

ISSN 0044-4669

Том 63, Номер 11

Ноябрь 2023



ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 63, номер 11, 2023 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Формулы для вычисления интегралов типа Эйлера и их приложение к задаче построения конформного отображения многоугольников

С. И. Безродных 1763

Трехслойные схемы с двукратным изменением шага по времени

П. Н. Вабищевич 1799

Аналитичность и псевдоаналитичность в методе малого параметра

В. И. Качалов, Д. А. Маслов 1806

Triple Series Evaluated in π and $\ln 2$ as well as Catalan's Constant G

C. Li, W. Chu 1815

Lower Bounds for Column Matrix Approximations

A. I. Osinsky 1816

Об одном частном решении задачи о σ -коммутировании ($\sigma \neq 0, \pm 1$) тёплицевой и ганкелевой матриц

В. Н. Чугунов, Х. Д. Икрамов 1817

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Оптимальное управление квазистационарными уравнениями сложного теплообмена с условиями отражения и преломления

А. Ю. Чеботарев 1829

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциально-разностные уравнения с оптимальными параметрами

А. Ф. Мاستрюков 1839

Solving Nonlinear Volterra Integral Equations of the First Kind with Discontinuous Kernels by Using the Operational Matrix Method

Simin Aghaei Amirkhizi, Yaghoub Mahmoudi, Ali Salimi Shamloo 1849

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Точные решения нелинейного уравнения, описывающего взрывную неустойчивость в автоколебательных системах

А. И. Аристов 1850

О слабой разрешимости одной задачи протекания вязкоупругой жидкости с памятью

В. Г. Звягин, В. П. Орлов 1859

Разрушение решения уравнения нелинейных колебаний балки с учетом эффектов поперечной деформации

Х. Г. Умаров 1877

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Структуры разрывов и уединенные волны в электромагнитной гидродинамике, связанные с линейными и нелинейными резонансами альвеновских волн	
<i>И. Б. Бахолдин</i>	1894
Анализ влияния квантовых эффектов на оптические характеристики плазмонных наночастиц методом дискретных источников	
<i>Ю. А. Еремин, В. В. Лопушенко</i>	1911
An Approach to the Implementation of the Multigrid Method with Full Approximation for CFD Problems	
<i>A. V. Gorobets</i>	1922
On Numerical Beamforming for Correlated Dipole Type Sources	
<i>T. K. Kozubskaya, G. M. Plaksin, I. L. Sofronov</i>	1923
A Fast Single-Pass Method for Solving the Generalized Eikonal Equation in a Moving Medium	
<i>Myong-Song Ho, Ji-Song Pak</i>	1924
Controlling Chaos in 3D Porous Media in the Presence of Orientation Effect	
<i>H. Rouaha, Y. Joundy, A. Taïka</i>	1925
Моделирование движения удлиненного контура под свободной поверхностью весомой жидкости при больших числах Фруда	
<i>С. И. Филиппов</i>	1926

ИНФОРМАТИКА

Soft Computing Artificial Intelligence of Schrödinger Time Independent Equation Arises in Wheeler-Dewitt Model of Quantum Cosmology	
<i>Najam Ul Basat, Mahmoona Asghar</i>	1936

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ

УДК 517.54

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА ЭЙЛЕРА
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ
КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ¹⁾© 2023 г. С. И. Безродных^{1,*}¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: sbezrodnykh@mail.ru

Поступила в редакцию 20.04.2023 г.

Переработанный вариант 25.05.2023 г.

Принята к публикации 09.06.2023 г.

Рассматриваются интегралы типа Эйлера и тесно связанная с ними функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, являющаяся гипергеометрической функцией многих комплексных переменных $z_1, \dots, z_N$. Для функции $F_D^{(N)}$ найдены новые формулы аналитического продолжения, позволяющие представить ее в виде гипергеометрических рядов Горна, экспоненциально сходящихся в соответствующих подобластях $\mathbb{C}^N$, в том числе вблизи гиперплоскостей, имеющих вид $\{z_j = z_l\}$, $j, l = \overline{1, N}$, $j \neq l$. Совокупность найденных в работе формул продолжения и тождеств для $F_D^{(N)}$ дает эффективный аппарат для вычисления этой функции и выражаемых через нее интегралов типа Эйлера во всем комплексном пространстве $\mathbb{C}^N$, включая сложные случаи, когда переменные образуют одну или несколько групп очень близких величин. Представлено приложение полученных результатов к решению проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца в ситуации “кроудинга” и построению конформных отображений многоугольников. Библ. 45. Фиг. 3.

Ключевые слова: гипергеометрические интегралы типа Эйлера, функции Лауричеллы и Горна, аналитическое продолжение, интеграл Кристоффеля–Шварца, эффект “кроудинга”.

DOI: 10.31857/S004446692311008X, EDN: ADXMHU

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Гипергеометрические интегралы типа Эйлера и функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$

Работа посвящена построению эффективного алгоритма для вычисления гипергеометрических контурных интегралов следующего вида:

$$\int_{\mathcal{L}} (t - w_1)^{\alpha_1} \cdots (t - w_M)^{\alpha_M} dt, \quad (1.1)$$

где $(\alpha_1, \dots, \alpha_M) \in \mathbb{C}^M$ и $(w_1, \dots, w_M) \in \mathbb{C}^M$ — векторы, составленные из комплексных чисел, а путь интегрирования $\mathcal{L}$ является кривой, соединяющей некоторые две точки комплексной плоскости t , например, точки w_j и w_k , $j \neq k$, либо представляет собой контур Похгаммера, замкнутый на римановой поверхности подынтегральной функции (см. [1–3]). Интегралы (1.1) возникают во многих современных приложениях (см., например, [4–7]), а изучение их аналитических свойств привлекает внимание специалистов (см. [8–12]). Следуя [11, 13], будем называть (1.1) *гипергеометрическими интегралами типа Эйлера*. В настоящей работе эти интегралы рассматриваются в связи с вопросом об эффективном решении проблемы вычисления параметров интеграла Кристоффеля–Шварца и построения на этой основе конформного отображения многоугольных областей сложной формы (о проблеме параметров см. [14–17], а также п. 1.4 и разд. 6 ниже).

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 22-21-00727), <https://rscf.ru/project/22-21-00727/>.

Интегралы типа Эйлера тесно связаны с функцией Лауричеллы $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$, представляющей собой гипергеометрическую функцию N комплексных переменных $\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ и зависящую от набора комплексных параметров $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ и $b, c \in \mathbb{C}$ (об этой функции см. [18] и [2, 19, 20]). Функция $F_D^{(N)}$ в области

$$\mathbb{L}^N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |\arg(1 - z_j)| < \pi, \quad j = \overline{1, N}\}, \quad (1.2)$$

представима в виде следующего интеграла [2], который обобщает известную формулу Эйлера для функции Гаусса:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{\prod_{j=1}^N (1-tz_j)^{a_j}} dt, \quad (1.3)$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция (см. [3]); в (1.3) предполагается, что $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. Правая часть (1.3) является однозначной аналитической функцией переменных $z_1, \dots, z_N$ в области (1.2). Нетрудно увидеть, что интеграл (1.1) с помощью линейной замены переменных может быть приведен (с точностью до мультипликативной константы) к виду (1.3) или соответствующей модификации, которая возникает при использовании в качестве $\mathcal{L}$ петлеобразного контура Похгаммера.

В единичном поликруге

$$\mathbb{U}^N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_j| < 1, j = \overline{1, N}\} \quad (1.4)$$

функция $F_D^{(N)}$ представима в виде следующего N -кратного гипергеометрического ряда (см. [2, 18, 19]):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}(\mathbf{a})_{\mathbf{k}}}{(c)_{|\mathbf{k}|} \mathbf{k}!} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}. \quad (1.5)$$

В формуле (1.5) суммирование ведется по мультииндексу $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_N)$ с неотрицательными целыми компонентами $k_j \geq 0, j = \overline{1, N}$, причем $|\mathbf{k}| := \sum_{j=1}^N k_j$, а для сокращенной записи произведений использованы традиционные обозначения:

$$\mathbf{k}! := k_1! \cdots k_N!, \quad (\mathbf{a})_{\mathbf{k}} := (a_1)_{k_1} \cdots (a_N)_{k_N}, \quad \mathbf{z}^{\mathbf{k}} := z_1^{k_1} \cdots z_N^{k_N}. \quad (1.6)$$

Фигурирующий в (1.6) символ Похгаммера $(a)_k$ определяется через гамма-функцию $\Gamma(s)$ по формуле (см. [2, 3])

$$(a)_k = (a, k) := \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad (1.7)$$

так что справедливы соотношения

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_m = \begin{cases} (a)_m = a(a+1) \cdots (a+m-1), & m = 1, 2, \dots, \\ (-1)^m [(1-a)(2-a) \cdots ((1-a)-m-1)]^{-1}, & m = -1, -2, \dots \end{cases} \quad (1.8)$$

Параметр c в формуле (1.5) не принимает целых неположительных значений, т.е. $c \notin \mathbb{Z}^-$.

Отметим, что указанное выше ограничение на параметры $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$, требуемое для сходимости интеграла (1.2), может быть снято, если в (1.2) использовать интегрирование по петлеобразным контурам Похгаммера (см. [2]); при этом меняется множитель перед интегралом.

1.2. Вычисление интегралов типа Эйлера и аналитическое продолжение функции $F_D^{(N)}$

Высокоточное вычисление интеграла (1.3) при заданном наборе переменных $\mathbf{z}$ и параметров b, c , вообще говоря, является трудной задачей. Ряд (1.5) может быть применен для такого вычисления, только если $\mathbf{z}$ лежит в поликруге $\mathbb{U}_\rho := \{|z_j| < \rho, j = \overline{1, N}\}$ достаточно малого радиуса ρ . Если же $\mathbf{z} \notin \mathbb{U}_\rho$ при $\rho = 1$, то ряд расходится и заведомо не может быть использован для вычисления (1.3). В связи со сказанным естественным образом возникает задача о получении для инте-

грала (1.3) набора представлений в виде обобщенных гипергеометрических рядов, экспоненциально сходящихся в таких подобластях $\mathbb{C}^N$, объединение которых покрывает все множество $\mathbb{C}^N \setminus \bigcup_{\rho} \mathbb{U}_{\rho}^N$ с некоторым $\rho < 1$.

Решение этой задачи дают *формулы аналитического продолжения* функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, построенные в [20, 21], а также в разд. 3 настоящей работы. Каждая из таких формул имеет следующий вид:

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N \lambda_j u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \Omega \not\subset \mathbb{U}^N, \quad (1.9)$$

где набор функций $\{u_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})\}_{j=0}^N$, представимых в терминах гипергеометрических рядов Горна, зависящих от N переменных, образует в области Ω базис для пространства решений системы уравнений с частными производными, которой удовлетворяет функция Лауричеллы (об этой системе уравнений см. [2, 18, 19], а необходимые сведения о ней приведены ниже в п. 1.3). В формуле (1.9) коэффициенты $\lambda_j \in \mathbb{C}$ зависят от параметров $a_1, \dots, a_N, b, c$. Область Ω , где ряды u_j одновременно сходятся, имеет непустое пересечение с дополнением к единичному поликругу $\mathbb{U}^N$, т.е. справедливо соотношение $\Omega \cap (\mathbb{C}^N \setminus \mathbb{U}^N) \neq \emptyset$.

Отметим, что представления вида (1.9) являются обобщением классических формул аналитического продолжения функции Гаусса одного переменного на случай N переменных, а фигурирующие в (1.9) функции $u_j(\mathbf{z})$ играют для приведенной ниже системы (1.10) ту же роль, что и канонические решения Куммера (см. [1–3]) для гипергеометрического уравнения, которому удовлетворяет функция Гаусса. Построенные формулы аналитического продолжения вида (1.9) являются вкладом в решение общей проблемы аналитического продолжения рядов Горна (о гипергеометрических функциях Горна см. [22]). Общий подход к нахождению формул продолжения таких рядов предложен в [23]. Отметим, что изучению функций Горна посвящены многие современные работы (см., например, [24–28]).

1.3. Система уравнений Лауричеллы и результаты об аналитическом продолжении

Интеграл типа Эйлера (1.3) и гипергеометрический ряд Лауричеллы (1.5), рассматриваемые как функции переменных $z_1, \dots, z_N$, удовлетворяют следующей системе из N линейных уравнений второго порядка с частными производными (см. [2, 18, 19]):

$$\left(c + \sum_{m=1}^N \theta_m \right) (1 + \theta_j)(z_j^{-1} u(\mathbf{z})) = \left(b + \sum_{m=1}^N \theta_m \right) (a_j + \theta_j) u(\mathbf{z}), \quad j = \overline{1, N}, \quad (1.10)$$

где $\theta_s := z_s \partial / \partial z_s$, а величины a_j, b и c — параметры функции Лауричеллы. Голоморфный ранг системы (1.10) равен $N + 1$ и, таким образом, ее общее решение зависит от $(N + 1)$ -й произвольной комплексной постоянной (см. [2, 18]). Особым множеством $\mathcal{M}$ системы (1.10) является объединение гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_j^{(\tau)} := \{\mathbf{z} \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = \tau\}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1.11)$$

где $\tau \in \mathcal{S} := \{0, 1, \infty\}$, и гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_{j,l} := \{\mathbf{z} \in \overline{\mathbb{C}}^N : z_j = z_l\}, \quad (1.12)$$

здесь индексы $j, l = \overline{1, N}$, $j \neq l$. В частности, множеству $\mathcal{M}$ принадлежат такие точки $\mathbf{z}$, у которых для всех компонент z_j выполняется включение $z_j \in \mathcal{S}$, $j = \overline{1, N}$, например, точки $(1, \dots, 1)$ и $(\infty, \dots, \infty)$, у которых все N компонент равны соответственно единице или бесконечности, а также точки $(1, \dots, 1, \infty, \dots, \infty)$, у которых первые k компонент равны единице, а остальные — бесконечности. Систему уравнений (1.12) для краткости будем обозначать $E_D^{(N)}$.

В [20] при произвольном N представлен набор формул аналитического продолжения (1.9) функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, области сходимости которых в совокупности покрывают $\mathbb{C}^N$ за исключением гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,l}$, определенных равенством (1.12). Граница области сходимости каждой из таких формул содержит часть одной или нескольких гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,l}$, поэтому указанный набор формул адекватно представляет функцию $F_D^{(N)}$ и позволяет ее вычислять, когда аргумент $\mathbf{z}$ лежит достаточно далеко от $\mathcal{M}_{j,l}$. В [21] при произвольном N предложен способ построения формул аналитического продолжения нового типа, позволяющий для любого пересечения S гиперплоскостей $\mathcal{M}_{j,l}$ указать представление вида (1.9), область сходимости которого имеет непустое пересечение с S .

В настоящей работе, продолжающей исследования [20, 21], для построения формул аналитического продолжения функции Лауричеллы мы воспользовались следующим тождеством (см. [2]):

$$F_D^{(N)}(a_1, \dots, a_N; b, c; z_1, \dots, z_N) = (1 - z_N)^{-b} F_D^{(N)}\left(a_1, \dots, a_{N-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s; b, c; \frac{z_1 - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{N-1} - z_N}{1 - z_N}, \frac{z_N}{z_N - 1}\right), \quad (1.13)$$

а затем применили к его правой части результаты об аналитическом продолжении, полученные в [20, 21]. При произвольном числе переменных функции Лауричеллы формулы аналитического продолжения, выведенные таким способом, представлены в разд. 2, 3 (см. теоремы 2 и 4). В разд. 3–5 даны примеры применения теорем 2 и 4 для случая $N = 3$ и 6 переменных. Найденные в разд. 2–5 формулы удобны для вычисления интегралов (1.1), (1.3) и ориентированы на решение проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца.

Построенные формулы аналитического продолжения позволяют адекватно и удобно с вычислительной точки зрения представить функцию $F_D^{(N)}$, в том числе в тех случаях, когда ее переменные $z_1, \dots, z_N$ делятся на группы близких величин. Такую ситуацию будем называть кроудингом (от английского слова “to crowd” — толпиться, сбиваться в кучу), заимствуя этот термин из работ, посвященных практике построения конформного отображения прямолинейных многоугольников на основе интеграла Кристоффеля–Шварца (см. [16, 17, 29, 30]). В этих работах кроудинг означает резко неравномерное распределение значений параметров интеграла, являющихся прообразами вершин многоугольника.

В следующем п. 1.4 обсуждается связь функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ и задачи о вычислении параметров интеграла Кристоффеля–Шварца. В разд. 6 рассматривается вопрос о вычислении этой функции и представлены примеры численного решения проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца для двух многоугольников сложного вида.

1.4. Проблема параметров интеграла Кристоффеля–Шварца

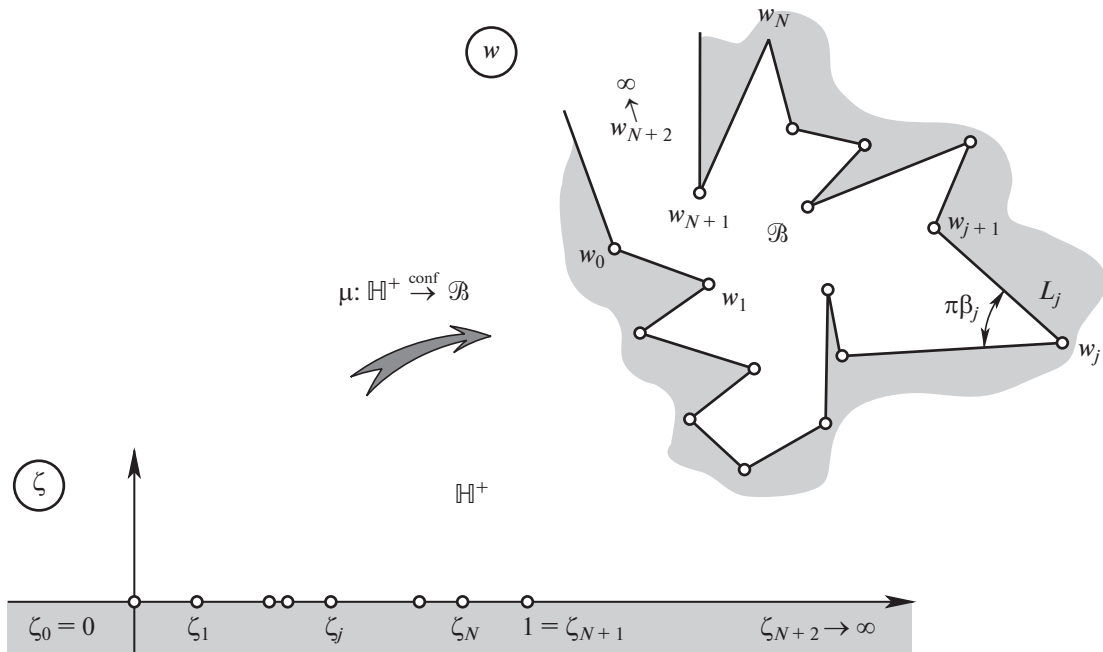
Обозначим через $w_0, \dots, w_{N+2}$ вершины многоугольника $\mathcal{B}$, а через $\pi\beta_0, \dots, \pi\beta_{N+2}$ — измеряемые по области углы в этих вершинах (см. фиг. 1). Величины β_j называют показателями углов. Предположим, что бесконечно удаленная точка не является внутренней для области $\mathcal{B}$. Будем рассматривать отображение $w = \mu(\zeta)$ верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+ := \{\zeta : \text{Im } \zeta > 0\}$ на многоугольник $\mathcal{B}$, подчиненное следующим условиям нормировки, которые его однозначно определяют:

$$\zeta_0 = \mu^{-1}(w_0) = 0, \quad \zeta_{N+1} = \mu^{-1}(w_{N+1}) = 1, \quad \zeta_{N+2} = \mu^{-1}(w_{N+2}) = \infty. \quad (1.14)$$

Согласно [14–17] отображение $w = \mu(\zeta)$ может быть записано в виде интеграла Кристоффеля–Шварца, имеющего следующий вид:

$$w = \mu(\zeta) = \mathcal{H}_0 \exp(i \arg(w_{N+2} - w_{N+1})) \int_{\tilde{\zeta}}^{\zeta} t^{\beta_0-1} \left[\prod_{j=1}^N (t - \zeta_j)^{\beta_j-1} \right] (t-1)^{\beta_{N+1}-1} dt + \tilde{w}, \quad (1.15)$$

где $\mathcal{H}_0$, $\tilde{w} := \mu(\tilde{\zeta})$ — некоторые постоянные, а вещественные параметры $\zeta_j := \mu^{-1}(w_j)$, фигурирующие в подынтегральном выражении, являются прообразами вершин w_j многоугольника. Вели-


 Фиг. 1. Конформное отображение полуплоскости на многоугольник $\mathcal{B}$.

чины ζ_j , $j = \overline{1, N}$ и $\mathcal{H}_0$ однозначно определяются геометрией области $\mathcal{B}$, но заранее неизвестны. Задачу об их нахождении называют *проблемой параметров интеграла Кристоффеля–Шварца*.

Методы вычисления неизвестных параметров интеграла Кристоффеля–Шварца предложены в работах [16, 31–40]. Особенно сложной проблема их нахождения становится в ситуации кроудинга (см. [16, 17, 29, 30]), [39], под которым, как отмечено выше в п. 1.3, понимается резко неравномерное расположения величин ζ_j . Различные подходы к решению проблемы кроудинга были предложены в работах [16, 34, 36, 39–42], однако она по-прежнему остается далекой от решения. Существенного прогресса в решении проблемы кроудинга, как продемонстрировано в [20, 38], можно ожидать с помощью подхода, основанного на применении формул (1.9) аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$. Отметим, что связь функции Лауричеллы и проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца указана в [35].

Далее будем рассматривать случай, когда все вершины w_j , $j = \overline{0, N+1}$, конечны, т.е. соответствующие показатели углов удовлетворяют соотношениям $1 \neq \beta_j \in (0, 2]$, $j = \overline{0, N+1}$. Для нахождения параметров ζ_j интеграла Кристоффеля–Шварца (1.15) прежде всего сформируем систему из $N+1$ нелинейных уравнений, следуя известному способу [14–17]. Вычисляя модуль разности $|\mu(\zeta_{s+1}) - \mu(\zeta_s)|$ с помощью формулы (1.15) и приравнявая полученную величину длине стороны $L_s := |w_{s+1} - w_s|$, приходим к следующему уравнению:

$$\mathcal{H}_0 I_s(\mathbf{x}) = L_s, \quad (1.16)$$

где $\mathbf{x} = (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ – вектор, составленный из неизвестных прообразов, а $I_s(\mathbf{x})$ – модуль интеграла из формулы (1.15), взятого между точками ζ_s и ζ_{s+1} :

$$I_s(\mathbf{x}) := \left| \int_{\zeta_s}^{\zeta_{s+1}} t^{\beta_0-1} \prod_{j=1}^N (t - \zeta_j)^{\beta_j-1} (t-1)^{\beta_{N+1}-1} dt \right|. \quad (1.17)$$

Если все вершины w_s , кроме, быть может, w_{N+2} , конечны, то равенства (1.17) при $s = \overline{0, N}$ образуют требуемую систему из $N+1$ уравнений для определения вектора прообразов $\mathbf{x}$ и коэффициента $\mathcal{H}_0$ (см. [14–17]).

Для дальнейших рассуждений удобно ввести вектор $\mathbf{a}$ и числа b, c , связанные с показателями β_j углов многоугольника по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, \dots, a_N), \quad a_j := 1 - \beta_j, \quad j = \overline{1, N}, \\ b &:= -1 + \sum_{j=0}^{N+1} (1 - \beta_j), \quad c := \sum_{j=0}^N (1 - \beta_j), \end{aligned} \quad (1.18)$$

так что $1 - \beta_{N+1} = 1 + b - c$, $1 - \beta_0 = c - \sum_{j=1}^N a_j$, а кроме того, определить функцию

$$\mathcal{Y}(\mathbf{x}) = \left(\zeta_1, \frac{\zeta_1}{\zeta_2}, \dots, \frac{\zeta_1}{\zeta_N} \right), \quad (1.19)$$

зависящую от N комплексных переменных $(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \mathbf{x}$.

Далее, приведем формулы [20, 38], дающие представления для интегралов (1.17), фигурирующих в левой части (1.16), через функцию Лауричеллы. Такие формулы получаются после преобразования точек ζ_s и ζ_{s+1} с помощью линейной замены переменных в концы единичного отрезка и применения представление типа Эйлера (1.3); интегралы (1.17) при этом выражаются в виде

$$I_k(\mathbf{x}) = C_k \mathcal{F}_k(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{x}), \quad k = \overline{0, N}, \quad (1.20)$$

где коэффициенты C_k задаются равенствами

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{\Gamma\left(1 + \sum_{j=1}^N a_j - c\right) \Gamma(1 - a_1)}{\Gamma\left(2 + \sum_{j=2}^N a_j - c\right)}, \quad C_N = \frac{\Gamma(1 - a_N) \Gamma(c - b)}{\Gamma(1 + c - b - a_N)}, \\ C_k &= \frac{\Gamma(1 - a_k) \Gamma(1 - a_{k+1})}{\Gamma(2 - a_k - a_{k+1})}, \quad k = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

а величины $\mathcal{F}_k(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_k(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{x})$, $k = \overline{0, N}$, определяются через функцию Лауричеллы $F_D^{(N)}$ по формулам

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{x}) := \zeta_1^{1 + \sum_{j=2}^N a_j - c} \left(\prod_{j=2}^N \zeta_j^{-a_j} \right) F_D^{(N)}(\mathbf{a}_0; b_0, c_0; \mathbf{x}_0), \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{x}) &:= \zeta_k^{\sum_{j=1}^N a_j - c} (\zeta_{k+1} - \zeta_k)^{1 - a_k - a_{k+1}} (1 - \zeta_k)^{c - b - 1} \times \\ &\times \prod_{j=1}^{k-1} (\zeta_k - \zeta_j)^{-a_j} \prod_{j=k+2}^N (\zeta_j - \zeta_k)^{-a_j} F_D^{(N)}(\mathbf{a}_k; b_k, c_k; \mathcal{Y}(\mathbf{1} - \mathbf{x}_k)), \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\mathcal{F}_N(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{x}) := \zeta_N^{\sum_{j=1}^N a_j - c} (1 - \zeta_N)^{c - b - a_N} \prod_{j=1}^{N-1} (\zeta_N - \zeta_j)^{-a_j} F_D^{(N)}(\mathbf{a}_N; b_N, c_N; \mathcal{Y}(\mathbf{1} - \mathbf{x}_N)); \quad (1.24)$$

здесь параметры $\mathbf{a}_k$, b_k и c_k записываются через величины (1.18):

$$\mathbf{a}_0 := (a_2, \dots, a_N, 1 + b - c), \quad b_0 := 1 + \sum_{j=1}^N a_j - c, \quad c_0 := 2 + \sum_{j=2}^N a_j - c, \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k &:= \left(c - \sum_{j=1}^N a_j, a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+2}, \dots, a_N, 1 + b - c \right), \\ b_k &:= 1 - a_k, \quad c_k := 2 - a_k - a_{k+1}, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{a}_N := \left(c - \sum_{j=1}^N a_j, a_1, \dots, a_{N-1} \right), \quad b_N := 1 - a_N, \quad c_N := 1 + c - b - a_N, \quad (1.27)$$

векторы $\mathbf{x}_k$ выражаются через прообразы ζ_j , $j = \overline{1, N}$, по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &:= \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}, \dots, \frac{\zeta_1}{\zeta_N}, \zeta_1 \right), \quad \mathbf{x}_N := \left(\frac{1}{\zeta_N}, \frac{\zeta_1}{\zeta_N}, \dots, \frac{\zeta_{N-1}}{\zeta_N} \right), \\ \mathbf{x}_k &:= \left(\frac{\zeta_{k+1}}{\zeta_k}, \frac{\zeta_1}{\zeta_k}, \dots, \frac{\zeta_{k-1}}{\zeta_k}, \frac{\zeta_{k+2}}{\zeta_k}, \dots, \frac{\zeta_N}{\zeta_k}, \frac{1}{\zeta_k} \right), \quad k = \overline{1, N-1}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

а $\mathcal{U}(\mathbf{x})$ определяется из (1.19).

Мы не рассматриваем случай, когда одна или несколько вершин w_j , $j = \overline{0, N+1}$, являются бесконечно удаленными. Отметим только, что в такой ситуации система уравнений для параметров интеграла (1.15) также может быть записана в терминах функции Лауричеллы (см. [20, 38]).

Примеры решения системы (1.16), (1.20)–(1.28) и вычисления отображающей функции $\mu(\zeta)$ для конкретных областей $\mathcal{B}$ приведены в разд. 6.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК ВИДА $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$

2.1. Аналитическое продолжение функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ в окрестность точки $(1, \dots, 1)$

Прежде всего сформулируем теорему об аналитическом продолжении функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ по всем переменным $z_1, \dots, z_N$ в окрестность точки $(1, \dots, 1)$ (см. [20]). Формулы аналитического продолжения, которые дает эта теорема, соответствуют случаю, когда аргумент функции Лауричеллы лежит достаточно далеко от гиперплоскостей вида $\mathcal{M}_{k,m} := \{z_k = z_m\}$.

Выпишем следующий гипергеометрический ряд (в несколько иных обозначениях, приведенный в [2]):

$$G^{(N,j)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}_j|} (\mathbf{a})_{\mathbf{k}}}{(c)_{|\mathbf{k}_j|} \mathbf{k}!} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}, \quad (2.1)$$

где выражение $|\mathbf{k}_j|$ для мультииндекса $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$ означает $|\mathbf{k}_j| := \sum_{s=j}^N k_s - \sum_{s=1}^{j-1} k_s$, а параметр j может принимать значения $1, \dots, N+1$. Напомним, что символ Похгаммера $(a)_k$ для отрицательных целых значений k определяется из (1.8). Областью сходимости ряда (2.1) при всех $j = \overline{1, N+1}$ является единичный поликруг $\mathbb{U}^N$.

Справедливо следующее утверждение (см. теорему 2 в [20]).

Теорема 1. Если ни одно из чисел $(c - \sum_{s=1}^j a_s - b)$, $j = \overline{1, N}$, не является целым, то аналитическое продолжение функции Лауричеллы (1.5) в область

$$\mathbb{K}^N := \{z \in \mathbb{C}^N : 0 < |1 - z_1| < \dots < |1 - z_N| < 1; |\arg(1 - z_s)| < \pi, s = \overline{1, N}\} \quad (2.2)$$

дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N A_j \mathcal{U}_0^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{K}^N, \quad (2.3)$$

где функции $\mathcal{U}_0^{(1)}$, $\mathcal{U}_j^{(1)}$ определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = F_D^{(N)} \left(a_1, \dots, a_N; b, 1 + \sum_{s=1}^N a_s + b - c; 1 - z_1, \dots, 1 - z_N \right), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) &= (1 - z_j)^{c - \sum_{s=1}^j a_s - b} \left(\prod_{l=j+1}^N (1 - z_l)^{-a_l} \right) \times \\ &\times G^{(N, j)} \left(a_1, \dots, a_{j-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s, a_{j+1}, \dots, a_N; c - \sum_{s=1}^{j-1} a_s - b, 1 + c - \sum_{s=1}^j a_s - b; \right. \\ &\left. \frac{1 - z_1}{1 - z_j}, \dots, \frac{1 - z_{j-1}}{1 - z_j}, 1 - z_j, \frac{1 - z_j}{1 - z_{j+1}}, \dots, \frac{1 - z_j}{1 - z_N} \right), \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

в (2.4), (2.5) под $F_D^{(N)}$ и $G^{(N, j)}$ понимаются ряды (1.5) и (2.1), а коэффициенты A_j в (2.3) имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^N a_s - b\right)}{\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^N a_s\right)\Gamma(c - b)}, \\ A_j &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} a_s - b\right)\Gamma\left(\sum_{s=1}^j a_s + b - c\right)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Функции (2.4), (2.5) образуют базис в пространстве решений системы уравнений с частными производными (1.10) в области $\mathbb{K}^N$.

Пусть S_N — группа перестановок множества из N элементов, а $\sigma(\mathbf{z})$ — результат действия некоторого элемента $\sigma \in S_N$ на вектор $\mathbf{z}$, т.е. вектор, получаемый перестановкой компонент $\mathbf{z}$. Введем области, совпадающие с $\mathbb{K}^N$ с точностью до симметрий:

$$\mathbb{K}_\sigma^N := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{K}^N\}. \quad (2.7)$$

Отметим, что функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$ удовлетворяет следующим соотношениям симметрии, вытекающим непосредственно из представлений в виде интеграла (1.3) или ряда (1.5):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = F_D^{(N)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z})). \quad (2.8)$$

Из теоремы 1 с помощью несложных рассуждений могут быть найдены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы в области $\mathbb{K}_\sigma^N$ для всех $\sigma \in S_N$. Действительно, учитывая, что включение $\mathbf{z} \in \mathbb{K}_\sigma^N$ влечет $\sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{K}^N$, и применяя теорему 1 к правой части (2.8), получаем, что аналитическое продолжения функции $F_D^{(N)}$ в область $\mathbb{K}_\sigma^N$ осуществляется формулой (2.3) с заменой в ее правой части, т.е. в коэффициентах $A_j = A_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ и функциях $\mathcal{U}_j^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$, определяемых из (2.4), (2.5), параметра $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$ и аргумента $\mathbf{z}$ на $\sigma(\mathbf{z})$. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1. Предположим, что для параметров $(a_1, \dots, a_N)$, b , c выполнены соотношения $(c - \sum_{s=1}^j \tilde{a}_s - b) \notin \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, N}$, где σ — элемент группы перестановок S^N , и $\tilde{a}_s$ — элемент с номером s вектора $\sigma(\mathbf{a})$. Тогда

i) аналитическое продолжение ряда (1.5) в область $\mathbb{K}_\sigma^N$, заданную равенством (2.7), дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N A_{j, \sigma} \mathcal{U}_{j, \sigma}^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in \mathbb{K}_\sigma^N, \quad (2.9)$$

где функции $\mathcal{U}_{j, \sigma}^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \mathcal{U}_j^{(1)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z}))$ определяются по формулам (2.4), (2.5) с заменой в них векторов $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$ и $\mathbf{z}$ на $\sigma(\mathbf{z})$, а коэффициенты $A_{j, \sigma} := A_j(\sigma(\mathbf{a}); b, c)$ даются равенствами (2.6) с заменой в них $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$;

ii) набор функций

$$\{\mathcal{U}_{j, \sigma}^{(1)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})\}_{j=0}^N, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{K}_\sigma^N, \quad \sigma \in S^N,$$

является базисом в пространстве решений системы (1.10) в области $\mathbb{K}_\sigma^N$, определенной по формуле (2.7).

2.2. Аналитическое продолжение функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ в окрестность точки $(1, \dots, 1, \infty, \dots, \infty)$

Построим формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ для случая, когда первые $v-1$ переменных $z_1, \dots, z_{v-1}$ близки к единице, а остальные $N-v+1$ переменных $z_v, \dots, z_N$ принимают большие по модулю значения. Будем предполагать при этом, что справедливы неравенства

$$0 < |1 - z_1| < \dots < |1 - z_{v-1}| < 1 < |1 - z_v| < \dots < |1 - z_N| < \infty. \quad (2.10)$$

Используя соотношение симметрии (2.8), переставим в правой части тождества (1.13) переменное $z_N/(z_N - 1)$ и соответствующий ему параметр $c - \sum_{s=1}^N a_s$ функции Лауричеллы так, чтобы они имели номер v в списке переменных и параметров соответственно, т.е. перепишем (1.13) в виде

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_N)^{-b} F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{u}), \quad (2.11)$$

где через $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{a}, c)$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{z})$ обозначены векторы параметров и переменных после указанной перестановки:

$$\mathbf{a}(\mathbf{a}, c) := \left(a_1, \dots, a_{v-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s, a_v, \dots, a_{N-1} \right), \quad (2.12)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}) := \left(\frac{z_1 - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{v-1} - z_N}{1 - z_N}, \frac{z_N}{z_N - 1}, \frac{z_v - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{N-1} - z_N}{1 - z_N} \right). \quad (2.13)$$

Нетрудно увидеть, что компоненты $u_1, \dots, u_N$ вектора (2.13) определяются по формулам

$$u_j := \frac{z_j - z_N}{1 - z_N}, \quad j = \overline{1, v-1}, \quad u_v := \frac{z_N}{z_N - 1}, \quad u_j := \frac{z_{j-1} - z_N}{1 - z_N}, \quad j = \overline{v+1, N}. \quad (2.14)$$

Вычисляя с помощью (2.14) величины $1 - u_k$, $k = \overline{1, N}$, находим

$$1 - u_j := \frac{1 - z_j}{1 - z_N}, \quad j = \overline{1, v-1}, \quad 1 - u_v := \frac{1}{1 - z_N}, \quad 1 - u_j := \frac{1 - z_{j-1}}{1 - z_N}, \quad j = \overline{v+1, N}. \quad (2.15)$$

Таким образом, если переменные $z_1, \dots, z_N$ удовлетворяют соотношениям (2.10), то, принимая во внимание (2.15), нетрудно заметить, что новые переменные $u_1, \dots, u_N$ функции

$$F_D^{(N)} \left(a_1, \dots, a_{v-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s, a_v, \dots, a_{N-1}; b, c; b, c; u_1, \dots, u_N \right), \quad (2.16)$$

фигурирующей в правой части тождества (2.11), подчинены неравенствам

$$0 < |1 - u_1| < \dots < |1 - u_N| < 1.$$

Учитывая эти неравенства, запишем формулы аналитического продолжения, которые устанавливает теорема 1, применительно к функции (2.16); затем, подставляя результат в правую часть тождества (2.11) и возвращаясь к исходным переменным $z_1, \dots, z_N$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Предположим, что параметры функции Лауричеллы (1.5) таковы, что справедливы соотношения*

$$\left(c - \sum_{s=1}^j a_s - b \right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1, v-1}, \quad \left(b - \sum_{s=j}^N a_s \right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{v, N}.$$

Тогда аналитическое продолжение ряда (1.5) в область

$$\mathbb{S}^{N,v} = \{z \in \mathbb{C}^N : 0 < |1 - z_1| < \dots < |1 - z_{v-1}| < 1 < |1 - z_v| < \dots < |1 - z_N| < \infty; \\ |\arg(1 - z_s)| < \pi, s = \overline{1, N}\} \quad (2.17)$$

дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N B_j \mathcal{U}_j^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (2.18)$$

где функция $\mathcal{U}_0^{(1,\infty)}$ имеет вид

$$\mathcal{U}_0^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := (1 - z_N)^{-b} \times \\ \times F_D^{(N)}\left(a_1, \dots, a_{N-1}, c - \sum_{j=1}^N a_j; b, 1 + b - a_N; \frac{1 - z_1}{1 - z_N}, \dots, \frac{1 - z_{N-1}}{1 - z_N}, \frac{1}{1 - z_N}\right), \quad (2.19)$$

функции $\mathcal{U}_j^{(1,\infty)}$, $j = \overline{1, v-1}$, определяются равенствами

$$\mathcal{U}_j^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_j)^{c - \sum_{s=1}^j a_s - b} \left(\prod_{l=j+1}^N (1 - z_l)^{-a_l} \right) \times \\ \times G^{(N,j)}\left(a_1, \dots, a_{j-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s, a_{j+1}, \dots, a_N; c - \sum_{s=1}^{j-1} a_s - b, 1 + c - \sum_{s=1}^j a_s - b; \right. \\ \left. \frac{1 - z_1}{1 - z_j}, \dots, \frac{1 - z_{j-1}}{1 - z_j}, 1 - z_j, \frac{1 - z_j}{1 - z_{j+1}}, \dots, \frac{1 - z_j}{1 - z_N} \right), \quad j = \overline{1, v-1}, \quad (2.20)$$

функция $\mathcal{U}_v^{(1,\infty)}$ — равенством

$$\mathcal{U}_v^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \prod_{s=v}^N (1 - z_s)^{-a_s} \times \\ \times G^{(N,v)}\left(a_1, \dots, a_N; c - \sum_{s=1}^{v-1} a_s - b, 1 + \sum_{s=v}^N a_s - b; 1 - z_1, \dots, 1 - z_{v-1}, \frac{1}{1 - z_v}, \dots, \frac{1}{1 - z_N}\right), \quad (2.21)$$

а функции $\mathcal{U}_j^{(1,\infty)}$, $j = \overline{v+1, N}$, — равенствами

$$\mathcal{U}_j^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_{j-1})^{\sum_{s=j}^N a_s - b} \left(\prod_{s=j}^N (1 - z_s)^{-a_s} \right) \times \\ \times G^{(N,j)}\left(a_1, \dots, a_{j-1}, c - \sum_{s=1}^N a_s, a_{j+1}, \dots, a_N; \sum_{s=j-1}^N a_s - b, 1 + \sum_{s=j}^N a_s - b; \right. \\ \left. \frac{1 - z_1}{1 - z_j}, \dots, \frac{1 - z_{j-1}}{1 - z_j}, \frac{1}{1 - z_j}, \frac{1 - z_j}{1 - z_{j+1}}, \dots, \frac{1 - z_j}{1 - z_N} \right), \quad j = \overline{v+1, N}. \quad (2.22)$$

В формулах (2.19)–(2.22) под $F_D^{(N)}$ и $G^{(N,j)}$ понимаются ряды (1.5) и (2.1). В (2.18) коэффициенты B_j имеют вид

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_N - b)}{\Gamma(a_N)\Gamma(c - b)}, \quad B_j = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} a_s - b\right)\Gamma\left(\sum_{s=1}^j a_s + b - c\right)}{\Gamma(a_j)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, \quad j = \overline{1, v-1}, \quad (2.23)$$

$$B_v = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{v-1} a_s - b\right)\Gamma\left(b - \sum_{s=v}^N a_s\right)}{\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^N a_s\right)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, \quad (2.24)$$

$$B_j = \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\sum_{s=j-1}^N a_s - b\right)\Gamma\left(b - \sum_{s=j}^N a_s\right)}{\Gamma(a_{j-1})\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j = \overline{v+1, N}. \quad (2.25)$$

Функции (2.19)–(2.22) образуют базис в пространстве решений системы уравнений с частными производными (1.10) в области $\mathbb{S}^{N,v}$.

Из теоремы 2 с помощью несложных рассуждений могут быть найдены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы в области $\mathbb{S}_\sigma^{N,v}$ для всех $\sigma \in S^N$. Учитывая, что включение $\mathbf{z} \in \mathbb{S}_\sigma^{N,v}$ влечет $\sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{S}^{N,v}$, и применяя теорему 2 к правой части (2.8), получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Предположим, что для параметров $(a_1, \dots, a_N)$, b , c выполнены соотношения

$$\left(c - \sum_{s=1}^j \tilde{a}_s - b\right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1, v-1}, \quad \left(b - \sum_{s=j}^N \tilde{a}_s\right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{v, N}.$$

где σ – элемент группы перестановок S^N , а числа $\tilde{a}_s$, $s = \overline{1, N}$, – элементы вектора $\sigma(\mathbf{a})$. Тогда

i) аналитическое продолжение ряда (1.5) в область $\mathbb{S}_\sigma^{N,v} : \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \sigma(\mathbf{z}) \in \mathbb{S}^{N,v}\}$ дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^N B_{j,\sigma} \mathcal{U}_{j,\sigma}^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (2.26)$$

где функции $\mathcal{U}_{j,\sigma}^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) := \mathcal{U}_j^{(1,\infty)}(\sigma(\mathbf{a}); b, c; \sigma(\mathbf{z}))$ определяются по формулам (2.19)–(2.22) с заменой в них векторов $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$ и $\mathbf{z}$ на $\sigma(\mathbf{z})$, а коэффициенты $B_{j,\sigma} := B_j(\sigma(\mathbf{a}); b, c)$ даются равенствами (2.23)–(2.25) с заменой в них $\mathbf{a}$ на $\sigma(\mathbf{a})$;

ii) набор функций

$$\{\mathcal{U}_{j,\sigma}^{(1,\infty)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})\}_{j=0}^N, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{S}_\sigma^{N,v}, \quad \sigma \in S^N,$$

является базисом пространства решений системы (1.10) в области $\mathbb{S}_\sigma^{N,v}$.

3. ФОРМУЛЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ $F_D^{(N)}$, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТЯМ $\{z_j = z_k\}$

3.1. Формулы аналитического продолжения в окрестность точек вида $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, соответствующие пересечению гиперплоскостей $\{z_m = z_k\}$

Представленные далее в п. 3.1.2 формулы аналитического продолжения (см. [21, 38]) соответствуют случаю, когда $|1 - z_j| < 1$, $j = \overline{1, v}$, а для остальных переменных справедливы соотношения $|z_j| < 1$, $j = \overline{v+1, N}$. При этом предполагается, что некоторые из переменных с номерами $j = \overline{1, v}$ образуют один или несколько наборов, так что внутри каждого набора расстояния между переменными малы по сравнению с расстояниями от них до единицы. Такую ситуацию, как отмечалось выше, называем кроудингом переменных. При изучении аналитического продолжения в ситуации кроудинга нам будет удобно модифицировать обозначения для переменных и параметров функции Лауричеллы.

3.1.1. Используемые обозначения. Представим векторный аргумент $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ функции $F_D^{(N)}$ в виде объединения $q+1 \leq N$ наборов $\mathbf{z}^{(s)}$, $s = \overline{1, q+1}$:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots, \mathbf{z}^{(q+1)}), \quad \mathbf{z}^{(s)} := (z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \dots, z_{p_s}^{(s)}), \quad s = \overline{1, q+1}, \quad (3.1)$$

где набор $\mathbf{z}^{(s)}$ с номером s состоит из p_s элементов, так что $\sum_{s=1}^{q+1} p_s = N$. Несложно установить связь обозначений (3.1) с прежними, использованными в формуле (1.5):

$$z_j^{(s)} = z_m, \quad m = \sum_{l=1}^{s-1} p_l + j, \quad (3.2)$$

так что, например, $\mathbf{z}^{(1)} = (z_1, \dots, z_{p_1})$, $\mathbf{z}^{(2)} = (z_{p_1+1}, \dots, z_{p_1+p_2})$ и $\mathbf{z}^{(q+1)} = (z_{q+1}, \dots, z_N)$.

Будем считать, что компоненты вектора $\mathbf{z}^{(s)}$, т.е. переменные $z_j^{(s)}$ с одинаковым верхним индексом, являются “достаточно близкими” в смысле, который будет уточнен ниже в теореме 0 об аналитическом продолжении. Далее для определенности будем предполагать, что векторы $\mathbf{z}^{(s)}$ с номерами $s = \overline{1, q}$ содержат переменные, близкие к единице, а переменные, образующие $\mathbf{z}^{(q+1)}$, по модулю меньше единицы, т.е. $\mathbf{z}^{(q+1)} \in \{|z_l^{(q+1)}| < 1, l = \overline{1, p_{q+1}}\}$.

Компоненты векторного параметра $\mathbf{a}$ функции Лауричеллы и компоненты мультииндекса $\mathbf{k}$ в формуле (1.5) переобозначим соответствующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(q+1)}), \quad \mathbf{a}^{(s)} := (a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \dots, a_{p_s}^{(s)}), \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{k}^{(1)}, \dots, \mathbf{k}^{(q+1)}), \quad \mathbf{k}^{(s)} := (k_1^{(s)}, k_2^{(s)}, \dots, k_{p_s}^{(s)}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

так что

$$a_j^{(s)} = a_m, \quad k_j^{(s)} = k_m, \quad m = \sum_{l=1}^{s-1} p_s + j. \quad (3.4)$$

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения для частичных сумм векторов $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N)$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$:

$$|\mathbf{a}_{s,l}| := \sum_{k=s}^l a_k, \quad |\mathbf{a}| := |\mathbf{a}_{1,N}|, \quad |\mathbf{k}_{s,l}| := \sum_{n=s}^l k_n, \quad |\mathbf{k}| := |\mathbf{k}_{1,N}|. \quad (3.5)$$

Отсюда и из (3.3), (3.4) вытекают, например, соотношения

$$|\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=1}^{p_s} a_l^{(s)}, \quad |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=1}^{p_s} k_l^{(s)}, \quad \sum_{s=1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| = |\mathbf{a}|, \quad \sum_{s=1}^{q+1} |\mathbf{k}_{1,p_s}^{(s)}| = |\mathbf{k}|, \quad (3.6)$$

а также соотношения

$$|\mathbf{a}_{2,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=1}^{p_s} a_l^{(s)}, \quad |\mathbf{k}_{2,p_s}^{(s)}| = \sum_{l=2}^{p_s} k_l^{(s)}, \quad s = \overline{1, q}, \quad (3.7)$$

которые потребуются в дальнейшем; в формулах (3.6), (3.7) величины $a_l^{(s)}$, $k_l^{(s)}$ — компоненты векторного параметра $\mathbf{a}$ и мультииндекса $\mathbf{k}$ (см. (3.3), (3.4)).

3.1.2. Формулы аналитического продолжения. Здесь приведены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ в окрестность гиперплоскостей, определяемых по формуле (1.12), а также их пересечений, точнее, в новых обозначениях (3.1), (3.2), формулы, справедливые вблизи множества

$$\bigcap_{s=1}^q \mathcal{M}_s, \quad \mathcal{M}_s := \{z_1^{(s)} = \dots = z_{p_s}^{(s)}\}, \quad s = \overline{1, q}; \quad (3.8)$$

при этом рассматриваем окрестности точек $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

Введем область $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^N(p_1, \dots, p_{q+1})$ как пересечение

$$\mathbb{P}^N = \bigcap_{j=0}^q \mathbb{P}_j^N, \quad (3.9)$$

где области $\mathbb{P}_j^N = \mathbb{P}_j^N(p_1, \dots, p_{q+1})$, $j = \overline{0, q}$, определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_j^N := \{z \in \mathbb{C}^N : |1 - z_1^{(j)}| + |z_1^{(\alpha)} - z_n^{(\alpha)}| < 1, \alpha = \overline{1, j}, n = \overline{2, p_\alpha}; \\ |1 - z_1^{(j)}| + |z_1^{(j)} - z_m^{(j)}| + |z_1^{(\alpha)} - z_n^{(\alpha)}| < |1 - z_1^{(\alpha)}|, m = \overline{2, p_j}, \alpha = \overline{j+1, q}, n = \overline{2, p_\alpha}; \\ |z_l^{(q+1)}| < 1, l = \overline{1, p_{q+1}}, |\arg(1 - z_k)| < \pi, k = \overline{1, q}\}, \quad j = \overline{1, q}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\mathbb{P}_0^N := \{z \in \mathbb{C}^N : |1 - z_1^{(\alpha)}| + |z_1^{(\alpha)} - z_n^{(\alpha)}| < 1, \alpha = \overline{1, q}, n = \overline{2, p_\alpha}; |z_l^{(q+1)}| < 1, l = \overline{1, p_{q+1}}\}. \quad (3.11)$$

Имеет место следующее утверждение (см. теорему 2 из [38], а также теорему 2 из [21]), устанавливающее формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, справедливые вблизи пересечения $\bigcap_{s=1}^q \mathcal{M}_s$ гиперплоскостей (3.8) и соответствующие случаю, когда все переменные $z_l^{(s)}$, $l = \overline{1, p_s}$, $s = \overline{1, q}$, близки к единице, а остальные переменные $z_l^{(q+1)}$, $l = \overline{1, p_{q+1}}$, по модулю меньше единицы.

Теорема 3. Если ни одно из чисел $(c - \sum_{s=1}^j |a_{1,p_s}^{(s)}| - b)$, $j = \overline{1, q}$, не является целым, то аналитическое продолжение ряда (1.5) в область (3.9)–(3.11) дается формулой

$$F_D^{(N)}(a; b, c; z) = \sum_{j=0}^q A_j \mathcal{U}_j(a; b, c; z), \quad (3.12)$$

где функции $\mathcal{U}_j$, $j = \overline{0, q}$, определяются равенствами

$$\mathcal{U}_0(a; b, c; z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} \Lambda_0(a; b, c; k) Z_0^k, \quad (3.13)$$

$$\mathcal{U}_j(a; b, c; z) = (1 - z_1^{(j)})^{c - \sum_{s=1}^j |a_{1,p_s}^{(s)}| - b} \left(\prod_{l=j+1}^q (1 - z_1^{(l)})^{-|a_{1,p_l}^{(l)}|} \right) \sum_{|k|=0}^{\infty} \Lambda_j(a; b, c; k) Z_j^k, \quad j = \overline{1, q}. \quad (3.14)$$

Здесь коэффициенты Λ_j имеют вид

$$\begin{aligned} \Lambda_0(a; b, c; k) = \frac{(b)_{|k|}}{\left(c - \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| \right) \left(1 - c + \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}| + b, \sum_{s=1}^q |k_{1,p_s}^{(s)}| \right)} \times \\ \times \prod_{s=1}^q \left[\frac{(|a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{1,p_s}^{(s)}|)}{(|a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{2,p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right] \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_j(a; b, c; k) = \frac{\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} |a_{1,p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} |k_{2,p_s}^{(s)}| \right)}{\left(1 + c - \sum_{s=1}^j |a_{1,p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^j |k_{2,p_s}^{(s)}| \right) (|a_{1,p_j}^{(j)}| |k_{2,p_j}^{(j)}|)} \times \\ \times \left(\frac{\left(c - \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| + k_1^{(j)} \right)}{\left(c - \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| \right) k_1^{(j)}!} \prod_{s=1, s \neq j}^q \frac{(|a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{1,p_s}^{(s)}|)}{(|a_{1,p_s}^{(s)}| |k_{2,p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \right) \left(\prod_{s=1}^q \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right) \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

В формулах (3.13), (3.14) использовано обозначение $Z_j^k = \prod_{s=1}^{q+1} \prod_{l=1}^{p_s} (Z_{j,l}^{(s)})^{k_l^{(s)}}$, где числа $Z_j^{(s,l)}$ – элементы векторов $Z_j^{(s)} = \{Z_{j,1}^{(s)}, \dots, Z_{j,p_s}^{(s)}\}$, $j = \overline{0, q}$, $s = \overline{1, q+1}$, определяемых следующим способом:

если $j = 0$, то для $s = \overline{1, q+1}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} Z_0^{(s)} = (1 - z_1^{(s)}, z_1^{(s)} - z_2^{(s)}, \dots, z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}), \quad s = \overline{1, q}, \\ Z_0^{(q+1)} = (z_1^{(q+1)}, \dots, z_{p_{q+1}}^{(q+1)}), \quad s = q+1; \end{aligned} \quad (3.17)$$

если $j = \overline{1, q}$, то для $s = \overline{1, q+1}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} Z_j^{(s)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}}, \frac{z_1^{(s)} - z_2^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}} \right), \quad s = \overline{1, j-1}, \\ Z_j^{(j)} &= \left(1 - z_1^{(j)}, \frac{z_1^{(j)} - z_2^{(j)}}{1 - z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_1^{(j)} - z_{p_j}^{(j)}}{1 - z_1^{(j)}} \right), \quad s = j, \\ Z_j^{(s)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(j)}}{1 - z_1^{(s)}}, \frac{z_2^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}}, \dots, \frac{z_{p_s}^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}} \right), \quad s = \overline{j+1, q}, \quad Z_j^{(q+1)} = (z_1^{q+1}, \dots, z_{p_{q+1}}^{q+1}), \quad s = q+1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Коэффициенты A_j , $j = \overline{0, q}$, в формуле (3.12) имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}| - b\right)}{\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^q |a_{1,p_s}^{(s)}|\right)\Gamma(c-b)}, \\ A_j &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} |a_{1,p_s}^{(s)}| - b\right)\Gamma\left(\sum_{s=1}^j |a_{1,p_s}^{(s)}| + b - c\right)}{\Gamma(|a_{1,p_j}^{(j)}|)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j = \overline{1, q}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Функции (3.13), (3.14) образуют базис в пространстве решений системы (1.10) в области (3.9)–(3.11).

Отметим, что если какой-либо из наборов переменных $\mathbf{z}^{(s)}$ не содержит ни одного элемента, то соответствующая ему сумма в формулах (3.13)–(3.16), (3.19) считается равной нулю, а произведение – единице. Например, если набор с номером $s = q+1$ не содержит элементов, то

$$\prod_{l=1}^{p_{q+1}} (\dots) = 1, \quad \sum_{l=1}^{p_{q+1}} (\dots) = 0, \quad |k_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| = 0.$$

3.2. Формулы аналитического продолжения в окрестность точек вида $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \infty, \dots, \infty)$, соответствующее пересечению гиперплоскостей $\{z_m = z_k\}$

3.2.1. Используемые обозначения. Здесь в п. 3.2 мы также выводим формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z})$ для случая, когда компоненты вектора переменных $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ образуют группы близких величин, однако в отличие от предыдущего п. 3.1 часть переменных по модулю может быть больше единицы. Нетрудно увидеть, что при этом компоненты вектора $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$, определенного в (2.13), (2.14), соответствующим образом делятся на группы.

Будем предполагать (вместо (2.10)), что для некоторых v, μ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |1 - z_1| &< \dots < |1 - z_{v-1}| < 1, \\ |z_j| &< 1, \quad j = v, v + \mu - 1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$1 < |1 - z_{v+\mu}| < \dots < |1 - z_N| < \infty \quad (3.21)$$

(здесь считаем, что $1 \leq v \leq N, 0 \leq \mu \leq N - v$). Таким образом, аргумент $\mathbf{z}$ функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ принадлежит окрестности точки

$$(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \infty, \dots, \infty).$$

Далее, считая выполненными условия (3.20)–(3.21), вычислим набор переменных (2.14), преобразуем функцию Лауричеллы с помощью тождества (2.11)–(2.13), а затем применим к правой части (2.11) теорему 3 для вывода формул аналитического продолжения.

Для того чтобы воспользоваться теоремой 3, введем обозначения, аналогичные обозначениям из п. 3.1.1. Прежде всего, определим вектор

$$\tilde{\mathbf{z}} := (z_1, \dots, z_{v-1}, z_N, z_v, \dots, z_{N-1})$$

и представим его в виде объединения $q + 1 \leq N$ наборов

$$\tilde{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)}, \dots, \mathbf{z}^{(q+1)}),$$

где $\mathbf{z}^{(s)} = (z_1^{(s)}, \dots, z_{p_s}^{(s)})$, за исключением содержащего z_N , составлены из “достаточно близких” величин. Номер, который имеет набор $(z_N, z_v, \dots, z_{\mu-1})$, обозначаем через κ ; здесь, в частности, $z_1^{(\kappa)} = z_N$, $z_2^{(\kappa)} = z_v$ и т.д. Длины векторов $\mathbf{z}^{(s)}$, как и в п. 3.1.1, обозначаем через p_s . Набору $\mathbf{z}^{(q+1)}$ принадлежат такие переменные z_j , $j = \overline{\rho, N-1}$, которые “достаточно близки” к z_N , точнее говоря, выполняются условия

$$\mathbf{z}^{(q+1)} = (z_1^{(q+1)}, \dots, z_{p_{q+1}}^{(q+1)}): \quad |z_j^{(q+1)} - z_N| < |1 - z_N|, \quad j = \overline{1, p_{q+1}}. \quad (3.22)$$

Если таких переменных нет, т.е. $|z_{N-1} - z_N| > |1 - z_N|$, то считаем набор $\mathbf{z}^{(q+1)}$ пустым.

Для примера выпишем следующие наборы $\mathbf{z}^{(s)}$:

$$\mathbf{z}^{(1)} = (z_1, \dots, z_{p_1}), \quad \mathbf{z}^{(2)} = (z_{p_1+1}, \dots, z_{p_1+p_2}), \quad \mathbf{z}^{(q+1)} = (z_\rho, \dots, z_{N-1}),$$

а также набор с номером κ :

$$\mathbf{z}^{(\kappa)} = (z_N, z_v, \dots, z_{v+\mu-1});$$

если $\mu = 0$, то $\mathbf{z}^{(\kappa)}$ состоит из одного нулевого элемента. В соответствии с (3.20)–(3.21) имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |1 - z_j^{(s)}| < 1, \quad s = \overline{1, \kappa-1}, \quad j = \overline{1, p_s}, \quad |z_j^{(\kappa)}| < 1, \quad j = \overline{2, p_\kappa}, \\ 1 < |1 - z_j^{(s)}|, \quad s = \overline{\kappa+1, q+1}, \quad j = \overline{1, p_s}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $p_\kappa = \rho - \mu + 1$, причем

$$|1 - z_1^{(1)}| < \dots < |1 - z_1^{(\kappa-1)}| < 1 < |1 - z_1^{(\kappa+1)}| < \dots < |1 - z_1^{(q+1)}|.$$

Векторный аргумент $\mathbf{u}$ функции $F_D^{(N)}$ в правой части (2.11) представим в виде объединения наборов $\mathbf{u}^{(s)}$, $s = \overline{1, q+1}$:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(q+1)}), \quad \mathbf{u}^{(s)} := (u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, \dots, u_{p_s}^{(s)}), \quad s = \overline{1, q+1}, \quad (3.24)$$

элементы которых выражаются через элементы $\mathbf{z}^{(s)}$ по формулам

$$u_j^{(s)} := \frac{z_j^{(s)} - z_N}{1 - z_N}, \quad s = \overline{1, q+1} \setminus \{\kappa\}, \quad j = \overline{1, p_s}, \quad (3.25)$$

$$u_1^{(\kappa)} := \frac{z_N}{z_N - 1}, \quad u_j^{(\kappa)} := \frac{z_j^{(\kappa)} - z_N}{1 - z_N}, \quad j = \overline{2, p_\kappa}. \quad (3.26)$$

Соответствующие компоненты векторного параметра $\mathbf{a}$ функции Лауричеллы и компоненты мультииндекса $\mathbf{k}$ в формуле (1.5) обозначаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(q+1)}), \quad \mathbf{a}^{(s)} := (a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \dots, a_{p_s}^{(s)}), \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{k}^{(1)}, \dots, \mathbf{k}^{(q+1)}), \quad \mathbf{k}^{(s)} := (k_1^{(s)}, k_2^{(s)}, \dots, k_{p_s}^{(s)}). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Согласно (3.26), (2.10) справедливо равенство

$$a_1^{(\kappa)} = c - \sum_{s=1}^N a_s. \quad (3.28)$$

Приведем еще соотношения, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$1 - u_1^{(j)} := \frac{1 - z_1^{(j)}}{1 - z_N}, \quad j = \overline{1, N} \setminus \kappa, \quad 1 - u_1^{(\kappa)} := \frac{1}{1 - z_N}, \quad (3.29)$$

а кроме того,

$$\begin{aligned} u_s^{(j)} - u_1^{(j)} &= \frac{z_1^{(j)} - z_s^{(j)}}{1 - z_N}, \quad j = \overline{1, N \setminus \kappa}, \quad s = \overline{2, p_j}, \\ u_s^{(\kappa)} - u_1^{(\kappa)} &= \frac{z_s^{(\kappa)}}{1 - z_N}, \quad s = \overline{2, p_\kappa}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Напомним обозначения (3.4)–(3.7).

Нетрудно увидеть, что если компоненты вектора $\mathbf{z}^{(s)}$ являются “достаточно близкими”, то согласно (3.25), (3.26) и компоненты вектора $\mathbf{u}^{(s)}$, т.е. переменные $u_j^{(s)}$ с одинаковым верхним индексом, также являются “достаточно близкими”. Кроме того, согласно (3.20)–(3.21), (3.29) векторы $\mathbf{u}^{(s)}$ с номерами $s = \overline{1, q}$ содержат компоненты, достаточно близкие к единице, причем

$$|1 - u_1^{(1)}| < \dots < |1 - u_1^{(q)}| < 1.$$

Согласно (3.22), (3.25) набор $\mathbf{u}^{(q+1)}$ состоит из переменных, которые по модулю меньше единицы, т.е.

$$\mathbf{u}^{(q+1)} \in \{|u_l^{(q+1)}| < 1, l = \overline{1, p_{q+1}}\}.$$

3.2.2. Формулы аналитического продолжения. Здесь построены формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, справедливые вблизи множества

$$\bigcap_{s=1, s \neq \kappa}^{q+1} \mathcal{M}_s, \quad \mathcal{M}_s := \{z_1^{(s)} = \dots = z_{p_s}^{(s)}\}, \quad s = \overline{1, q}, \quad \mathcal{M}_{q+1} := \{z_1^{(q+1)} = \dots = z_{p_{q+1}}^{(q+1)} = z_N\};$$

при этом будем предполагать, что справедливы неравенства

$$0 < |1 - z_1^{(1)}| < \dots < |1 - z_1^{(\kappa-1)}| < 1 < |1 - z_1^{(\kappa+1)}| < \dots < |1 - z_1^{(q)}|.$$

Выполняя аналитическое продолжение функции Лауричеллы в правой части (2.11) с помощью формул, представленных в теореме 3 с заменой соответственно $\mathbf{a}$ и $\mathbf{z}$ на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{u}$, определенных в (2.12), (2.13), а также с учетом равенств (3.29), (3.30), приходим к следующему утверждению, устанавливающему формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$, справедливые вблизи пересечения $\bigcap_{s=1}^q \mathcal{M}_s$ гиперплоскостей (3.8) и соответствующие случаю, когда переменные удовлетворяют неравенствам (3.9), а остальные переменные $z_l^{(q+1)}$, $l = \overline{1, p_{q+1}}$, по модулю меньше единицы.

