 - y (a_{33} e_1 + a_{22} e_2 a_{22}^{-1}) \right], \quad \omega_2(z) = \sigma^{-1}(z) (x a_{22} e_2 a_{22}^{-1} + y a_{11} e_1).$$

Первое равенство (2.30) показывает, что форма $u_1 dx + u_2 dy$ замкнута в области D и, следовательно, в односвязной подобласти $D_0 \subseteq D$ существует функция $u \in C^2(D - 0)$, для которой

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2.$$

В частности, второе равенство (2.29) означает, что u является решением уравнения $Lu = 0$ в области D_0 .

Таким образом, для любых точек $z_0, z_1 \in D_0$ разность $u(z_1) - u(z_0)$ можем записать в форме криволинейного интеграла

$$\int_{z_0}^{z_1} u_1(z) dx + u_2(z) dy = -\frac{1}{2\pi} \int_D f(\zeta) d_2 \zeta \int_{z_0}^{z_1} \omega_1(\zeta - z) dx + \omega_2(\zeta - z) dy.$$

В полярных координатах $z = re^{i\theta}$ имеем:

$$\omega_1 dx + \omega_2 dy = (x\omega_1 + y\omega_2) \frac{dr}{r} + (-y\omega_1 + x\omega_2) d\theta.$$

Прямая проверка показывает, что

$$x\omega_1(z) + y\omega_2(z) = e_1, \quad -y\omega_1(z) + x\omega_2(z) = h_0(\theta)$$

с π -периодической функцией $h_0(\theta)$ из (2.19). Поэтому форма $\omega_1 dx + \omega_2 dy$ точна и в обозначениях (2.25) совпадает с $d\omega$. Следовательно,

$$u(z_1) - u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_D f(\zeta) [\omega(\zeta - z_1) - \omega(\zeta - z_0)] d_2 \zeta,$$

так что функция u совпадает с Tf и служит решением уравнения $Lu = f$ во всей области D .

Таким образом,

$$\frac{\partial(Tf)}{\partial x} = Tf, \quad \frac{\partial(Tf)}{\partial y} = T_2 f$$

с операторами

$$(T_j f)(z) = \int_D \omega_j(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in D.$$

К операторам T_j можно применить теорему 3.5.2 из [18], согласно которой при $0 < \mu < \nu$ они ограничены $C^\mu(\overline{D}) \rightarrow C^{1,\mu}(\overline{D})$. Поэтому оператор T ограничен $C^\mu(\overline{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\overline{D})$, что завершает доказательство теоремы.

3. ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ СМЕШАННО-КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Обратимся к смешанно-контактной задаче для общего уравнения (1.1) в составной области $D = D^1 \cup \dots \cup D^n$, решение которой в обозначениях (1.11) ищется в классе

$$C_L^{1,\mu}(\widehat{D}) = \left\{ u \in C^{1,\mu}(\widehat{D}) \cap C^2(D), \quad Lu \in C^\mu(\widehat{D}) \right\}. \quad (3.1)$$

Соответственно, правая часть уравнения (1.1) и граничные данные задачи берутся в классах $f \in C^\mu(\widehat{D})$ и $g_1^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma^0)$, $g_1^+ \in C^{1,\mu}(\Gamma^+)$, $h^0 \in C^\mu(\Gamma^0)$, $h^+ \in C^\mu(\Gamma^+)$.

С помощью теорем 2.2, 2.3 смешанно-контактную задачу редуцируем к эквивалентной системе интегральных уравнений, фредгольмовых в области и сингулярных на ее границе. При определенных условиях эта система принадлежит к так называемому нормальному типу, что приводит к фредгольмовости смешанно-контактной задачи. Отметим, что применительно к уравнению (1.11) этот подход (в рамках общей схемы для однородных эллиптических уравнений и систем произвольного порядка с постоянными и только старшими коэффициентами) был реализован в [23].

Теорема 3.1. Пусть в дополнение к (1.4) выполнены условия

$$\det d^0 \neq 0 \Rightarrow \Gamma^0, \quad \det d^+ \neq 0 \Rightarrow \Gamma^+, \quad (3.2)$$

где кусочно-постоянные матрицы $b, c \in \mathbf{R}^{l \times l}(\widehat{D})$ фигурируют в (2.3), (2.4) и

$$d^0 = \begin{pmatrix} b^+ & \bar{b}^- \\ c^+ & \bar{c}^- \end{pmatrix}, \quad d^+ = \begin{cases} b^+ \Rightarrow \Gamma_{(1)}^+, \\ c^+ \Rightarrow \Gamma_{(2)}^+. \end{cases}$$

Тогда смешанно-контактная задача (1.7), (1.8) для уравнения (1.1) фредгольмова в классе (3.1) и ее индекс равен нулю.

Доказательство. Удобно сужения кусочно-постоянных функций на компоненту D^s снабжать верхним индексом s . В соответствии с этим теорему 2.3 можем распространить на оператор

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{D^s} \omega^s(\zeta - z) f(\zeta) d_2 \zeta, \quad z \in D^s, \quad s = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

который ограничен $C^\mu(\widehat{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\widehat{D})$, $0 < \mu < \nu$, и служит правым обратным к оператору L в (1.11), т.е. функция $u = Tf$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ в составной области D . В частности, относительно нормы

$$|u| = |u|_{C^{1,\mu}} + |Lu|_{C^\mu}$$

пространство $C_L^{1,\mu}(\widehat{D})$ банахово. Из этих же соображений общее решение $u \in C_L^{1,\mu}$ уравнения $Lu = \psi$ можно представить в виде

$$u = T\psi + u^0 \quad (3.4)$$

с общим решением $u^0 \in C^{1,\mu}(\widehat{D})$ однородного уравнения $Lu^0 = 0$.

Рассмотрим банахово пространство

$$C^{1,\mu}(\partial\widehat{D}) = C^{1,\mu}(\partial D^1) \times \dots \times C^{1,\mu}(\partial D^n), \quad (3.5)$$

оно состоит из векторов $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$, компоненты φ^l которых являются l -вектор-функциями на контурах ∂D^s . В каждой области D^j операторы I^s и K^s определяются формулами (2.11) и (2.12) по отношению к J^s и контуру ∂D^s . В свою очередь, аналогично (3.3) они определяют операторы I и K на векторах $\varphi \in C^{1,\mu}(\partial\widehat{D})$. Таким образом, при $0 < \mu < \nu$ оператор I ограничен $C^{1,\mu}(\partial\widehat{D}) \rightarrow C^{1,\mu}(\widehat{D})$, а K ограничен в $C^{1,\mu}(\partial\widehat{D})$.

Чтобы описать граничные значения $(I\varphi)^\pm$ на Γ^0 и $(I\varphi)^+$ на Γ^+ , с каждым простым контуром $\Gamma_j^0, 1 \leq j \leq m^0$, свяжем две компоненты D_j^+ и D_j^- составной области D , которые граничат по этому контуру и лежат, соответственно, слева и справа от него. Аналогично пусть простая область D_j^+ граничит с компонентой Γ_j^+ контура Γ^+ . В этих обозначениях каждому элементу $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)$ пространства (3.5) поставим в соответствие тройку функций $\varphi_+ \in C^{1,\mu}(\Gamma^+)$ и $\varphi_\pm^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma^0)$ по правилу

$$\varphi_+ |_{\Gamma_j^+} = \varphi^s |_{\Gamma_j^+}, \partial D^s = D_j^+; \quad \varphi_\pm^0 |_{\Gamma_j^0} = \varphi^s |_{\Gamma_j^0}, D^s = D_j^\pm. \quad (3.6)$$

Очевидно, полученное отображение $\varphi \rightarrow (\varphi_+, \varphi_+^0, \varphi_-^0)$ осуществляет изоморфизм банаховых пространств $C^\mu(\partial\widehat{D}) \rightarrow C^\mu(\Gamma^+) \times C^\mu(\Gamma^0) \times C^\mu(\Gamma^0)$. Напомним еще, что S означает классический сингулярный оператор, действующий вдоль связанных компонент контуров ∂D^s .

Утверждается что для любого $\varphi \in C^{1,\mu}(\partial\widehat{D})$ справедливы формулы

$$2(I\varphi)^\pm |_{\Gamma^0} = \pm \varphi_\pm^0 + S\varphi_\pm^0 + (N_0\varphi)_\pm^0, \quad 2(I\varphi)^+ |_{\Gamma^+} = \varphi_+ + S\varphi_+ + (N_0\varphi)_+, \quad (3.7)$$

с некоторым оператором N_0 , компактным в пространстве $C^{1,\mu}(\partial\widehat{D})$.

Действительно, на основании формул Сохоцкого–Племеля (2.13) в принятых обозначениях можем записать

$$2(I\varphi)^\pm(t_0) = \pm \varphi_\pm^0(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j^0} (t - t_0)_{j^s} dt_{j^s} \varphi_\pm^0(t) + \dots, \quad t_0 \in \Gamma_j^0, D^s = D_j^\pm,$$

$$2(I\varphi)^+(t_0) = \varphi_+(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_j^+} (t - t_0)_{j^s} dt_{j^s} \varphi_+(t) + \dots, \quad t_0 \in \Gamma_j^+, D^s = D_j^+,$$

где многоточие означает сумму соответствующих интегралов по связным компонентам контура ∂D^s , отличным от Γ_j^0 в первом равенстве и Γ_j^+ во втором равенстве. Поскольку эти интегралы формируют очевидные компактные операторы, остается воспользоваться леммой 2.1.

Теорема 2.2, примененная к каждой компоненте D^s , позволяет сформулировать аналогичный результат по отношению ко всей составной области D . Заметим, что $m = m^+ + 2m^0$ совпадает с $m^1 + \dots + m^n$, где m^s означает число компонент контура ∂D^s . В соответствии с этим введем разбиение множества $\{1, 2, \dots, m\}$ на подмножества O^s из m^s элементов, $1 \leq s \leq n$, и обозначим далее $\Gamma_k, k \in O^s$, связанные

компоненты контура ∂D^s , причем внешнюю его компоненту Γ^s внешней компоненту этого контура, охватывающую все остальные, обозначим отдельно как Γ^s . В принятых обозначениях сумму $\sum u_k \xi_k$ в (2.15), отвечающую области D^s , запишем в виде $\sum_{O^s} u_k \xi_k$, полагая $u_k = \text{Im} b^s$ для $k \in O^s, \Gamma_k = \Gamma^s$.

При этом функции $u_k, k \in O^s$, продолжим нулем с D^s на D . Кроме того, положим

$$p_k = \text{Re}(b^s J^s), \quad q_k = \text{Im}(b^s J^s); \quad k \in O^s, \Gamma_k = \Gamma^s,$$

и $p_k = 1, q_k = 0$ для остальных значений k . Тогда согласно теореме 2.2, примененной к областям D^s , общее решение u^0 уравнения $Lu^0 = 0$ единственным образом представимо в том же виде (2.15):

$$u^0 = u_1 \xi_1 + \dots + u_m \xi_m + \text{Re}(bI\varphi), \quad \xi_s \in \mathbb{R}^l, \tag{3.8}$$

где вещественная l -вектор-функция $\varphi \in C^{1,\mu}(\partial \widehat{D})$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_k} [p_k \varphi(t) + q_k \xi_k] d_1 t = 0, \quad 1 \leq k \leq m. \tag{3.9}$$

Совместно с (3.4) эти формулы можем рассматривать как представление общего элемента u класса (3.2) через тройку (ψ, φ, ξ) , составленную из $\psi \in C^\mu(\widehat{D})$, $\varphi \in C^{1,\mu}(\partial \widehat{D})$ и $\xi \in (\mathbb{R}^l)^m$.

Подстановка (3.4), (3.8) в уравнение (1.1) дает соотношение

$$\psi + L^0 T\psi + L^0 \left[\text{Re}(bI\varphi) + \sum_{s=1}^m \mu_s \xi_s \right] = f. \tag{3.10}$$

Точно так же, подставляя это представление в краевые условия (1.7), получим

$$(T\psi)^+ + \text{Re}(bI\varphi)^+ + \sum_{s=1}^m \mu_s^+ \xi_s = g_1^+ = 0 \Gamma_{(1)}^+, \tag{3.11}$$

и аналогичное выражение

$$\frac{\partial(T\psi)^+}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v} \text{Re}(bI\varphi)^+ + \sum_{s=1}^m \frac{\partial \mu_s^+}{\partial v} \xi_s = h^+ = 0 \Gamma_{(2)}^+. \tag{3.12}$$

Аналогичным образом переписутся и контактные условия (1.8) на контуре Γ^0 :

$$\left[(T\psi)^+ - (T\psi)^- \right] + \text{Re} \left[(bI\varphi)^+ - (bI\varphi)^- \right] + \sum_{s=1}^m (u_s^+ - u_s^-) \xi_s = g_1^0, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[(T\psi)^+ - (T\psi)^- \right] + \text{Re} \frac{\partial}{\partial v} \left[(bI\varphi)^+ - (bI\varphi)^- \right] + \sum_{s=1}^m \frac{\partial}{\partial v} (u_s^+ - u_s^-) \xi_s = h^0. \tag{3.14}$$

Согласно (2.7) имеем равенство

$$\frac{\partial}{\partial v} \text{Re}(bI\varphi)^+ = \left[\text{Re}(cI\varphi)^+ \right]', \tag{3.15}$$

причем функция $\text{Re}(cI\varphi)^+$ однозначна на контуре. Другими словами, левая часть этого равенства допускает непрерывно дифференцируемую однозначную первообразную на составном контуре. В частности, из (3.12) следует, что

$$\int_{\Gamma_{2,j}^+} \frac{\partial}{\partial v} \left[(T\psi)^+ + \sum_{s=1}^m \mu_s^+ \xi_s \right] d_1 t = \int_{\Gamma_{2,j}^+} h^+(t) d_1 t, \quad 1 \leq j \leq m_{(2)}^+, \tag{3.16a}$$

где $\Gamma_{2,j}^+$ означают связные компоненты контура $\Gamma_{(2)}^+$.

Аналогичным образом из (3.14) следует, что

$$\int_{\Gamma_j^0} \frac{\partial}{\partial v} \left[(T\psi)^+ - (T\psi)^- + \sum_{s=1}^m (u_s^+ - u_s^-) \xi_s \right] d_1 t = \int_{\Gamma_j^0} h^0(t) d_1 t, \quad 1 \leq j \leq m^0. \tag{3.16b}$$

Эти равенства составляют дополнительные к (3.9) $m_{(2)}^+ + m^0$ условия ортогональности, которым должны удовлетворять ψ и ξ .

В общем случае не каждая функция φ , заданная и непрерывная на контуре Γ , допускает непрерывно дифференцируемую первообразную. Для существования такой первообразной необходимо и достаточно, чтобы все интегралы от φ на связных компонентах $\Gamma_j, 1 \leq j \leq m$, контура Γ были равны нулю. Очевидно, этим свойством обладает функция

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{s(\Gamma_j)} \int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t, \text{ на } \Gamma_j,$$

где $s(\Gamma_j)$ есть длина контура Γ_j . Обозначим $\varphi^{(-1)}$ первообразную функции $\tilde{\varphi}$, которая фиксируется условием

$$\int_{\Gamma_j} \varphi^{(-1)}(t) d_1 t = 0.$$

В результате получаем линейное отображение $C(\Gamma) \rightarrow C^1(\Gamma)$, для которого $[\varphi^{(-1)}]'$ отличается от φ кусочно-постоянным слагаемым.

Важно заметить, что если функция φ непрерывно дифференцируема на Γ и ее производная представима в виде суммы некоторого конечного числа функций $\psi_s \in C(\Gamma)$, то $\varphi = \sum_s \psi_s^{(-1)} + \eta$ с некоторым кусочно-постоянным слагаемым η . В соответствии с этим равенство (3.12) переписывается в следующем эквивалентном виде:

$$T_{(2)}^+ \psi + \operatorname{Re}(cI\varphi)^+ + \sum_{s=1}^m \mu_{(2)s}^+ \xi_s = g_2^+ + \eta_j \text{ на } \Gamma_{(2)j}^+, 1 \leq j \leq m_{(2)}^+, \tag{3.17}$$

где для краткости положено

$$T_{(2)}^+ \psi = \left[\frac{\partial(T\psi)^+}{\partial v} \right]^{(-1)}, \quad u_{(2)s}^+ = \left[\frac{\partial u_s^+}{\partial v} \right]^{(-1)}, \quad g_2^+ = \left[\frac{\partial h^+}{\partial v} \right]^{(-1)}.$$

Аналогично переписывается и соотношение (3.14) в виде

$$T^0 \psi + \operatorname{Re}[(cI\varphi)^+ - (cI\varphi)^-] + \sum_{s=1}^m \mu_s^0 \xi_s = g_2^0 + \eta_j^0 = 0 \text{ на } \Gamma_j^0, 1 \leq j \leq m^0, \tag{3.18}$$

где для краткости положено

$$T^0 \psi = \left[\frac{\partial}{\partial v} ((T\psi)^+ - (T\psi)^-) \right]^{(-1)}, \quad u_s^0 = \left[\frac{\partial}{\partial v} (u_s^+ - u_s^-) \right]^{(-1)}, \quad g_2^0 = \left[\frac{\partial h^0}{\partial v} \right]^{(-1)}.$$

Заметим, что оператор $T_{(2)}^+$ ограничен $C^\mu(\widehat{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\Gamma_{(2)}^+)$, а T^0 ограничен $C^\mu(\widehat{D}) \rightarrow C^{2,\mu}(\Gamma^0)$. Соответственно, функции $u_{(2)s}^+ \in C^{1,\mu}(\Gamma_{(2)}^+)$ и $u_s^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma^0)$.

Таким образом, рассматриваемая задача редуцирована к эквивалентной системе уравнений (3.10), (3.11), (3.13) и (3.17), (3.18) относительно набора

$$\begin{aligned} (\psi, \varphi) &\in X_1 \times X_2 = C^{1,\mu}(\Gamma^+) \times [C^{1,\mu}(\Gamma^0)]^2, \\ (\xi, \eta) &\in Y_1 \times Y_2 = (\mathbb{R}^l)^m \times (\mathbb{R}^l)^{m*}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

где для краткости $m^* = m_{(2)}^+ + m^0$. При этом должны выполняться дополнительные условия (3.9), (3.16).

Запишем указанную систему в кратком операторном виде

$$N_{11}\psi + N_{12}\varphi + P_{11}\xi = f, \quad N_{21}\psi + N_{22}\varphi + P_{21}\xi + P_{22}\eta = g, \tag{3.20}$$

где $g = (g^+, g^0)$ и $g^0 = (g_1^0, g_2^0)$. В силу (7.7) оператор N_{22} , рассматриваемый в пространстве X_2 , представим в виде

$$N_{22} = \operatorname{diag}(M^+, M^0) + N_0, \tag{3.21}$$

где оператор N_0 компактен, а операторы M^+ и M^0 действуют по правилу

$$\begin{aligned} 2M^+\varphi_+ &= \operatorname{Re}\left[d^+\left((1+S)\varphi_+\right)\right], \quad \varphi_+ \in X_1, \\ 2\left(M^0\varphi^0\right)_1 &= \operatorname{Re}\left[b^+\left((1+S)\varphi_+^0\right) + b^-\left((1-S)\varphi_-^0\right)\right], \\ 2\left(M^0\varphi^0\right)_2 &= \operatorname{Re}\left[c^+\left((1+S)\varphi_+^0\right) + c^-\left((1-S)\varphi_-^0\right)\right], \end{aligned}$$

где $\varphi^0 = (\varphi_+^0, \varphi_-^0) \in X_2$. Поскольку функция φ_-^0 вещественна, имеем очевидное соотношение

$$\operatorname{Re}\left[b^-\left((1-S)\varphi_-^0\right)\right] = \operatorname{Re}\left[\overline{b^-}\left((1-\bar{S})\varphi_-^0\right)\right]$$

и аналогичное соотношение справедливо по отношению к матрице c . На основании леммы 2.1 отсюда

$$2M^0\varphi^0 = \operatorname{Re}d^0\left(\varphi^0 + S\varphi^0\right) + 2K^0\varphi^0,$$

где оператор K^0 компактен в пространстве $\left[C^{1,\mu}\left(\Gamma^+\right)\right]^2$. В силу (3.2) к операторам M^+ и M^0 можем применить результаты классической теории [19] сингулярных интегральных уравнений, согласно которой эти операторы фредгольмовы и их индексы равны нулю. Поэтому с учетом (3.21) оператор N_{22} обладает этим же свойством.

Явные выражения операторов N_{11} , N_{12} и N_{21} не приводим, отметим только, что $N_{11} \sim 1$, $N_{12} \sim 0$, где запись $N_1 \sim N_2$ означает, что оператор $N_1 - N_2$ компактен. Таким образом,

$$N \sim \begin{pmatrix} 1 & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{pmatrix},$$

так что на основании общих свойств фредгольмовых операторов [24] отсюда заключаем, что оператор N фредгольмов и его индекс равен нулю.

Что касается конечномерных операторов P_{ij} , то в обозначениях (3.19) они действуют $P_{ij} : Y_j \rightarrow X_i$. Точно так же дополнительные условия (3.9), (3.16) можно записать в операторном виде

$$Q_{11}\varphi + Q_{12}\xi = 0, \quad Q_{21}\psi + Q_{22}\xi = \tilde{\eta}, \quad (3.22)$$

где $Q_{11} : X_2 \rightarrow Y_1, Q_{12} : Y_1 \rightarrow Y_1, Q_{21} : X_1 \rightarrow Y_2, Q_{22} : Y_1 \rightarrow Y_2$ и $\tilde{\eta} \in Y_2$ представляет собой значение некоторого линейного функционала от $h = (h^+, h^0)$. Поэтому совместно (3.20) и (3.22) представляют собой конечномерное расширение оператора N , действующего в $X = X_1 \times X_2$, до оператора N в пространстве $X \times Y$, $Y = Y_1 \times Y_2$. Поэтому операторы N и \tilde{N} фредгольмово эквивалентны и их индексы совпадают, что завершает доказательство теоремы 3.1.

Для некоторых усиленно эллиптических систем, т.е. эллиптических систем (1.11), удовлетворяющих (1.21), требование (3.2) теоремы всегда выполнено.

Лемма 3.1. Пусть система (1.11) усиленно-эллиптическая и удовлетворяет условию (1.25).

Тогда условие (3.2) теоремы 3.1 выполнено.

Доказательство достаточно провести для каждой компоненты контура Γ^0 , не ограничивая общности можно считать, что $b^\pm, c^\pm \in \mathbb{R}^{l \times l}$. Предположим противное, т.е. $\det d = 0$. Тогда найдется такой ненулевой вектор $\eta = (\eta^+, \eta^-) \in \mathbb{C}^{2l}$, что

$$b^+\eta^+ - \overline{b^-\eta^-} = 0, \quad c^+\eta^+ - \overline{c^-\eta^-} = 0.$$

В частности,

$$\operatorname{Re}\left(b^+ \frac{\eta^+}{t+i} - b^- \frac{\eta^-}{t-i}\right) = \operatorname{Re}\left(c^+ \frac{\eta^+}{t+i} - c^- \frac{\eta^-}{t-i}\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

Пусть D^+ и D^- означают, соответственно, верхнюю и нижнюю полуплоскости, рассмотрим в D^\pm эллиптическую систему (1.11) с коэффициентами $a_{ij} = a_{ij}^\pm$. Связь между матрицами b^\pm и c^\pm

осуществляется как в (1.16) и (1.24) по a_{ij}^\pm и J^\pm . По отношению к аналитической в $D = D^+ \cup D^-$ аналитической вектор-функции

$$\Psi(z) = \begin{cases} \eta^+(z+i)^{-1}, & z \in D^+, \\ \eta^-(z-i)^{-1}, & z \in D^-, \end{cases}$$

равенство (3.23) переходит в

$$\operatorname{Re}(b^+\Psi^+ - b^-\Psi^-)|_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}(c^+\Psi^0 - c^-\Psi^-)|_{\mathbb{R}} = 0. \tag{3.24}$$

Рассмотрим J^\pm -аналитические функции $\phi^\pm(x,y)$ в области D^\pm , связанные с ψ^\pm соотношением (2.2). В этом соотношении предполагается, что матрица J^\pm имеет единственное собственное значение $v = v^\pm$, $\operatorname{Im} v > 0$. В общем случае блочно-диагональной матрицы J^\pm это соотношение нужно понимать поблочно. Очевидно, для $\operatorname{Im} v > 0$ преобразование $x + iy \rightarrow x + vy$ переводит полуплоскость D^\pm на себя и оставляет ее граничные точки $x \in \mathbb{R}$ неподвижными. При этом $\phi^\pm(x) = \psi^\pm(x)$. Поэтому соотношение (3.7) справедливо и для ϕ^\pm . Но тогда для функций $u = \operatorname{Re} b\phi$, удовлетворяющих системе (1.11) в области D^\pm , и сопряженной к ней функции $v = \operatorname{Re} c\phi$ имеют место контактные соотношения

$$(u^+ - u^-)|_{\mathbb{R}} = (v^+ - v^-)|_{\mathbb{R}} = 0$$

на прямой \mathbb{R} .

Пользуясь формулой Грина, обычным образом выводим соотношение

$$\int_D \sum_{i,j=1}^2 \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}} \left[u^+ (v^+)' - u^- (v^-)' \right] ds,$$

интегралы в котором на основании (3.25) равны нулю. В силу (1.21) отсюда следует равенство нулю частных производных функции $u = \operatorname{Re} b\phi$. Но тогда J -аналитическая функция ϕ должна быть постоянной, что противоречит ее определению.