Теорема 4. *Предположим, что параметры функции Лауричеллы удовлетворяют соотношениям*

$$\left(c - \sum_{s=1}^j |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b \right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{1, \kappa - 1}, \quad \left(b - a_N - \sum_{s=j}^{q+1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| \right) \notin \mathbb{Z}, \quad j = \overline{\kappa + 1, q}.$$

Тогда аналитическое продолжение ряда (1.5) дается формулой

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^q B_j \mathcal{V}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (3.31)$$

где функции $\mathcal{V}_j$, $j = \overline{0, q}$, определяются следующим образом:

если $j = 0$, то

$$\mathcal{V}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_N)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Lambda_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}_0^{\mathbf{k}}, \quad (3.32)$$

если $j = \overline{1, \kappa - 1}$, то

$$\mathcal{V}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_1^{(j)})^{c - \sum_{s=1}^j |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b} \left(\prod_{l=j+1, l \neq \kappa}^q (1 - z_1^{(l)})^{-|\mathbf{a}_{1, p_l}^{(l)}|} \right) (1 - z_N)^{-a_N - |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|} \times \\ \times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}, \quad j = \overline{1, \kappa - 1}, \quad (3.33)$$

если $j = \kappa$, то

$$\mathcal{V}_{\kappa}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \left(\prod_{l=\kappa+1}^q (1 - z_1^{(l)})^{-|\mathbf{a}_{1, p_l}^{(l)}|} \right) (1 - z_N)^{-a_N - |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}, \quad j = \kappa, \quad (3.34)$$

а если $j = \overline{\kappa + 1, q}$, то

$$\mathcal{V}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_1^{(j)})^{a_N + \sum_{s=j+1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b} \left(\prod_{l=j+1}^q (1 - z_1^{(l)})^{-|\mathbf{a}_{1, p_l}^{(l)}|} \right) (1 - z_N)^{-a_N - |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|} \times \\ \times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) \mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}, \quad j = \overline{\kappa + 1, q}. \quad (3.35)$$

В формулах (3.32)–(3.35) коэффициенты Λ_j , $j = \overline{0, q}$, определяются следующим образом:

Λ_0 имеет вид

$$\Lambda_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}}{\left(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| \right) \left(1 - a_N - |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| + b, \sum_{s=1}^q |\mathbf{k}_{1, p_s}^{(s)}| \right)} \times \\ \times \prod_{s=1}^q \left[\frac{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{1, p_s}^{(s)}|)}{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right] \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}, \quad (3.36)$$

коэффициенты Λ_j , $j = \overline{1, \kappa - 1}$, даются равенствами

$$\Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right)}{\left(1 + c - \sum_{s=1}^j |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^j |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right) (|\mathbf{a}_{1, p_j}^{(j)}| |\mathbf{k}_{2, p_j}^{(j)}|)} \times \\ \times \left(\frac{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| + k_1^{(j)})}{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|) k_1^{(j)}!} \prod_{s=1, s \neq j}^q \frac{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{1, p_s}^{(s)}|)}{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \right) \left(\prod_{s=1}^q \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right) \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}, \quad (3.37)$$

коэффициент Λ_{κ} – равенством

$$\Lambda_{\kappa}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{\left(c - \sum_{s=1}^{\kappa-1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=\kappa}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{\kappa-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{\kappa-1} |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right)}{\left(1 + a_N + \sum_{s=\kappa+1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=\kappa}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{\kappa-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{\kappa} |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right) (|\mathbf{a}_{1, p_{\kappa}}^{(\kappa)}| |\mathbf{k}_{2, p_{\kappa}}^{(\kappa)}|)} \times \\ \times \left(\frac{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| + k_1^{(\kappa)})}{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|) k_1^{(\kappa)}!} \prod_{s=1, s \neq \kappa}^q \frac{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{1, p_s}^{(s)}|)}{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \right) \left(\prod_{s=1}^q \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right) \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}, \quad (3.38)$$

а коэффициенты Λ_j , $j = \overline{\kappa + 1, q}$, имеют вид

$$\Lambda_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{k}) = \frac{\left(a_N + \sum_{s=j}^{q+1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right)}{\left(1 + a_N + \sum_{s=j+1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| - b, \sum_{s=j}^q k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^{j-1} k_1^{(s)} - \sum_{s=1}^j |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}| \right) (|\mathbf{a}_{1, p_j}^{(j)}| |\mathbf{k}_{2, p_j}^{(j)}|)} \times \\ \times \left(\frac{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| + k_1^{(j)})}{(a_N + |\mathbf{a}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}| |\mathbf{k}_{1, p_{q+1}}^{(q+1)}|) k_1^{(j)}!} \prod_{s=1, s \neq j}^q \frac{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{1, p_s}^{(s)}|)}{(|\mathbf{a}_{1, p_s}^{(s)}| |\mathbf{k}_{2, p_s}^{(s)}|) k_1^{(s)}!} \right) \left(\prod_{s=1}^q \prod_{l=2}^{p_s} \frac{(a_l^{(s)}, k_l^{(s)})}{k_l^{(s)}!} \right) \prod_{l=1}^{p_{q+1}} \frac{(a_l^{(q+1)}, k_l^{(q+1)})}{k_l^{(q+1)}!}. \quad (3.39)$$

В формулах (3.32)–(3.35) использовано обозначение

$$\mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}} := \prod_{s=1}^{q+1} \prod_{l=1}^{p_s} (Z_{j,l}^{(s)})^{k_l^{(s)}}, \quad (3.40)$$

где числа $Z_j^{(s,l)}$ – это элементы векторов $Z_j^{(s)} = \{Z_{j,1}^{(s)}, \dots, Z_{j,p_s}^{(s)}\}$, $j = \overline{0, q}$, $s = \overline{1, q+1}$, определяемых следующим способом:

если $j = 0$, то для $s = \overline{1, q+1}$ векторы $Z_0^{(s)}$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} Z_0^{(s)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(s)}}{1 - z_N}, \frac{z_1^{(s)} - z_2^{(s)}}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}}{1 - z_N} \right), \quad s = \overline{1, q} \setminus \{\kappa\}, \\ Z_0^{(\kappa)} &= \left(\frac{1}{1 - z_N}, \frac{-z_2^{(\kappa)}}{1 - z_N}, \dots, \frac{-z_{p_\kappa}^{(\kappa)}}{1 - z_N} \right), \quad s = \kappa, \\ Z_0^{(q+1)} &= \left(\frac{z_1^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{p_{q+1}}^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N} \right), \quad s = q+1. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Если $j = \overline{1, q}$, то для $s = \overline{1, q+1}$ векторы $Z_j^{(s)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} Z_j^{(s)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}}, \frac{z_1^{(s)} - z_2^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}}{1 - z_1^{(j)}} \right), \quad s = \overline{1, j-1} \setminus \{\kappa\}, \\ Z_j^{(j)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(j)}}{1 - z_N}, \frac{z_1^{(j)} - z_2^{(j)}}{1 - z_1^{(j)}}, \dots, \frac{z_1^{(j)} - z_{p_j}^{(j)}}{1 - z_1^{(j)}} \right), \quad s = j, \quad s \neq \kappa, \\ Z_j^{(s)} &= \left(\frac{1 - z_1^{(j)}}{1 - z_1^{(s)}}, \frac{z_2^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}}, \dots, \frac{z_{p_s}^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}} \right), \quad s = \overline{j+1, q} \setminus \{\kappa\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$Z_j^{(\kappa)} = \begin{cases} \left(\frac{1}{1 - z_1^{(j)}}, \frac{z_2^{(\kappa)}}{z_1^{(j)} - 1}, \dots, \frac{z_{p_\kappa}^{(\kappa)}}{z_1^{(j)} - 1} \right), & \kappa < j, \\ (1 - z_1^{(j)}, z_2^{(\kappa)}, \dots, z_{p_\kappa}^{(\kappa)}), & \kappa > j, \end{cases} \quad (3.43)$$

$$Z_j^{(q+1)} = \left(\frac{z_1^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{p_{q+1}}^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N} \right), \quad s = q+1; \quad (3.44)$$

если $j = \kappa$, то векторы $Z_j^{(s)}$ для $s = \overline{1, q+1}$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} Z_\kappa^{(s)} &= (1 - z_1^{(s)}, z_1^{(s)} - z_2^{(s)}, \dots, z_1^{(s)} - z_{p_s}^{(s)}), \quad s = \overline{1, \kappa-1}, \\ Z_\kappa^{(\kappa)} &= \left(\frac{1}{1 - z_N}, -z_2^{(\kappa)}, \dots, -z_{p_\kappa}^{(\kappa)} \right), \quad s = \kappa, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} Z_\kappa^{(s)} &= \left(\frac{1}{1 - z_1^{(s)}}, \frac{z_2^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}}, \dots, \frac{z_{p_s}^{(s)} - z_1^{(s)}}{1 - z_1^{(s)}} \right), \quad s = \overline{\kappa+1, q}, \\ Z_\kappa^{(q+1)} &= \left(\frac{z_1^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N}, \dots, \frac{z_{p_{q+1}}^{(q+1)} - z_N}{1 - z_N} \right), \quad s = q+1. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Коэффициенты B_j , $j = \overline{0, q}$, в формуле (3.31) имеют вид

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_N + |\mathbf{a}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}| - b)}{\Gamma(a_N + |\mathbf{a}_{1,p_{q+1}}^{(q+1)}|)\Gamma(c - b)},$$

$$\begin{aligned}
 B_j &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{j-1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - b\right)\Gamma\left(\sum_{s=1}^j |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| + b - c\right)}{\Gamma(|\mathbf{a}_{1,p_j}^{(j)}|)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j = \overline{1, \kappa-1}, \\
 B_\kappa &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(c - \sum_{s=1}^{\kappa-1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| - b\right)\Gamma\left(b - a_N - \sum_{s=\kappa+1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}|\right)}{\Gamma(|\mathbf{a}_{1,p_\kappa}^{(\kappa)}|)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j = \kappa, \\
 B_j &= \frac{\Gamma(c)\Gamma\left(\sum_{s=j}^{q+1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}| + a_N - b\right)\Gamma\left(b - a_N - \sum_{s=j+1}^{q+1} |\mathbf{a}_{1,p_s}^{(s)}|\right)}{\Gamma(|\mathbf{a}_{1,p_j}^{(j)}|)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}, \quad j = \overline{\kappa+1, q}.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Функции (3.32)–(3.35) образуют базис в пространстве решений системы (1.10).

Справедливо замечание, аналогичное сформулированному после теоремы 2, т.е. суммы и произведения, соответствующие какому-либо набору $\mathbf{z}^{(s)}$, не содержащему ни одного элемента, полагаются равными соответственно нулю и единице.

Представления функции Лауричеллы в виде экспоненциально сходящихся рядов, которые устанавливают теоремы 1–4, позволяют исследовать аналитически и эффективно вычислять интегралы типа Эйлера (1.10) во всем пространстве $\mathbb{C}^N$, в том числе в сложных случаях кроудинга переменных, т.е. вблизи произвольных пересечений гиперплоскостей (3.8). Область сходимости представления (3.31) вытекает из теоремы 3. Мы не приводим вид этой области при произвольном N , а укажем его на конкретных примерах. Примеры применения теорем 2 и 4 для случаев трех и шести переменных приведены в следующих разд. 4, 5.

4. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМ 2, 4 ДЛЯ ВЫВОДА ФОРМУЛ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛАУРИЧЕЛЛЫ $F_D^{(3)}$

4.1. Используемые обозначения

В данном разделе продемонстрировано применение теоремы 2 к функции $F_D^{(3)}$, определяемой в поликруге $\mathbb{U}^3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |z_j| < 1, j = 1, 2, 3\}$ с помощью гипергеометрического ряда

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(c)_{k_1+k_2+k_3} k_1! k_2! k_3!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} \tag{4.1}$$

и представимой в области $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = 1, 2, 3\}$ в виде интеграла типа Эйлера (см. [2]):

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz_1)^{-a_1} (1-tz_2)^{-a_2} (1-tz_3)^{-a_3} dt. \tag{4.2}$$

Выпишем еще необходимые ряды $G^{(3,2)}$ и $G^{(3,3)}$, вид которых вытекает из (2.1):

$$G^{(3,2)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_2+k_3-k_1} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(c)_{k_2+k_3-k_1} k_1! k_2! k_3!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3}, \tag{4.3}$$

$$G^{(3,3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_3-k_1-k_2} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(c)_{k_3-k_1-k_2} k_1! k_2! k_3!} z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3}, \tag{4.4}$$

ряды (4.3), (4.4) сходятся в поликруге $\mathbb{U}^3$.

4.2. Формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки (∞, ∞, ∞)

Далее, полагая $v = 1$, $N = 3$ в теореме 0, получаем следующее утверждение, позволяющее аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность пересечения гиперплоскостей $\mathcal{M}_j^{(\infty)} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3 : z_j = 1\}$, $j = 1, 2, 3$.

Теорема 5. Если параметры функции (4.1) таковы, числа $a_3 - b$, $a_2 + a_3 - b$, $a_1 + a_2 + a_3 - b$ не являются целыми, то в области

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : 1 < |1 - z_1| < |1 - z_2| < |1 - z_3|; |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = 1, 2, 3\} \quad (4.5)$$

функция Лауричеллы $F_D^{(3)}$ представима в следующем виде:

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{j=0}^3 A_j \mathcal{U}_j^{(1, \infty)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3), \quad (4.6)$$

$$\mathcal{U}_0^{(1, \infty)} := (1 - z_3)^{-b} F_D^{(3)}\left(a_1, a_2, c - a_1 - a_2 - a_3; b, 1 + a_3 - b; \frac{1 - z_1}{1 - z_3}, \frac{1 - z_2}{1 - z_3}, \frac{1}{1 - z_3}\right), \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1, \infty)} &:= (1 - z_1)^{-a_1} (1 - z_2)^{-a_2} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times F_D^{(3)}\left(a_1, a_2, a_3; c - b, 1 + a_1 + a_2 + a_3 - b; \frac{1}{1 - z_1}, \frac{1}{1 - z_2}, \frac{1}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2^{(1, \infty)} &:= (1 - z_1)^{a_2 + a_3 - b} (1 - z_2)^{-a_2} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times G^{(3, 2)}\left(c - a_1 - a_2 - a_3, a_2, a_3; a_1 + a_2 + a_3 - b, 1 + a_2 + a_3 - b; \frac{1}{1 - z_1}, \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, \frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_3^{(1, \infty)} &:= (1 - z_2)^{a_3 - b} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times G^{(3, 3)}\left(a_1, c - a_1 - a_2 - a_3, a_3; a_2 + a_3 - b, 1 - b + a_3; \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, \frac{1}{1 - z_2}, \frac{1 - z_2}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где в правых частях равенств (4.7)–(4.10) под $F_D^{(3)}$, $G^{(3, 2)}$, $G^{(3, 3)}$ понимаются ряды (4.1), (4.3), (4.4). Коэффициенты A_j , $j = \overline{0, 3}$, фигурирующие в (4.6), определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3 - b)}{\Gamma(a_3)\Gamma(c - b)}, & A_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(b - a_1 - a_2 - a_3)}{\Gamma(c - a_1 - a_2 - a_3)\Gamma(b)}, \\ A_2 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 - b)\Gamma(b - a_2 - a_3)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, & A_3 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_2 + a_3 - b)\Gamma(b - a_3)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}. \end{aligned}$$

Функции (4.7)–(4.10) образуют базис в пространстве решений системы $E_D^{(3)}$ в области (4.5).

Построим формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3)$ в окрестность точки (∞, ∞, ∞) , соответствующие случаю, при котором расстояния между переменными $|z_1 - z_3|$ и $|z_2 - z_3|$ малы по сравнению с модулем $|1 - z_3|$.

Используемые в теореме 4 числа q , κ , p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2) определяются равенствами

$$\begin{aligned} q &= 1, & \kappa &= 1, & p_1 &= 1, & p_2 &= 2, & z_1^{(1)} &= z_3, & z_1^{(2)} &= z_1, & z_2^{(2)} &= z_2, \\ a_1^{(1)} &= c - a_1 - a_2 - a_3, & a_1^{(2)} &= a_2, & a_2^{(2)} &= a_3, & k_1^{(1)} &= k_3, & k_1^{(2)} &= k_1, & k_2^{(2)} &= k_2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Применяя теорему 4, построим теперь формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки (∞, ∞, ∞) , адекватно представляющую эту функцию вблизи гиперплоскости

$$\mathcal{M}_{1,2,3} := \{z_1 = z_2 = z_3\}. \quad (4.12)$$

Подставляя (4.11) в (3.36)–(3.39), находим выражения для коэффициентов рядов (3.32)–(3.35), а затем по формулам (3.47) находим величины B_j . По формулам (3.41)–(3.47) получаем

$$Z_0^{(1)} = Z_1^{(1)} = \left(\frac{z_1 - z_3}{1 - z_3} \right), \quad Z_0^{(2)} = Z_1^{(2)} = \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3}, \frac{1}{1 - z_3} \right),$$

т.е. векторы $Z_0^{(1)} = Z_1^{(1)}$ состоят из одного элемента. Отсюда согласно (3.40) получаем

$$Z_0^k = Z_1^k = \left(\frac{z_1 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3}. \quad (4.13)$$

Подставляя найденные коэффициенты Λ_j , величины B_j , а также выражения (4.13) в (3.31)–(3.35), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность особой гиперплоскости (4.12), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_1, z_2, z_3 , для случая, когда они велики по модулю.

Теорема 6. Если параметры функции Лауричеллы $F_D^{(3)}$ таковы, что $b - a_1 - a_2 - a_3 \notin \mathbb{Z}$, то аналитическое продолжение ряда (4.1) в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1 - z_3| > 1 + |z_j - z_3|, j = 1, 2; |\arg(1 - z_3)| < \pi\} \quad (4.14)$$

дается формулой

$$\begin{aligned} F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = & B_0(1 - z_3)^{-b} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (c - a_1 - a_2 - a_3)_{k_3}}{(a_1 + a_2 + a_3)_{k_1+k_2} (1 - a_1 - a_2 - a_3 + b)_{k_3} k_1! k_2! k_3!} \times \\ & \times \left(\frac{z_1 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3} + B_1(1 - z_3)^{-a_1 - a_2 - a_3} \times \\ & \times \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(c - b)_{k_3} (a_1 + a_2 + a_3)_{k_1+k_2+k_3} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2}}{(1 + a_1 + a_2 + a_3 - b)_{k_3} (a_1 + a_2 + a_3)_{k_1+k_2} k_1! k_2! k_3!} \left(\frac{z_1 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3}, \end{aligned}$$

где величины B_0 и B_1 определяются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + a_2 + a_3 - b)}{\Gamma(a_1 + a_2 + a_3)\Gamma(c - b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b - a_1 - a_2 - a_3)}{\Gamma(c - a_1 - a_2 - a_3)\Gamma(b)}.$$

Построим с помощью теоремы 4 формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3)$ в окрестность точки (∞, ∞, ∞) , соответствующие случаю, при котором расстояния между переменными $|z_1 - z_2|$ малы по сравнению с модулем $|1 - z_1|$ и модулем $|1 - z_3|$, а $|1 - z_1|/|1 - z_3|$ мала по сравнению с единицей. В теореме 4 числа q, κ, p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2) для указанного случая определяются равенствами

$$\begin{aligned} q = 2, \quad \kappa = 1, \quad p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad z_1^{(1)} = z_3, \quad z_1^{(2)} = z_1, \quad z_2^{(2)} = z_2, \\ a_1^{(1)} = c - a_1 - a_2 - a_3, \quad a_1^{(2)} = a_1, \quad a_2^{(2)} = a_2, \quad k_1^{(1)} = k_3, \quad k_1^{(2)} = k_1, \quad k_2^{(2)} = k_2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Применяя теорему 4, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки (∞, ∞, ∞) , адекватно представляющую эту функцию вблизи гиперплоскости

$$\mathcal{M}_{1,2} := \{z_1 = z_2\}. \quad (4.16)$$

Подставляя (4.15) в (3.36)–(3.39), находим выражения для коэффициентов рядов (3.32)–(3.35), а затем по формулам (3.47) находим величины B_j . По формулам (3.41)–(3.45) получаем

$$\begin{aligned} Z_0^{(1)} = \left(\frac{1}{1 - z_3} \right), \quad Z_0^{(2)} = \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3}, \frac{z_1 - z_2}{1 - z_3} \right), \\ Z_1^{(1)} = \left(\frac{1}{1 - z_3} \right), \quad Z_1^{(2)} = \left(\frac{1}{1 - z_1}, \frac{z_2 - z_1}{1 - z_1} \right), \end{aligned}$$

$$Z_2^{(1)} = \left(\frac{1}{1-z_1} \right), \quad Z_2^{(2)} = \left(\frac{1-z_1}{1-z_3}, \frac{z_1-z_2}{1-z_3} \right);$$

здесь векторы $Z_0^{(1)}$, $Z_1^{(1)}$, $Z_2^{(1)}$ состоят из одного элемента. Отсюда согласно (3.40) после перестановки индексов суммирования k_1 и k_3 получаем

$$\begin{aligned} Z_0^k &= \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3}, \\ Z_1^k &= \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2-z_1}{1-z_1} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3}, \\ Z_2^k &= \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_3}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Подставляя найденные коэффициенты Λ_j , величины B_j , а также выражения (4.17) в (3.31)–(3.35), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность особой гиперплоскости (4.16), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_1, z_2 , для случая, когда все переменные z_1, z_2 и z_3 велики по модулю.

Теорема 7. Если параметры функции Лауричеллы $F_D^{(3)}$ таковы, что $b-a_3 \notin \mathbb{Z}$ и $b-a_1-a_2-a_3 \notin \mathbb{Z}$, то аналитическое продолжение ряда (4.1) в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1-z_1| > 1 + |z_1-z_2|, |1-z_3| > |1-z_1| + |z_1-z_2|; |\arg(1-z_j)| < \pi, j=1,3\} \quad (4.18)$$

дается формулой

$$\begin{aligned} F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) &= B_0(1-z_3)^{-b} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1+a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (c-a_1-a_2-a_3)_{k_3}}{(1-a_3+b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} \times \\ &\quad \times \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3} + B_1(1-z_1)^{-a_1-a_2} (1-z_3)^{-a_3} \times \\ &\quad \times \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(c-b)_{k_1+k_3} (a_1+a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+a_3-b)_{k_1+k_3} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2-z_1}{1-z_1} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3} + B_2(1-z_1)^{a_3-b} (1-z_3)^{-a_3} \times \\ &\quad \times \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(a_3-b)_{k_3-k_1} (c-a_1-a_2-a_3)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+a_3-b)_{k_3-k_1-k_2} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} \left(\frac{1}{1-z_1} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1} \right)^{k_2} \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_3}, \end{aligned}$$

где величины B_0 , B_1 и B_2 определяются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3-b)}{\Gamma(a_3)\Gamma(c-b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a_3)}{\Gamma(c-a_1-a_2-a_3)\Gamma(b)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1+a_2+a_3-b)\Gamma(b-a_3)}{\Gamma(a_1+a_2)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}.$$

Используя формулы симметрии (2.8), на основе теорем 5–7 несложно получить полный набор формул для представления функции $F_D^{(3)}$ в окрестности точки (∞, ∞, ∞) .

4.3. Формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, \infty, \infty)$

Далее, полагая $v=2$, $N=3$ в теореме 2, получаем следующее утверждение, позволяющее аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность пересечения гиперплоскостей $\mathcal{M}_1^{(1)} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3 : z_1 = 1\}$, $\mathcal{M}_j^{(\infty)} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3 : z_j = \infty\}$, $j=2,3$.

Теорема 8. Если параметры функции (4.1) таковы, что числа a_3-b , a_2+a_3-b , $a_1+a_2+a_3-b$ не являются целыми, то в области

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1-z_1| < 1 < |1-z_2| < |1-z_3|; |\arg(1-z_j)| < \pi, j=1,2,3\} \quad (4.19)$$

функция Лауричеллы $F_D^{(3)}$ представима в следующем виде:

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{j=0}^3 A_j \mathcal{U}_j(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3), \quad (4.20)$$

где функции $\mathcal{U}_j$, $j = \overline{0, 3}$, определяются по формулам

$$\mathcal{U}_0 := (1 - z_3)^{-b} F_D^{(3)}\left(a_1, a_2, c - a_1 - a_2 - a_3; b, 1 + a_3 - b; \frac{1 - z_1}{1 - z_3}, \frac{1 - z_2}{1 - z_3}, \frac{1}{1 - z_3}\right), \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 &:= (1 - z_1)^{c - a_1 - b} (1 - z_2)^{-a_2} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times F_D^{(3)}\left(c - a_1 - a_2 - a_3, a_2, a_3; c - b, 1 + c - a_1 - b; 1 - z_1, \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, \frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_2 &:= (1 - z_1)^{-a_1} (1 - z_2)^{-a_2} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times G^{(3,2)}\left(a_1, a_2, a_3; c - a_1 - b, 1 + a_2 + a_3 - b; 1 - z_1, \frac{1}{1 - z_2}, \frac{1}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_3 &:= (1 - z_2)^{a_3 - b} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ &\times G^{(3,3)}\left(a_1, c - a_1 - a_2 - a_3, a_3; a_2 + a_3 - b, 1 - b + a_3; \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, \frac{1}{1 - z_2}, \frac{1 - z_2}{1 - z_3}\right); \end{aligned} \quad (4.24)$$

в правых частях равенств (4.21)–(4.24) под $F_D^{(3)}$, $G^{(3,2)}$, $G^{(3,3)}$ понимаются ряды (4.1), (4.3), (4.4). Коэффициенты A_j , $j = \overline{0, 3}$, фигурирующие в (4.20), определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3 - b)}{\Gamma(a_3)\Gamma(c - b)}, & A_1 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + b - c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b)}, \\ A_2 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a_1 - b)\Gamma(b - a_2 - a_3)}{\Gamma(c - a_1 - a_2 - a_3)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, & A_3 &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_2 + a_3 - b)\Gamma(b - a_3)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}. \end{aligned}$$

Функции (4.21)–(4.24) образуют базис в пространстве решений системы $E_D^{(3)}$ в области (4.19).

Построим с помощью теоремы 4 формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3)$ в окрестность точки $(1, \infty, \infty)$, соответствующие случаю, при котором расстояния между переменными $|z_2 - z_3|$ малы по сравнению с модулем $|1 - z_3|$, а переменное z_1 – в окрестности единицы. В теореме 4 соответствующие такому случаю числа q , κ , p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2) определяются равенствами

$$\begin{aligned} q &= 2, & \kappa &= 2, & p_1 &= 1, & p_2 &= 1, & p_3 &= 1, & z_1^{(1)} &= z_1, & z_1^{(2)} &= z_3, & z_1^{(3)} &= z_2, \\ a_1^{(1)} &= a_1, & a_1^{(2)} &= c - a_1 - a_2 - a_3, & a_1^{(3)} &= a_2, & k_1^{(1)} &= k_1, & k_1^{(2)} &= k_3, & k_1^{(3)} &= k_2. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Применяя теорему 4, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, \infty, \infty)$, адекватно представляющую эту функцию вблизи гиперплоскости

$$\mathcal{M}_{2,3} := \{z_2 = z_3\}. \quad (4.26)$$

Подставляя (4.25) в (3.36)–(3.39), находим выражения для коэффициентов рядов (3.32)–(3.35), а затем по формулам (3.47) находим величины B_j . Согласно (3.40)–(3.45) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_0^{\mathbf{k}} &= \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3}\right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3}\right)^{k_3}, & \mathbf{Z}_1^{\mathbf{k}} &= (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3}\right)^{k_2} \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right)^{k_3}, \\ \mathbf{Z}_2^{\mathbf{k}} &= (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3}\right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3}\right)^{k_3}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Подставляя найденные выражения для Λ_j , B_j , а также (4.27) в (3.31), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность особой гиперплоскости (4.26), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_2, z_3 , для случая, когда они велики по модулю, а z_1 близко к единице.

Теорема 9. Если параметры функции Лауричеллы $F_D^{(3)}$ таковы, что $(b - a_2 - a_3) \notin \mathbb{Z}$ и $(c - a_1 - b) \notin \mathbb{Z}$, то аналитическое продолжение ряда (4.1) в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1 - z_1| < 1, |1 - z_3| > 1 + |z_2 - z_3|; |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = 1, 3\} \quad (4.28)$$

дается формулой

$$\begin{aligned} F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = & B_0(1 - z_3)^{-b} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (c - a_1 - a_2 - a_3)_{k_3}}{(a_2 + a_3)_{k_2} (1 - a_2 - a_3 + b)_{k_1+k_3} k_1! k_2! k_3!} \times \\ & \times \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3} + B_1(1 - z_1)^{c-a_1-b} (1 - z_3)^{-a_2-a_3} \times \\ & \times \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(c - b)_{k_1+k_3} (c - a_1 - a_2 - a_3)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_2 + a_3)_{k_2+k_3}}{(1 + c - a_1 - b)_{k_1+k_3} (a_2 + a_3)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3} \right)^{k_3} + \\ & + B_2(1 - z_3)^{-a_2-a_3} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(c - a_1 - b)_{k_3-k_1} (a_1)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_2 + a_3)_{k_2+k_3}}{(1 + a_2 + a_3 - b)_{k_3-k_1} (a_2 + a_3)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_2 - z_3}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3}, \end{aligned}$$

где величины B_0 , B_1 и B_2 определяются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_2 + a_3 - b)}{\Gamma(a_2 + a_3)\Gamma(c - b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + b - c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a_1 - b)\Gamma(b - a_2 - a_3)}{\Gamma(c - a_1 - a_2 - a_3)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}.$$

Используя формулы симметрии (2.8), на основе теорем 8, 9 несложно получить весь набор формул для представления функции $F_D^{(3)}$ в окрестности точки $(1, \infty, \infty)$.

4.4. Формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, 1, \infty)$

Далее, полагая $v = 3$, $N = 3$ в теореме 2, получаем следующее утверждение, позволяющее аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность пересечения гиперплоскостей $\mathcal{M}_j^{(1)} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3 : z_j = 1\}$, $j = 1, 2$, $\mathcal{M}_3^{(\infty)} := \{(z_1, z_2, z_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3 : z_3 = \infty\}$.

Теорема 10. Если параметры функции (4.1) таковы, что числа $a_3 - b$, $a_1 + b - c$, $a_1 + a_2 + b - c$ не являются целыми, то в области

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1 - z_1| < |1 - z_2| < 1 < |1 - z_3|; |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = 1, 2, 3\} \quad (4.29)$$

функция Лауричеллы $F_D^{(3)}$ представима в следующем виде:

$$F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = \sum_{j=0}^3 A_j \mathcal{U}_j^{(1, \infty)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3), \quad (4.30)$$

где функции $\mathcal{U}_j$, $j = \overline{0, 3}$, определяются по формулам

$$\mathcal{U}_0^{(1, \infty)} := (1 - z_3)^{-b} F_D^{(3)}\left(a_1, a_2, c - a_1 - a_2 - a_3; b, 1 + a_3 - b; \frac{1 - z_1}{1 - z_3}, \frac{1 - z_2}{1 - z_3}, \frac{1}{1 - z_3}\right), \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1^{(1, \infty)} := & (1 - z_1)^{c-a_1-b} (1 - z_2)^{-a_2} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ & \times F_D^{(3)}\left(c - a_1 - a_2 - a_3, a_2, a_3; c - b, 1 + c - a_1 - b; 1 - z_1, \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, \frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right), \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\mathcal{U}_2^{(1,\infty)} := (1 - z_2)^{c-a_1-a_2-b} (1 - z_3)^{-a_3} \times \\ \times G^{(3,2)} \left(a_1, c - a_1 - a_2 - a_3, a_3; c - a_1 - b, 1 + c - a_1 - a_2 - b; \frac{1 - z_1}{1 - z_2}, 1 - z_2, \frac{1 - z_2}{1 - z_3} \right), \quad (4.33)$$

$$\mathcal{U}_3^{(1,\infty)} := (1 - z_3)^{-a_3} G^{(3,3)} \left(a_1, a_2, a_3; c - a_1 - a_2 - b, 1 + a_3 - b; 1 - z_1, 1 - z_2, \frac{1}{1 - z_3} \right); \quad (4.34)$$

в правых частях равенств (4.31)–(4.34) под $F_D^{(3)}$, $G^{(3,2)}$, $G^{(3,3)}$ понимаются ряды (4.1), (4.3), (4.4). Коэффициенты A_j , $j = \overline{0,3}$, фигурирующие в (4.30), определяются следующими равенствами:

$$A_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3 - b)}{\Gamma(a_3)\Gamma(c - b)}, \quad A_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1 + b - c)}{\Gamma(a_1)\Gamma(b)}, \\ A_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a_1 - b)\Gamma(a_1 + a_2 + b - c)}{\Gamma(a_2)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}, \quad A_3 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a_1 - a_2 - b)\Gamma(b - a_3)}{\Gamma(c - a_1 - a_2 - a_3)\Gamma(b)\Gamma(c - b)}.$$

Функции (4.31)–(4.34) образуют базис в пространстве решений системы $E_D^{(3)}$ в области (4.29).

Построим с помощью теоремы 4 формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3)$ в окрестность точки $(1, 1, \infty)$, соответствующие случаю, при котором расстояния между переменными $|z_1 - z_2|$ – достаточно малая величина, а переменное z_3 принимает большие по модулю значения. В теореме 4 соответствующие такому случаю числа q , κ , p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2) определяются равенствами. В теореме 4 соответствующие такому случаю числа q , κ , p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2) определяются равенствами

$$q = 2, \quad \kappa = 2, \quad p_1 = 2, \quad p_2 = 1, \quad z_1^{(1)} = z_1, \quad z_2^{(1)} = z_2, \quad z_1^{(2)} = z_3, \\ a_1^{(1)} = a_1, \quad a_2^{(1)} = a_2, \quad a_1^{(2)} = c - a_1 - a_2 - a_3, \quad k_1^{(1)} = k_1, \quad k_2^{(1)} = k_2, \quad k_1^{(2)} = k_3. \quad (4.35)$$

Применяя теорему 4, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, 1, \infty)$, адекватно представляющую эту функцию вблизи гиперплоскости

$$\mathcal{M}_{1,2} := \{z_1 = z_2\}. \quad (4.36)$$

Подставляя (4.35) в (3.36)–(3.39), находим выражения для коэффициентов рядов (3.32)–(3.35), а затем по формулам (3.47) находим величины B_j . Записывая (3.40)–(3.45) с учетом (4.35), находим

$$\mathbf{Z}_0^{\mathbf{k}} = \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{1 - z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3}, \quad \mathbf{Z}_1^{\mathbf{k}} = (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1} \right)^{k_2} \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3} \right)^{k_3}, \\ \mathbf{Z}_2^{\mathbf{k}} = (1 - z_1)^{k_1} (z_1 - z_2)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3} \right)^{k_3}. \quad (4.37)$$

Подставляя найденные выражения для коэффициентов Λ_j , чисел B_j и произведений (4.37) в (3.31)–(3.35), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность особой гиперплоскости (4.36), т.е. в ситуации кроудинга переменных z_1, z_2 , для случая, когда они близки к единице, а z_3 принимает большие по модулю значения.

Теорема 11. Если параметры функции Лауричеллы $F_D^{(3)}$ таковы, что $(b - a_3) \notin \mathbb{Z}$ и $(c - a_1 - a_2 - b) \notin \mathbb{Z}$, то аналитическое продолжение ряда (4.1) в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1 - z_1| + |z_1 - z_2| < 1, |1 - z_3| > 1; |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = 1, 3\} \quad (4.38)$$

дается формулой

$$\begin{aligned}
 F_D^{(3)}(a_1, a_2, a_3; b, c; z_1, z_2, z_3) = & B_0(1-z_3)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1+a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (c-a_1-a_2-a_3)_{k_3}}{(1-a_3+b)_{k_1+k_2+k_3} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} \times \\
 & \times \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_3} \right)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3} + B_1(1-z_1)^{c-a_1-b} (1-z_3)^{-a_3} \times \\
 & \times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(c-b)_{k_1+k_3} (c-a_1-a_2-a_3)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+c-a_1-a_2-b)_{k_1-k_2+k_3} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} (1-z_1)^{k_1} \left(\frac{z_1-z_2}{1-z_1} \right)^{k_2} \left(\frac{1-z_1}{1-z_3} \right)^{k_3} + B_2(1-z_3)^{-a_3} \times \\
 & \times \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(c-a_1-a_2-b)_{k_3-k_1-k_2} (a_1+a_2)_{k_1+k_2} (a_2)_{k_2} (a_3)_{k_3}}{(1+a_3-b)_{k_3-k_1-k_2} (a_1+a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3!} (1-z_1)^{k_1} (z_1-z_2)^{k_2} \left(\frac{1}{1-z_3} \right)^{k_3},
 \end{aligned}$$

где $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + k_3$, а величины B_0 , B_1 и B_2 определяются равенствами

$$B_0 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_3-b)}{\Gamma(a_3)\Gamma(c-b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a_1+a_2+b-c)}{\Gamma(a_1+a_2)\Gamma(b)}, \quad B_2 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a_1-a_2-b)\Gamma(b-a_3)}{\Gamma(c-a_1-a_2-a_3)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}.$$

Используя формулы симметрии (2.8), на основе теорем 10, 11 несложно получить весь набор формул для представления функции $F_D^{(3)}$ в окрестности точки $(1, 1, \infty)$.

5. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 4 ДЛЯ СЛУЧАЯ $N = 6$ ПЕРЕМЕННЫХ

Построим формулы аналитического продолжения функции $F_D^{(6)}(a_1, \dots, a_6; b, c; z_1, \dots, z_6)$ в окрестность точки $(1, 1, \infty, \dots, \infty)$, соответствующие случаю, при котором расстояния между переменными $|z_1 - z_2|$, $|z_3 - z_4|$ и $|z_5 - z_6|$ малы по сравнению с 1, $|1 - z_3|$ и $|1 - z_6|$ соответственно. В теореме 4 числа q , κ , p_s , а также параметры и переменные функции Лауричеллы (4.1), (4.2), соответствующие указанному случаю, определяются равенствами

$$\begin{aligned}
 q &= 3, \quad \kappa = 2, \quad p_1 = p_3 = 2, \quad p_2 = p_4 = 1, \\
 z_1^{(1)} &= z_1, \quad z_2^{(1)} = z_2, \quad z_1^{(2)} = z_6, \quad z_1^{(3)} = z_3, \quad z_2^{(3)} = z_4, \quad z_1^{(4)} = z_5, \\
 a_1^{(1)} &= a_1, \quad a_2^{(1)} = a_2, \quad a_1^{(2)} = c - \sum_{j=1}^6 a_j, \quad a_1^{(3)} = a_3, \quad a_2^{(3)} = a_4, \quad a_1^{(4)} = a_5, \\
 k_1^{(1)} &= k_1, \quad k_2^{(1)} = k_2, \quad k_1^{(2)} = k_6, \quad k_1^{(3)} = k_3, \quad k_2^{(3)} = k_4, \quad k_1^{(4)} = k_5.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Далее используем обозначения $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_6)$, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_6)$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_6)$, $|\mathbf{k}| = \sum_{j=1}^6 k_j$.

Применяя теорему 4, построим формулу продолжения функции $F_D^{(3)}$ в окрестность точки $(1, 1, \infty, \dots, \infty)$, адекватно представляющую эту функцию вблизи пересечения гиперплоскостей

$$\mathcal{M}_{1,2} := \{z_1 = z_2\}, \quad \mathcal{M}_{3,4} := \{z_3 = z_4\}, \quad \mathcal{M}_{5,6} := \{z_5 = z_6\}. \tag{5.2}$$

Подставляя (5.1) в (3.36)–(3.39), находим выражения для коэффициентов рядов (3.32)–(3.35), а затем по формулам (3.47) находим величины B_j . Далее находим произведения $\mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}$, определенные согласно (3.40), из (3.40)–(3.45) с учетом (4.35). Подставляя найденные коэффициенты Λ_j , величины B_j , а также выражения $\mathbf{Z}_j^{\mathbf{k}}$ в (3.31)–(3.35), приходим к следующему утверждению, позволяющему аналитически продолжить функцию Лауричеллы $F_D^{(3)}$ в окрестность пересечения гиперплоскостей (5.2), т.е. в ситуации кроудинга пар переменных (z_1, z_2) , (z_3, z_4) и (z_5, z_6) , для случая, когда z_1, z_2 близки к единице, а $z_3, \dots, z_6$ велики по модулю.

Теорема 12. Если параметры функции Лауричеллы $F_D^{(6)}$ таковы, что $(c - a_1 - a_2 - b) \notin \mathbb{Z}$ и $(a_5 + a_6 - b) \notin \mathbb{Z}$, $(a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - b) \notin \mathbb{Z}$, то аналитическое продолжение ряда (4.1) в область

$$\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : |1 - z_1| + |z_1 - z_2| < 1, |1 - z_3| > 1 + |z_3 - z_4|, \\ |1 - z_6| > 1 + |z_5 - z_6|, |1 - z_6| > |1 - z_3| + |z_3 - z_4|; |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = 1, 3, 6\} \quad (5.3)$$

дается формулой

$$F_D^{(6)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \sum_{j=0}^3 B_j \mathcal{U}_j(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (5.4)$$

где функции $\mathcal{U}_j$, $j = \overline{0, 3}$, имеют вид

$$\mathcal{U}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_6)^{-b} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(b)_{|\mathbf{k}|}}{(a_5 + a_6)_{k_5} (1 - a_5 - a_6 + b)_{|\mathbf{k}| - k_5}} \times \\ \times \frac{(a_1 + a_2)_{k_1 + k_2} (a_2)_{k_2} (a_3 + a_4)_{k_3 + k_4} (a)_{k_4} (a_5)_{k_5} \left(c - \sum_{j=1}^6 a_j\right)_{k_6}}{(a_1 + a_2)_{k_2} k_1! k_2! k_3! (a_3 + a_4)_{k_4} k_4! k_5! k_6!} \times \\ \times \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_6}\right)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{1 - z_6}\right)^{k_2} \left(\frac{1 - z_3}{1 - z_6}\right)^{k_3} \left(\frac{z_3 - z_4}{1 - z_6}\right)^{k_4} \left(\frac{z_5 - z_6}{1 - z_6}\right)^{k_5} \left(\frac{1}{1 - z_6}\right)^{k_6}, \quad (5.5)$$

$$\mathcal{U}_1(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_1)^{c - a_1 - b} (1 - z_3)^{-a_3 - a_4} (1 - z_6)^{-a_5 - a_6} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(c - b)_{k_1 + k_3 + k_6}}{(1 + c - a_1 - a_2 - b)_{k_1 + k_3 + k_6 - k_2} (a_1 + a_2)_{k_2}} \times \\ \times \frac{(c - |\mathbf{a}|)_{k_1} (a_2)_{k_2} (a_3 + a_4)_{k_3 + k_4} (a_4)_{k_4} (a_5)_{k_5} (a_5 + a_6)_{k_5 + k_6}}{k_1! k_2! k_3! (a_3 + a_4)_{k_4} k_4! k_5! (a_5 + a_6)_{k_5} k_6!} \times \\ \times (1 - z_1)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1}\right)^{k_2} \left(\frac{1 - z_3}{1 - z_6}\right)^{k_3} \left(\frac{z_3 - z_4}{1 - z_3}\right)^{k_4} \left(\frac{z_5 - z_6}{1 - z_6}\right)^{k_5} \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_6}\right)^{k_6}, \quad (5.6)$$

$$\mathcal{U}_2(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_3)^{-a_3 - a_4} (1 - z_6)^{-a_5 - a_6} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{(c - a_1 - a_2 - b)_{k_6 + k_3 - k_1 - k_2}}{(1 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - b)_{k_3 + k_6 - k_1 - k_2}} \times \\ \times \frac{(a_1 + a_2)_{k_1 + k_2} (a_2)_{k_2} (a_3 + a_4)_{k_3 + k_4} (a_4)_{k_4} (a_5)_{k_5} (a_5 + a_6)_{k_5 + k_6}}{k_1! (a_1 + a_2)_{k_2} k_2! k_3! (a_3 + a_4)_{k_4} k_4! (a_5 + a_6)_{k_5} k_5! k_6!} \times \\ \times (1 - z_1)^{k_1} (z_1 - z_2)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3}\right)^{k_3} \left(\frac{z_4 - z_3}{1 - z_3}\right)^{k_4} \left(\frac{z_5 - z_6}{1 - z_6}\right)^{k_5} \left(\frac{1}{1 - z_6}\right)^{k_6}, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{U}_3(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_3)^{a_5 + a_6 - b} (1 - z_6)^{-a_5 - a_6} \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{j=3}^6 a_j - b\right)_{k_6 - k_1 - k_2 - k_3}}{(1 + a_5 + a_6 - b)_{k_6 - k_1 - k_2 - k_3 - k_4} (a_3 + a_4)_{k_4}} \times \\ \times \frac{(a_1 + a_2)_{k_1 + k_2} (a_2)_{k_2} \left(c - \sum_{j=1}^6 a_j\right)_{k_3} (a_4)_{k_4} (a_5)_{k_5} (a_5 + a_6)_{k_5 + k_6}}{k_1! (a_1 + a_2)_{k_2} k_2! k_3! k_4! k_5! (a_5 + a_6)_{k_5} k_6!} \times \\ \times \left(\frac{1 - z_1}{1 - z_3}\right)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{1 - z_3}\right)^{k_2} \left(\frac{1}{1 - z_3}\right)^{k_3} \left(\frac{z_3 - z_4}{1 - z_3}\right)^{k_4} \left(\frac{z_5 - z_6}{1 - z_6}\right)^{k_5} \left(\frac{1 - z_3}{1 - z_6}\right)^{k_6}, \quad (5.8)$$

где $|\mathbf{k}| = \sum_{j=1}^6 k_j$. Коэффициенты имеют вид

$$B_0 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a_5 + a_6 - b)}{\Gamma(a_5 + a_6) \Gamma(c - b)}, \quad B_1 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(a_1 + a_2 + b - c)}{\Gamma(a_1 + a_2) \Gamma(b)}, \\ B_2 = \frac{\Gamma(c) \Gamma(c - a_1 - a_2 - b) \Gamma\left(b - \sum_{j=3}^6 a_j\right)}{\Gamma\left(c - \sum_{j=1}^6 a_j\right) \Gamma(b) \Gamma(c - b)}, \quad B_3 = \frac{\Gamma(c) \Gamma\left(\sum_{j=3}^6 a_j - b\right) \Gamma(b - a_5 - a_6)}{\Gamma(a_3 + a_4) \Gamma(b) \Gamma(c - b)}.$$

Функции (5.5)–(5.8) являются решением системы уравнений с частными производными Лауричеллы $E_D^{(6)}$.

Представления функции $F_D^{(N)}$ для частных значений N демонстрируют, что теоремы 2, 4 дают эффективный алгоритм для построения формул аналитического продолжения функции Лауричеллы (1.5). Полученные формулы аналитического продолжения составляют основу эффективного численного алгоритма для вычисления интегралов типа Эйлера (1.3) вне области сходимости степенного ряда (1.1), которым она исходно определена. Таким образом, результаты настоящей работы могут быть востребованы при решении прикладных проблем, где возникают ряды вида (1.1) и (1.3). Одним из перспективных приложений формул аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ является проблема кроудинга параметров интеграла Кристоффеля–Шварца, возникающая при построении конформного отображения многоугольников, которая рассматривается в следующем разд. 6.

6. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПАРАМЕТРОВ ИНТЕГРАЛА КРИСТОФФЕЛЯ–ШВАРЦА В СИТУАЦИИ КРОУДИНГА

6.1. Численное решение системы уравнений для параметров и вычисление отображающей функции $\mu(\zeta)$

Для решения указанной в п. 1.4 системы нелинейных трансцендентных уравнений (1.16), (1.17), которой удовлетворяют параметры интеграла Кристоффеля–Шварца (1.15), мы применяем численные методы типа итерационной процедуры Ньютона (см., например, [16, 17, 31]). Основные трудности, возникающие при реализации этих численных алгоритмов, связаны, во-первых, с высокоточным вычислением возникающих в ней интегралов и, во-вторых, с выбором хорошего начального приближения для неизвестных параметров.

В п. 1.4 приведен вид системы уравнений (1.16), (1.20)–(1.28), где гипергеометрические интегралы типа Эйлера (1.17) записаны через функцию Лауричеллы $F_D^{(N)}$. Таким образом, задача о вычислении интегралов, фигурирующих в системе трансцендентных уравнений для параметров, сведена к вопросу об эффективном вычислении функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$.

Если векторные аргументы $\mathbf{x}_0$ и $\mathcal{U}(\mathbf{1} - \mathbf{x}_k)$ функций Лауричеллы $F_D^{(N)}$, фигурирующих в (1.22)–(1.24), принадлежат поликругу $\mathbb{U}_\rho^N := \{(w_1, \dots, w_N) \in \mathbb{C}^N : |w_j| < \rho, j = \overline{1, N}\}$ с достаточно малым $\rho > 0$, то для их вычислений можно использовать N -кратный ряд (1.5). Вместе с тем, при реализации метода Ньютона аргументы одной или нескольких из функций (1.22)–(1.24) не удовлетворяют такому условию. В этом несложно убедиться, непосредственно анализируя эти формулы с учетом того, что величины ζ_j располагаются на единичном отрезке неравномерно, а в случае выраженного кроудинга образуют группы весьма близких величин. Типичной является ситуация, когда часть переменных $z_1, \dots, z_v$ функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ принимают очень большие по модулю (отрицательные) значения, а остальные переменные $z_{v+1}, \dots, z_N$ чрезвычайно близки к единице (но $z_j < 1, j = \overline{v+1, N}$).

В ряде случаев, когда непосредственное суммирование ряда (1.5) является неэффективным (или невозможным), для вычисления функции Лауричеллы полезными оказываются приведенные ниже два тождества, способ получения которых указан в [38]. Для того чтобы сформулировать первое из них, введем следующий ряд, относящийся к классу гипергеометрических рядов Горна:

$$\mathcal{H}_v^{(N)}(\mathbf{a}; b_1, b_2, c; \mathbf{w}) := \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{\infty} \frac{\left(b_1, \sum_{j=v+1}^N k_j\right) \left(b_2, \sum_{j=1}^v k_j\right) (a_1)_{k_1} \cdots (a_N)_{k_N}}{\left(c, \sum_{j=1}^N k_j\right) k_1! \cdots k_N!} w_1^{k_1} \cdots w_N^{k_N}; \quad (6.1)$$

здесь $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_N)$, b_1, b_2, c – комплексные параметры, $\mathbf{w} := (w_1, \dots, w_N)$ – векторное переменное, выражение (α, k) означает символ Похгаммера (1.7), $v = \overline{0, N}$ – целочисленный параметр. Ряд $\mathcal{H}_v^{(N)}$ сходится в поликруге $\mathbb{U}^N = \{|w_j| < 1, j = \overline{1, N}\}$, в чем нетрудно убедиться, используя резуль-

таты [2]. Упомянувшееся выше первое тождество для функции Лауричеллы имеет следующий вид (см. формулу (2.12) в [38]):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \prod_{j=1}^v (1 - z_j)^{-a_j} \mathcal{H}_v^{(N)} \left(a_1, \dots, a_N; b, c - b, c; \frac{z_1}{z_1 - 1}, \dots, \frac{z_v}{z_v - 1}, z_{v+1}, \dots, z_N \right), \quad (6.2)$$

где $\mathcal{H}_v^{(N)}$ определяется из (6.1) с соответствующей подстановкой параметров и переменных и справедливо в области

$$\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_j| < |z_j - 1|, |\arg(1 - z_j)| < \pi, j = \overline{1, v}, |z_\alpha| < 1, \alpha = \overline{v+1, N}\},$$

в которой сходится ряд в правой части (6.2). Отметим, что при $v = N$ равенство (6.2) переходит в известную формулу (см. [2])

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \prod_{j=1}^N (1 - z_j)^{-a_j} F_D^{(N)} \left(a_1, \dots, a_N; c - b, c; \frac{z_1}{z_1 - 1}, \dots, \frac{z_N}{z_N - 1} \right). \quad (6.3)$$

Второе из тождеств для $F_D^{(N)}$, о которых сказано выше, имеет вид (см. формулу (2.13) в [38]):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = (1 - z_1)^{-b} \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{\left(b, \sum_{j=1}^N k_j \right) \left(c - \sum_{j=1}^N a_j, k_1 + \sum_{j=v+1}^N k_j \right) (a_2)_{k_2} \dots (a_N)_{k_N}}{\left(c, \sum_{j=1}^N k_j \right) \left(c - \sum_{j=1}^N a_j, \sum_{j=v+1}^N k_j \right) k_1! \dots k_N!} \times \\ \times \left(\frac{z_1}{z_1 - 1} \right)^{k_1} \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 - 1} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{z_1 - z_v}{z_1 - 1} \right)^{k_v} \left(\frac{z_{v+1}}{1 - z_1} \right)^{k_{v+1}} \dots \left(\frac{z_N}{1 - z_1} \right)^{k_N} \quad (6.4)$$

и представляет функцию Лауричеллы в области

$$\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : |z_1| + |z_\alpha| < |z_1 - 1|, \alpha = \overline{v+1, N}; |z_1 - z_j| < |z_1 - 1|, j = \overline{2, v}; |\arg(1 - z_1)| < \pi\}.$$

Еще один способ вычисления интеграла (1.3), когда суммирование ряда (1.5) неприменимо, заключается в следующем. Разобьем точками $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M$ интервал $(0, 1)$ на $M + 1$ частей $I_m := (\varepsilon_m, \varepsilon_{m+1})$ и представим (1.3) в виде суммы интегралов $\mathcal{F}_m$, взятых по I_m , а затем каждый из них с помощью формулы типа Эйлера выразим через функцию Лауричеллы с соответствующими параметрами и переменными. Далее к величинам $\mathcal{F}_m$, $m = \overline{1, M - 1}$, применим тождество (6.2), а к $\mathcal{F}_0$ применим формулу (6.3). В результате получим следующее представление для интеграла (1.3):

$$F_D^{(N)}(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c - b)} \sum_{m=0}^M \mathcal{F}_m(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}), \quad (6.5)$$

где величины $\mathcal{F}_m$ имеют вид

$$\mathcal{F}_0(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = b^{-1} \varepsilon_1^b (1 - \varepsilon_1)^{c-b-1} \prod_{j=1}^N (1 - \varepsilon_1)^{-a_j} \times \\ \times F_D^{(N+1)} \left(a_1, \dots, a_N, 1 + b - c; 1, 1 + b; \frac{\varepsilon_1 z_1}{\varepsilon_1 z_1 - 1}, \dots, \frac{\varepsilon_1 z_N}{\varepsilon_1 z_N - 1}, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - 1} \right), \quad (6.6)$$

$$\mathcal{F}_m(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \varepsilon_m^{b-1} (1 - \varepsilon_m)^{c-b-1} \Delta_m \prod_{j=1}^v (1 - \varepsilon_{m+1} z_j)^{-a_j} \prod_{j=v+1}^N (1 - \varepsilon_m z_j)^{-a_j} \mathcal{H}_v^{(N+2)} \times \\ \times \left(a_1, \dots, a_N, 1 - b, 1 + b - c; 1, 1, 2; \frac{\Delta_m z_1}{\varepsilon_{m+1} z_1 - 1}, \dots, \frac{\Delta_m z_v}{\varepsilon_{m+1} z_v - 1}, \frac{\Delta_m z_{v+1}}{\varepsilon_m z_{v+1} - 1}, \dots, \frac{\Delta_m z_N}{\varepsilon_m z_N - 1}, -\frac{\Delta_m}{\varepsilon_m}, \frac{\Delta_m}{1 - \varepsilon_m} \right), \quad (6.7)$$

$$\mathcal{F}_M(\mathbf{a}; b, c; \mathbf{z}) = \frac{\varepsilon_M^{b-1} (1 - \varepsilon_M)^{c-b}}{c - b} \prod_{j=1}^N (1 - \varepsilon_M z_j)^{-a_j} \times \\ \times F_D^{(N+1)} \left(a_1, \dots, a_N, 1 - b; 1, c - b; \frac{(1 - \varepsilon_M) z_1}{1 - \varepsilon_M z_1}, \dots, \frac{(1 - \varepsilon_M) z_N}{1 - \varepsilon_M z_N}, -\frac{1 - \varepsilon_M}{\varepsilon_M} \right); \quad (6.8)$$

в (6.7) использовано обозначение $\Delta_m := \varepsilon_{m+1} - \varepsilon_m$. В правых частях формул (6.6)–(6.8) символы $F_D^{(N)}$ и $\mathcal{H}_v^{(N)}$ означают гипергеометрические ряды (1.5) и (6.1) соответственно. Ориентируясь на решение системы (1.16), (1.20)–(1.28), мы полагаем

$$K = \left\lceil \log_Q \max_{j=1, \overline{v}} |z_j| \right\rceil, \quad M = K - 1 + \left\lceil -\log_Q \min_{j=v+1, \overline{N}} \frac{|1 - z_j|}{|z_j|} \right\rceil, \quad (6.9)$$

где $[\lambda]$ – целая часть λ , число $Q > 1$ (в реальных вычислениях можно принять $Q = 2$), а $\log_Q$ – логарифм по основанию Q , и определяем точки ε_m , фигурирующие в (6.5)–(6.8), по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= \frac{Q^{m-1}}{\max_{j=1, \overline{v}} |z_j|}, \quad m = \overline{1, K-1}, \quad \varepsilon_K = Q^{-1}, \\ \varepsilon_m &= 1 - \left(\min_{j=v+1, \overline{N}} \frac{|1 - z_j|}{|z_j|} \right) Q^{M-m}, \quad m = \overline{K+1, M}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Подход, основанный на таком способе разбиения интервала интегрирования $[0, 1]$, нами заимствован из [16], где этот прием был использован при выводе квадратурных формул для вычисления интегралов гипергеометрического типа.

Необходимо подчеркнуть, что если величины ζ_k , $k = \overline{1, N}$, располагаются “резко неравномерно” на отрезке $[0, 1]$, т.е. имеет место сильный кроудинг, то для разработки алгоритма вычисления функции Лауричеллы и решения проблемы параметров интеграла Кристоффеля–Шварца набора тождеств (6.2)–(6.4) и (6.5)–(6.10) недостаточно и требуется применять формулы аналитического продолжения вида (1.9). Совокупность таких формул построена в [20, 21, 38], а также в разд. 3 настоящей работы. При использовании формул аналитического продолжения эффект кроудинга является благоприятствующим фактором.

Вопрос о построении начального приближения в настоящей статье решается методом продолжения по параметру. При этом в качестве начального приближения для искомых величин ζ_k принимаются точки, равномерно разбивающие единичный интервал $(0, 1)$. Отметим, что в [34, 35, 43] для построения приближений было предложено использовать асимптотики для параметров, которые в ряде случаев удается эффективно (с явно выписанными коэффициентами) построить с помощью теории вариации отображающей функции при деформировании области (см. [43, 44]).

После того, как параметры конформного отображения (1.15) определены, следующей задачей является вычисление самой отображающей функции $w = \mu(\zeta)$. Предположим, что некоторая вершина w_m конечна. Тогда, полагая $\tilde{\zeta} = \zeta_m$ и $\tilde{w} = w_m$ в интеграле (1.15) и выполняя в нем замену переменного $t = \zeta_m + (\zeta - \zeta_m)\xi$, $\xi \in (0, 1)$, с учетом формулы типа Эйлера (1.3) приходим к следующему представлению:

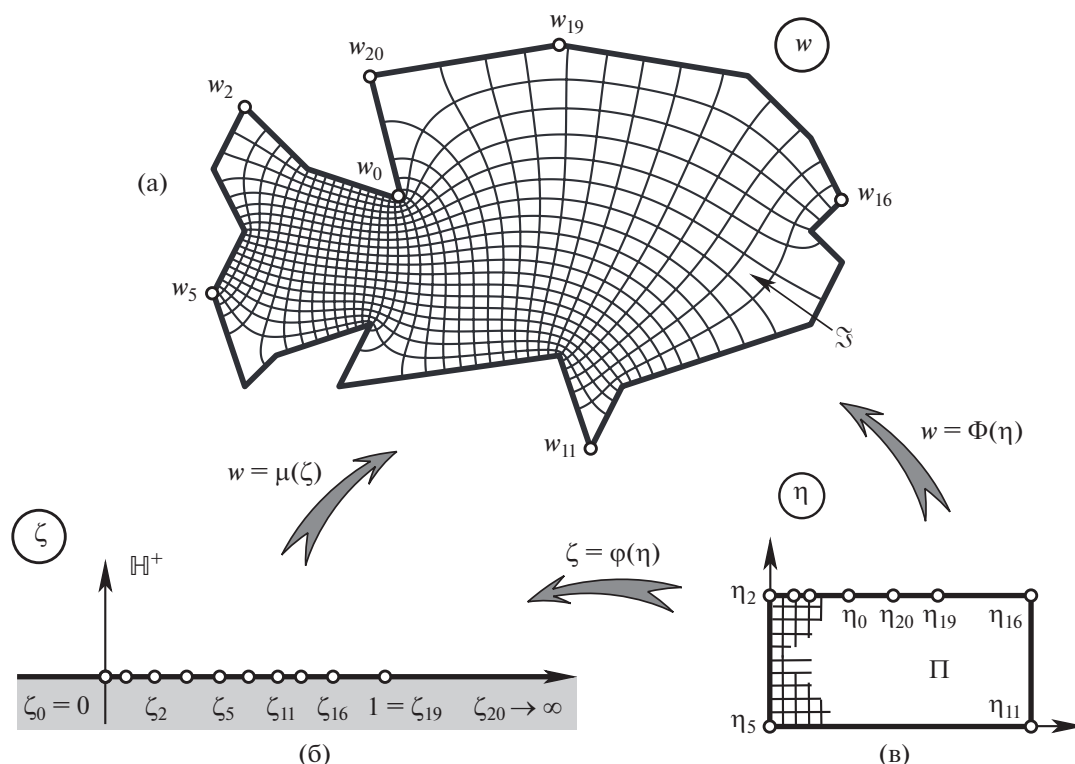
$$\begin{aligned} \mu(\zeta) &= w_m + \mathfrak{D}_m e^{i\pi\theta_m} (\zeta - \zeta_m)^{1-a_m} \times \\ &\times F_D^{(N+1)} \left(c - \sum_{j=1}^N a_j, a_1, \dots, a_{m-1}, a_{m+1}, \dots, a_N, 1 + b - c; 1 - a_m, 2 - a_m; \mathfrak{Y}(\mathbf{1} - \mathbf{X}_m) \right), \end{aligned} \quad (6.11)$$

где параметры a_j , b и c определены в формуле (1.18), функция $\mathfrak{Y}$ имеет вид (1.19), а постоянные величины $\mathfrak{D}_m$, θ_m и вектор $\mathbf{X}_m(\zeta)$ даются равенствами

$$\mathfrak{D}_m = \mathcal{H}_0 (1 - a_m)^{-1} \zeta_m^{\sum_{j=1}^N a_j - c} \prod_{j=1}^{m-1} (\zeta_m - \zeta_j)^{-a_j} \left(\prod_{j=m+1}^N (\zeta_j - \zeta_m)^{-a_j} \right) (1 - \zeta_m)^{c-b-1}, \quad (6.12)$$

$$\theta_m = \frac{\arg(w_{N+2} - w_{N+1})}{\pi} + c - b - \left(\sum_{l=m+1}^N a_l \right) - 1, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{X}_m(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{\zeta_m}, \frac{\zeta_1}{\zeta_m}, \dots, \frac{\zeta_{m-1}}{\zeta_m}, \frac{\zeta_{m+1}}{\zeta_m}, \dots, \frac{\zeta_N}{\zeta_m}, \frac{1}{\zeta_m} \right); \quad (6.14)$$


 Фиг. 2. Конформное отображение многоугольника $\tilde{\mathcal{G}}$.

здесь $m = \overline{1, N}$, а если $m = 0$ и $m = N + 1$, то равенства (6.11)–(6.14) требуют модификации и выводятся аналогичным путем. Для вычисления конформного отображения по формуле (6.11) в зависимости от диапазона изменения ζ могут быть использованы представления (6.2)–(6.4), (6.5)–(6.10) и формулы аналитического продолжения функции Лауричеллы (см. разд. 2, 3).

Описанный выше метод решения проблемы параметров интеграла Кристоффеля – Шварца и вычисления конформного отображения многоугольников (с числом вершин $N \geq 4$), основанный на формулах аналитического продолжения функции Лауричеллы $F_D^{(N)}$ и тождествах (6.2)–(6.4) и (6.5)–(6.10), был реализован в виде алгоритма на языке C++. В следующем п. 6.2 продемонстрированы результаты вычисления с помощью этого алгоритма на примере двух областей сложного вида.

6.2. Численная реализация

Пример 1. Продемонстрируем результаты предыдущих разделов работы на примере вычисления конформного отображения полуплоскости $\mathbb{H}^+$ на 21-угольную область $\tilde{\mathcal{G}}$, представленную на фиг. 2а. Координаты вершин $w_j = u_j + iv_j$, $j = \overline{0, 20}$, этой области на комплексной плоскости w следующие:

$$\begin{aligned} w_0 &= 0.5 - 2i, & w_1 &= -1 - 1.5i, & w_2 &= -2 - 0.5i, & w_3 &= -2.5 - 1.5i, \\ w_4 &= -2 - 2.5i, & w_5 &= -2.5 - 3.5i, & w_6 &= -2 - 5i, & w_7 &= -1.5 - 4.5i, \\ w_8 &= -4i, & w_9 &= -0.5 - 5i, & w_{10} &= 3 - 4.5i, & w_{11} &= 3.5 - 6i, \\ w_{12} &= 4 - 5i, & w_{13} &= 7 - 4i, & w_{14} &= 7.5 - 3i, & w_{15} &= 7 - 2.5i, \\ w_{16} &= 7.5 - 2i, & w_{17} &= 7 - i, & w_{18} &= 6, & w_{19} &= 3 + 0.5i, & w_{20} &= 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Показатели углов β_j для такой области вычисляются по несложным соотношениям через координаты вершин (6.15). Нормировка отображения $\mu : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} \tilde{\mathcal{R}}$ следующая (см. фиг. 2а, 2б):

$$\mu(0) = w_0, \quad \mu(1) = w_{19}, \quad \mu(\infty) = w_{20}. \quad (6.16)$$

Параметрами интеграла (1.15), требующими вычислений, являются величины $\mathcal{H}_0$ и восемнадцать прообразов ζ_j , $j = \overline{1, 18}$. Вычисленные с помощью представленного алгоритма значения разностей искоемых величин $\zeta_{j+1} - \zeta_j$ следующие:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= 0.18927637714006, \quad \zeta_2 - \zeta_1 = 0.39051404654876 \times 10^{-2}, \\ \zeta_3 - \zeta_2 &= 0.67344758433178 \times 10^{-3}, \quad \zeta_4 - \zeta_3 = 0.52745621854192 \times 10^{-2}, \\ \zeta_5 - \zeta_4 &= 0.85839482665681 \times 10^{-2}, \quad \zeta_6 - \zeta_5 = 0.35574987202544 \times 10^{-2}, \\ \zeta_7 - \zeta_6 &= 0.961525803960653 \times 10^{-3}, \quad \zeta_8 - \zeta_7 = 0.48832126634923 \times 10^{-1}, \\ \zeta_9 - \zeta_8 &= 0.29428773532504 \times 10^{-1}, \quad \zeta_{10} - \zeta_9 = 0.2148992289738, \\ \zeta_{11} - \zeta_{10} &= 0.36289795336284 \times 10^{-1}, \quad \zeta_{12} - \zeta_{11} = 0.89708949689757 \times 10^{-2}, \\ \zeta_{13} - \zeta_{12} &= 0.87211356153212 \times 10^{-1}, \quad \zeta_{14} - \zeta_{13} = 0.85387381037496 \times 10^{-2}, \\ \zeta_{15} - \zeta_{14} &= 0.10073852356786 \times 10^{-1}, \quad \zeta_{16} - \zeta_{15} = 0.1122732932667 \times 10^{-1}, \\ \zeta_{17} - \zeta_{16} &= 0.134061231550203 \times 10^{-1}, \quad \zeta_{18} - \zeta_{17} = 0.29831093841533 \times 10^{-1}, \\ 1 - \zeta_{18} &= 0.28905818745045. \end{aligned} \quad (6.17)$$

После решения системы предынтегральный множитель вычисляем по формуле $\mathcal{H}_0 = L_0/I_0(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (\zeta_1, \dots, \zeta_{18})$, и находим значение $\mathcal{H}_0 = 0.86207417118788$.

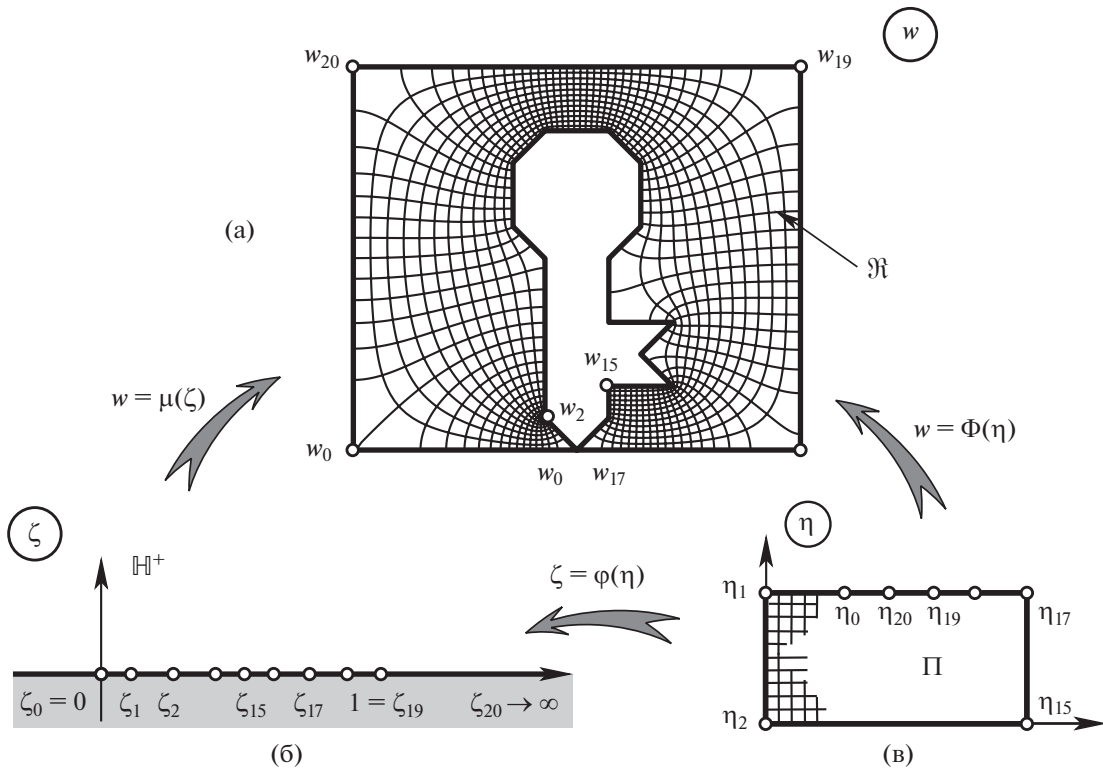
Для иллюстрации отображения $\mu : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} \tilde{\mathcal{R}}$ удобно воспользоваться вспомогательным конформным отображением $\Phi : \Pi \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+$ прямоугольника Π на полуплоскость $\mathbb{H}^+$ (см. фиг. 2б, 2в) и вначале отобразить естественную для Π декартову сетку в $\mathbb{H}^+$, а затем с помощью функции $z = \mu(\zeta)$ перевести ее в область $\tilde{\mathcal{R}}$. Таким образом, мы изобразим в области $\tilde{\mathcal{R}}$ образ прямоугольной декартовой сетки (изначально построенной в прямоугольнике Π) при отображении $\Phi : \Pi \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+$. Подчиняя отображение Φ условиям

$$\Phi(ih) = \zeta_2, \quad \Phi(0) = \zeta_5, \quad \Phi(d) = \zeta_{11}, \quad \Phi(d + ih) = \zeta_{16} \quad (6.18)$$

(т.е. точки $\eta_2, \eta_5, \eta_{11}, \eta_{16}$ границы $\partial\Pi$ переходят в точки $\zeta_2, \zeta_5, \zeta_{11}, \zeta_{16}$ на $\partial\mathbb{H}^+$), находим его в виде

$$\Phi(\eta) = \frac{\zeta_5(\zeta_{11} - \zeta_2) - \zeta_2(\zeta_{11} - \zeta_5)\text{sn}^2(k, \eta)}{\zeta_{11} - \zeta_2 - (\zeta_{11} - \zeta_5)\text{sn}^2(k, \eta)}, \quad k = \left[\frac{(\zeta_{16} - \zeta_2)(\zeta_{11} - \zeta_5)}{(\zeta_{16} - \zeta_5)(\zeta_{11} - \zeta_2)} \right]^{1/2}; \quad (6.19)$$

здесь $\text{sn}(k, \eta)$ — эллиптическая функция Якоби (см. [14, 45]) с модулем k , вычисляемым через найденные параметры (6.17) конформного отображения (1.15) согласно второму равенству (6.19). При этом заранее неизвестные в (6.18) длина d и высота h прямоугольника Π находятся через эллиптические интегралы по формулам $d = K(k)$ и $h = K'(k)$, где k определяется из (6.19); вычисленные значения следующие: $K = 3.6298490712230$, $K' = 1.5753115752655$. На фиг. 2а в области $\tilde{\mathcal{R}}$ изображена сетка, в которую переходит построенная в прямоугольнике Π декартова сетка 35×18 при отображении $\Phi(\eta) = \mu \circ \Phi(\eta)$, где $z = \mu(\zeta)$ — интеграл Кристоффеля—Шварца (1.15), соответствующий области $\tilde{\mathcal{R}}$, а $\zeta = \Phi(\eta)$ — вспомогательное отображение (6.19) прямоугольника на полуплоскость.


 Фиг. 3. Конформное отображение многоугольника $\mathfrak{H}$.

Пример 2. Еще одной иллюстрацией результатов предыдущих разделов работы является вычисление конформного отображения полуплоскости $\mathbb{H}^+$ на 21-угольную область $\mathfrak{H}$, представленную на фиг. 3а; граница области изображает “ключ в прямоугольнике”. Координаты вершин $w_j = u_j + iv_j$, $j = \overline{0, 20}$, этой области на комплексной плоскости w следующие:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= 0, & w_1 &= 3.5, & w_2 &= 3 + 0.5i, & w_3 &= 3 + 3i, \\
 w_4 &= 2.5 + 3.5i, & w_5 &= 2.5 + 4.5i, & w_6 &= 3 + 5i, & w_7 &= 4 + 5i, \\
 w_8 &= 4.5 + 4.5i, & w_9 &= 4.5 + 3.5i, & w_{10} &= 4 + 3i, & w_{11} &= 4 + 2i, \\
 w_{12} &= 5 + 2i, & w_{13} &= 4.5 + 1.5i, & w_{14} &= 5 + i, & w_{15} &= 4 + i, \\
 w_{16} &= 4 + 0.5i, & w_{17} &= 3.5, & w_{18} &= 7, & w_{19} &= 7 + 6i, & w_{20} &= 6i.
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Нормировка отображения $\mu : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{H}$ следующая (см. фиг. 3а, 3б): $\mu(0) = w_0$, $\mu(1) = w_{19}$, $\mu(\infty) = w_{20}$. Неизвестными параметрами интеграла (1.15), требующими вычислений, являются множитель $\mathcal{H}_0$ и прообразы ζ_j , $j = \overline{1, 18}$. Вычисленные с помощью разработанного алгоритма значения разностей искомых прообразов ζ_j следующие:

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 &= 0.208757213499398 \times 10^{-1}, & \zeta_2 - \zeta_1 &= 0.803383224377802 \times 10^{-3}, \\
 \zeta_3 - \zeta_2 &= 0.71893774825471 \times 10^{-1}, & \zeta_4 - \zeta_3 &= 0.83715343170527 \times 10^{-1}, \\
 \zeta_5 - \zeta_4 &= 0.46890993371997, & \zeta_6 - \zeta_5 &= 0.30769085066261, \\
 \zeta_7 - \zeta_6 &= 0.45088062145884 \times 10^{-1}, & \zeta_8 - \zeta_7 &= 0.88956406963448 \times 10^{-3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_9 - \zeta_8 &= 0.75809778668161 \times 10^{-4}, & \zeta_{10} - \zeta_9 &= 0.49915637107855 \times 10^{-5}, \\
\zeta_{11} - \zeta_{10} &= 1.47379705935193 \times 10^{-6}, & \zeta_{12} - \zeta_{11} &= 2.6237907814061 \times 10^{-6}, \\
\zeta_{13} - \zeta_{12} &= 1.1340126123975 \times 10^{-6}, & \zeta_{14} - \zeta_{13} &= 4.3130563379541 \times 10^{-7}, \\
\zeta_{15} - \zeta_{14} &= 1.3226041825502 \times 10^{-7}, & \zeta_{16} - \zeta_{15} &= 5.5986421975656 \times 10^{-9}, \\
\zeta_{17} - \zeta_{16} &= 2.6997492754035 \times 10^{-9}, & \zeta_{18} - \zeta_{17} &= 3.84200183255817 \times 10^{-7}, \\
1 - \zeta_{18} &= 0.46377824127798,
\end{aligned} \tag{6.21}$$

а значение предынтегрального множителя $\mathcal{K}_0 = 0.90197443407226$. Необходимо отметить, что точки ζ_j , $j = \overline{1, 18}$, как показали вычисления (6.21), расположены внутри интервала $(0, 1)$ крайне неравномерно, т.е. имеет место эффект кроудинга. Например, все прообразы ζ_j , $j = \overline{10, 18}$, образуют набор весьма близких величин на интервале длиной порядка 10^{-5} .

Для иллюстрации отображения $\mu : \mathbb{H}^+ \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{H}$ вначале отобразим естественную для прямоугольника Π декартову сетку в полуплоскость $\mathbb{H}^+$, а затем с помощью функции $z = \mu(\zeta)$ переведем ее в область $\mathfrak{H}$. Таким образом, мы представим в области $\mathfrak{H}$ образ прямоугольной декартовой сетки при отображении $\Phi : \Pi \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{H}$. Вспомогательное отображение φ подчиним следующим условиям:

$$\varphi(ih) = \zeta_1, \quad \varphi(0) = \zeta_2, \quad \varphi(d) = \zeta_{15}, \quad \varphi(d + ih) = \zeta_{17} \tag{6.22}$$

(т.е. точки $\eta_1, \eta_2, \eta_{15}, \eta_{17}$ границы $\partial\Pi$ переходят в точки $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_{15}, \zeta_{17}$ на $\partial\mathbb{H}^+$), находим его в виде

$$\varphi(\eta) = \frac{\zeta_2(\zeta_{15} - \zeta_1) - \zeta_1(\zeta_{15} - \zeta_2)\text{sn}^2(k, \eta)}{\zeta_{15} - \zeta_1 - (\zeta_{15} - \zeta_2)\text{sn}^2(k, \eta)}, \quad k = \left[\frac{(\zeta_{17} - \zeta_1)(\zeta_{15} - \zeta_2)}{(\zeta_{17} - \zeta_2)(\zeta_{15} - \zeta_1)} \right]^{1/2}. \tag{6.23}$$

Величины d и h в (6.22) даются равенствами $d = K(k)$ и $h = K'(k)$, где k определяется с помощью второго соотношения (6.23); результаты вычислений следующие: $K = 14.2316808808993$, $K' = 1.57079632679763$. На фиг. 3а в области $\mathfrak{H}$ представлена сетка, которая является образом декартовой сетки 91×11 , построенной в прямоугольнике Π , после отображения $\Phi(\eta) = \mu \circ \varphi(\eta)$, где $z = \mu(\zeta)$ — это интеграл Кристоффеля—Шварца (1.15), соответствующий области $\mathfrak{H}$, а $\zeta = \varphi(\eta)$ — вспомогательное отображение (6.23) прямоугольника на полуплоскость.

В завершение отметим, что ключевым моментом при выполнении вычислений было применение к функции $F_D^{(18)}$ формул, которые в работе представлены для функции Лауричеллы с произвольным числом переменных. Такие формулы обеспечили эффективное (практически с машинной точностью) вычисление $F_D^{(18)}$ на каждом шаге итерационного алгоритма Ньютона. Значения параметров (6.17), (6.21) были найдены путем численного решения систем уравнений (1.16), (1.20)–(1.24), соответствующих областям $\tilde{\mathfrak{H}}$ и $\mathfrak{H}$, с точностью 14 значащих цифр. Все расчеты проводились с использованием стандартной мантииссы в 16 значащих цифр.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. Exton H. Multiple hypergeometric functions and application. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1976.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973.
4. Kraniotis G.V. Periaapsis and gravitomagnetic precessions of stellar orbits in Kerr and Kerr–de Sitter black hole spacetimes // Class. Quant. Grav. 2007. V. 24. P. 1775–1808.
5. Primoa A., Tancredic L. Maximal cuts and differential equations for Feynman integrals. An application to the three-loop massive banana graph // Nucl. Phys. B. 2017. V. 921. P. 316–356.
6. Berge J., Massey R., Baghi Q., Touboul P. Exponential shapelets: basis functions for data analysis of isolated features // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2019. V. 486. № 1. P. 544–559.

7. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* Application of hypergeometric functions of two variables in wireless communication theory // *Lobachevskii J. Math.* 2019. V. 40. 7. P. 938–953.
8. *Akerblom N., Flohr M.* Explicit formulas for the scalar modes in Seiberg–Witten theory with an application to the Argyres–Douglas point // *J. High Energy Phys.* 2005. V. 2. № 057. P. 24.
9. *Looijenga E.* Uniformization by Lauricella functions: an overview of the theory of Deligne–Mostow. In “Arithmetic and geometry around hypergeometric functions.” *Progress in mathematics.* V. 260. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser Verlag AG, 2005.
10. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи о кавитационном обтекании клина. II // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 11. С. 1873–1893.
11. *Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V.* Generalized Euler integrals and A -hypergeometric functions // *Adv. Math.* 1990. V. 84. P. 255–271.
12. *Matsumoto K.* Relative twisted homology and cohomology groups associated with Lauricella’s F_D , 2019. ArXiv:1804.00366v2.
13. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
14. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного М.: Наука, 1953.
15. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
16. *Trefethen L.N.* Numerical computation of the Schwarz – Christoffel transformation // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1980. V. 1. P. 82–102.
17. *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis. V. 1–3. New York: John Wiley & Sons, 1991.
18. *Lauricella G.* Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili // *Rendiconti Circ. Math. Palermo.* 1893. V. 7. P. 111–158.
19. *Iwasaki K., Kimura H., Shimomura Sh., Yoshida M.* From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions. Aspects of Mathematics. V. E16. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn, 1991.
20. *Безродных С.И.* Гипергеометрическая функция Лауричеллы $F_D^{(N)}$, задача Римана–Гильберта и некоторые приложения // *Успехи матем. наук.* 2018. Т. 73. № 6 (444). С. 3–94.
21. *Безродных С.И.* Формулы для вычисления функции Лауричеллы в ситуации кроудинга переменных // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 62. № 12. С. 2054–2076.
22. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Ретах В.С.* Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // *Успехи матем. наук.* 1992. Т. 47. Вып. 4 (286). С. 3–82.
23. *Bezrodnykh S.I.* Analytic continuation of the Horn hypergeometric series with an arbitrary number of variables // *Integral Transform. Spec. Funct.* 2020. V. 31. 10. P. 788–803.
24. *Садыков Т.М., Цух А.К.* Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014.
25. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* On some formulas for the Horn functions $H_6(a, b, b', w, z)$ and $H_8^{(c)}(a, b; w, z)$ // *Integral Transform. Spec. Funct.* 2021. Published online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2021.2017427>
26. *Ananthanarayan B., Beraay S., Friot S., Marichev O., Pathak T.* On the evaluation of the Appell F_2 double hypergeometric function, 2021; arXiv:2111.05798v1
27. *Brychkov Yu.A., Savischenko N.V.* On some formulas for the Horn function $H_7(a, b, b'; c; w, z)$ // *Integral Transform. Spec. Funct.* 2021. Publ. online. <https://doi.org/10.1080/10652469.2022.2056600>
28. *Kalmykov M., Bytev V., Kniehl B., Moch S.-O., Ward B., Yost S.* Hypergeometric functions and Feynman diagrams. In: *Blümlein J., Schneider C.* (eds) Anti-Differentiation and the Calculation of Feynman Amplitudes. Texts & Monographs in Symbolic Computation (A Series of the Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University, Linz, Austria). Springer, Cham, 2021.
29. *Zemach C.* A conformal map formula for difficult cases // *J. Comput. Appl. Math.* 1986. V. 14. P. 207–215.
30. *Krikeles B.C., Rubin R.L.* On the crowding of parameters associated with Schwarz–Christoffel transformation // *Appl. Math. Comput.* 1988. V. 28. № 4. P. 297–308.
31. *Голузин Г., Канторович Л., Крылов В., Мелентьев П., Муратов М., Стенин Н.* Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. Л.–М.: Наука, 1937.
32. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. Л.: Физматлит, 1962.
33. *Gaier D.* Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Berlin: Springer-Verlag, 1964.
34. *Безродных С.И., Власов В.И.* Задача Римана–Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2002. Т. 42. № 3. С. 277–312.
35. *Безродных С.И., Власов В.И.* Задача Римана–Гильберта в областях сложной формы и ее приложение // *Spectr. Evolut. Problem.* 2006. Т. 16. С. 51–61.

36. *Богатырев А.Б.* Конформное отображение прямоугольных семиугольников // Матем. сб. 2012. Т. 203. № 12. С. 35–56.
37. *Накипов Н.Н., Насыров С.Р.* Параметрический метод нахождения аксессуарных параметров в обобщенных интегралах Кристоффеля–Шварца // Уч. зап. Казанского университета. Сер. Физ.-матем. науки. 2016. Т. 158. № 2. С. 202–220.
38. *Безродных С.И.* Функция Лауричеллы и конформное отображение многоугольников // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 4. С. 500–520.
39. *Banjai L.* Revisiting the Crowding Phenomenon in Schwarz–Christoffel Mapping // SIAM J. Sci. Comput. 2008. V. 30. № 2. P. 618–636.
40. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Конформное отображение L -образной области в аналитическом виде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 12. С. 1943–1980.
41. *Trefethen L.N., Driscoll T.A.* Schwarz–Christoffel transformation. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2005.
42. *Driscoll T.A.* A MATLAB toolbox for Schwarz–Christoffel mapping // ACM Transact. Math. Soft. 1996. V. 22. P. 168–186.
43. *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. Докторская дисс. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
44. *Власов В.И.* О вариации отображающей функции при деформировании области // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275. № 6. С. 1299–1302.
45. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

ТРЕХСЛОЙНЫЕ СХЕМЫ С ДВУКРАТНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ШАГА ПО ВРЕМЕНИ¹⁾

© 2023 г. П. Н. Вабищевич^{1,2,*}

¹ 115191 Москва, Б. Тульская ул., 52, ИБРАЭ РАН, Россия

² 677007 Якутск, ул. Кулаковского, 42,

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, Россия

*e-mail: vabishchevich@gmail.com

Поступила в редакцию 27.02.2023 г.

Переработанный вариант 27.02.2023 г.

Принята к публикации 25.07.2023 г.

При численном решении нестационарных задач используются многослойные (более двух слоев) аппроксимации по времени. Они легко строятся и относительно просто исследуются при использовании равномерных сеток. В то же самое время при численном исследовании прикладных проблем мы должны применять аппроксимации с переменным шагом по времени. Проблемы построения многослойных схем на неравномерных сетках связаны как с сохранением заданной точности, так и с необходимостью обеспечения устойчивости приближенного решения. В работе строятся трехслойные схемы для приближенного решения задачи Коши для эволюционного уравнения второго порядка в специальном случае, когда шаг сетки изменяется (увеличивается или уменьшается) в два раза. Основное внимание уделяется особенностям аппроксимации при переходе с одного шага сетки на другой. Исследование базируется на использовании общих результатов теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем в конечномерном гильбертовом пространстве. Получены оценки устойчивости по начальным данным и правой части при изменении шага сетки по времени в два раза. Библ. 8. Фиг. 2.

Ключевые слова: эволюционное уравнение второго порядка, задача Коши, трехслойные разностные схемы, устойчивость по начальным данным и правой части.

DOI: 10.31857/S0044466923110285, **EDN:** CTTUWU

ВВЕДЕНИЕ

При приближенном решении нестационарных задач часто приходится использовать многослойные аппроксимации по времени, когда при переходе на новый слой по времени задействовано известное решение на двух и более предшествующих слоях по времени (см. [1]–[3]). В частности, трехслойные аппроксимации являются естественными при рассмотрении задачи Коши для эволюционных уравнений второго порядка. Учет локальных особенностей решения проводится за счет выбора шага по времени. При использовании многослойных аппроксимаций на неравномерных сетках имеются две основные проблемы. Первая из них связана с построением аппроксимаций по времени необходимой точности. Вторая проблема – обеспечение устойчивости приближенного решения при выбранных аппроксимациях.

При построении и исследовании разностных аппроксимаций по времени для прикладных проблем широко используются результаты теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем (см. [4]). Получены (см., например, [5, 6]) необходимые и достаточные условия устойчивости двух- и трехслойных схем на равномерных сетках по времени. Для двухслойных схем переход к неравномерным сеткам не является принципиальным. В случае трехслойных схем ситуация много сложнее, что можно проиллюстрировать на случае нечастой смены шага по времени. Например, при рассмотрении вопроса об устойчивости трехслойных разностных схем мы вынуждены отдельно рассматривать проблему при увеличении шага по времени и при его уменьшении. Типичный результат (см. [7, 8]) состоит в том, что при смене шага по времени

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-41-00037 (разд. 2), проект № 23-71-30013 (разд. 3)).

априорные оценки устойчивости загроуляются, при этом константа в априорной оценке увеличивается при смене шага пропорционально отношению шагов по времени.

В вычислительной практике наибольшее распространение получила стратегия изменения (увеличения или уменьшения) шага по времени в два раза. В этом случае мы можем использовать наиболее удобные и точные аппроксимации на равномерных сетках при специальной подготовке необходимых расчетных данных. В настоящей работе такие неравномерные сетки используются для построения и исследования трехслойных схем. Получены оценки безусловной устойчивости приближенного решения по начальным данным и правой части для схем с весами второго порядка аппроксимации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения второго порядка в вещественном конечномерном гильбертовом пространстве H . Функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$C \frac{d^2 u}{dt^2} + B \frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

и начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = v_0. \quad (1.2)$$

Линейные постоянные (не зависящие от t) операторы A, B, C являются самосопряженными и положительно-определенными:

$$A = A^* \geq v_A I, \quad v_A > 0, \quad B = B^* \geq v_B I, \quad v_B > 0, \quad C = C^* \geq v_C I, \quad v_C > 0, \quad (1.3)$$

где I — единичный оператор в H . Будем использовать обычные обозначения $(\cdot, \cdot)$ и $\|\cdot\|$ для скалярного произведения и нормы в H . Для самосопряженного положительно-определенного оператора D определим гильбертово пространство H_D со скалярным произведением и нормой $(u, v)_D = (Du, v)$, $\|u\|_D = (u, v)_D^{1/2}$.

К подобным задачам мы приходим, в частности, при использовании метода конечных элементов или метода конечных объемов при аппроксимации по пространству при численном исследовании нестационарных краевых задач для уравнений с частными производными. В частности, уравнение (1.1) при $C = 0$ мы можем связать с параболическим уравнением, а при $B = 0$ — с гиперболическим уравнением.

Приведем простейшую априорную оценку для решения задачи (1.1)–(1.3), которая будет для нас ориентиром при исследовании аппроксимаций по времени. Домножая уравнение (1.1) скалярно в H на du/dt , мы получим равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\left\| \frac{du}{dt} \right\|_C^2 + \|u\|_A^2 \right) + \left\| \frac{du}{dt} \right\|_B^2 = \left(f, \frac{du}{dt} \right).$$

Для правой части используется оценка

$$\left(f, \frac{du}{dt} \right) \leq \left\| \frac{du}{dt} \right\|_B^2 + \frac{1}{4} \|f\|_{B^{-1}}^2.$$

С учетом этого лемма Гронуолла дает нам априорную оценку

$$\left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_C^2 + \|u(t)\|_A^2 \leq \|v_0\|_C^2 + \|u_0\|_A^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(\theta)\|_{B^{-1}}^2 d\theta. \quad (1.4)$$

При приближенном решении задачи Коши (1.1), (1.2) естественно ориентироваться на безусловно устойчивые трехслойные разностные схемы. Наиболее просто работать с равномерными сетками по времени, когда шаг по времени $\tau = \text{const}$, и пусть $y^n = y(t_n)$, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots$. Трехслойная разностная схема с весом $\sigma = \text{const} > 0$ имеет вид

$$C \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + B \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + Ay^{n+\sigma} = f^n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

$$y^0 = u^0, \quad y^1 = \tilde{u}^1, \quad (1.6)$$

при использовании обозначений

$$y^{n+\sigma} = \sigma y^{n+1} + (1-2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}.$$

С учетом начальных условий (1.2) положим

$$u^0 = u_0, \quad \tilde{u}^1 \approx u^1(\tau) \approx u_0 + \tau v_0.$$

Трехслойная схема (1.5), (1.6) имеет второй порядок аппроксимации по τ . Теория устойчивости операторно-разностных схем (см. [5, 6]) дает следующие условия безусловной устойчивости этой схемы: схема (1.5), (1.6) безусловно устойчива при $\sigma \geq 0.25$.

В вычислительной практике при моделировании нестационарных процессов мы должны ориентироваться на использование неравномерных сеток по времени. Для многослойных схем на неравномерных сетках есть проблемы как с потерей устойчивости, так и с понижением точности. Наша цель состоит в построении неоднородных аппроксимаций по времени для нестационарных задач (1.1)–(1.3), которые давали бы безусловные устойчивые схемы второго порядка точности по τ .

2. РАВНОМЕРНАЯ СЕТКА

Условия устойчивости схемы (1.5), (1.6) $\sigma \geq 0.25$ устанавливаются с привлечением результатов теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем (см. [5, 6]). Соответствующая оценка устойчивости по начальным данным и правой части имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} \right\|_C^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4} \right) \tau^2 \left\| \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} \right\|_A^2 + \left\| \frac{y^{n+1} + y^n}{2} \right\|_A^2 \leq \\ & \leq \left\| \frac{\tilde{u}^1 - u^0}{\tau} \right\|_C^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 \left\| \frac{\tilde{u}^1 - u^0}{\tau} \right\|_A^2 + \left\| \frac{\tilde{u}^1 + u^0}{2} \right\|_A^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tau \|f^k\|_{B^{-1}}^2, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

Мы наложим более жесткие ограничения на σ , при которых мы можем получить оценку устойчивости в более простой норме.

Теорема 1. Трехслойная разностная схема (1.3), (1.5), (1.6) является безусловно устойчивой для $\sigma \geq 0.5$. При этих ограничениях для приближенного решения задачи (1.1), (1.2) априорная оценка имеет вид

$$\left\| \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} \right\|_D^2 + \frac{1}{2} \|y^{n+1}\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y^n\|_A^2 \leq \left\| \frac{\tilde{u}^1 - u^0}{\tau} \right\|_D^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{u}^1\|_A^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|_A^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \tau \|f^k\|_{B^{-1}}^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

где

$$D = C + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \tau^2 A.$$

Доказательство. С учетом равенства

$$\sigma y^{n+1} + (1-2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1} = \frac{1}{2}(y^{n+1} + y^{n-1}) + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) (y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1})$$

запишем уравнение (1.5) в виде

$$D \frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + B \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} + \frac{1}{2} A (y^{n+1} + y^{n-1}) = f^n. \quad (2.3)$$

Обозначим $s^n = y^n - y^{n-1}$, тогда

$$y^{n+1} - y^{n-1} = s^{n+1} + s^n, \quad y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1} = s^{n+1} - s^n.$$

Уравнение (2.3) принимает форму

$$D \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau^2} + B \frac{s^{n+1} + s^n}{2\tau} + \frac{1}{2} A (y^{n+1} + y^{n-1}) = f^n. \quad (2.4)$$

Домножим уравнение (2.4) на $s^{n+1} + s^n = y^{n+1} - y^{n-1}$, что дает

$$\frac{1}{\tau^2} (\|s^{n+1}\|_D^2 - \|s^n\|_D^2) + \frac{1}{2} (\|y^{n+1}\|_A^2 - \|y^{n-1}\|_A^2) + \frac{1}{2\tau} \|s^{n+1} + s^n\|_B^2 = (f^n, s^{n+1} + s^n).$$

С учетом введенных обозначений и неравенства

$$(f^n, s^{n+1} + s^n) \leq \frac{1}{2\tau} \|s^{n+1} + s^n\|_B^2 + \frac{\tau}{2} \|f^n\|_{B^{-1}}^2$$

получим оценку решения на слое

$$\left\| \frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} \right\|_D^2 + \frac{1}{2} \|y^{n+1}\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y^n\|_A^2 \leq \left\| \frac{y^n - y^{n-1}}{\tau} \right\|_D^2 + \frac{1}{2} \|y^n\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y^{n-1}\|_A^2 + \frac{1}{2} \tau \|f^n\|_{B^{-1}}^2. \quad (2.5)$$

Применяя разностный аналог леммы Гронуолла, мы получим доказываемую оценку (2.2). Теорема 1 доказана.

Априорную оценку (2.2) мы можем рассматривать как прямой дискретный аналог оценки (1.4) для решения задачи Коши (1.1)–(1.3). Недостаток оценки (2.1) перед оценкой (2.2) связан с тем, что устойчивость доказывается не для самого приближенного решения на отдельных слоях по времени, а только их линейной комбинации. Такое новое качество приближенного решения достигается за счет более жестких ограничений на вес σ : вместо $\sigma \geq 0.25$ мы имеем $\sigma \geq 0.5$.

3. НЕРАВНОМЕРНАЯ СЕТКА

Мы рассматриваем проблему построения аппроксимаций по времени для уравнения (1.1) на неравномерной сетке по времени. В общем случае положим

$$t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}, \quad t_{n+1/2} = t_n + 0.5\tau_{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad t_0 = 0.$$

С учетом априорной оценки (2.2) квадрат нормы приближенного решения будем оценивать величиной

$$S^n = \left\| \frac{y^n - y^{n-1}}{\tau_n} \right\|_C^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \|y^n - y^{n-1}\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y^n\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y^{n-1}\|_A^2.$$

Остановимся на алгоритме приближенного решения задачи (1.1), (1.2) на сетке, для которой шаг изредка меняется в два раза. При специальной организации вычислений мы фактически используем аппроксимации на равномерной сетке по времени и поэтому сохраняем второй порядок точности. Ключевой момент исследования связан с доказательством устойчивости используемых разностных схем. Мы должны отдельно рассмотреть случай увеличения и случай уменьшения шага по времени в два раза.

Вариант увеличения шага сетки в два раза показан на фиг. 1. Начиная с момента времени $t = t_n$, шаг сетки удваивается; с учетом введенных обозначений имеем $\tau_{n+1} = 2\tau_n$. Переход на новую сетку по времени будем обеспечивать использованием приближенного решения во вспомогательном полуцелом узле $t_{n+1/2}$. Для решений $y^{n+1/2}$ и y^{n+1} используется сетка с шагом τ_n :

$$C \frac{y^{n+1/2} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau_n^2} + B \frac{y^{n+1/2} - y^{n-1}}{2\tau_n} + A(\sigma y^{n+1/2} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = f^n, \quad (3.1)$$

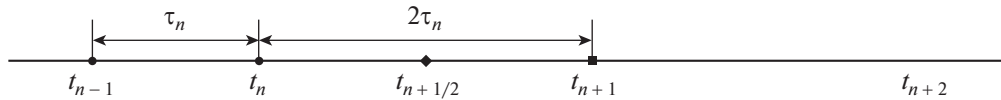
$$C \frac{y^{n+1} - 2y^{n+1/2} + y^n}{\tau_n^2} + B \frac{y^{n+1} - y^n}{2\tau_n} + A(\sigma y^{n+1} + (1 - 2\sigma)y^{n+1/2} + \sigma y^n) = \frac{1}{2}(f^{n+1} + f^n). \quad (3.2)$$

После этого для определения y^{n+2} используются аппроксимации на сетке с шагом τ_{n+1} :

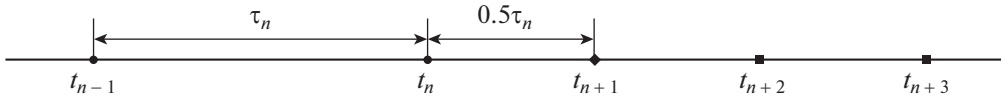
$$C \frac{y^{n+2} - 2y^{n+1} + y^n}{\tau_{n+1}^2} + B \frac{y^{n+2} - y^n}{2\tau_{n+1}} + A(\sigma y^{n+2} + (1 - 2\sigma)y^{n+1} + \sigma y^n) = f^{n+1}. \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) аналогично (2.5) следует оценка

$$S^{n+2} \leq S^{n+1} + \frac{1}{2} \tau_{n+1} \|f^{n+1}\|_{B^{-1}}^2. \quad (3.4)$$



Фиг. 1. Увеличение шага сетки в два раза.



Фиг. 2. Уменьшение шага сетки в два раза.

Для (3.1) и (3.2) получим

$$\tilde{S}^{n+1/2} \leq S^n + \frac{1}{2} \tau_n \|f^n\|_{B^{-1}}^2, \quad (3.5)$$

$$\tilde{S}^{n+1} \leq \tilde{S}^{n+1/2} + \frac{1}{8} \tau_n \|f^{n+1} + f^n\|_{B^{-1}}^2, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{n+1/2} &= \left\| \frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau_n} \right\|_C^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \|y^{n+1/2} - y^n\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y^{n+1/2}\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y^n\|_A^2, \\ \tilde{S}^{n+1} &= \left\| \frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{\tau_n} \right\|_C^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \|y^{n+1} - y^{n+1/2}\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y^{n+1}\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y^{n+1/2}\|_A^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание

$$\|y^{n+1} - y^n\|_Q^2 \leq 2\|y^{n+1} - y^{n+1/2}\|_Q^2 + 2\|y^{n+1/2} - y^n\|_Q^2, \quad Q = C, A,$$

получим

$$S^{n+1} \leq q(\tilde{S}^{n+1/2} + \tilde{S}^{n+1}). \quad (3.7)$$

Здесь постоянная $q = 1$ при $\sigma = 0.5$ и $q = 2$ в общем случае при $\sigma > 0.5$. Из неравенств (3.5) и (3.6) следует

$$\tilde{S}^{n+1/2} + \tilde{S}^{n+1} \leq 2S^n + \frac{5}{2} \tau_n \|f^n\|_{B^{-1}}^2 + \frac{1}{8} \tau_{n+1} \|f^{n+1}\|_{B^{-1}}^2.$$

Принимая во внимание (3.7) ($q = 2$), мы получим

$$S^{n+1} \leq 4 \left(S^n + \frac{5}{8} \tau_n \|f^n\|_{B^{-1}}^2 + \frac{1}{16} \tau_{n+1} \|f^{n+1}\|_{B^{-1}}^2 \right).$$

С учетом (3.4) отсюда следует оценка решения после увеличения шага в два раза

$$S^{n+2} \leq 4 \left(S^n + \frac{1}{2} \frac{\tau_{n+1} + \tau_n}{2} \|f^n\|_{B^{-1}}^2 + \frac{1}{2} \tau_{n+1} \|f^{n+1}\|_{B^{-1}}^2 \right). \quad (3.8)$$

При уменьшении шага сетки в два раза (фиг. 2) используется следующая стратегия. Изменение сетки проводится после расчета y^n : $\tau_{n+1} = 0.5\tau_n$. Ее ключевая особенность связана с расчетом приближенного решения при $t = t_{n+1}$. Вспомогательное решение $\tilde{y}^{n+2}$ находится по трехслойной схеме

$$C \frac{\tilde{y}^{n+2} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau_n^2} + B \frac{\tilde{y}^{n+2} - y^{n-1}}{2\tau_n} + A(\sigma \tilde{y}^{n+2} + (1 - 2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) = f^n. \quad (3.9)$$

Решение y^{n+1} определяется линейной интерполяцией $\tilde{y}^{n+2}$ и y^n :

$$y^{n+1} = \frac{1}{2}(\tilde{y}^{n+2} + y^n). \quad (3.10)$$

Завершает переход на новую сетку с уменьшенным в два раза шагом расчет y^{n+2} :

$$C \frac{y^{n+2} - 2y^{n+1} + y^n}{\tau_{n+1}^2} + B \frac{y^{n+2} - y^n}{2\tau_{n+1}} + A(\sigma y^{n+2} + (1 - 2\sigma)y^{n+1} + \sigma y^n) = f^{n+1}. \quad (3.11)$$

Для (3.11) мы имеем обычную оценку устойчивости

$$S^{n+2} \leq S^{n+1} + \frac{1}{2}\tau_{n+1}\|f^{n+1}\|_{B^{-1}}^2. \quad (3.12)$$

Из (3.9) получим

$$\tilde{S}^{n+2} \leq S^n + \frac{1}{2}\tau_n\|f^n\|_{B^{-1}}^2, \quad (3.13)$$

где

$$\tilde{S}^{n+2} = \left\| \frac{\tilde{y}^{n+2} - y^n}{\tau_n} \right\|_C^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \|\tilde{y}^{n+2} - y^n\|_A^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{y}^{n+2}\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y^n\|_A^2.$$

При выполнении (3.13) имеем

$$y^{n+1} - y^n = \frac{1}{2}(\tilde{y}^{n+2} - y^n),$$

$$\|y^{n+1}\|_A^2 \leq \|\tilde{y}^{n+1}\|_A^2 + \|y^n\|_A^2.$$

Прямые вычисления приводят нас к оценке

$$S^{n+1} \leq 2\tilde{S}^{n+2}.$$

С учетом (3.13) в дополнение к оценке (3.12) получим

$$S^{n+1} \leq 2 \left(S^n + \frac{1}{2}\tau_n\|f^n\|_{B^{-1}}^2 \right). \quad (3.14)$$

Стандартная априорная оценка устойчивости (прямой аналог (1.4)) имеет вид

$$S^{n+1} \leq S^n + \frac{1}{2} \frac{\tau_{n+1} + \tau_n}{2} \|f^n\|_{B^{-1}}^2.$$

С учетом (3.8), (3.14) имеем

$$S^{n+1} \leq (M_- + M_+) \left(S^1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\tau_{k+1} + \tau_k}{2} \|f^k\|_{B^{-1}}^2 \right), \quad (3.15)$$

где

$$S^1 = \left\| \frac{\tilde{u}^1 - u^0}{\tau_1} \right\|_C^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \|\tilde{u}^1 - u^0\|_A^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{u}^1\|_A^2 + \frac{1}{2} \|u^0\|_A^2.$$

Для постоянных M_- и M_+ имеем

$$M_- = 2^{m_-}, \quad M_+ = 4^{m_+},$$

где m_- — число уменьшений шага по времени в два раза, m_+ — число увеличений шага по времени в два раза.

Подводит итог нашего рассмотрения следующее основное утверждение.

Теорема 2. *Трехслойная разностная схема на неравномерной сетке с изменением шага по времени в два раза является безусловно устойчивой при $\sigma \geq 0.5$. Для приближенного решения задачи (1.1), (1.2) имеет место априорная оценка (3.15).*

Такой результат об устойчивости с более грубыми априорными оценками согласуется с ранее установленными в несколько других условиях фактами (см. [7, 8]). Наиболее существенный элемент связан с предложенной удобной организацией вычислений для специального случая изменением шага по времени в два раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hairer E., Wanner G.* Solving Ordinary Differential Equations. II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer, 1996.
2. *LeVeque R.J.* Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. Steady-State and Time-Dependent Problems. Philadelphia: SIAM, 2007.
3. *Вабищевич П.Н.* Численные методы решения нестационарных задач. М.: ЛЕНАНД, 2021.
4. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes. New York: Marcel Dekker, 2001.
5. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
6. *Samarskii A.A., Matus P.P., Vabishchevich P.N.* Difference Schemes with Operator Factors. Dordrecht: Kluwer, 2002.
7. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н., Макаревич Е.Л., Матус П.П.* Устойчивость трехслойных разностных схем на неравномерных по времени сетках // Докл. АН. 2001. Т. 376. № 6. С. 738–741.
8. *Matus P., Zyuzina E.* Three-level difference schemes on non-uniform in time grids // Comput. Meth. Appl. Math. 2001. V. 1. № 3. P. 265–284.

**ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ**

УДК 517

**АНАЛИТИЧНОСТЬ И ПСЕВДОАНАЛИТИЧНОСТЬ
В МЕТОДЕ МАЛОГО ПАРАМЕТРА¹⁾**
© 2023 г. В. И. Качалов^{1,*}, Д. А. Маслов^{1,**}¹ 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, НИУ “МЭИ”, Россия

*e-mail: vikachalov@rambler.ru

**e-mail: maslovdma@mpei.ru

Поступила в редакцию 27.03.2023 г.
Переработанный вариант 27.03.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Метод малого параметра позволяет строить решения дифференциальных уравнений в виде степенных рядов и получил большое распространение в математической физике. В большинстве случаев эти ряды являются асимптотически сходящимися. Целью настоящей работы является нахождение условий обычной сходимости рядов по степеням малого параметра, представляющих решения задач теории возмущений. Библи. 17.

Ключевые слова: метод регуляризации С. А. Ломова, голоморфная регуляризация, псевдоаналитичность, ε -регулярное решение, ε -псевдoreгулярное решение.

DOI: 10.31857/S0044466923110170, EDN: KJODFG

1. ВВЕДЕНИЕ

Заложенный в трудах А. Пуанкаре метод малого параметра является одним из наиболее используемых в математической физике аналитических методов. Суть метода состоит в том, что решение поставленной задачи строится в виде ряда по степеням малого параметра, который либо уже присутствует в решаемой задаче, либо вводится искусственным путем. С другой стороны, наличие малого параметра в дифференциальном уравнении приводит к тому, что поставленная для него начальная или краевая задача становится либо регулярно возмущенной, либо сингулярно возмущенной, а значит, является предметом изучения функционального анализа. В первом случае, как это следует из теорем Пуанкаре о разложении для обыкновенных дифференциальных уравнений [1, гл. VI, § 2], построенные формальные ряды по степеням малого параметра сходятся в обычном смысле к точным решениям, что делает последние аналитически зависящими от параметра. А, именно, если правая часть уравнения

$$\partial_t y = f(t, y, \varepsilon), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

аналитична в точке $M_0(t_0, y_0, 0)$, то существует и единственно решение $y(t, \varepsilon)$, удовлетворяющее начальному условию $y(t_0, \varepsilon) = y^0$, аналитическое в точке $M'_0(t_0, 0)$, т.е. представимое равномерно сходящимся на указанном отрезке рядом по степеням ε (который и строится методом малого параметра).

Однако, если рассматривать дифференциальное уравнение

$$\partial_t u = F(u, \varepsilon), \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

с неограниченным оператором F , даже аналитически зависящим от ε , то гарантировать обычную сходимость ряда по степеням малого параметра, представляющего решение этого уравнения, в общем случае, нельзя.

Также открытым остается вопрос, является ли сумма $u^f(t, \varepsilon)$ построенного формального ряда точным решением, при условии его обычной сходимости?

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-21-00496).

Еще более сложной является ситуация с сингулярно возмущенными задачами [2–5], поскольку при значении параметра, равном нулю, перестают работать теоремы существования. С другой стороны, параметр ε входит в уравнение

$$\varepsilon \partial_t y = f(t, y), \quad t \in [0, T], \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad (3)$$

аналитическим (даже целым) образом. Значит, что-то должно наследовать такую зависимость от ε . Решение $y(t, \varepsilon)$, в общем случае, не может быть аналитическим в точке $\varepsilon = 0$ (“аргумент Дайсона” [6]). Оказывается, и это было доказано в рамках метода голоморфной регуляризации, что уравнение (3) обладает аналитическими по ε первыми интегралами [7, 8]. А уже они определяют так называемое псевдоаналитическое решение задачи Коши (3):

$$y(t, \varepsilon) = Y_0(t, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon Y_1(t, \varepsilon^{-1}) + \dots + \varepsilon^n Y_n(t, \varepsilon^{-1}) + \dots \quad (4)$$

Ряд (4) сходится равномерно на отрезке $[0, T]$ в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$, при фиксированном ε в коэффициентах. Он также сходится при каждом фиксированном ε из некоторой достаточно малой окрестности точки $\varepsilon = 0$ равномерно на отрезке $[0, T_\varepsilon]$. При этом разработан алгоритм псевдоаналитического продолжения на весь отрезок задания уравнения, то позволяет решать не только начальные, но и краевые задачи [9].

Вернемся к начальной задаче (2). Пусть оператор F таков, что для решения этой задачи методом малого параметра может быть построен формальный ряд

$$u^f(t, \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots + \varepsilon^n u_n(t) + \dots \quad (5)$$

Нетрудно доказать, что таковым является оператор, представимый в виде конечной суммы полилинейных операторов.

Определение 1. Если ряд (5) сходится равномерно на отрезке $[0, T]$, то его сумма $u^f(t, \varepsilon)$ называется ε -регулярным решением уравнения (2).

В конечномерном случае (см. уравнение (1)) ε -регулярное решение автоматически совпадает с точным решением — это гарантирует теорема Пуанкаре о разложении. В случае неограниченного оператора F это не всегда так.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В банаховом пространстве E задана эволюционная задача с малым комплексным параметром ε

$$\partial_t u = Au + \varepsilon B(Gu, Hu), \quad t \in [0, T], \quad u|_{t=0} = u^0, \quad (6)$$

где A — замкнутый неограниченный оператор с областью определения D_A ; $B : E \times E \rightarrow E$ — билинейный ограниченный оператор; операторы G и H могут быть как ограниченными, так и неограниченными.

Условие (A). Оператор A является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы $\mathcal{U}(t)$.

Будем искать решение поставленной задачи в виде ряда (5), который подставим в уравнение (6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в левой и правой частях этого уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_t u_0 &= Au_0, \quad u_0|_{t=0} = u^0, \\ \partial_t u_1 &= Au_1 + B(Gu_0, Hu_0), \quad u_1|_{t=0} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \partial_t u_n &= Au_n + \sum_{k=0}^{n-1} B(Gu_k, Hu_{n-k-1}) = 0, \quad u_n|_{t=0} = 0. \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь мы воспользовались билинейностью оператора B и правилом Коши перемножения рядов.

Воспользуемся условием (А) для решения задач серии (7):

$$\begin{aligned}
 u_0(t) &= \mathcal{U}(t)u^0, \\
 u_1(t) &= \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)B(Gu_0(\tau), Hu_0(\tau))d\tau, \\
 &\dots\dots\dots \\
 u_n(t) &= \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau) \left[\sum_{k=0}^{n-1} B(Gu_k(\tau), Hu_{n-k-1}(\tau)) \right] d\tau. \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, формальный ряд $u^f(t, \varepsilon)$ построен и нужно исследовать его на сходимость.

3. СЛУЧАЙ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ G И H

Пусть $\|u_0(t)\| \leq a \ \forall t \in [0, T]$, $\|B\| = b$, $\|G\| = g$, $\|H\| = h$, $\|\mathcal{U}(t)\| \leq q \ \forall t \in [0, T]$, при некоторых положительных a, b, g, h, q . Тогда, при $t \in [0, T]$ имеют место следующие оценки правых частей равенств (8), начиная со второго:

$$\begin{aligned}
 \|u_1(t)\| &\leq Tqbg ha^2, \\
 \|u_2(t)\| &\leq T^2 q^2 b^2 g^2 h^2 a^3, \\
 &\dots\dots\dots \\
 \|u_n(t)\| &\leq T^n q^n b^n g^n h^n a^{n+1}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{9}$$

Из неравенств (9) вытекает равномерная на отрезке $[0, T]$ сходимость ряда (5) при $|\varepsilon| < 1/c$, где $c = Tqbg ha$. В итоге доказана следующая

Теорема 1. *Если выполнено условие (А) и операторы G и H являются ограниченными, то задача Коши (6) имеет единственное ε -регулярное решение.*

4. О СВЯЗИ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ С ε -РЕГУЛЯРНЫМ

В этом разделе статьи будет исследован вопрос о том, как соотносятся друг с другом точное и ε -регулярное решения.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то при достаточно малых ε точное решение $u(t, \varepsilon)$ задачи Коши (6) существует и совпадает с ее ε -регулярным решением $u^r(t, \varepsilon)$.*

Доказательство. Поскольку A – инфинитезимальный генератор полугруппы $\mathcal{U}(t)$, то задача (6) эквивалентна интегральному уравнению [10, гл. 7, § 3]

$$u(t) = \mathcal{U}(t)u^0 + \varepsilon \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)B(Gu(\tau), Hu(\tau))d\tau. \tag{10}$$

Обозначим через C_E банахово пространство непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в E , с нормой равномерной на отрезке $[0, T]$ сходимости. Пусть $S^1 = \{u(t) \in C_E : \|u(t) - u_0(t)\| \leq 1\}$ – замкнутый единичный шар в C_E . Ясно, что при сделанных предположениях оператор

$$\Phi_\varepsilon[u(t)] = u_0(t) + \varepsilon \int_0^t \mathcal{U}(t-\tau)B(Gu(\tau), Hu(\tau))d\tau$$

при достаточно малых ε отображает S^1 в себя и является сжатием. Поэтому, в соответствии с принципом сжатых отображений, в шаре S^1 существует и единственно решение интегрального

уравнения (10), что ввиду его эквивалентности задаче (6), доказывает существование и единственность у нее точного решения $u(t, \varepsilon)$.

Далее, пусть

$$u_{n\varepsilon}^r = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots + \varepsilon^n u_n(t) \quad (11)$$

есть частичная сумма ряда (5), представляющего ε -регулярное решение начальной задачи (6). Пользуясь билинейностью оператора B , можно доказать, что сумма (11) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \partial_t u_{n\varepsilon}^r &= A u_{n\varepsilon}^r + \varepsilon B(Gu_{n\varepsilon}^r, Hu_{n\varepsilon}^r) - \varepsilon^{n+1} \sum_{m=0}^n B(Gu_m, Hu_{n-m}) - \varepsilon^{n+2} \sum_{m=1}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+1}) - \\ &- \varepsilon^{n+3} \sum_{m=2}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+2}) - \dots - \varepsilon^{2n} [B(Gu_n, Hu_{n-1}) + B(Gu_{n-1}, Hu_n)] - \varepsilon^{2n+1} B(Gu_n, Hu_n). \end{aligned} \quad (12)$$

Если из уравнения (6) вычесть уравнение (12), то получится следующая начальная задача для $u(t, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t (u - u_{n\varepsilon}^r) &= A(u - u_{n\varepsilon}^r) + \varepsilon [B(Gu, H(u - u_{n\varepsilon}^r)) + B(G(u - u_{n\varepsilon}^r), Hu_{n\varepsilon}^r)] + \\ &+ \varepsilon^{n+1} \sum_{m=0}^n B(Gu_m, Hu_{n-m}) + \varepsilon^{n+2} \sum_{m=1}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+1}) + \varepsilon^{n+3} \sum_{m=2}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+2}) + \dots \\ &\dots + \varepsilon^{2n} [B(Gu_n, Hu_{n-1}) + B(Gu_{n-1}, Hu_n)] + \varepsilon^{2n+1} B(Gu_n, Hu_n), \quad (u - u_{n\varepsilon}^r)|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Запишем эквивалентное уравнению (13) интегральное уравнение (опустив переменную интегрирования):

$$\begin{aligned} u - u_{n\varepsilon}^r &= \varepsilon \int_0^t \mathcal{U}(t - \tau) [B(Gu, H(u - u_{n\varepsilon}^r)) + B(G(u - u_{n\varepsilon}^r), Hu_{n\varepsilon}^r)] d\tau + \\ &+ \varepsilon^{n+1} \int_0^t \mathcal{U}(t - \tau) \left[\sum_{m=0}^n B(Gu_m, Hu_{n-m}) + \varepsilon \sum_{m=1}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+1}) + \right. \\ &\left. + \varepsilon^2 \sum_{m=2}^n B(Gu_m, Hu_{n-m+2}) + \dots + \varepsilon^{n-1} (B(Gu_n, Hu_{n-1}) + B(Gu_{n-1}, Hu_n)) + \varepsilon^n B(Gu_n, Hu_n) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Из этого уравнения вытекают следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|u(t, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(t)\| &\leq |\varepsilon| bgh \int_0^t \|\mathcal{U}(t - \tau)\| \|u(\tau, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(\tau)\| d\tau + |\varepsilon|^{n+1} Tq \left[\sum_{m=0}^n \|B(Gu_m, Hu_{n-m})\|_{C_E} + \right. \\ &+ |\varepsilon| \sum_{m=1}^n \|B(Gu_m, Hu_{n-m+1})\|_{C_E} + |\varepsilon|^2 \sum_{m=2}^n \|B(Gu_m, Hu_{n-m+2})\|_{C_E} + \dots + |\varepsilon|^{n-1} \|B(Gu_n, Hu_{n-1})\|_{C_E} + \\ &\left. + \|B(Gu_{n-1}, Hu_n)\|_{C_E} + |\varepsilon|^n \|B(Gu_n, Hu_n)\|_{C_E} \right] \leq |\varepsilon| bgh \int_0^t \|\mathcal{U}(t - \tau)\| (\|u(\tau, \varepsilon)\| + \|u_{n\varepsilon}^r(\tau)\|) \times \\ &\times \|u(\tau, \varepsilon) - u_{n\varepsilon}^r(\tau)\| d\tau + |\varepsilon|^{n+1} Tqbgh [(n+1)a^2 bghc^n + |\varepsilon| na^2 bghc^{n+1} |\varepsilon|^2 (n-1)a^2 bghc^{n+2} + \dots \\ &\dots + 2|\varepsilon|^{n-1} a^2 bghc^{2n-1} + |\varepsilon|^n a^2 bghc^{2n}], \end{aligned} \quad (15)$$

где $c = Tqbgha$.

Если $|\varepsilon| < \frac{1}{2Tbghq(1+a)}$, то $\rho = |\varepsilon|c < \frac{a}{2(1+a)} < \frac{1}{2}$, и из цепочки неравенств (15) следует, что

$$\begin{aligned} \|u(t, \varepsilon) - u'_{n\varepsilon}(t)\| &\leq |\varepsilon| bgh \int_0^t \|U(t-\tau)\| (\|u(\tau, \varepsilon)\| + \|u'_{n\varepsilon}(\tau)\|) \|u(\tau, \varepsilon) - u'_{n\varepsilon}(\tau)\| d\tau + \\ &+ |\varepsilon|^{n+1} Tqa^2 bgh\rho^2 [n+1 + \rho(1+\rho+\dots+\rho^{n-1})] \leq |\varepsilon| bgh \int_0^t \|U(t-\tau)\| (\|u(\tau, \varepsilon)\| + \\ &+ \|u'_{n\varepsilon}(\tau)\|) \|u(\tau, \varepsilon) - u'_{n\varepsilon}(\tau)\| d\tau + |\varepsilon| Tqa^2 bgh\rho^n \left(n+1 + \frac{n\rho}{1-\rho} \right) \leq \\ &\leq |\varepsilon| bgh \int_0^t \|U(t-\tau)\| (\|u(\tau, \varepsilon)\| + \|u'_{n\varepsilon}(\tau)\|) \|u(\tau, \varepsilon) - u'_{n\varepsilon}(\tau)\| d\tau + \rho^n \varepsilon Tqa^2 bgh(2n+1), \end{aligned}$$

так как $\rho(1-\rho)^{-1} < 1$ при $0 < \rho < 1/2$.

Обозначим через $\mathcal{H}(t, \tau, \varepsilon) = |\varepsilon| bgh \|U(t-\tau)\| (\|u(\tau, \varepsilon)\| + \|u'_{n\varepsilon}(\tau)\|)$ ограниченную при $0 \leq t, \tau \leq T$ функцию, поскольку последовательность $\{u'_{n\varepsilon}(t)\}$ является сходящейся. В соответствии с неравенством Гронуолла-Беллмана

$$\|u(t, \varepsilon) - u'_{n\varepsilon}(t)\| \leq \rho^n |\varepsilon| Tqa^2 bgh(2n+1) e^{\int_0^t \mathcal{H}(t, \tau, \varepsilon) d\tau},$$

и, поскольку $(2n+1)\rho^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то и $\|u(t, \varepsilon) - u'_{n\varepsilon}(t)\|_{C_E} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В итоге $u(t, \varepsilon) = u'(t, \varepsilon)$ и теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши для интегродифференциального уравнения (уравнение типа Больцмана)

$$\partial_t u + y \partial_x u = \varepsilon \iint_{\Pi} e^{-\xi^2} (u^2(t, \xi, y) - u^2(t, x, \eta)) d\xi d\eta, \quad u|_{t=0} = e^{-x^2}.$$

В качестве E возьмем банахово пространство непрерывных и ограниченных в замкнутой полосе

$$\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty, -1 \leq y \leq 1\},$$

с нормой равномерной сходимости; область определения оператора $A = -y \partial_x$ состоит из непрерывно дифференцируемых по x и непрерывных по y функций из E ; билинейный оператор

$$B(u, v) = \iint_{\Pi} e^{-\xi^2} (u(\xi, y)v(\xi, y) - u(x, \eta)v(x, \eta)) d\xi d\eta,$$

действующий из $E \times E$ в E , очевидно, является ограниченным.

Решение ищем в виде ряда по степеням малого параметра:

$$u'(t, x, y, \varepsilon) = u_0(t, x, y) + \varepsilon u_1(t, x, y) + \dots + \varepsilon^n u_n(t, x, y) + \dots,$$

коэффициенты которого являются решением серии задач. Поскольку непрерывная полугруппа задается формулой $U\varphi \equiv \varphi(t - xy, y)$, то

$$u_0(t, x, y) = e^{-(x-ty)^2}.$$

Для определения $u_1(t, x, y)$ имеем следующее уравнение:

$$\partial_t u_1 + y \partial_x u_1 = \iint_{\Pi} e^{-\xi^2} (e^{-2(\xi-ty)^2} - e^{-2(x-\eta)^2}) d\xi d\eta.$$

Пользуясь формулой решения линейного неоднородного уравнения в банаховом пространстве (см. формулы (8)), имеем

$$u_1(t, x, y) = \int_0^t \left[2\sqrt{\pi} e^{2(t-\tau)^2 y^2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-2(x-y(t-\tau))^2 + 2(t-\tau)^2} \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{2}(x+t-\tau)) - \operatorname{erf}(\sqrt{2}(x-t+\tau))}{t-\tau} \right] d\tau,$$

где $\operatorname{erf}(\theta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\theta e^{-\xi^2} d\xi$ — интеграл ошибок.

5. СЛУЧАЙ НЕОГРАНИЧЕННОГО БИЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Далее будем изучать начальную задачу

$$\partial_t u = Au + \varepsilon B(Gu, Hu), \quad u|_{t=0} = u^0, \quad (16)$$

где H — замкнутый неограниченный оператор с областью определения $D_H \supset D_A$.

Сформулируем и докажем утверждение об аппроксимации уравнения (16) уравнением с неограниченным билинейным оператором.

Теорема 3. Пусть наряду с уравнением (16) задано уравнение

$$\partial_t v = Av + \varepsilon B(Gv, Lv), \quad t \in [0, T], \quad (17)$$

с тем же начальным условием, в котором L является ограниченным оператором. Тогда, если $u(t, \varepsilon)$ есть точное решение задачи Коши (16), ограниченное на отрезке $[0, T]$ при всех достаточно малых ε , то существует константа $C_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ такая, что

$$\|u(t, \varepsilon) - v(t, \varepsilon)\| \leq C_\varepsilon \|(H - L)u(t, \varepsilon)\|, \quad (18)$$

где $v(t, \varepsilon)$ — решение начальной задачи для уравнения (17).

Доказательство. Представим уравнение (16) в виде

$$\partial_t u = Au + \varepsilon B(Gu, Lu) + \varepsilon B(Gu, (H - L)u)$$

и вычтем из него уравнение (17):

$$\partial_t (u - v) = A(u - v) + \varepsilon [B(G(u - v), Lu) + B(Gv, L(u - v))] + \varepsilon B(Gu, (H - L)u), \quad (u - v)|_{t=0} = 0. \quad (19)$$

Составим интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (19):

$$u - v = \varepsilon \int_0^t \mathcal{U}(t - \tau) [B(G(u - v), Lu) + B(Gv, L(u - v))] d\tau + \varepsilon \int_0^t \mathcal{U}(t - \tau) B(Gu, (H - L)u) d\tau.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$\|u - v\| \leq |\varepsilon| b g \int_0^t \|\mathcal{U}(t - \tau)\| (\|Lu\| + \|v\| \|L\|) \|u - v\| d\tau + |\varepsilon| T q b g \|u\| \|(H - L)u\|,$$

к которому можно применить неравенство Гронуола–Беллмана:

$$\|u - v\| \leq |\varepsilon| T q b g \|u\| \exp \{ |\varepsilon| T q b g (\|Lu\|_{C_E} + \|v\|_{C_E} \|L\|) \} \|(H - L)u\|. \quad (20)$$

Оценка (20) совпадает с неравенством (18) при очевидном выборе C_ε . То, что $C_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ вытекает из ограниченности решения $u(t, \varepsilon)$ и оператора L . Теорема доказана.

6. СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ЗАДАЧИ И ε -ПСЕВДОРЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим сингулярно возмущенную задачу с положительным ε

$$\varepsilon \partial_t u = \tilde{A}u + \varepsilon^2 B(Gu, Hu), \quad u|_{t=0} = u^0, \quad (21)$$

и потребуем выполнения условия $(\tilde{A})$: оператор $\tilde{A}$ является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы $\tilde{\mathcal{U}}(t)$. Будем искать решение задачи Коши (21) в виде ряда

$$u^f(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) = u_0(t, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon u_1(t, \varepsilon^{-1}) + \dots + \varepsilon^n u_n(t, \varepsilon^{-1}) + \dots \quad (22)$$

с коэффициентами, определяемыми из серии начальных задач

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t u_0 &= \tilde{A}u_0, \quad u_0|_{t=0} = u^0, \\ \varepsilon \partial_t u_1 &= \tilde{A}u_1 + \varepsilon B(Gu_0, Hu_0), \quad u_1|_{t=0} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \varepsilon \partial_t u_n &= \tilde{A}u_n + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} B(Gu_k, Hu_{n-k-1}), \quad u_n|_{t=0} = 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что все задачи серии (23) являются сингулярно возмущенными и, поэтому, в соответствии с формулами решений таких задач [11, гл. I, § 6] имеем

$$\begin{aligned} u_0(t, \varepsilon^{-1}) &= \tilde{U}(\varepsilon^{-1}t)u^0, \\ u_1(t, \varepsilon^{-1}) &= \int_0^t \tilde{U}(\varepsilon^{-1}(t-\tau))B(Gu_0(\tau, \varepsilon^{-1}), Hu_0(\tau, \varepsilon^{-1}))d\tau, \\ &\dots\dots\dots \\ u_n(t, \varepsilon^{-1}) &= \int_0^t \tilde{U}(\varepsilon^{-1}(t-\tau)) \left[\sum_{k=0}^{n-1} B(Gu_k(\tau, \varepsilon^{-1}), Hu_{n-k-1}(\tau, \varepsilon^{-1})) \right] d\tau, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (24)$$

Определение 2. Если ряд (22) сходится равномерно по $t \in [0, T]$ в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, то его сумма $u^{pr}(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$ называется ε -псевдoreгулярным решением задачи Коши (21).