Отметим, что существуют эллиптические системы, для которых все три условия (3.2) нарушены. Например, для системы Бицадзе (1.11), (1.15) роль b и c играют матрицы

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm i & 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \mp i \end{pmatrix},$$

каждая из которых вырожденна. С другой стороны, если области D^\pm граничат по контуру Γ^0 , и в этих областях рассматриваются системы (1.15) с разными знаками, то $b^- = b^+$, так что 4×4 -матрица d^0 в (3.2) имеет две одинаковые первые строки и, следовательно, также является вырожденной.

4. СЛУЧАЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

До сих пор составная область D была конечной, т.е. лежала внутри некоторого круга. Пусть эта область бесконечна, т.е. содержит внешность некоторого круга. В этом случае решение смешанно-контактной задачи будем искать в соответствующих весовых классах Гёльдера со степенным поведением на бесконечности.

Введем весовое пространство Гёльдера в неограниченной области D с аналогичным поведением на бесконечности. Именно, исходя из весовой функции $\rho_\lambda(z) = (1 + |z|)^\lambda$ произвольного порядка $\lambda \in \mathbb{R}$, обозначим $C_\lambda^\mu(\widehat{D}, \infty)$ пространство всех функций $\phi \in C(\widehat{D})$, для которых конечна норма

$$|\phi| = \sup_{z \in D} |(\rho_{-\lambda}\phi)(z)| + \sup_{z_1 \neq z_2, z_j \in D} \frac{|(\rho_{\mu-\lambda}\phi)(z_1) - (\rho_{\mu-\lambda}\phi)(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu}.$$

Соответствующее пространство $C_\lambda^{1,\mu}(\widehat{D}, \infty)$ дифференцируемых определяется индуктивно по n и состоит из всех функций $\phi \in C^n(D)$, для которых

$$\phi \in C_\lambda^{n-1,\mu}(\widehat{D}, \infty), \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in C_{\lambda-1}^{n-1,\mu}(\widehat{D}, \infty).$$

Эти пространства банаховы и являются частным случаем более общих весовых пространств, подробно изученных в [18]. Полученное семейство $(C_{\lambda}^{n,\mu})$ монотонно убывает (в смысле вложения банаховых пространств) по параметру μ и возрастает по λ . При этом операция умножения как билинейное отображение ограничена $C_{\lambda_1}^{n,\mu} \times C_{\lambda_2}^{n,\mu} \rightarrow C_{\lambda_1+\lambda_2}^{n,\mu}$. При $\lambda = 0$ пространство $C_0^{n,\mu}$ является банаховой алгеброй по умножению. Важно отметить, что при любом $\varepsilon > 0$ вложение

$$C_{\lambda-\varepsilon}^{1,\mu}(\widehat{D}, \infty) \subseteq C_{\lambda}^{\mu}(\widehat{D}, \infty) \tag{4.1}$$

компактно.

Для бесконечной области D теоремы 2.1–2.3 сохраняют свою силу при некоторых изменениях. Аналог теоремы 2.3 формулируется следующим образом.

Теорема 4.1. Пусть область D бесконечна и ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$.

Тогда при $0 < \delta < 1$ оператор

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi} \int_D [\omega(\zeta - z) - \omega(\zeta)] f(\zeta) d_2\zeta, \quad z \in D, \tag{4.2}$$

ограничен $C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_{\delta}^{2,\mu}(\overline{D}, \infty)$, $0 < \mu < \nu$, и служит правым обратным к оператору L в (1.11), т.е. функция $u = Tf$ удовлетворяет уравнению $Lu = f$ в области D .

Доказательство требуется только для первого утверждения. Из выражения (2.25) функции ω видно, что при фиксированном z разность $\omega(\zeta - z) - \omega(\zeta) = O(|\zeta|^{-1})$ на бесконечности, так что для $f \in C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty)$ интеграл (4.2) имеет смысл. При этом частные производные даются формулами

$$\frac{\partial(Tf)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \int_D \omega_1(\zeta - z) f(\zeta) d_2\zeta, \quad \frac{\partial(Tf)}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \int_D \omega_2(\zeta - z) f(\zeta) d_2\zeta, \tag{4.3}$$

с нечетными однородными степени -1 ядрами

$$\omega_1(z) = -\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad \omega_2(z) = -\frac{\partial\omega}{\partial y}.$$

На основании теоремы 3.11.2 из [18] операторы T_j ограничены $C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_{\delta-1}^{\mu}(\overline{D}, \infty)$. Совместно с теоремой 2.10.1 из [18] отсюда заключаем, что оператор T ограничен $C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty) \rightarrow C_{\delta}^{\mu}(\overline{D}, \infty)$. В рассматриваемом случае эта теорема применима, поскольку для $F = \{\infty\}$ условие конуса в граничной точке $\tau = \infty$ очевидным образом выполнено.

Из теоремы следует, что любая функция $u \in C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty)$ единственным образом представима в виде (3.4), где $\psi \in C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty)$ и $u^0 \in C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty)$ является решением однородного уравнения $Lu = 0$. По отношению к этому классу аналогом теоремы 3.2 служит следующий результат.

Теорема 4.2. Пусть область D бесконечна и ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, состоящим из t компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, и $0 < \delta < 1, 0 < \mu < \nu$.

Тогда существуют такие $l \times l$ -матрицы-функции u_1, \dots, u_m из класса $C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty)$, столбцы которых удовлетворяют уравнению $Lu = 0$, что любое решение u этого уравнения в данном классе единственным образом представимо в виде

$$u = u_1 \xi_1 + \dots + u_m \xi_m + \xi_{m+1} + \text{Re}(bI\varphi), \quad \xi_j \in \mathbb{R}^l,$$

где вещественная l -вектор-функция $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{\Gamma_j} \varphi(t) d_1 t = 0, \quad 1 \leq j \leq m. \tag{4.4}$$

Доказательство основывается на соответствующем аналоге теоремы 3.1 для бесконечной области. Он состоит в том, что любое решение $u \in C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty)$ уравнения $Lu = 0$ единственным образом представимо в виде

$$u = u_1 \xi_1 + \dots + u_m \xi_m + \xi_{m+1} + \text{Re}(b\varphi), \quad \xi_j \in \mathbb{R}^l, \tag{4.5}$$

с некоторой J -аналитической функцией $\varphi \in C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D})$, которая в окрестности ∞ ведет себя как $O(|z|^{-1})$. Доказательство этого факта осуществляется совершенно аналогично теореме 3.1 с той разницей, что

ветвление многозначной сопряженной функции v к решению u системы (1.11) осуществляется вдоль всех компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$. Остается принять во внимание, что согласно [20] функция ϕ в (4.5) единственным образом представима в виде интеграла типа Коши $I\phi$ с вещественной плотностью $\phi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$, удовлетворяющей условиям (4.4).

Обратимся к смешанно-контактной задаче в составной бесконечной области D . Теорема 4.1 показывает, что ее решение естественно искать в классе

$$C_{L,\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty) = \left\{ u \in C_{\delta}^{1,\mu}(\overline{D}, \infty) \cap C^2(D), Lu \in C_{\delta-2}^{\mu}(\overline{D}, \infty) \right\}, \quad 0 < \delta < 1, \quad (4.6)$$

На основании теоремы 4.1 относительно соответствующей нормы это пространство банахово.

При этом условия (1.4) здесь заменяются на

$$\Gamma \in C^{1,\nu}; \quad a_1, a_2 \in C_{-1-\varepsilon}^{\mu}(\widehat{D}, \infty), a_0 \in C_{-2-\varepsilon}^{\mu}(\widehat{D}, \infty), \quad 0 < \mu < \nu < 1,$$

с некоторым малым $\varepsilon > 0$.

Теорема 4.3. Пусть составная область D бесконечна и в дополнение к (4.7) выполнены условия (3.2).

Тогда смешанно-контактная задача (1.7), (1.8) для уравнения (1.1) фредгольмова в классе (4.6) и ее индекс равен l .

Доказательство с некоторыми незначительными изменениями осуществляется по той же схеме, что и теорема 3.1. Одна из связных компонент D^1, \dots, D^n составной области D (пусть для определенности D^n) бесконечна, а остальные компоненты D^s конечны. Как и в случае конечной области, исходя из определения (4.2), теорема 4.1 распространяется на составную область. Применяя к конечным областям D^1, \dots, D^{n-1} теорему 3.2 и к бесконечной области D^n теорему 4.2, общее решение $u^0 \in C^{1,\mu}(\widehat{D}, \infty)$ уравнения (1.11) в составной области D представим в виде (3.8), (3.9), где m нужно заменить на $m+1$. Как и при доказательстве теоремы 3.1 подстановка представления (3.4), (3.8) в уравнение (1.1) дает соотношение (3.10).

Следует отметить, что аналогично случаю конечной области фигурирующий в этом соотношении оператор L^0T компактен в пространстве $C_{\delta-2}^{\mu}(\widehat{D}, \infty)$. В самом деле, его можно записать в виде

$$L^0T\psi = a_1T_1 + a_2T_2 + a_0T,$$

где интегральные операторы T_j определяются правой частью (4.3). Как отмечено при доказательстве теоремы 4.1, операторы T_j ограничены $C_{\delta-2}^{\mu} \rightarrow C_{\delta-1}^{\mu}$. Поскольку вложения (4.1) компактны, эти операторы T_j компактны $C_{\delta-2}^{\mu} \rightarrow C_{\delta-1+\varepsilon}^{\mu}$. С учетом (4.7) отсюда следует компактность операторов a_jT_j в пространстве $C_{\delta-2}^{\mu}$. Случай оператора a_0T рассматривается аналогично.

Дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 3.1 проходят без изменений и редуцируют задачу к эквивалентной системе операторных уравнений (3.20), (3.22) с той разницей, что здесь ξ принадлежит пространству $(\mathbb{R}^l)^{m+1}$, что дает значение l индекса этой системы.

Отметим в заключение случай, когда роль бесконечной области D играет дополнение к контуру Γ . В этом случае внешний контур Γ^+ отсутствует и Γ совпадает с Γ^0 . Соответственно имеем чисто контактную задачу с краевыми условиями (1.8), так что в (3.2) остается только первое условие. Это условие всегда выполнено для эллиптической системы с постоянными старшими коэффициентами. Однако, как показывает пример в конце разд. 3, это условие может быть нарушено для систем с кусочно-постоянными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В. О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными. // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3. № 6. С. 153–154.
2. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
3. Солдатов А. П. О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 5. С. 674–686.
4. Товмасын Н. Е. Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159. С. 995–997.

5. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991. 336 с.
6. Солдатов А. П. Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 6. С. 734–745.
7. Вишик М. И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сборник. 1951. Т. 29. N № 3. С. 615–676.
8. Солдатов А. П., Митин С. П. Об одном классе сильно эллиптических систем // Дифференц. ур-ния. 1997. Т. 33. № 8. С. 1118–1122.
9. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М.: Физматгиз, 1963.
10. Товмасын Н. Е. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Дифференц. ур-ния. 1966. Т. 1. С. 3–23.
11. Товмасын Н. Е. Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Дифференц. ур-ния. 1966. Т. 2. С. 163–171.
12. Солдатов А. П. Задача Неймана для эллиптических систем на плоскости // Современная математика. Фундаментальные направления, 2013. Т. 48. С. 120–133.
13. Soldatov A. P. On representation of solutions of second order elliptic systems on the plane, More progresses in analysis // Proceedings of the 5th International ISAAC Congress, Catania, Italy, 25–30 July 2005. Ed. H. Begehr and oth. World Scientific. 2009. V. 2. P. 1171–1184.
14. Douglis A. A. A function-theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables // Comm. Pure Appl. Math. 1953. V. 6. P. 259–289.
15. Soldatov A. P. Hyperanalytic functions // J. Math. Sciences. 2004. V. 17.
16. Gilbert R. P., Wendland W. L. Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1975. V. 73A. P. 317–371.
17. Hile G. N. Function theory for a class of elliptic systems in the plane // J. Diff. Eq. 1979. V. 32 (3). P. 369–387.
18. Солдатов А. П. Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63. С. 1–189.
19. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.: Наука, 1968.
20. Солдатов А. П. Интегральное представление функций, аналитических по Дуглису // Вестник СамГУ – Естественнонауч. серия. 2008. № 8/1 (67). С. 225–234.
21. Солдатов А. П. О фундаментальной матрице решений плоской анизотропной теории упругости // Дифференц. ур-ния. 2023. Т. 59. № 5. С. 635–641.
22. Отелбаев М., Солдатов А. П. Интегральные представления вектор-функций, основанные на параметрикс-е эллиптических систем первого порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 1. С. 90–99.
23. Солдатов А. П. Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР (сер. матем.). 1991. Т. 55. № 5. С. 1070–1100.
24. Пале Р. Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М.: Мир, 1970.

УДК 519.63

РЕАЛЬНАЯ ТОЧНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СХЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ В ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ¹⁾

© 2024 г. М. Д. Брагин^{1,2,*}

¹125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ РАН, Россия

²630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 15, ИГиЛ СО РАН, Россия

*e-mail: michael@bragin.cc

Поступила в редакцию 05.10.2022 г.

Переработанный вариант 04.08.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Рассматривается новая тестовая задача для одномерных уравнений газовой динамики. Начальные данные в этой задаче представляют собой периодическую гладкую волну. За конечное время в течении газа формируются ударные волны. Исследуется сеточная сходимость двух линейных схем третьего порядка аппроксимации: бикомпактной схемы и схемы Русанова. Демонстрируется, что в области влияния ударной волны обе схемы имеют лишь первый порядок интегральной сходимости. В то же время при расчете уравнений изоэнтропической газовой динамики выбранные схемы сходятся не менее чем со вторым порядком. Библ. 38. Фиг. 6.

Ключевые слова: гиперболические системы уравнений, ударные волны, схемы сквозного счета, порядок точности, комбинированные схемы.

DOI: 10.31857/S0044466924010118, **EDN:** ZIUENI

ВВЕДЕНИЕ

Математическая формализация многих физико-технических задач приводит к краевым задачам для уравнений в частных производных. Аналитические методы решения таких задач зачастую либо ограничены в своей применимости, либо вовсе неизвестны. В связи с этим широко востребованы численные схемы.

Одной из основных характеристик численной схемы является порядок сходимости, или порядок точности. Высокий порядок точности (второй и выше) позволяет добиться заданной погрешности искомого решения на менее подробной сетке, т.е. с меньшими затратами машинного времени и памяти (см. [1]). Это особенно актуально при решении многомерных нестационарных задач.

Другой важной характеристикой численной схемы является наличие или отсутствие свойства монотонности (см. [2]). В монотонной схеме исключены ложные осцилляции численного решения в окрестностях сильных разрывов точного решения. Осцилляции такого рода вредны не только тем, что, собственно, искажают физику моделируемого процесса, но и тем, что могут привести к потере устойчивости счета и его аварийному завершению.

В известной работе С. К. Годунова [3] была доказана следующая теорема: для линейного уравнения переноса не существует линейных монотонных схем с порядком аппроксимации выше первого. В монографии [4] была высказана любопытная трактовка этой теоремы: из трех свойств схемы для линейного уравнения переноса — высокого порядка аппроксимации, монотонности и линейности — одновременно иметь место могут только два.

Мы называем схему линейной, если аппроксимация в ней не зависит от самого численного решения. Это означает, что все операторы реконструкции (интерполяции) и все операторы численного дифференцирования (или интегрирования) в линейной схеме имеют постоянные шаблоны и постоянные коэффициенты (см. [5]). Это определение допускает, что линейная схема формально может быть нелинейной относительно искомого решения (численного). Однако такое возможно только в том случае, если схема записана для квазилинейной системы уравнений в частных производных. В случае линейной

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики, Соглашение с Минобрнауки РФ № 075-15-2022-283 (разд. 4), а также РФФИ (проект № 22-11-00060 (разд. 5))

системы так определенная линейная схема обязана быть линейной относительно искомого решения. В этом смысле наше определение линейной схемы является более общим.

Наиболее очевидным, если не единственным, способом получить монотонную схему высокого порядка точности является применение нелинейных аппроксимаций, зависящих от самого численного решения. За последние полвека было предложено множество методов их построения: ограничители наклонов/потоков (см. [6–8]), реконструкции ENO/WENO (см. [9–11]), численные фильтры (см. [12–14]), адаптивные искусственные вязкости (см. [15–17]) и т.д. В их основе лежит одна и та же идея: автоматически (в рамках подхода сквозного счета) выделить окрестности сильных разрывов решения и в этих окрестностях ввести регуляризующие поправки в аппроксимацию формально высокого порядка. Общепринятая гипотеза состоит в том, что порядок точности в областях гладкости точного решения должен оставаться высоким, так как коррекция аппроксимации проводится локально, в малых окрестностях сильных разрывов (где нет и не ожидается классической аппроксимации высокого порядка).

Эта гипотеза была опровергнута в работах [18–28]. На контрпримерах было показано, что все нелинейные монотонные схемы высокого порядка аппроксимации имеют в действительности не более чем первый порядок точности в областях влияния ударных волн. Это явление объясняется так. Невязка имеет высокий порядок по шагу сетки благодаря высокочастотным гармоникам численного решения. Но именно эти гармоники искажаются либо подавляются вблизи фронтов ударных волн (ради монотонности схемы), причем это происходит непрерывно, при каждом переходе со слоя на слой.

Чтобы решить данную проблему, в работах [29–32] был разработан принципиально новый класс схем, названных комбинированными. В общих чертах идея комбинированных схем из [29–31] сводится к следующему. Исходная начально-краевая задача решается целиком (во всей пространственно-временной расчетной области) с помощью линейной схемы высокого порядка аппроксимации, или базисной схемы. Решение базисной схемы используется для постановки внутренних начально-краевых задач в (подвижных) окрестностях ударных волн. Для решения этих внутренних задач применяется нелинейная монотонная схема, или внутренняя схема. В интересующий момент времени решение внутренней схемы используется, чтобы заменить (скорректировать) решение базисной схемы вблизи ударных волн. Поскольку эта процедура имеет характер постобработки, высокий порядок точности в областях влияния ударных волн должен сохраняться.

Теория комбинированных схем опирается на гипотезу, что линейные схемы высокого порядка аппроксимации (базисные схемы) могут иметь высокий порядок точности в областях влияния ударных волн. Результаты работ [22–27, 29–31] как будто бы свидетельствуют в пользу этого. Однако нельзя не отметить, что в перечисленных работах рассматривалась исключительно система уравнений мелкой воды.

Цель настоящей работы — показать, что эта гипотеза неверна в общем случае; что даже для линейных схем высокого порядка аппроксимации, вообще говоря, гарантирован не более чем первый порядок точности в областях влияния ударных волн. Для этого мы рассмотрим более сложную гиперболическую систему уравнений — систему уравнений газовой динамики. Данный негативный результат создает мотивацию для переосмысления понятия высокоточной схемы и теории комбинированных схем.

Работа структурирована следующим образом. В разд. 1 строится тестовая задача Коши для одномерных уравнений Эйлера. В разд. 2 приводятся численные схемы. В разд. 3 описываются критерии оценки их точности. В разд. 4, 5 обсуждаются результаты расчетов.

1. ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Рассмотрим одномерные уравнения Эйлера для совершенного газа:

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ v(E + p) \end{bmatrix}, \quad E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho v^2}{2}. \quad (1)$$

Здесь x — пространственная координата ($\partial_x \equiv \partial / \partial x$), t — время, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ — искомый вектор консервативных переменных, $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ — вектор потоков, ρ — плотность, v — скорость, p — давление, E — удельная полная энергия, $\gamma = \text{const}$ — показатель адиабаты. Выпишем собственные значения матрицы Якоби $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{u})$ (см. [5]):

$$\lambda_1 = v - c, \quad \lambda_2 = v, \quad \lambda_3 = v + c,$$

где $c = c(p, \rho) = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — адиабатическая скорость звука. Система (1) всегда имеет как минимум один инвариант Римана — удельную энтропию газа:

$$w_2 = s = s(p, \rho) = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const},$$

где $c_v = \text{const}$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме. Если течение является изоэнтропическим ($s = \text{const}$), то существуют еще два инварианта Римана:

$$w_{1,3} = v \mp \frac{2c}{\gamma - 1}.$$

(Верно и обратное: если эти функции — инварианты Римана, то течение изоэнтропическое.)

Поставим задачу Коши для уравнений (1). Начальные условия для нее мы зададим по аналогии с задачей Коши для уравнений мелкой воды, сформулированной в работе [23]:

$$\begin{aligned} w_1(x, 0) &= -b_0, \\ w_2(x, 0) &= s_0 = s(p_0, \rho_0), \\ w_3(x, 0) &= 2a_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + b_0, \end{aligned} \tag{2}$$

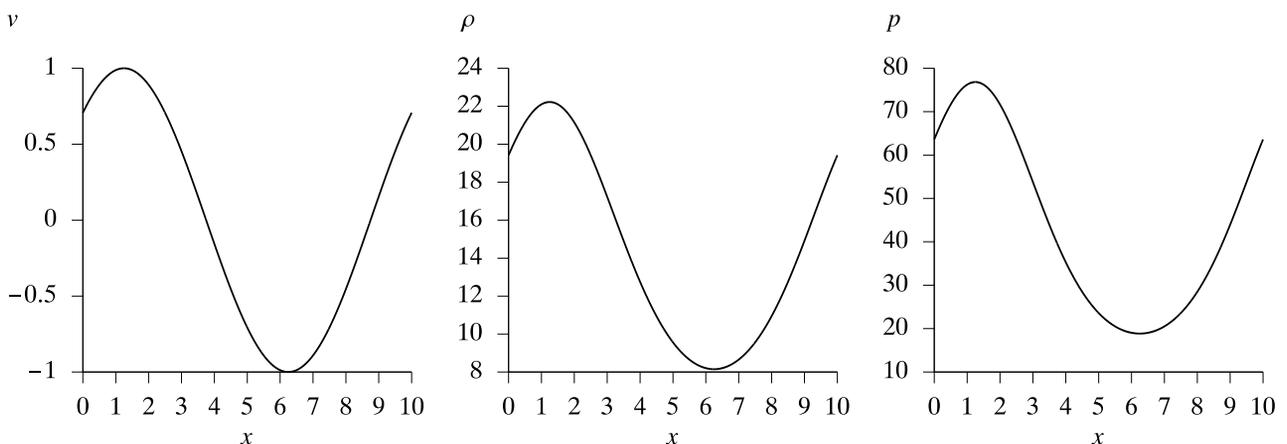
где $p_0, \rho_0, s_0, X, a_0, b_0$ — постоянные параметры. Отличие от начальных условий из [23] состоит в наличии инварианта $w_2 = s$, который полагается тождественно постоянным (в противном случае полный набор инвариантов Римана не существует глобально и формула (2) теряет смысл). Перепишем начальные условия (2) для инвариантов Римана в виде начальных условий для примитивных переменных (v, ρ, p):

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= a_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right), \\ \frac{\rho(x, 0)}{\rho_0} &= \left[\frac{\gamma - 1}{2c_0}(v(x, 0) + b_0)\right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}, \\ \frac{p(x, 0)}{p_0} &= \left(\frac{\rho(x, 0)}{\rho_0}\right)^\gamma, \end{aligned} \tag{3}$$

где $c_0 = \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$. Далее значения параметров будут браться следующими:

$$\gamma = 1.4, \quad p_0 = 1, \quad \rho_0 = 1, \quad s_0 = 1, \quad X = 10, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 10. \tag{4}$$

Начальные данные (3) при параметрах (4) изображены на фиг. 1.



Фиг. 1. Скорость, плотность и давление газа в начальный момент времени ($t = 0$).

Ясно, что начальные данные (3) представляют собой периодическое гладкое изоэнтропическое течение. С течением времени решение задачи (1), (3) ведет себя как опрокидывающаяся прогрессивная волна. Она движется слева направо (по оси x); те ее участки, где градиенты параметров газа положительны, растягиваются, а те участки, где эти градиенты отрицательны, напротив, сокращаются. Приблизительно в момент времени $t = 1.3$ происходит градиентная катастрофа и формируются периодические ударные волны, которые затем распространяются с числом Маха, колеблющимся в диапазоне от 1.2 до 1.4. Каждая из ударных волн имеет область влияния, которая примыкает к фронту слева и расширяется.

2. ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ

Рассмотрим две линейные численные схемы высокого порядка аппроксимации для уравнений (1): бикompактную схему (см. [33; 34]) и схему Русанова (см. [35; 36]). Как уже пояснялось во введении, линейными мы называем такие численные схемы, в которых аппроксимация не зависит от самого численного решения. В разд. 5 мы обсудим, является ли выбор именно этих двух схем принципиальным.

Бикompактная схема

Поскольку решение задачи Коши (1), (3) является периодическим, мы имеем право сузить вещественную ось до конечного интервала $(0, X)$ и поставить на его границах периодические условия.

Зададим шаги $h, \tau > 0$. На отрезке $[0, X]$ построим сетку

$$\begin{aligned}\omega_h &= \omega_h' \cup \omega_h'', \\ \omega_h' &= \{x_j = jh\}_{j=0}^N, \\ \omega_h'' &= \{x_{j+1/2} = (j+1/2)h\}_{j=0}^{N-1},\end{aligned}$$

а ось времени разобьем на слои $t_n = n\tau$ ($n = 0, 1, \dots$). Определим на ω_h сеточную функцию \mathbf{v}_i^n ($i = 0, 1/2, 1, \dots, N$), аппроксимирующую точное решение $\mathbf{u}(x_i, t_n)$ уравнений (1). Пользуясь глобальным расщеплением Лакса–Фридрихса, введем векторы потоков

$$\mathbf{f}^\pm(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{f}(\mathbf{u}) \pm C_2\mathbf{u}.$$

Параметр $C_2 > 0$ подбирается так, чтобы матрицы Якоби $\mathbf{A}^\pm(\mathbf{u}) = \partial_{\mathbf{u}}\mathbf{f}^\pm(\mathbf{u})$ были положительно/отрицательно определены на некотором релевантном множестве значений решения. Например, C_2 можно пересчитывать перед каждым переходом со слоя на слой по формуле

$$C_2 = (0.5 + \delta)\max_i(|v| + c)_i^n.$$

Число $\delta > 0$ — это постоянный коэффициент запаса.