Сформулируем утверждения, аналогичные доказанным ранее теоремам, относящимся к регулярному случаю.

Теорема 4. Если выполнено условие $(\tilde{A})$ и операторы G и H являются ограниченными, то начальная задача (21) имеет ε -псевдoreгулярное решение $u^{pr}(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$, совпадающее с ее точным решением $u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$.

Пусть H — замкнутый неограниченный оператор с областью определения $D_H \supset D_{\tilde{A}}$. Предположим, что задана еще одна начальная задача

$$\varepsilon \partial_t v = \tilde{A}v + \varepsilon^2 B(Gv, Lv), \quad v|_{t=0} = u^0, \quad (25)$$

с ограниченным оператором L .

Теорема 5. Если $u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)$ — точное решение задачи Коши (21) (с неограниченным оператором H), ограниченное на отрезке $[0, T]$, то существует константа $C_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ такая, что

$$\|u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) - v(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\| \leq C_\varepsilon \|(H - L)u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon)\|. \quad (26)$$

Следствие из теоремы 5. Пусть последовательность операторов $\{L_m\}_{m=1}^\infty$ сильно сходится к оператору H . Тогда для любого целого неотрицательного n существует натуральное m такое, что при всех достаточно малых положительных ε

$$\|u(t, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) - v_{n\varepsilon}^{[m]}(t, \varepsilon^{-1})\| \leq Q_n \varepsilon^{n+1},$$

где $v_{n\varepsilon}^{[m]}$ есть n -я частичная сумма ряда, представляющего ε -псевдoreгулярное решение уравнения (25), когда $L = L_m$; Q_n — константа, не зависящая от ε .

Эти утверждения доказываются так же, как и аналогичные им в регулярном случае, с учетом того, что $\|U(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0$.

Пример 2. Построим приближенное решение задачи Коши

$$\varepsilon \partial_t u = \tilde{A}u - \varepsilon^2 B(u, Hu), \quad t \in (0, T], \quad u|_{t=0} = u^0.$$

Здесь, $E = C[0, 1]$ — банахово пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций переменной x ; оператор $\tilde{A} = \partial_x^2$, с областью определения $D_{\tilde{A}} = \{w(x) \in C[0, 1] : \partial_x^2 w \in C[0, 1], w(0) = w(1) = 0\}$; оператор G совпадает с тождественным оператором I ; оператор $H = \partial_x$, с областью определения $D_H^\mu = \{w(x) \in C[0, 1] : \partial_x w \in C[0, 1], \mu w(0) - w(1) = 0\}$, $\mu \in (0, 1)$; билинейный оператор $B(u, v) = -uv$; $u^0 = \varphi(x) \in D_A$.

Резольвента оператора H задается формулой

$$R_H(\lambda) = \frac{1}{\mu - e^\lambda} \left(\mu \int_0^x e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi + e^\lambda \int_x^1 e^{\lambda(x-\xi)} f(\xi) d\xi \right),$$

и при всех $\lambda > 0$ (и заданном $\mu \in (0, 1)$) подчинена оценке $\|R_H(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ [12, гл. II, п. 1.3]. В этих условиях [11, гл. I, § 2] последовательность ограниченных операторов

$$L_m = -mI - m^2 R_H(m)$$

при $m \rightarrow \infty$ сильно сходится к оператору H . С помощью них составим серию сингулярно возмущенных задач

$$\varepsilon \partial_t v = \tilde{A}v - \varepsilon^2 B(v, H_m v), \quad t \in (0, T], \quad v|_{t=0} = u^0. \quad (27)$$

Сжимающая полугруппа задается с помощью функции Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности [13, гл. IV, § 1]

$$G(t/\varepsilon, x; s) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sin(\pi k s) \sin(\pi k x) e^{-\pi^2 k^2 t/\varepsilon}.$$

Построим ε -псевдорегулярное решение задачи (27) (оно совпадает с ее точным решением):

$$V_m(t, x, \varepsilon^{-1}, \varepsilon) = v_0(t, x, \varepsilon^{-1}) + \varepsilon v_1(t, x, \varepsilon^{-1}) + \dots,$$

где

$$v_0(t, x, \varepsilon^{-1}) = \int_0^1 G(t\varepsilon^{-1}, x; s) \varphi(s) ds,$$

$$v_1(t, x, \varepsilon^{-1}) = - \int_0^t \left[\int_0^1 G((t-\tau)\varepsilon^{-1}, x; s) (v_0(\tau, s, \varepsilon^{-1}) H_m[v_0(\tau, s, \varepsilon^{-1})]) ds \right] d\tau,$$

и т.д.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время теория сингулярных возмущений представляет собой активно развивающуюся область математики. При этом решаются новые задачи путем комбинирования различных методов и подходов как ранее разработанных, так и вновь созданных [14–17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибигов Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных задач. М.: Наука, 1973.
3. Волков В.Т., Нефедов Н.Н. Асимптотическое решение задачи граничного управления для уравнения типа Бюргерса с модульной адвекцией и линейным усилением // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 11. С. 1851–1860.
4. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
5. Ломов С.А., Ломов И.С. Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.
6. Krivoruchenko M.I., Nadyozhin D.K., Yudin A.V. Hydrostatic equilibrium of stars without electroneutrality constraint // Phys. Rev. D. 2018. V. 97. № 15. P. 1–20. id 083016.

7. Качалов В.И. О голоморфной регуляризации сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 4. С. 64–71.
8. Besova M.I., Kachalov V.I. Analytical Aspects of the Theory of Tikhonov Systems // Mathematics. 2022. 10:1, 72 (published online). 14 pp. www.mdpi.com/2227-7390/10/1/72.
9. Kachalov V.I. Holomorphic Regularization of Boundary-Value Problems for Tikhonov Systems // J. Mathem. Sciences. 2022. V. 268. № 1. P. 63–69.
10. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
11. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
12. Дезин А.А. Воспоминания и избранные труды по математике. М.: Макс Пресс, 2011.
13. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
14. Malek S. On Boundary Layer Expansions For a Singularly Perturbed Problem With Confluent Fuchsian Singularities // Mathematics. 2020. V. 8. № 2. P. 189.
15. Glizer V.Y. Asymptotic Analysis of Spectrum and Stability for One Class of Singularly Perturbed Neutral-Type Time Delay Systems // Axioms. 2021. V. 10. № 4. P. 325 (published online).
16. Bobodzhanov A.A., Safonov V.F., Kachalov V.I. Asymptotic and pseudoholomorphic solutions of singularly perturbed differential and integral equations in the Lomov's regularization method // Axioms. 2019. V. 8. № 27. <https://doi.org/10.3390/axioms8010027>
17. Нефедов Н.Н. Периодические контрастные структуры в задаче реакция-диффузия с быстрой реакцией и малой диффузией // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 4. С. 601–612.

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ

УДК 519.65

TRIPLE SERIES EVALUATED IN π AND $\ln 2$
AS WELL AS CATALAN'S CONSTANT G ¹⁾

© 2023 г. C. Li^{a,*}, W. Chu^{a,**}

^a*School of Mathematics and Statistics Zhoukou Normal University, Henan, China*

^{*}*e-mail: lichunlizk@outlook.com*

^{**}*e-mail: chu.wenchang@unisalento.it*

Поступила в редакцию 07.06.2023 г.

Переработанный вариант 07.06.2023 г.

Принята к публикации 25.07.2023 г.

Эффективное вычисление некоторых тройных рядов через значения π , $\ln(2)$ и постоянную Каталана G . Вычисление некоторых специальных определенных интегралов сведено к суммированию тройных рядов, которое эффективно решено в терминах явного представления через константы π , $\ln(2)$ и постоянную Каталана G .

Ключевые слова: определенный интеграл, бесконечные ряды, явные константы, постоянная Каталана.

DOI: 10.31857/S0044466923110200, **EDN:** CQKPCA

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ

УДК 512.643

LOWER BOUNDS FOR COLUMN MATRIX APPROXIMATIONS¹⁾

© 2023 г. А. И. Osinsky

Institute of Numerical Mathematics, RAS, Moscow, RAS, Gubkina Street, 8, 119991, Russia

e-mail: osinskiy1189@gmail.com

Поступила в редакцию 20.06.2023 г.

Переработанный вариант 20.06.2023 г.

Принята к публикации 25.07.2023 г.

Нижние оценки точности столбцовых аппроксимаций матриц. Показана связь между нижними и верхними оценками точности столбцовых аппроксимаций матриц и границами для норм псевдообращения подматриц ортогональных матриц. Эта связь используется для вывода нижних оценок точности столбцовых аппроксимаций в спектральной норме и норме Фробениуса.

Ключевые слова: малоранговые аппроксимации, выбор подмножества столбцов, хорошо обусловленные подматрицы.

DOI: 10.31857/S0044466923110248, **EDN:** CQZGVY

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ

УДК 512.643.8

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ
О σ -КОММУТИРОВАНИИ ($\sigma \neq 0, \pm 1$) ТЁПЛИЦЕВОЙ
И ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦ¹⁾© 2023 г. В. Н. Чугунов^{1,*}, Х. Д. Икрамов^{2,**}¹ 119333 Москва, ул. Губкина, 8, ИВМ им. Г.И. Марчука РАН, Россия² 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

*e-mail: chugunov.vadim@gmail.com

**e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 21.02.2023 г.
Переработанный вариант 29.06.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Предлагается единый подход к конструированию пар матриц (T, H) , решающих задачу о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц. Строится семейство решений для некоторого частного случая. Библ. 7.

Ключевые слова: тёплицева матрица, ганкелева матрица, σ -коммутирование, ϕ -циркулянт.

DOI: 10.31857/S0044466923110108, **EDN:** AGKNZR

1. ВВЕДЕНИЕ

Тёплицевой называется комплексная $n \times n$ -матрица T , имеющая вид

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \dots & t_{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \dots & t_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

а ганкелевой называется комплексная $n \times n$ -матрица H вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Переставив столбцы тёплицевой матрицы в обратном порядке, получим ганкелеву матрицу. Напротив, всякая ганкелева матрица H может быть получена указанным способом из соответствующей тёплицевой матрицы T . Эту связь между H и T можно описать матричным соотношением

$$H = T\mathcal{P}_n,$$

¹⁾Работа выполнена при поддержке Чугунова Московским центром фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (Соглашение № 075-15-2022-286 с Минобрнауки РФ).

где $\mathcal{P}_n$ есть так называемая перьединичная матрица:

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \dots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Тёплицева матрица (1) называется *циркулянт*ом, если

$$t_{-j} = t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

*косым циркулянт*ом при

$$t_{-j} = -t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

φ -*циркулянт*ом, когда

$$t_{-j} = \varphi t_{n-j}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $\varphi \in \mathbb{C}$.

Матрицы K и M σ -коммутируют (или квази-коммутируют), если найдется такое число σ , что $KM = \sigma MK$ (см. [1]). В этой же работе [1] отмечается, что квази-коммутативность является важным соотношением в квантовой физике (см. [2, 3]), а также в теории представлений аффинных алгебр Гекке (Неске) (см. [4]).

Задача о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц заключается в описании пар ненулевых матриц (T, H) таких, что T — тёплицева, H — ганкелева и выполняется соотношение

$$TH = \sigma HT. \quad (3)$$

Необходимо сказать несколько слов о параметре σ . Произвольный выбор σ возможен лишь в случае, когда хотя бы одна из матриц T или H вырождена. Если же обе матрицы не вырождены, то σ является одним из корней n -й степени из единицы. В настоящей работе от параметра σ мы требуем, чтобы $\sigma \neq 0, \pm 1$.

Заметим, так как след произведения двух матриц не меняется при перестановке сомножителей и $\sigma \neq 1$, то матрицы TH и HT имеют нулевой след.

В работе [5] сформулирована и доказана следующая

Теорема 1. *Ненулевые тёплицева матрица T и ганкелева матрица H σ -коммутируют ($\sigma \neq 0, \pm 1$), если T и H входят хотя бы в один из описываемых ниже классов:*

*Класс 1. Матрица T является циркулянт*ом

$$T = F_n^* D_1 F_n,$$

*а H — ганкелевым циркулянт*ом

$$H = F_n^* D_2 F_n \mathcal{P}_n.$$

Здесь F_n — (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$\epsilon = \exp(2\pi i/n)$ — первообразный корень n -й степени из единицы; $D_1 = \text{diag}(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)})$ и $D_2 = \text{diag}(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)})$ — диагональные матрицы; при этом

$$d_1^{(2)} d_1^{(1)} = 0,$$

$$d_j^{(2)}(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+2-j}^{(1)}) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Класс 2. Матрица T является косым циркулянтном

$$T = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

а H — ганкелевым косым циркулянтном

$$H = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n,$$

где

$$G_{-1} = \text{diag}(1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{n-1}),$$

$\psi = e^{i\pi/n}$ есть корень n -й степени из (-1) . Диагональные матрицы $D_1 = \text{diag}(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)})$ и $D_2 = \text{diag}(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)})$ должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} d_1^{(2)}(d_1^{(1)} - \sigma d_2^{(1)}) &= 0, & d_2^{(2)}(d_2^{(1)} - \sigma d_1^{(1)}) &= 0, \\ d_j^{(2)}(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+3-j}^{(1)}) &= 0, & j &= 3, 4, \dots, n. \end{aligned}$$

Класс 3. Пусть $n = 2r$, матрицы T и H имеют вид

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \sigma \mathcal{P}_r \end{pmatrix}.$$

Класс 4. Пусть $n = 2r$, матрицы T и H имеют вид

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \sigma \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \mathcal{P}_r \end{pmatrix}.$$

Приведенные классы найдены из разных соображений, а именно, благодаря искусственно придуманным ограничениям на форму тёплицевой и ганкелевой матриц. Они соответствуют наиболее простым множествам решений.

Целью настоящей работы является описание единого подхода к получению полного решения. Сущность предлагаемого метода состоит в сужении множества всех пар матриц (T, H) до множеств, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи, после чего задача о σ -коммутировании исследуется на каждой конкретной более узкой комбинации наборов (T, H) . Хотя теорема 2, называемая в работе главным результатом, описывает множество, являющееся частным случаем объединения классов 3 и 4 теоремы 1, указываемая в теореме 2 совокупность пар тёплицевой и ганкелевой матриц как раз и представляет собой решение рассматриваемой задачи на предварительно ограниченной части наборов (T, H) . Описываемый класс является результатом применения разработанного подхода.

Структура статьи следующая. В разд. 2 кратко изложен прием сужения множества всех пар матриц (T, H) до множеств, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи; далее в разд. 3 формулируется теорема, являющаяся главным результатом статьи и содержащая описание частного класса пар σ -коммутирующих матриц (T, H) . Доказательство теоремы проводится в разд. 4.

Прежде напомним важные факты.

Лемма 1 (см. [6]). Две нескаларные тёплицевы матрицы $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ коммутируют тогда и только тогда, когда $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ принадлежат хотя бы одному из следующих классов:

Класс 1'. Обе матрицы $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ верхнетреугольные или же обе нижнетреугольные.

Класс 2'. Матрицы $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ суть φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$.

Класс 3'. Одна из матриц $\tilde{T}_1$ или $\tilde{T}_2$ является линейной функцией от другой.

Лемма 2 (см. [7]). Матрица T является φ -циркулянтном тогда и только тогда, когда она перестановочна с матрицей Q_φ :

$$TQ_\varphi = Q_\varphi T,$$

где

$$Q_\Phi = \begin{pmatrix} & & & \frac{1}{\Phi} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $0_{k,k}$ нулевую $k \times k$ -матрицу.

2. СУЖЕНИЕ МНОЖЕСТВА ПАР МАТРИЦ (T, H)

Прежде чем формулировать главный результат, опишем сужение наборов пар матриц (T, H) до множеств, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи. Поможет в этом следующее утверждение.

Лемма 3. *Всякую пару (T, H) , решающую задачу о σ -коммутировании тёрлицевой и ганкелевой матриц, можно представить в виде*

$$\begin{aligned} T &= \alpha(A - \sigma A^\top), \\ H &= \beta B \mathcal{P}_n, \end{aligned} \quad (4)$$

где A и B — нескаларные тёрлицевы матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} AB &= BA, \\ A^\top B + BA^\top &= \mu AB, \\ \mu &= \frac{1 + \sigma^2}{\sigma}, \\ \mu &\neq \pm 2, \end{aligned} \quad (5)$$

α, β — некоторые числа.

Доказательство. От пары (T, H) перейдем к паре (T_1, T_2) , где $T_1 = T$, а T_2 — тёрлициевая матрица, соответствующая ганкелевой матрице H , т.е. $H = T_2 \mathcal{P}_n$. Нижний индекс этих тёрлициевых матриц показывает, какой из матриц исходной пары они соответствуют. Из формулировки задачи следует, что матрицы T_1 и T_2 определены с точностью до скалярного множителя. Условие σ -коммутирования приобретает вид

$$T_1 T_2 \mathcal{P}_n - \sigma T_2 \mathcal{P}_n T_1 = 0.$$

После умножения справа на $\mathcal{P}_n$ получаем

$$T_1 T_2 - \sigma T_2 \mathcal{P}_n T_1 \mathcal{P}_n = 0.$$

Матрица T_1 , будучи персимметричной, удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{P}_n T_1 \mathcal{P}_n = T_1^\top.$$

Используя его, находим

$$T_1 T_2 - \sigma T_2 T_1^\top = 0. \quad (6)$$

Полное описание решений уравнения (6) содержит все требуемые пары σ -коммутирующих тёрлициевой и ганкелевой матриц.

В случае скалярной матрицы T_1 имеем соотношение

$$T_2 - \sigma T_2 = 0,$$

из которого в силу условия $\sigma \neq 1$ получаем, что матрица $T_2 = 0$.

Если скалярна матрица T_2 , то T_1 должна подчиняться условию

$$T_1 = \sigma T_1^\top,$$

транспонирование которого дает равенство

$$T_1^\top = \sigma T_1.$$

Из последних двух соотношений имеем

$$T_1 = \sigma T_1^\top = \sigma^2 T_1,$$

или

$$(1 - \sigma^2)T_1 = 0.$$

Так как $\sigma \neq \pm 1$, то $T_1 = 0$.

Пусть теперь ни одна из матриц T_1 и T_2 не является диагональной. Протранспонируем уравнение (6), умножим его слева и справа на $\mathcal{P}_n$ и используем соотношение $\mathcal{P}_n T_j \mathcal{P}_n = T_j^\top$:

$$T_2 T_1 - \sigma T_1^\top T_2 = 0.$$

Разность (6) и последнего условия дает соотношение

$$(T_1 + \sigma T_1^\top)T_2 = T_2(T_1 + \sigma T_1^\top).$$

Введем две дополнительные тѐплицевы матрицы

$$A = T_1 + \sigma T_1^\top, \quad B = T_2.$$

Из формулы

$$T_1 + \sigma T_1^\top = A$$

и ее транспонированного варианта

$$T_1^\top + \sigma T_1 = A^\top$$

выводим

$$(1 - \sigma^2)T_1 = A - \sigma A^\top,$$

или

$$T_1 = \frac{1}{1 - \sigma^2}(A - \sigma A^\top).$$

Так как матрицы T_1 и T_2 определены с точностью до скалярных множителей, то без ограничения общности можно считать, что

$$\begin{aligned} T_1 &= \alpha(A - \sigma A^\top), \\ T_2 &= \beta B, \\ AB &= BA, \\ T_1 T_2 - \sigma T_2 T_1^\top &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Подставляя выражения для T_1 и T_2 в последнее уравнение этой системы, получаем

$$(A - \sigma A^\top)B - \sigma B(A^\top - \sigma A) = 0,$$

или

$$\sigma(A^\top B + BA^\top) = (1 + \sigma^2)AB.$$

Введем дополнительный параметр

$$\mu = \frac{1 + \sigma^2}{\sigma},$$

который в силу условия $\sigma \neq \pm 1$ удовлетворяет ограничению $\mu \neq \pm 2$. Последнее уравнение переписывается в виде

$$A^\top B + BA^\top = \mu AB.$$

Таким образом, решения задачи о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц можно искать в виде

$$\begin{aligned} T_1 &= \alpha(A - \sigma A^\top), \\ T_2 &= \beta B, \end{aligned}$$

при условиях

$$\begin{aligned} AB &= BA, \\ A^\top B + BA^\top &= \mu AB, \\ \mu &= \frac{1 + \sigma^2}{\sigma}, \\ \mu &\neq \pm 2. \end{aligned}$$

При этом матрицы A и B не являются скалярными в силу нескаларности T_1 и T_2 . Лемма 3 доказана.

На основании доказанной леммы можно считать, что основным уравнением является соотношение

$$A^\top B + BA^\top = \mu AB. \quad (8)$$

Обозначим элементы первой строки матрицы A через $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, а элементы ее первого столбца — через $a_0, a_{-1}, \dots, a_{-(n-1)}$. Аналогично элементы первой строки матрицы B обозначим через $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$, а элементы первого столбца — через $b_0, b_{-1}, \dots, b_{-(n-1)}$.

Согласно лемме 1, для коммутирующих тёплицевых матриц A и B возможны лишь следующие четыре случая: 1) обе матрицы A и B являются верхними треугольными; 2) обе матрицы A и B — нижние треугольные; 3) обе матрицы A и B суть φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$; 4) $B = \theta A + \xi I_n$.

В настоящей работе мы уделим особое внимание третьему случаю. Если $\varphi = 1$, то получаем класс 1 теоремы 1, а при $\varphi = -1$ — класс 2 этой же теоремы. Поэтому далее считаем, что $\varphi \neq \pm 1$. Кроме того, мы ограничимся случаем $\mu = 0$.

3. ГЛАВНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 2. *Ненулевые тёплицева матрица T и ганкелева матрица H σ -коммутируют при $\sigma = i\kappa$, $\kappa = \pm 1$, если эти матрицы имеют четный порядок $n = 2r$ и следующий вид:*

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 + \kappa v)I_r \\ i(v - \kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & i v \mathcal{P}_r \end{pmatrix},$$

где $v = \pm 1$, а α и β — некоторые числа.

4. ОБОСНОВАНИЕ ГЛАВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим уравнение (8) в случае, когда A и B — φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0, \pm 1$. Матрица в правой части является тёплицевой, значит, и матрица в левой части должна быть тёплицевой.

Лемма 4. *Пусть A и B — φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0, \pm 1$. Матрица $A^\top B + BA^\top$ является тёплицевой тогда и только тогда, когда A и B представимы в виде*

$$A = \gamma(a_0 I_n + U^c + \varphi U^\top), \quad B = \delta(b_0 I_n + U + \varphi U^{c\top}), \quad (9)$$

где U и U^c — строго верхние треугольные тёплицевы матрицы с элементами первых строк $0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ и $0, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1$ соответственно, а γ и δ — произвольные числа.

Доказательство. Запишем условие тёплицевости матрицы $A^\top B + BA^\top$ в виде

$$\{A^\top B + BA^\top\}_{k,m} = \{A^\top B + BA^\top\}_{k+1,m+1}, \quad k, m = 1, 2, \dots, n-1,$$

подробная запись которого

$$\sum_{l=1}^n \{A^\top\}_{k,l} \{B\}_{l,m} + \sum_{l=1}^n \{B\}_{k,l} \{A^\top\}_{l,m} - \sum_{l=1}^n \{A^\top\}_{k+1,l} \{B\}_{l,m+1} - \sum_{l=1}^n \{B\}_{k+1,l} \{A^\top\}_{l,m+1} = 0$$

в силу тёплицевости A и B эквивалентна условию

$$\sum_{l=1}^n a_{k-l} b_{m-l} + \sum_{l=1}^n b_{l-k} a_{l-m} - \sum_{l=1}^n a_{k+1-l} b_{m+1-l} - \sum_{l=1}^n b_{l-k-1} a_{l-m-1} = 0.$$

Заменим индекс суммирования l на p , полагая $p = l$ в первой и второй суммах и $p = l-1$ в третьей и четвертой:

$$\sum_{p=1}^n a_{k-p} b_{m-p} + \sum_{p=1}^n b_{p-k} a_{p-m} - \sum_{p=0}^{n-1} a_{k-p} b_{m-p} - \sum_{p=0}^{n-1} b_{p-k} a_{p-m} = 0.$$

Выполняя элементарные преобразования, приходим к равенству

$$a_{-(n-k)} b_{-(n-m)} - a_k b_m + b_{n-k} a_{n-m} - b_{-k} a_{-m} = 0.$$

Поскольку A, B — φ -циркулянты, то

$$(\varphi^2 - 1) a_k b_m + (1 - \varphi^2) b_{n-k} a_{n-m} = 0,$$

или

$$(\varphi^2 - 1)(a_k b_m - b_{n-k} a_{n-m}) = 0.$$

Так как $\varphi \neq \pm 1$, имеем

$$a_k b_m - b_{n-k} a_{n-m} = 0,$$

или, заменяя m на $n-m$,

$$a_k b_{n-m} - a_m b_{n-k} = 0. \quad (10)$$

Будем использовать вспомогательную $(n-1) \times 2$ -матрицу

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} a_1 & b_{n-1} \\ a_2 & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & b_1 \end{bmatrix}.$$

Так как матрицы A и B не являются скалярными, то у матрицы $\mathcal{F}$ нет нулевых столбцов, поэтому $\text{rank } \mathcal{F} \geq 1$. В силу (10) все миноры второго порядка у матрицы $\mathcal{F}$ равны нулю, значит, $\text{rank } \mathcal{F} = 1$. По условию задачи, матрицы A и B могут быть определены с точностью до скалярного кратного, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что матрица $\mathcal{F}$ имеет одинаковые столбцы.

Если определить U и U^c как строго верхние треугольные тёплицевы матрицы с элементами первых строк $0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ и $0, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1$ соответственно, то получим формулы (9). Лемма 4 доказана.

Матрица в правой части соотношения (8) является φ -циркулянтом как произведение φ -циркулянтов, поэтому и в его левой части должен стоять φ -циркулянт.

Лемма 5. Пусть A и B — φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0, \pm 1$. Матрица $A^\top B + BA^\top$ является φ -циркулянтом тогда и только тогда, когда B — скалярное кратное инволютивного φ -циркулянта.

Доказательство. Условие, что матрица $A^\top B + BA^\top$ является φ -циркулянт, в силу леммы 2 можно записать как

$$Q_\varphi(BA^\top + A^\top B) = (BA^\top + A^\top B)Q_\varphi,$$

или

$$B(Q_\varphi A^\top - A^\top Q_\varphi) = (A^\top Q_\varphi - Q_\varphi A^\top)B.$$

Используя соотношение $Q_\varphi = Q_{1/\varphi} + (1/\varphi - \varphi)e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n$, получаем

$$\begin{aligned} & B \left[\left(Q_{1/\varphi} + \left(\frac{1}{\varphi} - \varphi \right) e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n \right) A^\top - A^\top \left(Q_{1/\varphi} + \left(\frac{1}{\varphi} - \varphi \right) e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n \right) \right] = \\ & = \left[A^\top \left(Q_{1/\varphi} + \left(\frac{1}{\varphi} - \varphi \right) e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n \right) - \left(Q_{1/\varphi} + \left(\frac{1}{\varphi} - \varphi \right) e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n \right) A^\top \right] B, \end{aligned}$$

или, с учетом того, что $A^\top - 1/\varphi$ -циркулянт и $\varphi \neq \pm 1$,

$$Be_1 e_1^\top \mathcal{P}_n A^\top - BA^\top e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n = A^\top e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n B - e_1 e_1^\top \mathcal{P}_n A^\top B.$$

Умножим данное соотношение справа на $\mathcal{P}_n$:

$$Be_1 e_1^\top A - BA^\top e_1 e_1^\top = A^\top e_1 e_1^\top B^\top - e_1 e_1^\top AB^\top,$$

или

$$Be_1 (A^\top e_1)^\top - BA^\top e_1 e_1^\top = A^\top e_1 (Be_1)^\top - e_1 (BA^\top e_1)^\top.$$

Так как матрицы A и B могут быть определены с точностью до скалярного кратного, то, учитывая (9) для $\gamma = \delta = 1$, можем записать, что $A^\top e_1 = a_0 e_1 + x$, $Be_1 = b_0 e_1 + \varphi x$, где $x = (0, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1)^\top$. Последнее равенство приобретает вид

$$(b_0 e_1 + \varphi x)(a_0 e_1 + x)^\top - B(a_0 e_1 + x)e_1^\top = (a_0 e_1 + x)(b_0 e_1 + \varphi x)^\top - e_1 (B(a_0 e_1 + x))^\top,$$

или

$$(b_0 e_1 + \varphi x)(a_0 e_1 + x)^\top - a_0 (b_0 e_1 + \varphi x)e_1^\top - Bxe_1^\top = (a_0 e_1 + x)(b_0 e_1 + \varphi x)^\top - a_0 e_1 (b_0 e_1 + \varphi x)^\top - e_1 (Bx)^\top.$$

После раскрытия скобок имеем

$$\begin{aligned} & a_0 b_0 e_1 e_1^\top + a_0 \varphi x e_1^\top + b_0 e_1 x^\top + \varphi x x^\top - a_0 b_0 e_1 e_1^\top - a_0 \varphi x e_1^\top - Bxe_1^\top = \\ & = a_0 b_0 e_1 e_1^\top + a_0 \varphi e_1 x^\top + b_0 x e_1^\top + \varphi x x^\top - a_0 b_0 e_1 e_1^\top - a_0 \varphi e_1 x^\top - e_1 (Bx)^\top, \end{aligned}$$

или

$$b_0 e_1 x^\top - Bxe_1^\top = b_0 x e_1^\top - e_1 (Bx)^\top,$$

или

$$e_1 ((b_0 I_n + B)x)^\top = ((b_0 I_n + B)x)e_1^\top.$$

Полученное равенство можно записать как

$$\{(b_0 I_n + B)x\}_j = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n,$$

что эквивалентно векторному соотношению

$$(b_0 I_n + B)x = \vartheta e_1.$$

Введем φ -циркулянт $\check{B}$ с нулевой главной диагональю формулой $B = \check{B} + b_0 I_n$. Поскольку $x = \frac{1}{\varphi}(Be_1 - b_0 e_1) = \frac{1}{\varphi}\check{B}e_1$, приходим к матричному соотношению

$$(\check{B} + 2b_0 I_n)\check{B} = \varphi \vartheta I_n,$$

из которого выводим

$$\tilde{B}^2 + 2b_0\tilde{B} + b_0^2I_n = (\varphi\vartheta + b_0^2)I_n,$$

$$(\tilde{B} + b_0I_n)^2 = (\varphi\vartheta + b_0^2)I_n.$$

Полагая $\varphi\vartheta + b_0^2 = \chi^2$, получаем

$$B^2 = \chi^2 I_n.$$

Поскольку $B \neq 0$, то $\chi \neq 0$. Определяя матрицу $\hat{B}$ формулой $B = \chi\hat{B}$, имеем $\hat{B}^2 = I_n$, т.е. $\hat{B}$ – инволютивный φ -циркулянт. Лемма 5 доказана.

Так как матрица B может быть определена с точностью до скалярного кратного, то, не ограничивая общности, будем считать, что B – инволютивный φ -циркулянт.

Учитывая коммутирование матриц A и B , перепишем решаемое уравнение в виде

$$\left(A^\top - \frac{\mu}{2}A\right)B + B\left(A^\top - \frac{\mu}{2}A\right) = 0,$$

или, в силу инволютивности B ,

$$B\left(A^\top - \frac{\mu}{2}A\right)B = -\left(A^\top - \frac{\mu}{2}A\right).$$

При преобразовании подобия след матрицы не меняется, поэтому матрица $A^\top - \frac{\mu}{2}A$ имеет нулевой след, а из ее тёплицевости следует, что $\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)a_0 = 0$ и, так как $\mu \neq 2$, то $a_0 = 0$. Теперь можем записать выражения для матриц A и B в виде

$$A = U^c + \varphi U^\top, \quad B = b_0I_n + U + \varphi U^{c\top}. \quad (11)$$

Рассмотрим случай $\mu = 0$, что означает равенство $\sigma = i\kappa$, $\kappa = \pm 1$. Требуется решить уравнение

$$A^\top B + BA^\top = 0, \quad \text{где} \quad A = U^c + \varphi U^\top, \quad B = b_0I_n + U + \varphi U^{c\top}, \quad (12)$$

относительно b_0 и матрицы U . Напомним, что U и U^c – строго верхние треугольные тёплицевы матрицы с элементами первых строк $0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$ и $0, u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1$ соответственно.

Введем циркулянт C_0 и косой циркулянт S_0 с одинаковой первой строкой

$$\frac{1}{2}(0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}).$$

Используя эти матрицы, можем записать

$$U = C_0 + S_0, \quad U^c = C_0^\top - S_0^\top,$$

откуда

$$C_0 = \frac{1}{2}(U + U^{c\top}), \quad S_0 = \frac{1}{2}(U - U^{c\top}). \quad (13)$$

Теперь имеем

$$B = b_0I_n + U + \varphi U^{c\top} = b_0I_n + C_0 + S_0 + \varphi(C_0 - S_0) = b_0I_n + (1 + \varphi)C_0 + (1 - \varphi)S_0,$$

$$A = U^c + \varphi U^\top = C_0^\top - S_0^\top + \varphi C_0^\top + \varphi S_0^\top = (1 + \varphi)C_0^\top - (1 - \varphi)S_0^\top.$$

Определим циркулянт C и косой циркулянт S формулами

$$C = \frac{1}{2}b_0I_n + (1 + \varphi)C_0, \quad S = \frac{1}{2}b_0I_n + (1 - \varphi)S_0, \quad (14)$$

тогда

$$B = C + S, \quad A = C^\top - S^\top.$$

Подставляя выражения для A и B в решаемое уравнение, имеем

$$(C - S)(C + S) + (C + S)(C - S) = 0,$$

что приводится к виду

$$C^2 = S^2.$$

Матрица, стоящая в левой части, является циркулянтном, а матрица в правой части — косым циркулянтном, поэтому последнее равенство возможно лишь в виде системы

$$\begin{aligned} C^2 &= \xi I_n, \\ S^2 &= \xi I_n. \end{aligned}$$

Введем еще циркулянт C_1 и косой циркулянт S_1 :

$$C_1 = \frac{2}{1+\varphi} C, \quad S_1 = \frac{2}{1-\varphi} S. \quad (15)$$

Матрицы C_1 и S_1 удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} C_1^2 &= \frac{4\xi}{(1+\varphi)^2} I_n, \\ S_1^2 &= \frac{4\xi}{(1-\varphi)^2} I_n. \end{aligned} \quad (16)$$

Из формул (13)–(15) имеем

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{1+\varphi} C = \frac{2}{1+\varphi} \left[\frac{1}{2} b_0 I_n + (1+\varphi) C_0 \right] = \\ &= \frac{2}{1+\varphi} \left[\frac{1}{2} b_0 I_n + (1+\varphi) \frac{1}{2} (U + U^{c\top}) \right] = \frac{b_0}{1+\varphi} I_n + U + U^{c\top}, \\ S_1 &= \frac{2}{1-\varphi} S = \frac{2}{1-\varphi} \left[\frac{1}{2} b_0 I_n + (1-\varphi) S_0 \right] = \\ &= \frac{2}{1-\varphi} \left[\frac{1}{2} b_0 I_n + (1-\varphi) \frac{1}{2} (U - U^{c\top}) \right] = \frac{b_0}{1-\varphi} I_n + U - U^{c\top}. \end{aligned}$$

Поставляя выражения для C_1 и S_1 в систему (16), получаем

$$\begin{aligned} \frac{b_0^2}{(1+\varphi)^2} I_n + \frac{2b_0}{1+\varphi} U + \frac{2b_0}{1+\varphi} U^{c\top} + U^2 + (U^{c\top})^2 + UU^{c\top} + U^{c\top}U &= \frac{4\xi}{(1+\varphi)^2} I_n, \\ \frac{b_0^2}{(1-\varphi)^2} I_n + \frac{2b_0}{1-\varphi} U - \frac{2b_0}{1-\varphi} U^{c\top} + U^2 + (U^{c\top})^2 - UU^{c\top} - U^{c\top}U &= \frac{4\xi}{(1-\varphi)^2} I_n. \end{aligned}$$

Сложим уравнения этой системы:

$$\begin{aligned} \frac{2b_0^2(1+\varphi^2)}{(1+\varphi)^2(1-\varphi)^2} I_n + \frac{4b_0}{(1+\varphi)(1-\varphi)} U - \frac{4b_0\varphi}{(1+\varphi)(1-\varphi)} U^{c\top} + \\ + 2U^2 + 2(U^{c\top})^2 = \frac{8(1+\varphi^2)\xi}{(1+\varphi)^2(1-\varphi)^2} I_n. \end{aligned}$$

Так как U — трёхдиагональная строго верхняя треугольная матрица, то последнее соотношение эквивалентно системе

$$\begin{aligned} b_0^2 I_n &= 4\xi I_n, \\ \frac{2b_0}{(1+\varphi)(1-\varphi)} U + U^2 &= 0, \\ \frac{2b_0\varphi}{(1+\varphi)(1-\varphi)} U^{c\top} - (U^{c\top})^2 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Перепишем второе уравнение в виде

$$\left(\frac{2b_0}{(1+\varphi)(1-\varphi)} I_n + U \right) U = 0.$$

Предположим сначала, что $b_0 \neq 0$, тогда матрица $\frac{2b_0}{(1+\varphi)(1-\varphi)} I_n + U$ не вырождена и, значит, $U = 0$, что влечет за собой равенства $A = 0$ и $T = 0$, противоречащие условию задачи. Следовательно, $b_0 = 0$ и система (17) принимает вид

$$U^2 = (U^{c\top})^2 = 0. \quad (18)$$

Для исследования этих условий будем различать случаи четного и нечетного порядка n .

Если $n = 2r + 1$, то условие $U^2 = 0$ влечет за собой равенства $\{U\}_{1,2} = \{U\}_{1,3} = \dots = \{U\}_{1,r+1} = 0$, или $u_1 = u_2 = \dots = u_r = 0$, а из условия $(U^c)^2 = 0$ следуют соотношения $\{U^c\}_{1,2} = \{U^c\}_{1,3} = \dots = \{U^c\}_{1,r+1} = 0$, или $u_{n-1} = u_{n-2} = \dots = u_{r+1} = 0$, что в совокупности означает $U = 0$.

При $n = 2r$ условия (18) позволяют указать следующий вид матрицы U :

$$U = v \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

В этом случае $U = U^c$, матрицы A и B совпадают и являются скалярными кратными матрицы

$$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Так как матрицы A и B в уравнении (12) определены с точностью до скалярных множителей, то это уравнение можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} \varphi^2 I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & I_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \varphi^2 I_r \end{pmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{pmatrix} (\varphi^2 + 1) I_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & (\varphi^2 + 1) I_r \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем, что $\varphi = i\nu$, где $\nu = \pm 1$.

Теперь имеем

$$\begin{aligned} T &= \alpha[A - \sigma A^\top] = \alpha\left[\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} - i\kappa\begin{pmatrix} 0_{r,r} & \varphi I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}\right] = \\ &= \alpha\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 - i\kappa\varphi)I_r \\ (\varphi - i\kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 + \kappa\nu)I_r \\ i(\nu - \kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \\ H &= \beta B\mathcal{P}_n = \beta\begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ \varphi I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}\mathcal{P}_n = \beta\begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & i\nu\mathcal{P}_r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Этим обоснование главного результата завершено. Произведения полученных матриц T и H имеют вид

$$\begin{aligned} TH &= \alpha\beta\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 + \kappa\nu)I_r \\ i(\nu - \kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & i\nu\mathcal{P}_r \end{pmatrix} = \\ &= \alpha\beta\begin{pmatrix} 0_{r,r} & i(\nu + \kappa)\mathcal{P}_r \\ i(\nu - \kappa)\mathcal{P}_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = (i\kappa)\alpha\beta\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (\nu\kappa + 1)\mathcal{P}_r \\ (\nu\kappa - 1)\mathcal{P}_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \\ HT &= \alpha\beta\begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & i\nu\mathcal{P}_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (1 + \kappa\nu)I_r \\ i(\nu - \kappa)I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha\beta\begin{pmatrix} 0_{r,r} & (\nu\kappa + 1)\mathcal{P}_r \\ (\nu\kappa - 1)\mathcal{P}_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тем самым T и H σ -коммутируют при $\sigma = i\kappa$. След обоих произведений равен нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guterman A.E., Markova O.V., Mehrmann V.* Length realizability for pairs of quasi-commuting matrices // *Linear Algebra and Appl.* 2019. V. 568. P. 135–154.
2. *Kassel C.* Quantum Groups, *Grad. Texts in Math.* V. 155. New York: Springer-Verlag, 1995.
3. *Manin Yu.I.* Quantum Groups and Non-commutative Geometry. Montréal: CRM, 1988.
4. *Chriss N., Ginzburg V.* Representation Theory and Complex Geometry. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1997.
5. *Чугунов В.Н.* О некоторых множествах пар σ -коммутирующих ($\sigma \neq 0, \pm 1$) теплицевой и ганкелевой матриц // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXXII, Зап. научн. сем. ПОМИ. Т. 482, ПОМИ, СПб. 2019. С. 288–294.
6. *Гельфгат В.И.* Условия коммутирования тёплицевых матриц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 1. С. 11–14.
7. *Чугунов В.Н.* Нормальные и перестановочные тёплицевы и ганкелевы матрицы. М.: Наука, 2017.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977.5

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫМИ
УРАВНЕНИЯМИ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С УСЛОВИЯМИ
ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ¹⁾

© 2023 г. А. Ю. Чеботарев^{1,*}

¹ 690922 Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10, ДВФУ, Региональный научно-образовательный
математический центр ДЦМИ, Россия

*e-mail: chebotarev.ayu@dvfu.ru

Поступила в редакцию 06.03.2023 г.
Переработанный вариант 22.06.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Рассматривается класс задач оптимального управления для нелинейной параболично-эллиптической системы, моделирующей радиационный теплообмен с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Получены новые оценки решения начально-краевой задачи, на основе которых доказана разрешимость задач оптимального управления. Представлен вывод невырожденных условий оптимальности первого порядка. В качестве примеров рассмотрены задачи управления с финальным, граничным и распределенным наблюдениями. Библ. 23.

Ключевые слова: квазистационарные уравнения радиационного теплообмена, френелевские условия сопряжения, задачи оптимального управления, система оптимальности.

DOI: 10.31857/S0044466923110091, EDN: AFCYHT

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ и оптимизация процессов радиационного теплообмена представляют интерес с теоретической точки зрения и важны для инженерных и медицинских приложений (см. [1–4]). Краевые и обратные задачи, задачи оптимального управления для уравнений радиационного теплообмена в однородной среде рассмотрены в [5–10]. В указанных работах использовалось P_1 -приближение для уравнения переноса излучения. В [11–16] представлен анализ уравнений радиационного теплообмена без использования P_1 -приближения.

Как показано в [17], существенное влияние на распределение температурных полей имеют эффекты отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления. В [17–21] представлены построение модели сложного теплообмена для многокомпонентной области с учетом эффектов отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления и анализ краевых и обратных задач.

Задачи оптимального управления для стационарных уравнений сложного теплообмена в многокомпонентной области рассмотрены в [22]. Настоящая работа посвящена анализу задач оптимального управления для квазистационарной модели сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 формулируется начально-краевая задача, моделирующая сложный теплообмен в многокомпонентной области. Далее определяются пространства и операторы, ставится задача оптимального управления. В разд. 3 выводятся новые априорные оценки решения начально-краевой задачи, на основе которых доказывается разрешимость задачи оптимального управления. Анализ производной отображения “управление $\mapsto$ состояние” и вывод условий оптимальности представлены в разд. 4. В разд. 5 приводятся примеры задач управления с финальным, граничным и распределенным наблюдениями.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта 23-21-00087).

2. ПОСТАНОВКА И ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для моделирования нестационарного процесса радиационного теплообмена в многокомпонентной среде рассмотрим, следуя [21], ограниченную липшицеву область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, содержащую конечное число липшицевых подобластей Ω_j , $j = 1, 2, \dots, p$, замыкания которых не пересекаются и принадлежат Ω . При этом будем предполагать, что область, в которой изучается процесс, окружена непрозрачным для излучения материалом, имеющим заданную температуру на границе области.

Пусть $\Omega_0 = \Omega \setminus \left(\bigcup_{j=1}^p \bar{\Omega}_j\right)$ – внешняя подобласть, $\Gamma = \partial\Omega \subset \Gamma_0 = \partial\Omega_0$, $\Gamma_j = \partial\Omega_j \subset \Gamma_0$, $j = 1, \dots, p$; $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$.

Сложный теплообмен моделируется в каждой из областей Ω_j , $j = 0, 1, \dots, p$, уравнениями

$$r \frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = u, \quad -\alpha \Delta \varphi + \beta(\varphi - \theta^3 |\theta|) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (1)$$

Здесь θ – нормализованная температура, φ – нормализованная интенсивность теплового излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные кусочно-постоянные параметры r , a , b , α и β , описывающие свойства среды, определены в [17], [18], [20]. Функция u описывает тепловые источники.

На границе $\Gamma = \partial\Omega$ заданы краевые условия (через ∂_n обозначаем производную в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе)

$$a \partial_n \theta + c(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha \partial_n \varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad (2)$$

где θ_b – заданная граничная температура, c – коэффициент теплопередачи, $0 < \gamma \leq 1/2$ – параметр, зависящий от коэффициента излучения поверхности Γ .

В [17] выведены следующие условия сопряжения на внутренних границах $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, $j = 1, 2, \dots, p$ для температуры $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$ и интенсивности излучения $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$ (через ∂_n также обозначаем производную по внешней нормали к $\partial\Omega_j$):

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0 \partial_n \theta_0 = a_j \partial_n \theta_j, \quad (3)$$

$$n_0^2 \alpha_0 \partial_n \varphi_0 = n_j^2 \alpha_j \partial_n \varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0 \partial_n \varphi_0. \quad (4)$$

Здесь $a_j, \alpha_j, n_j = a, \alpha, n|_{\Omega_j}$, $h_j > 0$ – параметры, зависящие от коэффициентов отражения на внутренних границах. Отметим, что вывод условий (4) основан на френелевских условиях сопряжения на Γ_j для интенсивности излучения. При этом в рамках P_1 приближения для уравнения переноса излучения не учитывалось, что вблизи границы решение уравнения переноса имеет пограничный слой.

Также задаются начальные условия для температуры

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (5)$$

Далее через L^s , $1 \leq s \leq \infty$, обозначаем пространства Лебега s -интегрируемых функций и, соответственно, через $H^s = W_2^s$ – пространства Соболева; $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$,

$$W = \{w \in H, w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j), j = 0, 1, \dots, p\}.$$

Пространство H отождествляем с сопряженным пространством H' , $V \subset W \subset H = H' \subset W' \subset V'$. Будем использовать следующие обозначения: (f, v) – значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в H , если $f, v \in H$;

$$\|v\|^2 = (v, v); \quad (v, w)_j = (v, w)_{L^2(\Omega_j)}, \quad \|v\|_j^2 = (v, v)_j; \quad (v, w)_W = \sum_{j=0}^p (v, w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Через $L^p(0, T; X)$ (соответственно $C([0, T], X)$) обозначаем пространство строго измеримых функций класса L^p (соответственно непрерывных), определенных на $[0, T]$, со значениями в банаховом пространстве X .

Предполагаем, что исходные данные удовлетворяют условиям:

- (i) $c, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $c \geq c_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $c_0, \gamma_0 = \text{const}$;
- (ii) $\{a, b, r, \alpha, \beta, n\}|_{\Omega_j} = \{a_j, b_j, r_j, \alpha_j, \beta_j, n_j\} > 0$, $b = \sigma \beta n^2$, $\sigma = \text{Const} > 0$;
- (iii) $0 \leq \theta_0 \in L^\infty(\Omega)$; $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma)$; $u \in L^2(0, T; H)$.

Определим операторы $A_1 : V \rightarrow V'$, $A_2 : W \rightarrow W'$ и функции $f_b \in L^2(0, T; V')$, $g_b \in L^2(0, T; W')$, используя следующие равенства, справедливые для $\theta, \eta \in V$, $\varphi, w \in W$:

$$(A_1 \theta, \eta) = (a \nabla \theta, \nabla \eta) + \int_{\Gamma} c \theta \eta d\Gamma,$$

$$\frac{1}{\sigma} (A_2 \varphi, w) = \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 (\nabla \varphi, \nabla w)_j + n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \varphi w d\Gamma + n_0^2 \sum_{j=1}^p h_j \int_{\Gamma_j} (\varphi_0 - \varphi_j)(w_0 - w_j) d\Gamma,$$

$$(f_b, \eta) = \int_{\Gamma} c \theta_b \eta d\Gamma, \quad (g_b, w) = \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 w d\Gamma.$$

Здесь $\{\varphi_j, w_j\} = \{\varphi, w\}|_{\Omega_j}$.

Скалярное произведение в пространстве V и норму, эквивалентную стандартной норме пространства V , определим, используя оператор A_1 , $(u, v)_V = (A_1 u, v)$, $\|v\|_V^2 = (A_1 v, v)$.

Пусть $Y = \{y \in L^2(0, T; V), ry' \in L^2(0, T; V')\}$. Здесь $ry' = d(ry)/dt$. Справедливо следующее утверждение (см. [21]).

Лемма 1. Пусть $y \in Y$. Тогда функция y равна почти всюду некоторой непрерывной функции из $[0, T]$ в H и в смысле скалярных распределений на $(0, T)$ имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}(ry, y) = 2(ry', y). \quad (6)$$

Определение. Пара $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^2(0, T; W)$ называется слабым решением задачи (1)–(5), если

$$r\theta' + A_1 \theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + u, \quad A_2 \varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g_b, \quad t \in (0, T); \quad \theta(0) = \theta_0. \quad (7)$$

Здесь через $[s]^q = |s|^q \text{sign } s$, $q > 0$, $s \in \mathbb{R}$, обозначаем возрастающую степенную функцию.

В [21] доказано, что при выполнении условий (i)–(iii) существует единственное решение $\{\theta, \varphi\}$ задачи (7) такое, что $\theta \in L^2(0, T; V) \cap L^5(0, T; L^5(\Omega))$, $r\theta' \in L^2(0, T; V') + L^{5/4}(0, T; L^{5/4}(\Omega))$, $\varphi \in L^{5/4}(0, T; W)$. Ниже покажем, что если $u \in L^\infty(Q)$, то решение начально-краевой задачи также ограничено, и поэтому $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^2(0, T; W)$.

Для постановки задачи оптимального управления системой (7) рассмотрим пространство управлений $U = L^2(Q)$, множество допустимых управлений U_{ad} , пространство состояний $Z = Y \times L^2(0, T; W)$ и целевой функционал $J : Y \times L^2(0, T; W) \times U_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям:

- (j) $U_{ad} \subset U$ непустое, выпуклое и замкнутое множество; $\exists C_0 > 0 \forall v \in U_{ad} : 0 \leq v \leq C_0$;
- (jj) J слабо полунепрерывен снизу.

Определим оператор ограничений $F : Y \times L^2(0, T; W) \times U \rightarrow L^2(0, T; V') \times L^2(0, T; W') \times H$, полагая

$$F(\theta, \varphi, u) = \{r\theta' + A_1 \theta + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b - u, A_2 \varphi + b(\varphi - [\theta]^4) - g_b, \theta(0) - \theta_0\}.$$

Задача (ОС). Найти $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\} \in Y \times L^2(0, T; W) \times U_{ad}$ такие, что $F(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}) = 0$,

$$J(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}) = \inf \{J(\theta, \varphi, u) : u \in U_{ad}, F(\theta, \varphi, u) = 0\}. \quad (8)$$

Примером задачи оптимального управления, которая возникает при моделировании процессов лазерной абляции, является задача нахождения интенсивности тепловых источников, локализованных в Ω_1 при условиях

$$J = \int_{\Omega_2} (\theta|_{t=T} - \theta_d)^2 dx \rightarrow \inf, \quad F(\theta, \varphi, u) = 0, \quad u \in U_{ad},$$

$$U_{ad} = \{u \in U, 0 \leq u \leq P, \text{supp } u \subset \Omega_1\}.$$

Здесь θ_d — требуемое распределение температуры в подобласти Ω_2 в финальный момент времени, P — ограничение на мощность источников.

3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

3.1. Оценки решения задачи (7) в L^∞

Покажем, что если $u \in U_{ad}$, то решение начально-краевой задачи также ограничено, и поэтому $\{\theta, \varphi\} \in Y \times L^2(0, T; W)$.

Лемма 2. Пусть выполняются условия (i)–(iii), $u \in U_{ad}$. Тогда существует единственное решение $\{\theta, \varphi\}$ задачи (7) такое, что

$$0 \leq \theta \leq w(t), \quad 0 \leq \varphi \leq w^4(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (9)$$

Здесь $w(t) = M_0 + M_1 t$, $M_0 = \max \{\|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}\}$, $M_1 = C_0 / \min r$.

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (7) такого, что $\theta \in L^2(0, T; V) \cap L^5(0, T; L^5(\Omega))$, $r\theta' \in L^2(0, T; V') + L^{5/4}(0, T; L^{5/4}(\Omega))$, $\varphi \in L^{5/4}(0, T; W)$ доказаны в [21]. Получим оценки (9). Пусть $\tilde{\theta} = \theta - w$, $\eta_0 = \max\{\tilde{\theta}, 0\} \geq 0$, $\eta_0(0) = 0$, $\psi_0 = \max\{[\varphi]^{1/4} - w, 0\}$. Отметим, что $\eta_0 \in L^2(0, T; V)$, $\psi_0 \in L^2(0, T; W)$.

Перепишем первое уравнение в (7) в виде

$$r\tilde{\theta}' + A_1\theta - f_b + b([\tilde{\theta} + w]^4 - \varphi) = u - rM_1 \leq 0. \quad (10)$$

Умножим скалярно уравнение (10) на η_0 и учтем, что значение правой части неположительно, а также

$$(r\tilde{\theta}', \eta_0) = (r\eta_0', \eta_0) = \frac{d}{2dt}(r\eta_0, \eta_0), \quad (A_1\theta - f_b, \eta_0) = (a\nabla\eta_0, \nabla\eta_0) + \int_{\Gamma} c(\tilde{\theta} + w - \theta_b)\eta_0 d\Gamma \geq 0.$$

Тогда

$$\frac{d}{2dt}(r\eta_0, \eta_0) + (A_1\theta - f_b, \eta_0) + (b([\tilde{\theta} + w]^4 - \varphi), \eta_0) \leq 0. \quad (11)$$

Далее, умножим скалярно второе уравнение в (7) на ψ_0 и результат сложим с (11):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{2dt}(r\eta_0, \eta_0) + (A_1\theta - f_b, \eta_0) + (A_2\varphi - g_b, \psi_0) + \\ & + (b([\tilde{\theta} + w]^4 - \varphi), \max\{\tilde{\theta}, 0\} - \max\{[\varphi]^{1/4} - w, 0\}) \leq 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что последние три слагаемые в левой части (12) неотрицательны и поэтому,

$$\frac{d}{dt}(r\eta_0, \eta_0) \leq 0, \quad \eta_0|_{t=0} = 0.$$

Следовательно, $\eta_0 = 0$, $\tilde{\theta} \leq 0$, $\theta \leq w$, а также $(A_2\varphi - g_b, \psi_0) = 0$ п.в. на $(0, T)$. Отсюда следует, что $\psi_0 = 0$, т.е. $\varphi \leq w^4$. Аналогично устанавливается, что $\theta \geq 0$, $\varphi \geq 0$.

3.2. Разрешимость задачи оптимального управления

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i)–(iii), (j)–(jj). Тогда существует решение задачи (ОС).

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\theta_j, \varphi_j, u_j\} \in Y \times L^2(0, T; W) \times U_{ad}$,

$$\begin{aligned} J\theta_j, \varphi_j, u_j &\rightarrow \hat{J} = \inf \{J(\theta, \varphi, u) : u \in U_{ad}, F(\theta, \varphi, u) = 0\}, \\ r\theta_j + A_1\theta_j + b([\theta_j]^4 - \varphi_j) &= f_b + u_j, \quad A_2\varphi_j + b(\varphi_j - [\theta_j]^4) = g_b, \quad t \in (0, T); \quad \theta_j(0) = \theta_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Из условия (j) следует, что последовательность $\{u_j\}$ ограничена в $L^\infty(Q)$, и поэтому в силу оценок решения задачи (13), полученных в [21], заключаем, что последовательность $\{\theta_j\}$ ограничена в $L^2(0, T; V)$, $\{\varphi_j\}$ ограничена в $L^2(0, T; W)$ и при этом

$$\int_0^T \|\theta_j(t+h) - \theta_j(t)\|^2 dt \leq Ch,$$

где $C > 0$ не зависит от h, j . Переходя при необходимости к подпоследовательностям, получаем сходимости

$$u_j \rightarrow \hat{u} \text{ слабо в } L^2(Q), \quad \theta_j \rightarrow \hat{\theta} \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \quad (14)$$

$$\varphi_j \rightarrow \hat{\varphi} \text{ слабо в } L^2(0, T; W), \quad \varphi_j|_{\Sigma_k} \rightarrow \hat{\varphi}|_{\Sigma_k}, \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad \Sigma_k = \Gamma_k \times (0, T). \quad (15)$$

Результатов о сходимости (14), (15) достаточно для предельного перехода в (13), причем переход в нелинейных членах гарантируется оценкой

$$\|\theta_j - \hat{\theta}\|_{L^4(Q)}^4 \leq \|\theta_j - \hat{\theta}\|_{L^2(Q)}^{2/3} \|\theta_j - \hat{\theta}\|_{L^5(Q)}^{10/3}.$$

Следовательно, $F(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}) = 0$. В силу условий (j), (jj) $\hat{u} \in U_{ad}$ и

$$\hat{J} \leq J(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}) \leq \liminf J(\theta_j, \varphi_j, u_j) = \hat{J}.$$

Поэтому $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ будет оптимальной тройкой – решением задачи (ОС).

4. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Вывод системы оптимальности задачи (ОС) с применением классического принципа Лагранжа затруднителен, так как оператор ограничений, действующий на функции из пространства $Y \times L^2(0, T; W) \times U$, не определен в окрестности оптимальной пары за счет нелинейности $[\theta]^4$. Поэтому получение условий оптимальности основано на оценках производной отображения “управление $\mapsto$ состояние”.

Пусть $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ – оптимальная тройка. Выберем произвольный элемент $u \in U_{ad}$ и для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ положим

$$u_\varepsilon = \hat{u} + \varepsilon(u - \hat{u}), \quad g_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\theta_\varepsilon - \hat{\theta}), \quad \eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\varphi_\varepsilon - \hat{\varphi}), \quad z_\varepsilon = \frac{\theta_\varepsilon^4 - \hat{\theta}^4}{\theta_\varepsilon - \hat{\theta}} = (\theta_\varepsilon^2 + \hat{\theta}^2)(\theta_\varepsilon + \hat{\theta}).$$

Здесь $\{\theta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon\}$ – решение задачи (7), соответствующее управлению $u_\varepsilon \in U_{ad}$. Отметим сразу, что в силу леммы 2 справедливы оценки

$$0 \leq \hat{\theta}, \theta_\varepsilon \leq M_2, \quad 0 \leq \hat{\varphi}, \varphi_\varepsilon \leq M_2^4, \quad 0 \leq z_\varepsilon \leq 4M_2^3, \quad M_2 = M_0 + M_1 T. \quad (16)$$

Отметим также, что справедливы следующие равенства:

$$r g'_\varepsilon + A_1 g_\varepsilon + b(z_\varepsilon g_\varepsilon - \eta_\varepsilon) = u - \hat{u}, \quad A_2 \eta_\varepsilon + b(\eta_\varepsilon - z_\varepsilon g_\varepsilon) = 0, \quad t \in (0, T); \quad g_\varepsilon(0) = 0. \quad (17)$$

Лемма 3. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ справедлива оценка

$$\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; H)} + \|g_\varepsilon\|_{L^2(0, T; V)} + \|g'_\varepsilon\|_{L^2(0, T; W')} + \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; W)} \leq C, \quad (18)$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от ε .

Доказательство. Заметим, что билинейная форма $\{\varphi, \psi\} \rightarrow (A_2\varphi + b\varphi, \psi)$ является непрерывной, симметричной и положительно определенной в пространстве W . Поэтому из леммы Лакса—Мильграма следует, что для каждого $\eta \in W'$ существует единственное решение $\varphi \in W$ уравнения $A_2\varphi + b\varphi = \eta$, и оператор $(A_2 + bI)^{-1} : W' \rightarrow W$ непрерывен. Поэтому из второго уравнения в (17) следует, что $\eta_\varepsilon = (A_2 + bI)^{-1}(bz_\varepsilon g_\varepsilon)$. Тогда, учитывая (16), получаем

$$\|\eta_\varepsilon\|_{W'} \leq C\|bz_\varepsilon g_\varepsilon\|_{W'} \leq C\|g_\varepsilon\|. \quad (19)$$

Здесь и далее через $C > 0$ обозначаем различные постоянные, не зависящие от ε .

Умножим скалярно первое уравнение в (17) на g_ε . Тогда

$$\frac{d}{2dt}(rg_\varepsilon, g_\varepsilon) + \|g_\varepsilon\|_V^2 + (bz_\varepsilon g_\varepsilon, g_\varepsilon) = (u - \hat{u} + b\eta_\varepsilon, g_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\|u - \hat{u}\|^2 + C\|g_\varepsilon\|^2.$$

Интегрируя полученное неравенство по t и применяя неравенство Гронуолла, получаем с учетом (19) оценки

$$\|g_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C, \quad \|g_\varepsilon\|_{L^2(0,T;V)} \leq C, \quad \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;W')} \leq C.$$

Тогда из первого уравнения в (17) следует, что $\|rg'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;W')} \leq C$. Оценим $\|g'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;W')}$:

$$\|g'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;W')}^2 = \int_0^T \sup_{\|v\|_{W'}=1} \left(rg'_\varepsilon, \frac{1}{r}v \right)^2 dt \leq C \int_0^T \|rg'_\varepsilon\|_{L^2(0,T;W')}^2 dt \leq C.$$

Полученные неравенства дают оценку (18).

Сформулируем условия на целевой функционал, связанные с его дифференцируемостью, достаточные для вывода системы оптимальности:

(ijj) $\forall u \in U_{ad}$ отображение $\{\theta, \varphi\} \rightarrow J(\theta, \varphi, u)$ дифференцируемо по Фреше в точке $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, u\}$ и при этом отображения $U_{ad} \ni u \rightarrow J'_\theta(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, u) \in Y'$, $U_{ad} \ni u \rightarrow J'_\varphi(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, u) \in L^2(0, T; W')$ непрерывны в точке $\hat{u}$; существует дифференциал Гато $\langle J'_u(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}), u - \hat{u} \rangle$ отображения $U_{ad} \ni u \rightarrow J(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, u)$ в точке $\hat{u}$ в направлении $u - \hat{u}$.

Лемма 4. Пусть выполняются условия (i)–(iii), (j)–(ijj). Если $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ – решение задачи (OC), то для каждого $u \in U_{ad}$ существует решение $\{g, \eta\} \in Y \times L^2(0, T; W)$ задачи

$$rg' + A_1g + b(4\hat{\theta}^3g - \eta) = u - \hat{u}, \quad A_2\eta + b(\eta - 4\hat{\theta}^3g) = 0, \quad t \in (0, T); \quad g(0) = 0 \quad (20)$$

такое, что

$$\langle J'_\theta(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}), g \rangle + \langle J'_\varphi(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}), \eta \rangle + \langle J'_u(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}), u - \hat{u} \rangle \geq 0. \quad (21)$$

Доказательство. Выполним предельный переход в (17) при $\varepsilon \rightarrow +0$. Из оценки (18) следует, что существует пара $\{g, \eta\} \in Y \times L^2(0, T; W)$ такая, что (переходя при необходимости к подпоследовательностям)

$$g_\varepsilon \rightarrow g \text{ слабо в } L^2(0, T; V), \text{ сильно в } L^2(0, T; H); \quad \theta_\varepsilon \rightarrow \hat{\theta} \text{ сильно в } L^2(0, T; V); \quad (22)$$

$$\eta_\varepsilon \rightarrow \eta \text{ слабо в } L^2(0, T; W), \quad \eta_\varepsilon|_{\Sigma_k} \rightarrow \eta|_{\Sigma_k}, \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad \Sigma_k = \Gamma_k \times (0, T). \quad (23)$$

Сходимости (22), (23) позволяют сделать предельный переход в (17), причем переход в нелинейных членах следует из оценки, справедливой для любой функции $v \in L^2(0, T; V)$, а именно,

$$\int_0^T (b((\theta_\varepsilon^2 + \hat{\theta}^2)(\theta_\varepsilon + \hat{\theta}) - 4\hat{\theta}^3g), v) dt \leq C(\|g_\varepsilon - g\|_{L^2(0,T;H)} + \|\theta_\varepsilon - \hat{\theta}\|_{L^2(0,T;V)})\|v\|_{L^2(0,T;V)}.$$

Следовательно, пара $\{g, \eta\}$ — решение задачи (20). Условий (iii) на целевой функционал достаточно для предельного перехода в неравенстве

$$\frac{1}{\varepsilon} (J(\theta_\varepsilon, \varphi_\varepsilon, u_\varepsilon) - J(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u})) \geq 0.$$

В результате получаем неравенство (21).

Для вывода сопряженной системы конкретизируем структуру производных целевого функционала в точке минимума $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$. Будем предполагать, что

$$\begin{aligned} \langle J'_\theta(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}), z \rangle &= (q_T, z(T)) + \int_0^T (q(t), z(t)) dt \quad \forall z \in Y; \\ \langle J'_\varphi(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}), z \rangle &= \int_0^T (\psi(t), z(t)) dt \quad \forall z \in L^2(0, T; W); \\ \langle J'_u(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}), v \rangle &= \int_0^T (\xi(t), v(t)) dt \quad \forall v \in U_{ad} - \hat{u}. \end{aligned} \quad (jv)$$

Здесь $q_T \in H$, $q \in L^2(0, T; V')$, $\psi \in L^2(0, T; W')$, $\xi \in U$.

Лемма 5. Пусть выполняются условия (i)–(iii), (j)–(jv) и $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\}$ — оптимальная тройка. Тогда существует единственное решение $\{p_1, p_2\} \in Y \times L^2(0, T; W)$ сопряженной системы

$$-rp_1 + A_1 p_1 + 4b\hat{\theta}_1^3(p_1 - p_2) = -q, \quad A_2 p_2 + b(p_2 - p_1) = -\psi, \quad t \in (0, T); \quad p_1(T) = -\frac{1}{r} q_T. \quad (24)$$

Доказательство. Сделаем замену

$$\tilde{p}_{1,2}(t) = p_{1,2}(T - t), \quad \theta_1(t) = \hat{\theta}(T - t), \quad q_1(t) = q(T - t), \quad \psi_1(t) = \psi(T - t).$$

Тогда получаем задачу

$$r\tilde{p}_1 + A_1 \tilde{p}_1 + 4b\theta_1^3(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2) = -q_1, \quad A_2 \tilde{p}_2 + b(\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1) = -\psi_1, \quad t \in (0, T); \quad \tilde{p}_1(0) = -\frac{1}{r} q_T. \quad (25)$$

Рассмотрим семейство операторов $\mathcal{A}(t) : V \rightarrow V'$ такое, что

$$\mathcal{A}(t)z = A_1 z + 4b\theta_1^3(t)(z - (A_2 + bI)^{-1}(bz)).$$

Выразив $\tilde{p}_2$ из второго уравнения в (25), получаем линейную задачу Коши для уравнения с операторным коэффициентом

$$r\tilde{p}_1 + \mathcal{A}\tilde{p}_1 = \eta_1, \quad t \in (0, T); \quad \tilde{p}_1(0) = -\frac{1}{r} q_T. \quad (26)$$

Здесь $\eta_1 = -q_1 - 4b\theta_1^3(A_2 + bI)^{-1}\psi_1 \in L^2(0, T; V')$.

Установим нужные свойства $\mathcal{A}$. Заметим сначала, что если $z_1 = (A_2 + bI)^{-1}z$, то $(A_2 z_1, z_1) + (b z_1, z_1) = (b z_1, z)$. Поэтому $\|z_1\| \leq \sqrt{\max b / \min b} \|z\|$. Следовательно, учитывая ограниченность θ_1 , получаем

$$(\mathcal{A}z, z) = \|z\|_V^2 + 4(b\theta_1^3 z, z) - 4(b\theta_1^3(A_2 + bI)^{-1}(bz), z) \geq \|z\|_V^2 - 4 \max(b\theta_1^3) \sqrt{\frac{\max b}{\min b}} \|z\|^2.$$

Кроме того,

$$(\mathcal{A}y, z) \leq K \|y\|_V \|z\|_V \quad \forall y, z \in V,$$

где постоянная $K > 0$ не зависит от $t \in (0, T)$, y, z . Следовательно (см. [23], с. 426), решение задачи (26) существует и единственно.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (i)–(iii), (j)–(jv), и $\{\hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{u}\}$ – оптимальная тройка. Тогда существует сопряженное состояние $\{p_1, p_2\} \in Y \times L^2(0, T; W)$, удовлетворяющее (24), и при этом

$$\int_0^T (\xi(t) - p_1(t), u(t) - \hat{u}(t)) dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (27)$$

Доказательство. Умножим скалярно первое уравнение в (20) на p_1 , первое уравнение в (24) на g , вычтем одно из другого и проинтегрируем по t на $(0, T)$. Тогда

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} (rg, p_1) + 4(b\hat{\theta}^3 g, p_2) - (b\eta, p_1) \right) dt = \int_0^T ((p_1, u - \hat{u}) + (q, g)) dt. \quad (28)$$

Аналогично, умножая скалярно второе уравнение в (20) на p_2 , второе уравнение в (24) на η , вычитая и интегрируя по t , получаем

$$-\int_0^T (4(b\hat{\theta}^3 g, p_2) - (b\eta, p_1)) dt = \int_0^T (\psi, \eta) dt.$$

Поэтому, учитывая условия $g(0) = 0$, $rp_1(T) = -q_T$, выводим из (28)

$$(q_T, g(T)) + \int_0^T (\psi, \eta) dt = -\int_0^T ((p_1, u - \hat{u}) + (q, g)) dt.$$

Из неравенства (21), в силу условия (jv) и последнего равенства, получаем (27):

$$(q_T, g(T)) + \int_0^T ((q, g) + (\psi, \eta) + (\xi, u - \hat{u})) dt = \int_0^T (\xi - p_1, u - \hat{u}) dt \geq 0.$$

Таким образом, если $\{\hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{u}\}$ – решение задачи (ОС), и $\{p_1, p_2\}$ – соответствующее сопряженное состояние, то они являются решением следующей системы оптимальности:

$$r\hat{\theta}' + A_1\hat{\theta} + b([\hat{\theta}]^4 - \hat{\phi}) = f_b + \hat{u}, \quad A_2\hat{\phi} + b(\hat{\phi} - [\hat{\theta}]^4) = g_b, \quad t \in (0, T); \quad \hat{\theta}(0) = \theta_0.$$

$$-rp_1' + A_1p_1 + 4b\hat{\theta}^3(p_1 - p_2) = -q, \quad A_2p_2 + b(p_2 - p_1) = -\psi, \quad t \in (0, T); \quad p_1(T) = -\frac{1}{r}q_T.$$

$$\int_0^T (\xi - p_1, u - \hat{u}) dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

5. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Финальное наблюдение

Рассмотрим задачу

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \|\theta|_{t=T} - \theta_d\|^2 \rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad}, \quad (29)$$

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + u, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g_b, \quad t \in (0, T); \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (30)$$

$$U_{ad} = \{u \in U: f_1 \leq u \leq f_2\}. \quad (31)$$

Здесь $f_1, f_2 \in L^\infty(Q)$ – неотрицательные функции, $\theta_d \in H$.

Следствием теорем 1, 2 является следующий результат.

Теорема 3. Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует $\{\hat{\theta}, \hat{\phi}, \hat{u}\} \in Y \times L^2(0, T; W) \times U_{ad}$ – решение задачи (29)–(31), а также сопряженное состояние $\{p_1, p_2\} \in Y \times L^2(0, T; W)$ такое, что

$$-rp_1' + A_1p_1 + 4b\hat{\theta}^3(p_1 - p_2) = 0, \quad A_2p_2 + b(p_2 - p_1) = 0, \quad p_1(T) = -\frac{1}{r}(\hat{\theta}(T) - \theta_d) \quad (32)$$

и при этом

$$\int_0^T (p_1(t), u(t) - \hat{u}(t)) dt \leq 0 \quad \forall u \in U_{ad}. \quad (33)$$

Заметим, что из (33) стандартным образом следует слабый принцип bang-bang:

$$\hat{u} = \begin{cases} f_1, & \text{если } p_1 < 0, \\ f_2, & \text{если } p_1 > 0. \end{cases}$$

5.2. Распределенное и граничное наблюдение

Рассмотрим задачу

$$J(\theta, \varphi, u) = \frac{1}{2} \int_0^T (\|\theta\|^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \lambda \|u - u_d\|^2) dt \rightarrow \inf, \quad u \in U_{ad}, \quad (34)$$

$$r\theta' + A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) = f_b + u, \quad A_2\varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g_b, \quad t \in (0, T); \quad \theta(0) = \theta_0, \quad (35)$$

$$U_{ad} = \{u \in U: 0 \leq u \leq u_{\max}\}. \quad (36)$$

Здесь $\lambda \geq 0$, $u_{\max} > 0$, $u_d \in L^2(Q)$.

Из теорем 1, 2 следуют разрешимость задачи (34)–(36) и условия оптимальности первого порядка.

Теорема 4. Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда существует $\{\hat{\theta}, \hat{\varphi}, \hat{u}\} \in Y \times L^2(0, T; W) \times U_{ad}$ – решение задачи (34)–(36), а также сопряженное состояние $\{p_1, p_2\} \in Y \times L^2(0, T; W)$ такое, что

$$-rp_1' + A_1p_1 + 4b\hat{\theta}^3(p_1 - p_2) = -\hat{\theta}, \quad A_2p_2 + b(p_2 - p_1) = -\psi, \quad p_1(T) = 0 \quad (37)$$

и при этом

$$\int_0^T (\lambda(\hat{u} - u_d) - p_1, u - \hat{u}) dt \geq 0 \quad \forall u \in U_{ad}.$$

Здесь функционал ψ такой, что $(\psi, z) = \int_{\Gamma} \hat{\varphi} z d\Gamma \quad \forall z \in W$.

Отметим, что неоднородность в правой части второго уравнения (37) означает выполнение (в слабом смысле) следующего краевого условия на Γ :

$$\alpha \partial_n p_2 + \gamma p_2 = -\frac{1}{\sigma n_0^2} \hat{\varphi}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pinnau R. Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1 -system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
2. Tse O., Pinnau R. Optimal control of a simplified natural convection-radiation model // Commun. Math. Sci. 2013. V. 11. № 3. P. 679–707.
3. Ковтаныук А.Е., Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю. Использование диффузионного приближения для моделирования радиационных и тепловых процессов в кожном покрове // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 123. № 2. С. 194–199.
4. Kovtanyuk A., Chebotarev A., Astrakhantseva A. Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2021. V. 29. № 3. P. 467–476.
5. Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Theoretical analysis of an optimal control problem of conductive-convective-radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 412. № 1. P. 520–528.
6. Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.

7. *Chebotaiev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Grenkin G.V., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model // *Appl. Math. Comput.* 2016. V. 289. P. 371–380.
8. *Grenkin G.V., Chebotaiev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Boundary optimal control problem of complex heat transfer model // *J. Math. Anal. Appl.* 2016. V. 433. № 2. P. 1243–1260.
9. *Chebotaiev A.Yu., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // *J. Math. Anal. Appl.* 2018. V. 460. № 2. P. 737–744.
10. *Chebotaiev A.Yu., Pinnau R.* An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // *J. Math. Anal. Appl.* 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.
11. *Amosov A.* Unique Solvability of a Nonstationary Problem of Radiative - Conductive Heat Exchange in a System of Semitransparent Bodies // *Russian J. of Math. Phys.* 2016. V. 23. 3. P. 309–334.
12. *Amosov A.A.* Unique Solvability of Stationary Radiative – Conductive Heat Transfer Problem in a System of Semitransparent Bodies // *J. of Math. Sc.* 2017. V. 224. № 5. P. 618–646.
13. *Amosov A.A.* Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation // *J. Math. Sci.* 2018. V. 233. № 6. P. 777–806.
14. *Amosov A.* Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system consisting of an absolutely black body and several semitransparent bodies // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2021. V. 44. № 13. P. 10703 –10733.
15. *Amosov A.A.* Unique solvability of the stationary complex heat transfer problem in a system of gray bodies with semitransparent inclusions // *J. Math. Sci. (United States)*. 2021. V. 255. Iss. 4. P. 353–388.
16. *Amosov A.* Nonstationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a Semitransparent Body with Absolutely Black Inclusions // *Mathematics*. 2021. V. 9. № 13. P. 1471.
17. *Chebotaiev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions// *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat.* 2018. V. 57. P. 290–298.
18. *Чеботарев А.Ю.* Неоднородная краевая задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // *Дифференц. ур-ния*. 2020. Т. 56. № 12. С. 1660–1665.
19. *Чеботарев А.Ю.* Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 2. С. 303–311.
20. *Chebotaiev A.Y., Kovtanyuk A.E.* Quasi-static diffusion model of complex heat transfer with reflection and refraction conditions // *J. Math. Anal. Appl.* 2022. V. 507. P. 125745.
21. *Чеботарев А.Ю.* Неоднородная задача для квазистационарных уравнений сложного теплообмена с условиями отражения и преломления // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 63. № 3. С. 118–126.
22. *Чеботарев А.Ю.* Задачи оптимального управления для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2022. Т. 62. № 3. С. 381–390.
23. *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis and its applications. II/A: Linear monotone operators. Springer, 1990.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОПТИМАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

© 2023 г. А. Ф. Матрюков*

630090 Новосибирск, пр-т Акад. Лаврентьева, 6,
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Россия

*e-mail: maf@omzg.sscc.ru

Поступила в редакцию 16.12.2022 г.
Переработанный вариант 13.06.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Рассматриваются разностные схемы с оптимальными параметрами для решения уравнений Максвелла. Используя преобразования Лагерра, определяются численные значения оптимальных параметров и строятся дифференциально-разностные уравнения. Дифференциально-разностные уравнения решаются конечно-разностным методом с итерациями по малым оптимальным параметрам. Рассмотрены оптимальные разностные схемы 2-го порядка для одномерных и двумерных уравнений Максвелла. Приведены оптимальные параметры разностных схем. Показано, что использование оптимальных разностных схем ведет к повышению точности решения уравнений. Библ. 18. Фиг. 2. Табл. 1.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, конечно-разностный метод, оптимальный, точность, электромагнитные волны, метод Лагерра.

DOI: 10.31857/S0044466923110224, EDN: KJPKQF

1. ВВЕДЕНИЕ

При численном решении дифференциальных уравнений наиболее широко используются конечно-разностный и спектральные методы (см. [1, 2]). Конечно-разностный метод прост в программной реализации и экономичен (см. [3, 4]). Спектральный метод более удобен в задачах частотного зондирования Земли (см. [5]), дефектоскопии и др.

Важным показателем качества численного алгоритма является точность получаемого решения уравнений (см. [6]). Повышению точности решений посвящено большое число работ (см. [7]–[9]). Существуют различные способы повышения точности решения, например, построение компактных схем (см. [8]), использование разностных схем более высокого порядка аппроксимации (см. [9]) или построение разностных схем, минимизирующих погрешность дисперсионного соотношения (dispersion-relation-preserving) (см. [10]). К последнему типу схем относятся так называемые оптимальные разностные схемы.

В работе *оптимальными* называются разностные схемы, параметры которых определяются минимизацией некой функции, а сами эти параметры называются *оптимальными*.

В [11] была предложена оптимальная разностная схема для решения волнового уравнения в спектральной области. В разностное уравнение 2-го порядка аппроксимации для заданной гармоники Фурье вводятся три дополнительных параметра. Значения этих параметров определяются минимизацией погрешности численного решения на точном аналитическом решении. Алгоритм рассматривается при равных пространственных шагах разностной сетки. Обобщение для неравных шагов было предложено в [12] введением средних значений в пространственные производные. В этом случае оптимизация проводилась по четырем параметрам.

В [13, 14] такая методика построения оптимальных разностных схем была применена при решении уравнений с использованием спектрального преобразования Лагерра.

В ряде задач спектральный метод, основанный на преобразовании Лагерра, по эффективности в несколько раз превосходит метод Фурье. Эффективность обусловлена видом уравнений для гармоник Лагерра (см. [13–15]). В частности, система уравнений для гармоник Лагерра всегда содержит только действительные переменные.

В [13, 14] была рассмотрена оптимальная разностная схема 2-го порядка аппроксимации для решения уравнений Максвелла и для решения волнового уравнения. В разностной схеме для гармоник использовались оптимальные параметры. Решение уравнений получалось обратным преобразованием Лагерра.

Такая методика получения оптимальных параметров легко распространяется на разностные схемы 4-го порядка аппроксимации (см. [15]).

В настоящей работе рассматривается численное решение уравнений Максвелла, учитывающих зависимость от времени электромагнитных параметров среды, т.е. зависимость от времени диэлектрической проницаемости и проводимости среды. Для решения применяется конечно-разностная схема 2-го порядка аппроксимации, содержащая оптимальные параметры.

В разностное уравнение 2-го порядка аппроксимации для гармоник Лагерра вводятся дополнительные параметры. Оптимальные значения этих параметров определяются минимизацией погрешности численного решения на точном аналитическом решении уравнений для гармоник.

Применяя обратное преобразование Лагерра к уравнениям для гармоник, получают дифференциально-разностные уравнения. Эти уравнения являются разностными по пространству и дифференциальными по времени. Эти уравнения решаются с использованием конечно-разностных схем 2-го порядка аппроксимации и по времени, и по пространству.

Предлагаемые конечно-разностные оптимальные схемы дают более точное решение в сравнении с неоптимальными конечно-разностными схемами 2-го порядка аппроксимации.

В работе приведены параметры оптимальных разностных схем и результаты тестовых расчетов с использованием этих схем.

Приводятся результаты для одномерных и двумерных уравнений Максвелла.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Система уравнений Максвелла в 2-мерном случае состоит из двух независимых систем уравнений (см. [1, 16]). Будем рассматривать одну (ТЕ-мода) из них:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y + \varepsilon_s m + J_y, & \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, & \frac{\partial m}{\partial t} &= -\left(\frac{m}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D^2} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right) \right) E_y, \end{aligned} \quad (1)$$

в прямоугольной пространственной области при нулевых начальных и граничных условиях

$$E_y(t=0, x, z) = 0, \quad H_x(t=0, x, z) = 0, \quad H_z(t=0, x, z) = 0.$$

Здесь $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$ — напряженность магнитного поля, $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ — ток внешнего источника, являющийся функцией времени. В эту систему уравнений входит только одна компонента вектора тока J_y , две другие компоненты тока J_x, J_z входят в другую независимую систему уравнений.

В этих уравнениях учитывается зависимость диэлектрической проницаемости и проводимости среды от времени введением дополнительного уравнения для переменной m . Это уравнение содержит времена релаксации электромагнитных параметров.

Здесь введены эффективные значения диэлектрической проницаемости ε и проводимости σ :

$$\varepsilon = \varepsilon_s \frac{\tau_E}{\tau_D} + \sigma_s \tau_\sigma, \quad \sigma = \sigma_s + \varepsilon_s \frac{1}{\tau_D} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right),$$

где ε_s — статическое значение диэлектрической проницаемости, τ_E — время релаксации напряженности электрического поля, τ_D — время релаксации электрической индукции, σ_s — статическое значение проводимости, τ_σ — время релаксации проводимости (см. [1, 2]).

В частном случае малых τ_E , τ_D , τ_σ и $\tau_E/\tau_D \approx 1$ эта система уравнений принимает стандартный вид уравнений Максвелла (см. [16]).

Проведем преобразование Лагерра (см. [17]) по времени уравнений (1):

$$E_n = \int_0^\infty E(t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_n^\alpha(ht) d(ht), \quad (2)$$

$$E(t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{(n+\alpha)!} E_n l_n^\alpha(ht), \quad (3)$$

где $l_n^\alpha(ht)$ — ортогональная функция Лагерра (см. [17]) степени n , α — целая константа, h — параметр преобразования Лагерра, который далее положим равным единице: $h = 1$.

В результате получим уравнения для n -й гармоники Лагерра E_{ny} , H_{nx} , H_{nz} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{nx}}{\partial z} - \frac{\partial H_{nz}}{\partial x} &= \epsilon \left(\frac{1}{2} E_n + \sum_{k=0}^{n-1} E_k \right) + \sigma E_n + \epsilon_s m_n + J_{ny}, \quad \frac{\partial E_n}{\partial z} = \mu \left(\frac{1}{2} H_{nx} + \sum_{k=0}^{n-1} H_{kx} \right), \\ -\frac{\partial E_n}{\partial x} &= \mu \left(\frac{1}{2} H_{nz} + \sum_{k=0}^{n-1} H_{kz} \right), \quad m_n = -\frac{1}{(h/2 + 1/\tau_D)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k + \frac{1}{\tau_D^2} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right) E_n \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь опущен индекс y у гармоники Лагерра электрического поля E_{ky} .

Рассмотрим разностную аппроксимацию этих уравнений.

3. АППРОКСИМАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

Определим электрическое поле E_{ny} и параметры ϵ , σ , μ , J_{ny} в целых i, j узлах разностной сетки. Магнитное поле H_{nx} , H_{nz} определим в промежуточных узлах $i + 1/2$, $j + 1/2$ разностной сетки. Первые производные заменим конечными разностями второго порядка аппроксимации (см. [3, 4]).

Запишем уравнения (4) в разностном виде, используя средние значения гармоник Лагерра:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{H}_{x,i+1/2,j} - \bar{H}_{x,i-1/2,j}}{\Delta z} - \frac{\bar{H}_{z,i,j+1/2} - \bar{H}_{z,i,j-1/2}}{\Delta x} &= \left(\epsilon \left(\frac{1}{2} \langle E_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \langle E_k \rangle \right) + \sigma \langle E_n \rangle + \epsilon_s m_n + J_{ny} \right)_{i,j}, \\ \frac{E_{ni+1,j} - E_{ni,j}}{\Delta z} &= \mu \left(\frac{1}{2} H_{nx} + \sum_{k=0}^{n-1} H_{kx} \right)_{i+1/2,j}, \quad -\frac{E_{ni,j+1} - E_{ni,j}}{\Delta x} = \mu \left(\frac{1}{2} H_{nz} + \sum_{k=0}^{n-1} H_{kz} \right)_{i,j+1/2}, \\ m_n &= -\frac{1}{(h/2 + 1/\tau_D)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k + \frac{1}{\tau_D^2} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right) \langle E_n \rangle \right). \end{aligned} \quad (5)$$

В первом уравнении у компонент магнитного поля опущен номер гармоники. В правой части этого уравнения гармоники поля E_k заменены средними по пяти точкам (см. [13–15]):

$$\langle E_k \rangle = c E_{k,i,j} + d (E_{k,i,j+1} + E_{k,i,j-1}) + g (E_{k,i+1,j} + E_{k,i-1,j}), \quad (6)$$

где c , d , g — весовые множители.

В [13] рассмотрен случай, когда накладывалось ограничение на коэффициенты

$$c + 2d + 2g = 1. \quad (7)$$

После замены $c = (1 - 2d - 2g)$ в (6) остаются два параметра.

В настоящей работе на весовые множители не накладывается никаких ограничений. В этих двух случаях параметры c , d , g отличаются незначительно.

В разностных производных по z использованы средние значения (см. [12]) для поля вида

$$\begin{aligned} \bar{H}_{x,i+1/2,j} &= \frac{1-\beta}{2} H_{x,i+1/2,j+1} + \beta H_{x,i+1/2,j} + \frac{1-\beta}{2} H_{x,i+1/2,j-1}, \\ \bar{H}_{x,i-1/2,j} &= \frac{1-\beta}{2} H_{x,i-1/2,j+1} + \beta H_{x,i-1/2,j} + \frac{1-\beta}{2} H_{x,i-1/2,j-1}, \end{aligned} \quad (8)$$

и в разностных производных по x использованы средние значения вида

$$\begin{aligned}\bar{H}_{z,i,j+1/2} &= \frac{1-\alpha}{2} H_{z,i+1,j+1/2} + \alpha H_{z,i,j+1/2} + \frac{1-\alpha}{2} H_{z,i-1,j+1/2}, \\ \bar{H}_{z,i,j-1/2} &= \frac{1-\alpha}{2} H_{z,i+1,j-1/2} + \alpha H_{z,i,j-1/2} + \frac{1-\alpha}{2} H_{z,i-1,j-1/2}.\end{aligned}\quad (9)$$

Разностные уравнения (5), содержащие дополнительные параметры, аппроксимируют уравнения (4) со вторым порядком точности.

Подберем введенные параметры α, β, c, d, g таким образом, чтобы такая аппроксимация была оптимальной для точности решения уравнений.

4. ВЫБОР ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

В однородной среде уравнения (4) для нулевой гармоники поля $E = E_{0y}$ можно представить в виде уравнения, которое без учета источников принимают простой вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = k_0^2 E, \quad k_0^2 = \mu \frac{1}{2} \left(\epsilon \frac{1}{2} + \sigma - \frac{\epsilon_s}{(h/2 + 1/\tau_D)} \left(\frac{1}{\tau_D^2} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right) \right) \right). \quad (10)$$

Это уравнение на разностной сетке можно записать, применяя средние значения поля, приведенные в предыдущем разделе:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{E}_{i+1,j} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i-1,j}}{\Delta z^2} + \frac{\bar{E}_{i,j+1} - 2\bar{E}_{i,j} + \bar{E}_{i,j-1}}{\Delta x^2} = \\ = k_0^2 (cE_{n,i,j} + d(E_{n,i,j+1} + E_{n,i,j-1}) + g(E_{n,i+1,j} + E_{n,i-1,j})).\end{aligned}\quad (11)$$

Уравнение (10) имеет точное решение

$$E = E_0 \text{ch}(k_x x) \text{ch}(k_z z), \quad k_x^2 + k_z^2 = k_0^2, \quad k_x = k_0 \sin \theta, \quad k_z = k_0 \cos \theta.$$

Подставим это решение в разностное уравнение (11). После простых преобразований получим уравнение вида $V^2(\theta, k) = 1$, где

$$\begin{aligned}V^2(\theta, k) = & \left((1-\alpha) \text{ch} \left(\frac{k \cos \theta}{r} \right) + \alpha \right) (\text{ch}(k \sin \theta) - 1) + \\ & + r^2 ((1-\beta) \text{ch}(k \sin \theta) + \beta) \left(\text{ch} \left(\frac{k \cos \theta}{r} \right) - 1 \right) / \left(k^2 \left(c/2 + d \left(\text{ch} \left(\frac{k \cos \theta}{r} \right) \right) + g (\text{ch}(k \sin \theta)) \right) \right)\end{aligned}\quad (12)$$

и $r = \Delta x / \Delta z$, $k = k_0 \Delta x$

Будем искать параметры α, β, c, d, g , требуя максимально точного выполнения равенства $V(\theta, k) = 1$ в пределах допустимых значений θ, k . Для этого будем минимизировать по параметрам α, β, c, d, g функционал

$$I(r, K) = \iint (1 - V(\theta, k))^2 d\theta dk. \quad (13)$$

Пределы интегрирования по углу $\theta = [0, \pi/2]$. Пределы интегрирования по второй переменной от $k = 0$ до $k = K$. Величина k определяет отношение шага разностной сетки Δx к характерному размеру $1/k_0$ изменения решения. Поэтому брать величину верхнего предела интегрирования K значительно больше единицы не имеет смысла по причине очевидной потери точности.

Если в (13) под интегралом вместо $(1 - V(\theta, k))^2$ использовать $(1 - V^2(\theta, k))^2$, то оптимальные значения параметров в этих двух случаях совпадают с точностью до 4–5 знаков после запятой.

Из вида разностной схемы (5) следует, что использование оптимальных параметров не повышает порядок аппроксимации уравнений. При выполнении условия (7) это — схема 2-го порядка аппроксимации по шагу разностной схемы. При невыполнении условия (7) нельзя указать порядков аппроксимации по шагу разностной схемы, но точность аппроксимации дифференциаль-

Таблица 1

α	β	c	d	g	$I(r, K)$	r	K
0.91208	0.80218	0.66922	0.082832	0.082561	3.4924e-06	1.5	0.5
0.91604	0.81109	0.67636	0.081510	0.080360	5.1024e-05	1.5	1.0
0.92218	0.82491	0.68795	0.079361	0.076904	2.2488e-04	1.5	1.5
0.92981	0.84208	0.70330	0.076567	0.072504	5.8943e-04	1.5	2.0
1.0	1.0	0.76541	0.049556	0.067741	4.5673e-02	1.5	0.5
1.0	1.0	0.76807	0.049836	0.066159	4.2503e-02	1.5	1.0
1.0	1.0	0.77280	0.050121	0.063636	3.7865e-02	1.5	1.5
1.0	1.0	0.77978	0.050265	0.060352	3.2513e-02	1.5	2.0
—	—	0.83513	0.082447	—	4.3955e-06	—	0.5
—	—	0.84053	0.079904	—	6.4075e-05	—	1.0
—	—	0.84966	0.075990	—	2.7894e-04	—	1.5
—	—	0.86261	0.071110	—	7.1934e-04	—	2.0

ных уравнений этой разностной схемой выше, чем точность аппроксимации неоптимальной разностной схемой. Таким образом, обе схемы аппроксимируют дифференциальные уравнения независимо от условия (7). Порядок аппроксимации по шагу разностной схемы и точность аппроксимации разностной схемы — это разные величины.

И в обоих случаях независимо от условия (7) применение оптимальных параметров ведет к повышению точности аппроксимации дифференциальных уравнений оптимальными разностными схемами в сравнении с неоптимальными разностными схемами.

Это следует из сравнения значений величины $(1 - V(\theta, k))^2$ при оптимальных значениях параметров и при неоптимальных значениях параметров, т.е. при $\alpha = 1, \beta = 1, c = 1, d = 0, g = 0$ в области допустимых θ, k . Ввиду простоты вида $V(\theta, k)$ это легко сделать. Это и подтверждают приводимые ниже решения уравнений с использованием оптимальных разностных схем.

Разностная схема без оптимальных параметров является 5-точечной, а разностная схема с оптимальными параметрами является 9-точечной. Увеличение числа точек ведет к увеличению числа вычислительных операций.

Если положить $\alpha = 1, \beta = 1$ и искать минимум функционала по трем параметрам c, d, g , то такая оптимальная схема остается 5-точечной, как и обычная схема 2-го порядка. Такая простая модернизация обычной схемы 2-го порядка не меняет структуры матрицы системы разностных уравнений (5).

Опустив производные по x в системе (1), получим одномерные уравнения Максвелла. Тогда в системе (5) нет усреднения по пространству (8)–(9) и остаются только два оптимальных параметра c, d . Положив в (12) $\alpha = 1, \beta = 1, \theta = 0, \Delta x = \Delta z, g = 0$ и в функционале (13) оставив интегрирование только по k , получим формулу для $V^2(\theta, k)$ в одномерном случае.

Производные функционала (13) по параметрам α, β, c, d, g вычисляются аналитически. Поэтому используя известные методы минимизации легко получить оптимальные значения α, β, c, d, g . В данном случае для этого использовался метод Ньютона. Отметим, что на всех стадиях расчетов параметров α, β, c, d, g функция $V(\theta, k)$ (как и $V^2(\theta, k)$) остается положительной и близкой к единице.

В табл. 1 приведены некоторые оптимальные значения параметров и функционала $I(r, K)$ в зависимости от соотношения шагов разностной сетки $r = \Delta x / \Delta z$ и верхнего предела K в функционале (13) для трех разных случаев.

Первые четыре строчки таблицы получены при минимизации по пяти параметрам α, β, c, d, g и при $r = \Delta x / \Delta z = 1.5$.

Следующие четыре строчки получены при минимизации по трем параметрам c, d, g также при $r = \Delta x / \Delta z = 1.5$, но в отсутствие усреднения в пространственных производных, т.е. при $\alpha = 1, \beta = 1$.

Последние четыре строчки таблицы соответствуют одномерному случаю. Здесь минимизация проводилась по двум параметрам c, d .

Малые значения $K < 0.5$ соответствуют слабо меняющимся решениям. В табл. 1 приведены значения параметров при $0.5 < K < 2$. В этой области оптимальное значение функционала $I(r, K)$ растет с ростом K в первом и третьем случаях, во втором случае значение функционала $I(r, K)$ падает с ростом K .

Наименьшее значение $I(r, K)$ достигается в первом случае при минимизации по пяти параметрам. Несколько больше значения $I(r, K)$ в третьем случае, который относится к одномерным уравнениям. Во втором случае, при минимизации по трем параметрам c, d, g , величина функционала $I(r, K)$ более чем на порядок превышает соответствующие величины других двух случаев.

Из значений $I(r, K)$ следует, что применение оптимальных параметров наиболее эффективно в случае оптимизации по пяти параметрам α, β, c, d, g , и наименее эффективно во втором случае при минимизации по трем параметрам. Одномерный случай занимает промежуточное положение между этими двумя случаями.

Если искать точку минимума по двум параметрам α, β при $c = 1, d = 0, g = 0$, т.е. учитывая только усреднение пространственных производных, то независимо от значений $r = \Delta x / \Delta z$ и K минимальное значение функционала (13) находится вблизи одного значения $I(r, K) \approx 0.6$. Таким образом, в этом случае оптимальных значений параметров α, β , не существует.

Если в системе уравнений (5) провести обратное преобразование Лагерра, то с учетом оптимальных параметров уравнения системы примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\bar{H}_{x,i+1/2,j} - \bar{H}_{x,i-1/2,j}}{\Delta z} - \frac{\bar{H}_{z,i,j+1/2} - \bar{H}_{z,i,j-1/2}}{\Delta x} &= \varepsilon \left(c \frac{\partial E_{i,j}}{\partial t} + d \left(\frac{\partial E_{i+1,j}}{\partial t} + \frac{\partial E_{i-1,j}}{\partial t} \right) + g \left(\frac{\partial E_{i,j+1}}{\partial t} + \frac{\partial E_{i,j-1}}{\partial t} \right) \right) + \\ &+ \sigma (c E_{i,j} + d (E_{i+1,j} + E_{i-1,j}) + g (E_{i,j+1} + E_{i,j-1})) + \varepsilon_s m_n + J_{ny}, \\ \frac{E_{ni+1,j} - E_{ni,j}}{\Delta z} &= \mu \frac{\partial H_{x,i+1/2,j}}{\partial t}, \\ -\frac{E_{ni,j+1} - E_{ni,j}}{\Delta x} &= \mu \frac{\partial H_{x,i,j+1/2}}{\partial t}, \\ \frac{\partial m}{\partial t} &= - \left(\frac{\bar{m}}{\tau_D} + \frac{1}{\tau_D^2} \left(1 - \frac{\tau_E}{\tau_D} \right) \right) (c E_{i,j} + d (E_{i+1,j} + E_{i-1,j}) + g (E_{i,j+1} + E_{i,j-1})). \end{aligned} \quad (14)$$

Это система дифференциально-разностных уравнений. Они разностные по пространству и дифференциальные по времени.

Из метода получения оптимальных параметров следует, что этот метод легко распространяется на 3-мерный случай уравнений.

Из табл. 1 видно, что параметры d, g значительно меньше параметра c . Для первого случая (первые четыре строчки табл. 1) разница в 8–9 раз. Для двух последних случаев разница в значениях превышает 10 раз.

Поэтому в первом уравнении системы (14) производные по времени с параметрами d, g являются малой поправкой. Учитывая это, можно использовать итерационный алгоритм численного решения системы дифференциально-разностных уравнений Максвелла (14).

Возможны (см. [15]) различные варианты формулы (6) усреднения $\langle E_k \rangle$. Таких вариантов не менее десятка. В общем случае среднее $\langle E_k \rangle$ можно представить в виде

$$\langle E_k \rangle = cE_{k,i,j} + \sum_m s_m \sum_{p,q} E_{k,p,q}. \quad (15)$$

Если параметры s_m значительно меньше параметра c , то при итерационном методе учета малых поправок в сумме (15) можно использовать большое количество пространственных точек и большее число дополнительных параметров s_m .

В работе применялся метод простой итерации, где на первом шаге решалась система уравнений при $d = 0$, $g = 0$. На следующих шагах полученные значения электрического поля $E_{i,j}$ использовались для аппроксимации производных по времени при параметрах d, g .

Такая простая схема учета оптимальных параметров делает простой программную реализацию модифицированной разностной схемы (14). Для этого в программу с неоптимальной схемой достаточно добавить всего около двух десятков строк (операторов), что составляет менее 5% размера всей программы. Кроме того, итерации не увеличивают значительно время счета задачи.

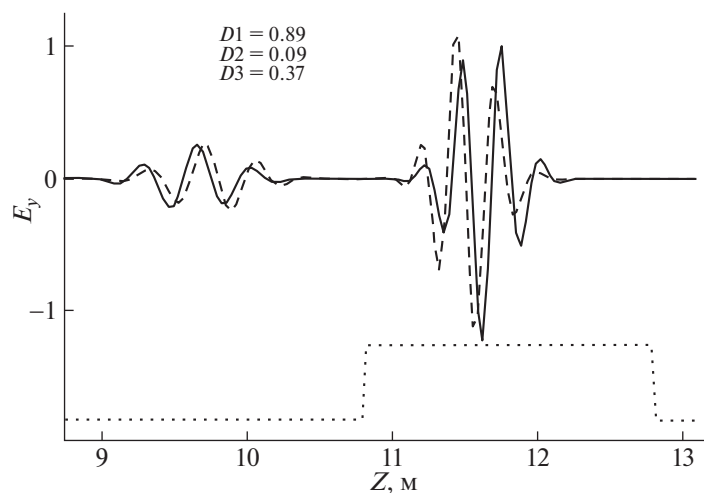
5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Решение системы уравнений Максвелла (1), полученное с использованием разностной схемы 2-го порядка аппроксимации с оптимальными параметрами (14), будем сравнивать с решением этой системы уравнений высокоточным (см. [18]) конечно-разностным методом (4-го порядка аппроксимации по времени и 4-го порядка аппроксимации по пространству).

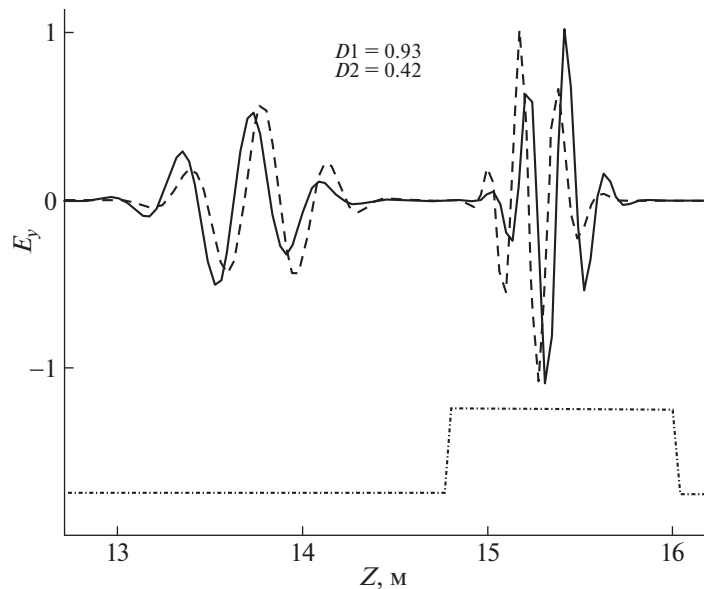
Источник тока брался в виде

$$J_y = f(t)\delta(z - z_s), \quad f(t) = J_0 \exp\left(-\frac{(2\pi f_0(t - t_0))^2}{\gamma^2}\right) \sin(2\pi f_0(t - t_0)), \quad (16)$$

где f_0 — несущая частота источника, t_0 — момент центра импульса источника, z_s — точка расположения источника.



Фиг. 1. Решение двумерных уравнений неоптимальной (штриховая линия) и оптимальной (сплошная линия) разностными схемами 2-го порядка аппроксимации. Приведено решение разностной схемой 4-го порядка, графически оно совпадает с решением оптимальной схемой.



Фиг. 2. Решение одномерных уравнений неоптимальной (штриховая линия) и оптимальной (сплошная линия) разностными схемами 2-го порядка аппроксимации. Приведено решение разностной схемой 4-го порядка, графически оно совпадает с решением оптимальной схемой.

Точность решения оценивалась по величине относительной погрешности решения D , которая определялась выражением

$$D(t) = \frac{\int_0^{\infty} |E_y(z, t) - E_{0y}(z, t)| dz}{\int_0^{\infty} |E_{0y}(z, t)| dz}, \quad (17)$$

где $E_y = E$ — решение уравнения (14), полученное с использованием оптимальных параметров, E_{0y} — решение уравнений (1), полученное с использованием конечно-разностной схемы 4-го порядка аппроксимации. На графиках, приведенных ниже, решение этой конечно-разностной схемой показано сплошной линией.

На фиг. 1 показано прохождение электромагнитной волны от точечного источника (E_y — компоненты поля) через слой, расположенный в однородной среде. Точками показано расположение слоя в среде. Показанные решения получены после пробега импульсом расстояния примерно в 12–15 длин волн.

Сплошная линия соответствует решению уравнений (1) разностной схемой 4-го порядка аппроксимации.

Штрихованная линия соответствует решению обычной, неоптимальной разностной схемой 2-го порядка. Указана величина погрешности $D1$ для этого решения, вычисленная по формуле (16).

На этом же рисунке приведено решение оптимальной разностной схемой 2-го порядка аппроксимации (14) с пятью оптимальными параметрами α , β , c , d , g , полученными при $\Delta x = 0.05$, $r = 1.5$, $K = 2.0$ и приведенными в табл. 1.

Это решение графически совпадает с решением, полученным разностной схемой 4-го порядка аппроксимации. Для этого решения также приведена величина погрешности $D2$, вычисленная по формуле (16).

Видно, графически и численно, что оптимальная разностная схема с пятью оптимальными параметрами дает более точное решение. Погрешность $D2$ примерно на порядок меньше погрешности $D1$ неоптимальной схемы 2-го порядка.

Для сравнения на этом же рисунке приведена погрешность решения $D3$ разностной схемой 2-го порядка аппроксимации (14) с тремя оптимальными параметрами c, d, g , полученными при $\alpha = 1, \beta = 1, \Delta x = 0.05, r = 1.5, K = 2.0$ и приведенными в табл. 1.

Погрешность $D3$ в 2–3 раза меньше погрешности $D1$ неоптимальной схемы 2-го порядка.

Решения с оптимальными параметрами получены после пяти шагов итераций.

На фиг. 2 приведено решение одномерных уравнений Максвелла. Показано прохождение электромагнитной волны от точечного источника (E_y – компоненты поля) через слой, расположенный в однородной среде. Точками показано расположение слоя в среде. Показанные решения получены после пробега импульсом расстояния примерно в 10–12 длин волн.

В разностной схеме (14) в одномерном случае опущены разностные производные по x , параметры $g = 0, \alpha = 1, \beta = 1$.

Здесь сплошная линия соответствует решению одномерных уравнений Максвелла разностной схемой 4-го порядка аппроксимации.

Штрихованная линия соответствует решению обычной, неоптимальной разностной схемой 2-го порядка. Указана величина погрешности $D1$ для этого решения, вычисленная по формуле (16).

На этом же рисунке приведено решение оптимальной разностной схемой 2-го порядка аппроксимации (14) с двумя оптимальными параметрами c, d , полученными при $\Delta z = 0.035, K = 1.5$ и приведенными в табл. 1.

Это решение графически совпадает с решением, полученным разностной схемой 4-го порядка аппроксимации. Для этого решения также приведена величина погрешности $D2$, вычисленная по формуле (16).

Оптимальная разностная схема с двумя оптимальными параметрами дает более точное решение. Погрешность $D2$ более чем на порядок меньше погрешности $D1$ неоптимальной схемы 2-го порядка.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение разностных схем с оптимальными параметрами позволяет повысить точность решения уравнений Максвелла в сравнении с обычными схемами 2-го порядка аппроксимации. Это верно для одномерных и двумерных уравнений. Использование преобразования Лагерра позволяет получить оптимальные параметры и построить дифференциально-разностные уравнения. Эти уравнения можно решать, используя метод итерации по малым оптимальным параметрам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Luebbers R., Hansberger F.P.* FDTD for Nth-order dispersive media // IEEE Trans. Ant. Propog. 1992. V. 40. P. 1297–1301.
2. *Turner G., Siggins A.F.* Constant Q attenuation of subsurface radar pulses // Geophysics. 1994. V. 59. P. 1192–1200.
3. *Bergmann T., Robertsson J.O.A., Holliger K.* Finite difference modeling of electromagnetic wave in dispersive and attenuating media // Geophysics. 1998. V. 63. P. 856–867.
4. *Bergmann T., Blanch J.O., Robertsson J.O.A., Holliger K.* A simplified Lax-Wendroff correction for staggered-grid FDTD modeling of electromagnetic wave in frequency-dependent media // Geophysics. 1999. V. 64. P. 1369–1377.
5. Электроразведка. Справочник геофизика / под ред. Тархова А.Г. М.: Недра, 1980. 137 с.
6. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. М.: Мир, 1999. 548 с.
7. Холодов А.С. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. М.: Янус_К, 2008. Т. VII_1. Ч. 2. С. 141–174.
8. Толстых А.И. Компактные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990, 230 с.
9. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Бикompактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // Докл. АН. 2010. Т. 430. № 4. С. 470–474.
10. *Tam C.K., Webb J.C.* Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics // J. Comput. Phys. 1993. V. 107. № 2. P. 262–281.
11. *Jo C.H., Shin C., Suh H.S.* An optimal 9-point, finite-difference, frequency-space, 2-d scalar wave extrapolator // Geophysics. 1996. V. 61. P. 529–537.

12. *Chen J.B.* An average derivative optimal scheme for frequency-domain scalar wave equation // *Geophysics*. 2012. V. 77. P. T201–T210.
13. *Мастрюков А.Ф., Михайленко Б.Г.* Оптимальные разностные схемы для уравнений Максвелла при решении прямых задач электромагнитных зондирований // *Геология и геофизика*. 2015. Т. 56. № 9. С. 1713–1722.
14. *Мастрюков А.Ф.* Оптимальные разностные схемы для волнового уравнения // *Сиб. журнал вычисл. матем.* 2016. № 5. С. 107–112.
15. *Мастрюков А.Ф.* Разностные схемы на основе преобразования Лагерра // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. № 3. С. 373–381.
16. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982, 620 с.
17. *Справочник по специальным функциям* / под ред. Абрамовица М. и Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.
18. *Ghrist M., Fornberg B., Driscoll T.A.* Staggered time integrator for wave equations // *SIAM J. Numer. Anal.* 2000. V. 38. P. 718–741.

ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.64

**SOLVING NONLINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS
OF THE FIRST KIND WITH DISCONTINUOUS KERNELS
BY USING THE OPERATIONAL MATRIX METHOD¹⁾**

© 2023 г. Simin Aghaei Amirkhizi^{a,*}, Yaghoub Mahmoudi^{a,**}, Ali Salimi Shamloo^b

^aDepartment of Mathematics, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran

^bDepartment of Mathematics, Shabestar Branch, Islamic Azad University, Shabestar, Iran

*e-mail: stu.aghaei.s@iaut.ac.ir

**e-mail: mahmoudi@iaut.ac.ir

Поступила в редакцию 01.02.2023 г.

Переработанный вариант 23.06.2023 г.

Принята к публикации 25.07.2023 г.

Решение нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывным ядром методом операционных матриц. Предложен численный метод решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с разрывным ядром. Использование операционных матриц для такого рода уравнений оказывается весьма эффективным. Сдвинутые полиномы Лежандра применяются для решения интегральных уравнений Вольтерра с разрывными ядрами путем преобразования уравнения к системе нелинейных алгебраических уравнений. Приведен анализ сходимости для приближенного решения и продемонстрированы численные примеры, показывающие высокую точность предлагаемого метода.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода, кусочно-непрерывное ядро, операционные матрицы.

DOI: 10.31857/S0044466923110030, **EDN:** BPEWDO

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ВЗРЫВНУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ¹⁾

© 2023 г. А. И. Аристов^{1,2,*}¹ 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия² 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: ai_aristov@mail.ru

Поступила в редакцию 13.03.2023 г.

Переработанный вариант 28.03.2023 г.

Принята к публикации 30.04.2023 г.

Работа посвящена изучению одного неклассического уравнения в частных производных четвертого порядка, описывающего взрывную неустойчивость в автоколебательных системах. Построено несколько классов точных решений этого уравнения. Показано, что среди этих решений есть обращающиеся в бесконечность за конечное время, ограниченные глобально по времени и ограниченные на любом конечном промежутке времени, но не глобально. Библ. 11.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, разрушение решений, точные решения.

DOI: 10.31857/S0044466923110042, EDN: CIMCNK

Работа посвящена изучению точных решений следующего уравнения:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + u \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1)$$

Здесь u — действительная функция, зависящая от пространственной переменной $x \in [0; l]$ ($l > 0$) и времени $t > 0$.

В [1] и [2] обсуждались уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2)$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \right) + \frac{\partial}{\partial t} (u - u^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

которые могут описывать взрывную неустойчивость в автоколебательных системах, в частности, в распределенной системе на основе туннельного диода. В [3, с. 296 и 316–322] изучались начально-краевые задачи для уравнений (2) и (3). Было показано, что если задачи однозначно разрешимы в пространстве $X_T = C^2[0; T; S]$, где $T \in (0; \infty]$, S — некоторое соболевское пространство, причем начальные данные удовлетворяют некоторым неравенствам, то происходит разрушение решения путем опрокидывания, т.е. задача разрешима в некотором классе $X_T (T < \infty)$, но не в X_∞ , причем

$$\lim_{t \rightarrow T-} \|u(x, t)\|_S = \infty. \quad (4)$$

Для понимания процессов, моделируемых нелинейными уравнениями, полезно не только изучать качественные свойства их решений, но и строить точные решения. Качественным свой-

¹⁾ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 22-21-00449).

ствам решений уравнений, содержащих смешанные производные по времени и по пространственным переменным третьего и более высоких порядков, посвящены обширные исследования (например, [3–5]), тогда как в известной автору литературе о точных решениях (например, [6, гл. 5], [7, разд. 9.3, 9.4, 10.2, 10.3]) такие уравнения встречаются редко.

Несколько классов точных решений уравнения (2) было найдено в статьях [8]–[10]; было проанализировано их качественное поведение. Уравнение (3) можно привести к виду (1) с помощью линейной замены, а именно, если принять $(2u - 1)$ за новую независимую переменную. Точным решением уравнения (1) и посвящена данная работа.

Теорема 1. *Существуют решения уравнения (1), имеющие следующие варианты качественного поведения:*

- *обращающиеся в бесконечность на конечных промежутках времени,*
- *ограниченные глобально по времени,*
- *ограниченные на любом конечном промежутке времени, но не глобально.*

Справедливость этого утверждения будет следовать из дальнейших рассуждений, где будут построены соответствующие примеры. А именно, решения с качественным поведением первых двух типов будут построены в п. 2.2, а с качественным поведением третьего типа – в разд. 3 (случай $g(x) = 0$).

Будем считать, что $c, c_1, c_2, c_3, \dots$ – вообще говоря, произвольные действительные постоянные, $P_n(\cdot)$ – многочлен степени n от одной переменной.

1. ТРИВИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Несложно убедиться, что решения уравнения (1), зависящие только от x , имеют вид

$$u(x, t) = c_1 x + c_2.$$

Пусть решение зависит только от t . После интегрирования по времени уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u^2}{2} = \frac{c}{2}.$$

Рассмотрим отдельно три множества, в которых может находиться c .

1. Пусть $c > 0$. Полагая $c_1 = \sqrt{c}$, получим следующее семейство решений:

$$u(x, t) = c_1 \frac{c_2 e^{c_1 t} + 1}{c_2 e^{c_1 t} - 1}, \quad c_1 > 0.$$

2. При $c < 0$ получим

$$u(x, t) = 2c_1 \operatorname{tg}(c_2 - c_1 t), \quad c_1 = \sqrt{|c|}/2 > 0.$$

3. Если $c = 0$, то

$$u(x, t) = \frac{2}{t - c_1}.$$

2. МЕТОД БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Будем искать решения в виде $u(x, t) = f(\xi)$, $\xi = x - \alpha t$, $\alpha = \operatorname{const} \neq 0$. Подставив это выражение в уравнение, после упрощений получим:

$$f^{IV}(\xi) - \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} f'''(\xi) + \frac{1}{\alpha} f(\xi) f'(\xi) = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение, получим

$$f'''(\xi) - \beta f'(\xi) + \gamma f^2(\xi) = \delta, \tag{5}$$

где

$$\beta = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2}, \quad \gamma = \frac{1}{2\alpha},$$

δ — пока произвольная постоянная.

2.1. Анализ Пенлеве

Тест Пенлеве, применяемый к обыкновенному дифференциальному уравнению порядка N относительно функции $f(\xi)$, представляет собой исследование того, представимо ли его общее решение в виде ряда Лорана

$$f(\xi) = (\xi - \xi_0)^{-p} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (\xi - \xi_0)^m,$$

где p — некоторое постоянное натуральное число, а ξ_0 и какие-то $(N - 1)$ из коэффициентов A_m произвольны (см. [6, гл. 10] и [11]). Тест состоит из следующих этапов.

1. Найти начальный член разложения $A_0(\xi - \xi_0)^{-p}$. Должны получиться ненулевая постоянная A_0 и натуральная постоянная p , иначе — тест не пройден.

2. Найти индексы Фукса $m_1, \dots, m_{N-1}$, т.е. номера членов ряда, в которых могут быть произвольные коэффициенты. Для этого строится алгебраическое уравнение относительно m степени N , которое должно иметь корень $m = -1$ и $(N - 1)$ различных целых неотрицательных корней (иначе тест не пройден).

3. Проверить, что коэффициенты с номерами $m = m_1, \dots, m = m_{N-1}$ действительно произвольны. Если все этапы пройдены корректно, то уравнение прошло тест и имеет общее решение требуемого вида, иначе — нет.

Утверждение 1. Уравнение (5) не проходит тест Пенлеве ни при каких значениях параметров.

Попробуем применить тест. Сначала подставим в уравнение “нулевое приближение” — только начальный член разложения $f = A_0(\xi - \xi_0)^{-p}$:

$$\begin{aligned} f'''(\xi) - \beta f'(\xi) + \gamma f^2(\xi) &= \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow -p(p+1)(p+2)A_0(\xi - \xi_0)^{-p-3} + \beta p A_0(\xi - \xi_0)^{-p-1} + \gamma A_0^2(\xi - \xi_0)^{-2p} &= \delta, \end{aligned}$$

где подчеркнуты ведущие члены, т.е. члены, соответствующие наибольшему по модулю отрицательным степеням $(\xi - \xi_0)$. На первых двух этапах существенную роль играют только они. “Укороченное уравнение”, содержащее только эти члены, должно выполняться тождественно:

$$-p(p+1)(p+2)A_0(\xi - \xi_0)^{-p-3} + \gamma A_0^2(\xi - \xi_0)^{-2p} \equiv 0,$$

следовательно, $A_0 = 60/\gamma$, $p = 3$.

Перейдем ко второму этапу. Подставим в “укороченное уравнение” двучлен $f = A_0(\xi - \xi_0)^{-p} + A_m(\xi - \xi_0)^{m-p}$ и упростим. Здесь существенную роль играют только члены, пропорциональные первой степени A_m , поэтому, пренебрегая членами с большими степенями A_m , получим

$$A_m(\xi - \xi_0)^{m-6}[(m-3)(m-4)(m-5) + 120] \equiv 0.$$

Несложно убедиться, что это уравнение имеет корень $m = -1$, тогда как два других корня не являются действительными числами. Это свидетельствует о том, что уравнение не проходит тест Пенлеве, **что требовалось доказать**.

Понизим порядок уравнения (5), положив $g = f'$. После упрощений получим

$$g \left(\frac{dg}{df} \right)^2 + g^2 \frac{d^2 g}{df^2} - \beta g + \gamma f^2 = \delta. \quad (6)$$

Утверждение 2. Уравнение (6) тоже не проходит тест Пенлеве ни при каких значениях параметров.

Действительно, попытка применить тест приводит к некорректному результату первого этапа. А именно, или $A_0 = 0$, или p не является натуральным числом.

Теперь будем строить семейства частных решений уравнения (5).

2.2. Решение — обобщенный многочлен 1-го типа

Построим решения (5) вида

$$f(\xi) = P_n(\xi^{-1}), \quad (7)$$

где n — пока произвольное натуральное число. Подставим это выражение в (5), заметив, что дифференцирование по ξ многочлена от ξ^{-1} увеличивает степень многочлена на 1:

$$P_{n+3}(\xi^{-1}) - \beta P_{n+1}(\xi^{-1}) + \gamma P_{2n}(\xi^{-1}) = \delta.$$

Очевидно, $n+1 < n+3$. Пусть $n+3 = 2n$: в противном случае старший коэффициент в (7) будет равен нулю, т.е. степень этого многочлена будет меньше n . Значит, $n = 3$, и решение имеет вид

$$f(\xi) = a\xi^{-3} + b\xi^{-2} + c\xi^{-1} + d, \quad a \neq 0.$$

Подставим это выражение в (5), раскроем скобки и сгруппируем члены с одинаковыми степенями ξ . Для тождественного выполнения равенства потребуем равенства нулю коэффициента при каждой степени ξ . Таким образом, придем к системе:

$$\begin{aligned} -\gamma a + 60 &= 0, \\ 2b(-\gamma a + 12) &= 0, \\ -2\gamma ac - \gamma b^2 - 3\beta a + 6c &= 0, \\ \beta b + \gamma bc + \gamma ad &= 0, \\ \beta c + \gamma c^2 + 2\gamma bd &= 0, \\ \gamma cd &= 0, \\ \gamma d^2 &= 0. \end{aligned}$$

Выразим γa из первого уравнения и подставим во второе. Тогда легко получим, что $b = 0$. А так как $\gamma \neq 0$, то из последнего уравнения получим, что и $d = 0$. Если $b = d = 0$, то четвертое и шестое уравнения выполняются тождественно. Поэтому систему можно переписать в виде

$$\begin{aligned} a &= 60/\gamma, \\ b &= d = 0, \\ -19c - 30\beta/\gamma &= 0, \\ c(\beta + \gamma c) &= 0. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что если $\beta = 0$, то и $c = 0$, иначе система несовместна. Условие $\beta = 0$ равносильно условию $|\alpha| = 1$. Значит, при названном условии непротиворечивости решение (5) имеет вид $f(\xi) = 120\alpha\xi^{-3}$. Заметим, что исходное уравнение не меняется при сдвиге времени. Поэтому, возвращаясь к первоначальным обозначениям, внесем произвольный параметр c :

$$u(x, t) = \pm 120(x \mp t + c)^{-3}.$$

Рассмотрим одну “ветвь” этого решения: $u = 120(x + c - t)^{-3}$. В тех точках x , где $x + c > 0$, решение будет обращаться в бесконечность при $t = x + c$. А при $x + c < 0$ решение будет ограничено глобально по времени: $|u| \leq 120|x + c|^{-3}$. Заметим, что если рассматривать $x \in [0; l]$, то условие $c > 0$ будет достаточным для обращения решения в бесконечность во всех точках в соответствующие моменты времени, а условие $c + l < 0$ будет достаточным для ограниченности решения глобально по времени равномерно по x : $|u| \leq 120|l + c|^{-3}$. Аналогично можно рассмотреть “ветвь” решения с другой комбинацией знаков. Таким образом, построены примеры решений, соответствующие первому и второму типам качественного поведения решений, указанным в теореме 1.

2.3. Решение — обобщенный многочлен 2-го типа

Идею предыдущего раздела можно обобщить следующим образом. Будем строить решения вида

$$f(\xi) = P_m(T(\xi)), \quad (8)$$

где $T(\cdot)$ задается с помощью автономного дифференциального уравнения:

$$\frac{dT}{d\xi} = P_n(T) \quad (9)$$

(показатели m и n надо определить).

Заметим, что

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{df}{dT} \frac{dT}{d\xi} = P_{m-1}(T)P_n(T) = P_{m+n-1}(T).$$

Аналогично можно показать, что $f''(\xi) = P_{m+2n-2}(T)$, $f'''(\xi) = P_{m+3n-3}(T)$, $f^2(\xi) = P_{2m}(T)$. Значит, можно переписать уравнение (5) в следующем виде:

$$P_{m+3n-3}(T) - \beta P_{m+n-1}(T) + \gamma P_{2m}(T) = \delta.$$

Потребуем, чтобы два из показателей $m + 3n - 3$, $m + n - 1$ и $2m$ были равны, а третий — не больше двух других (в противном случае степень многочлена в (8) или (9) можно понизить). Пусть $m + 3n - 3 = 2m \geq m + n - 1$, откуда $m = 3(n - 1)$, $n \geq 2$ (в двух других возможных случаях получим только неположительные m).

Рассмотрим комбинацию $m = 3$, $n = 2$:

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^3 a_k T^k, \quad \frac{dT}{d\xi} = \sum_{k=0}^2 b_k T^k.$$

Эти выражения упростятся, если взять $\sqrt[3]{a_3}(T + b_1/(2b_2))$ за новую переменную, зависящую от ξ , и переобозначить коэффициенты. Следовательно, не нарушая общности, можно искать решения вида

$$f(\xi) = T^3 + aT^2 + bT + c, \quad \frac{dT}{d\xi} = \mu T^2 + d.$$

С помощью этих выражений представим $f'(\xi)$, $f'''(\xi)$ и $f^2(\xi)$ в виде многочленов от T . Подставим эти выражения в (5), раскроем скобки и сгруппируем члены с одинаковыми степенями T :

$$\begin{aligned} & (60\mu^3 + \gamma)T^6 + (24a\mu^3 + 2a\gamma)T^5 + (2b\gamma + a^2\gamma - 3\beta\mu + 114d\mu^2 + 6b\mu^3)T^4 + \\ & + (2c\gamma + 2ab\gamma - 2a\beta\mu + 40ad\mu^2)T^3 + (2ac\gamma + b^2\gamma - b\beta\mu - 3d\beta + 60d^2\mu + 8bd\mu^2)T^2 + \\ & + (16ad^2\mu - 2ad\beta + 2bc\gamma)T + (2bd^2\mu - bd\beta + c^2\gamma + 6d^3) = \delta. \end{aligned}$$

Для тождественного выполнения этого соотношения потребуем равенства нулю коэффициента при каждой степени T (аналогичных условий на свободный член можно не налагать в силу произвольности δ). Придем к системе:

$$\begin{aligned} 60\mu^3 + \gamma &= 0, \\ 2a(12\mu^3 + \gamma) &= 0, \\ 2b\gamma + a^2\gamma - 3\beta\mu + 114d\mu^2 + 6b\mu^3 &= 0, \\ 2c\gamma + 2ab\gamma - 2a\beta\mu + 40ad\mu^2 &= 0, \\ 2ac\gamma + b^2\gamma - b\beta\mu - 3d\beta + 60d^2\mu + 8bd\mu^2 &= 0, \\ 16ad^2\mu - 2ad\beta + 2bc\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения найдем, что $\mu = -\sqrt[3]{\gamma/60}$. Кроме того, с учетом этого уравнения получим из второго, что $a = 0$. Тогда четвертое уравнение примет вид $2c\gamma = 0$, т.е. $c = 0$. Если $a = c = 0$, то шестое уравнение станет тождеством. Для определения других параметров остаются третье и пя-

тое уравнения. Для их преобразования удобно выразить γ через μ из первого. После упрощений они примут следующий вид:

$$\begin{aligned} 38\mu d - 38\mu^2 b &= \beta, \\ -60\mu^3 b^2 - b\beta\mu - 3d\beta + 60d^2\mu + 8bd\mu^2 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставим выражение для β из первого уравнения во второе. После упрощений получим

$$11b^2\mu^2 - 42bd\mu + 27d^2 = 0. \quad (11)$$

Случай $d = 0$ можно исключить из рассмотрения. Действительно, если $d = 0$, то из системы следует, что и $\beta = b = 0$, откуда можно получить результат предыдущего раздела: f пропорционально ξ^{-3} . Значит, (11) можно переписать в следующем виде:

$$11\eta^2 - 42\eta + 27 = 0, \quad \eta = \frac{b\mu}{d}.$$

Таким образом, $\eta = 3$ или $\eta = 9/11$. С помощью первого уравнения (9) получим отсюда выражения для b , а затем — для d .

Следовательно, $f(\cdot)$ зависит от ненулевых параметров μ , b , d , которые определяются следующим образом:

$$\mu = -\sqrt[3]{\frac{\gamma}{60}}, \quad b = -\frac{3\beta}{76\mu^2}, \quad d = -\frac{\beta}{76\mu}, \quad (*)$$

$$\mu = -\sqrt[3]{\frac{\gamma}{60}}, \quad b = \frac{9\beta}{76\mu^2}, \quad d = \frac{11\beta}{76\mu}. \quad (**)$$

Рассмотрим по отдельности эти комбинации параметров.

- Для комбинации (*) T определяется уравнением

$$\frac{dT}{T^2 - \frac{\beta}{76\mu^2}} = \mu d \xi.$$

Интегрируя это уравнение и разрешая относительно T , придем к следующим выражениям.