Простейшая чисто неявная бикompактная схема для уравнений (1) имеет вид

$$\begin{cases} A_0^x \frac{\mathbf{v}_{j+1/2}^* - \mathbf{v}_{j+1/2}^n}{\tau} + \Lambda_1^x \mathbf{f}^+(\mathbf{v}_{j+1/2}^*) = \mathbf{0}, & \begin{cases} A_0^x \frac{\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1} - \mathbf{v}_{j+1/2}^*}{\tau} + \Lambda_1^x \mathbf{f}^-(\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1}) = \mathbf{0}, \\ \Lambda_1^x \frac{\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1} - \mathbf{v}_{j+1/2}^*}{\tau} + \Lambda_2^x \mathbf{f}^-(\mathbf{v}_{j+1/2}^{n+1}) = \mathbf{0}. \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

Сеточные операторы A_0^x , Λ_1^x , Λ_2^x определяются формулами

$$\begin{aligned}A_0^x \mathbf{v}_{j+1/2}^n &= \frac{\mathbf{v}_j^n + 4\mathbf{v}_{j+1/2}^n + \mathbf{v}_{j+1}^n}{6}, \\ \Lambda_1^x \mathbf{v}_{j+1/2}^n &= \frac{\mathbf{v}_{j+1}^n - \mathbf{v}_j^n}{h}, \\ \Lambda_2^x \mathbf{v}_{j+1/2}^n &= \frac{4(\mathbf{v}_j^n - 2\mathbf{v}_{j+1/2}^n + \mathbf{v}_{j+1}^n)}{h^2}.\end{aligned}$$

Индекс j в уравнениях (5) пробегает только целые значения от 0 до $N - 1$. Нетрудно видеть, что в схеме (5) для дискретизации по времени применяется неявный метод Эйлера. Погрешность аппроксимации схемы (5) (на гладких решениях) составляет $O(h^4 + \tau)$. Схема (5) устойчива при любых $h, \tau > 0$; в случае линейного уравнения переноса в отсутствие расщепления потоков она монотонна при числе Куранта $\kappa \geq 0.25$ (см. [33]).

Удобно поставить в соответствие частям схемы (5) операторы послойного перехода $S_1^\pm(\tau)$ и записать ее в краткой операторной форме:

$$\mathbf{v}^{n+1} = S_1^-(\tau)\mathbf{v}^* = S_1^-(\tau)S_1^+(\tau)\mathbf{v}^n. \tag{6}$$

Далее в разд. 4, 5 мы будем исследовать точность иной бикомпактной схемы, имеющей повышенный порядок аппроксимации по времени. Для дискретизации по времени в ней применяется трехстадийный L -устойчивый однократно диагонально-неявный метод Рунге–Кутты из [37]. Запишем эту бикомпактную схему в форме, аналогичной (6):

$$\mathbf{v}^{n+1} = S_3^-(\tau)\mathbf{v}^* = S_3^-(\tau)S_3^+(\tau)\mathbf{v}^n, \tag{7}$$

где оператор послойного перехода $S_3^-(\tau)$ является трехкратной композицией оператора $S_1^-(\cdot)$ (формулы для оператора $S_3^+(\tau)$ выписываются аналогично):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(1)} &= S_1^-(a\tau)\mathbf{v}^*, \\ \mathbf{v}^{(2)} &= S_1^-(a\tau)(D_{21}\mathbf{v}^* + D_{22}\mathbf{v}^{(1)}), \\ \mathbf{v}^{n+1} &= S_1^-(a\tau)(D_{31}\mathbf{v}^* + D_{32}\mathbf{v}^{(1)} + D_{33}\mathbf{v}^{(2)}). \end{aligned} \tag{8}$$

Приведем числовые значения коэффициентов a и D_{ij} в формулах (8) (с двойной точностью):

$$\begin{aligned} a &= 0.4358665215084579; \\ D_{21} &= 0.3528598198604800, \\ D_{22} &= 1 - D_{21}; \\ D_{31} &= -1.250979895056064, \\ D_{32} &= 3.729329662444573, \\ D_{33} &= 1 - D_{31} - D_{32}. \end{aligned}$$

Погрешность аппроксимации схемы (7) составляет $O(h^4 + \tau^3)$.

Обратим внимание на любопытную деталь: справедливость теоремы Годунова для схемы (7) обеспечивается отрицательностью коэффициента D_{31} . Если бы все коэффициенты D_{ij} были неотрицательны, то мы получили бы линейную монотонную схему с порядком аппроксимации выше первого (оператор послойного перехода $S_1^\pm(\tau)$ сохраняет монотонность при достаточно больших τ), а это невозможно. Это, кстати, объясняет, почему условие монотонности схемы (5) имеет вид $\tau \geq qh$, где q не зависит от h . Если бы такого ограничения снизу не было, то, положив $\tau = O(h^k)$, где $k > 1$, мы получили бы линейную монотонную схему с порядком аппроксимации выше первого, что, как уже говорилось, невозможно.

Схема Русанова

Уравнения этой схемы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{j+1/2}^{(1)} &= \frac{\mathbf{v}_j^n + \mathbf{v}_{j+1}^n}{2} - \frac{R}{3}(\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_j^n), \quad \mathbf{v}_j^{(2)} = \mathbf{v}_j^n - \frac{2R}{3}(\mathbf{f}_{j+1/2}^{(1)} - \mathbf{f}_{j-1/2}^{(1)}), \\ \frac{\mathbf{v}_j^{n+1} - \mathbf{v}_j^n}{\tau} &+ \frac{7}{12} \frac{\mathbf{f}_{j+1}^n - \mathbf{f}_{j-1}^n}{2h} - \frac{1}{3} \frac{\mathbf{f}_{j+2}^n - \mathbf{f}_{j-2}^n}{4h} + \frac{3}{4} \frac{\mathbf{f}_{j+1}^{(2)} - \mathbf{f}_{j-1}^{(2)}}{2h} = \mathbf{D}_j^n, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} R &= \frac{\tau}{h}, \quad \mathbf{f}_j^n = \mathbf{f}(\mathbf{v}_j^n), \quad \mathbf{f}_{j+1/2}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_{j+1/2}^{(1)}), \quad \mathbf{f}_j^{(2)} = \mathbf{f}(\mathbf{v}_j^{(2)}), \\ \mathbf{D}_j^n &= -\frac{Ch^3}{24R} \frac{\mathbf{v}_{j+2}^n - 4\mathbf{v}_{j+1}^n + 6\mathbf{v}_j^n - 4\mathbf{v}_{j-1}^n + \mathbf{v}_{j-2}^n}{h^4}. \end{aligned}$$

Член \mathbf{D}_j^n — это искусственная вязкость четвертого порядка дивергентности (т.е. пропорциональная четвертой производной решения). Коэффициент вязкости равен $Ch^3 / (24R) = O(h^3)$, где C — настраиваемый постоянный параметр. Погрешность аппроксимации схемы (9) составляет $O(h^3 + \tau^3)$. Схема (9) устойчива при выполнении двух условий:

$$\kappa < 1 \quad \text{и} \quad \kappa^2(4 - \kappa^2) \leq C \leq 3.$$

Подчеркнем одно важное отличие между схемой Русанова и бикompактными схемами. В схеме Русанова используются сеточные функции $\mathbf{v}_{j+1/2}^{(1)}$, $\mathbf{f}_{j+1/2}^{(1)}$, определенные на ω_h'' . Однако значения этих функций носят пассивный (вспомогательный, промежуточный) характер и исключаются в процессе перехода со слоя на слой. В конечном итоге схема Русанова работает с сеточной функцией \mathbf{v}_j^n , определенной на ω_h' . Бикompактные схемы же работают с сеточной функцией \mathbf{v}_i^n , определенной на всей $\omega_h = \omega_h' \cup \omega_h''$. В бикompактных схемах значения решения в полужелтых узлах носят активный характер и выступают как дополнительные степени свободы.

Стоит отметить, что бикompактные схемы могут применяться на неравномерных пространственных сетках без снижения порядков аппроксимации. Кроме того, и бикompактные схемы, и схема Русанова являются одношаговыми, поэтому шаг τ в них может быть переменным.

3. КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ

Для оценки точности численных схем, описанных в разд. 2, мы будем применять критерии, которые были предложены в работах [22; 23].

Критерий 1: порядок интегральной сходимости

Зафиксируем момент времени t . Введем первообразную точного решения уравнений (1):

$$\mathbf{U}(x, t) = \int_0^x \mathbf{u}(\xi, t) d\xi. \quad (10)$$

Рассмотрим некоторое численное решение на слое $t_n = t$ (не имеет значения, определено оно на ω_h или $\omega_h' \subset \omega_h$). Пользуясь значениями этого численного решения, построим на каждом отрезке $\Delta_{j+1} = [x_j, x_{j+1}]$ интерполяционный полином как минимум первой степени. Совокупность этих полиномов на всем отрезке $[0, X]$ образует функцию $\mathbf{v}_h(x, t)$. Введем с ее помощью дискретный аналог первообразной (10):

$$\mathbf{V}_h(x_j, t) = \int_0^{x_j} \mathbf{v}_h(\xi, t) d\xi, \quad x_j \in \omega_h'. \quad (11)$$

Под интегральной сходимостью решения понимается сходимость численной первообразной (11) к точной первообразной (10) при сгущении сетки по всем направлениям. Порядком интегральной сходимости называется сеточная функция

$$k_{h_1}(x_j, t) = \log_r \frac{|\mathbf{V}_{h_1}(x_j, t) - \mathbf{U}(x_j, t)|}{|\mathbf{V}_{h_2}(x_j, t) - \mathbf{U}(x_j, t)|}, \quad x_j \in \omega_{h_1}'. \quad (12)$$

Здесь $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$ — это евклидова норма вектора, а шаги h_1 и h_2 связаны соотношением $h_2 = h_1 / r$, где $r > 1$ — целое число. Поскольку точное решение уравнений (1), как правило, неизвестно, порядок интегральной сходимости оценивается методом Рунге:

$$k_{h_1}(x_j, t) = \log_r \frac{|\mathbf{V}_{h_1}(x_j, t) - \mathbf{V}_{h_2}(x_j, t)|}{|\mathbf{V}_{h_2}(x_j, t) - \mathbf{V}_{h_3}(x_j, t)|}, \quad x_j \in \omega_{h_1}', \quad (13)$$

где $h_3 = h_2 / r$.

Из формул (12), (13) ясно, что выбор точки $x = 0$ в качестве постоянного нижнего предела интегрирования не вредит общности наших рассуждений. Выбор иной точки или, что то же самое, ненулевой

постоянной интегрирования не влияет на значения $k_{h_1}(x_j, t)$, так как эта постоянная уничтожается при вычислении разностей между первообразными. Аналогично выбор в качестве пределов интегрирования x, X вместо $0, x$ (как в [22; 23]) не влияет на значения $k_{h_1}(x_j, t)$, так как разница между этими двумя интегралами состоит в знаке и аддитивной постоянной; последняя уничтожается при вычислении разностей, а первый устраняется евклидовой нормой.

Приведем формулы расчета численной первообразной (11) для схем из разд. 2.

Для дискретизации по пространству в бикompактных схемах применяется интегро-интерполяционный метод. Чтобы достичь четвертого порядка аппроксимации, в каждой ячейке сетки, т.е. на отрезке Δ_{j+1} , решение приближается интерполяционным полиномом второй степени (см. [34]). Этот полином строится по трем значениям: $v_j^n, v_{j+1/2}^n, v_{j+1}^n$. Весьма разумно задать функцию $v_h(x, t)$ на Δ_{j+1} равной этому полиному. Отсюда мы немедленно получаем формулу для численной первообразной:

$$\begin{aligned} V_h(x_{j+1}, t) &= \sum_{m=0}^j (A_0^x v_{m+1/2}^n) h = \\ &= \sum_{m=0}^j \frac{v_m^n + 4v_{m+1/2}^n + v_{m+1}^n}{6} h. \end{aligned}$$

Обратимся к схеме Русанова. Функцию $v_h(x, t)$ на Δ_{j+1} можно задать, например, в виде интерполяционного полинома первой степени, построенного по двум значениям: v_j^n и v_{j+1}^n . Такой подход применялся в работах [22; 23]. Однако у этого подхода есть недостаток: поскольку мы фактически пользуемся квадратурой трапеций, порядок интегральной сходимости ограничен двумя, и мы не можем наблюдать совпадение эмпирического (апостериорного) и теоретического порядков. Предлагается повысить точность расчета численной первообразной. Для этого функция $v_h(x, t)$ на Δ_{j+1} задается как интерполяционный полином второй степени, построенный по трем значениям: $v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n$. Такой выбор интерполянта приводит к формуле

$$V_h(x_{j+1}, t) = \sum_{m=0}^j \frac{5v_{m+1}^n + 8v_m^n - v_{m-1}^n}{12} h \quad (v_{-1}^n = v_N^n).$$

Критерий 2: относительные погрешности инвариантов Римана

Посмотрим на инварианты Римана как на функции от вектора консервативных переменных: $w_i = w_i(\mathbf{u})$. Относительной погрешностью инварианта Римана $w_i(\mathbf{u})$ ($i = 1, 2, 3$) называется сеточная функция

$$\text{regr}(w_i)(x_j, t) = \frac{|w_i(v(x_j, t)) - w_i(\mathbf{u}(x_j, t))|}{|w_i(\mathbf{u}(x_j, t))|}, \quad x_j \in \omega_h', \quad (14)$$

где $t_n = t$ — наперед заданный фиксированный момент времени. Поскольку точное решение $\mathbf{u}(x, t)$ уравнений (1), вообще говоря, неизвестно, вместо него разумно использовать численное решение, полученное на очень подробной сетке с шагом $h_* \ll h$.

Критерий 2 дополняет критерий 1 тем, что позволяет сравнивать численные схемы по (относительной) точности их решений в смысле инвариантов Римана. Критерий 2 не теряет смысла даже тогда, когда инварианты Римана не существуют. В этом случае на них можно смотреть как на абстрактные функции от искомого решения, которые в силу своей гладкости без потерь передают информацию о его погрешностях.

Отметим, что порядок (13) и относительную погрешность (14) можно было бы определить более типичным способом — не как сеточные функции, а как числа, заменив модули на сеточные нормы. Однако рассмотрение этих величин в виде пространственных распределений позволяет проводить более детальный анализ точности тех или иных численных схем.

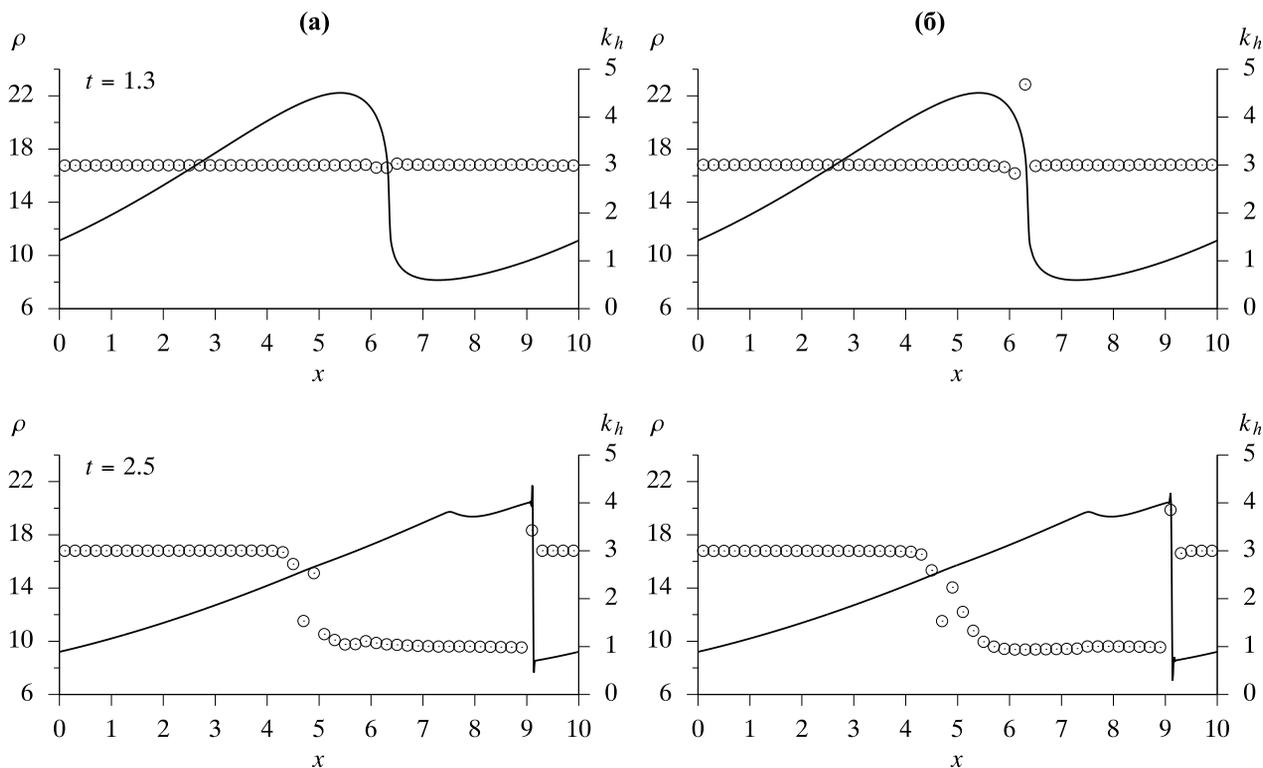
4. СЕТОЧНАЯ СХОДИМОСТЬ

Проведем расчеты задачи (1), (3) на сетках с шагами $h = 0.01, 0.005, 0.0025$ (число ячеек $N = 1000, 2000, 4000$ соответственно). Для бикompактной схемы (7) возьмем $R = \tau / h = 1 / 7.8$ (число Куранта $\kappa \approx 0.5$), $\delta = 1.5$. Для схемы Русанова (9) возьмем $R = 1 / 6.4$ ($\kappa \approx 0.5$), $C = 2.5$.

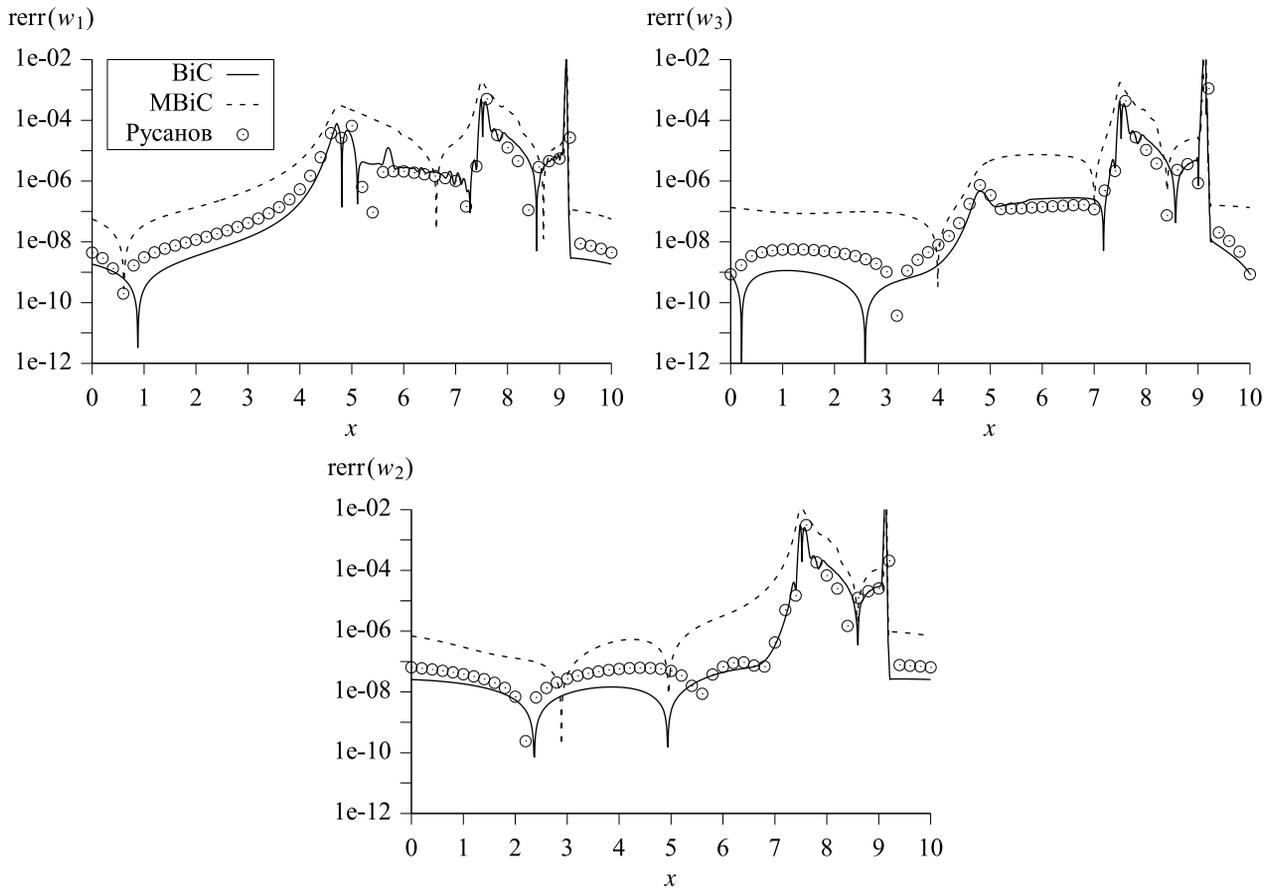
На фиг. 2 представлены графики плотности газа и порядка интегральной сходимости при $t = 1.3$ и $t = 2.5$, полученных по схемам (7), (9) на сетке с шагом $h = 0.01$. В момент времени $t = 1.3$, когда происходит градиентная катастрофа и ударная волна только зарождается, обе схемы демонстрируют сходимость с третьим порядком (совпадает с теоретическим). Это ожидаемый результат, т.к. область влияния ударной волны только начинает расширяться. К моменту времени $t = 2.5$ эта область уже сформировалась, она занимает интервал (4.3, 9.1). На нем обе схемы теряют свою высокую точность и сходятся всего лишь с первым порядком.

Проанализируем относительные погрешности инвариантов Римана при $t = 2.5$ на той же сетке. Интересно добавить к сравнению нелинейную монотонизированную бикompактную схему на основе (7) (см. [34]). Для этой схемы параметр монотонизации $C_1 = 5$, монотонной схемой-партнером полагается схема “явный угол”. Графики погрешностей изображены на фиг. 3. В качестве эталонного решения бралось решение схемы Русанова на сетке с шагом $h_* = 10^{-4}$ ($N_* = 10^5$). Бикompактная схема и схема Русанова имеют примерно одинаковую точность (первая немного точнее). Погрешности у монотонизированной бикompактной схемы по сравнению с ними больше на полтора-два порядка (равномерно). Отметим, что средний уровень погрешностей инвариантов w_1, w_3 в области влияния существенно выше, чем вне ее. Это вполне отвечает снижению порядка интегральной сходимости в этой области. Для инварианта w_2 (удельной энтропии) картина несколько иная: средний уровень погрешности заметно выше в подобласти области влияния, на интервале (7.4, 9.1). На нем же, кстати, наблюдается дополнительное ухудшение точности вычисления инвариантов w_1, w_3 . Как видно на фиг. 4, в этой подобласти локализовано возмущение энтропии относительно ее начального (фонового) значения. Этому возмущению соответствует участок с изломом на профиле плотности (см. фиг. 2).

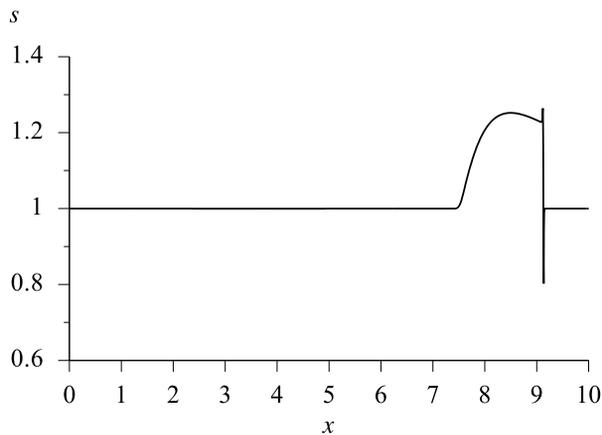
Итак, мы построили тестовую задачу для уравнений газовой динамики и показали, что на решении этой задачи выбранные нами линейные численные схемы высокого порядка аппроксимации сходятся всего лишь с первым порядком (который достигается в области влияния ударной волны). На первый взгляд, данный результат явно противоречит тому, что было установлено в работах [22–27; 29–31]. В них рассматривалась аналогичная тестовая задача для уравнений мелкой воды, проводились расчеты по тем же самым схемам либо другим линейными схемам, показывалось, что порядок интегральной сходимости не ниже второго. Этот результат распространялся с уравнений мелкой воды вообще на любые гиперболические системы уравнений. Казалось бы, такая индукция верна, поскольку дело шло об анализе аппроксимаций, которые записаны для произвольных векторов \mathbf{u} и $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ и сами по себе от них не зависят.