— Если $\beta > 0$, то

$$T(\xi) = \sqrt{\frac{\beta}{76\mu^2}} \frac{1 + ce^{\frac{2\mu}{\sqrt{\frac{\beta}{76\mu^2}}}\xi}}{1 - ce^{\frac{2\mu}{\sqrt{\frac{\beta}{76\mu^2}}}\xi}}.$$

И при положительных, и при отрицательных μ можно упростить это выражение следующим образом:

$$T(\xi) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{\beta}{19}} \frac{1 + ce^{\frac{\sqrt{\beta}\xi}{19}}}{1 - ce^{\frac{\sqrt{\beta}\xi}{19}}}.$$

Кроме того,

$$f(\xi) = T^3 - \frac{3\beta}{76\mu^2} T.$$

Возвращаясь к первоначальным обозначениям, получим

$$f(\xi) = -\frac{15}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2 - 1}{19} \right)^{3/2} (E^3 - 3E), \quad E = \frac{1 + ce^{\frac{\sqrt{(\alpha^2-1)/(19\alpha^2)}\xi}}{1 - ce^{\frac{\sqrt{(\alpha^2-1)/(19\alpha^2)}\xi}}}.$$

– Если $\beta < 0$, то, рассуждая аналогично, получим, что

$$f(\xi) = -120\alpha \left(\frac{1-\alpha^2}{76\alpha^2} \right)^{3/2} (\tau^3 + 3\tau), \quad \tau = \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{76\alpha^2}} \xi + c \right).$$

– Если $\beta = 0$, то получим повторение результата предыдущего раздела.

• Для комбинации (**) T определяется уравнением

$$\frac{dT}{T^2 + \frac{11\beta}{76\mu^2}} = \mu d\xi.$$

Аналогичным образом получим следующие семейства решений.

– Если $\beta > 0$, то

$$f(\xi) = -120\sqrt{11}\alpha \left(\frac{\alpha^2 - 1}{76\alpha^2} \right)^{3/2} (11\tau^3 + 9\tau), \quad \tau = \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{11(\alpha^2 - 1)}{76\alpha^2}} \xi + c \right).$$

– Если $\beta < 0$, то

$$f(\xi) = -\frac{120\sqrt{11}\alpha}{76^{3/2}} \left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \right)^{3/2} (11E^3 - 9E), \quad E = \frac{1 + ce^{\sqrt{11(1-\alpha^2)/(19\alpha^2)}\xi}}{1 - ce^{\sqrt{11(1-\alpha^2)/(19\alpha^2)}\xi}}.$$

– Если $\beta = 0$, то получим повторение результата предыдущего раздела.

3. РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Будем искать решения в виде

$$u(x, t) = tf(x) + t^{-1}g(x) + h(x),$$

где $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ и $h(\cdot)$ — гладкие функции, подлежащие определению. Подставим это выражение в уравнение и раскроем скобки:

$$2t^{-3}g''(x) + tf'''(x) + t^{-1}g''(x) + h''(x) = 2t^{-3}g(x) + tf^2(x) - t^{-3}g^2(x) + h(x)f(x) - t^{-2}h(x)f(x).$$

Для того чтобы обеспечить тождественное выполнение этого равенства, сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями t и приравняем к нулю соответствующие коэффициенты. Придем к системе:

$$t^{-3} : 2g''(x) = 2g(x) - g^2(x),$$

$$t : f''(x) = f^2(x),$$

$$t^{-1} : g''(x) = 0,$$

$$1 : h''(x) = f(x)h(x),$$

$$t^{-2} : 0 = -h(x)g(x).$$

Из последнего уравнения видно, что хотя бы один из коэффициентов g и h равен нулю. Рассмотрим эти случаи отдельно.

• Пусть $g(x) = 0$. Тогда для f и h получим систему:

$$f''(x) = f^2(x),$$

$$h''(x) = f(x)h(x).$$

Умножим первое уравнение на f' , заметив, что $f \neq \text{const}$, и проинтегрируем:

$$f'^2 = \frac{2f^3}{3} + c.$$

Вообще говоря, это уравнение можно проинтегрировать с помощью специальных функций. Ограничимся рассмотрением случая $c = 0$. Несложно убедиться, что в этом случае

$$f(x) = \frac{6}{(x - c_1)^2}.$$

Тогда для h получим уравнение Эйлера, из которого найдем:

$$h(x) = c_2(x - c_1)^3 + c_3(x - c_1)^{-2}.$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \frac{6t + c_2(x - c_1)^5 + c_3}{(x - c_1)^2}.$$

Очевидно, эти решения ограничены на любых конечных промежутках времени (при фиксированных x), но являются бесконечно большими при неограниченном возрастании времени. Таким образом, построен пример решения, имеющего третий тип качественного поведения, указанный в теореме 1.

- Пусть $h(x) = 0$. Тогда для f и g получим систему:

$$\begin{aligned} 2g''(x) &= 2g(x) - g^2(x), \\ f'''(x) &= f^2(x), \\ g''(x) &= 0. \end{aligned}$$

Этой системе удовлетворяет только одна нетривиальная функция g , а именно, $g = 2$. Уравнение для f рассматривалось в предыдущем пункте. Заметим, что исходное уравнение не меняется при сдвиге по t , а значит, в решении можно заменить t на $t - c_1$. Таким образом, получим следующее семейство решений:

$$u(x, t) = (t - c_1)f(x) + \frac{2}{t - c_1},$$

где $f(x)$ определяется квадратурой:

$$f'^2 = \frac{2f^3}{3} + c_2.$$

Это семейство имеет подмножество, выражающееся через элементарные функции:

$$u(x, t) = \frac{6(t - c_1)}{(x - c)^2} + \frac{2}{t - c_1}.$$

4. ВЫВОоды

Построены следующие семейства решений уравнения (1).

- Тривиальные решения:

$$1) u(x, t) = c_1x + c_2;$$

$$2) u(x, t) = c_1 \frac{c_2 e^{c_1 t} + 1}{c_2 e^{c_1 t} - 1}, c_1 > 0;$$

$$3) u(x, t) = 2c_1 \operatorname{tg}(c_2 - c_1 t), c_1 > 0;$$

$$4) u(x, t) = \frac{2}{t - c_1}.$$

- Решения типа бегущей волны ($u(x, t) = f(\xi)$, $\xi = x - \alpha t$):

$$1) u(x, t) = \pm 120(x \mp t + c)^{-3};$$

$$2) f(\xi) = -\frac{15}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2 - 1}{19} \right)^{3/2} (E^3 - 3E), E = \frac{1 + ce^{\sqrt{(\alpha^2 - 1)/(19\alpha^2)}\xi}}{1 - ce^{\sqrt{(\alpha^2 - 1)/(19\alpha^2)}\xi}};$$

$$3) f(\xi) = -120\alpha \left(\frac{1-\alpha^2}{76\alpha^2} \right)^{3/2} (\tau^3 + 3\tau), \tau = \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{76\alpha^2}} \xi + c \right);$$

$$4) f(\xi) = -120\sqrt{11}\alpha \left(\frac{\alpha^2-1}{76\alpha^2} \right)^{3/2} (11\tau^3 + 9\tau), \tau = \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{11(\alpha^2-1)}{76\alpha^2}} \xi + c \right);$$

$$5) f(\xi) = -\frac{120\sqrt{11}\alpha}{76^{3/2}} \left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \right)^{3/2} (11E^3 - 9E), E = \frac{1 + ce^{\sqrt{11(1-\alpha^2)/(19\alpha^2)}\xi}}{1 - ce^{\sqrt{11(1-\alpha^2)/(19\alpha^2)}\xi}}.$$

• Решения специального вида:

$$1) u(x, t) = \frac{6t + c_2(x - c_1)^5 + c_3}{(x - c_1)^2};$$

$$2) u(x, t) = (t - c_1)f(x) + \frac{2}{t - c_1}, \text{ где } f(x) \text{ определяется квадратурой: } f'^2 = \frac{2f^3}{3} + c_2. \text{ Это семейство}$$

имеет подмножество, выражающееся через элементарные функции: $u(x, t) = \frac{6(t - c_1)}{(x - c_1)^2} + \frac{2}{t - c_1}$.

(Здесь $c, c_{1,2,3}$ — произвольные постоянные, α — произвольная постоянная, обеспечивающая корректность выражений, в которых она фигурирует.) Показано, что в этом списке есть решения, имеющие любой из трех типов качественного поведения, указанных в теореме 1. Кроме того, показано, что обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее решения типа бегущей волны, не проходит тест Пенлеве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984.
2. Рабинович М.И. Автоколебания распределенных систем. Известия вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 477–510.
3. Корпусов М.О. Разрушение в неклассических нелокальных уравнениях. М.: URSS, 2010.
4. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
5. Hayashi N., Kaikina E., Naumkin P., Shishmarev I. Asymptotics for Dissipative Nonlinear Equations. Springer-Verlag. 2006. 564 с.
6. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
7. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2002.
8. Аристов А.И. О точных решениях одного неклассического уравнения в частных производных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 11. С. 1870–1875.
9. Аристов А.И. О точных решениях одного неклассического нелинейного уравнения четвертого порядка // Матем. заметки. 2019. Т. 105. Вып. 4. С. 506–517.
10. Aristov I. Exact Solutions of Three Nonclassical Equations, and Their Construction with Maple System // Lobachevskii J. Mathematics. 2019. V. 40. № 7. P. 851–860.
11. Aristov I., Kholomeeva A.A., Moiseev E.I. Application of the Painleve Test to a Nonlinear Partial Differential Equation // Lobachevskii J. Mathematics. 2022. V. 43. № 7. P. 1791–1794.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

О СЛАБОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ С ПАМЯТЬЮ¹⁾

© 2023 г. В. Г. Звягин^{1,*}, В. П. Орлов^{1,**}¹ 394018 Воронеж, Университетская площадь, 1, Воронежский гос. ун-т, Россия

*e-mail: zvg_vsu@mail.ru

**e-mail: orlov_vp@mail.ru

Поступила в редакцию 14.01.2023 г.
Переработанный вариант 14.01.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

В настоящей работе устанавливается существование слабых решений начально-краевой задачи для уравнений движения вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траекторий негладкого поля скоростей и неоднородным граничным условием. Исследование предполагает аппроксимацию исходной задачи приближениями галеркинских типа с последующим предельным переходом на основе априорных оценок. Для исследования поведения траекторий негладкого поля скоростей используется теория регулярных лагранжевых потоков. Библ. 17.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, неоднородные условия, априорные оценки, слабое решение, регулярный лагранжев поток.

DOI: 10.31857/S0044466923110297, EDN: CTVFFN

1. ВВЕДЕНИЕ

В $Q_T = [0, T] \times \Omega$, где $\Omega \in R^N$, $N = 2, 3$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, рассматривается движение вязкоупругой жидкости типа Олдройда (см. [1]), описываемое начально-краевой задачей

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \sum_{i=1}^N u_i(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta u(t, x) - \mu_1 \operatorname{Div} \int_{\tau_u(t, x)}^t \exp((s-t)/\lambda) \mathcal{E}(u)(s, z(s; t, x)) ds +$$

$$+ \operatorname{grad} p(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in Q_T; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad \int_{\Omega} p(t, x) dx = 0; \quad t \in [0, T]; \quad (1.2)$$

$$u(0, x) = u^0(x), \quad x \in \Omega; \quad u(t, x) = \varphi(x), \quad t \in [0, T], \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.3)$$

Здесь $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x))$ и $p(t, x)$ – векторная и скалярная функции, означающие скорость движения и давление среды, $f(t, x)$ – плотность внешних сил, $\mathcal{E}(u) = \{\mathcal{E}_{ij}(u)\}_{i,j=1}^N$ – тензор скоростей деформаций, т.е. матрица с коэффициентами $\mathcal{E}_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$. Дивергенция $\operatorname{Div} \mathcal{E}(u)$ матрицы определяется как вектор с компонентами – дивергенциями строк, $\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geq 0$, $\lambda > 0$ – константы, характеризующие вязкоупругие свойства жидкости, u^0 и φ – заданные начальное и граничное значения функции u . Вектор-функция $z(\tau; t, x)$ определяется как решение задачи Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega. \quad (1.4)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта № 22-11-00103).

Функция $z(\tau; t, x)$ определяет траекторию движения частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$. Функция $\tau_u(t, x)$ определяется как $\tau_u(t, x) = \inf\{\tau: z(s; t, x) \in \Omega, s \in [\tau, t]\}$ и означает момент времени, начиная с которого частица жидкости, которая в момент времени t находится в точке $x \in \Omega$, начинает свое движение к x по Ω .

При $\tau_u(t, x) = 0$ движение данной частицы начинается с нулевого момента времени. Если $\tau_u(t, x) > 0$, то в этот момент времени частица занимает положение $z(\tau_u(t, x); t, x) \in \partial\Omega$, и $\tau_u(t, x)$ означает момент вхождения данной частицы в Ω через $\partial\Omega$.

В случае однородного граничного условия ($\varphi = 0$) поле скоростей $u(t, x)$ равно нулю на границе $\partial\Omega$, решение $z(\tau_u(t, x); t, x)$ задачи Коши (1.4) определено при всех $\tau \in [0, T]$, и, следовательно, $\tau_u(t, x) = 0$ в (1.1). В этом случае для различных моделей вязкоупругих сред нелокальные теоремы существования и единственности слабых и сильных решений для систем вида (1.1)–(1.4) устанавливались в [2–8].

В случае неоднородного условия на $u(t, x)$ на границе $\partial\Omega$, промежуток $\tau_u(t, x) \leq \tau \leq t$, на котором существует решение задачи Коши (1.4), может начинаться в момент $\tau_u(t, x) > 0$, что и определяет появление $\tau_u(t, x) > 0$ в пределе интегрирования в (1.1).

Заметим, что наличие интеграла в (1.1) означает (см. [9, гл. 7]) наличие памяти среды вдоль траекторий поля скоростей. В большинстве работ по разрешимости начально-краевых задач гидродинамики, в уравнение движения которых не входят интегродифференциальные слагаемые, неоднородный случай сводится к однородному сдвигом скорости (см., например, [10, 11, с. 118]). При этом неоднородная задача становится нетривиальной в случае многосвязной границы области Ω и ненулевых потоках на частях границы (о результатах в этом направлении см., например, обзор [12]). Но в случае задачи с памятью вдоль траекторий уже в случае односвязной границы появляются существенные дополнительные трудности, связанные с поведением траекторий поля скоростей в окрестности границы. В этой связи заметим, что с формальной точки зрения трудности связаны с наличием в (1.1) интеграла с переменным нижним пределом $\tau_u(t, x)$. Это сильно усложняет задачу, поскольку сказывается на дифференциальных свойствах выражения под знаком Div в (1.1).

Еще одним важным обстоятельством является следующее. При исследовании слабой разрешимости поле скоростей $u \in L_1(0, T; W_2^1(\Omega)^N)$, и не существует, вообще говоря, классического решения задачи Коши (1.4). Поэтому для разрешимости задачи Коши (1.4) приходится привлекать теорию регулярных лагранжевых потоков (РЛП) (см. разд. 6), обобщающих понятие классического решения.

В настоящей работе мы устанавливаем слабую разрешимость задачи (1.1)–(1.4). Мы предполагаем границу области и граничную функцию достаточно гладкими, чтобы избежать излишних вычислительных сложностей в доказательствах, хотя основные результаты справедливы и при более слабых ограничениях.

Далее структура работы следующая. Обозначения и вспомогательные результаты приводятся в разд. 2. В разд. 3 формулируется основной результат. В разд. 4 исследуются приближения галерского типа для основной задачи. Доказательство основного результата проводится в разд. 5. В разд. 6 приводятся факты из теории регулярных лагранжевых потоков.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Функциональные пространства

Нам понадобятся гильбертовы пространства V и H (см. [13, разд. III.1.4]) соленоидальных функций. Символом $C_0^\infty(\Omega)^N$ обозначается множество бесконечно дифференцируемых отображений Ω в R^N , $N = 2, 3$, с компактным носителем в Ω . Пусть $\mathcal{V} = \{v: v \in C_0^\infty(\Omega)^N, \operatorname{div} v = 0\}$. Обозначим через H и V замыкание $\mathcal{V}$ в нормах пространств $L_2(\Omega)^N$ и $W_2^1(\Omega)^N$ соответственно. Через V^{-1} обозначим пространство, сопряженное к V .

Обозначим через $\langle f, v \rangle$ действие функционала f из пространства V^{-1} на функцию v из V . Отождествление гильбертова пространства H с его сопряженным V^{-1} и теорема Рисса приводят к непрерывным вложениям $V \subset H = H^{-1} \subset V^{-1}$. При этом для $u \in V$ и $w \in V^{-1}$ справедливо соотношение $\langle u, w \rangle = (u, w)$ со скалярным произведением в H .

Через $W_2^k(\partial\Omega)$ обозначаются пространства Соболева на границе $\partial\Omega$ (см. [14, стр. 82]). Нормы в пространствах H и $L_2(\Omega)^N$ будем обозначать $|\cdot|_0$, в V как $|\cdot|_1$. Нормы в пространствах V^{-1} , $W_2^{-1}(\Omega)^N$ и $W_2^{-1}(\Omega)^{N \times N}$ будем обозначать $|\cdot|_{-1}$. Нормы в $L_2(0, T; H)$ и $L_2(0, T; L_2(\Omega)^N)$, обозначаются $\|\cdot\|_0$, нормы в $L_2(0, T; V)$ и $L_2(0, T; W_2^1(\Omega)^N)$ как $\|\cdot\|_{0,1}$, а норма в пространстве $L_2(0, T; V^{-1})$ как $\|\cdot\|_{0,-1}$.

Через $(\cdot, \cdot)$ обозначается скалярное произведение в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)$, H , $L_2(\Omega)^N$, $L_2(\Omega)^{N \times N}$, в каких именно — ясно из контекста.

2.2. Граничная функция

Нам будет удобно считать, что область Ω содержится в ограниченной области Ω_0 с гладкой границей $\partial\Omega_0$, так что $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$. Будем предполагать, что граница Ω задается уравнением $\Phi(x) = 0$, где гладкая функция $\Phi(x) : \Omega_0 \rightarrow R^1$ такова, что $\Phi(x) < 0$ при $x \in \Omega$ и $\Phi(x) > 0$ при $x \in \Omega_0 \setminus \overline{\Omega}$.

Вследствие уравнения неразрывности (1.2) функция φ должна удовлетворять условию

$$a) \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \cdot n(x) dx = 0, \quad \varphi(x) \cdot n(x) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) n_i(x).$$

Здесь $n(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$ — вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$.

Так как поведение решений задачи Коши (1.4) в окрестности $\partial\Omega$ тесно связано с граничной функцией $\varphi(x)$, с целью упростить технические моменты доказательств, мы наложим на $\varphi(x)$ некоторые дополнительные условия:

б) граничная функция $\varphi(x)$ является следом на $\partial\Omega$ непрерывно дифференцируемой на Ω_0 соленоидальной функции $a(x)$, равной нулю на $\partial\Omega_0$. Таких функций $a(x)$ существует бесконечно много (см. [10]).

в) в точках $\Gamma_0 = \{x : x \in \partial\Omega, \varphi(x) \cdot n(x) = 0\}$ траектории $z_a(s; t, x)$ поля скоростей $a(x)$ (решения задачи Коши $z_a(s; t, x) = x + \int_t^s a(z_a(s; t, x)) ds$, $s, t \in [0, T]$, $x \in \Omega_0$), начинающиеся в точках $x \in \Gamma_0$, при $s > t$, близких к t , не принадлежат Ω .

Если определяемое функцией $\varphi(x)$ множество Γ_0 устроено достаточно просто, то такую функцию $a(x)$ можно построить, используя соображения [10, 13], с. 366. Например, если Ω выпукла и $\Gamma_- = \{x : x \in \partial\Omega, \varphi(x) \cdot n(x) < 0\}$ и $\Gamma_+ = \{x : x \in \partial\Omega, \varphi(x) \cdot n(x) > 0\}$ разделены множеством Γ_0 , которое состоит из конечного множества непересекающихся гладких линий $\gamma_k \in \partial\Omega$ при $N = 3$, или Γ_0 является конечным набором точек при $N = 2$.

Заметим, что двигаясь в $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega}$ по траектории поля скоростей $a(x)$, в точках множества Γ_0 частицы жидкости касаются границы $\partial\Omega$, не входят в Ω , в то время как в точках множества Γ_- входят в Ω , т.е. жидкость втекает в Ω , а в точках множества Γ_+ выходят из Ω , т.е. жидкость вытекает из Ω .

Заметим, что можно было бы с самого начала предполагать гладкость $\varphi(x)$ и считать, что Γ_0 разделяет Γ_- и Γ_+ и состоит из конечного множества непересекающихся гладких линий $\gamma_k \in \partial\Omega$ при $N = 3$, или Γ_0 является конечным набором точек при $N = 2$, а затем строить продолжение $a(x)$ в Ω и $\Omega_0 \supset \overline{\Omega}$ гладким образом, что в контексте статьи не является принципиальным.

2.3. Задача Коши

В случае $u \in L_2(0, T; W^1(\Omega)^N)$, вообще говоря, не существует классического решения задачи Коши (1.4), и ее разрешимость будем понимать в следующем смысле. Положим $u(t, x) = v(t, x) + a(x)$, $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$. Очевидно, что $v \in L_2(0, T; V)$. Продолжив функцию v нулем из Ω в Ω_0 и обозначив продолжение через v^* , имеем $u^* = v^* + a$. Тогда очевидно, что $u^* = u$ в Ω , $u = a$ в $\Omega_0 \setminus \Omega$ и $u^* \in L_2(0, T; \dot{W}_1^2(\Omega_0)^N)$. Наряду с задачей (1.4) рассмотрим задачу Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau (v^* + a)(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0. \quad (2.1)$$

Так как $v^* + a \in L_2(0, T; \dot{W}_1^2(\Omega_0)^N)$, то существует единственный РЛП, порожденный функцией $u^* = v^* + a$ (см. [15, 16] и разд. 6 данной статьи). В частности, это означает, что задача Коши (2.1) имеет абсолютно непрерывное по τ решение $z(\tau; t, x)$ при п.в. $x \in \Omega_0$. Обозначим через Z оператор, ставящий в соответствие функции v порожденный функцией $u^* = v^* + a$ РЛП, так что $Z(v) = z$. Ниже, говоря о решении $z(\tau; t, x)$ задачи Коши (1.4), мы будем иметь в виду $z(\tau; t, x) = Z(v)(\tau; t, x)$ при п.в. $x \in \Omega$ (сужение $Z(v)$ на Ω).

При $x \in \Omega$ точка $z(\tau; t, x) \in \bar{\Omega}$ только если $\tau \in [\tau_u(t, x), t]$. При этом функция $z(\tau; t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.4) при $\tau \in [\tau_u(t, x), t]$.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для формулировки основного результата нам будет удобно переписать задачу (1.1)–(1.4) в другом виде. Пусть $v = u - a$, где a отмеченная в разделе 2.2 функция. Полагая $u = v + a$, перепишем задачу (1.1)–(1.4) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + \sum_{i=1}^N v_i(t, x) \partial v(t, x) / \partial x_i - \mu_0 \Delta v(t, x) + \text{grad } p(t, x) = \\ & = f(t, x) - \sum_{i=1}^N v_i(t, x) \partial a(t, x) / \partial x_i - \sum_{i=1}^N a_i(t, x) \partial v(t, x) / \partial x_i + \mu_0 \Delta a(x) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\mu_1 \text{Div} \int_{\tau(t, x)}^t \exp((s-t)/\lambda) \mathcal{E}(v+a)(s, Z(v)(s; t, x)) ds \quad (t, x) \in Q_T;$$

$$\text{div } v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad \int_{\Omega} p(t, x) dx = 0; \quad t \in [0, T]; \quad (3.2)$$

$$v(0, x) = v^0(x), \quad x \in \Omega, \quad v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in S_T = \{(t, x) : t \in [0, T], x \in \partial\Omega\}. \quad (3.3)$$

Здесь $\tau(t, x) = \inf\{\tau : z(s; t, x) \in \Omega, s \in [\tau, t]\}$, $v^0 = u^0 - a$.

Нас будет интересовать разрешимость в слабом смысле задачи (3.1)–(3.3). Введем пространство

$$W_1 = \{v : v \in L_2(0, T; V), v' \in L_1(0, T; V^{-1})\}.$$

Здесь v' означает производную по t функции $v(t, \cdot)$ как функции со значениями в V^{-1} . Пусть

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Omega} u_i v_j \partial w_j / \partial x_i dx, \quad \text{где } u, v, w \in V.$$

Определение 3.1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in H$. Слабым решением задачи (3.1)–(3.3) называется функция $v \in W_1$, удовлетворяющая условию (3.3) и тождеству

$$\begin{aligned} d(v, \phi)/dt - \sum_{i=1}^N (v_i v, \partial \phi / \partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\phi)) + \\ + \mu_1 \left(\int_{\tau(t, x)}^t \exp((s-t)/\lambda) \mathcal{E}(v+a)(\tau, Z(v)(\tau; t, x)) d\tau, \mathcal{E}(\phi) \right) = \\ = \langle f, \phi \rangle + b(v, a, \phi) + b(a, v, \phi) + b(a, a, \phi) - \mu_0(\mathcal{E}(a), \mathcal{E}(\phi)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

при любой $\phi \in V$ и п.в. $t \in [0, T]$.

Замечание. В силу вложения $W_1(0, T) \subset C_{weak}([0, T], H)$ (см. [13, лемма III.1.4]) начальное условие (3.3) имеет смысл.

Сформулируем основной результат.

Теорема 3.1. Пусть для ϕ выполняются условия а)–в) п. 2.2. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in H$. Тогда существует слабое решение задачи (3.1)–(3.3).

4. ГАЛЕРКИНСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗАДАЧИ (3.1)–(3.3)

4.1. Построение галеркинских приближений

Обозначим через A действующий в H оператор с областью определения $D(A) = W_2^2(\Omega)^N \cap \overset{\circ}{W}_1^2(\Omega)^N \cap H$, определенный дифференциальным выражением $Av = -\mathcal{P} \operatorname{Div} \mathcal{E}(v)$. Здесь $\mathcal{P}$ – оператор ортогонального проектирования в $L_2(\Omega)$ на подпространство H . Оператор A является положительно определенным самосопряженным оператором (см. [11], разд. 2.4). Ортонормированная система собственных векторов $e_i = (e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{iN})$, $i = 1, 2, \dots$ образует базис в H .

Зафиксируем натуральное число n . Обозначим через $\mathcal{P}_n$ оператор ортогонального проектирования в H на подпространство H_n , порожденное элементами $e_1, e_2, \dots, e_n$. Пользуясь плотностью множества гладких функций в $L_2(0, T; V^{-1})$, аппроксимируем $f(t, x)$ последовательностью гладких по t и x функций $f^n(t, x)$, так что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f(t, x) - f^n(t, x)\|_{0, -1} = 0$.

Будем искать галеркинские приближения v^n в виде

$$v^n(t, x) = \sum_{k=1}^n g_k(t) e_k(x) \quad (4.1)$$

как решение тождества

$$\begin{aligned} d(v^n, \phi)/dt - \sum_{i=1}^3 (v_i^n v^n, \partial \phi / \partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v^n), \mathcal{E}(\phi)) + \\ + \mu_1 \left(\int_{\tau^n(t, x)}^t \exp((s-t)/\lambda) \mathcal{E}(v^n+a)(\tau, z^n(\tau; t, x)) d\tau, \mathcal{E}(\phi) \right) = \\ = \langle f^n, \phi \rangle + b(v^n, a, \phi) + b(a, v^n, \phi) + b(a, a, \phi) - \mu_0(\mathcal{E}(a), \mathcal{E}(\phi)) \end{aligned} \quad (4.2)$$

при любой $\phi \in H_n$ и п.в. $t \in [0, T]$, $v^n(0, x) = \sum_{k=1}^n v_k^0 e_k(x)$, $v_k^0 = \sum_{k=1}^n (v^0(x), e_k(x))$.

Здесь z^n – решение задачи Коши

$$z^n(\tau, t, x) = x + \int_t^\tau (v^n + a)(s, z^n(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \overline{\Omega}_0, \quad (4.3)$$

а $\tau^n(t, x) = \inf \{ \tau : z^n(s; t, x) \in \Omega, s \in [\tau, t] \}$. При этом мы считаем, что функции $e_k(x)$ продолжены нулем из Ω в Ω_0 , так что и функции $v^n(t, x)$ считаем равными нулю в $\Omega_0 \setminus \Omega$.

Сведем задачу нахождения функции $v^n(t, x)$ к задаче нахождения функций $g_i(t)$.

Полагая в (4.2) $\varphi = e_i$ и опуская непринципиальный в вычислениях множитель $\exp((s - t)/\lambda)$, получим соответствующую интегродифференциальную систему

$$\begin{aligned} g'_i(t) + D_i(g) + \sum_{k=1}^n d_{ki} g_k(t) + \mu_0 \lambda_i g_i(t) &= w_{g,i}(t), \\ w_{g,i}(t) &= f_i^n(t) - k_i + \mu_1 \left(\int_{\tau^n(t,x)}^t \sum_{k=1}^n g_k(s) \mathcal{E}(e_k(x)) (z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x)) \right) + \\ &+ \mu_1 \left(\int_{\tau^n(t,x)}^t \sum_{k=1}^n g_k(s) \mathcal{E}(a) (z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x)) \right), \quad g_i(0) = v_i^0, \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$z^n(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau (v^n + a)(s, z^n(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0, \quad (4.5)$$

где

$$\tau^n(t, x) = \inf\{\tau : z^n(s; t, x) \in \Omega, s \in [\tau, t]\}.$$

Здесь $f_i^n(t) = (f^n, e_i)$, $\sum_{k,r=1}^n d_{kri} g_k(t) g_r(t) \equiv D_i(g)$, $d_{kri} = -\sum_{j=1}^N (e_{kj} e_r, \partial e_i / \partial x_j)$, d_{ki} и k_i — некоторые числа.

Выясним свойства решений систем (4.4) и (4.5).

Рассмотрим сначала задачу Коши (4.5). Если бы мы рассматривали задачу Коши (4.5) при $(t, x) \in Q_T = [0, T] \times \Omega$, то из-за ненулевого условия для поля скоростей $v^n + a$ на границе Ω решения задачи (4.5) могли бы быть определены не на всем промежутке $[0, T]$, а лишь на промежутке существования полного решения задачи Коши (см. [17]).

Рассматривая задачу Коши при $(t, x) \in Q = [0, T] \times \Omega_0$, мы продолжим нулем функции $e_k(x)$ на Ω_0 , сохраняя для продолжения прежнее обозначение. Пусть $Q_0 = Q_+ \cup Q_-$, где $Q_+ = [0, T] \times \Omega$, $Q_- = [0, T] \times (\Omega_0 \setminus \Omega)$. Из (4.1) следует, что поле скоростей $v^n + a$ непрерывно на $Q = [0, T] \times \Omega_0$ и непрерывно дифференцируемо на $\bar{Q}_+$ и $\bar{Q}_-$. Ясно, что поле скоростей $v^n + a$ удовлетворяет условию Липшица на Q и равно нулю на границе $\partial\Omega_0$ (но не на границе $\partial\Omega$). Тогда решения $z^n(\tau; t, x)$ задачи Коши (4.5) существуют и определены для всех $\tau \in [0, T]$, непрерывно дифференцируемы по $\tau \in [0, T]$ и по начальным данным $(t, x) \in Q_+$ и $(t, x) \in Q_-$.

Пусть $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$. Введем оператор Z , ставящий в соответствие функции $g(t)$ решение $z(\tau; t, x)$ задачи Коши (4.5), так что $Z(g) = z(\tau; t, x)$.

Здесь и ниже мы опускаем верхний индекс n у функций z^n , g^n , v^n , τ^n для удобства.

Пусть $G_0 = [0, T] \times [0, T] \times \Omega_0$, $G_+ = [0, T] \times [0, T] \times \Omega$, $G_- = [0, T] \times [0, T] \times (\Omega_0 \setminus \Omega)$. Справедлива

Лемма 4.1. *Оператор $Z : C[0, T]^n \rightarrow C(G_0)^N$ непрерывен. Кроме того, $Z : C[0, T]^n \rightarrow C^1(\bar{G}_+)^N$, $Z : C[0, T]^n \rightarrow C^1(\bar{G}_-)^N$ ограничен.*

Доказательство. Пусть $S(R) = \{g(t) : \|g\|_{C(0,T)^n} \leq R\}$. Пусть $g^1, g^2 \in S(R)$, а $z^1(\tau; t, x), z^2(\tau; t, x)$ — решения соответствующих задачи Коши (4.5). Пользуясь (4.5) и гладкостью e_k и a , стандартным образом устанавливается, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при любых $g^1, g^2 \in S(R)$, таких, что $\|g^1 - g^2\|_{C(0,T)^n} \leq \delta$ справедливо неравенство $\|z^1(\tau; t, x) - z^2(\tau; t, x)\|_{C(G_0)^N} \leq \varepsilon$.

Второе утверждение леммы следует из непрерывной зависимости и дифференцируемости решения $z(\tau; t, x)$ задачи Коши (4.5) по начальным данным t, x и гладкости e_k и a и стандартным образом устанавливаемого неравенства $\|Z(g)\|_{C(G_0)^N} \leq M(R)$ для всех $g \in S(R)$.

Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. Оператор $Z : C[0, T]^n \rightarrow C(G_0)^N$ равномерно непрерывен на $S(R)$.

Доказательство. Пусть $g^i(t) = (g_1^i(t), g_2^i(t), \dots, g_n^i(t)) \in S(R)$, $i = 1, 2$, и пусть $z^i(\tau; t, x)$ являются решениями задач Коши

$$z^i(\tau; t, x) = x + \sum_{k=1}^n \int_t^\tau g_k(s) e_k(z^i(s; t, x)) ds + \int_t^\tau a(s, z^i(s; t, x)) ds, \quad (4.6)$$

$$\tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $r > 0$ и $\bar{y}(t) = \exp(rt)y(t)$ для произвольной $y(t)$. Из (4.6) следует, что

$$\begin{aligned} \bar{z}^2(\tau; t, x) - \bar{z}^1(\tau; t, x) &= \sum_{k=1}^n \int_t^\tau \exp(r(\tau - s)) (\bar{g}_k^2(s) - \bar{g}_k^1(s)) e_k(z^2(s; t, x)) ds + \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_t^\tau g_k^2(s) \exp(k\tau) (e_k(z^2(s; t, x)) - e_k(z^1(s; t, x))) ds + \int_t^\tau \exp(r\tau) (a(s, z^2(s; t, x)) - \\ &- a(s, z^1(s; t, x))) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (4.7) и гладкости $e_k(x)$ и $a(x)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} |\bar{z}^2(\tau; t, x) - \bar{z}^1(\tau; t, x)| &\leq M_1 \int_\tau^t \exp(r(\tau - s)) \|\bar{g}^2(s) - \bar{g}^1(s)\|_{C[0, T]^n} ds + \\ &+ M_2 \int_\tau^t \exp(r(\tau - s)) |\bar{z}^2(s; t, x) - \bar{z}^1(s; t, x)| ds \leq M_1 \int_\tau^t \exp(r(\tau - s)) ds \|\bar{g}^2(s) - \bar{g}^1(s)\|_{C[0, T]^n} + \\ &+ M_2 \int_\tau^t \exp(r(\tau - s)) |ds \max_{\tau \leq s \leq t} |\bar{z}^2(s; t, x) - \bar{z}^1(s; t, x)|, \quad \tau \leq t. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из (4.8) следует, что

$$\max_{\tau \leq s \leq t} |\bar{z}^2(s; t, x) - \bar{z}^1(s; t, x)| \leq M_3 \|\bar{g}^2(t) - \bar{g}^1(t)\|_{C[0, T]^n} + M_4 r^{-1} \max_{\tau \leq s \leq t} |\bar{z}^2(s; t, x) - \bar{z}^1(s; t, x)|, \quad \tau \leq t.$$

Выбирая $r > 0$ достаточно большим, получаем отсюда неравенство

$$\max_{\tau \leq s \leq t} |\bar{z}^2(s; t, x) - \bar{z}^1(s; t, x)| \leq M_5 \|\bar{g}^2(t) - \bar{g}^1(t)\|_{C[0, T]^n}, \quad \tau \leq t.$$

Из ограниченности $\exp(kt)$ на $[0, T]$ сверху и снизу следует, что

$$\max_{\tau \leq s \leq t} |z^2(s; t, x) - z^1(s; t, x)| \leq M_6 \|g^2(t) - g^1(t)\|_{C[0, T]^n}, \quad \tau \leq t. \quad (4.9)$$

Неравенство

$$\max_{\tau \leq s \leq t} |z^2(s; t, x) - z^1(s; t, x)| \leq M_7 \|g^2(t) - g^1(t)\|_{C[0, T]^n}, \quad \tau \geq t, \quad (4.10)$$

легко получается с помощью леммы Гронуолла.

Из неравенств (4.9)–(4.10) вытекает, что

$$\max_{0 \leq s \leq T, (t, x) \in Q_T} |z^2(s; t, x) - z^1(s; t, x)| \leq M_8 \|g^2(t) - g^1(t)\|_{C[0, T]^n} ds. \quad (4.11)$$

Отсюда следует утверждение леммы 4.2.

Лемма 4.2 доказана.

Пусть $z(\tau; t, x)$ является решением задачи Коши (4.5). Рассмотрим на Q_T функцию $\tau(t, x) = \inf\{s : z(\tau; t, x) \in \Omega, 0 \leq s \leq \tau \leq t\}$. Имеет место

Лемма 4.3. Справедливо соотношение $\tau(t, x) \in C(Q_T)$.

Доказательство. Зафиксируем $(t, x) \in Q_T$. Пусть $\tau(t, x) = 0$ и $z(0; t, x) \in \Omega$. Тогда непрерывность $\tau(t, x)$ в точке (t, x) является следствием непрерывности по начальным данным решения задачи Коши (4.5).

Пусть $\tau(t, x) > 0$. Тогда $z(\tau(t, x); t, x) \in \partial\Omega$. Обозначим $\tau_* = \tau(t, x)$, $z_* = z(\tau_*; t, x)$. Тогда $z_* \in \partial\Omega$, $\Phi(z_*) = 0$, $\Phi(z(\tau; t, x)) < 0$ при $\tau \in (\tau_*, t]$. Из условия б) раздела 2.2 вытекает, что $z_* \notin Z_0$, так как в противном случае траектория $z(\tau; t, x)$ при $\tau \geq \tau_*$ должна входить в Ω из $\Omega_0 \setminus \Omega$ и в то же время должна при τ_* по касательной уходить в $\Omega_0 \setminus \bar{\Omega}$, что невозможно в силу единственности решения задачи Коши. Таким образом, $z_* \in Z_-$.

Из непрерывности функции $z(\tau; t, x)$ и условия б) следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\tau_1 \in (\tau_* - \varepsilon, \tau_*)$, что $\Phi(z(\tau_1; t, x)) > 0$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_*]$. Из непрерывности же функции $z(\tau; t, x)$ следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $S_\delta = \{(t', x') : |t - t'| \leq \delta, |x - x'| \leq \delta\}$ выполнялось неравенство $\Phi(z(\tau_1; t', x')) > 0$ и $|z(\tau_1; t', x') - z(\tau_1; t, x)| < d/2$, где $d = \text{dist}(z(\tau_1; t, x), \partial\Omega)$.

В случае $\tau(t', x') \in [\tau_1, \tau_*]$ имеем $\tau(t, x) - \tau(t', x') \leq \varepsilon$. Покажем, что если $\tau(t', x') > \tau_*$, то $\tau(t', x') - \tau(t, x) \leq \varepsilon$ при достаточно малом $\delta > 0$. Допустим, что это не так. Тогда найдется последовательность (t'', x'') , сходящаяся к (t, x) при $n \rightarrow +\infty$, такая что $\tau(t'', x'') \geq \tau_* + \varepsilon$ и $\Phi(z(\tau(t''), x''); t'', x'')) = 0$. Выберем из последовательности (t'', x'') подпоследовательность, сходящуюся к некоторому $\bar{\tau} \geq \tau_* + \varepsilon$ (пусть это будет сама последовательность (t'', x'')).

Пользуясь непрерывностью функций Φ и z и переходя к пределу в соотношении $\Phi(z(\tau(t''), x''); t'', x'')) = 0$, получаем $\Phi(z(\bar{\tau}; t, x)) = 0$. Но это означает, что $z(\bar{\tau}; t, x) \in \partial\Omega$ при $\bar{\tau} > \tau_*$, чего быть не может.

Таким образом, если $\tau(t', x') > \tau_*$, то $\tau(t', x') - \tau(t, x) \leq \varepsilon$ при достаточно малом $\delta > 0$.

Следовательно, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $(t', x') \in S_\delta$ выполняется неравенство $|\tau(t', x') - \tau(t, x)| < \varepsilon$.

Случай $\tau(t, x) = 0$ и $z(\tau(t, x); t, x) \in \partial\Omega$ рассматривается аналогично предыдущему случаю с некоторыми упрощениями. Непрерывность функции $\tau(t, x)$ установлена.

Лемма 4.3 доказана.

Поставим в соответствие функции $g(t)$, определяющей задачу Коши (4.5), функцию $\tau_g(t, x)$, тем самым определяя оператор $\mathcal{T}(g) = \tau_g(t, x)$.

Пусть $S_g(R) = \{g : \|g\|_{C(0, T)^n} \leq R\}$, $R > 0$ — произвольное число.

Лемма 4.4. Оператор $\mathcal{T} : C[0, T]^n \rightarrow C(Q_T)$ непрерывен на $S_g(R)$.

Доказательство. Рассмотрим фиксированную $g^*(t) \in S_g(R)$ и соответствующие ей $z^*(\tau; t, x)$ и $\tau^*(t, x)$. Пусть последовательность $g^k(t) \in S_g(R)$ такова, что $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|g^k - g^*\|_{C(0, T)^n} = 0$. Пусть $g^n(t)$ соответствуют функции $z^k(\tau; t, x)$ и $\tau^k(t, x)$. Покажем, что $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\tau^k(t, x) - \tau^*(t, x)\|_{C(Q_T)} = 0$. Предположим, что это не так. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ существует подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение), для которой выполняется $\|\tau^k(t, x) - \tau^*(t, x)\|_{C(Q_T)} \geq \varepsilon$. Отсюда следует, что существует подпоследовательность (сохраним за ней прежнее обозначение) такая, что при некотором $(t, x) \in Q_T$ выполняется $|\tau^k(t, x) - \tau^*(t, x)| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим сначала случай $\tau^*(t, x) > 0$. Заметим, что тогда $z^*(\tau^*; t, x) \in \partial\Omega$ и $\Phi(z^*(\tau^*; t, x)) = 0$. Предположим, что на некоторой подпоследовательности имеем $\tau^k(t, x) - \tau^*(t, x) \geq 0$ (случай $\tau^k(t, x) - \tau^*(t, x) \leq 0$ рассматривается аналогично). Тогда можно считать, что $\tau^k(t, x) \rightarrow \bar{\tau}(t, x) \geq \tau^*(t, x) + \varepsilon_0$. Так как $z^k(\tau^k(t, x); t, x) \in \partial\Omega$ и $\Phi(z^k(\tau^k; t, x)) = 0$. Из последнего соотношения в силу непрерывности $\Phi(t, x) = 0$ и сходимостей $z^k(\tau; t, x) \rightarrow z^*(\tau; t, x)$ и $\tau^k(t, x) \rightarrow \bar{\tau}(t, x)$ вытекает, что $\Phi(z^*(\bar{\tau}; t, x)) = 0$ при $\bar{\tau}(t, x) > \tau^*(t, x)$, что невозможно.

Случай $\tau^*(t, x) = 0$ рассматривается аналогично.

Непрерывность оператора $\mathcal{T}$ установлена.

Лемма 4.4 доказана.

Рассмотрим теперь соответствующую первому уравнению системы (4.4) задачу

$$g'_i(t) + D_i(g) + \sum_{k=1}^n d_{ki} g_k(t) + \mu_0 \lambda_i g_i(t) = w_i(t), \quad g_i(0) = v_i^0, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.12)$$

Здесь $g = (g_1, \dots, g_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$.

Лемма 4.5. Пусть $w(t) \in C(0, T)^n$. Тогда система (4.12) однозначно разрешима и справедлива оценка

$$\|g(t)\|_{C(0, T)^n} \leq M(\|w(t)\|_{C(0, T)^n} + |v^0|_0). \quad (4.13)$$

Доказательство. Однозначная разрешимость системы (4.12) вытекает из общих свойств решения задачи Коши для систем ОДУ с гладкими данными (см., например, [17]). В [13, разд. III.3.2], для соответствующей решению системы (4.12) функции $v^n(t, x) = \sum_{k=1}^n g_k(t) e_k(x)$ установлена оценка

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |v^n(t)|_0 + \|v^n\|_{0,1} \leq M_0(\|\tilde{w}\|_{0,-1} + |v^0|_0), \quad (4.14)$$

где $\tilde{w}(t, x) = \sum_{k=1}^n w_k(t) e_k(x)$. Так как $\|\tilde{w}\|_{0,-1} \leq \|w(t)\|_{L_2(0, T)^n} \leq \|w(t)\|_{C(0, T)^n}$, а $|v^n(t)|_0^2 = \|g(t)\|_{L_2(0, T)^n}^2$, то из (4.14) вытекает неравенство (4.13).

Лемма 4.5 доказана.

Введем оператор G , ставящий в соответствие функции $w(t)$ решение $h(t)$ системы (4.12), так что $G(w) = g(t)$.

Пусть $S_w(R) = \{w : \|w\|_{C(0, T)^n} \leq R\}$. Справедлива

Лемма 4.6. Оператор $G : C[0, T]^n \rightarrow C[0, T]^n$ непрерывен на $S_w(R)$.

Утверждение леммы вытекает из общих свойств решения задачи Коши для систем ОДУ с гладкими данными (см., например, [17]).

Введем множество $\mathcal{B}(R) = \{g : g = G(w), w \in S_w(R)\}$.

Лемма 4.7. Множество $\mathcal{B}(R)$ компактно в $C(0, T)^n$.

Доказательство. Равномерная ограниченность $\mathcal{B}(R)$ в $C(0, T)^n$ следует из леммы 4.6.

Из (4.12) и леммы 4.6 вытекает неравенство $\|g'(t)\|_{C(0, T)}^n \leq M(R)$ с некоторой константой $M(R)$ для всех $g \in \mathcal{B}(R)$. Отсюда следует равностепенная непрерывность $\mathcal{B}(R)$.

Применение критерия Арцела (см., например, [14], с. 32) дает утверждение леммы.

Лемма 4.7 доказана.

4.2. Операторное уравнение

Обозначим правую часть (4.4), зависящую от $g(t) = (g_1, \dots, g_n)$, $z^n(\tau^1; t, x)$, и $\tau(t, x)$ как $\mathcal{G}_i(g, z, \tau)$, и пусть $\mathcal{G}(g, z, \tau) = (\mathcal{G}_1(g, z, \tau), \dots, \mathcal{G}_n(g, z, \tau))$. Тем самым определяется оператор $\mathcal{G} : C[0, T]^n \times C(Q_0)^n \times C[0, T] \rightarrow C[0, T]^n$. Пусть произвольная функция $w \in C[0, T]^n$. Поставим в соответствие w функцию $g = G(w)$, затем поставим в соответствие g функцию $z = Z(g) = Z(G(w))$, затем поставим в соответствие z функцию $\tau = \mathcal{T}(z) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$. Обозначим $\mathcal{Z}(w) = Z(G(w))$ и

$Y(w) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$. Таким образом, мы поставили в соответствие w функцию $z(s; t, x) = \mathcal{Z}(w)$, где $\mathcal{Z}(w) = Z(G(w))$ и функцию $\tau(t, x) = Y(w)$, где $Y(w) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$. Тогда из (4.4) имеем

$$\begin{aligned} w_i(t) = & f_i(t) - k_i - \mu_1 \left(\int_{Y(w)(t,x)}^t \sum_{k=1}^n (G(w))_k(s) \mathcal{E}(e_k)(\mathcal{Z}(w)(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x)) \right) - \\ & - \mu_1 \left(\int_{Y(w)(t,x)}^t \sum_{k=1}^n (G(w))_k(s) \mathcal{E}(a)(\mathcal{Z}(w)(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(e_i(x)) \right), \quad 1 \leq i \leq n. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Обозначая правую часть (4.15) через $K_i(w)$, $K(w) = (K(w)_1, \dots, K(w)_n)$, получаем из (4.4) операторное уравнение

$$w = \mathcal{H}(w), \quad \mathcal{H}(w) = \mathcal{G}(G(w), \mathcal{Z}(w), Y(w)). \quad (4.16)$$

Нетрудно видеть, что из непрерывности операторов G , $\mathcal{Z}$, Y следует, что оператор $\mathcal{H}$ переводит $C(0, T)^n$ в $C(0, T)^n$.

Введем на $C(0, T)^n$ норму $\|w\|_l = \|w(t) \exp(-lt)\|_{C(0, T)^n}$, где $l > 0$. Пусть $S_l(R) = \{w : \|w\|_l \leq R\}$. Справедлива

Лемма 4.8. Пусть R достаточно велико. Тогда $\mathcal{H}(S_l(R)) \subset S_l(R)$.

Доказательство. Пусть $w \in S_l(R)$. Пользуясь леммами 4.1, 4.5, 4.6 и равенством (4.15), имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}(w)\|_l \leq & \|f(t)\|_l + \max |k_i| + \int_0^t \exp(-l(t-s)) \|G(w)(s) \exp(-ls)\|_{C(0, T)^n} ds \leq \|f(t)\|_l + \max |k_i| + \\ & + M_1 \|w(s)\|_l \int_0^t \exp(-l(t-s)) ds \leq \|f(t)\|_l + \max |k_i| + M_2 l^{-1} \|w(t)\|_l \leq \|f(t)\|_l + \max |k_i| + M_2 l^{-1} R. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Выбирая l так, чтобы $M_2 l^{-1} R < 1/2$, получаем $\|K(w)\|_l \leq M_3 (\|f(t)\|_l + \max |k_i|)$. Выбирая теперь R достаточно большим и пользуясь (4.17), получаем $\|\mathcal{H}(w)\|_l \leq R$.

Лемма 4.8 доказана.

Лемма 4.9. Оператор $\mathcal{H}$ является непрерывным и компактным на $S_l(R)$.

Доказательство. Непрерывные по норме $\|\cdot\|_{C(0, T)^n}$ операторы являются непрерывными и по норме $\|\cdot\|_l$ в силу эквивалентности этих норм, и оператор $K = \mathcal{G}(\mathcal{T}(w), \mathcal{Z}(w), Y(w))$ является непрерывным как суперпозиция непрерывных операторов.

Оператор G переводит $S_l(R)$ в компактное множество $\mathcal{B}(R)$. Следовательно, непрерывные операторы $Y(w) = \mathcal{T}(Z(G(w)))$, $\mathcal{Z}(w) = Z(G(w))$ и $\mathcal{H} = \mathcal{G}(\mathcal{T}(w), \mathcal{Z}(w), Y(w))$ переводят $S_l(R)$ в компактное множество.

Лемма 4.9 доказана.

Из лемм 4.8, 4.9 в силу принципа Шаудера вытекает

Лемма 4.10. Оператор $\mathcal{H}$ имеет на $S_l(R)$ неподвижную точку.

4.3. Разрешимость системы (4.4)–(4.5)

Теорема 4.1. Система (4.4)–(4.5) имеет решение.

Доказательство. Из леммы 10 вытекает существование неподвижной точки w оператора $\mathcal{H}$. Ясно, что $g = G(w)$ является решением системы (4.4)–(4.5), где $z^n(s; t, x) = \mathcal{Z}(w)$, $\tau^n(t, x) = Y(w)$.

Теорема 4.1 доказана.

4.4. Разрешимость интегрального тождества (4.2)

Пусть $v^n(t, x) = \sum_{k=1}^n g_k(t) e_k(x)$, где $g(t)$, $z^n(s; t, x)$, $\tau^n(t, x)$ — решение системы (4.4)–(4.5).

Теорема 4.2. Функция $v^n(t, x)$ удовлетворяет интегральному тождеству (4.2) и соотношениям (4.5), (4.3) и справедлива равномерная по n оценка

$$\sup_t \|v^n(t, x)\|_0 + \|v^n(t, x)\|_{0,1} \leq M(\|f(t)\|_{0,-1} + |v^0|_0 + M_*(a)). \quad (4.18)$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из теоремы 4.1.

Докажем оценку (4.18). Стандартными соображениями, как и в случае системы Навье–Стокса (см. [13, разд. II.1.4, стр. 141]), и опуская индексы n , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v(t, x)\|_0^2 + \mu_0 \|\mathcal{E}(v)(t, x)\|_0^2 &= \langle f(t, x), v(t, x) \rangle - \\ - \mu_1 \left(\int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(v + a)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(v)(t, x) \right) &+ b(a, a, v) + b(v, a, v) + b(a, v, v) = \sum_{i=1}^5 I_i. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Оценим слагаемые I_i .

Рассмотрим сначала I_1 . Нетрудно видеть, что при произвольном $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|I_1| \leq \|f(t, x)\|_{-1} \|v(t, x)\|_1 \leq C_1(\varepsilon) \|f(t, x)\|_{-1}^2 + \varepsilon \|v(t, x)\|_1^2. \quad (4.20)$$

В силу гладкости $a(t, x)$ получаем

$$|I_3| + |I_4| + |I_5| \leq M_0(a) \|v(t, x)\|_0^2. \quad (4.21)$$

Рассмотрим слагаемое I_2 . Очевидно, что

$$|I_2| \leq \varepsilon \|v(t, x)\|_1^2 + C_3(\varepsilon) \left\| \int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(v + a)(s, z(s; t, x)) ds \right\|_0^2 = \varepsilon \|v(t, x)\|_1^2 + C_2(\varepsilon) I_{22}. \quad (4.22)$$

Легко видеть, что в силу гладкости $a(t, x)$

$$\begin{aligned} I_{22} &= \int_{\Omega} \left\| \int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(v + a)(s, z(s; t, x)) ds \right\|^2 dx \leq M \left(\int_{\Omega} \int_{\tau(t, x)}^t |v_x(s, z(s; t, x))|^2 ds dx + \right. \\ &\left. + \int_{\Omega} \int_0^t |a_x(s, z(s; t, x))|^2 ds dx \right) \leq M_1 \int_{\Omega} \int_{\tau(t, x)}^t |v_x(s, z(s; t, x))|^2 ds dx + M_2(a) = M_1 I_{221} + M_2(a). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь v_x и a_x — матрицы Якоби вектор-функций v и a , $|v_x|$ и $|a_x|$ — нормы матриц. Считая v продолженной нулем из Ω в Ω_0 , рассмотрим задачу Коши

$$\bar{z}(\tau; t, x) = x + \int_{\tau}^t (\bar{v} + a)(s, \bar{z}(s; t, x)) ds, \quad \tau, t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0. \quad (4.24)$$

Задача (4.24) нелокально разрешима, при этом якобиан $J(t, x)$ отображения $y = z(t; s, x) : \Omega_0 \rightarrow \Omega_0$ равен единице в силу соленоидальности поля скоростей.

Используя вышеприведенные рассуждения и меняя порядок интегрирования, получаем

$$I_{221} = \int_{\Omega} \int_{\tau(t, x)}^t |v_x(s, z(s; t, x))|^2 ds dx \leq \int_0^t \int_{\Omega_0} |v_x(s, z(s; t, x))|^2 ds. \quad (4.25)$$

Делаем в последнем интеграле по Ω_0 замену переменной $x = z(t; s, y)$ и учитывая $J(t, x) = 1$, имеем

$$I_{221} \int_0^t \int_{\Omega_0} |v_x(s, y)|^2 J^{-1}(t, z(t; s, y)) dy ds = \int_0^t \int_{\Omega_0} |v_x(s, y)|^2 dy ds = \int_0^t \int_{\Omega} |v_x(s, y)|^2 dy ds. \quad (4.26)$$

Из (4.23)–(4.26) вытекает

$$I_{22} \leq M_1 \int_0^t |v_x(s, y)|_0^2 ds + M_2(a). \quad (4.27)$$

Из неравенств (4.22) и (4.27) вытекает, что

$$|I_2| \leq \varepsilon |v(t, x)|_1^2 + C_3(\varepsilon) \left(\int_0^t |v(s, x)|_1^2 ds + M_2(a) \right). \quad (4.28)$$

Так как $|\mathcal{E}u(x)|_0 > m|u(x)|_1$, $m > 0$, для $\forall u \in V$, то интегрируя (4.19) по t , пользуясь оценками (4.20), (4.21) и (4.28), выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получаем

$$\begin{aligned} |v(t, x)|_0^2 + \int_0^t |v(s, x)|_1^2 ds &\leq M_6 \left(\int_0^t |f(s, x)|_{-1}^2 ds + |v^0|_0^2 + M_2(a) \right) + \\ &+ M_7 \left(\int_0^t \int_0^\xi |v(s, x)|_1^2 ds d\xi + \int_0^t |v(s, x)|_0^2 ds \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Отсюда получаем интегральное неравенство типа Гронуолла для $q(t) = \int_0^t |v(\tau, x)|_1^2 d\tau + |v(t, x)|_0^2$, дающее оценку $q(t)$. Из (4.29) и оценки $q(t)$ следует утверждение теоремы 4.2.

Теорема 4.2 доказана.

Замечание. Так как $v(t, x) = 0$ при $x \in \Omega_0 \setminus \Omega$, то $\|v(t, x)\|_{L_2(\Omega_0)^N} = |v(t, x)|_0$, $\|v(t, x)\|_{L_2(0; W_1^2(\Omega_0)^N)} = \|v(t, x)\|_1$. Отсюда и из оценки (4.18) вытекает равномерная по n оценка

$$\sup_t \|v^n(t, x)\|_{L_2(\Omega_0)^N} + \|v^n(t, x)\|_{L_2(0; W_1^2(\Omega_0)^N)} \leq M(\|f(t)\|_{0,-1} + |v^0|_0 + M_*(a)). \quad (4.30)$$

4.5. Свойства галеркинских приближений

Пусть $v^n(t, x) = \sum_{k=1}^n g_k(t) e_k(x)$, где $g(t)$, $z^n(s; t, x)$, $\tau^n(t, x)$ являются решениями системы (4.4),

(4.5). Из того, что v^n равна нулю вне Ω и из оценки (4.30) следует слабая в $L_2(0, T; \dot{W}_1^2(\Omega_0)^N)$ и сильная в $L_2(0, T; L_2(\Omega_0)^N)$ сходимость $v^n(t, x)$ к некоторой $v^n(t, x) \in L_2(0, T; \dot{W}_1^2(\Omega_0)^N)$ (с точностью до подпоследовательности) при $n \rightarrow +\infty$.

Из теоремы 6.2 следует, что последовательность $z^n(s; t, x)$ сходится по τ , x мере к РЛП $z(s; t, x)$, порожденному $v(t, x) \in L_2(0, T; \dot{W}_1^2(\Omega_0)^N)$ равномерно по t . Тогда последовательность $z^n(s; t, x)$ (с точностью до подпоследовательности) сходится к $z(s; t, x)$ при п.в. $(s, x) \in Q_T$.

Рассмотрим последовательность $\tau^n(t, x)$.

Теорема 4.3. Последовательность $\tau^n(t, x)$ сходится к $\tau(t, x)$ при $n \rightarrow +\infty$ при п.в. $(t, x) \in Q_T$.

Доказательство теоремы 4.3. Пусть последовательность $z^n(s; t, x)$ сходится к $z(s; t, x)$ при $(t, x) \in Q_T$. Покажем, что тогда $\tau^n(t, x)$ сходится к $\tau(t, x)$ (с точностью до подпоследовательности). Рассмотрим сначала случай $\tau(t, x) > 0$. Предположим противное, т.е. $\tau^n(t, x)$ не сходится к $\tau^*(t, x)$. Тогда найдется подпоследовательность (индексы те же), при которой либо $\tau^n(t, x) \geq \tau(t, x) + \delta$,

либо $\tau^n(t, x) \leq \tau(t, x) - \delta$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть сначала $\tau^n(t, x) \geq \tau(t, x) + \delta$. Тогда можно считать, $\tau^n(t, x) \rightarrow \tau_1 > \tau(t, x) + \delta$. В этом случае $\Phi(z^n(\tau^n(t, x); t, x)) = 0$, $\Phi(z^n(\tau_1; t, x)) > 0$. Из сходимости $z^n(s; t, x)$ к $z(s; t, x)$ и непрерывности $\Phi(t, x)$ следует, что $\Phi(z(\tau_1; t, x)) \geq 0$. Следовательно, либо $z(\tau_1; t, x) \notin \Omega$ при $\tau_1 > \tau(t, x)$, либо $z(\tau_1; t, x) \in \partial\Omega$ при $\tau_1 > \tau(t, x)$, что противоречит определению $\tau(t, x)$.

Аналогично рассматривается случай $\tau^n(t, x) \leq \tau(t, x) - \delta$.

В случае $\tau(t, x) > 0$ теорема 4.3 доказана. Случай $\tau(t, x) = 0$ доказывается проще.

Теорема 4.3 доказана.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1

Покажем, что предел v последовательности v^n галеркинских приближений является слабым решением задачи (3.1)–(3.3). Функция v^n удовлетворяет тождеству (4.2) при произвольной $\phi \in H_n$. Пусть $\phi \in H_m$ при фиксированном $m \in N$.

Рассмотрим тождество (4.2) при произвольной $n > m$. Интегрируя (4.2) по t , получаем

$$\begin{aligned} & (v^n(T), \phi) - \sum_{i=1}^N \int_0^T (v_i^n v^n, \partial\phi/\partial x_i) ds + \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds + \\ & + \mu_1 \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t, x)}^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt + \mu_1 \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t, x)}^t \mathcal{E}(a)(z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt + \int_0^T b(a, v^n, \phi) dt + \\ & + \int_0^T b(a, v^n, \phi) dt = \int_0^T (f^n, \phi) ds - \int_0^T b(a, a, \phi) dt - \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(a)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds + (v^0, \phi), \quad \phi \in H_m. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Пусть

$$\begin{aligned} I_1(n) &= (v^n(T), \phi), \quad I_2(n) = \sum_{i=1}^N \int_0^T (v_i^n v^n, \partial\phi/\partial x_i) ds, \quad I_3(n) = \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v^n)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds, \\ I_4(n) &= \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t, x)}^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt, \\ I_5(n) &= \int_0^T \left(\int_{\tau^n(t, x)}^t \mathcal{E}(a)(s, z^n(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt, \quad I_6(n) = \int_0^T b(a, v^n, \phi) dt, \\ I_7(n) &= \int_0^T b(v^n, a, \phi) dt, \quad I_8(n) = \int_0^T (f^n, \phi) ds. \\ I_9 &= - \int_0^T b(a, a, \phi) dt - \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(a)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds + (v^0, \phi). \end{aligned}$$

Запишем тождество (5.1) в виде

$$I_1(n) - I_2(n) + \mu_0 I_3(n) + \mu_1 I_4(n) + \mu_1 I_5(n) + I_6(n) + I_7(n) = I_8(n) + I_9 \quad (5.2)$$

и перейдем в (5.2) или, что то же в (5.1), к пределу при $n \rightarrow +\infty$.

Из оценки (4.18) вытекает ограниченность v^n в $L_2(0, T; V)$ и ограниченность значений $v^n(T)$ в H непрерывных функций $v^n(t)$. Без ограничения общности будем считать, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T; V)$, а $v^n(T, x)$ слабо сходится к $v(T, x)$ в H . Далее, доказательство соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_1(n) = (v(T), \phi), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_3(n) = \int_0^T (\mathcal{E}(v)(s), \mathcal{E}(\phi)) dt, \quad (5.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_2(n) = \sum_{i=1}^N \int_0^T (v_i v, \partial \phi / \partial x_i) ds, \quad (5.4)$$

проводится по стандартной схеме (см., например, [13, с. 232]).

Перейдем к слагаемому $I_4(n)$.

Лемма 5.1. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_4(n) = I_4 = \int_0^T \left(\int_{\tau(t,x)}^t \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt. \quad (5.5)$$

Доказательство. Пусть

$$\bar{I}_4(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \left(\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds \right) : \mathcal{E}(\phi)(x) dx dt. \quad (5.6)$$

Здесь и ниже $\mathcal{E}(u) : \mathcal{E}(w) = \sum_{i,j=1}^N \mathcal{E}_{ij}(u) : \mathcal{E}_{ij}(w)$ для $u, w \in V$. Покажем, что $\bar{I}_4(n) = I_4(n)$. В самом деле, так как $\text{supp} \phi(x) \subset \Omega$, то

$$\bar{I}_4(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) : \mathcal{E}(\phi)(x) ds dx dt. \quad (5.7)$$

При $s < \tau^n(t, x)$ имеем $z^n(s; t, x) \notin \Omega$, и так как $v^n(t, x) = 0$ при $x \notin \Omega$, то $v^n(s, z^n(s; t, x)) = 0$. Следовательно, при $s < \tau^n(t, x)$ имеем $\mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) = 0$. Поэтому

$$\int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds = \int_{\tau^n(t,x)}^t \mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) ds.$$

Отсюда и из (5.6) следует $\bar{I}_4(n) = I_4(n)$.

Перейдем к пределу в (5.6). Сделав в интеграле по x замену переменной $x = z^n(t; s, y)$, получаем

$$\bar{I}_4(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, y) : \mathcal{E}(\phi)(z^n(t; s, y)) ds dy dt. \quad (5.8)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \bar{I}_4(n) &= \int_0^T \int_{\Omega_0} \int_0^t \mathcal{E}(v^n)(s, y) : \mathcal{E}(\phi)(z(t; s, y)) ds dy dt + \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega_0} \mathcal{E}(v^n)(s, y) : (\mathcal{E}(\phi)(z^n(t; s, y)) - \mathcal{E}(\phi)(z(t; s, y))) dy dt = I_{41}(n) + I_{42}(n). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Меняя порядок интегрирования, имеем

$$I_{41}(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \mathcal{E}(v^n)(s, y) \psi(t, y) ds dy, \quad \psi(t, y) = \int_s^T \mathcal{E}(\phi)(z(t; s, y)) dt. \quad (5.10)$$

Из (4.30) вытекает слабая компактность $v^n(t, x)$ в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega_0)^N)$. Будем считать, что сама $v^n(t, x)$ слабо сходится к $v(t, x)$ в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega_0)^N)$. Пользуясь слабой сходимостью v^n к v и переходя к пределу в (5.10), получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{41}(n) = \int_0^T \int_{\Omega_0} \mathcal{E}(v)(s, y) \int_s^T \mathcal{E}(\phi)(z(t; s, y)) dy dt. \quad (5.11)$$

Делая в (5.11) обратную замену переменной $y = z^n(s; t, x)$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{41}(n) = \int_0^T \left(\int_0^t \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt. \quad (5.12)$$

При $s < \tau(t, x)$ имеем $z(s; t, x) \notin \Omega$, и так как $v(t, x) = 0$ при $x \notin \Omega$, то $v(s, z(s; t, x)) = 0$. Следовательно, при $s < \tau(t, x)$ имеем $\mathcal{E}(v^n)(s, z^n(s; t, x)) = 0$. Поэтому

$$\int_0^t (\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))) ds = \int_{\tau(t, x)}^t (\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))) ds.$$

Отсюда и из (5.6) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{41}(n) = \int_0^T \left(\int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt. \quad (5.13)$$

Рассмотрим $I_{42}(n)$. Из сходимости при п.в. (t, y) $z^n(t; s, y)$ к $z(t; s, y)$ вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{42}(n) = 0. \quad (5.14)$$

Из (5.12) и (5.14) вытекает (5.5).

Лемма 5.1 доказана.

Доказательство соотношения

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_5(n) = \int_0^T \left(\int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(a)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt \quad (5.15)$$

проводится аналогично доказательству (5.5) с очевидными упрощениями.

Доказательство соотношений

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_6(n) = \int_0^T b(a, v, \phi) dt, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_7(n) = \int_0^T b(v, a, \phi) dt, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} I_8(n) = \int_0^T (f, \phi) ds \quad (5.16)$$

проводится стандартным образом (см., например, [13, с. 232]).

Из установленной сходимости слагаемых $I_i(n)$ вытекает справедливость

$$\begin{aligned} & (v(T), \phi) - \int_0^T (v_i v, \partial \phi / \partial x_i) dt + \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(v)(t, x), \mathcal{E}(\phi(x))) dt + \mu_1 \int_0^T \int_{\tau(t, x)}^t (\mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)) dt + \\ & + \mu_1 \int_0^T \left(\int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(a)(z(s; t, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) dt + \int_0^T b(a, v, \phi) dt + \int_0^T b(v, a, \phi) dt = \\ & = \int_0^T (f(t), \phi) dt - \int_0^T b(a, a, \phi) dt - \mu_0 \int_0^T (\mathcal{E}(a)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds + (v^0, \phi) \end{aligned} \quad (5.17)$$

при любой $\phi \in H_m$.

Используя плотность множества функций $\phi \in H_m$, $m = 1, 2, \dots$ в V нетрудно показать, что (5.17) справедливо при любой $\phi \in V$.

Очевидно, что (5.17) справедливо и при любом $t \in (0, T)$ вместо T :

$$\begin{aligned} (v(t), \phi) - \int_0^t (v_i v, \partial \phi / \partial x_i) ds + \mu_0 \int_0^t (\mathcal{E}(v)(s, x), \mathcal{E}(\phi(x))) ds + \mu_1 \int_0^t \int_{\tau(\xi, x)}^{\xi} (\mathcal{E}(v)(s, z(s; \xi, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)) d\xi + \\ + \mu_1 \int_0^T \left(\int_{\tau(\xi, x)}^{\xi} \mathcal{E}(a)(z(s; \xi, x)) ds, \mathcal{E}(\phi)(x) \right) d\xi + \int_0^t b(a, v, \phi) ds + \int_0^t b(v, a, \phi) ds = \int_0^t (f(s), \phi) ds - \\ - \int_0^t b(a, a, \phi) dt - \mu_0 \int_0^t (\mathcal{E}(a)(s), \mathcal{E}(\phi)) ds + (v^0, \phi). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Дифференцируя (5.18) по t при почти всех t и учитывая $Z(v) = z$, получаем, что v удовлетворяет (3.4).

Покажем, что $v \in W_1$. Так как $v \in L_2(0, T; V)$, то достаточно показать, что $v' \in L_1(0, T; V^{-1})$.

Перепишем тождество (3.4) в виде $d\langle v, \phi \rangle / dt = \langle g(t), \phi \rangle$, где

$$\begin{aligned} \langle g(t), \phi \rangle = \langle f, \phi \rangle + \sum_{i=1}^N (v_i v, \partial \phi / \partial x_i) - \mu_0 (\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\phi)) - b(v, a, \phi) - b(a, v, \phi) - \\ - \mu_0 (\mathcal{E}(a), \mathcal{E}(\phi)) - b(a, a, \phi) - \mu_1 \left(\int_{\tau(t, x)}^t \mathcal{E}(v + a)(\tau, z(\tau, t, x)) d\tau, \mathcal{E}(\phi) \right) \equiv \sum_{i=1}^8 \langle q_i(t), \phi \rangle. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Для доказательства $v' \in L_1(0, T; V^{-1})$ достаточно показать, что $q_i \in L_1(0, T; V^{-1})$, $i = 1, \dots, 8$. При $i = 1, 2, 3$ этот факт доказан в [13, с. 201, с. 226], а при $i = 4, \dots, 7$ очевиден.

Рассмотрим $q_8(t)$. Элементарные выкладки дают

$$\begin{aligned} |\langle q_8(t), \phi \rangle| &\leq M \int_{\Omega \tau(t, x)}^t \int |\mathcal{E}(v + a)(\tau, z(\tau, t, x)) d\tau| |\mathcal{E}(\phi)| dx \leq \\ &\leq M \left(\int_{\Omega} \left(\int_{\tau(t, x)}^t |\mathcal{E}(v + a)(\tau, z(\tau, t, x))| d\tau \right)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\mathcal{E}(\phi)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq M \left(\int_{\Omega_0} \left(\int_0^T |\mathcal{E}(v + a)(\tau, z(\tau, t, x))|^2 d\tau dx \right)^{1/2} \right) |\phi(x)|_1. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Делая в интеграле по Ω_0 замену переменной $x = z(t, s, y)$ и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \int_0^T |\mathcal{E}(v + a)(\tau, z(\tau, t, x))|^2 d\tau dx = \int_{\Omega_0} \int_0^T |\mathcal{E}(v + a)(\tau, y)|^2 d\tau dy = \\ = \int_{\Omega_0} \int_0^T |\mathcal{E}(v + a)(\tau, y)|^2 dy d\tau \leq \int_0^T |v_x(\tau, y)|^2 d\tau + \int_{\Omega_0} \int_0^T |a_x(\tau, y)|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Из неравенств (4.18), (5.20), (5.21) вытекает неравенство $|\langle q_8(t), \phi \rangle| \leq M |\phi(x)|_1$. Следовательно, $g_8 \in L_1(0, T; V^{-1})$.

Включение $v' \in L_1(0, T; V^{-1})$, а следовательно, и $v \in W_1$ установлено.

Таким образом, v является слабым решением задачи (3.1)–(3.3).

Теорема 3.1 доказана.

Замечания. Основной результат можно очевидным образом переформулировать в терминах задачи (1.1)–(1.4). При этом $u = v + a$, $u^0 = v^0 + a$, $u^0|_{\partial\Omega} = \varphi$.

Заметим также, что мы считали φ следом на $\partial\Omega$ достаточно гладкой функции $a(x)$. Можно было бы, наоборот, построить $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_0)$ продолжение $a(x)$ граничной функции при естественном предположении $\varphi(x) \in W_2^{1/2}(\partial\Omega)$, но это привело бы к техническим трудностям в доказательствах.

АППЕНДИКС

Приведем используемые выше факты из теории РЛП. Рассмотрим в ограниченной области Ω_0 с гладкой границей $\partial\Omega_0$ задачу Коши

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau u(s, z(s; t, x)) ds, \quad \tau \in [0, T], \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega_0. \quad (6.1)$$

Определение 6.1. Пусть $u \in L_1(0, T; \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_0)^N)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\operatorname{div} u(t, x) = 0$ и $u|_{[0, T] \times \partial\Omega_0} = 0$. Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным u , называется функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega_0}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) при п.в. x и любом $t \in [0, T]$ функция $z(\tau; t, x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (6.1); 2) для любых $x, \tau \in [0, T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества B с мерой $m(B)$ справедливо соотношение $m(z(\tau; t, B)) = m(B)$; 3) при всех $t_i \in [0, T]$, $i = 1, 2, 3$, и п.в. $x \in \overline{\Omega}$ справедливо $z(t_3; t_1, x) = z(t_3; t_2, z(t_2; t_1, x))$.

Справедливы следующие результаты (см., например, [15, 16]):

Теорема 6.1. Пусть $u \in L_1(0, T; \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega_0)^N)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\operatorname{div} u(t, x) = 0$ и $u|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП z , порожденный v . Более того, $\partial z(\tau; t, x)/\partial \tau = u(\tau, z(\tau; t, x))$ при $t \in [0, T]$, п.в. $\tau \in [0, T]$, п.в. $x \in \Omega_0$.

Теорема 6.2. Пусть $v, v^m \in L_1(0, T; \overset{\circ}{W}_1^p(\Omega_0)^N)$, $m = 1, 2, \dots$ при некотором $p > 1$. Пусть $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{div} v^m = 0$, $v^m|_{[0, T] \times \partial\Omega_0} = 0$, $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Пусть выполняются неравенства

$$\|v_x\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega_0)^{N \times N})} + \|v\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega_0)^N)} \leq M, \quad \|v^m\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega_0)^{N \times N})} + \|v^m\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega_0)^N)} \leq M.$$

Пусть v^m сходится к v в $L_1([0, T] \times \Omega_0)^N$ при $m \rightarrow +\infty$. Пусть $z^m(\tau; t, x)$ и $z(\tau; t, x)$ РЛП, порожденные v^m и v соответственно. Тогда последовательность z^m сходится (с точностью до последовательности) к z по мере Лебега на множестве $[0, T] \times \Omega_0$ равномерно по $t \in [0, T]$.

Отметим, что в случае гладкой $u(t, x)$ классическое решение $z(\tau; t, x)$ задачи Коши задает порожденный $u(t, x)$ РЛП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
2. Звягин В.Г., Орлов В.П. О слабой разрешимости задачи вязкоупругости с памятью // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 215–220.
3. Zvyagin V.G., Orlov V.P. Solvability of one non-Newtonian fluid dynamics model with memory // Nonlin. Analys: TMA. 2018. V. 172. P. 73–98.
4. Zvyagin V., Orlov V. On one problem of viscoelastic fluid dynamics with memory on an infinite time interval // Disc. Cont. Dyn. Syst., Ser. B. 2018. V. 23. № 9. P. 3855–3877.
5. Орлов В.П. Об одной неоднородной регуляризованной задаче динамики вязкоупругой среды // Изв. вузов. Матем. 2012. № 8. С. 58–64.
6. Звягин А.В., Звягин В.Г., Поляков Д.М. О диссипативной разрешимости альфа-модели движения жидкости с памятью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1243–1257.

7. Звягин В.Г., Орлов В.П. О регулярности слабых решений обобщенной модели вязкоупругости Фойгта // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 11. С. 1933–1949.
8. Звягин В.Г., Орлов В.П. Об одной модели термовязкоупругости Джеффриса-Олдройда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 1821–1830.
9. Zvyagin V.G., Vorotnikov D.A. Topological Approximation Methods for Evolutionary Problems of Nonlinear Hydrodynamics. Berlin: Walter de Gruyter & Co, 2008. P. 230.
10. Ворович И.И., Юдович В.И. Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости // Матем. сб. 1961. Т. 53(95). № 4. С. 393–428.
11. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970, С. 204.
12. Коробков М.В., Пилецкас К., Пухначёв В.В., Руссо Р. // Задача протекания для уравнений Навье–Стокса. Успехи матем. наук. 2014. Т. 69. С. 115–176.
13. Темам Р. Уравнение Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1987, С. 408.
14. Крейн С.Г. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. С. 544.
15. DiPerna R.J., Lions P.L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces // Invent. Math. 1989. V. 98. P. 511–547.
16. Crippa G., de Lellis C. Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow // J. Reine Angew. Math. 2008. V. 616. P. 15–46.
17. Бибииков Ю.Н. Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1981. С. 232.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

© 2023 г. Х. Г. Умаров^{1,2,*}¹364043 Грозный, ул. В. Алиева, 19а, Академия наук Чеченской Республики, Россия² 364068 Грозный, ул. С. Кишиевой, 33, Чеченский государственный педагогический университет, Россия

*e-mail: umarov50@mail.ru

Поступила в редакцию 14.05.2023 г.
Переработанный вариант 14.05.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Колебания балки с учетом эффектов деформации в поперечном направлении моделируются нелинейным дифференциальным уравнением соболевского типа, для которого исследуется задача Коши в пространстве непрерывных функций. Рассмотрены условия разрушения решения задачи Коши на конечном временном отрезке. Библ. 10.

Ключевые слова: колебания балки, нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение решения.

DOI: 10.31857/S0044466923110273, **EDN:** CSNJET

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение колебаний балки с учетом эффектов деформации в поперечном направлении [1], § 4.2.2 обобщается нелинейным уравнением соболевского типа, неразрешенным относительно временной производной второго порядка [2]:

$$u_{tt} - \alpha u_{ttx} - u_{ttxx} + u_{xxxx} = \sigma'(u_x) u_{xx},$$

$$(t, x) \in R_+^1 \times R^1, \quad R^1 =]-\infty, +\infty[, \quad R_+^1 =]0, +\infty[, \quad (0.1)$$

где α — заданный положительный числовой параметр, штрих в уравнении обозначает дифференцирование по $u_x = \partial_x u = \partial u / \partial x$, нелинейность $\sigma(\cdot)$ — заданная функция, не равная тождественно нулю.

Предполагаем, что стержень является бесконечным. Такая идеализация допустима [3, § 6.3], если параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не отражаются.

Уравнение (0.1) будем рассматривать в банаховом [4, гл. VIII, § 1] пространстве $C[R^1]$ (с нормой $\|g\|_C = \sup_{x \in R^1} |g(x)|$) непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют пределы при $x \rightarrow \pm\infty$, предполагая, что искомое классическое решение $u = u(t, x)$, $(t, x) \in \bar{R}_+^1 \times R^1$, $\bar{R}_+^1 = [0, +\infty[$, и его частные производные, входящие в уравнение (0.1), для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат пространству $C[R^1]$. Через $C^{(k)}[R^1] = \{g(x) \in C[R^1] : g'(x), \dots, g^{(k)}(x) \in C[R^1]\}$, $k = 1, 2, \dots$, будем обозначать подмножества дифференцируемых функций в пространстве $C[R^1]$.

Для уравнения (0.1) рассмотрим задачу Коши:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R^1, \quad (0.2)$$

в которой заданные начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[R^1]$.

Полагаем, что нелинейность уравнения (0.1): $\sigma(r)$, $r \in R^1$, — дважды непрерывно дифференцируемая функция, модуль которой $|\sigma(r)|$ при $r \geq 0$ является непрерывной неубывающей функцией, причем справедливы оценки

$$\sup_{x \in R^1} |\sigma^{(i)}(g(x))| \leq \left| \sigma^{(i)} \left(\sup_{x \in R^1} |g(x)| \right) \right|, \quad i = \overline{0, 1}, \quad \forall g(x) \in C[R^1]. \quad (0.3)$$

Исследование задачи Коши (0.1), (0.2) проведем по следующему плану: прежде всего убедимся, что постановка задачи Коши (0.1), (0.2) корректна и локальное по времени классическое решение ее существует. С этой целью 1) для соответствующего (0.1) линейного однородного уравнения: $u_{tt} - \alpha u_{tx} - u_{txx} + u_{xxx} = 0$, найдем решение задачи Коши, используя методы теории сильно непрерывных полугрупп операторов и косинус оператор-функций и отмечая используемые в дальнейшем оценки норм вспомогательных операторнозначных функций. Далее, 2) введем в рассмотрение вспомогательную задачу Коши

$$v_{tt} - \alpha v_{tx} - v_{txx} + v_{xxx} = (\sigma(v))_{xx}, \quad (0.4)$$

$$u|_{t=0} = \varphi'(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi'(x), \quad x \in R^1. \quad (0.5)$$

Для задачи Коши (0.4), (0.5) найдем временной отрезок $[0, t_1]$ существования и единственности классического решения и оценим норму в пространстве $C[R^1]$ этого локального решения. Затем, 3) установим связь между решениями уравнений (0.1) и (0.4). Начиная с этого пункта усиливаются требования к решению уравнения, полагая, что на временном отрезке $[0, t_1]$ решение $u = u(t, x)$ по переменной x принадлежит пересечению подмножества $C^{(4)}[R^1] \subset C[R^1]$ с пространством Соболева $W_2^4(R^1)$:

$$\partial_t^n u(t, x) \in C^{(4-n)}[R^1] \cap W_2^{4-n}(R^1), \quad n = \overline{0, 2}, \quad t \in [0, t_1]. \quad (0.6)$$

В пункте 4) найдем условия разрушения на конечном временном отрезке решения задачи Коши для исходного уравнения (0.1). В заключительной части статьи 5) исследовано разрушение решения уравнения (0.1) в частном случае $\sigma(s) = \beta s^3$.

1. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Напомним, что в пространстве $C[R^1]$ [4, гл. VIII, § 1], [5, § 1.3] дифференциальные операторы ∂_x , с областью определения $D(\partial_x) = C^{(1)}[R^1]$, и ∂_x^2 , $D(\partial_x^2) = C^{(2)}[R^1]$, являются соответственно производящими операторами сильно непрерывных сжимающих групп: $U(t; \partial_x)g(x) = g(x+t)$, $t \in R^1$, и полугруппы: $U(t; \partial_x^2)g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)} g(x+\xi) d\xi$, $t \in \overline{R}_+$, класса C_0 . Полуось $\lambda > 0$ принадлежит резольвентным множествам операторов ∂_x и ∂_x^2 и для соответствующих резольвент справедливы оценки норм: $\|(\lambda I - \partial_x)^{-1}\|$, $\|(\lambda I - \partial_x^2)^{-1}\| \leq \lambda^{-1}$, где I — тождественный оператор.

Используя неравенство [5, § 7.1]: $\|g'\|_C^2 \leq 4\|g''\|_C\|g\|_C$, в котором $g = g(x) \in C^{(2)}[R^1]$, нетрудно проверить, что оператор $\alpha\partial_x$ подчинен оператору ∂_x^2 с границей, не превышающей 1, но тогда [5, § 8.1] возмущенный оператор $A = \partial_x^2 + \alpha\partial_x$, $D(A) = C^{(2)}[R^1]$, является производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы класса C_0 : $\|U(t; A)\| \leq 1$, причем полуось $\lambda > 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора A .

Для любой функции $g(x)$ из $C[R^1]$ справедливы представления полугруппы, порождаемой оператором A : $U(t; A)g(x) = U(t; \alpha \partial_x)U(t; \partial_x^2)g(x) = U(t; \partial_x^2)U(t; \alpha \partial_x)g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\eta-x-\alpha t)^2/(4t)} g(\eta) d\eta$, и его резольвенты $(\lambda I - A)^{-1}g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} U(s; A)g(x) ds = \frac{1}{2\sqrt{\lambda + \alpha^2/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(\eta-x)/2 - \sqrt{\lambda + \alpha^2/4}|\eta-x|} g(\eta) d\eta$.

Из оценки нормы $\|\partial_x U(t; \partial_x^2)g(x)\|_C = \frac{1}{4t\sqrt{\pi t}} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta-x) e^{-(\eta-x)^2/(4t)} g(\eta) d\eta \right\|_C \leq \|g(x)\|_C / \sqrt{\pi t}$, используя полученную мажоранту, выводим $\|\alpha \partial_x (I - \partial_x^2)^{-1} g(x)\|_C \leq \alpha \int_0^{+\infty} e^{-s} \|\partial_x U(s; \partial_x^2)g(x)\|_C ds \leq \alpha \|g(x)\|_C$. Откуда следует, что при $\alpha < 1$, для оператора $B = \alpha \partial_x (I - \partial_x^2)^{-1} = \alpha [(I - \partial_x)^{-1} - (I - \partial_x^2)^{-1}]$ справедлива оценка нормы $\|B\| \leq \alpha < 1$ и поэтому оператор $I - B$ обратим и для его обратного имеет место оценка нормы $\|(I - B)^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} B^n \right\| \leq 1/(1 - \alpha) = \alpha_0$.

Итак, при выполнении условия $\alpha < 1$, для резольвенты $(I - A)^{-1}$ справедливы представления $(I - A)^{-1} = (I - \alpha \partial_x - \partial_x^2)^{-1} = (I - \partial_x^2)^{-1} (I - B)^{-1} = (I - B)^{-1} (I - \partial_x^2)^{-1}$ и оценка нормы $\|(I - A)^{-1}\| \leq \|(I - B)^{-1}\| \leq \alpha_0$.

Соответствующее (0.1) линейное уравнение запишем в виде

$$(u - \alpha u_x - u_{xx})_{tt} = -u_{xxxx}. \quad (1.1)$$

Пусть $u = u(t, x)$ — решение задачи Коши (1.1), (0.2), для которого частные производные u_{xx} , u_{txx} непрерывны при $t \geq 0$. Введем новую неизвестную функцию

$$v = u - \alpha u_x - u_{xx}. \quad (1.2)$$

Используя замену (1.2), принадлежность полуоси $\lambda > 0$ резольвентному множеству оператора A и полагая, что начальные функции $\varphi(x), \psi(x) \in C^{(2)}[R^1]$, можно единственным образом определить начальные значения функции $v = v(t, x)$: $v_0(x) = v(t, x)|_{t=0} = \varphi(x) - \alpha \varphi'(x) - \varphi''(x)$, $v_1(x) = v_t(t, x)|_{t=0} = \psi(x) - \alpha \psi'(x) - \psi''(x)$, и выразить решение $u(t, x)$ задачи Коши (1.1), (0.2) через новую неизвестную функцию $v(t, x)$:

$$u(t, x) = (I - A)^{-1} v(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \alpha^2/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha\eta/2 - \sqrt{1 + \alpha^2/4}|\eta|} v(t, x + \eta) d\eta. \quad (1.3)$$

После замены (1.2) уравнение (1.1) можно переписать в пространстве $C[R^1]$ в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения

$$V_{tt} = \mathcal{A} \cdot V, \quad t \in R_+^1, \quad (1.4)$$

где $V = V(t) : t \rightarrow v(t, x)$ — искомая вектор-функция, определенная для $t \in \bar{R}_+^1$ и со значениями в пространстве $C[R^1]$. Операторный коэффициент в уравнении (1.4) — линейный неограниченный оператор $\mathcal{A} = -(I - A)^{-1} \partial_x^4 = -(I - B)^{-1} (I - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^4 = (I - B)^{-1} \partial_x^2 + (I - B)^{-1} - (I - A)^{-1}$, $D(\mathcal{A}) = C^{(2)}[R^1]$.

В пространстве $C[R^1]$ оператор ∂_x^2 является производящим оператором сжимающей сильно непрерывной косинус оператор-функции класса C_0 (C_0 —КОФ) $C(t; \partial_x^2)$, $t \in R^1$, которая представляется [5, § 1.5] формулой $C(t; \partial_x^2)g(x) = 2^{-1} [U(t; \partial_x) + U(-t; \partial_x)]g(x) = 2^{-1} [g(x+t) + g(x-t)]$ и для которой справедлива оценка нормы $\|C(t; \partial_x^2)\| \leq 1$. Соответствующая синус оператор-функция (C_0 —СОФ) $S(t; \partial_x^2)$, $t \in R^1$, имеет вид $S(t; \partial_x^2)g(x) = \int_0^t C(\tau; \partial_x^2)g(x) d\tau = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(\xi) d\xi$ и для нее справедлива оценка нормы $\|S(t; \partial_x^2)\| \leq t$.

Неограниченный компонент оператора $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}_0 = (I - B)^{-1} \partial_x^2$, $D(\mathcal{A}_0) = C^{(2)}[R^1]$, является мультипликативным возмущением производящего оператора $\partial_x^2 C_0$ –КОФ $C(t; \partial_x^2)$ оператором $(I - B)^{-1}$. В силу цепочки соотношений $\|[(I - B)^{-1} - I]S(t; \partial_x^2) \partial_x^2 g(x)\|_C = \|(I - B)^{-1} \alpha \partial_x (I - \partial_x^2)^{-1} \partial_x^2 S(t; \partial_x^2) g(x)\|_C = 2\alpha \alpha_0 \left\| \partial_x \int_{x-t}^{x+t} g(\xi) d\xi \right\|_C \leq 4\alpha \alpha_0 \|g\|_C \leq 4\alpha \alpha_0$, на функциях $g(x) \in C^{(2)}[R^1]$ и $\|g\|_C \leq 1$, оператор $(I - B)^{-1}$ принадлежит [6, § 12.1] классу $M2(\partial_x^2)$ мультипликативных возмущений производящего оператора $\partial_x^2 C_0$ –КОФ $C(t; \partial_x^2)$, причем характеристика этого класса – функция $\tilde{\delta}_B(t) = \delta_{(I-B)^{-1}-I}(t)$, выписывается в явном виде: $\tilde{\delta}_B(t) = 4\alpha \alpha_0 t$, $t > 0$. Поэтому [6] оператор $\mathcal{A}_0$ является производящим оператором C_0 –КОФ $C(t; \mathcal{A}_0)$, для которой справедлива оценка нормы

$$\|C(t; \mathcal{A}_0)\| \leq M_1 e^{\omega_1 t}, \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

и предельное соотношение $\|C(t; \mathcal{A}_0) - C(t; \partial_x^2)\| = O(\tilde{\delta}_B(t)) \rightarrow 0$, при $t \rightarrow +0$, где $M_1 = \sup\{\|C(t; \mathcal{A}_0)\|, 0 \leq t \leq \tau_0\}$ и $\omega_1 = \ln(M_1)/\tau_0$, здесь положительное число τ_0 определяется из неравенства $\tilde{\delta}_B(\tau_0) < 1$, т.е. $\tau_0 < 1/(4\alpha \alpha_0)$.

Ограниченный компонент оператора $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}_1 = (I - B)^{-1} - (I - A)^{-1}$, $D(\mathcal{A}_1) = C[R^1]$, $\|\mathcal{A}_1\| \leq 2\alpha_0 = \alpha_1^2$, является аддитивным возмущением производящего оператора $\mathcal{A}_0$ C_0 –КОФ $C(t; \mathcal{A}_0)$, но возмущение ограниченным оператором сохраняет [5, § 8.2] способность оператора $\mathcal{A}_0$ порождать C_0 –КОФ, поэтому оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1$ является производящим оператором C_0 –КОФ.

Для уравнения (1.4) рассмотрим абстрактную задачу Коши, записав начальные условия в виде

$$V|_{t=0} = V_0, \quad V'|_{t=0} = V_1, \quad (1.6)$$

где $V_0 = v_0(x)$, $V_1 = v_1(x)$ – элементы пространства $C[R^1]$.

Задача Коши (1.4), (1.6) равномерно корректна [5, § 1.4] только тогда, когда оператор $\mathcal{A}$ является производящим оператором C_0 –КОФ.

Решение задачи Коши (1.4), (1.6) для любых начальных данных $V_0 \in D(\mathcal{A})$ и $V_1 \in C_1[R^1]$ дается формулой $V(t) = C(t; \mathcal{A})V_0 + S(t; \mathcal{A})V_1$, $t \in R^1$, где $S(t; \mathcal{A})$ – C_0 –СОФ ассоциированная с $C(t; \mathcal{A})$: $S(t; \mathcal{A})g = \int_0^t C(\tau; \mathcal{A})g d\tau$, $t \in R^1$, $g \in C[R^1]$, а $C_1[R^1]$ – линейное многообразие: $C_1[R^1] = \{g \in C[R^1] : C(t; \mathcal{A})g \in C^{(1)}(R^1, C[R^1])\}$. Очевидно, что $D(\mathcal{A}) = C^{(2)}[R^1] \subset C_1[R^1]$.

Для того чтобы вывести оценку нормы решения уравнения (1.4) – абстрактной функции $V(t)$, найдем оценки норм C_0 –КОФ $C(t; \mathcal{A})$ и C_0 –СОФ $S(t; \mathcal{A})$, для чего получим представление операторнозначной функции $C(t; \mathcal{A})$ через C_0 –КОФ $C(t; \mathcal{A}_0)$ и $C(t; \mathcal{A}_1)$.

Ограниченный оператор $\mathcal{A}_1$ порождает C_0 –КОФ $C(t; \mathcal{A}_1)$, для которой на произвольном элементе $g(x) \in C[R^1]$ справедливо представление [5, § 1.4, § 4.2] $C(t; \mathcal{A}_1)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \mathcal{A}_1^n g(x)$, $t \in R^1$, причем ряд сходится равномерно по t на каждом конечном отрезке из R^1 . Отметим, что операторнозначная функция $C(t; \mathcal{A}_1)$ непрерывна в равномерной операторной топологии и для нее справедлива оценка нормы $\|C(t; \mathcal{A}_1)\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \|\mathcal{A}_1\|^n \leq \text{ch}(\alpha_1 t)$, $t \in \bar{R}_+^1$.

Рассматривая производящий оператор $\mathcal{A}$ C_0 –КОФ $C(t; \mathcal{A})$ как результат возмущения производящего оператора $\mathcal{A}_0$ C_0 –КОФ $C(t; \mathcal{A}_0)$ оператором $\mathcal{A}_1$, который в свою очередь порождает C_0 –КОФ $C(t; \mathcal{A}_1)$, для $g(x) \in D(\mathcal{A}_0) \cap D(\mathcal{A}_1) = C^{(2)}[R^1]$ и $t \in R^1$ имеем [5, § 8.2] представление

$$C(t; \mathcal{A})g(x) = C(t; \mathcal{A}_0)g(x) + \frac{t^2}{2} \int_0^1 j_1(t\sqrt{1-s^2}, \mathcal{A}_0)C(ts; \mathcal{A}_1)g(x)ds,$$

где $j_1(t, \mathcal{A}_0)g(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} C(tr; \mathcal{A}_0)g(x)dr$.

Используя неравенство (1.5), для $t \in R_+^1$ получим оценки норм: $\|j_1(t, \mathcal{A}_0)\| \leq \frac{4M_1}{\pi} e^{\omega_1 t} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} dr \leq M_1 e^{\omega_1 t}$ и

$$\begin{aligned} \|C(t; \mathcal{A})\| &\leq M_1 e^{\omega_1 t} + \frac{t^2 M_1}{2} \int_0^1 e^{\omega_1 t \sqrt{1-s^2}} \operatorname{ch}(\alpha_1 ts) ds \leq \\ &\leq M_1 e^{\omega_1 t} + \frac{t^2 M_1}{2} e^{\omega_1 t} \int_0^1 e^{\alpha_1 ts} ds \leq M_1 e^{(\omega_1 + \alpha_1)t} \left(1 + \frac{t}{2\alpha_1}\right) = h_1(t), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\|S(t; \mathcal{A})\| \leq M_1 \left(1 + \frac{t}{2\alpha_1}\right) \int_0^t e^{(\omega_1 + \alpha_1)\tau} d\tau \leq \frac{h_1(t)}{\omega_1 + \alpha_1} = h_2(t). \quad (1.8)$$

Теперь, производя обратную замену (1.3) и используя перестановочность резольвенты $(I - A)^{-1}$ с косинус оператор-функцией, порождаемой оператором $\mathcal{A}$, находим решение задачи Коши для уравнения (1.1):

$$u(t, x) = (I - A)^{-1} V(t) = C(t; \mathcal{A})\varphi(x) + S(t; \mathcal{A})\psi(x). \quad (1.9)$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. Пусть в уравнении (0.1) параметр $\alpha < 1$ и пусть начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат подмножеству $C^{(4)}[R^1]$ пространства $C[R^1]$, тогда задача Коши для линейного однородного уравнения (1.1) равномерно корректна, классическое решение дается формулой (1.9) и для него справедлива оценка

$$\sup_{x \in R^1} |u(t, x)| \leq h_1(t) \sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| + h_2(t) \sup_{x \in R^1} |\psi(x)|, \quad t \in \bar{R}_+^1.$$

Замечание 1. Классическое решение $V(t)$ абстрактной задачи Коши (1.4), (1.6) принадлежит $C^{(2)}(\bar{R}_+^1, C[R^1])$ и для него $\mathcal{A}V(t) \in C(\bar{R}_+^1, C[R^1])$, следовательно $v(t, x) = (I - A)u(t, x) \in C^{2,2}(\bar{R}_+^1, R^1)$. В силу формулы (1.9), найденное решение задачи Коши (1.1), (0.2) $u(t, x) \in C^{2,4}(\bar{R}_+^1, R^1)$.

2. ЛОКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим задачу Коши (0.4), (0.5) для уравнения получающееся из (0.1) дифференцированием обеих частей по переменной x и последующей подстановкой $u_x = v$ (отметим, что при этом соответствующие линейные однородные уравнения для уравнений (0.1), (0.4) совпадают).

Применим к обеим частям уравнения (0.4) линейный ограниченный оператор $(I - A)^{-1}$, тогда получим эквивалентное (0.4) уравнение, которое в пространстве $C[R^1]$ можно записать в виде абстрактного полулинейного уравнения

$$V_{tt} = \mathcal{A} \cdot V + F(V), \quad (2.1)$$

где $V = V(t) : t \rightarrow v(t, x)$ – искомая вектор-функция, оператор $\mathcal{A}$ такой же, как и в уравнении (1.4), а $F(\cdot)$ – заданный нелинейный оператор: $F(g) = [(I - A)^{-1} - (I - B)^{-1}]\sigma(g)$, $\|F(g)\|_C \leq 2\alpha_0 |\sigma(\|g\|_C)|$, здесь $\sigma(g)$ – оператор суперпозиции: $\sigma(g) = \sigma(g(x))$.

Для уравнения (2.1) рассмотрим абстрактную задачу Коши, записав начальные условия в виде

$$V|_{t=0} = V_0', \quad V'|_{t=0} = V_1', \quad (2.2)$$

где $V_0' = (v_0(x))'$, $V_1' = (v_1(x))'$ – элементы пространства $C[R^1]$.

Из ограниченности операторов $(I - A)^{-1}$ и $(I - B)^{-1}$ и непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции $\sigma(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций следует непрерывная дифференцируемость по Фреше оператора $F(\cdot)$ в пространстве $C[R^1]$ и, значит, $F(\cdot)$ удовлетворяет локальному условию Липшица. Поэтому существует промежуток $[0, t_0[$, в котором абстрактная задача Коши (2.1), (2.2) для любых $V_0' \in D(\mathcal{A})$ и $V_1' \in C_1[R^1]$ имеет [7, § 3] единственное обобщенное решение $V = V(t)$, $t \in \bar{R}_+^1$, т.е. единственное непрерывно дифференцируемое решение абстрактного интегрального уравнения

$$V(t) = C(t, \mathcal{A})V_0' + S(t, \mathcal{A})V_1' + \int_0^t S(t - \tau, \mathcal{A})F(V(\tau))d\tau. \quad (2.3)$$

Из абстрактного интегрального уравнения (2.3), используя оценки (1.7), (1.8), получаем интегральное неравенство $\|V(t)\|_C \leq h_3(t) + 2\alpha_0 h_2(t) \int_0^t |\sigma(\|V(\tau)\|_C)|d\tau$, где $h_3(t) = h_1(t)[\sup_{x \in R^1} |\varphi'(x)| + \sup_{x \in R^1} |\psi'(x)|/(\alpha_1 + \omega_1)]$, или

$$\|V(t)\|_C \leq r_1 + r_2 \int_0^t |\sigma(\|V(\tau)\|_C)|d\tau, \quad (2.4)$$

здесь $r_1 = \max_{t \in [0, t_0]} h_3(t)$ и $r_2 = 2\alpha_0 \max_{t \in [0, t_0]} h_2(t)$.

Из интегрального неравенства (2.4) выводим [8, § 1.4] оценку нормы обобщенного решения

$$\|V(t)\|_C = \sup_{x \in R^1} |v(t, x)| = \sup_{x \in R^1} |u_x(t, x)| \leq \Omega^{-1}(\Omega(r_1) + r_2 t) = h_4(t), \quad t \in [0, t_1], \quad (2.5)$$

где $\Omega(\xi) = \int_{\eta}^{\xi} \frac{ds}{|\sigma(s)|}$, $\eta > 0$, $\xi > 0$, функция $\Omega^{-1}(\cdot)$ – обратная к $\Omega(\cdot)$, а отрезок $[0, t_1] \subseteq [0, t_0[$, определяется теми значениями t , при которых значения $\Omega(r_1) + r_2 t$ принадлежат области определения функции $\Omega^{-1}(\cdot)$.

Решение интегрального уравнения (2.3): $V(t)$, $t \in [0, t_1]$, будет классическим решением абстрактной задачи Коши (2.1), (2.2), если оно дважды непрерывно дифференцируемо, что вытекает [7] из непрерывной дифференцируемости по Фреше нелинейного оператора $F(\cdot)$, при условии принадлежности начальных данных V_0' и V_1' соответственно множествам $D(\mathcal{A})$ и $C_1[R^1]$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. Пусть в уравнении (0.1) параметр $\alpha < 1$ и пусть начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принадлежат пространству $C[R^1]$ вместе со своими производными до пятого порядка включительно, тогда на временном отрезке $[0, t_1]$ существует единственное классическое решение $v = v(t, x)$ задачи Коши (0.4), (0.5) в пространстве $C[R^1]$, для которого справедлива оценка (2.5).

3. СВЯЗЬ МЕЖДУ РЕШЕНИЯМИ УРАВНЕНИЙ (0.1) И (0.4)

В дальнейших рассуждениях предполагается, что решение уравнения (0.1) принадлежит пересечению пространства $C[R^1]$ с пространством $L_2(R^1)$ функций с интегрируемым квадратом.

Напомним, что скалярное произведение и норма в $L_2(R^1)$ определяются соответственно формулами $(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \psi(x) dx$ и $\|\varphi\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ и что для функций $g(x)$, принадлежащих пересечению пространства непрерывных ограниченных функций $C(R^1)$ с пространством Соболева $W_2^1(R^1)$, справедлива оценка

$$\|g\|_C \leq \|g\|_{W_2^1} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [(g(x))^2 + (g'(x))^2] dx \right)^{1/2}, \quad (3.1)$$

причем, если $g(x) \in C^{(2)}(R^1)$, то [9] предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$ равен нулю.

Лемма. Из существования локального классического решения уравнения (0.4): $v = v(t, x)$, $t \in [0, t_1]$, следует существование соответствующего решения

$$u = u(t, x) = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \int_{x_0}^x v(t, s) ds = \int_{-\infty}^x v(t, s) ds \quad (3.2)$$

уравнения (0.1) на том же временном отрезке $[0, t_1]$, при выполнении условий (0.6):

$$\partial_t^n \partial_x^m u(t, x) \in C[R^1] \cap L_2(R^1), \quad n + m \leq 4, \quad n = \overline{0, 2}, \quad m = \overline{0, 4}, \quad t \in [0, t_1].$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из условий (0.6) следуют предельные равенства

$$\lim_{x_0 \rightarrow \pm\infty} \partial_t^n \partial_x^m u(t, x) = 0, \quad n + m \leq 4, \quad n = \overline{0, 2}, \quad m = \overline{0, 4}, \quad t \in [0, t_1]. \quad (3.3)$$

Пусть $v = v(t, x)$ классическое решение уравнения (0.4) на временном отрезке $[0, t_1]$, тогда, используя соотношения (3.3), выводим равенства

$$\begin{aligned} 1) \int_{-\infty}^x v_{tt}(t, s) ds &= u_{tt}(t, x), & 2) \int_{-\infty}^x v_{tts}(t, s) ds &= u_{ttx}(t, x), \\ 3) \int_{-\infty}^x v_{tss}(t, s) ds &= u_{ttxx}(t, x), & 4) \int_{-\infty}^x v_{ssss}(t, s) ds &= u_{xxxx}(t, x). \end{aligned}$$

Далее, в силу непрерывности функции $\sigma(\cdot)$, имеем

$$\int_{-\infty}^x \partial_s^2 \sigma(v(t, s)) ds = (\sigma(u_x(t, x)))_x - \sigma' \left(\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} u_x(t, x_0) \right) \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} u_{xx}(t, x_0) = (\sigma(u_x(t, x)))_x.$$

Теперь, используя полученные представления и подставляя функцию (3.2) в уравнение (0.1), получаем тождественное равенство на отрезке $[0, t_1]$:

$$\begin{aligned} &u_{tt}(t, x) - \alpha u_{ttx}(t, x) - u_{ttxx}(t, x) + u_{xxxx}(t, x) - (\sigma(u_x(t, x)))_x = \\ &= \int_{-\infty}^x [v_{tt}(t, s) - \alpha v_{tts}(t, s) - v_{tss}(t, s) + v_{ssss}(t, s) - \partial_s^2 \sigma(v(t, s))] ds \equiv 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что функция (3.2) является решением уравнения (0.1).

Замечание 2. Из требований (0.6) к решению $u = u(t, x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) с необходимостью следуют условия, которым должны удовлетворять начальные функции

$$\varphi(x) \in C^{(4)}[R^1] \cap L_2(R^1), \quad \psi(x) \in C^{(3)}[R^1] \cap L_2(R^1). \quad (3.4)$$

4. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (0.1), (0.2)

Рассмотрим так называемый интеграл энергии для уравнения (0.1) на временном отрезке $[0, t_1]$:

$$y(t) = (u, u) + (u_x, u_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + u_x^2) dx = \|u\|_{W_2^1}^2. \quad (4.1)$$

Найдем условия разрушения решения $u = u(t, x)$ задачи Коши (0.1), (0.2) на некотором временном отрезке $[0, t_2] \subseteq [0, t_1]$, т.е. найдем достаточные условия возникновения разрыва второго рода для интеграла энергии (4.1) на отрезке $[0, t_2]$, который выбираем так, чтобы на нем выполнялось неравенство $y(t) > 0$, вытекающее из начального условия $y(0) = \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия леммы и теоремы 2 и пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и нелинейность $\sigma(\cdot)$ обеспечивают, в дополнение к условиям (0.3), (3.4) выполнение требований

$$s\sigma(s) \leq \lambda_0 \Phi(s), \quad \Phi(s) = \int_0^s \sigma(r) dr, \quad \forall s \in R^1, \quad \lambda_0 > 3 + (\alpha + 2)r_5,$$

$$\Phi(\varphi'(x)) \in L_1(R^1), \quad \|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|\varphi''\|_2^2 \geq -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\varphi'(x)) dx,$$

$$(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi') > \left(\frac{r_{10}}{\lambda_0 - 2} \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \frac{r_{11}}{\lambda_0} \right)^{1/2} \|\varphi\|_{W_2^1} > 0,$$

тогда время T_∞ существования решения задачи Коши (0.1), (0.2) не может быть сколь угодно большим, а именно имеет место оценка сверху:

$$T_\infty \leq \frac{1}{r_{12}} \|\varphi\|_{W_2^1}^{(2-\lambda_0)/4},$$

причем для функционала $y(t)$ справедлива оценка снизу

$$y(t) \geq (\|\varphi\|_{W_2^1}^{(2-\lambda_0)/2} - r_{12}t)^{4/(2-\lambda_0)}$$

и предельное равенство $\limsup_{t \uparrow T_\infty} y(t) = +\infty$.

Замечание 3. Фигурирующие в формулировке теоремы постоянные λ_0 , r_j определяются в ходе доказательства теоремы и зависят от параметра α , начальных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и нелинейности $\sigma(\cdot)$.

Доказательство. Применяя к квадрату производной интеграла энергии: $y'(t) = 2[(u, u_t) + (u_x, u_{tx})]$, неравенство Коши–Буняковского: $|(f, g)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$, выводим вспомогательную оценку

$$[y'(t)]^2 \leq 4y(t)z(t), \quad (4.2)$$

где $z(t)$, $t \in [0, t_2]$, – второй интеграл энергии для уравнения (0.1), определяемый формулой

$$z(t) = \|u_t\|_{W_2^1}^2 = (u_t, u_t) + (u_{tx}, u_{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{tx}^2) dx. \quad (4.3)$$

Вычислим производную второго порядка функционала (4.1) и выразим ее значение через второй интеграл энергии (4.3):

$$\frac{1}{2} y''(t) + (u_{xx}, u_{tt}) - (u, u_{tt}) = z(t). \quad (4.4)$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на функцию $u = u(t, x)$ и проинтегрируем полученное равенство по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$, тогда, применяя формулу интегрирования по частям и учитывая равенство нулю внеинтегральных слагаемых при $x \rightarrow \pm\infty$, получим

$$(u_{xx}, u_{tt}) - (u, u_{tt}) = \|u_{xx}\|_2^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} u_x \sigma(u_x) dx + \alpha(u_x, u_{tt}). \quad (4.5)$$

Аналогично, умножая обе части уравнения (0.1) на $u_t = u_t(t, x)$ и обозначая через $\Phi(\cdot)$ — потенциал, определяемый нелинейностью $\sigma(\cdot)$ формулой $\Phi(s) = \int_0^s \sigma(r) dr$, имеем

$$\frac{d}{dt} \left(z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u_x) dx \right) + 2\alpha(u_{tx}, u_{tt}) = 0. \quad (4.6)$$

Введем в рассмотрение функционал энергии, связанный с уравнением (0.1)

$$E(t) = z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(u_x) dx + 2\alpha \int_0^t (u_{x\tau}, u_{t\tau}) d\tau.$$

Из равенства (4.6) следует, что производная функционала энергии равна нулю: $dE(t)/dt = 0$, следовательно, энергия $E(t)$ не зависит от времени и поэтому для решения уравнения (0.1) имеет место закон сохранения:

$$E(t) = E(0) \equiv E_0, \quad (4.7)$$

в котором начальная энергия E_0 определяется формулой

$$E_0 = \|\psi\|_2^2 + \|\psi'\|_2^2 + \|\varphi''\|_2^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\varphi'(x)) dx.$$

Используя представление уравнения (0.1) в виде

$$u_{tt} = \mathcal{A}u + (I - A)^{-1} \sigma'(u_x) u_{xx}, \quad (4.8)$$

выведем оценку квадрата нормы частной производной u_{tt} . Оценивая нормы обеих частей уравнения (4.8), рассмотрим цепочку неравенств:

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leq (\|(I - B)^{-1}\| \|u_{xx}\|_2 + \|(I - B)^{-1} - (I - A)^{-1}\| \|u_2\| + \|(I - A)^{-1}\| \|\sigma'(u_x) u_{xx}\|_2)^2$$

(учитывая неравенства (0.3) и (2.5), имеем

$$\begin{aligned} \|\sigma'(u_x) u_{xx}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma'(u_x))^2 u_{xx}^2 dx \leq \left(\sigma' \left(\sup_{x \in R} |u_x(t, x)| \right) \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx \leq \\ &\leq (\sigma'(h_4(t)))^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx = h_5^2(t) \|u_{xx}\|_2^2, \end{aligned}$$

где $h_5(t) = |\sigma'(h_4(t))|$ — непрерывная функция на отрезке $[0, t_1]$

$$\alpha_0^2 ((1 + h_5(t)) \|u_{xx}\|_2 + 2 \|u\|_2)^2 \leq$$

(применяя неравенство $\|u\|_2^2 \leq y(t)$)

$$\leq 2\alpha_0^2 ((1 + h_5(t))^2 \|u_{xx}\|_2^2 + 4y(t)).$$

Таким образом, получаем оценку

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leq r_3 y(t) + r_5 \|u_{xx}\|_2^2, \quad t \in [0, t_2], \quad (4.9)$$

где $r_3 = 8\alpha_0^2$, $r_4 = \max_{t \in [0, t_2]} h_5(t)$ и $r_5 = 2\alpha_0^2(1 + r_4)^2$.

Предположим, что выполняется условие

$$s\sigma(s) \leq \lambda \Phi(s) \quad \forall s \in R^1, \quad (4.10)$$

где λ — пока неопределенное достаточно большое положительное число.

Сравнивая равенства (4.5) и (4.7) и применяя условие (4.10), получим неравенство

$$\lambda z(t) + (\lambda - 2)\|u_{xx}\|_2^2 \leq \lambda E_0 + 2\alpha(u_x, u_{tt}) + 2(u, u_{tt}) - 2(u_{xx}, u_{tt}) - 2\alpha\lambda \int_0^t (u_{tx}, u_{tt}) d\tau. \quad (4.11)$$

Учитывая, что $\|u_x\|_2^2 \leq y(t)$, $\|u_{tx}\|_2^2 \leq z(\tau)$ и применяя неравенство (4.9) и оценки

$$1) 2(u_x, u_{tt}) \leq \|u_x\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \leq (1 + r_3)y(t) + r_5\|u_{xx}\|_2^2,$$

$$2) 2(u, u_{tt}) \leq \|u\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \leq (1 + r_3)y(t) + r_5\|u_{xx}\|_2^2,$$

$$3) 2(u_{xx}, u_{tt}) \leq \|u_{xx}\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \leq r_3 y(t) + (1 + r_5)\|u_{xx}\|_2^2,$$

$$4) 2 \int_0^t (u_{tx}, u_{tt}) d\tau \leq \int_0^t (\|u_{tx}\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2) d\tau \leq \int_0^t z(\tau) d\tau + r_3 \int_0^t y(\tau) d\tau + r_5 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau$$

увеличим правую часть неравенства (4.11):

$$\begin{aligned} \lambda z(t) + (\lambda - 3 - (\alpha + 2)r_5)\|u_{xx}\|_2^2 &\leq \lambda E_0 + (\alpha(1 + r_3) + 1 + 2r_3)y(t) + \\ &+ \alpha\lambda r_3 \int_0^t y(\tau) d\tau + \alpha\lambda \left(\int_0^t z(\tau) d\tau + r_5 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Полагая $\lambda_1 = \lambda - 3 - (\alpha + 2)r_5 > 0$, т.е.

$$\lambda = \lambda_0 > 3 + (\alpha + 2)r_5,$$

обозначая

$$E_1(t) = \lambda_0 E_0 + r_6 y(t) + \alpha\lambda_0 r_3 \int_0^t y(\tau) d\tau,$$

где $r_6 = \alpha(1 + r_3) + 1 + 2r_3$, и учитывая, что $r_5 > 1$, перепишем (4.12) в виде интегрального неравенства

$$z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} E_1(t) + \frac{\alpha\lambda_0 r_5}{\lambda_1} \int_0^t (z(\tau) + \|u_{xx}\|_2^2) d\tau. \quad (4.13)$$

Требую выполнение неравенства $E_1 \geq 0$, для чего достаточно, чтобы начальная энергия E_0 была неотрицательной: $E_0 = \|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|\varphi''\|_2^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\varphi'(x)) dx \geq 0$, и применяя к неравенству (4.13) лемму Гронуолла, на отрезке $t \in [0, t_2]$ получим оценку

$$z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} E_1(t) + \frac{\alpha\lambda_0 r_5}{\lambda_1^2} e^{\alpha\lambda_0 r_5 t / \lambda_1} \int_0^t E_1(s) ds. \quad (4.14)$$

Из непрерывной дифференцируемости интеграла энергии $y(t)$ следует, что при выполнении начального условия $y'(0) = 2[(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi')] > 0$ найдется такой отрезок времени $[0, t_3] \subseteq [0, t_2]$, на котором производная интеграла энергии будет неотрицательна: $y'(t) \geq 0$, но тогда справедлива цепочка соотношений

$$\int_0^t y(\tau) d\tau = \tau y(\tau)|_0^t - \int_0^t \tau y'(\tau) d\tau \leq t y(t) \leq t_1 y(t). \quad (4.15)$$

Интегрируя по частям и применяя неравенство (4.15), оценим интеграл из правой части (4.14)

$$\begin{aligned} \int_0^t E_1(s) ds &\leq \lambda_0 t_1 E_0 + r_6 t_1 y(t) + \alpha \lambda_0 r_3 \left(s \int_0^s y(\tau) d\tau \Big|_0^t - \int_0^t s y(s) ds \right) \leq \\ &\leq \lambda_0 t_1 E_0 + (r_6 + \alpha \lambda_0 t_1 r_3) t_1 y(t). \end{aligned}$$

Используя полученную оценку, увеличим правую часть неравенства (4.14)

$$z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 \leq r_8 + r_9 y(t),$$

где $r_7 = 1 + \alpha \lambda_0 t_1 r_5 e^{\alpha \lambda_0 t_1 r_5 / \lambda_1} / \lambda_1$, $r_8 = \lambda_0 r_7 E_0 / \lambda_1$, $r_9 = (r_6 + \alpha \lambda_0 t_1 r_3) r_7 / \lambda_1$.

Таким образом, на временном отрезке $[0, t_3]$ справедливы неравенства

$$\|u_{xx}\|_2^2, \quad z(t) \leq r_8 + r_9 y(t). \quad (4.16)$$

Подставляя значение левой части равенства (4.5) в формулу (4.4), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_x \sigma(u_x) dx = z(t) - \frac{1}{2} y''(t) - \alpha (u_x, u_{tt}) - \|u_{xx}\|_2^2. \quad (4.17)$$

Сравнивая равенство (4.17) с равенством, вытекающим из закона сохранения (4.7) и учитывая неравенство (4.10), в котором $\lambda = \lambda_0$, получим

$$(\lambda_0 + 2) z(t) + (\lambda_0 - 2) \|u_{xx}\|_2^2 \leq \lambda_0 E_0 + y''(t) + 2\alpha (u_x, u_{tt}) - 2\alpha \lambda_0 \int_0^t (u_{xt}, u_{tt}) d\tau. \quad (4.18)$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и оценки (4.9), (4.15), (4.16), имеем

$$1) \ 2(u_x, u_{tt}) \leq (1 + r_3) y(t) + r_5 \|u_{xx}\|_2^2 \leq r_5 r_8 + (1 + r_3 + r_5 r_9) y(t),$$

$$2) \ 2 \int_0^t (u_{xt}, u_{tt}) d\tau \leq \int_0^t z(\tau) d\tau + r_3 \int_0^t y(\tau) d\tau + r_5 \int_0^t \|u_{xx}\|_2^2 d\tau \leq (1 + r_3) r_8 t_1 + (r_3 + (1 + r_5) r_9 t_1) y(t).$$

Учитывая эти оценки и то, что $\lambda_0 > 2$, уменьшим левую и увеличим правую части неравенства (4.18), в результате получим

$$y''(t) + r_{10} y(t) + r_{11} \geq (\lambda_0 + 2) z(t), \quad (4.19)$$

где $r_{10} = \lambda_0 E_0 + \alpha [r_5 + \lambda_0 t_1 (1 + r_5)] r_8$ и $r_{11} = \alpha [(1 + r_3 + r_5 r_9) + t_1 \lambda_0 (r_3 + (1 + r_5) r_9)]$.

Теперь, используя оценку (4.2), уменьшим правую часть неравенства (4.19), в итоге имеем

$$y(t) y''(t) - \frac{\lambda_0 + 2}{4} (y'(t))^2 + r_{11} y(t) + r_{10} y^2(t) \geq 0, \quad t \in [0, t_3]. \quad (4.20)$$

Сравнивая неравенство (4.20) с одним из основных обыкновенных дифференциальных неравенств для интеграла энергии [10, Приложение А, § 5], заключаем, что если выполнены начальные условия

$$y(0) > 0, \quad (y'(0))^2 > 4 \left(\frac{r_{10}}{\lambda_0 - 2} y^2(0) + \frac{r_{11}}{\lambda_0} y(0) \right),$$

тогда время t_3 существования решения задачи Коши (0.1), (0.2) не может быть сколь угодно большим, а именно имеет место оценка сверху

$$t_3 \leq T_\infty \leq \frac{1}{r_{12}(y(0))^{(\lambda_0-2)/4}},$$

где

$$\begin{aligned} r_{12}^2 &= \frac{(\lambda_0 - 2)^2}{16} (y(0))^{-\frac{\lambda_0+2}{2}} \left((y'(0))^2 - \frac{4r_{10}}{\lambda_0 - 2} y^2(0) - \frac{4r_{11}}{\lambda_0} y(0) \right) = \\ &= \frac{(\lambda_0 - 2)^2}{4} \|\varphi\|_{W_2^1}^{\lambda_0-2} \left(((\varphi, \psi) + (\varphi', \psi'))^2 - \frac{r_{10}}{\lambda_0 - 2} \|\varphi\|_{W_2^1}^4 - \frac{r_{11}}{\lambda_0} \|\varphi\|_{W_2^1}^2 \right), \end{aligned}$$

причем для функционала $y(t)$ справедлива оценка снизу

$$y(t) \geq \frac{1}{((y(0))^{(2-\lambda_0)/4} - r_{12}t)^{4/(\lambda_0-2)}},$$

и, значит, не существует глобального по времени решения задачи Коши (0.1), (0.2).

5. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (0.1), (0.2) В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Выясним, какой вид примут условия теоремы 3 для конкретной нелинейности $\sigma(s) = \beta s^3$, $\beta > 0$, т.е. рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - \alpha u_{txx} - u_{txxx} + u_{xxxx} = 3\beta u_x^2 u_{xx} \quad (5.1)$$

и найдем условие, связывающее параметры α и β при разрушении решения $u = u(t, x)$ задачи Коши (5.1), (0.2) на временном отрезке $[0, t_3]$. (Напомним, что на отрезке $[0, t_3]$ для интеграла энергии $y(t) = \|u\|_{W_2^1}^2$ выполняются неравенства $y(t) > 0$ и $y'(t) \geq 0$, вытекающие из начальных условий $\|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0$ и $(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi') > 0$.)

В рассматриваемом случае основные энергетические равенства примут вид:

1) результат умножения (5.1) на $u = u(t, x)$ и последующего интегрирования по R^1

$$(u_{xx}, u_{tt}) - \alpha (u_x, u_{tt}) - (u, u_{tt}) - \|u_{xx}\|_2^2 = \beta \|u_x^2\|_2^2; \quad (5.2)$$

2) результат умножения уравнения (5.1) на $u_t = u_t(t, x)$ и последующего интегрирования по R^1

$$\beta \|u_x^2\|_2^2 = 2\tilde{E}_0 - 2z(t) - 2\|u_{xx}\|_2^2 - 4\alpha \int_0^t (u_{tx}, u_{tt}) d\tau, \quad (5.3)$$

где $\tilde{E}_0 = \|\psi\|_{W_2^1}^2 + \|\varphi''\|_2^2 + \beta \|(\varphi')^2\|_2^2/2$ — начальная энергия;

3) результат умножения уравнения (5.1) на $u_x = u_x(t, x)$ и последующего интегрирования по R^1

$$(u_{xxx}, u_{tt}) = (u_x, u_{tt}) + \alpha (u_{xxx}, u_{tt}); \quad (5.4)$$

4) результат умножения уравнения (5.1) на $u_{tt} = u_{tt}(t, x)$ и последующего интегрирования по R^1

$$\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_{txx}\|_2^2 = (u_{xxx}, u_{txx}) + 3\beta (u_{tt}, u_x^2 u_{xx}); \quad (5.5)$$

5) результат умножения уравнения (5.1) на $u_{xx} = u_{xx}(t, x)$ и последующего интегрирования по R^1

$$\|u_{xxx}\|_2^2 + 3\beta \|u_x u_{xx}\|_2^2 = (u_{xx}, u_{tt}) + \alpha (u_{xxx}, u_{tt}) + (u_{xxx}, u_{txx}). \quad (5.6)$$

Представление уравнения (0.1) в форме (4.8) в рассматриваемом случае принимает вид

$$u_{tt} = \mathcal{A}u + 3\beta (I - A)^{-1} u_x^2 u_{xx}.$$

Оценивая нормы обеих частей этого уравнения, получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned}
 \|u_{tt}\|_2^2 &\leq \alpha_0^2 (\|u_{xx}\|_2 + 2\|u\|_2 + 3\beta \|u_x^2 u_{xx}\|_2)^2 \leq \\
 &(\text{используя неравенства } (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2), \|u_x^2\| \leq y(t) \text{ и (3.1)}) \\
 &\leq 3\alpha_0^2 \left(\|u_{xx}\|_2^2 + 4\|u\|_2^2 + 9\beta^2 \sup_{x \in R^1} u_x^4 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx \right) \leq \\
 &\leq 3\alpha_0^2 \left(\|u_{xx}\|_2^2 + 4y(t) + 9\beta^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx \right) \|u_{xx}\|_2^2 \right) \leq \\
 &\leq 3\alpha_0^2 \left(\|u_{xx}\|_2^2 + 4y(t) + 9\beta^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx + \|u_{xx}\|_2^2 \right) \|u_{xx}\|_2^2 \right) = \\
 &= 3\alpha_0^2 (\|u_{xx}\|_2^2 + 4y(t) + 9\beta^2 (y(t) + \|u_{xx}\|_2^2) \|u_{xx}\|_2^2).
 \end{aligned}$$

Таким образом, на временном отрезке $[0, t_3]$, имеем оценку

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leq 3\alpha_0^2 (9\beta^2 q y^2(t) + 2(2 + 9\beta^2 q^2) y(t) + (1 + 9\beta^2 q^2) q), \quad (5.7)$$

где обозначено $q = \|u_{xx}\|_2^2$.

Рассмотрим функционал, определяемый уравнением (5.1):

$$Q(t) = \|u_{tt}\|_2^2 + \|u_{txx}\|_2^2 + \|u_{xxx}\|_2^2 + 3\beta \|u_x u_{xx}\|_2^2. \quad (5.8)$$

Используя соотношения (5.4)–(5.6), (5.2) и затем применяя неравенство Коши–Буняковского, оценим правую часть равенства (5.8)

$$\begin{aligned}
 Q(t) &= 3\beta (u_{tt}, u_x^2 u_{xx}) + 2(u_{xxx}, u_{txx}) + (u_{xxx}, u_{tt}) + \alpha [(u_x, u_{tt}) + \alpha (u_{xx}, u_{tt})] = \\
 &= 3\beta (u_{tt}, u_x^2 u_{xx}) + 2(u_{xxx}, u_{txx}) + (\alpha^2 + 1)(u_{xx}, u_{tt}) + \alpha (u_x, u_{tt}) = \\
 &= 3\beta (u_{tt}, u_x^2 u_{xx}) + 2(u_{xxx}, u_{txx}) + \alpha (u_x, u_{tt}) + \\
 &+ (\alpha^2 + 1) [\|u_{xx}\|_2^2 + \beta \|u_x^2\|_2^2 + (u_x, u_{tt}) + \alpha (u_x, u_{tt})] = \\
 &= 3\beta (u_{tt}, u_x^2 u_{xx}) + 2(u_{xxx}, u_{txx}) + \alpha (\alpha^2 + 2)(u_x, u_{tt}) + \\
 &+ (\alpha^2 + 1)(u_x, u_{tt}) + (\alpha^2 + 1)\beta \|u_x^2\|_2^2 + (\alpha^2 + 1)\|u_{xx}\|_2^2 \leq \\
 &\leq \frac{3\beta}{2} (\|u_{tt}\|_2^2 + \|u_x^2 u_{xx}\|_2^2) + \|u_{xxx}\|_2^2 + \|u_{txx}\|_2^2 + \frac{\alpha(\alpha^2 + 2)}{2} (\|u_x\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2) + \\
 &+ \frac{\alpha^2 + 1}{2} (\|u\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2) + (\alpha^2 + 1)\beta \|u_x^2\|_2^2 + (\alpha^2 + 1)\|u_{xx}\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Используя оценки

$$\begin{aligned}
 1) \quad \|u_x^2 u_{xx}\|_2^2 &\leq \sup_{x \in R^1} u_x^4 \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx \leq (y(t) + \|u_{xx}\|_2^2) \|u_{xx}\|_2^2 = (y(t) + q)^2 q, \\
 2) \quad \|u_x^2\|_2^2 &\leq \sup_{x \in R^1} u_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \leq (y(t) + \|u_{xx}\|_2^2) y(t) = (y(t) + q) y(t),
 \end{aligned}$$

продолжим оценку функционала (5.8)

$$Q(t) \leq \|u_{xxx}\|_2^2 + \|u_{txx}\|_2^2 + \frac{1}{2} (3\beta + \alpha^3 + (\alpha + 1)^2) \|u_{tt}\|_2^2 + \frac{3\beta q}{2} y^2(t) + 3\beta q^2 y(t) + \frac{3\beta q^3}{2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}(\alpha^3 + (\alpha + 1)^2)y(t) + (\alpha^2 + 1)\beta y^2(t) + (\alpha^2 + 1)\beta qy(t) + (\alpha^2 + 1)q = \\
& = \|u_{xxx}\|_2^2 + \|u_{tx}\|_2^2 + \frac{1}{2}(3\beta + r_{13})\|u_t\|_2^2 + \frac{\beta}{2}(3q + 2r_{14})y^2(t) + \\
& + \frac{1}{2}(6\beta q^2 + 2r_{14}\beta q + r_{13})y(t) + \frac{q}{2}(3\beta q^2 + 2r_{14}),
\end{aligned}$$

где $r_{13} = \alpha^3 + (\alpha + 1)^2$, $r_{14} = \alpha^2 + 1$. Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned}
& (3\beta + r_{13} - 2)\|u_t\|_2^2 + \\
& + (3q + 2r_{14})\beta y^2(t) + [6\beta q^2 + 2r_{14}\beta q + r_{13}]y(t) + (3\beta q^2 + 2r_{14})q \geq 0.
\end{aligned} \quad (5.9)$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство $3\beta + r_{13} - 2 > 0$ или в подробной записи

$$3\beta + \alpha^3 + \alpha^2 + 2\alpha - 1 > 0. \quad (5.10)$$

Обозначая $r_{15} = 3\alpha_0^2(3\beta + r_{13} - 2)$ и применяя в левой части (5.9) оценку (5.7), получим неравенство

$$(3r_{16}q + 2r_{14})\beta y^2(t) + (6r_{16}\beta q^2 + 2r_{14}\beta q + r_{17})y(t) + 3r_{16}\beta q^3 + r_{18}q \geq 0, \quad (5.11)$$

где $r_{16} = 3r_{15}\beta + 1$, $r_{17} = r_{13} + 4r_{15}$, $r_{18} = r_{15} + 2r_{14}$, которое, с учетом (5.10), справедливо для всех значений интеграла энергии $y(t)$, но тогда дискриминант квадратного трехчлена из левой части неравенства (5.11) должен быть неположительный:

$$d_1 = 4\beta(r_{14}^2\beta + 3r_{16}(r_{17} - r_{18}))q^2 + 4r_{14}\beta(r_{17} - 2r_{18})q + r_{17}^2 \leq 0. \quad (5.12)$$

Потребуем, чтобы коэффициент при первой степени квадратного трехчлена в (5.12) был отрицательным: $r_{17} - 2r_{18} < 0$, а коэффициент при второй степени положительным: $r_{14}^2\beta + 3r_{16}(r_{17} - r_{18}) > 0$, тогда, подставляя значения $r_{13} - r_{18}$ и α_0 , соответственно имеем

$$18\beta + \alpha^5 - 5\alpha^4 + 15\alpha^3 - 4\alpha^2 + 20\alpha - 9 < 0 \quad (5.13)$$

и

$$\begin{aligned}
& 2187\alpha_0^4\beta^3 + 81\alpha_0^2(\gamma_1 + 18\alpha_0^2\gamma_2)\beta^2 + \\
& + [r_{14}^2 + 27\alpha_0^2(1 + \gamma_1\gamma_2 + 9\alpha_0^2\gamma_2^2)]\beta + \gamma_1 + 9\alpha_0^2\gamma_2 > 0,
\end{aligned} \quad (5.14)$$

где $\gamma_1 = r_{13} - 2r_{14}$, $\gamma_2 = r_{13} - 2$.