Фиг. 2. Плотность газа (сплошные кривые) и порядок интегральной сходимости (кружки) при $t = 1.3$ и $t = 2.5$, полученные по бикompактной схеме (а) и схеме Русанова (б) на сетке с шагом $h = 0.01$.



Фиг. 3. Относительные погрешности инвариантов Римана при $t = 2.5$, полученные по бикompактной схеме (сплошные кривые), монотонизированной бикompактной схеме (штриховые кривые) и схеме Русанова (кружки) на сетке с шагом $h = 0.01$.



Фиг. 4. Удельная энтропия газа при $t = 2.5$, рассчитанная по бикompактной схеме на сетке с шагом $h = 0.01$.

Однако свойства гиперболической системы уравнений могут оказывать значительное влияние на характер сеточной сходимости линейных численных схем.

5. СЕТОЧНАЯ СХОДИМОСТЬ В СЛУЧАЕ ПЕРМАНЕНТНО ИЗОЭНТРОПИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Проиллюстрируем тезис, что характер сеточной сходимости линейных численных схем зависит от свойств решаемой гиперболической системы уравнений. Мы не будем возвращаться к уравнениям

мелкой воды (уже рассмотренным в [22–31]) и менять тем самым физическую модель. Вместо этого мы останемся в рамках модели невязкого совершенного газа и упростим уравнения газовой динамики (1) так, чтобы они стали похожи на уравнения мелкой воды.

Предположим, что течение газа является изоэнтропическим перманентно, т.е. во все моменты времени. Отсюда следует равенство

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \equiv \mathcal{P}(\rho), \quad (15)$$

справедливое для всех (x, t) , т.е. глобальная адиабата Пуассона. Интеграл (15) позволяет исключить уравнение энергии, и от уравнений (1) остаются первые два уравнения — уравнение массы и уравнение импульса:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + \mathcal{P}(\rho) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Можно показать, что собственные значения λ_i и отвечающие им инварианты Римана w_i ($i = 1, 2$) для системы (16) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = v \mp c, \quad w_{1,2} = v \mp \frac{2c}{\gamma - 1},$$

где $c = c(\rho) = \sqrt{\gamma \mathcal{P}(\rho) / \rho}$ — скорость звука. Уравнения (16) похожи на уравнения мелкой воды в том смысле, что вторые получаются из первых заменой плотности газа ρ на высоту жидкости H и члена $\mathcal{P}(\rho)$ на член $\frac{1}{2} g H^2$ (где $g = \text{const}$ — ускорение свободного падения).

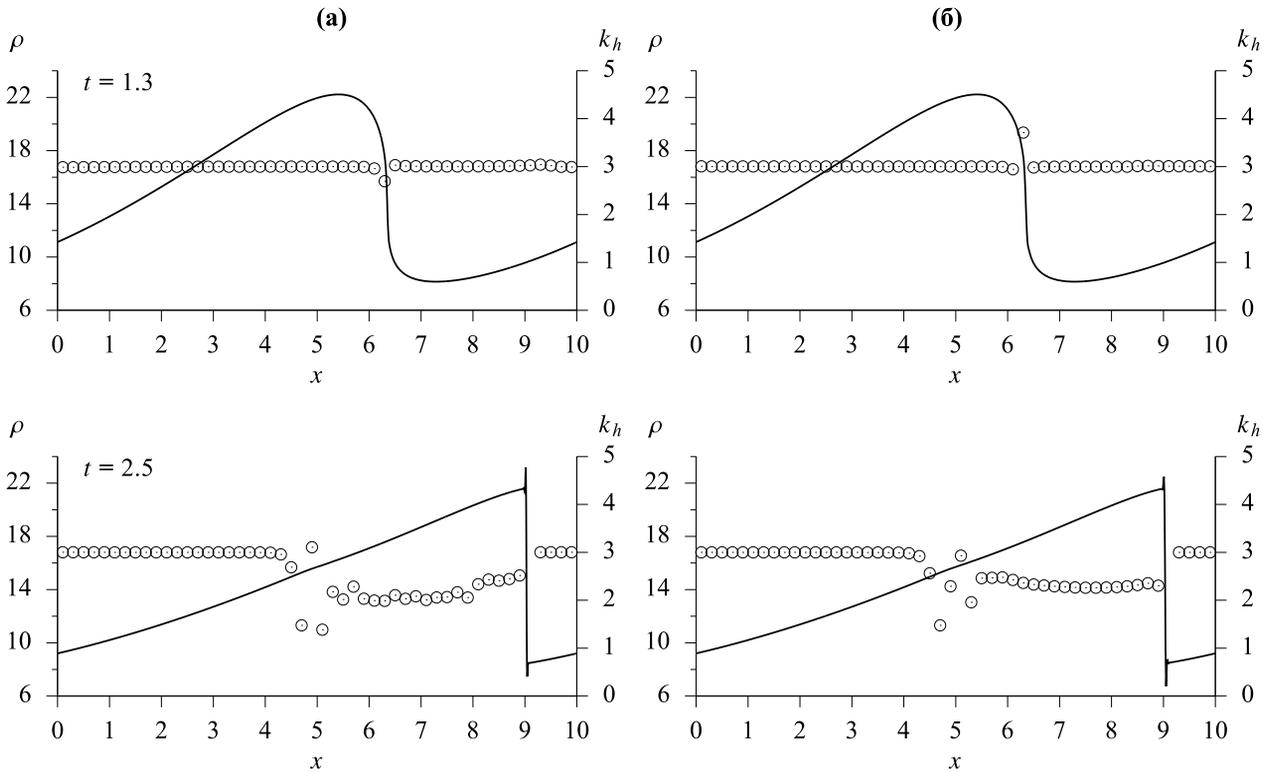
Поясним постановку задачи Коши для уравнений (16). Начальные условия для скорости и плотности газа берутся из формул (3); начальное условие для давления газа является излишним, т.к. оно имелось в виду при написании формулы (15), т.е. было учтено заранее.

Проведем расчеты тестовой задачи для уравнений (16) по тем же численным схемам, на тех же сетках, при тех же параметрах.

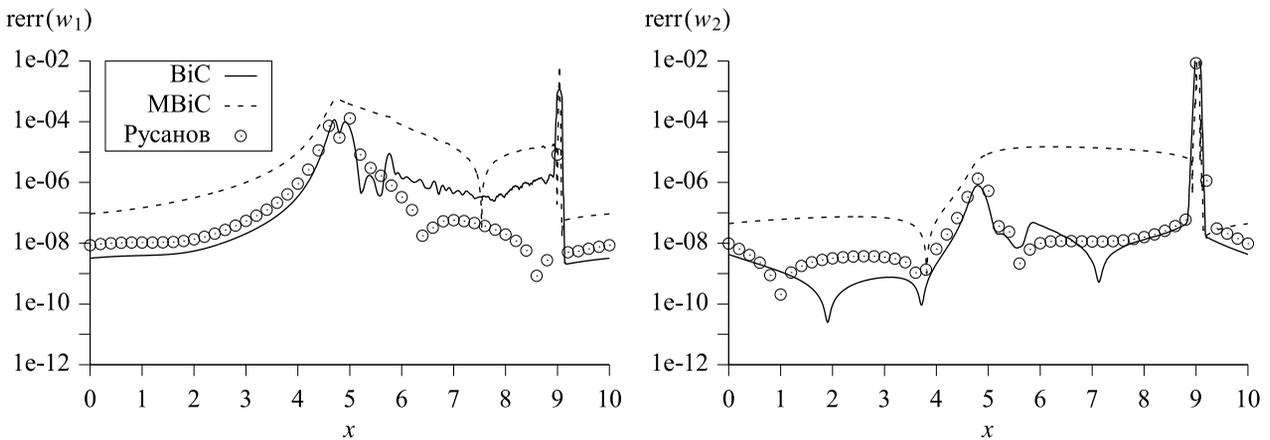
Графики плотности газа и порядка интегральной сходимости при $t = 1.3$ и $t = 2.5$ приведены на фиг. 5. Сразу же обращает на себя внимание тот факт, что и бикомпактная схема, и схема Русанова в области влияния ударной волны сходятся со вторым, а не первым порядком. Например, схема Русанова сходилась именно так на решении аналогичной тестовой задачи для уравнений мелкой воды (см. [23]). Заметим, что профили плотности при $t = 2.5$ тоже выглядят немного иначе: отсутствует участок с изломом.

На фиг. 6 представлены графики относительных погрешностей инвариантов Римана в момент времени $t = 2.5$. Перечислим основные отличия от результатов в случае полной системы уравнений газовой динамики (1). Точность вычисления инварианта w_1 в области влияния ударной волны для бикомпактной схемы примерно на порядок-полтора хуже, чем для схемы Русанова. Погрешности w_1 вне области влияния и погрешности w_2 во всей расчетной области для этих схем примерно одинаковы. Разница в точности между бикомпактной схемой и ее монотонизированной версией оказывается еще более глубокой: для инварианта w_2 она составляет целых три порядка.

Рассмотренный нами контрпример (тестовая задача Коши) выявил, что одна и та же линейная численная схема может сходиться в области влияния ударной волны то с первым, то со вторым порядком, в зависимости от того, какая гиперболическая система решается. Это явление нельзя списать на специфику аппроксимации, например, бикомпактной схемы, т.к. схема Русанова, будучи схемой другого класса, обнаружила совершенно такое же поведение. В связи с этим выбор именно бикомпактной схемы и схемы Русанова не является принципиальным. Понижение порядка не может быть объяснено и тем, что сходимость якобы не установилась и действительный порядок еще не достигнут; мы специально брали достаточно подробные сетки (об этом свидетельствует низкий уровень погрешностей вне области влияния: от 10^{-10} до 10^{-8}). Значит, причиной вариаций в порядке сходимости является сама гиперболическая система уравнений. Но в чем отличие между системами (1) и (16)?



Фиг. 5. Плотность газа (сплошные кривые) и порядок интегральной сходимости (кружки) при $t = 1.3$ и $t = 2.5$, полученные по бикомпактной схеме (а) и схеме Русанова (б) на сетке с шагом $h = 0.01$.



Фиг. 6. Относительные погрешности инвариантов Римана при $t = 2.5$, полученные по бикомпактной схеме (сплошные кривые), монотонизированной бикомпактной схеме (штриховые кривые) и схеме Русанова (кружки) на сетке с шагом $h = 0.01$.

Известно, что любая гиперболическая система, состоящая из двух уравнений, всегда может быть записана в инвариантах (см. [38]). Иначе обстоит дело для гиперболических систем из трех или более уравнений: инвариантов Римана для них в общем случае нет. В зависимости от постановки задачи инварианты Римана могут существовать в течение некоторого времени во всей расчетной области, а затем не существовать в некоторой подобласти. Например, это происходит в тестовой задаче (1), (3): одновременно с формированием ударной волны возникает (и далее расширяется) зона за ее фронтом, где $s = w_2 \neq \text{const}$ и, как следствие, не существуют инварианты w_1, w_3 .

Возможность записи в инвариантах объединяет уравнения мелкой воды и уравнения изоэнтропической газовой динамики и отличает обе этих системы от полных уравнений газовой динамики.

По-видимому, имеется некая связь между существованием инвариантов Римана и характером сеточной сходимости линейных численных схем. Анализ этой связи составляет предмет для дальнейших исследований.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена новая тестовая задача для одномерных уравнений Эйлера. Течение газа в ней представляет собой периодическую прогрессивную волну, которая с течением времени опрокидывается и теряет свою гладкость.

Исследована сеточная сходимость бикомпактной схемы и схемы Русанова на решении данной задачи. Обе схемы линейные, немонотонные, высокого третьего порядка аппроксимации. Порядок сходимости определялся поточечно (в узлах, локально) путем сравнения дискретных первообразных численных решений, полученных на вложенных сетках. Установлено, что выбранные схемы сходятся с третьим порядком до момента образования ударной волны и с первым порядком — после этого момента. Понижение порядка сходимости происходит в области влияния ударной волны. Однако, несмотря на формальное совпадение порядков аппроксимации, немонотонная бикомпактная схема оказывается на полтора-два порядка точнее, чем ее монотонизированная версия, если судить по относительным погрешностям инвариантов Римана.

Это исследование повторено для случая перманентно изоэнтропического течения. В отличие от предыдущего случая, бикомпактная схема и схема Русанова демонстрируют второй порядок сходимости в области влияния ударной волны. Отмечено, что уравнения изоэнтропической газовой динамики (как и уравнения мелкой воды) всегда могут быть записаны в инвариантах, в отличие от полных уравнений газовой динамики. Сделано предположение о наличии связи между существованием инвариантов Римана и характером сеточной сходимости линейных численных схем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ekaterinaris J. A.* High-order accurate, low numerical diffusion methods for aerodynamics // *Prog. Aerosp. Sci.* 2005. V. 41. P. 192–300.
2. *Холодов А. С., Холодов Я. А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2006. Т. 46. № 9. С. 1638–1667.
3. *Годунов С. К.* Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Матем. сб.* 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
4. *Бисикало Я. В., Жилкин А. Г., Боярчук А. А.* Газодинамика тесных двойных звезд. М.: Физматлит, 2013. 632 с.
5. *Toro E. F.* Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. Springer, 2009.
6. *Van Leer B.* Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // *J. Comput. Phys.* 1979. V. 32. № No. 1. P. 106–136.
7. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* 1983. V. 49. P. 357–393.
8. *Cockburn B., Shu C.-W.* Nonlinearly stable compact schemes for shock calculations // *SIAM J. Numer. Anal.* 1994. V. 31. No. № 3. P. 607–627.
9. *Harten A., Osher S.* Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes // *SIAM J. Numer. Anal.* 1987. V. 24. № 2. P. 279–309.
10. *Liu X., Osher S., Chan T.* Weighted essentially non-oscillatory schemes // *J. Comput. Phys.* 1994. V. 115. № 1. P. 200–212.
11. *Jiang G., Shu C.-W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // *J. Comput. Phys.* 1996. V. 126. P. 202–228.
12. *Gustafsson B., Olsson P.* Fourth-order difference methods for hyperbolic IBVPs // *J. Comput. Phys.* 1995. V. 117. № 2. P. 300–317.
13. *Yee H. C., Sandham N. D., Djomehri M. J.* Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters // *J. Comput. Phys.* 1999. V. 150. № 1. P. 199–238.
14. *Ekaterinaris J. A.* Implicit, high-resolution, compact schemes for gas dynamics and aeroacoustics // *J. Comput. Phys.* 1999. V. 156. № 2. P. 272–299.
15. *Попов И. В., Фрязинов И. В.* Конечно-разностный метод решения уравнений газовой динамики с введением адаптивной искусственной вязкости // *Матем. моделирование.* 2008. Т. 20. № 8. С. 48–60.

16. *Guermont J.-L., Pasquetti R., Popov B.* Entropy viscosity method for nonlinear conservation laws // *J. Comput. Phys.* 2011. V. 230. № 11. P. 4248–4267.
17. *Kurganov A., Liu Y.* New adaptive artificial viscosity method for hyperbolic systems of conservation laws // *J. Comput. Phys.* 2012. V. 231. № 24. P. 8114–8132.
18. *Остапенко В. В.* О сходимости разностных схем за фронтом нестационарной ударной волны // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1997. Т. 37. № 10. С. 1201–1212.
19. *Casper J., Carpenter M. H.* Computational consideration for the simulation of shock-induced sound // *SIAM J. Sci. Comput.* 1998. V. 19. № 1. P. 813–828.
20. *Engquist B., Sjögreen B.* The convergence rate of finite difference schemes in the presence of shocks // *SIAM J. Numer. Anal.* 1998. V. 35. P. 2464–2485.
21. *Остапенко В. В.* О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
22. *Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* О сходимости разностных схем сквозного счета // *Докл. АН.* 2010. Т. 433. № 5. С. 599–603.
23. *Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* О реальной точности разностных схем сквозного счета // *Матем. моделирование.* 2013. Т. 25. № 9. С. 63–74.
24. *Михайлов Н. А.* О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // *Матем. моделирование.* 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138.
25. *Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Остапенко В. В., Тишкин В. Ф.* О точности разрывного метода Галеркина при расчете ударных волн // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 8. С. 148–156.
26. *Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* О монотонности и точности схемы КАБАРЕ при расчете обобщенных решений с ударными волнами // *Вычисл. техн.* 2018. Т. 23. № 2. С. 37–54.
27. *Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* О точности схем типа MUSCL при расчете ударных волн // *Докл. АН.* 2018. Т. 492. № 1. С. 43–48.
28. *Брагин М. Д., Rogov B. B.* О точности бикомпактных схем при расчете нестационарных ударных волн // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 5. С. 884–899.
29. *Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // *Докл. АН.* 2018. Т. 478. № 5. С. 517–522.
30. *Зюзина Н. А., Ковыркина О. А., Остапенко В. В.* Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // *Докл. АН.* 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643.
31. *Ладонкина М. Е., Неклюдова О. А., Остапенко В. В., Тишкин В. Ф.* Комбинированная схема разрывного метода Галеркина, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // *Докл. АН.* 2019. Т. 489. № 2. С. 119–124.
32. *Брагин М. Д., Rogov B. B.* Комбинированная монотонная бикомпактная схема, имеющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // *Докл. АН.* 2020. Т. 492. № 1. С. 79–84.
33. *Михайловская М. Н., Rogov B. B.* Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2012. Т. 52. № 4. С. 672–695.
34. *Bragin M. D., Rogov B. V.* Conservative limiting method for high-order bcompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations // *Appl. Numer. Math.* 2020. V. 151. P. 229–245.
35. *Русанов В. В.* Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // *Докл. АН СССР.* 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.
36. *Burstein S. Z., Mirin A. A.* Third order difference methods for hyperbolic equations // *J. Comput. Phys.* 1970. V. 5. № 3. P. 547–571.
37. *Alexander R.* Diagonally implicit Runge–Kutta methods for stiff O.D.E.'s // *SIAM J. Numer. Anal.* 1977. V. 14. № 6. P. 1006–1021.
38. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.

УДК 532.135:519.63

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РАЗРУШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ С ФРОНТОМ¹⁾

© 2024 г. Л. С. Брындин^{1,2,*}, Б. В. Семисалов^{1,3,**}, В. А. Беляев^{1,2,***}, В. П. Шапеев^{1,2,****}

¹630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Новосибирский государственный университет, Россия

²630090 Новосибирск, ул. Институтская, 4/1, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Россия

³630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 4, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Россия

*e-mail: l.bryndin@ngs.ru

**e-mail: vibis@ngs.ru

***e-mail: belyaevasily@mail.ru

****e-mail: shapeev.vasily@mail.ru

Поступила в редакцию 21.03.2023 г.

Переработанный вариант 21.03.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

На основе мезоскопического подхода впервые описаны одномерные течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости, которые по своим качественным свойствам схожи с решениями уравнения Бюргерса. Дана постановка соответствующей начально-краевой задачи для системы квазилинейных дифференциальных уравнений, разработан и верифицирован вычислительный алгоритм ее решения. Для аппроксимации неизвестных функций по времени в алгоритме используется явная схема 5-го порядка, а по пространству — дробно-рациональные барицентрические интерполяционные формулы. С применением приближений Чебышёва–Паде реализован метод локализации особых точек решения в комплексной плоскости и адаптации к ним пространственной сетки. При использовании алгоритма обнаружены и охарактеризованы два режима эволюции решения поставленной задачи: режим 1 — гладкое решение существует на достаточно большом временном интервале (особая точка движется в комплексной плоскости параллельно действительной оси); режим 2 — гладкое решение разрушается на начальных этапах эволюции (особая точка достигает отрезка действительной оси, где поставлена задача). Исследовано влияние реологических параметров жидкости на реализацию указанных режимов и на время существования гладкого решения. Полученные результаты являются важными для анализа ламинарно-турбулентных переходов в вязкоупругих полимерных средах. Библ. 39. Фиг. 7. Табл. 1.

Ключевые слова: полимерная жидкость, реология, мезоскопическая модель, одномерное течение, уравнение Бюргерса, дробно-рациональное приближение, приближение Чебышёва–Паде, траектория движения особой точки в комплексной плоскости.

DOI: 10.31857/S0044466924010126, EDN: ZIPQJF

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные и теоретические исследования течений растворов и расплавов полимерных материалов со специфическими реологическими свойствами представляют важное направление современной гидродинамики. Их актуальность обусловлена бурным развитием технологий производства электронных устройств на полимерной основе методами печати, экструзии, напыления и др. (см. [1–3]). Обеспечение бездефектного производства в подобных технологиях зачастую связано с реализацией устойчивых ламинарных течений в каналах. В связи с этим вопрос об описании и контроле ламинарно-турбулентных переходов в таких течениях является принципиально важным (см. [4]).

Изучение этого вопроса наталкивается на ряд сложностей и новых эффектов. Во-первых, обнаружены течения вязкоупругих жидкостей, в которых вязкость практически не влияет на переход к турбулентности, а важными являются упругие свойства (см. критерий из [5]). Возникает задача описания

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (соглашение № 23-21-00499).

непрерывного перехода между режимами такой (упругой) и классической (инерционной) турбулентностей (см. [6; 7]). Во-вторых, до сих пор не существует общепринятой математической модели разрушения ламинарных течений полимерной жидкости с прямыми линиями тока (течения Пуазейля и Куэтта), которое наблюдается в экспериментах при существенно более низких значениях числа Рейнольдса, Re , чем в случае течений ньютоновской жидкости (см. [8; 9]). Исследование устойчивости течения, которое, как правило, удается провести только на линейном уровне, дает качественное объяснение перехода к упруго-инерционной турбулентности в разбавленных растворах полимеров (см. [10; 11]), однако является недостаточным для случая чисто упругой турбулентности при малых Re в концентрированных растворах и расплавах полимеров. Здесь, по всей видимости, принципиальным является вклад нелинейных эффектов (см. [4]).

В настоящей работе предложена и численно проверена новая идея о том, что разрушение гладких решений уравнений динамики полимерной среды можно охарактеризовать, исследуя движение их особых точек аналитических продолжений решений в комплексной плоскости \mathbb{C} . Эти точки (полюса, точки ветвления) могут возникать в определенные моменты времени и двигаться по сложным траекториям в окрестности области, где ищется решение задачи. Выход точки в эту область ведет к разрушению классического решения, что, по нашему мнению, можно ассоциировать с переходом к сложной динамике и турбулентности.

Для описания течений высококонцентрированных растворов и расплавов полимерной жидкости будем использовать реологическую мезоскопическую модель Покровского–Виноградова (см. [12; 13]). Ее важное отличие от трендовых моделей, таких как степенные модели, Oldroyd-B, FENE-P и т.п. (см. обзор [4, разд. III]), состоит в учете микроструктуры (конкретно, размера и ориентации полимерных молекул) при макроскопическом моделировании течения, что может оказаться принципиально важным для анализа разрушения устойчивых ламинарных течений. В настоящей работе мы приводим упрощенный одномерный (1D) вариант мезоскопической модели, аналогичный по своей сути уравнению Бюргерса для системы Навье–Стокса. Отметим, что именно на примере упрощенной 1D модели, предложенной Бюргерсом, были даны первые описания нелинейных волновых и турбулентных процессов в течениях классических жидкостей (см. [14]). В последствии эта модель стала эталонным примером для разработки и тестирования численных методов. Конечно-разностные, проекционные и спектральные методы, полулагранжевы и адаптивные схемы тестировались на примере решения уравнения Бюргерса (см. краткий обзор во введении [15]). Подчеркнем, что спектральные подходы в рамках нашего исследования имеют существенные преимущества над другими, во-первых, потому что в случае принадлежности искомого решения классу аналитических функций они реализуют экспоненциальную асимптотику сходимости, а, во-вторых, они являются чувствительными к особенностям решения: скорость их сходимости строго связана с положением и типом особых точек аналитического продолжения решения в комплексную плоскость.

Мезоскопическая 1D-модель существенно сложнее уравнения Бюргерса, она включает систему из двух квазилинейных уравнений первого порядка с параметрами, характеризующими вязкость жидкости (число Рейнольдса, Re), упругость полимерных молекул (число Вайсенберга, W) и анизотропию течения, β . Численный анализ этой модели для течений типа Пуазейля в канале с сечением, ограниченным двумя софокусными эллипсами (см. [16]), показал, что у решения имеются особенности, влияние которых усиливается с ростом Re , W и β , что в итоге приводит к расходимости нескольких вычислительных алгоритмов, построенных в указанной работе. Однако отдельно вопрос о траекториях движения особых точек в той работе не исследовался.

Отметим, что для ряда других моделей этот вопрос активно обсуждается в работах зарубежных исследователей (см. [17–20]). Методы локализации особенностей, предложенные в этих работах, опираются на результаты комплексного анализа (теорему Коши, разложение Лорана, принцип аргумента и др.), теории приближений (теоремы о сходимости рядов Фурье для ортогональных систем функций) и недавний прогресс в области дробно-рациональных приближений. По поводу последнего отметим работы Г. Шталя, Е. А. Рахманова, С. П. Суетина, Л. Н. Трефетена и их соавторов (см. [21–26]), в которых обсуждаются асимптотики сходимости наилучших дробно-рациональных приближений, приближений Чебышёва–Паде и Эрмита–Паде; а также экспоненциальное сгущение и чередование нулей и полюсов таких аппроксимаций в окрестности особых точек приближаемой функции. Заметим однако, что применение этих результатов для вычисления координат особых точек решений дифференциальных уравнений наталкивается на существенную сложность: алгоритмы поиска нулей и полюсов соответствующих дробно-рациональных приближений при высокой степени числителя и знаменателя, как правило, работают неустойчиво (см. [18, заключение; 26, разд. 7] и заключение данной статьи).

Эффективный способ решения этой проблемы при наличии одной особенности, состоящий в применении аппроксимаций Чебышёва–Паде, где в числителе стоит полином высокой степени,

а в знаменателе — полином второй степени, предложен в [27] и развит в [28]. В этих работах особые точки решений начально-краевых задач приближались полюсами аппроксимаций Чебышёва–Паде, а для аппроксимации решения использовались барицентрические интерполяционные формулы. Преимущество последних над классическими интерполяциями с узлами в нулях ортогональных полиномов состоит в возможности адаптации узлов к положениям особенностей приближаемой функции с помощью специальных замен переменной (см. по поводу таких замен [29–31], по поводу адаптивных алгоритмов — [32]).

В настоящей работе предложено обобщение алгоритма из [27] на случай начально-краевой задачи для системы 1D квазилинейных уравнений мезоскопической модели, проверена его сходимость при различных значениях Re и найдены соотношения между параметрами Re и W , обеспечивающие переход к режиму с разрушением гладкого решения задачи. Под разрушением здесь и далее мы понимаем расходимость используемых приближений, связанную с тем, что точка аналитического продолжения решения в \mathbb{C} достигает области задачи. В работе также исследованы зависимости времени существования решения и координаты точки, в которой происходит разрушение, от значений Re и W .

1. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе предложена 1D-модель течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости, учитывающая эффекты релаксации и размеры полимерных молекул. Она основана на мезоскопическом подходе к описанию динамики полимерных сред (см. [12; 13]). Для анализа разрушения течений в рамках мезоскопического подхода запишем безразмерные уравнения из [33] в 1D-случае:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{Re} \frac{\partial a}{\partial x}, \\ \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{\partial a}{\partial x} &= 2(a + W^{-1}) \frac{\partial u}{\partial x} - W^{-1} a - \beta a^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(t, x)$ — скорость, $a(t, x)$ характеризует напряжение в жидкости; t — время, x — пространственная

координата; $Re = \frac{\rho u_H l}{\eta_0^*}$ — число Рейнольдса, $\rho (= \text{const})$ — плотность среды, u_H — характерная скорость,

l — характерная длина; $W = \frac{\tau_0^* u_H}{l}$ — число Вайсенберга; η_0^* , τ_0^* — начальные значения сдвиговой вязкости и времени релаксации (см. [12; 13]); β характеризует размер и ориентацию молекул полимера (см. [13]).

Система (1) записана в безразмерном виде: время t , координата x , скорость u и характеристика напряжения a отнесены к $T_C = l / u_H$, l , u_H и $Re W / 3$ соответственно, где T_C — характерный временной масштаб модели.

Отметим, что в случае $\beta = 0$ систему (1) можно вывести из модели Oldroyd-B при нулевой вязкости растворителя, а в случае $W \rightarrow 0$ из второго уравнения (1) имеем $a \rightarrow \partial u / \partial x$, и вся система сводится к уравнению Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Заметим, что в модели из [33] функция $a(t, x)$ является компонентой тензора анизотропии среды, поэтому система (1) учитывает лишь 1D-проекцию сложной пространственной картины движения полимерных молекул, что, конечно, является значительным упрощением. Однако мы будем полагать, что такое 1D-упрощение является качественно верным. Подтверждением этому служат предельные случаи, указанные выше.

Для (1) будем рассматривать начально-краевую задачу с условиями

$$u(0, x) = \exp(-8x^2), a(0, x) \equiv 0, x \in [-1, 1]; u(t, \pm 1) = 0, t > 0. \quad (3)$$

Отметим, что аналогичная постановка для уравнения (2) рассматривалась в [28]. Для описания процесса формирования больших градиентов и разрывов решения (1), (3) используем подход из [27; 28], где

показано, что возникновение больших градиентов и разрушение гладких решений уравнения Бюргерса при предельно малых $1/\text{Re}$ можно связать с наличием у решения особых точек в комплексной плоскости \mathbb{C} . Эти точки (полюса, точки ветвления и т.п.) могут возникать в определенные моменты времени и двигаться по сложным траекториям в окрестности отрезка действительной оси, где ищется решение. Выход точки на отрезок ведет к разрыву решения или его производных.

Наш основной интерес состоит в изучении связей между реологическими параметрами жидкости Re , W , β и траекториями движения особых точек решения задачи (1), (3) в \mathbb{C} . Подчеркнем, что именно характер движения особых точек, если они существуют, определяет формирование фронтов, сильных и слабых разрывов и возникновение решений типа blow-up.

2. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

2.1. Аппроксимация решения по пространственной переменной

Для приближения неизвестных функций по переменной x используем барицентрическую форму записи интерполяционного многочлена с узлами Чебышёва–Лобатто $x_k, k = 0, \dots, N$ (см. [34]). Например, для функции $u(t, x)$ это приближение имеет вид

$$u(t, x) \approx P_N[u](t, x) = \frac{\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k}{x - x_k} u(t, x_k)}{\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k}{x - x_k}}, \quad x_k = \cos \frac{k\pi}{N}, \quad (4)$$

$$\lambda_k = \frac{1}{\Theta'_N(x_k)} = \frac{2^{N-1}}{N} (-1)^k \delta_k, \quad \Theta_N(x) = \prod_{j=0}^N (x - x_j), \quad \delta_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0, N, \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Числа λ_k называются весами интерполяционной формулы. Приближения (4) обладают свойством прямой численной устойчивости, которое заключается в том, что разница интерполяционных полиномов, вычисленных в точной арифметике и при наличии ошибок округления, ограничена величиной, зависящей от приближаемой функции f и медленно растущей с ростом N (см. оценки констант Лебега из [35]). Кроме того, расчет значения $P_N[u](t, x)$ в любой точке $x \neq x_k$ требует порядка $O(N)$ арифметических операций, что делает формулу (4) экономичной.

Положим, что функция $u(t, x)$ аналитична и ее продолжение в \mathbb{C} (z — координата комплексной плоскости) имеет особую точку $z^* = \delta + i\varepsilon$, расположенную на малом расстоянии от отрезка $[-1, 1]$. Для адаптации (4) к этой особенности будем использовать следующую модификацию барицентрического приближения (см. [29]):

$$u(t, x) \approx R_N[u](t, x) = \frac{\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k}{x - \xi_k} u(t, \xi_k)}{\sum_{k=0}^N \frac{\lambda_k}{x - \xi_k}}, \quad (5)$$

$$\xi_k = g(x_k) = g(x_k, \delta, \varepsilon).$$

Отметим, что в отличие от $P_N[u](t, x)$ приближение $R_N[u](t, x)$ является дробно-рациональным. Здесь $g : D_1 \rightarrow D_2$ — конформное отображение, D_1, D_2 — области в \mathbb{C} , содержащие отрезок $[-1, 1]$, $g(x)$ переводит $[-1, 1]$ в себя, а обратное отображение $g^{-1}(\xi)$ переводит z^* в точку, лежащую значительно дальше от отрезка $[-1, 1]$. Это приводит к увеличению размера эллипса Бернштейна, соответствующего исходному полиномиальному приближению, и, как следствие, к ускорению сходимости. Оценка функционала погрешности приближения (5) получена в [29]. Напомним, что в теории приближений эллипс Бернштейна аналитической функции f , определенной на отрезке $[-1, 1]$, — эллипс с фокусами в точках ± 1 , в который f может быть аналитически продолжена. Этот эллипс содержит на своем контуре ближайшую к отрезку $[-1, 1]$ особую точку f . При этом скорость сходимости полиномиальных приближений функции f

оценивается как $O(\tilde{\rho}^{-N})$, где $\tilde{\rho}$ — сумма полуосей эллипса Бернштейна, N — степень приближающего полинома.

Далее будем использовать отображение

$$g(x, \delta, \varepsilon) = \delta + \varepsilon \sinh \left\{ \left(a^- + a^+ \right) \frac{x-1}{2} + a^- \right\},$$

$$a^\pm = \sinh^{-1} \frac{1 \pm \delta}{\varepsilon}.$$
(6)

Детали, касающиеся построения функции такого вида, описаны в [27].

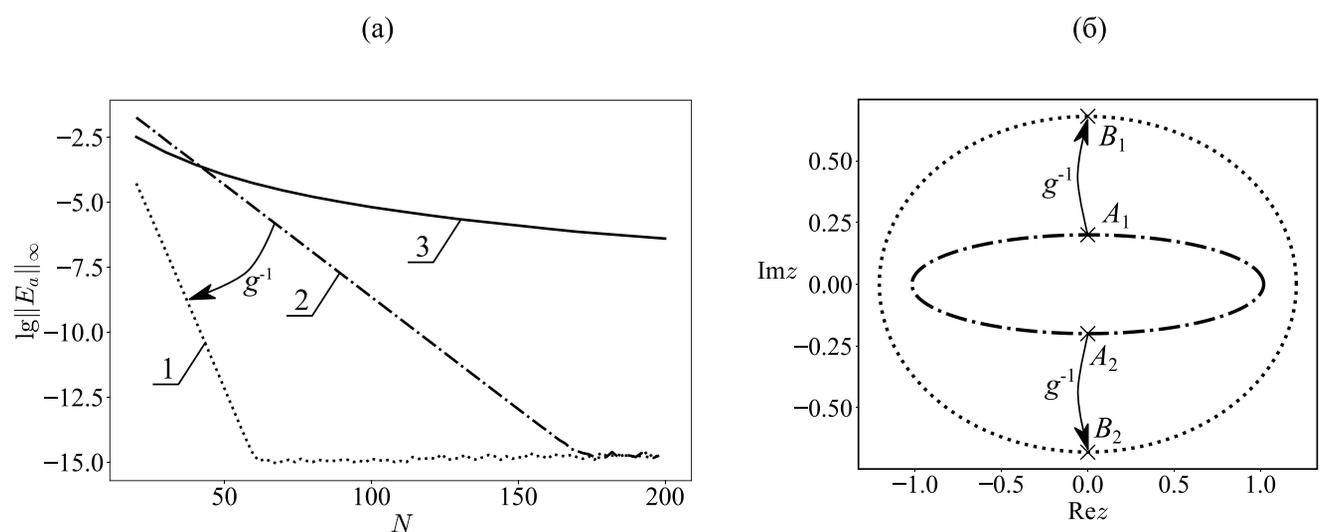
Покажем сначала преимущества приближения (5) на сетке $\xi_k, k = 0, \dots, N$, построенной с использованием (6), на примере функции, предложенной К. Рунге,

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Помимо дробно-рационального приближения (5) будем использовать интерполяционные полиномы на сетке с узлами в нулях многочленов Чебышёва (4) (при равномерном расположении узлов, как известно, наблюдается расходимость) и кубические сплайны с заданными на концах точными значениями вторых производных приближаемой функции.

На фиг. 1а величина N для (4) и (5) обозначает число узлов, а для кубических сплайнов — количество подынтервалов разбиения. Видно, что для получения абсолютной погрешности $\|E_a\|_\infty$ порядка 10^{-15} для дробно-рациональных приближений требуется около 60 узлов, а для алгебраических полиномов — 170. Зависимость логарифма погрешности интерполяции кубическими сплайнами от N является выпуклой вниз функцией, что говорит о сходимости с конечным порядком. Действительно, порядок сходимости здесь равен четырем независимо от N . В этом случае для получения точности порядка 10^{-15} потребуется уже около 16 500 подынтервалов.

Особенность функции Рунге находится в точках $A_{1,2} = \pm i / 5$. Обратное к (6) отображение переводит их приблизительно в $B_{1,2} = \pm 0.68i$. На фиг. 1б приведены эллипсы Бернштейна функций f и $f \circ g$. Для f сумма полуосей эллипса Бернштейна $\tilde{\rho}_f \approx 1.22$, для $f \circ g$ — $\tilde{\rho}_{f \circ g} \approx 1.89$, при этом тангенс угла наклона линии десятичного логарифма погрешности на фиг. 1а для интерполяционного полинома с чебышёвскими узлами (линия 2) с хорошей точностью равен $\lg \tilde{\rho}_f$, а для дробно-рационального приближения (линия 1) — $\lg \tilde{\rho}_{f \circ g}$, что согласуется с оценками погрешности из [29].



Фиг. 1. (а) Десятичный логарифм погрешности для дробно-рационального приближения на адаптивной сетке (1), для интерполяционного полинома с чебышёвскими узлами (2), для интерполяции кубическими сплайнами на равномерной сетке (3); (б) эллипсы Бернштейна для приближаемой функции f (штрихпунктир) и $f \circ g$ (пунктир).

По сравнению с особыми точками решения начально-краевой задачи (1), (3) особенность функции Рунге лежит далеко от действительной оси. Тем не менее даже в этом примере дробно-рациональные интерполяционные формулы (5) со специальной адаптацией к особенности функции (6) существенно выигрывают у других методов приближения. Отметим, что аналогичные преимущества такой аппроксимации наблюдаются при решении начально-краевых задач для уравнения, описывающего тепловой взрыв, и уравнения Бюргерса в [27], а также задачи Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения с особенностью в комплексной плоскости в двумерном случае (см. [32]). Далее будем применять такие приближения для решения задачи.

Эффективность приближений (5) при решении начально-краевых задач связана также с возможностью применения матричных аппроксимаций операторов дифференцирования. Пусть \mathbf{x} — вектор-столбец длины $N + 1$, состоящий из узлов интерполяции, $u(\mathbf{x})$ и $u'(\mathbf{x})$ — вектор-столбцы значений функции $u(t_0, x)$ и ее производной по x в узлах интерполяции в некоторый момент времени t_0 , $dR_N[u] / dx$ — вектор значений производной $R_N[u](t_0, x)$ по x . Для матричной аппроксимации операции дифференцирования в работе [36] на основе (4) выведена следующая формула:

$$u'(\mathbf{x}) \approx \frac{dR_N[u]}{dx} = D^1 u(\mathbf{x}), \quad D^1_{ij} = \begin{cases} \frac{\lambda_j}{\lambda_i(x_i - x_j)}, & \text{если } i \neq j, \\ -\sum_{k=0, k \neq j}^N D^1_{ik}, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

которая справедлива также для случая приближения (5) при замене x_j на ξ_j . Здесь $D^1 = (D^1_{ij})$ — матрица, аппроксимирующая оператор производной первого порядка.

2.2. Дискретизация задачи по времени

Дискретизация задачи (1), (3) по времени описана на примере первого уравнения системы (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial a}{\partial x}\right) = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial a}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Будем искать значения решения $u(t, x)$ в моменты времени $t = t^n$ в узлах Чебышёва–Лобатто, $x = x_l$, $l = 0, \dots, N$. Пусть $\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^n, \mathbf{a}^{n+1}, \mathbf{a}^n$ — векторы значений $u(t, x)$ и $a(t, x)$ в точках x_l на $(n + 1)$ -м и n -м слоях по времени соответственно, \mathbf{x} — вектор, состоящий из точек x_l , $\mathbf{f}(t^n, \mathbf{x}, u^n, D^1 \mathbf{u}^n, D^1 \mathbf{a}^n)$ — вектор значений $f(t^n, x_l, u_l^n, \sum_{m=0}^N D^1_{lm} u_m^n, \sum_{m=0}^N D^1_{lm} a_m^n)$, $u_l^n = u(t^n, x_l)$, $a_l^n = a(t^n, x_l)$. Для перехода со слоя n на слой $n + 1$ применим формулы метода Рунге–Кутты:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \mathbf{u}^n + \tau_n \sum_{j=1}^s b_j \mathbf{k}_j^n, \\ \mathbf{k}_1^n &= \mathbf{f}(t^n, \mathbf{x}, \mathbf{u}^n, D^1 \mathbf{u}^n, D^1 \mathbf{a}^n), \\ \mathbf{k}_j^n &= \mathbf{f}\left(t^n + c_j \tau_n, \mathbf{x}, \mathbf{u}^n + \sum_{l=1}^{j-1} \alpha_{jl} \mathbf{k}_l^{n-1}, D^1 \left(\mathbf{u}^n + \sum_{l=1}^{j-1} \alpha_{jl} \mathbf{k}_l^{n-1}\right), D^1 \left(\mathbf{a}^n + \sum_{l=1}^{j-1} \alpha_{jl} \mathbf{k}_l^{n-1}\right)\right). \end{aligned} \tag{7}$$

В последнем выражении $j = 2, \dots, s$; τ_n — шаг по времени, заданный на n -м слое по времени, s — количество стадий метода, которое в расчетах задано равным шести. Значения α_{jl}, c_j, b_j для схем 4-го и 5-го порядков можно найти в [37].

2.3. Локализация особой точки решения

Приближение (5) использует отображение (6), которое включает зависимость от координат особой точки приближаемой функции. Следуя идее из [27], будем полагать, что решение задачи (1), (3) также имеет особую точку с неизвестными априори координатами, которые необходимо вычислить. Для аппроксимации координат особенности используем на каждом временном шаге приближение Чебышёва–Паде неизвестной функции и вычислим нули его знаменателя. Это приближение имеет вид (см. [38, ч. 2, п. 1.6])

$$\tilde{u}^n \approx r_{M,S}(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k T_k(x)}{1 + \sum_{k=1}^S c_k T_k(x)}, \quad (8)$$

где $T_k(x)$ — полином Чебышёва I рода степени k , b_k, c_k — коэффициенты, подлежащие определению, \tilde{u}^n — приближенное решение, полученное на n -м шаге по времени на сетке ξ_k , $k = 0, \dots, N$ (см. (5)). Следуя [27], здесь в качестве M мы выбирали $N / 2$, округленное до целого числа, и задавали $S = 2$. Далее использовали разложение Фурье–Чебышёва функции $\tilde{u}^n(x)$:

$$\tilde{u}^n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k(x). \quad (9)$$

Здесь коэффициенты a_k можно вычислить, зная значения $\tilde{u}^n(x)$ в узлах Чебышёва–Лобатто $x = \tilde{x}^j = \cos(j\pi / \nu)$, $j = 0, \dots, \nu$, $\nu = M + S$, с помощью быстрого преобразования Фурье. Умножая (8) на функцию $q(x)$ и собирая подобные члены при $T_k(x)$, получаем

$$\tilde{u}^n(x)q(x) - p(x) = O(T_{\nu+1}). \quad (10)$$

Подставляя сюда разложения Фурье–Чебышёва функций $\tilde{u}^n(x)$, $q(x)$, $p(x)$, приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения коэффициентов b_k, c_k :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & -d_{0,1} & \dots & -d_{0,S} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & -d_{M,1} & \dots & -d_{M,S} \\ & & & -d_{M+1,1} & \dots & -d_{M+1,S} \\ & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & -d_{M+S,1} & \dots & -d_{M+S,S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_M \\ c_1 \\ \vdots \\ c_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_M \\ a_{M+1} \\ \vdots \\ a_{M+S} \end{pmatrix}.$$

Здесь элементы матрицы $d_{j,k}$ находятся из условия $\sum_{j=0}^{\infty} d_{j,k} T_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j(x) T_k(x)$. Для приближенного вычисления координат особой точки необходимо найти только коэффициенты $c_k, k = 1, \dots, S$, так как ее положение определяется нулями знаменателя (8). В случае $S = 2$ элементы матрицы СЛАУ для вычисления c_k можно выразить явно:

$$\begin{aligned} d_{M+1,1} &= a_{M+1} / 2 + a_{M+3} / 2, & d_{M+1,2} &= a_M / 2 + a_{M+4} / 2, \\ d_{M+2,1} &= a_{M+2} / 2 + a_{M+4} / 2, & d_{M+2,2} &= a_{M+1} / 2 + a_{M+5} / 2. \end{aligned}$$

После решения системы необходимо отыскать корни знаменателя (8). Они являются собственными числами сопровождающей матрицы (см. [39, гл. 18]). Однако при $S = 2$ несложно записать знаменатель в виде полинома второй степени и найти точные значения его корней.

Отметим, что для более точной локализации особой точки в алгоритме используется информация о ее положении на предыдущем шаге по времени (см. [27; 28]). Пусть $\hat{\delta}, \hat{\epsilon}$ — координаты особой точки на предыдущем шаге, тогда разложение (9) на текущем шаге делается не на отрезке $[-1, 1]$, а на суженном отрезке $[\max(\hat{\delta} - 10\hat{\epsilon}, -1), \min(\hat{\delta} + 10\hat{\epsilon}, 1)]$.

2.4. Схема численного решения задачи (1), (3)

Таким образом, для численного решения задачи выполняются следующие шаги.

Шаг 1. Задаем сетку из узлов Чебышёва–Лобатто x_k , $k = 0, \dots, N$, задаем начальный шаг по времени τ и находим значения $u(0, x_k)$, $a(0, x_k)$.

Шаг 2. Делаем переход на следующий шаг по времени по формулам Рунге–Кутты вида (7).

Шаг 3. Находим приближенно координаты (δ, ε) особой точки функции $u(t^n, x)$ на текущем шаге с помощью аппроксимации Чебышёва–Паде.

Шаг 4. Адаптируем сетку к положению особенности, используя отображение $g(x_k, \delta, \varepsilon)$. Переинтерполируем текущее решение на новую сетку, используя (5).

Шаг 5. Повторяем шаги 2–4, пока не дойдем до заданного момента времени $t = t_{\max}$.

Отметим, что в ряде случаев (об этом сказано ниже) на шаге 3 вместо особых точек $u(t^n, x)$ отыскивались особые точки функции $a(t^n, x)$. В качестве t_{\max} задавали время разрушения гладкого решения, которое находилось экспериментально. Для случаев, когда решение не разрушается, значения t_{\max} определены для каждого эксперимента отдельно.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

3.1. Верификация предложенного алгоритма

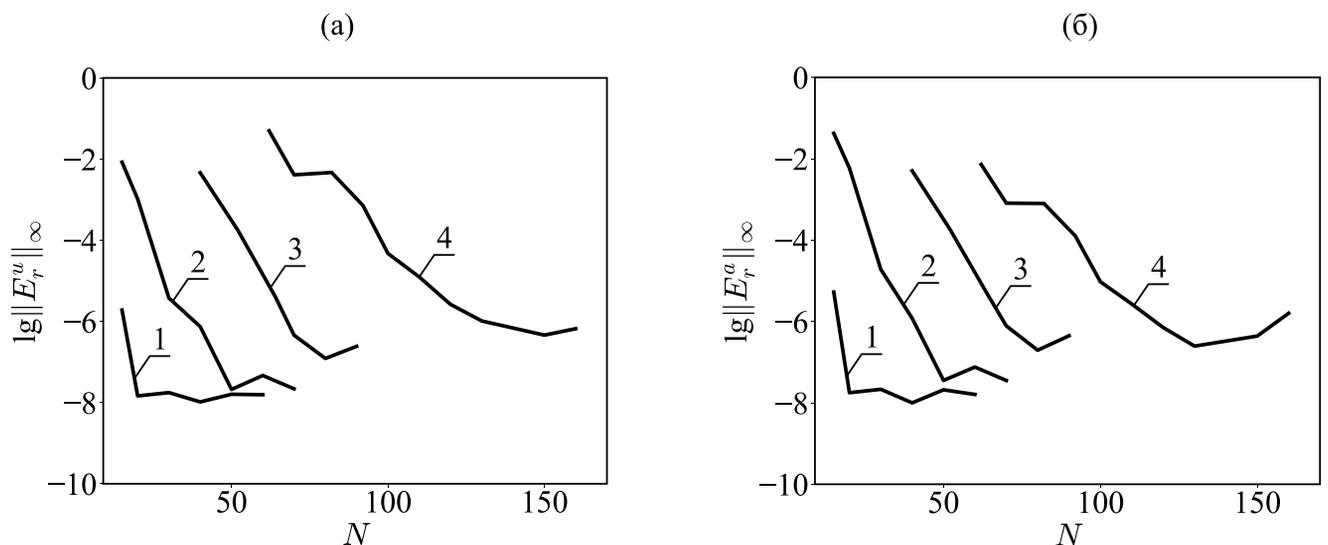
Для тестирования алгоритма задача (1), (3) решалась при $W = 10^{-4}$, $\beta = 0$, $Re = 100$. Расчет велся до момента времени $t_{\max} = 0.6$. Для анализа сходимости метода рассчитаны относительные отклонения $\|E_r^u\|_\infty$, $\|E_r^a\|_\infty$ решений задачи (1), (3), полученные при увеличении числа узлов пространственной сетки:

$$\|E_r^u\|_\infty = \frac{\max_{x \in Q} |\tilde{u}_{N_1}(x) - \tilde{u}_{N_2}(x)|}{\max_{x \in Q} |\tilde{u}_{N_2}(x)|}, \quad \|E_r^a\|_\infty = \frac{\max_{x \in Q} |\tilde{a}_{N_1}(x) - \tilde{a}_{N_2}(x)|}{\max_{x \in Q} |\tilde{a}_{N_2}(x)|}, \quad (11)$$

где $\tilde{u}_{N_1}, \tilde{u}_{N_2}$ — приближенные решения для скорости при $t = t_{\max}$, полученные на сетках из $N_1 + 1, N_2 + 1$ узлов соответственно (аналогично для $\tilde{a}_{N_1}, \tilde{a}_{N_2}$), $N_2 > N_1$, Q — множество из 1000 точек, равномерно распределенных на отрезке $[-1, 1]$.

В тестовом расчете показано, что относительные отклонения решений при $t_{\max} = 0.6$ и $N_2 = N_1 + 10$ с ростом N_1 стремительно уменьшаются и при $N_1 = 50$ составляют примерно 10^{-8} . Этот расчет также показал, что алгоритм вычисления координаты особой точки устойчив, только если точка лежит достаточно близко к отрезку $[-1, 1]$.

Установлено, что применение алгоритма с адаптацией сетки к особенности функции $a(t, x)$ приводит к тем же результатам, что и применение алгоритма с адаптацией к особенности функции $u(t, x)$. В данном случае при $t \in [0.1, 0.6]$ приближенные значения координат особых точек функций u и a вычислялись устойчиво и отличались друг от друга на величину порядка 10^{-2} . Так, при $t = 0.6$ координата



Фиг. 2. Десятичный логарифм относительных отклонений решений $u(t, x)$ (а) и $a(t, x)$ (б) при $\tau = 10^{-5}/2$, $W = 10^{-4}$ и различных Re , равных 10 (1), 100 (2), 1000 (3), 10^4 (4).

особой точки функции $u(t, x) - z^* \approx 0.607 + 0.15i$, функции $a(t, x) - z^* \approx 0.605 + 0.136i$. Отметим, что при использовании аппроксимации (8) при $S = 2$ в рамках разработанного алгоритма мы всегда получаем пару комплексно-сопряженных полюсов. Здесь и далее без ограничения общности полагаем, что особая точка лежит в верхней комплексной полуплоскости.

В качестве верификации предложенных модели и алгоритма численные решения задачи (1), (3) при $W = 10^{-4}$, $Re = 1000$ и $\beta = 0$ сопоставлялись с решениями уравнения Бюргерса (2) с начальными и краевыми данными (3). Напомним, что при $W \rightarrow 0$ система (1) преобразуется в уравнение (2). Решения задач (1), (3) и (2), (3) имеют по одному фронту. Относительные отклонения решений при $t = 0.6$ на фронтах в этом расчете составили 0.167. Вне фронтов величины отклонений имеют порядок 10^{-3} . Отклонения траекторий особых точек по порядку не превышают 10^{-2} . Это свидетельствует о том, что качественные свойства модели воспроизводятся в расчетах верно.

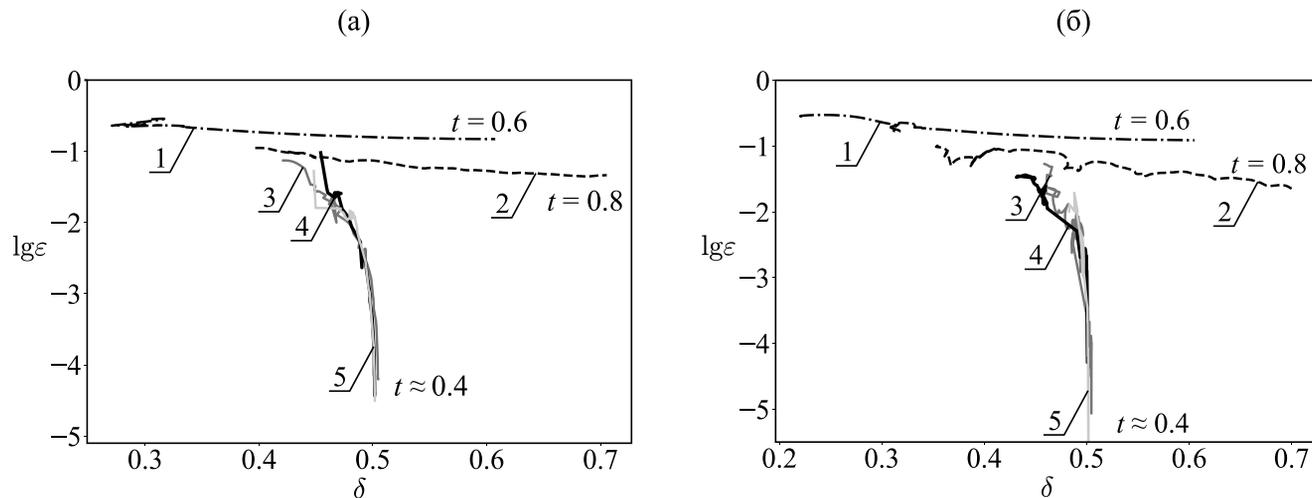
Далее была исследована сходимость численных решений с увеличением числа узлов N при различных Re . При этом решения задачи (1), (3) найдены в момент времени $t = t_{max} = 0.6$, и построены графики логарифмов их отклонений (11) в зависимости от $N = N_1$ (фиг. 2). В каждом из проведенных расчетов мы полагали $N_2 = N_{max} + 10$, где N_{max} соответствует максимальному значению $N = N_1$, представленному на графиках. Из анализа графиков на фиг. 2 следует, что характер сходимости является экспоненциальным, а вклад погрешностей, связанных с округлением действительных чисел в памяти компьютера (минимальные значения отклонений для каждого из четырех расчетов), с ростом Re возрастает незначительно.

Отметим, что при увеличении N координаты особых точек изменялись незначительно. Например, в случае $Re = 1000$, $t = t_{max}$ отклонения не превышали 2×10^{-3} . Эти результаты свидетельствуют о том, что особые точки у искомым решений существуют и их координаты с использованием разработанного алгоритма определяются устойчиво.

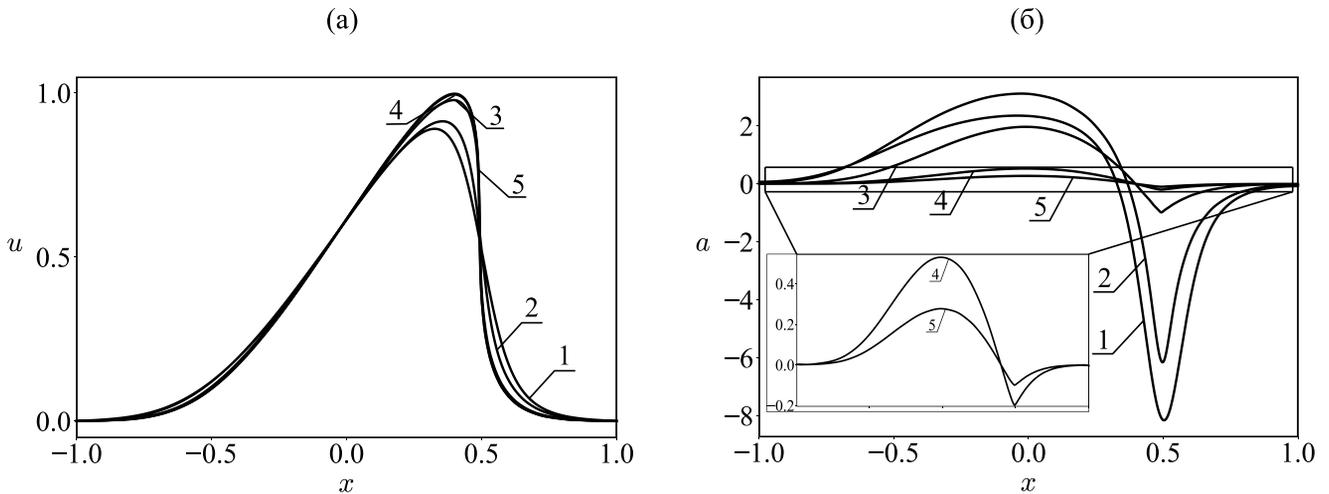
3.2. Численный анализ течений полимерной жидкости

В ходе численного решения задачи (1), (3) при вариации параметров Re , W и β установлено, что наибольшее влияние на картину течения оказывает параметр W , а также его соотношение с Re . Исследования проведены для достаточно большого диапазона значений W от 10^{-5} до 10. Эти значения включают, как случаи малого влияния упругих эффектов ($W \ll 1$), в которых реализуется классическая инерционная и упруго-инерционная турбулентности, так и случаи, когда вклад упругости является существенным ($W \gtrsim 1$). Для последних речь может идти о переходе к чисто упругой турбулентности.

В указанном диапазоне для W при умеренных значениях Re обнаружены два качественно различных режима течения с пороговым значением $W \approx 0.5$. В обоих режимах у скорости формируется большой градиент, что связано с приближением z^* к $[-1, 1]$. Однако в первом режиме при $W > 0.5$ и любых значениях остальных параметров траектория $z^*(t)$ становится практически вертикальной в окрестности $t = 0.4$ и особая точка вплотную приближается к $[-1, 1]$ (фиг. 3, линии 3–5). В случае $W = 1$ при вариации N и τ нам удавалось получать корректные результаты вплоть до $t = t^* = 0.42$. В случаях $W = 5$



Фиг. 3. Траектории движения особых точек скорости $u(t, x)$ (а) и функции $a(t, x)$ (б) при $Re = 100$, $\beta = 0.42$ и различных W , равных 0.01 (-----, 1), 0.1 (- · - ·), 2), 1 (темно-серый цвет, 3), 5 (черный цвет, 4), 10 (светло-серый цвет, 5).



Фиг. 4. Профили $u(0.4, x)$ (а) и $a(0.4, x)$ (б) при $Re = 100$, $\beta = 42$ и различных W , равных 0.01 (1), 0.1 (2), 1 (3), 5 (4), 10 (5).

и $W = 10$ — вплоть до $t = t^* = 0.415$. Далее при увеличении t у решений наблюдались осцилляции в окрестности $x = \delta^* = 0.5$, характерные для явления Гиббса, что свидетельствует о наличии разрыва, причем рвется функция $u(t, x)$ (фиг. 4а, градиенты линий 3–5), а у функции $a(t, x)$ возникает разрыв производной (фиг. 4б, изломы линий 3–5).

Во втором режиме при $W < 0.5$ картина течения существенно зависит от Re . При значениях Re порядка сотни и меньше величина $\text{Im } z^*$ достигает минимума и далее практически не изменяется (фиг. 3, линии 1, 2). Моменты времени, при которых достигается минимум, отмечены на фиг. 3. Аналогичные траектории особых точек для $u(t, x)$ наблюдались в [28] при решении задачи (2), (3) для уравнения Бюргерса. Функция $a(t, x)$ имеет пик в окрестности $x = 0.5$. При этом вершина пика на фиг. 4б (см. линии 1, 2) сглажена. Другая ситуация реализуется, когда $W < 0.5$ и Re принимает значение больше нескольких сотен. В таком случае особая точка достигает отрезка $[-1, 1]$, как и в первом режиме, только несколько позже. При этом момент времени, при котором точка попадает на отрезок $[-1, 1]$, t^* существенно зависит от Re : чем меньше Re , тем больше t^* .

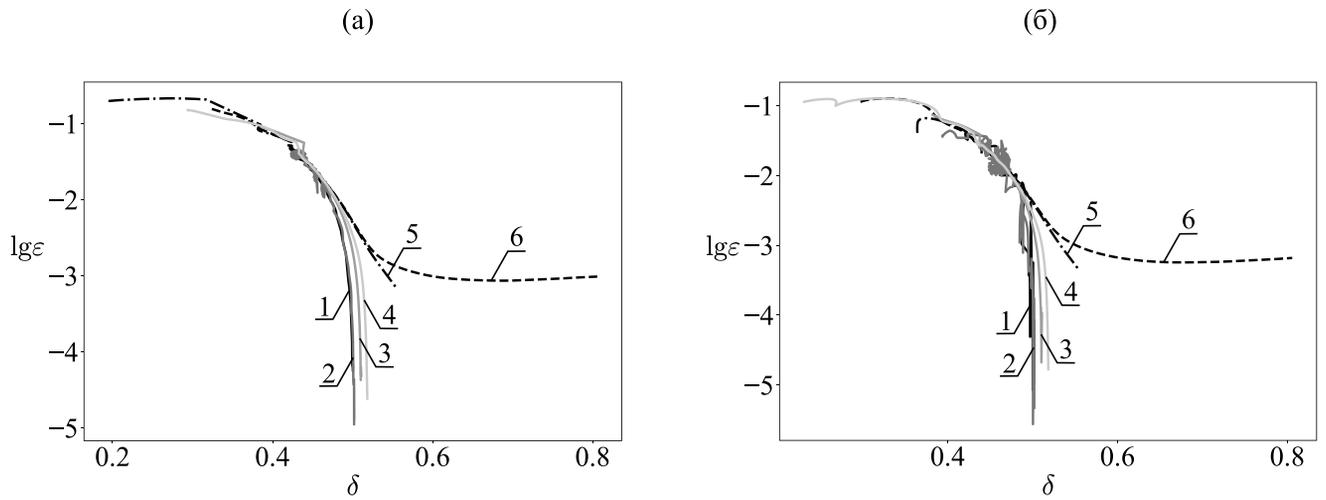
Отдельно следует сказать о случае $W \ll 1$ и $Re \gg 1000$. Например, в табл. 1 при $Re = 10^4$, $\beta = 0.42$ и разных W приведены приближенные значения моментов времени t^* , когда особая точка достигает отрезка $[-1, 1]$, и координат точек отрезка $\delta^* \in [-1, 1]$, в которые попадает особая точка при $t = t^*$. Прочерки в табл. 1 означают, что особая точка не достигает отрезка и в определенный момент времени начинает двигаться параллельно действительной оси в \mathbb{C} . Чтобы убедиться в этом, мы продлили расчет до момента времени $t = t_{\max} = 1$.

На фиг. 5 приведены траектории движения особых точек при $Re = 10^4$, $\beta = 0.42$ и при различных W . Пороговое значение W , при котором характер движения особой точки меняется, приблизительно равно 10^{-3} (линия 5 на фиг. 5). В этом случае у траектории появляется точка перегиба, характерная для режимов, когда особенность не достигает действительной оси. Однако приближенное решение все равно разрушается со временем, при этом положение особой точки сильно колеблется.

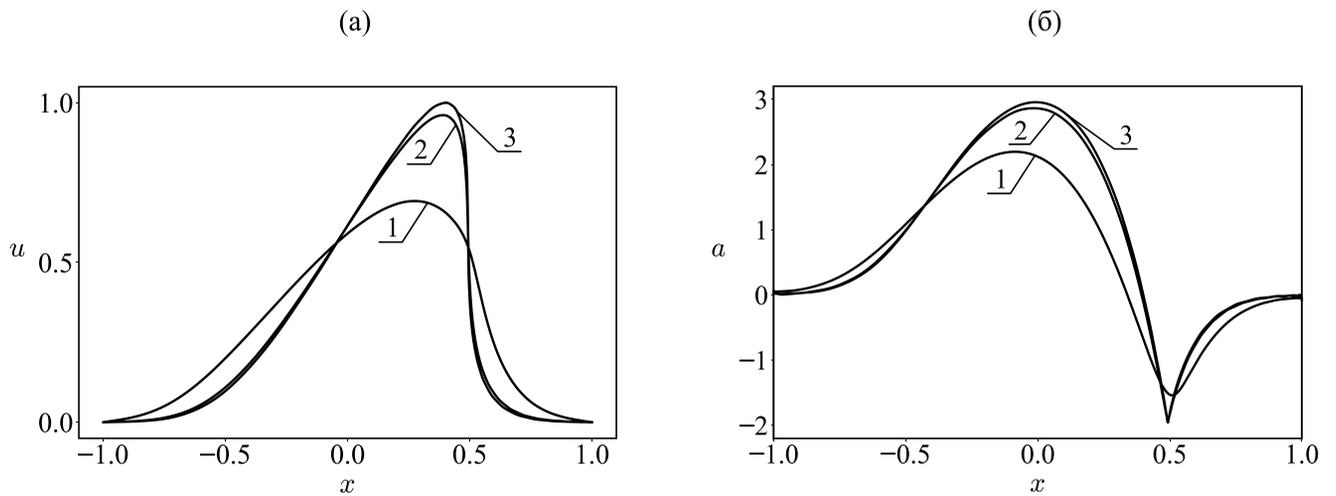
При дальнейшем увеличении Re наблюдается аналогичная ситуация, но пороговое значение W уменьшается по закону близкому к обратной пропорциональности со значением Re . Например, при $Re = 10^5$ и $W = 10^{-4}$ особая точка достигает действительной оси, а при $W = 10^{-5}$ она начинает двигаться параллельно оси, но вскоре численное решение разрушается.

Число Рейнольдса также оказывает существенное влияние на характер течения. При увеличении Re фронт скорости u становится более крутым и градиент a меняется более резко (фиг. 6). При этом в случае $W = 0.5$ возникают два режима. При умеренных значениях $Re < 100$ особая точка остается на небольшом расстоянии от отрезка $[-1, 1]$ и разрывов не наблюдается. При $Re > 100$ особая точка резко приближается к $[-1, 1]$, что ведет к скачку значения функции u и производной a . Важно отметить, что время формирования разрыва остается прежним: $t \approx 0.4$.

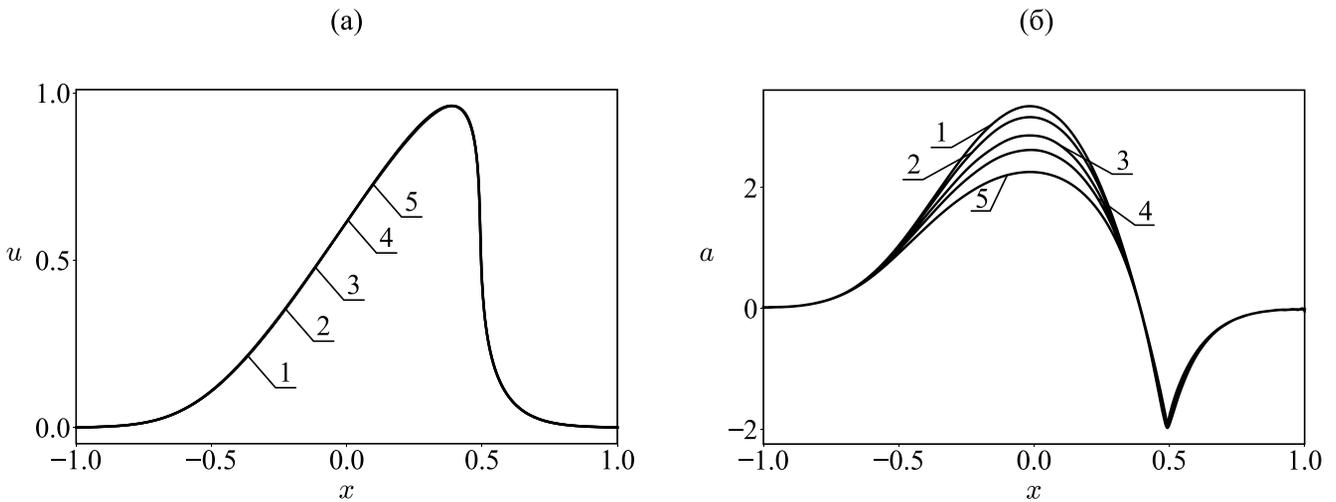
На фиг. 7 приведены профили решения при $W = 0.5$, $Re = 100$, $t_{\max} = 0.4$ и различных β , которые для скорости u визуально совпадают. У профилей решения для a при разных β отличаются максимальные значения. При этом траектории движения особых точек во всех случаях достигали действительной оси



Фиг. 5. Траектории особых точек функций u (а) и a (б) при $Re = 10^4$, $\beta = 0.42$ и разных W , равных 0.1 (черный цвет, 1), 0.05 (темно-серый цвет, 2), 0.01 (серый цвет, 3), 0.005 (светло-серый цвет, 4), 0.001 (-----, 5), 0.0005 (- - -, 6).



Фиг. 6. Профили $u(0.4, x)$ (а) и $a(0.4, x)$ (б) при $W = 0.5$, $\beta = 0.42$ и различных Re , равных 10 (1), 100 (2), 10^4 (3).



Фиг. 7. Профили $u(0.4, x)$ (а) и $a(0.4, x)$ (б) при $W = 0.5$, $Re = 100$ и различных β , равных 0 (1), 0.14 (2), 0.42 (3), 0.7 (4), 1.26 (5).

в один и тот же момент времени. Таким образом, вариация параметра β оказывает наименьшее влияние на эволюцию решений.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан новый алгоритм решения начально-краевых задач для квазилинейных систем уравнений, основанный на высокоточных дробно-рациональных приближениях. Его эффективность показана при численном моделировании течения полимерной жидкости. В ходе решения задачи происходит адаптация сетки к положению особой точки в комплексной плоскости, тем самым увеличивается скорость сходимости численного метода. Алгоритм позволяет связать разрушение гладких решений во времени с выходом особой точки на действительную ось.

Вопросы о существовании, единственности и типе особой точки, а также о непрерывной зависимости ее координат от числа степеней свободы используемых аппроксимаций выше не обсуждались. Отметим, что необходимых и достаточных условий существования-единственности особой точки приближаемой функции в рамках теории дробно-рациональных аппроксимаций до сих пор установлено не было. Вместе с тем из приведенных графиков видно, что решение имеет один фронт, и барицентрические интерполяции, построенные с учетом одной особой точки, демонстрируют экспоненциальный характер сходимости. Это свидетельствует о существовании и единственности особой точки аналитического продолжения искомого решения в малой окрестности области задачи в \mathbb{C} . Следовательно, для ее локализации достаточно использовать приближения Чебышёва–Паде с многочленом второй степени в знаменателе. Алгоритм построения таких приближений является экономичным (см. [27]), что принципиально для решения нестационарных задач.

Важным вопросом остается определение траекторий особенностей в случае, когда их несколько. Для решения этой проблемы можно использовать различные подходы. Повышение степени S знаменателя аппроксимаций Паде вида (8) может привести к плохой обусловленности, численной неустойчивости и ложным полюсам, так называемым дублетам Фруассара (Froissart doublets) (см. [18; 27; 38]). Тем не менее в рассмотренной задаче такие аппроксимации демонстрируют сгущение нулей и полюсов в окрестности единственной найденной нами особой точки, что является еще одним подтверждением ее существования и единственности. Заметим, что для строгого анализа распределения нулей и полюсов помимо решения открытых проблем теории приближения дробно-рациональными функциями требуются неуклучшаемые оценки погрешности разработанного метода и теоремы о влиянии этой погрешности на положения нулей и полюсов, что является темой дальнейших исследований. В связи с этим графики распределений нулей и полюсов приближений решения здесь мы не обсуждаем. Отметим только еще один подход к локализации нескольких особенностей в \mathbb{C} , состоящий в построении дробно-рациональных приближений с полиномами второй степени в знаменателе (8) на малых подынтервалах исходного отрезка (см. [28]). Предложенное в указанной статье отображение позволяет строить адаптивную сетку для произвольного числа особенностей. Подобная идея обсуждается также в [30], где она реализована с подачи классика теории барицентрических приближений, проф. Жан-Поля Берру (Jean-Paul Berrut).

С точки зрения механики полученные результаты позволяют констатировать качественное различие течений ньютоновской и полимерной жидкостей при достаточно больших W . Прежде всего это касается разрушения решений задач с гладкими начальными данными при умеренных Re . Пороговое значение W , при котором наблюдается этот эффект, есть $W \approx 0.5$, а характерное безразмерное время существования решения $t \approx 0.42$. Важно обратить внимание на близость этих величин и на то, что по определению W и t есть соответственно время релаксации и время эволюции течения, нормированные на временной масштаб задачи T_C (см. комментарии к формуле (1)), т.е. если время релаксации превышает $0.5T_C$, то время существования гладкого решения меньше $0.5T_C$.

Заметим, что режим $W \ll 1$ и $Re \gg 1000$ представляет течения с большим вкладом вязких и малым вкладом упругих эффектов, в которых возможен переход от классической инерционной к инерционно-упругой турбулентности. В работах [6; 9] показано, что турбулентное течение в таком случае возникает при определенном соотношении между критическими значениями параметров вида $Re \sim E(1-b)^{-1/2}$, где b — отношение вязкостей растворителя и полимерного раствора, $E = W/Re$ — характеристика эластичности (см. [6, рис. 4 и комментарии к нему]). Нетрудно видеть, что эта связь соответствует соотношению $Re \sim W^{-1}$, установленному для этого режима и в нашей работе.

Отметим, что, как и в классическом случае для уравнения Бюргера, увеличение Re приводит к росту градиентов решения, но при этом для достаточно больших W возникают пороговые значения Re , при превышении которых гладкие решения разрушаются, что уже нехарактерно для уравнения Бюргера с ненулевой вязкостью. Для большей размерности, конечно, вопрос о существовании гладких решений уравнений Навье–Стокса остается открытым и составляет так называемую задачу тысячелетия. Есть все

основания полагать, что соответствующая проблема для течений вязкоупругих жидкостей является еще более сложной. В этой связи подчеркнем, что предложенный метод расчета траекторий особых точек, являясь аппроксимационным, не дает необходимых и достаточных условий их существования. Однако он представляет важный шаг на пути к созданию аппарата для численного анализа указанных проблем и может послужить импульсом к развитию новых теоретических подходов. В частности, на основе асимптотического и комплексного анализа с применением теорем о сходимости полиномиальных и дробно-рациональных приближений авторами исследуются возможности вывода систем дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию особой точки. Анализ таких систем даст ответы на многие вопросы о существовании гладких решений задач гидродинамики.

Таблица 1. Приближенные значения момента времени появления разрыва решения и координаты разрыва при $Re = 10^4$ и различных W

W	t_{\max}	δ_0
0.1	0.413	0.5005
0.05	0.4158	0.5021
0.01	0.4303	0.5109
0.005	0.443	0.5184
0.001	0.504	0.5539
0.0006	—	—

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nourdine A., Flandin L., Albürola N., Perrin L., Planus E., Hiltnercd A., Baercd E.* Extrusion of a nano-order active layer for organic photovoltaic cells // *Sustain. Energ. Fuels.* 2017. No. 9. P. 2016–2027.
2. *Orrill M., LeBlanc S.* Printed thermoelectric materials and devices: Fabrication techniques, advantages and challenges // *J. Appl. Polym. Sci.* 2017. V. 134. No. 44256. P. 1–15.
3. *Hwang W., Xin G., Cho M., Cho S. M., Chae H.* Electrospray deposition of polymer thin films for organic light-emitting diodes // *Nanoscale Res. Lett.* 2012. V. 7. No. 52. P. 1–7.
4. *Datta S. S., Ardekani A. M., Arratia P. E., Beris A. N., Bischofberger I., McKinley G.H., Eggers J. G., Lypez-Aguilar J.E., Fielding S. M., Frishman A., Graham M. D., Guasto J. S., Haward S. J., Shen A. Q., Hormozi S., Morozov A., Poole R. J., Shankar V., Shaqfeh E. S. G., Stark H., Steinberg V., Subramanian G., Stone H. A.* Perspectives on viscoelastic flow instabilities and elastic turbulence // *Phys. Rev. Fluids.* 2022. V. 7. No. 080701. P. 1–80.
5. *McKinley G. H., Pakdel P., Öztekin A.* Rheological and geometric scaling of purely elastic flow instabilities // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* 1996. V. 67. P. 19–47.
6. *Khalid M., Shankar V., Subramanian G.* Continuous pathway between the elasto-inertial and elastic turbulent states in viscoelastic channel flow // *Phys. Rev. Lett.* 2021. V. 127. No. 134502. P. 1–6.
7. *Page J., Dubief Y., Kerswell R. R.* Exact Traveling Wave Solutions in Viscoelastic Channel Flow // *Phys. Rev. Lett.* 2020. V. 125. No. 154501. P. 1–5.
8. *Choueiri G.H., Lopez J. M., Varshney A., Sankar S., Hof B.* Experimental observation of the origin and structure of elasto-inertial turbulence // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 2021. V. 118. No. 45. Art. #e2102350118. P. 1–5.
9. *Chandra B., Shankar V., Das D.* Onset of transition in the flow of polymer solutions through microtubes // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 844. P. 1052–1083.
10. *Garg P., Chaudhary I., Khalid M., Shankar V., Subramanian G.* Viscoelastic pipe flow is linearly unstable // *Phys. Rev. Lett.* 2018. V. 121. No. 024502. P. 1–6.
11. *Chaudhary I., Garg P., Subramanian G., Shankar V.* Linear instability of viscoelastic pipe flow // *J. Fluid Mech.* 2021. V. 908. No. A11. P. 1–53.
12. *Pokrovskii V. N., Altukhov Y. A., Pyshnograï G. V.* The mesoscopic approach to the dynamics of polymer melts: consequences for the constitutive equation // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 1998. V. 76. No. 1–3. P. 153–181.
13. *Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Пышнограï Г. В., Кошелев К. Б.* Введение в мезоскопическую теорию текучести полимерных систем. Барнаул: Изд-во АлтГПА, 2012. 116 с.
14. *Burgers J. M.* Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence // *Proc. Acad. Sci. Amsterdam.* 1940. V. 43. P. 2–12.

15. *Hon Y.C., Mao X. Z.* An efficient numerical scheme for Burgers' equation // *Appl. Math. Comput.* 1998. V. 95. P. 37–50.
16. *Semisalov B. V., Belyaev V. A., Bryndin L. S., Gorynin A. G., Blokhin A. M., Golushko S. K., Shapeev V. P.* Verified simulation of the stationary polymer fluid flows in the channel with elliptical cross-section // *Appl. Math. Comput.* 2022. V. 430. No. 127294. P. 1–25.
17. *Sulem C., Sulem P.-L., Frish U.* Tracing complex singularities with spectral methods // *J. of Comp. Phys.* 1983. Vol. 50. P. 138–161.
18. *Weideman J. A.C.* Computing the dynamics of complex singularities of nonlinear PDEs // *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 2003. V. 2. No. 2. P. 171–186.
19. *Caflich R. E., Gargano F., Sammartino M., Sciacca V.* Complex singularities and PDEs // *Riv. Math. Univ. Parma.* 2015. V. 6 (1). P. 69–133.
20. *Weideman J. A.C.* Dynamics of Complex Singularities of Nonlinear PDEs // *Recent Advances in Industrial and Applied Mathematics / Eds. T. Ch. Rebollo, R. Donat, I. Higuera. ICIAM 2019 SEMA SIMAI Springer Series.* V. 1. Valencia. P. 227–247.
21. *Stahl H. R.* Poles and zeros of best rational approximants of $|x|$ // *Constr. Approx.* 1994. V. 10. P. 469–522.
22. *Stahl H. R.* Best uniform rational approximation of x^α on $[0, 1]$ // *Acta Math.* 2003. V. 190. P. 241–306.
23. *Suetin S. P.* On the convergence of rational approximations to polynomial expansions in domains of meromorphy of a given function // *Math USSR Sbornik.* 1978. V. 34. No. 3. P. 367–381.
24. *Рахманов Е. А., Суетин С. П.* Аппроксимации Чебышёва–Паде для многозначных функций // *Тр. ММО.* 2022. Т. 83. № 2. С. 101–126.
25. *TRefethen L. N., Nakatsukasa Y., Weideman J. A.C.* Exponential node clustering at singularities for rational approximation, quadrature, and PDEs // *Numerische Mathematik.* 2021. V. 147. P. 227–254.
26. *Gopal A., TRefethen L. N.* Rational minimax approximation via adaptive barycentric Representations // *SIAM J. of Sci. Comput.* 2018. V. 40. No. 4. P. A2427–A2455.
27. *Tee T. W., TRefethen L. N.* A rational spectral collocation method with adaptively transformed Chebyshev grid points // *SIAM J. Sci. Comput.* 2006. V. 28. No. 5. P. 1798–1811.
28. *Идимешев С. В.* Дробно-рациональная аппроксимация в начально-краевых задачах с фронтами // *Вычисл. технологии.* 2020. Т. 25. № 2. С. 63–79.
29. *Baltensperger R., Berrut J.-P., Noël B.* Exponential convergence of a linear rational interpolant between transformed Chebyshev points // *Math. Comput.* 1999. V. 68. No. 227. P. 1109–1120.
30. *Jafari-Varzaneh H. A., Hosseini S. M.* A new map for the Chebyshev pseudospectral solution of differential equations with large gradients // *Numerical Algorithms.* 2015. V. 69. P. 95–108.
31. *Семисалов Б. В., Кузьмин Г. А.* К вопросу о приближении гладких функций с погранслойными составляющими // *Труды УрО РАН.* 2021. Т. 27. С. 111–124.
32. *Семисалов Б. В.* Применение дробно-рациональных интерполяций для решения краевых задач с особенностями // *Вестник ЮУрГУ. Сер.: Мат. модел. программ.* 2022. Т. 15. № 4. С. 5–19.
33. *Блохин А. М., Семисалов Б. В.* Стационарное течение несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости в канале с эллиптическим сечением // *Сиб. журнал индустр. матем.* 2014. Т. 17. № 4. С. 38–47.
34. *Salzer H. E.* Lagrangian interpolation at the Chebyshev points $x_{n,v} = \cos(v\pi)/n, v = O(1)n$; some unnoted advantages // *Computer J.* 1972. V. 15. No. 2. P. 156–159.
35. *Higham N. J.* The numerical stability of barycentric Lagrange interpolation // *IMA J. Numer. Anal.* 2004. V. 24. No. 4. P. 547–556.
36. *Schneider C., Werner W.* Some new aspects of rational interpolation // *Math. Comput.* 1986. V. 47. No. 175. P. 285–299.
37. *Dormand J. R., Prince P. J.* A family of embedded Runge–Kutta formulae // *J. Comput. Appl. Math.* 1980. V. 6. No. 1. P. 19–26.
38. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
39. *TRefethen L. N.* Approximation theory and approximation practice. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013. 305 p.

УДК 519.6, 551.46

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛОВ ЗАДАЧИ ВАРИАЦИОННОГО УСВОЕНИЯ ДАННЫХ ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ НАЧАЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ И ПОТОКА ТЕПЛА ДЛЯ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИКИ МОРЯ¹⁾

© 2024 г. В. П. Шутяев^{1,*}, Е. И. Пармузин^{1,**}

¹119333 Москва, ул. Губкина, 8, Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Россия

*e-mail: victor.shutyayev@mail.ru

**e-mail: e.parmuzin@inm.ras.ru

Поступила в редакцию 23.06.2023 г.

Переработанный вариант 20.07.2023 г.

Принята к публикации 16.09.2023 г.

Рассматривается задача вариационного усвоения данных наблюдений с целью восстановления начального состояния и потоков тепла для математической модели термодинамики моря, разработанной в Институте вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН. Исследована чувствительность функционалов от решения к входным данным о потоке тепла на поверхности моря в рассматриваемой задаче вариационного усвоения, и приведены результаты численных экспериментов для модели динамики Черного моря. Библиография: 32. Фиг. 4.

Ключевые слова: вариационное усвоение данных наблюдений, оптимальное управление, сопряженные уравнения, ковариационные матрицы, чувствительность функционалов, модель термодинамики моря.

DOI: 10.31857/S0044466924010133, EDN: ZIOZWT

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы растущий интерес к проблемам усвоения данных наблюдений в математических моделях геофизической гидродинамики обусловлен значительным прогрессом в создании все более мощных вычислительных комплексов, развитием новых спутниковых и контактных измерительных технологий, а также новых методов и численных алгоритмов. Необходимость синтеза данных измерений и данных моделирования породила сложнейшие научные и технологические проблемы, связанные с усовершенствованием вычислительных методов моделирования и анализа природных явлений. Методы усвоения данных позволяют связать модельные расчеты с реальными данными для построения или уточнения неизвестных входных данных или параметров и повышения точности прогноза (см. [1]–[9]).

При рассмотрении задач вариационного усвоения данных наблюдений важную роль играет анализ чувствительности оптимального решения и его функционалов по отношению к входным данным (см. [10]–[17]). В [18] проведено исследование чувствительности функционалов от оптимального решения задачи вариационного усвоения данных с целью восстановления потоков тепла на поверхности моря при использовании ковариационных матриц ошибок данных наблюдений и ошибок начального приближения (бэкграунда). Настоящая работа обобщает результаты работы [18] на случай задачи вариационного усвоения данных при одновременном восстановлении начального состояния и потока тепла для модели термодинамики моря. Исследована чувствительность функционалов от оптимального решения по отношению к входным данным о потоке тепла, доказана теорема о представлении градиента функционала через гессиан функции стоимости и приведены результаты численных экспериментов для модели динамики Черного моря, разработанной в ИВМ РАН.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 20-11-20057, исследования в разд. 1 и 2), а также при поддержке Отделения Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (соглашение с Минобрнауки РФ № 075-15-2022-286).

1. ЗАДАЧА ВАРИАЦИОННОГО УСВОЕНИЯ ДАННЫХ
ДЛЯ МОДЕЛИ ТЕРМОДИНАМИКИ МОРЯ

Рассмотрим задачу термодинамики моря в виде (см. [19], [20])

$$\begin{aligned}
 T_t + (\bar{U}, \text{Grad})T - \text{Div}(\hat{a}_T \cdot \text{Grad} T) &= f_T \text{ в } D \times (0, \bar{t}), \\
 T &= T_0 \text{ при } t = 0 \text{ в } D \\
 -v_T \frac{\partial T}{\partial z} &= Q \text{ на } \Gamma_S \times (0, \bar{t}), \quad \frac{\partial T}{\partial N_T} = 0 \text{ на } \Gamma_{w,c} \times (0, \bar{t}), \\
 \bar{U}_n^{(-)}T + \frac{\partial T}{\partial N_T} &= \bar{U}_n^{(-)}d_T + Q_T \text{ на } \Gamma_{w,op} \times (0, \bar{t}), \\
 \frac{\partial T}{\partial N_T} &= 0 \text{ на } \Gamma_H \times (0, \bar{t}),
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $T = T(x, y, z, t)$ — неизвестная функция температуры, $t \in (0, \bar{t})$, $(x, y, z) \in D = \Omega \times (0, H)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $H = H(x, y)$ — функция рельефа дна, $Q = Q(x, y, t)$ — суммарный приток тепла, $\bar{U} = (u, v, w)$, $\hat{a}_T = \text{diag}((a_T)_{ii})$, $(a_T)_{11} = (a_T)_{22} = \mu_T$, $(a_T)_{33} = \nu_T$, $f_T = f_T(x, y, z, t)$ — заданные функции. Скорости u, v, w зависят в общем случае от пространства и времени и считаются заданными в данной постановке, а коэффициенты μ_T, ν_T предполагаются зависящими только от пространственных переменных на рассматриваемом интервале по времени. Граница области $\Gamma \equiv \partial D$ представляется как объединение четырех непересекающихся частей $\Gamma_S, \Gamma_{w,op}, \Gamma_{w,c}, \Gamma_H$, где $\Gamma_S = \Omega$ (невозмущенная поверхность моря), $\Gamma_{w,op}$ — жидкая (открытая) часть вертикальной боковой границы, $\Gamma_{w,c}$ — твердая часть вертикальной боковой границы, Γ_H — дно моря. Другие обозначения и детальное описание постановки задачи можно найти в работах [21], [22], [23].

Запишем задачу (1.1) в форме операторного уравнения в $(W_2^1(D))^*$:

$$\begin{aligned}
 T_t + LT &= F + BQ \text{ для п.в. } t \in (0, \bar{t}), \\
 T &= T_0 \text{ при } t = 0,
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

где равенство понимается в обобщенном смысле, а именно,

$$(T_t, \hat{T}) + (LT, \hat{T}) = F(\hat{T}) + (BQ, \hat{T}) \quad \forall \hat{T} \in W_2^1(D), \tag{1.3}$$

а операторы L, F, B определяются интегральными соотношениями

$$\begin{aligned}
 (LT, \hat{T}) &\equiv \int_D (-T \text{Div}(\bar{U} \hat{T})) dD + \int_{\Gamma_{w,op}} \bar{U}_n^{(+)} T \hat{T} d\Gamma + \int_D \hat{a}_T \text{Grad}(T) \times \text{Grad}(\hat{T}) dD, \\
 F(\hat{T}) &= \int_{\Gamma_{w,op}} (Q_T + \bar{U}_n^{(-)} d_T) \hat{T} d\Gamma + \int_D f_T \hat{T} dD, \\
 (T_t, \hat{T}) &= \int_D T_t \hat{T} dD, \quad (BQ, \hat{T}) = \int_{\Omega} Q \hat{T} |_{z=0} d\Omega,
 \end{aligned}$$

при этом функции \hat{a}_T, Q_T, f_T, Q таковы, что равенство (1.3) имеет смысл.

Обобщенная постановка рассматривается для краткости записи, а также для исследования существования и единственности решения задачи. Для аппроксимации и численного решения задачи рассматривается постановка в классической записи (1.1), и физический смысл будут иметь только гладкие решения.

Рассмотрим задачу об усвоении данных о температуре поверхности моря, следуя [22], [24], [18]. Предположим, что в задаче (1.1) функции $T_0 \in L_2(D)$ и $Q \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ не известны. Пусть задана функция данных наблюдений $T_{obs}(x, y, t)$ на $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega$ при $t \in (0, \bar{t})$, которая по своему физическому смыслу есть приближение к функции поверхностной температуры на Ω , т.е. к $T|_{z=0}$. Считаем,

что $T_{obs} \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$. Допускается случай, когда T_{obs} имеется лишь на некотором подмножестве из $\Omega \times (0, \bar{t})$, характеристическую функцию которого обозначим через m_0 .

Будем предполагать, что данные наблюдений T_{obs} заданы с ошибками, а именно,

$$T_{obs} = m_0 T^t |_{z=0} + \xi_{obs},$$

где T^t — точное решение задачи (1.1) при некотором $Q = Q^t$, а $\xi_{obs} \in Y_{obs} = L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ рассматривается как ошибка наблюдений в пространстве наблюдений Y_{obs} . Предполагается, что ошибки ξ_{obs} случайные и они распределены по нормальному закону (гауссовские) с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором $R = E[(\cdot, \xi_{obs})\xi_{obs}]$, $R : Y_{obs} \rightarrow Y_{obs}$, где E — математическое ожидание. В дальнейшем мы будем предполагать, что R положительно определен и, значит, обратим.

Рассмотрим следующую задачу вариационного усвоения данных: найти T , T_0 и Q , такие что

$$\begin{aligned} T_t + LT &= F + BQ, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ T &= T_0 \text{ при } t = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$J(T_0, Q) = \inf_{T, Q} J(T, Q),$$

где

$$\begin{aligned} J(T_0, Q) &= \frac{\alpha}{2} \int_D |T_0 - T^{(0)}|^2 dD + \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} (Q - Q^{(0)}) \mathcal{B}^{-1} (Q - Q^{(0)}) d\Omega dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\bar{t}} \int_{\Omega} (m_0 T |_{z=0} - T_{obs}) \times R^{-1} (m_0 T |_{z=0} - T_{obs}) d\Omega dt, \end{aligned}$$

$T^{(0)} = T^{(0)}(x, y, z)$, $Q^{(0)} = Q^{(0)}(x, y, t)$ — заданные функции, $\alpha = \text{const} > 0$, $\mathcal{B} : Y_{obs} \rightarrow Y_{obs}$ — ковариационный оператор ошибок бэкграунда. Функция $Q^{(0)}$ обычно выбирается в качестве начального приближения для неизвестного потока Q (так называемый бэкграунд или фоновый поток). Цель вариационного усвоения данных — используя $T^{(0)}, Q^{(0)}$, найти лучшие оценки для T_0, Q , согласованные с решением модели и наблюдениями для дальнейшего моделирования и прогноза.

Слагаемые с параметром α и с весовым оператором \mathcal{B}^{-1} играют роль регуляризации по Тихонову (см. [25]), они считаются заданными при рассмотрении задачи. Если оператор \mathcal{B} положительно определен, то при $\alpha > 0$ поставленная задача вариационного усвоения данных имеет единственное решение. Существование оптимального решения следует из классических результатов теории экстремальных задач (см. [2]), так как можно показать, что решение задачи (1.2) непрерывно зависит от начального состояния T_0 и потока Q (имеют место априорные оценки в соответствующих функциональных пространствах).

Необходимое условие оптимальности $\text{grad}J = 0$, которое определяет решение сформулированной задачи вариационного усвоения данных, приводит к системе оптимальности (см. [2]):

$$\begin{aligned} T_t + LT &= F + BQ, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ T &= T_0 \text{ при } t = 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} -(T^*)_t + L^* T^* &= BR^{-1} m_0 (B^* T - T_{obs}), \quad t \in (0, \bar{t}), \\ T^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t} \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\alpha(T_0 - T^{(0)}) + T^* |_{t=0} = 0 \text{ в } D, \tag{1.7}$$

$$\mathcal{B}^{-1}(Q - Q^{(0)}) + B^* T^* = 0 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}), \tag{1.8}$$

где L^*, B^* — операторы, сопряженные к L, B соответственно. Последние два уравнения в этой системе означают, что градиент функции стоимости $J(T_0, Q)$ по отношению к начальному состоянию T_0 и потоку тепла Q обращается в нуль. Неизвестными в (1.5)–(1.8) являются функции T, T^*, T_0 и Q .

Отметим, что если T_{obs} — случайная гауссовская величина, то и оптимальное решение будет случайной величиной, распределенной по Гауссу, в силу того что оптимальное решение линейно зависит от T_{obs} , согласно системе оптимальности (1.5)–(1.8).

2. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ К ВХОДНЫМ ДАННЫМ О ПОТОКЕ ТЕПЛА

Рассмотрим функцию $G(T, T_0, Q)$, зависящую от T, T_0, Q , которая предполагается вещественнозначной и может рассматриваться как функционал на $X = L_2(D \times (0, \bar{t})) \times L_2(D) \times L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$. Нас интересует чувствительность функционала $G(T, T_0, Q)$ к входным данным о потоке тепла $Q^{(0)}$ при условии, что T, T_0, Q получены после вариационного усвоения из системы оптимальности (1.5)–(1.8). Как известно из [1], [26], чувствительность функционала определяется градиентом по $Q^{(0)}$, который является производной Гато:

$$\frac{dG}{dQ^{(0)}} = \frac{\partial G}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial Q^{(0)}} + \frac{\partial G}{\partial T_0} \frac{\partial T_0}{\partial Q^{(0)}} + \frac{\partial G}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial Q^{(0)}}. \tag{2.1}$$

Обозначим через $\delta Q^{(0)}$ вариацию функции $Q^{(0)}$. Из (1.5)–(1.8) выводим систему оптимальности для вариаций $\delta T, \delta T^*, \delta T_0, \delta Q$:

$$\begin{aligned} \delta T_t + L\delta T &= B\delta Q, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T &= \delta T_0 \text{ при } t = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} -(\delta T^*)_t + L^*\delta T^* &= BR^{-1}m_0B^*\delta T, \\ t &\in (0, \bar{t}), \\ \delta T^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\alpha\delta T_0 + \delta T^*|_{t=0} = 0 \text{ в } D, \tag{2.4}$$

$$B^{-1}(\delta Q - \delta Q^{(0)}) + B^*\delta T^* = 0 \text{ на } \Omega \times (0, \bar{t}). \tag{2.5}$$

Отметим, что данные наблюдений T_{obs} и функция $T^{(0)}$ уже не входят в систему (2.2)–(2.5), в отличие от (1.5)–(1.8). Нетрудно видеть, что система (2.2)–(2.5) эквивалентна следующей задаче оптимального управления для определения $\delta T, \delta T_0, \delta Q$ таких, что

$$\begin{aligned} \delta T_t &= B\delta Q, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \delta T &= \delta T_0 \text{ при } t = 0, \\ S(\delta T_0, \delta Q) &= \inf_{T_0, Q} S(T_0, Q), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$S(\delta T_0, \delta Q) = \frac{\alpha}{2} \int_D |\delta T_0|^2 dD + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\delta Q - \delta Q^{(0)}) B^{-1} (\delta Q - \delta Q^{(0)}) d\Omega dt + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} m_0 \delta T|_{z=0} R^{-1} \delta T|_{z=0} d\Omega dt. \tag{2.7}$$

Справедлива следующая

Лемма 1. Гессиан \mathcal{H} функционала (2.7) определяется на $\Theta = (\xi, \eta)^T, \xi \in L_2(D), \eta \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ последовательным решением задач

$$\begin{aligned} \psi_t + L\psi &= B\eta, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \psi &= \xi \text{ при } t = 0, \\ -(\psi^*)_t + L^*\psi^* &= BR^{-1}m_0B^*\psi, \quad t \in (0, \bar{t}), \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\psi^* = 0 \text{ при } t = \bar{t}, \quad (2.9)$$

$$\mathcal{H}\Theta = (\alpha\xi + \psi^*|_{t=0}, B^{-1}\eta + B^*\psi^*)^T. \quad (2.10)$$

Доказательство. Согласно системе оптимальности (2.2)–(2.5) градиент функционала (2.7) определяется по формуле

$$\text{grad}S = (\alpha\delta T_0 + \delta T^*|_{t=0}, B^{-1}(\delta Q - \delta Q^{(0)}) + B^*\delta T^*)^T, \tau,$$

где δT^* — решение сопряженной задачи (2.3). Продифференцируем последнюю формулу еще раз по $\delta T_0, \delta Q$, чтобы получить правило действия гессиана

$$\mathcal{H}\Theta = (\alpha\xi + \psi^*|_{t=0}, B^{-1}\eta + B^*\psi^*)^T,$$

где $\Theta = (\xi, \eta)^T$, — вариация $(\delta T_0, \delta Q)^T$, а ψ^* — решение сопряженной задачи (2.9), которая есть не что иное, как продифференцированная задача (2.3). При этом ψ — решение задачи (2.8), которая получена из (2.2) дифференцированием по $\delta T_0, \delta Q$. Лемма доказана.

Введем оператор $\mathcal{P} : L_2(\Omega \times (0, \bar{t})) \rightarrow L_2(D) \times L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$, действующий на функции $g \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ по формуле

$$\mathcal{P}g = (0, B^{-1}g)^T. \quad (2.11)$$

Используя (2.8)–(2.10), нетрудно видеть (см. [27]), что система (2.2)–(2.5) эквивалентна уравнению для вариации оптимального решения $\delta\Theta = (\delta T_0, \delta Q)^T$:

$$\mathcal{H}\delta\Theta = \mathcal{P}\delta Q^{(0)}. \quad (2.12)$$

Гессиан \mathcal{H} действует в $L_2(D) \times L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ с областью определения $D(\mathcal{H}) = L_2(D) \times L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$, он ограничен, самосопряжен и неотрицательно определен. Если B^{-1} положительно определен, то \mathcal{H} положительно определен при $\alpha > 0$, поскольку $(\mathcal{H}\Theta, \Theta) \geq \alpha(\xi, \xi) + (B^{-1}\eta, \eta)$. В последнем случае уравнение (2.12) имеет единственное решение

$$\delta\Theta = \mathcal{H}^{-1}\mathcal{P}\delta Q^{(0)}. \quad (2.13)$$

Формула (2.13) дает в явном виде выражение для вариаций оптимального решения $\delta T_0, \delta Q$ через вариацию функции начального приближения (бэбграунда) $\delta Q^{(0)}$. Следуя [18], уравнение вида (2.13) может быть положено в основу исследования чувствительности оптимального решения и его функционалов к ошибкам входных данных о потоке тепла.

Справедлива следующая

Теорема 1. Градиент функционала $G(T, T_0, Q)$ по $Q^{(0)}$ имеет вид

$$\frac{dG}{dQ^{(0)}} = \mathcal{P}^*\mathcal{H}^{-1}\mathcal{F}, \quad (2.14)$$

где

$$\mathcal{F} = \left(\phi^*|_{t=0} + \frac{\partial G}{\partial T_0}, B^*\phi^* + \frac{\partial G}{\partial Q} \right)^T, \quad (2.15)$$

\mathcal{P}^* — оператор, сопряженный к \mathcal{P} , \mathcal{H} — гессиан, определенный формулами (2.8)–(2.10), а ϕ^* — решение сопряженной задачи

$$\begin{aligned} -(\phi^*)_t + L^*\phi^* &= \frac{\partial G}{\partial T}, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \phi^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

Доказательство. Рассмотрим значение градиента (1) на вариации $\delta Q^{(0)}$:

$$\left(\frac{dG}{dQ^{(0)}}, \delta Q^{(0)} \right)_{Y_{obs}} = \left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y + \left(\frac{\partial G}{\partial T_0}, \delta T_0 \right)_{L_2(D)} + \left(\frac{\partial G}{\partial Q}, \delta Q \right)_{Y_{obs}}, \quad (2.17)$$

где $\delta Q^{(0)}$ — вариация функции $Q^{(0)}$, $\delta T = \frac{\partial T}{\partial Q^{(0)}} \delta Q^{(0)}$, $\delta T_0 = \frac{\partial T_0}{\partial Q^{(0)}} \delta Q^{(0)}$, $\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial Q^{(0)}} \delta Q^{(0)}$ — решения системы (2.2)–(2.5), $Y = L_2(D \times (0, \bar{t}))$.

Задача (2.16) является сопряженной по отношению к (2.2), поэтому в силу соотношения сопряженности

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y + (\phi^*|_{t=0}, \delta T_0)_{L_2(D)} = (\phi^*, B \delta Q)_Y = (B^* \phi^*, \delta Q)_{Y_{obs}} + (\phi^*|_{t=0}, \delta T_0)_{L_2(D)}. \tag{2.18}$$

Из (2.17), (2.18) получаем

$$\left(\frac{dG}{dQ^{(0)}}, \delta Q^{(0)} \right)_{Y_{obs}} = (\phi^*|_{t=0} + \frac{\partial G}{\partial T_0}, \delta T_0)_{L_2(D)} + \left(B^* \phi^* + \frac{\partial G}{\partial Q}, \delta Q \right)_{Y_{obs}} = (\mathcal{F}, \delta \Theta), \tag{2.19}$$

где $\delta \Theta = (\delta T_0, \delta Q)^T$, \mathcal{F} определяется по формуле (2.15), а (\cdot, \cdot) обозначает скалярное произведение в $L_2(D) \times L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$.

Уравнение для $\delta \Theta$ определяется формулой (2.13), отсюда

$$(\mathcal{F}, \delta \Theta) = (\mathcal{F}, \mathcal{H}^{-1} \mathcal{P} \delta Q^{(0)}) = (\mathcal{P}^* \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}, \delta Q^{(0)})_{Y_{obs}}. \tag{2.20}$$

Таким образом, из (2.17)–(2.20) заключаем, что

$$\left(\frac{dG}{dQ^{(0)}}, \delta Q^{(0)} \right)_Y = (\mathcal{P}^* \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}, \delta Q^{(0)})_{Y_{obs}}, \tag{2.21}$$

откуда следует утверждение теоремы.

Пусть $\Theta = \mathcal{H}^{-1} \mathcal{F}$, тогда из (2.14) имеем

$$\frac{dG}{dQ^{(0)}} = \mathcal{P}^* \Theta. \tag{2.22}$$

Нетрудно убедиться в том, что сопряженный оператор $\mathcal{P}^* : L_2(D) \times L_2(\Omega \times (0, \bar{t})) \rightarrow L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ определяется на $\Theta = (\xi, \eta)^T$, $\xi \in L_2(D)$, $\eta \in L_2(\Omega \times (0, \bar{t}))$ по формуле

$$\mathcal{P}^* \Theta = \mathcal{B}^{-1} \eta. \tag{2.23}$$

Тогда

$$\frac{dG}{dQ^{(0)}} = \mathcal{P}^* \Theta = \mathcal{B}^{-1} \eta. \tag{2.24}$$

Из (2.22)–(2.24) и (2.14)–(2.16) заключаем, что тем самым доказана следующая

Теорема 2. *Градиент $dG / dQ^{(0)}$ определяется последовательным выполнением следующих шагов:*

1) *решить сопряженную задачу*

$$\begin{aligned} -(\phi^*)_t + L^* \phi^* &= \frac{\partial G}{\partial T}, \quad t \in (0, \bar{t}), \\ \phi^* &= 0 \text{ при } t = \bar{t}, \end{aligned} \tag{2.25}$$

полагая

$$\mathcal{F} = \left(\phi^*|_{t=0} + \frac{\partial G}{\partial T_0}, B^* \phi^* + \frac{\partial G}{\partial Q} \right)^T,$$

2) *найти $\Theta = (\xi, \eta)^T$ как решение уравнения с гессианом*

$$\mathcal{H} \Theta = \mathcal{F};$$

3) *вычислить градиент функционала по формуле*

$$\frac{dG}{dQ^{(0)}} = \mathcal{B}^{-1} \eta. \tag{2.26}$$

В численных примерах, следуя [18], рассматривались функционалы вида

$$G(T, T_0, Q) = \int_0^{\bar{t}} dt \int_{\Omega} F^*(x, y, t) T(x, y, 0, t) d\Omega, \quad (2.27)$$

где $F^*(x, y, t)$ — весовая функция, связанная с полем температуры на поверхности $z = 0$. Для определения средней температуры в избранной акватории океана ω при $z = 0$ в интервале $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$ в качестве F^* выбирается функция

$$F^*(x, y, t) = \begin{cases} 1 / (\tau \text{mes } \omega), & \text{если } (x, y) \in \omega, t_1 - \tau \leq t \leq t_1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.28)$$

где $\text{mes } \omega$ означает площадь района ω . В этом случае функционал (2.27) представляется в виде

$$G(T, T_0, Q) = \frac{1}{\tau} \int_{t_1 - \tau}^{t_1} dt \times \left(\frac{1}{\text{mes } \omega} \int_{\omega} T(x, y, 0, t) d\Omega \right). \quad (2.29)$$

С использованием обозначений, введенных выше, функционал (2.27) записывается в виде скалярного произведения:

$$G(T, T_0, Q) = \int_0^{\bar{t}} (BF^*, T) dt = (BF^*, T)_Y, \quad Y = (L_2 D \times (0, \bar{t})).$$

В силу

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}, \delta T \right)_Y = (BF^*, \delta T)_Y$$

производные от G по T, T_0, Q , входящие в (2.25), определяются по формулам

$$\frac{\partial G}{\partial T} = BF^*, \quad \frac{\partial G}{\partial T_0} = \frac{\partial G}{\partial Q} = 0. \quad (2.30)$$

Алгоритм (2.25), (2.26) с учетом конкретного вида производных (2.30) использовался при численных расчетах для оценки чувствительности функционалов, связанных с температурой после вариационного усвоения, по отношению к изменениям функции входных данных о потоке тепла $Q^{(0)}$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для численных экспериментов использовалась трехмерная численная модель гидротермодинамики Черного моря, разработанная в ИВМ РАН на основе метода расщепления (см. [23]) и дополненная процедурой усвоения температуры поверхности моря (ТПМ) для восстановления начального состояния T_0 и тепловых потоков Q с учетом ковариационных матриц ошибок наблюдений и ошибок бэкграунда.

Параметры рассматриваемой области Черного моря и ее географические координаты можно описать следующим образом: σ -сетка $306 \times 200 \times 27$ (широта, долгота и глубина соответственно). Первая точка “сетки С” (см. [28]) имеет координаты 26.65° E и 40.15° N . Шаги сетки по x и y постоянны и равны 0.05 и 0.036 градуса соответственно. Шаг по времени равен $\Delta t = 2.5$ мин.

В качестве данных наблюдений T_{obs} в данном эксперименте были выбраны данные ТПМ спектрометра MODIS на спутнике Aqua, предоставленные спутниковой службой ‘See the Sea’, входящей в состав ЦКП “ИКИ Мониторинг” (см. [29]). Данные ТПМ были пересчитаны на сетку численной модели (см. [30]).

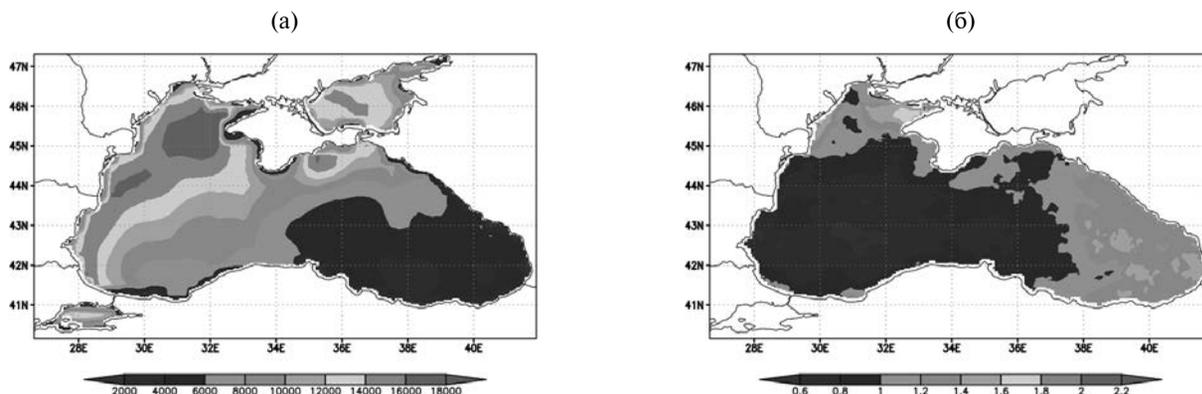
Значения среднего климатического теплового потока $Q^{(0)}$ использовались в процедуре усвоения данных в качестве начального приближения (бэкграунда). Поток тепла на поверхности моря рассчитан по данным реанализа Era 5 за период с 1979 по 2021 г. (см. [31]). По данным за 1979–2021 гг. рассчитаны средние значения и дисперсии теплового потока по дневным и ночным данным для каждого дня года. Полученные дисперсии представляют собой диагональные элементы ковариационной матрицы ошибок бэкграунда B . Аналогичным образом (см. [32]) на основе данных ТПМ сервиса Copernicus (data.marine.

corernicus.eu) за период с 1982 по 2019 г. рассчитывались элементы ковариационной матрицы ошибок данных наблюдений R .

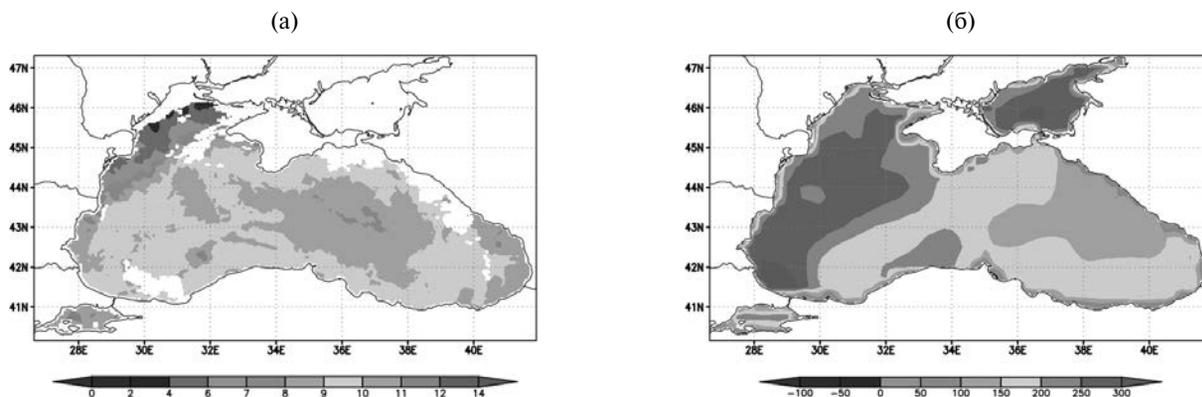
Используя модель гидротермодинамики Черного моря, дополненную процедурой усвоения температуры поверхности T_{obs} , были проведены численные расчеты на исследуемой акватории. Алгоритм усвоения работал лишь в некоторые моменты времени t_k , при этом $t_{k+1} = \bar{t} = t_k + \Delta t$. При реализации процедуры усвоения на одном шаге по времени (t_k, t_{k+1}) рассматривалась система вида (1.5)–(1.8) с диагональными ковариационными матрицами B и R . На каждом из таких шагов был проведен расчет чувствительности рассматриваемого функционала (2.27) к входным данным о потоке тепла согласно алгоритму (2.25), (2.26).

На фиг. 1 представлены диагональные элементы матриц B (фиг. 1а) и R (фиг. 1б) на 27 февраля 2021 г. 10 ч 35 мин. На фиг. 2а приведены данные наблюдений, полученные со спутника, на момент расчета чувствительности функционала от решения задачи. Пример рассчитанного потока тепла на 27 февраля 2021 г. приведен на фиг. 2б.

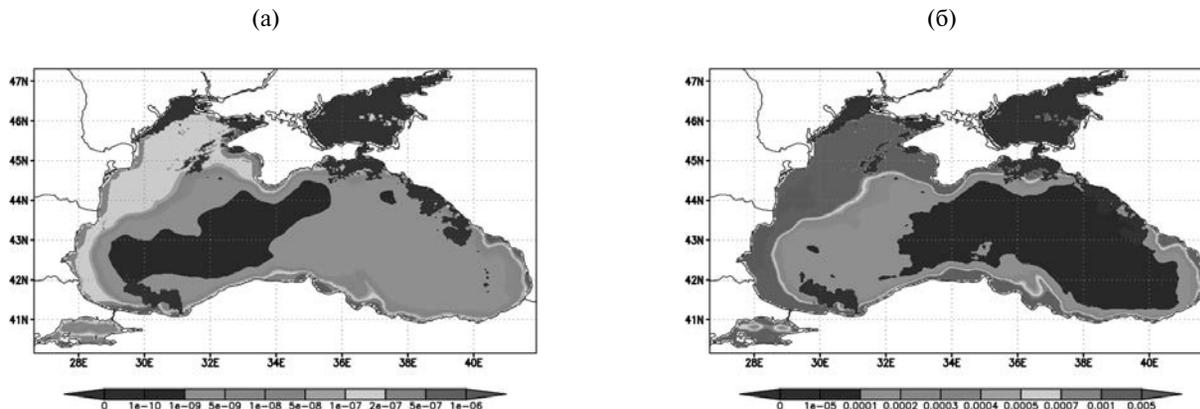
Разработанный алгоритм (2.25), (2.26) позволяет определять области наибольшего градиента функции отклика как средней по интервалу температуры поверхности океана для избранного района, полученной в результате процедуры усвоения. Результаты расчета градиента функционала от решения задачи по отношению к входным данным о потоке тепла согласно (2.25), (2.26) для 27 февраля 2021 г. показаны на фиг. 3а. Из фиг. 3а следует, что наибольшая чувствительность функционала к ошибкам входным данным о потоке тепла с максимальными значениями градиента порядка 1.0×10^{-6} прослеживается у побережья Черного моря, особенно в южной части моря. Наименьшая чувствительность к ошибкам входным



Фиг. 1. Значения диагональных элементов матриц B (а) и R (б) в численном эксперименте.



Фиг. 2. Данные, используемые при расчетах: (а) — температура поверхности моря, °С; (б) — поток тепла на поверхности, Вт/м².



Фиг. 3. Градиент функционала $G(T, T_0, Q)$: (а) — $dG/dQ^{(0)}$; (б) — dG/dT_{obs} .

данных наблюдается в центральных районах Черного моря в области с наибольшей глубиной, и здесь градиент составляет 0.5×10^{-9} , что на 3 порядка меньше максимального значения.

Результаты расчета градиента функционала от решения задачи по отношению к ошибкам данным наблюдений согласно алгоритму из [24] для 27 февраля 2021 г. приведены на фиг. 3б. Из фиг. 3б следует, что наиболее мелкая западная часть Черного моря наиболее чувствительна к этим ошибкам с максимальным значением градиента 5.0×10^{-3} . Отметим, что южная и восточная части побережья Черного моря также чувствительны к ошибкам данных наблюдений. Центральная часть Черного моря, характеризующая наибольшей глубиной, согласно проведенным расчетам, является, наоборот, наименее чувствительной областью. Здесь значения градиента функционала менее 5.0×10^{-5} , т.е. на 2 порядка меньше, чем в областях с большей чувствительностью.

Из фиг. 3а и 3б следует, что в целом чувствительность рассматриваемого функционала к данным наблюдений ТПМ на 4 порядка больше, чем чувствительность к входным данным о потоке тепла.

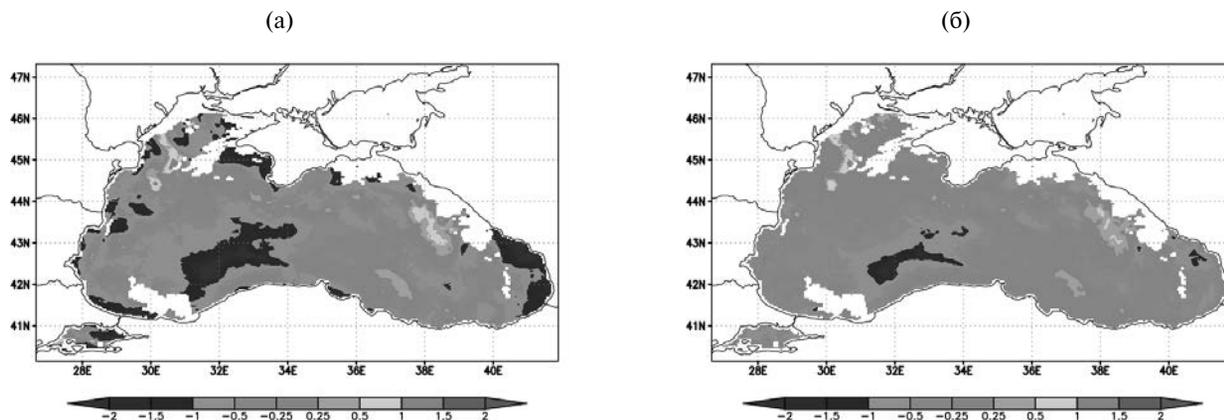
Эти результаты подтверждаются прямыми вычислениями функционала $G(T, T_0, Q)$ в соответствии с (29), полученного после вариационного усвоения, путем введения возмущений в данные наблюдений T_{obs} и в данные о потоке тепла $Q^{(0)}$, следуя работе [24].

На фиг. 4 представлены результаты применения процедуры усвоения данных для модели динамики Черного моря на 27 февраля 2021 г. 10 ч 35 мин. На фиг. 4а приведена разность между ТПМ, полученной при расчете по модели без использования усвоения, и данными наблюдений, а на фиг. 4б с использованием процедуры усвоения данных наблюдений. Согласно этим результатам можно сделать вывод о том, что использование усвоения данных позволяет получать более близкие к данным наблюдений поля ТПМ, что несомненно улучшает как реанализ расчетных полей, так и прогностические свойства модели.

Таким образом, предложенный алгоритм (2.25), (2.26) позволяет оценивать чувствительность функционалов, связанных с температурой поверхности моря после вариационного усвоения, по отношению к ошибкам входных данных в случае, когда значения этих ошибок заранее не известны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено исследование чувствительности функционалов от решения задачи вариационного усвоения к входным данным для модели термодинамики моря с целью одновременно восстановления начального состояния и потоков тепла. Разработанный алгоритм позволяет вычислять градиенты функционалов от оптимального решения, полученного в ходе усвоения, по отношению к входным данным о потоке тепла на поверхности моря. Вычисление градиента функционала предполагает решение прямой и сопряженной задачи, а также уравнения с гессианом функции стоимости, при этом вычисления обратного гессиана не требуется. В результате применения данного алгоритма можно определять области наибольшего градиента функции отклика как средней по интервалу температуры поверхности океана для избранного района, полученной в результате процедуры усвоения. Численные эксперименты для модели динамики Черного моря подтверждают работоспособность предложенного алгоритма. Методология оценки градиентов функций отклика может быть использована в проблеме



Фиг. 4. Отклонение рассчитанных значений ТПМ от данных наблюдений, °С: (а) — для модели без усвоения и данных наблюдений; (б) — для модели с усвоением и данными наблюдений.

оптимального размещения сенсоров и станций наблюдений для решения практических задач вариационного усвоения данных, важных для мониторинга состояния морской среды и климата.

Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания, которые позволили улучшить представление результатов и изложение материала в статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Marchuk G. I.* Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems. Dordrecht: Kluwer, 1995.
2. *Lions J. L.* Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Paris: Dunod, 1968.
3. *Sasaki Y. K.* An objective analysis based on the variational method // *J. Meteor. Soc. Japan.* 1958. V. 36. P. 77–88.
4. *Пененко В. В., Образцов Н. Н.* Вариационный метод согласования полей метеорологических элементов // *Метеорология и гидрология.* 1976. № 11. С. 1–11.
5. *Пененко В. В.* Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
6. *Le Dimet F. X., Talagrand O.* Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: theoretical aspects // *Tellus.* 1986. V. 38A. P. 97–110.
7. *Агошков В. И.* Методы оптимального управления и сопряженных уравнений в задачах математической физики. М.: ИВМ РАН, 2003.
8. *Mogensen K., Balmaseda M. A., Weaver A. T., Martin M., Vidard A.* NEMOVAR: a variational data assimilation system for the NEMO ocean model // *ECMWF Technical Memorandum.* 2009. № 120.
9. *Пененко А. В.* Математическое моделирование процессов адвекции–диффузии–реакции с усвоением данных наблюдений и решением обратных задач. Автореф. дисс. ... докт. физ.-матем. наук. Новосибирск: ИВМ и МГ СО РАН, 2021.
10. *Le Dimet F.-X., Ngodock H. E., Luong B., Verron J.* Sensitivity analysis in variational data assimilation // *J. Meteorol. Soc. Japan.* 1997. V. 75 (1B). P. 245–255.
11. *Le Dimet F.-X., Navon I. M., Daescu D. N.* Second-order information in data assimilation // *Month. Wea. Rev.* 2002. V. 130. № 3. P. 629–648.
12. *Le Dimet F.-X., Shutyaev V.* On deterministic error analysis in variational data assimilation // *Nonlinear Processes in Geophys.* 2005. V. 12. P. 481–490.
13. *Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V. P.* On analysis error covariances in variational data assimilation // *SIAM J. Sci. Comput.* 2008. V. 30. № 4. P. 1847–1874.
14. *Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V. P.* On optimal solution error covariances in variational data assimilation problems // *J. Comp. Phys.* 2010. V. 229. P. 2159–2178.
15. *Gejadze I., Shutyaev V. P., Le Dimet F.-X.* Analysis error covariance versus posterior covariance in variational data assimilation // *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 2013. V. 139. P. 1826–1841.

16. *Агошков В. И., Пармузин Е. И., Шутяев В. П.* Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности ее решения // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49. № 6. С. 643–654.
17. *Шутяев В. П., Ле Диме Ф.* Чувствительность функционалов задач вариационного усвоения данных // Докл. АН. Математика. 2019. Т. 486. № 4. С. 421–425.
18. *Пармузин Е. И., Шутяев В. П.* Чувствительность функционалов от решения задачи вариационного усвоения к входным данным о потоке тепла для модели термодинамики моря // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 4. С. 657–666.
19. *Алексеев В. В., Залесный В. Б.* Численная модель крупномасштабной динамики океана / В кн.: Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1993. С. 232–253.
20. *Марчук Г. И., Дымников В. П., Залесный В. Б.* Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеиздат, 1987.
21. *Agoshkov V. I., Gusev A. V., Diansky N. A., Oleinikov R. V.* An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. V. 22. № 2. P. 133–161.
22. *Агошков В. И., Пармузин Е. И., Шутяев В. П.* Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 8. С. 1371–1391.
23. *Zalesny V. B., Diansky N. A., Fomin V. V., Moshonkin S. N., Demyshev S. G.* Numerical model of the circulation of the Black Sea and the Sea of Azov // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2012. V. 27. № 1. P. 95–112.
24. *Shutyaev V., Parmuzin E., Gejadze I.* Stability analysis of functionals in variational data assimilation with respect to uncertainties of input data for a sea thermodynamics model // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2021. V. 36. № 6. P. 347–357.
25. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151. № 3. P. 501–504.
26. *Cacuci D. G.* Sensitivity theory for nonlinear systems: II. Extensions to additional classes of responses // J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 2803–2812.
27. *Шутяев В. П.* Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. М.: Наука, 2001.
28. *Дианский Н. А., Багно А. В., Залесный В. Б.* Сигма-модель глобальной циркуляции океана и ее чувствительность к вариациям напряжения трения ветра // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. № 4. С. 537–556.
29. *Лулян Е. А., Матвеев А. А., Уваров И. А., Бочарова Т. Ю., Лаврова О. Ю., Митягина М. И.* Спутниковый сервис See the Sea — инструмент для изучения процессов и явлений на поверхности океана // Современ. проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2012. Т. 9. № 2. С. 251–261.
30. *Захарова Н. Б.* Верификация данных наблюдений о температуре поверхности моря // Современ. проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса. 2016. Т. 13. № 3. С. 106–113.
31. *Hersbach H. et al.* The ERA5 global reanalysis // Q. J. R. Meteorol. Soc. 2020. V. 146. P. 1999–2049.
32. *Агошков В. И., Шутяев В. П., Пармузин Е. И., Захарова Н. Б., Шелопут Т. О., Лезина Н. Р.* Вариационная ассимиляция данных наблюдений в математической модели динамики Черного моря // Морской гидрофиз. журнал. 2019. Т. 35. № 6. С. 585–599.