Потребуем еще, чтобы дискриминант квадратного трехчлена в (5.12) был положительным: $d_2 = 4\beta[r_{14}^2\beta(r_{17} - 2r_{18})^2 - r_{17}^2(r_{14}^2\beta + 3r_{16}(r_{17} - r_{18}))] > 0$, тогда получаем еще одно условие, связывающее параметры α и β уравнения (5.1)

$$\begin{aligned}
& 2834352\alpha_0^8\beta^5 + 52488\alpha_0^6(2\gamma_3 + 3\gamma_4)\beta^4 + \\
& + 81\alpha_0^4(16(r_{14}^2 + 27\alpha_0^2(\gamma_2\gamma_5 + 3)) + 72\gamma_4\gamma_3 + 27\gamma_4^2 - 4r_{14}^2)\beta^3 + \\
& + 9\alpha_0^2(432\gamma_5 + 8\gamma_4(r_{14}^2 + 27\alpha_0^2(\gamma_2\gamma_5 + 3)) + 9\gamma_3\gamma_4^2 - 4r_{14}^2\gamma_6)\beta^2 + \\
& + (216\alpha_0^2\gamma_4\gamma_5 + (r_{14}^2 + 27\alpha_0^2(\gamma_2\gamma_5 + 3))\gamma_4^2 - r_{14}^2\gamma_6^2)\beta + 3\gamma_5\gamma_4^2 < 0,
\end{aligned} \quad (5.15)$$

где $\gamma_3 = 18\alpha_0^2\gamma_2 + \gamma_1$, $\gamma_4 = 12\alpha_0^2\gamma_2 + r_{13}$, $\gamma_5 = 9\alpha_0^2\gamma_2 + \gamma_1$, $\gamma_6 = 6\alpha_0^2\gamma_2 + \gamma_1$.

При выполнении условий (5.10) и (5.13)–(5.15) квадратный трехчлен (5.12) имеет положительные корни $K_{1,2} = \frac{4r_{14}\beta(2r_{18} - r_{17}) \pm \sqrt{d_2}}{4\beta(r_{14}^2\beta + 3r_{16}(r_{17} - r_{18}))}$, причем неравенство (5.12) будет выполняться при $K_1 \leq q \leq K_2$, откуда следует оценка

$$\|u_{xx}\|_2^2 \leq K_2 \quad \forall t \in [0, t_3]. \quad (5.16)$$

Теперь неравенство (5.7) можно переписать в виде

$$\|u_{tt}\|_2^2 \leq r_{19}y^2(t) + r_{20}y(t) + r_{21}, \quad (5.17)$$

где $r_{19} = 27\alpha_0^2\beta^2 K_2$, $r_{20} = 6\alpha_0^2(2 + 9\beta^2 K_2^2)$, $r_{21} = 3\alpha_0^2(1 + 9\beta^2 K_2^2)K_2$.

Исключая из равенств (5.2) и (5.3) слагаемые, содержащие параметр β , получим

$$2z(t) + \|u_{xx}\|_2^2 = 2\tilde{E}_0 + (u, u_{tt}) + \alpha(u_x, u_{tt}) - (u_{xx}, u_{tt}) - 4\alpha \int_0^t (u_{xt}, u_{tt}) d\tau.$$

Оценивая абсолютную величину правой части последнего неравенства, имеем

$$z(t) \leq \tilde{E}_0 + \frac{1}{4}y(t) + \frac{3}{4}\|u_{tt}\|_2^2 + \alpha \int_0^t \|u_{tt}\|_2^2 d\tau + \alpha \int_0^t z(\tau) d\tau. \quad (5.18)$$

Используя оценки (5.17), (4.15) и

$$\int_0^t y^2(\tau) d\tau = \tau y^2(\tau) \Big|_0^t - 2 \int_0^t \tau y(\tau) y'(\tau) d\tau \leq t y^2(t) \leq t_1 y^2(t),$$

из (5.18) выводим интегральное неравенство

$$z(t) \leq \Psi(t) + \alpha \int_0^t z(\tau) d\tau, \quad t \in [0, t_3], \quad (5.19)$$

где $\Psi(t) = r_{19}r_{22}y^2(t) + r_{23}y(t) + r_{24}$, здесь $r_{22} = 3/4 + \alpha t_1$, $r_{23} = 1/4 + r_{20}r_{22}$, $r_{24} = \tilde{E}_0 + r_{21}r_{22}$.

Так как в рассматриваемом случае начальная энергия $\tilde{E}_0$ — неотрицательная величина, то применяя к (5.19) лемму Гронуолла, получим

$$\begin{aligned} z(t) &\leq \Psi(t) + \alpha \int_0^t \Psi(s) e^{\alpha(t-s)} ds \leq \Psi(t) + \alpha e^{\alpha t_1} \int_0^t \Psi(s) ds \leq \\ &\leq r_{26}y^2(t) + r_{27}y(t) + r_{28}, \quad t \in [0, t_3], \end{aligned} \quad (5.20)$$

где $r_{25} = 1 + \alpha t_1 e^{\alpha t_1}$, $r_{26} = r_{19}r_{22}r_{25}$, $r_{27} = r_{23}r_{25}$, $r_{28} = r_{24}r_{25}$.

Вычисляя производную второго порядка интеграла энергии (4.1), используя уравнение (5.1) и интегрируя по частям, выводим энергетическое равенство:

$$z(t) - \frac{1}{2}y''(t) - \|u_{xx}\|_2^2 - \alpha(u_x, u_{tt}) = \beta \|u_x^2\|_2^2. \quad (5.21)$$

Из равенств (5.21) и (5.3) следует, что, например, удвоенная правая часть равенства (5.3) в любой точке t отрезка $[0, t_3]$ будет больше левой части (5.21):

$$4\tilde{E}_0 - 4z(t) - 4\|u_{xx}\|_2^2 - 8\alpha \int_0^t (u_{xt}, u_{tt}) d\tau \geq z(t) - \frac{1}{2}y''(t) - \|u_{xx}\|_2^2 - \alpha(u_x, u_{tt})$$

или

$$y''(t) + 8\tilde{E}_0 + 2\alpha(u_x, u_{tt}) - 16\alpha \int_0^t (u_{xt}, u_{tt}) d\tau \geq 10z(t) + 6\|u_{xx}\|_2^2. \quad (5.22)$$

Учитывая неравенства

$$1) 2(u_x, u_{tt}) \leq \|u_x\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2 \leq r_{19}y^2(t) + (1 + r_{20})y(t) + r_{21},$$

$$2) 2 \int_0^t (u_{tx}, u_{tt}) d\tau \leq \int_0^t (\|u_{tx}\|_2^2 + \|u_{tt}\|_2^2) d\tau \leq \int_0^t z(\tau) d\tau + \int_0^t \|u_{tt}\|_2^2 d\tau$$

(применяя оценки (5.19) и (5.17))

$$((r_{19} + r_{26})y^2(t) + (r_{20} + r_{27})y(t) + r_{21} + r_{28})t_1,$$

увеличим левую часть неравенства (5.22) и уменьшим правую

$$y''(t) + r_{29} + r_{30}y(t) + r_{31}y^2(t) \geq 10z(t), \quad (5.23)$$

где $r_{29} = 8\tilde{E}_0 + \alpha(r_{21} + 8(r_{21} + r_{28})t_1)$, $r_{30} = \alpha(1 + r_{20} + 8(r_{20} + r_{27})t_1)$, $r_{31} = \alpha(r_{19} + 8(r_{19} + r_{26})t_1)$.

Используя неравенство (4.2), из неравенства (5.23) выводим

$$y(t)y''(t) - \frac{5}{2}(y'(t))^2 + r_{29}y(t) + r_{30}y^2(t) + r_{31}y^3(t) \geq 0, \quad t \in [0, t_3]. \quad (5.24)$$

Сравнивая неравенство (5.24) с неравенством для интеграла энергии [10, Приложение А, § 5], заключаем, что все условия разрушения решения выполнены и что имеет место

Теорема 4. Пусть выполнены условия леммы и теоремы 2 и пусть начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и параметры α , β уравнения (5.1) обеспечивают, в дополнение к условиям (0.3), (3.4), (5.10), (5.13)–(5.15), выполнение требований

$$[(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi')]^2 > \frac{1}{2} \left(\frac{r_{31}}{2} \|\varphi\|_{W_2^1}^4 + \frac{r_{30}}{3} \|\varphi\|_{W_2^1}^2 + \frac{r_{29}}{4} \right) \|\varphi\|_{W_2^1}^2 > 0,$$

тогда время t_3 существования решения задачи Коши (5.1), (0.2) не может быть сколь угодно большим, а именно имеет место оценка сверху:

$$t_3 \leq T_\infty \leq \frac{1}{r_{32}} \|\varphi\|_{W_2^1}^{-3},$$

где

$$r_{32}^2 = 9 \|\varphi\|_{W_2^1}^{-5} \left\{ [(\varphi, \psi) + (\varphi', \psi')]^2 - \frac{r_{31}}{4} \|\varphi\|_{W_2^1}^6 - \frac{r_{30}}{6} \|\varphi\|_{W_2^1}^4 - \frac{r_{29}}{8} \|\varphi\|_{W_2^1}^2 \right\},$$

причем для функционала $y(t)$ справедлива оценка снизу

$$y(t) \geq \left(\|\varphi\|_{W_2^1}^{-3} - r_{33}t \right)^{-2/3}$$

и предельное равенство $\limsup_{t \uparrow T_\infty} y(t) = +\infty$.

Замечание 4. Из всех требований теоремы 4 наиболее трудно проверяемыми являются условия (5.10), (5.13)–(5.15) на параметры α , β уравнения (5.1). Однако графический калькулятор Desmos: <https://www.desmos.com/> позволяет наглядно изобразить не только области, в которых справедливо каждое из этих неравенств, но и изобразить область на плоскости переменных $x = \alpha$, $y = \beta$, определяющую решение системы неравенств (5.10), (5.13)–(5.15) с заданной точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Beards C.F.* Structural Vibration: Analysis and Damping. Oxford, 2003. 289 p.
2. *Демиденко Г.В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. матем. журнал. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
3. *Ерофеев В.И., Кажжаев В.В., Семерикова Н.П.* Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
4. *Dunford N., Schwartz J.T.* Linear Operators. Part I: General Theory. N.Y.: Interscience, 1958. xiv + 858 p. = *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 896 с.

5. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Серия Матем. анализ. Т. 28. М.: ВИНТИ, 1990. С. 87–202.
6. *Васильев В.В., Пискарев С.И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве II. Теория косинус оператор-функций // http://www-old.srcc.msu.ru/nivc/english/about/home_pages/piskarev/obz2-ru.pdf
7. *Travis C.C., Webb G.F.* Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*. 1978. V. 32. P. 75–96.
8. *Dragomir S.S.* Some Gronwall Type Inequalities and Applications. Melbourne, 2002. 193 p.
9. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.*, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // *Philos. Trans. R. Soc. London*. 1972. V. 272. P. 47–78.
10. *Корпусов М.О.* Разрушение в нелинейных волновых уравнениях с положительной энергией. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2012. 256 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.63

**СТРУКТУРЫ РАЗРЫВОВ И УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ
В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ,
СВЯЗАННЫЕ С ЛИНЕЙНЫМИ И НЕЛИНЕЙНЫМИ
РЕЗОНАНСАМИ АЛЬВЕНОВСКИХ ВОЛН**

© 2023 г. И. Б. Бахолдин*

125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: ibbakh@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.06.2023 г.
Переработанный вариант 03.07.2023 г.
Принята к публикации 27.07.2023 г.

Рассматриваются бездиссипативные и слабодиссипативные структуры разрывов. Для этого используется специальный метод численного анализа для исследования периодических волн. Исследуется расположение ветвей периодических решений. Уединенные волны и структуры бездиссипативных разрывов ищутся как предельные решения. Обнаружено, что помимо резонанса длинных альвеновских волн с короткими быстрыми и медленными магнитозвуковыми волнами встречается и резонанс с длинными волнами, приводящий к появлению уединенных волн и структур разрывов гибридного типа. Сделаны расчеты уравнений в частных производных для выяснения, наблюдаются ли найденные структуры. Библ. 17. Фиг. 7.

Ключевые слова: двухжидкостная плазма, электромагнитная гидродинамика, дисперсия, уединенные волны, структуры разрывов, численные методы.

DOI: 10.31857/S0044466923110054, **EDN:** BUFSJO

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения электромагнитной гидродинамики (ЭМГД) представляют собой обобщение классической магнитной гидродинамики (МГД) [1] посредством учета инерции электронов. Это уравнения МГД с добавленными дисперсионными членами. Ранее рассматривались и более простые МГД уравнения с дисперсией [2]. В данной работе рассматривается вариант уравнений ЭМГД с неизвестными, являющимися скоростью ионов и их концентрацией, предложенный в [3, 4], развитый и исследованный в [5–7]. Существует и другой вариант уравнений с привязкой к средней массовой скорости ионов и электронов [8]. Особенность данных уравнений — конечная скорость распространения коротких волн [9]. Это приводит к тому, что дисперсия для них исчезает, и, несмотря на наличие бездиссипативных структур разрывов, при большой их амплитуде или больших градиентах в начальных данных опрокидывание волн возможно. Ранее была разработана численная методика с малой схемной диссипацией для расчета уравнений в частных производных и методики численного анализа уравнений бегущих волн. Но были исследованы в основном быстрые магнитозвуковые волны [10, 11]. Данная работа нацелена на исследование взаимодействия альвеновских волн с медленными и быстрыми магнитозвуковыми волнами. Используется теория бездиссипативных и слабодиссипативных структур разрывов [12–14]. Под структурами понимаются переходы между однородными и периодическими состояниями. В недиссипативном случае рассматриваются локальные структуры и расширяющиеся со временем структуры. Волновые зоны в расширяющихся структурах в типичных случаях описываются усредненными уравнениями, а на границах волновых зон имеется локальная структура. В случае слабой диссипации расширяющиеся структуры заменяются стационарными, но волновые зоны в них тоже описываются усредненными уравнениями. В контексте данной работы актуальна солитонная структура, в которой волны на границе стремятся к уединенным при стремлении времени к бесконечности или вязкости к нулю. Рассматриваются приближенные солитонные структуры медленных магнитозвуковых волн. Но альвеновские структуры ведут себя нетипич-

ным образом: отсутствуют альвеновские уединенные волны, структуры расширяются и в случае слабой вязкости.

Во разд. 2 приводятся одномерные уравнения ЭМГД, дисперсионное соотношение, условия на разрывах в МГД, уравнения бегущих волн, метод исследования периодических решений. В разд. 3 исследуются структуры разрывов, связанные с нелинейным взаимодействием альвеновских волн с быстрыми и медленными магнитозвуковыми волнами.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1. Исходные уравнения в частных производных и метод их решения

Приведем одномерные уравнения ЭМГД в форме законов сохранения (см. [12, 9]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right) = 0, \\ \frac{\partial nv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \frac{dB_z}{dt} \right) &= 0, \quad \frac{\partial nw}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \frac{dB_y}{dt} \right) = 0, \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u B_y - B_x v - R_i^{-1} \frac{dw}{dt} \right) &= v_m \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u B_z - B_x w + R_i^{-1} \frac{dv}{dt} \right) = v_m \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ — полная производная, n — плотность частиц (объемная концентрация) ионов или электронов, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ — напряженность магнитного поля, и $\mathbf{v} = (u, v, w)$ — скорость ионов. Используются безразмерные величины, определяемые через физические так: $x = \hat{x}/L$, $t = \hat{t}\omega_0$, $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}/V_A$, $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}/|\mathbf{B}_0|$, $n = \hat{n}/n_0$; $L, \omega_0 = V_A/L$, $n_0, |\mathbf{B}_0|, V_A = |\mathbf{B}_0|[4\pi n_0(m_e + m_i)]^{-1/2}$ — характерная длина, частота, плотность невозмущенной плазмы, модуль вектора невозмущенного магнитного поля, альвеновская скорость. Здесь m_i и m_e — массы ионов и электронов, соответственно, v_m — коэффициент магнитной вязкости, связанной с ионно-электронным трением, b^2 — коэффициент сжимаемости электронного газа. Параметры дисперсии R_i и R_e даются формулами: $R_i = \omega_{ic}/\omega_0$ и $R_e = \omega_{ec}/\omega_0$, где $\omega_{ic} = e|\mathbf{B}_0|/(m_i c)$ и $\omega_{ec} = e|\mathbf{B}_0|/(m_e c)$ — ионная и электронная циклотронные частоты соответственно, e — заряд электрона, c — скорость света. Для удобства расчета мы можем взять L таким, что $\omega_0 = \sqrt{\omega_{ic}\omega_{ec}}$, тогда $R_i = R_e^{-1} = \sqrt{m_e/m_i}$. В расчетах далее подразумевается водородная плазма, $R_e^{-1} = 0.02341352$. Для правильной постановки граничных условий при расчетах методом конечных разностей система преобразуется к виду, в котором временные производные в каждом уравнении есть только от одного неизвестного (см. [9]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial un}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right) = 0, \\ \frac{\partial n''}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \left[B_x \frac{\partial w}{\partial x} - B_z \frac{\partial u}{\partial x} - R_i^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v_m \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right] \right\} &= 0, \\ \frac{\partial nw}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \left[B_x \frac{\partial v}{\partial x} - B_y \frac{\partial u}{\partial x} + R_i^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + v_m \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right] \right\} &= 0, \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) + u B_y - B_x v - R_i^{-1} n^{-1} \left[B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + R_e^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial x} + u \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \right. & \\ \left. - R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial n^{-1}}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial x} - v_m \frac{\partial B_y}{\partial x} \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) + u B_z - B_x w + R_i^{-1} n^{-1} \left[B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - \right. \right. \\ & \left. \left. - R_e^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial B_z}{\partial x} + u \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] + R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial n^{-1}}{\partial x} \frac{\partial B_z}{\partial x} - v_m \frac{\partial B_z}{\partial x} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Для расчета данных уравнений была разработана численная схема с центральными разностями по пространству и аппроксимацией временных производных с помощью метода Рунге—Кутты четвертого порядка [9]. В работе [15] для уравнений вида $a_t + ca^{(m)} = 0$, m — порядок производной по x , показано, что схема на основе метода Рунге—Кутты для временных производных и аппроксимации по пространству центральными разностями условно устойчива для методов 1–4 порядков, но оптимально использовать методы 3 и 4 порядков, поскольку у них корректная схемная вязкость, что позволяет вести расчет неограниченное время при всех значениях m и использовать естественное условие устойчивости $\tau < Ch^m$, τ и h — шаги по времени и пространству. Причем для метода третьего порядка схемная диссипация имеет третий порядок малости, а для метода четвертого порядка — пятый. Поэтому этот метод был рекомендован для широкого класса уравнений. Здесь использовался один из вариантов метода четвертого порядка. Поясним, как это делалось в общем виде.

Пусть численная схема описывается системой уравнений $\mathbf{f}_t = \mathbf{F}(t, \mathbf{f})$, где $\mathbf{f}$ — вектор, возникший в результате дискретизации по пространству. Здесь система автономная, аргумент t включен для общности и понимания смысла шагов. Согласно используемому методу Рунге—Кутты аппроксимацию по времени можно представить формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{f}^k + \mathbf{F}(t^k, \mathbf{f}^k) \tau, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{f}^k + \mathbf{F}(t^k + \tau/2, (\mathbf{f}^k + \mathbf{f}_1)/2) \tau, \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{f}^k + \mathbf{F}(t^k + \tau/2, (\mathbf{f}^k + \mathbf{f}_2)/2) \tau, \quad \mathbf{f}_4 = \mathbf{f}^k + \mathbf{F}(t^k + \tau, \mathbf{f}_3) \tau, \\ \mathbf{f}^{k+1} &= (\mathbf{f}_1 + 2\mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_4)/6, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где k — временной индекс. Однако в данном случае некоторые из уравнений имеют вид

$$(f + c(f/n)_{xx})_t = F, \quad c = \text{const}, \quad f : nv, nw.$$

Пространственно-временную аппроксимацию делаем так

$$\begin{aligned} f_{l,*} + c(f_{l-1,*}/n_{l-1,*} + f_{l+1,*}/n_{l+1,*} - 2f_{l,*}/n_{l,*})/h^2 &= f_l^k + F(t_*, f_*) \tau + \\ &+ c\tau(f_{l-1}^k/n_{l-1}^k + f_{l+1}^k/n_{l+1}^k - 2f_l^k/n_l^k)/h^2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где l — пространственный индекс. Под звездочкой для f понимаются те же индексы 1, 2, 3, 4, а для n , $\mathbf{f}$ и t — те же значения аргументов функции $\mathbf{F}$, что и в выражениях (2.3). На каждом шаге метода Рунге—Кутты расчет последовательно выполняется для всех уравнений (2.2), поэтому величины n_* на каждом шаге вычисляются раньше, чем f_* в (2.4). Аналогично поступаем с уравнениями вида

$$\begin{aligned} (f + c(f_x/n)_x)_t &= F, \quad f : B_y, B_z, \\ f_{l,*} + 2h^{-2}c \left[\frac{f_{l-1,*}}{n_{l-1,*} + n_{l,*}} + \frac{f_{l+1,*}}{n_{l+1,*} + n_{l,*}} - f_{l,*} \left(\frac{1}{n_{l-1,*} + n_{l,*}} + \frac{1}{n_{l+1,*} + n_{l,*}} \right) \right] &= \\ = f_l^k + F(t_*, \mathbf{f}_*) \tau + 2h^{-2}c\tau \left[\frac{f_{l-1}^k}{n_{l-1}^k + n_l^k} + \frac{f_{l+1}^k}{n_{l+1}^k + n_l^k} - f_l^k \left(\frac{1}{n_{l-1}^k + n_l^k} + \frac{1}{n_{l+1}^k + n_l^k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Это приводит к неявным алгебраическим системам уравнений, которые решаются методом прогонки. Аналогично можно включать неявную аппроксимацию и для других членов, например вязкости, для улучшения условия устойчивости. Такой подход ранее успешно использовался как в классическом варианте (труба с газом), так и при наличии пространственно-временных производных (труба с несжимаемой жидкостью) [15]. Система (2.2) получена подстановкой уравнений простого неконсервативного вида, приведенных в [7], в консервативные уравнения (2.1). При программировании эта подстановка заново была сделана с заменой производных разностными операторами, что существенно упростило написание программы и исключило ошибки.

Схема в основном явная, неявные аппроксимации применялись только для пространственно-временных производных. Численный эксперимент показал, что для устойчивости и сходимости в недиссипативном случае следует придерживаться условия $\tau < Ch$.

Программа ориентирована на решение задач распространения уединенных волн и задачу о распаде произвольного разрыва. На границах, удаленных от исследуемой области, в программе ставятся условия фиксации заданных значений всех неизвестных, одних и тех же для трех приграничных ячеек. При анализе аппроксимации это эквивалентно заданию краевых значений, заданию нулевых значений первых производных по x для u и n , а также нулевых значений первых и вторых производных для остальных неизвестных. Это нужно для используемой численной схемы. Избыточность числа граничных условий [9] не создает проблем при решении таких задач. Программа оборудована средствами, вырезать фрагмент, добавить фрагмент. Это позволяет устранять рост возмущений вблизи границы, последствия отражения волн от границ, а также при распаде разрыва позволяет проводить расчет отдельно взятой структуры.

2.2. Дисперсионное соотношение и прогнозируемые типы волн

Приведем дисперсионное соотношение линеаризованного варианта системы (2.1) в недиссипативном случае при $n = 1$, $|\mathbf{B}| = 1$, а также скорости длинных быстрых и медленных магнитозвуковых длинных волн, а также альвеновских волн [7]:

$$\begin{aligned} & (r+k)^2 V_0^6 - \left\{ r^2 + r^2 \cos^2 \theta + r[1 + \cos^2 \theta (\rho + 1)] k^2 + (r+k)^2 b^2 \right\} V_0^4 + \\ & + \cos^2 \theta [r^2 + 2r^2 b^2 + r(\rho + 2)b^2 k^2] V_0^2 - r^2 \cos^4 \theta b^2 = 0, \\ & r = R_i R_e, \quad V_0 = \omega/k - u, \quad \rho = \left[(R_e/R_i)^{1/2} - (R_i/R_e)^{1/2} \right]^2, \\ & V^\pm = \sqrt{1 + b^2 \pm \sqrt{(1 + b^2)^2 - 4 \cos^2 \theta b^2}} / 2 + u, \quad V_a = \cos \theta + u. \end{aligned}$$

Здесь θ — угол между вектором напряженности магнитного поля и осью Ox , ω — циклическая частота, k — волновое число. Есть быстрая и медленная магнитозвуковые и альвеновская ветви дисперсионного соотношения $\omega = \omega(k)$. Скорости распространения быстрых и медленных магнитозвуковых, а также альвеновских волн для данных уравнений конечны при любых значениях длины волны ($k \in R$). При $k \rightarrow 0$ скорости распространения волн совпадают с соответствующими скоростями в МГД, при $k \rightarrow \infty$ скорости быстрых магнитозвуковых волн стремятся к $u \pm b$, а скорости медленных и альвеновских стремятся к u .

У быстрой магнитозвуковой ветви есть точка перегиба при $k > 0$ в случае $\theta < \theta_c$ (см. [7]), где $\theta = \arctg \left((B_y^2 + B_z^2)^{1/2} / B_x \right)$, θ_c — критическое значение. Прямая, касательная к этой ветви в начале координат, пересекает ветвь при $k > 0$. Есть также прямая $V^m = \omega/k$, касательная дисперсионной ветви при $k > 0$. Поэтому при $V^m > V > V^+$ соответствующая прямая два раза пересекает ветвь при $k > 0$. Далее под понятием пересечение будем иметь в виду пересечение при $k > 0$. Совпадение скоростей волн при наличии рационального отношения длин волн будем называть *резонансом*. Логично думать, что и в случае нелинейных уравнений будет наблюдаться аналогичный резонанс и его можно предсказать. В разд. 3 будет показано, что встречаются еще резонансы, связанные с нелинейными свойствами уравнений, не определяемые из дисперсионного соотношения. При $\theta > \theta_c$ точки перегиба и пересечения при $V > V^+$ и $k > 0$ нет. В случае медленных магнитозвуковых волн при $V < V^-$ имеются два пересечения: с медленной магнитозвуковой и с альвеновской ветвью. В [7] методом исследования нормальных форм в случае $\theta > \theta_c$ доказано существование солитонных решений с малой амплитудой волн. При $\theta < \theta_c$, а также для медленных магнитозвуковых волн согласно теории возможны обобщенные уединенные волны, т.е. комбинации уединенной и периодической волн. Во всех случаях магнитозвуковые волны малой амплитуды могут быть описаны уравнением Кортевега—де Вриза, при этом в случае обобщенной уединенной волны минимальная амплитуда периодической составляющей экспоненциально мала [16]. Для быстрых магнитозвуковых волн доказывалось также существование так называемых 1 : 1 уединенных волн (волны с осцилляциями, затухающими на бесконечности), наличие

которых связано с существованием прямой, проходящей через начало координат и касающейся дисперсионной ветви при $k > 0$, у этих волн $V > V^{rm}$. В [10]–[12] были описаны численные методики анализа решений уравнений бегущих волн, корректные для нахождения симметричных обычных и 1 : 1 уединенных волн в случае, когда прямая, соответствующая скорости волны, не пересекает дисперсионные ветви при $k > 0$ и для нахождения обобщенных уединенных волн в случае, когда имеется пересечение.

Для альвеновских волн колебательного типа в зависимости от значений θ и b возможно пересечение касательной в начале координат с быстрой магнитозвуковой ветвью при $\theta < \theta_{cam}$, соответственно есть значение V^{ra} , аналогичное значению V^{rm} , отсутствие пересечения при $\theta_{cam} < \theta < \theta_{caa}$, пересечение с альвеновской ветвью при $\theta > \theta_{caa}$ (см. [11]):

$$\theta_{caa} = \arccos \frac{b\rho^{1/2}}{(\rho-1)^{1/2}} \approx \theta_{cam} = \arccos b.$$

Данные формулы применимы в случае, когда аргумент арккосинуса меньше 1. В противном случае значение величины критического угла формально считать нулем.

В случае колебательных альвеновских волн численные расчеты задачи о распаде разрыва уравнений ЭМГД показывают, что нет обычных или обобщенных уединенных волн, в том числе и приближенных, что связано с особенностями нелинейности [9].

Можно при $\theta = 0$ рассматривать еще вращательные альвеновские волны. В [8] для них приведены точные решения, описывающие периодические волны произвольной амплитуды, причем их скорость от этой амплитуды не зависит, что позволяет предположить, что для этих волн нет и уединенной волны огибающей.

2.3. Метод исследования бегущих волн

Приведем уравнения волн, бегущих со скоростью V :

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \left(-B_z V + B_z u - B_x w - c_v - v_m \frac{dB_z}{dx} \right) R_i (V - u)^{-1}, \\ \frac{dw}{dx} &= - \left(-B_y V + B_y u - B_x w - c_w - v_m \frac{dB_y}{dx} \right) R_i (V - u)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_y}{dx} &= -(nwV + nwu - B_x B_z - c_{By}) R_e (V - u)^{-1}, \\ \frac{dB_z}{dx} &= (-nvV + nvu - B_x B_y - c_{Bz}) R_e (V - u)^{-1}, \\ c_n^2 + \left(c_n V + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} - c_u \right) n + b^2 n^2 &= c_u, \quad u = n^{-1} c_n + V, \\ c_w &= B_{y0}(u_0 - V) - B_x v_0, \quad c_v = B_{z0}(u_0 - V) - B_x w_0, \\ c_n &= n_0(u_0 - V), \quad c_u = n_0 u_0(u_0 - V) + \frac{B_{y0}^2 + B_{z0}^2}{2} + b^2 n_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Индексом 0 обозначены величины для состояния равновесия. При получении численных решений (2.5) решалось квадратное уравнение (2.6) для определения n , а затем находилось u . Знак при корне определялся в результате проверки того, что начальные значения в решении соответствуют заданным. Фактически нужно брать отрицательный знак при $V > b$ и положительный при $V < b$ [7], ниже при θ вблизи $\pi/2$ использовался отрицательный знак, а вблизи 0 — положительный.

Согласно методике поиска периодических волн, разработанной в [13] и примененной в [11] к уравнениям (2.5) без вязкости, находим состояние равновесия, выбираем среди начальных данных симметризуемую величину, варьируемую с некоторым шагом (внешний цикл программы), например $B_y = B_{y0} + Z$. Варьируем с некоторым шагом другую симметризуемую величину (внутренний цикл), например $v = v_0 + Y$. Остальные начальные данные соответствуют состоянию

равновесия. Рассчитывая (2.5), выбираем x_{*p} такое, что антисимметризуемая величина, например w , обращается в ноль p раз. Выбираем значение Y так, чтобы вторая антисимметризуемая величина B_z приняла значение ноль. Симметризуя/антисимметризуя решение относительно x_{*p} , находим периодическое решение на периоде. Симметричные и антисимметричные переменные могут быть определены и противоположным способом, наоборот, но при исследовании предельных солитонных решений уравнений (2.5) предпочтительнее первый вариант. В результате работы программы для каждого p из некоторого заданного диапазона значений создается файл со столбцами данных (Z, Y) . Для расчета применялся метод Рунге–Кутты второго порядка.

Делаем поточечные отображения данных файлов на плоскости (Z, Y) . Для разных значений p можно использовать разные цвета или разную жирность точки. В результате на этой плоскости образуются ветви. Анализируем ветви различными способами.

Точка, соответствующая одному и тому же решению, может отображаться при разных значениях p , поэтому ищем для него минимальное значение p , обозначим его через q . Для этого вначале отображаются точки с большим значением p , а затем — с меньшим, точки с большим значением p будут перекрыты точками с меньшим значением. По величине q можно судить об отношении периодов волн двоякопериодического решения. Резонансная двухволновая ветвь с соотношением длин волн n может соответствовать $q = n$, одноволновые ветви — $q = 1$, хотя это не всегда так. В частности, ниже при исследовании резонансов коротких волн с длинными альвеновскими и магнитозвуковыми волнами максимальное p бралось равным 10 и этого было достаточно, хотя рассматривались резонансы с большими значениями отношений длин волн. Для одноволновых, коротковолновых альвеновских и быстрых магнитозвуковых ветвей q действительно было равным единице.

Строятся графики решений для различных неизвестных и соотношение длин волн определяется визуально. Проводится анализ расположения ветвей линеаризованных решений с тем, чтобы выявить закономерности и продолжить их на нелинейные. В случае однократного пересечения с дисперсионными ветвями прямой, соответствующей скорости V , через точку равновесия проходит одноволновая ветвь линейных волн. В случае двукратного пересечения — две одноволновые ветви. Анализируется порядок расположения ветвей. Одноволновые ветви являются первичными. В случае устойчивости участка ветви он пересекается вторичными двухволновыми резонансными ветвями. Вторичные ветви в случае устойчивости могут пересекаться ветвями фазовых колебаний двух волн. Фазовые колебания резонансных решений неинтегрируемых по Лиувиллю систем рассматривались в [17]. Делается также проверка устойчивости ветви путем численного эксперимента. Результатом развития неустойчивости периодических решений вторичной ветви может быть приближенное решение в виде уединенной волны, огибающей решения с фазовыми колебаниями [12, 11], первичной коротковолновой ветви — в виде обобщенной уединенной волны. Однако при большом отношении длин волн провести такой детальный анализ затруднительно, ниже применялся иной подход, основанный на общем анализе расположения точек с выявлением точек равновесия (2.5) и коротковолновых, одноволновых ветвей.

Обычные, 1:1, и обобщенные уединенные волны ищутся как предельные решения для периодических волн [12, 13]. Обычная уединенная волна находится как предельное решение на конце одноволновой ветви. Таким способом можно находить и приближенные решения типа уединенных волн, если точного решения не существует, а также находить решения в особом случае, когда уединенная волна существует, несмотря на наличие резонанса. В случае 1:1 уединенных волн выявляются спиральные ветви, ищутся предельные решения, соответствующие центру спиралей, ему соответствует гребень 1:1 уединенной волны. В случае обобщенных уединенных волн рассматриваются последовательности ветвей, сходящиеся к некоторому участку одноволновой ветви.

Анализ числа пересечений прямой $V = \omega/k$ с дисперсионными ветвями в данном методе не обязателен, но полезен, при двух пересечениях ожидаются двоякопериодические решения, при одном пересечении — однопериодные (двоякопериодические возможны), но при отсутствии пересечений те и другие тоже могут быть.

Подробное описание результатов исследования ветвей периодических решений для быстрых магнитозвуковых волн при наличии двухволнового резонанса дано в [11].

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АЛЬВЕНОВСКИХ ВОЛН С МЕДЛЕННЫМИ И БЫСТРЫМИ МАГНИТОЗВУКОВЫМИ ВОЛНАМИ

3.1. О существовании обобщенных уединенных медленных магнитозвуковых волн

Согласно теории [7] для медленных магнитозвуковых волн можно допустить наличие обобщенных уединенных волн и структур разрывов типа переходов между периодическим и двоякопериодическим состоянием. Но при расчете задачи о распаде разрыва такие структуры не должны наблюдаться. Для медленных магнитозвуковых волн прогнозируется стохастическое решение с излучением коротких альвеновских волн внутрь волновой зоны [12]. В расчетах уравнений ЭМГД [9] при малых амплитудах скачка наблюдалась структура солитонного типа. При увеличении амплитуды возникало излучение внутрь волновой зоны, но оно расценивалось как схемный эффект, поскольку обеспечить достаточно мелкий пространственный шаг для аппроксимации коротких альвеновских волн не представлялось возможным. Метод, основанный на исследовании (2.5) посредством анализа собственных значений и линейной аппроксимации периодической компоненты, показывал отсутствие обобщенных уединенных волн [9].

Было осуществлено исследование методом анализа периодических решений для начального состояния равновесия $n_0 = 1, u_0 = 0, w_{z0} = 0, B_x = \cos \theta, B_{y0} = \sin \theta, B_{z0} = 0$ назовем это состоянием I ; скорость волн $V = V^-(1 + \mu)$. В отличие от случая быстрых магнитозвуковых волн, где можно выбрать значения μ , при которых длины коротких и длинных волн резонансных волн сопоставимы и можно выделить резонансные ветви, в случае резонанса медленных магнитозвуковых и альвеновских волн отношение периодов велико при всех значениях μ (порядка 1000). При этом ветви сливаются и точки, отображающие их на графиках, как бы группируются, создавая подобия областей, хотя с математической точки зрения это множества меры ноль, выделяются только коротковолновые одноволновые альвеновские ветви. Но при исследовании чисто альвеновских ветвей для случая, когда касательная в начале координат пересекает альвеновскую ветвь при $k \neq 0$, как и для быстрых магнитозвуковых ветвей, можно подобрать скорость так, чтобы длины волн стали сопоставимы и выделить резонансные ветви. В процессе исследования проводились расчеты с постепенным увеличением значения $\mu > 0$. При таком выборе знака μ начальная точка равновесия должна быть ассоциирована с подошвой обобщенной медленной магнитозвуковой уединенной волны. Согласно проведенному исследованию “область” двоякопериодических ветвей, содержащая одноволновую ветвь медленных магнитозвуковых волн, практически доходит до точки равновесия при умеренных значениях μ , поэтому можно получить решение, практически неотличимое от чисто солитонного. Детальные расчеты показывают, что эта ветвь все же отделена от точки равновесия и уединенной волны нет. Если допустить, что и при малых значениях μ медленная магнитозвуковая ветвь и резонансные ветви отделены от точки равновесия, то точного решения в виде обычной или обобщенной уединенной волны, связанной с резонансом медленных магнитозвуковых и альвеновских волн, при малых значениях μ нет. Если же при малых μ обобщенная уединенная волна существует, то минимальная амплитуда ее периодической компоненты настолько мала, что ее невозможно определить численно. Заметим, что аналогичные расчеты, см. ниже, проводились и для случая θ , близкого к нулевому значению, для быстрых магнитозвуковых волн и также на основе численного анализа периодических решений однозначно нельзя сказать, существует или нет обобщенная уединенная волна, связанная с саморезонансом быстрых магнитозвуковых волн, хотя для θ , близкого к θ_c , ее существование убедительно подтверждалось [9].

3.2. Взаимодействие длинных альвеновских и длинных медленных магнитозвуковых волн

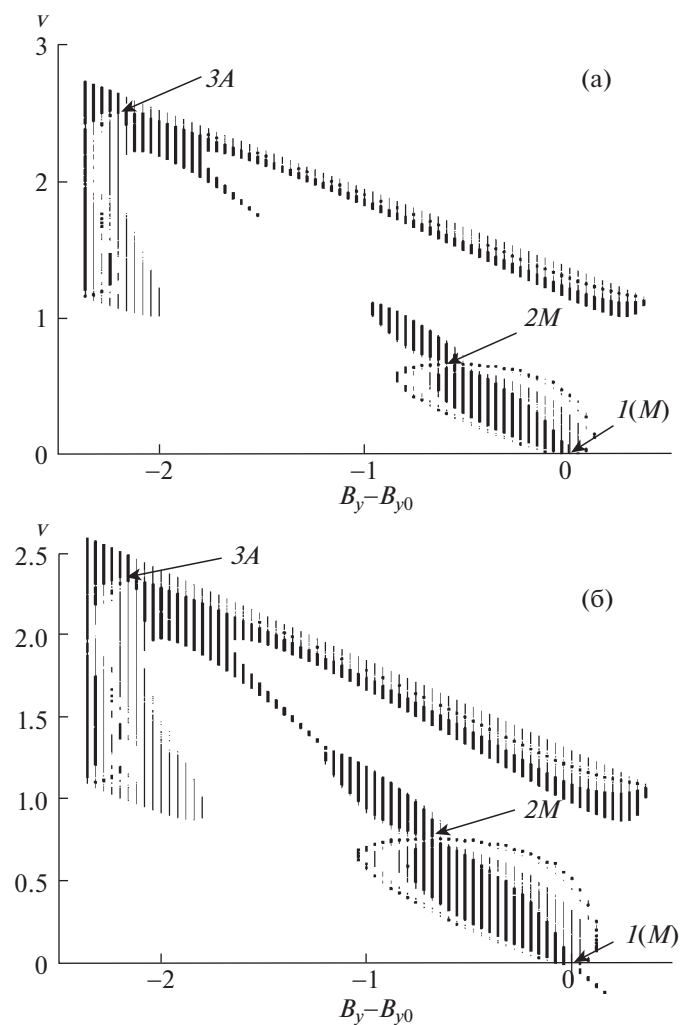
Особый интерес представляют исследования взаимодействия медленных магнитозвуковых и альвеновских волн в случае, когда величина θ близка к $\pi/2$ ($V^a = V^- = 0$ при $\theta = \pi/2$), примеры расположения ветвей показаны на фигурах ниже, $\theta = 1.525, b^2 = 0.5$. При этом величины V^- и V^a близки, оказалось, что возможны одновременные взаимодействия длинных медленных магнитозвуковых, длинных альвеновских волн и коротких альвеновских волн, т.е. трехволновой резонанс. Кроме того, с точки зрения физики при $\theta \approx \pi/2$ затухание Ландау слабое. В этом случае имеется три точки равновесия системы (2.5). На фигурах ниже точки равновесия пронумерованы, проставлены обозначения A или M , указывающие на то, что через них проходит длинноволно-

вая альвеновская или медленная магнитозвуковая ветвь, (M) указывает на то, что длинноволновая медленная магнитозвуковая ветвь подходит близко к этой точке, но не доходит до нее.

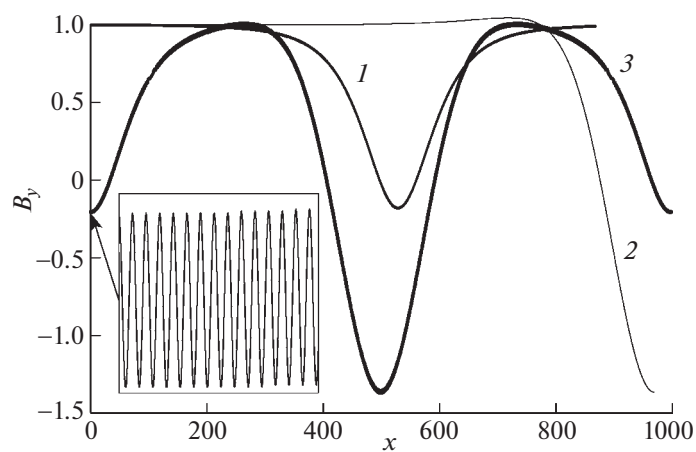
На фиг. 1а, $\mu = 0.5$, показано расположение медленных магнитозвуковых и альвеновских ветвей в случае, когда у медленных магнитозвуковых волн есть взаимодействие только с короткими альвеновскими волнами. Из точки 1 выходят ветви коротких альвеновских волн, но вблизи располагаются также резонансные ветви длинных магнитозвуковых и коротких альвеновских волн. Из точки 2 выходят ветви длинных магнитозвуковых волн и коротких альвеновских. Верхняя точка, точка 3, соответствует альвеновским волнам. Из нее выходят короткая и длинная альвеновские ветви. Есть длинноволновое двоякопериодическое солитоноподобное решение с преобладанием длинных альвеновских волн. Согласно МГД эволюционными являются переходы $1 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 1$. Под эволюционностью здесь понимается выполнение условия того, что число граничных условий на разрыве равно числу уходящих характеристик упрощенной системы, которой здесь является система МГД-уравнений, плюс единица. Это необходимое условие для корректности постановки задачи для МГД с разрывом. Здесь подразумевается, что разрывы в смысле эволюционности являются аналогами ударных волн в газовой динамике: две приходящие характеристики одного типа по разные стороны разрыва, а у характеристик остальных типов — с одной стороны уходящая, а с другой — приходящая, класс 0 согласно классификации по числу свободных параметров [14]. Причем для первого перехода есть приближенная система периодических медленных магнитозвуковых волн (фактически там присутствует еще компонента коротких альвеновских волн малой амплитуды), позволяющая в недиссипативном и слабодиссипативном случае построить приближенную солитонную структуру такого перехода с волновой зоной, описываемой усредненными уравнениями. При малых μ медленная магнитозвуковая уединенная волна на границе волновой зоны может быть описана уравнением Кортевега—де Вриза.

На фиг. 1б, $\mu = 0.575$, показан случай, когда скорость приблизилась к скорости альвеновских волн. Есть солитоноподобные двоякопериодические решения, ассоциированные с медленными магнитозвуковыми волнами, и гибридные, ассоциированные с альвеновскими и медленными магнитозвуковыми волнами одновременно, фиг. 2, кривые 1 и 2 (для кривой 2 показан полупериод). Для гибридного солитоноподобного решения в отличие от медленного магнитозвукового решения асимптотического приближения не найдено, это существенно нелинейное решение. Помимо системы приближенных периодических волн, для перехода $1 \rightarrow 2$ есть и приближенная система двоякопериодических волн для перехода $3 \rightarrow 1$ (если говорить точно, то это тройкопериодические решения). Среди них есть решения, содержащие одновременно оба типа описанных выше приближенных обобщенных уединенных волн, фиг. 2, кривая 3, в рамке в увеличенном виде детально показаны малоамплитудные альвеновские периодические короткие волны в окрестности $x = 0$ для этого решения. В реальности в масштабе, использованном для графиков на фиг. 2, размер рамки по оси x должен быть равен 1, а по оси B_y , равен 0.01. Отметим, что во всех случаях присутствуют эти короткие альвеновские волны, не видимые на графиках 1, 2, 3. Заметим, что хотя приближенное медленное магнитозвуковое солитонное решение выявлено здесь при довольно большом значении μ , при дальнейшем его незначительном увеличении ($\mu = 0.72$) амплитуда коротковолновой альвеновской составляющей становится уже существенной, а амплитуда солитоноподобной медленной магнитозвуковой компоненты снижается [11]. Когда скорость почти совпадает с альвеновской, но все же меньше ее ($\mu = 0.73$), по-прежнему эволюционные переходы $1 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 1$. Приближенные солитонные решения или классические кинки (структуры класса -1 [14] с дополнительным условием на разрыве) здесь не обнаруживаются, в окрестностях точек 1 и 3 выявляются только двоякопериодические и тройкопериодические решения, комбинации из длинной магнитозвуковой и короткой альвеновской волн.

На фиг. 3а показан случай, когда скорость незначительно превышает альвеновскую, $B_y - B_{y0} < 0$, $v > 0$, $\mu = 0.8$. Точка 1 теперь ассоциирована с альвеновскими волнами и из нее выходят коротковолновая и длинноволновая альвеновские ветви. Эволюционные переходы $3 \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 3$. Также как и в случае $\mu = 0.575$ имеются два типа приближенных солитонных решений и для обоих переходов есть система приближенных периодических и двоякопериодических волн, позволяющая осуществить этот переход в слабодиссипативном случае. По мере увеличения μ точки 2 и 3 сближаются, амплитуда медленного магнитозвукового разрыва становится сколь угодно малой, т.е. соответствующее приближенное солитонное решение становится асимптотически точным.

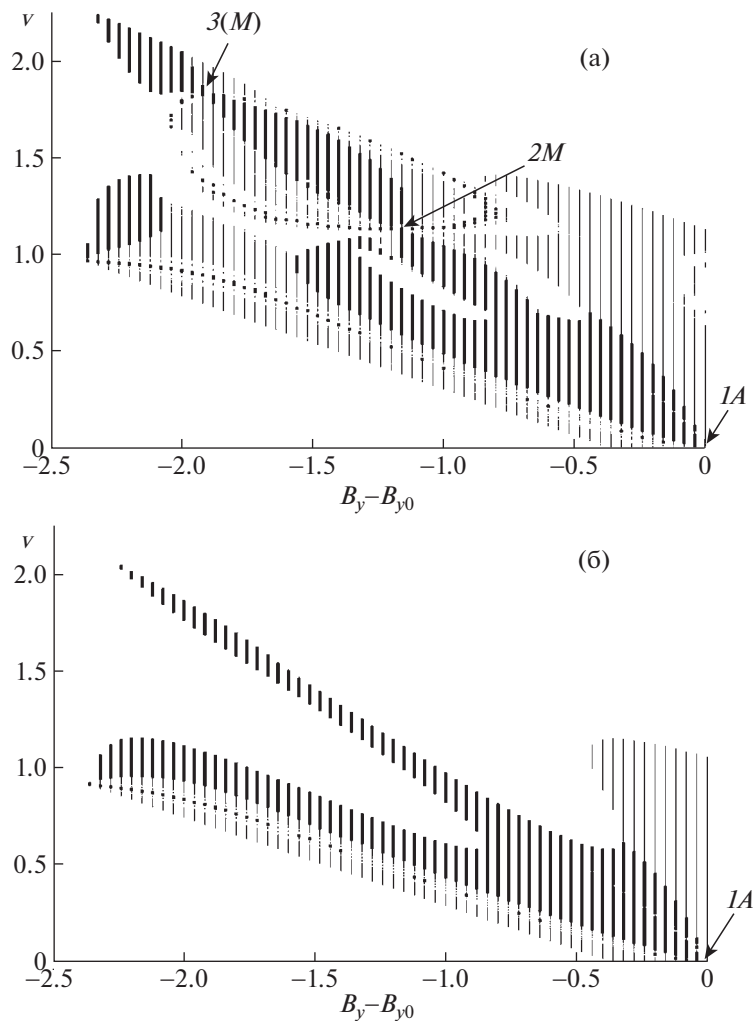


Фиг. 1



Фиг. 2

При дальнейшем увеличении скорости (фиг. 3б, $\mu = 0.9$) сохраняется только альвеновская точка равновесия и двухволновые альвеновские решения. Приближенных солитонных решений здесь нет, что соответствует результатам расчетов уравнений ЭМГД в [9].



Фиг. 3

Отметим, что при выходе коротковолновой альвеновской ветви на границу зоны существования периодических решений (это понятие визуальное, область заполненная точками, с математической точки зрения это, очевидно, множество меры ноль) возникает чисто вращательная альвеновская волна, аналитически описанная в [8]. Обнаружены и двоякопериодические вращательные альвеновские волны.

Некоторые из границ зон существования двоякопериодических решений (в частности граница в виде практически прямой наклонной линии) соответствуют заострению волн коротковолновой альвеновской компоненты. Заострения длинных медленных магнитозвуковых и длинных альвеновских волн при наличии резонанса обнаружено не было. Проводилось исследование расположения альвеновских ветвей и в случае, когда касательная к альвеновской дисперсионной ветви пересекает быструю магнитозвуковую ветвь. При $U < V_a$ были выявлены резонансные двоякопериодические решения, причем граница их существования также, как и в случае пересечения с альвеновской дисперсионной ветвью ассоциирована с заострением коротких волн, но в этом случае быстрых магнитозвуковых. Конец одноволновой быстрой магнитозвуковой ветви также ассоциирован с заострением. Можно предположить, что при наличии резонанса опрокидывание длинных волн компенсируется излучением коротких волн и в этом смысле этот эффект аналогичен действию вязкости. Короткие волны могут опрокинуться.

Уравнения (2.5) анализировались на наличие всех состояний равновесия в общем случае. Когда θ не близко к $\pi/2$ при малых μ выявляется только два состояния равновесия, связанных с медленными магнитозвуковыми волнами, при увеличении μ число реальных, т.е. с $n > 0$, состо-

ний равновесия может увеличиваться до четырех, можно допустить существование и более сложных нелинейных взаимодействий волн.

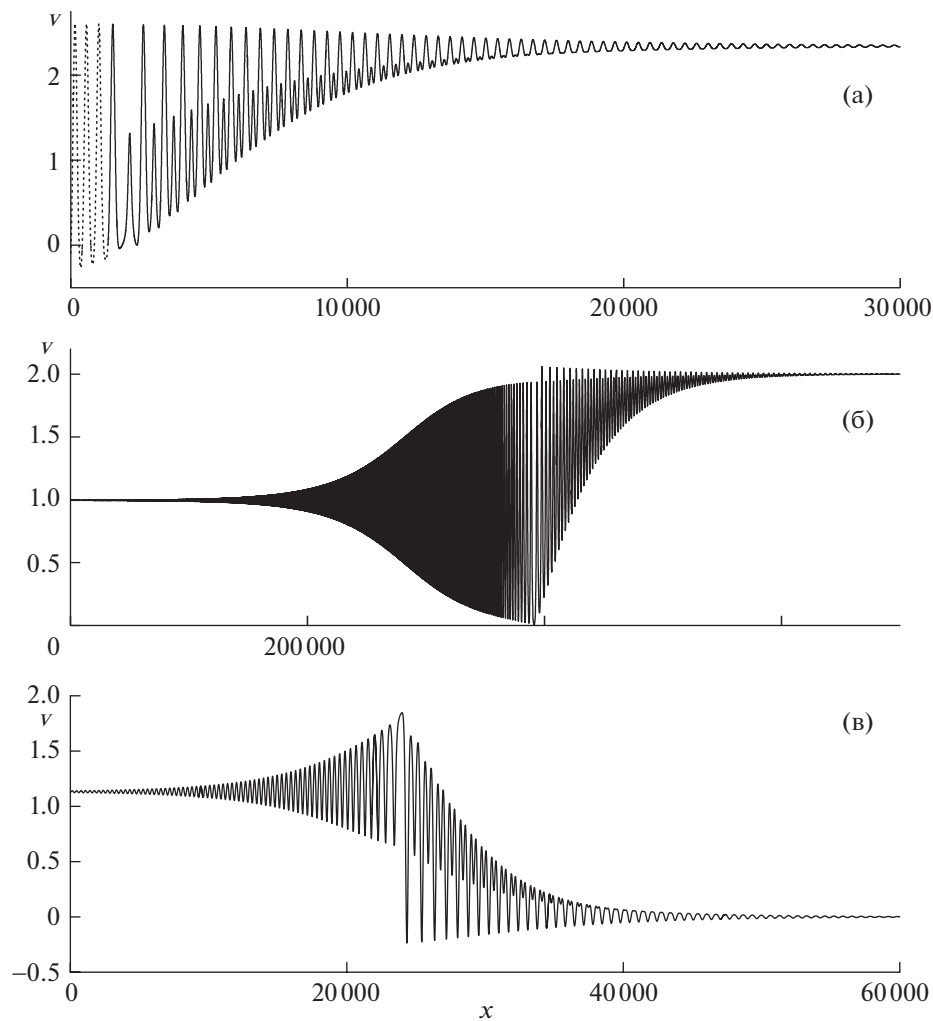
3.3. Применение более простой системы уравнений бегущих волн

В случае применения более простого варианта системы (2.1) с $R_e^{-1} = 0$ система уравнений бегущих волн выводится из (2.5) и имеет второй порядок, как и система бегущих волн для классического и модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза, но это система с более сложной нелинейностью:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dx} &= \left(-B_z V + B_z u - B_x w - c_v - v_m \frac{dB_z}{dx} \right) R_i (V - u)^{-1}, \\ \frac{dw}{dx} &= - \left(-B_y V + B_y u - B_x w - c_w - v_m \frac{dB_y}{dx} \right) R_i (V - u)^{-1}, \\ -nwV + n w u - B_x B_z &= -n_0 w_0 V + n_0 w_0 u_0 - B_x B_{z0}, \\ -nvV + n v u - B_x B_y &= -n_0 v_0 V + n_0 v_0 u_0 - B_x B_{y0}.\end{aligned}$$

Значения B_y и B_z из нижних двух уравнений подставляются в верхние два. В случае расчета с магнитной вязкостью требуется еще решить два алгебраических уравнения для нахождения dv/dx и dw/dx . При использовании газодинамической вязкости получается система третьего порядка, поскольку (2.5) дополняется уравнением для u [9]. Это физическое, но не асимптотическое приближение. На фазовом портрете системы уравнений бегущих волн в недиссипативном случае положения равновесия, отмеченные на фиг. 1 и 3 буквами A и M становятся эллиптическими точками, а (M) — гиперболическими. Появляются солитонные решения. Здесь при $V \neq V^a$ имеются точные медленные магнитозвуковые и гибридные альвено-магнитозвуковые уединенные волны. Напомним, что рассмотрение полной системы показывает, что не всегда рассматриваемые уединенные волны существуют даже в приближенном виде. При добавлении слабой магнитной вязкости можно построить структуры слабодиссипативных разрывов. Некоторые из них показаны на фиг. 4а — для $\mu = 0.575$, $V < V^a$, $v_m = 0.01$, б — для $\mu = 0.73$, $V < V^a$, $v_m = 0.001$, в — для $\mu = 0.8$, $V > V^a$, $v_m = 0.01$. При этом в случае, соответствующем фиг. 4а, можно найти солитонную структуру медленного магнитозвукового разрыва $1 \rightarrow 2$ при любых значениях v_m , и приближенную структуру альвеновского разрыва $3 \rightarrow 1$ при $v_m \rightarrow 0$, показанную на фиг. 4а. Участок альвеновской структуры условно показан сплошной линией, но колебания вблизи $x = 0$, показанные пунктирной линией, сохранены для демонстрации того, что это решение приближенное (фактически расчет проводился из окрестности точки равновесия 3 в направлении, обратном оси x). В этом решении колебательная зона двухволновая, а при приближении к точке равновесия 1 наблюдаются приближенные уединенные волны двух разных типов, т.е. возможны две структуры с разными уединенными волнами на границе. Чем меньше значение v_m , тем точнее волны на границе приближаются к уединенным волнам. При приближении V к значению V^a можно найти еще гибридную альвено-медленномагнитозвуковую структуру $3 \rightarrow 2$ при малых значениях v_m , в последнем решении имеется внутренний свободный параметр, на рис. 4б приведено именно это решение. Оно содержит внутри себя структуры первых двух типов, описанные выше. Стоит обратить внимание на то, что здесь амплитуды приближенных магнитозвуковых и гибридных уединенных волн уже близки. Здесь в обозначениях разрывов вида $n_1 \rightarrow n_2$ условно принято, что разрыв движется вправо, первое состояние находится справа, второе — слева, по аналогии с описанием ударных волн в газовой динамике, движущихся вправо, где есть понятия состояние до разрыва и после разрыва.

Разрыв $3 \rightarrow 1$ оценивается как альвеновский, поскольку с обеих сторон имеются приходящие альвеновские характеристики. Разрыв $3 \rightarrow 2$ оценивается как гибридный, поскольку с обеих сторон приходящие и альвеновские, и медленные магнитозвуковые характеристики. Заметим, что разрывы с двумя приходящими характеристиками с двух сторон ранее рассматривались для уравнений, описывающих двумерную эволюцию фронта волны на поверхности жидкости, имеющей в сечении по вертикали форму уединенной волны, а также аналогичные разрывы были обнаружены для системы уравнений, описывающей установившиеся периодические волны на поверхно-

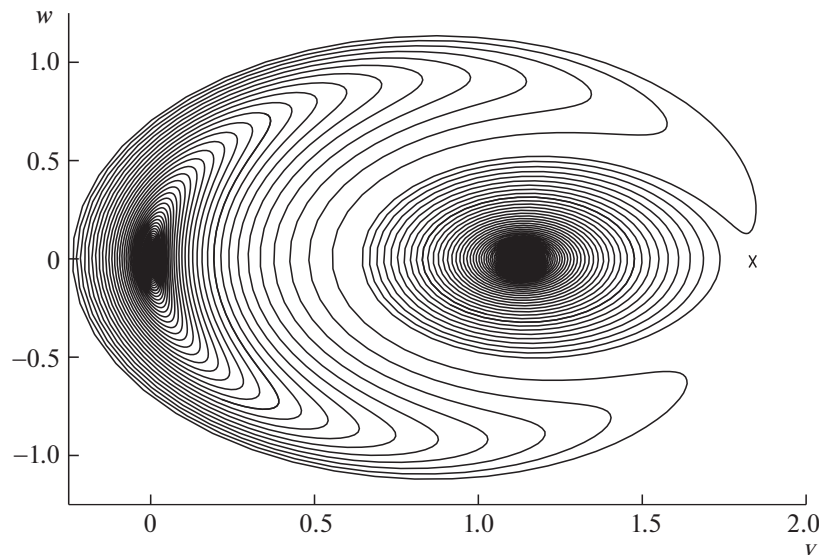


Фиг. 4

сти жидкости [12]. Эти разрывы именовались пересечениями волн, фактически рассматривались двузначные и двухволновые решения по обе стороны разрыва, для них существуют эволюционные структуры разрывов. Указанные структуры описываются уравнением Кадомцева–Петвиашвили и нелинейным уравнением Шрёдингера. Для перехода между двумя периодическими состояниями внутри гибридной структуры просматривается также и некоторая аналогия с трехволновыми конфигурациями для тех же моделей. Действительно, справа одноволновая зона, а слева — двухволновая. Решение в виде гибридной стационарной структуры имеет один дополнительный параметр, т.е. это семейство, но это внутренний параметр решения, а не параметр МГД-уравнений по обе стороны разрыва, поэтому структура неэволюционна.

При $V > V^a$ точки 1 и 3 как бы меняются местами, графики решений получаются как бы центрально отраженными относительно точки 2. На фиг. 4в показана гибридная структура $1 \rightarrow 2$, содержащая приближенные альвеновскую структуру $1 \rightarrow 3$ и медленную дозвуковую $3 \rightarrow 2$. Фазовая траектория этого решения показана на фиг. 5, гиперболическая точка 3 отмечена крестом. При дальнейшем увеличении V точки 2 и 3 сливаются и исчезают, пропадают и структуры разрывов.

Заметим, что в случае модифицированного уравнения Кортевега—де Виза с кубической нелинейностью также имеется три точки равновесия [12], при определенном выборе знаков коэффициентов уравнения, средняя точка эллиптическая, а две крайние — гиперболические, при этом при некотором значении V возникает так называемый кинк — переход между крайними гипер-



Фиг. 5

болическими точками, структура разрыва с дополнительным условием, класс -1 (см. [14]). Может также быть средняя гиперболическая точка и крайние эллиптические, тогда есть только уединенные волны. В этом фазовый портрет рассматриваемой системы принципиально отличается, одна из крайних точек гиперболическая — остальные точки эллиптические. Но при $V = V^a$ тоже есть подобие особого решения, в каком-то смысле аналог кинка. При подходе к крайним точкам возникает периодическая волна, похожая на синусоиду, период волны стремится к бесконечности, а максимумы и минимумы соответствуют крайним точкам равновесия.

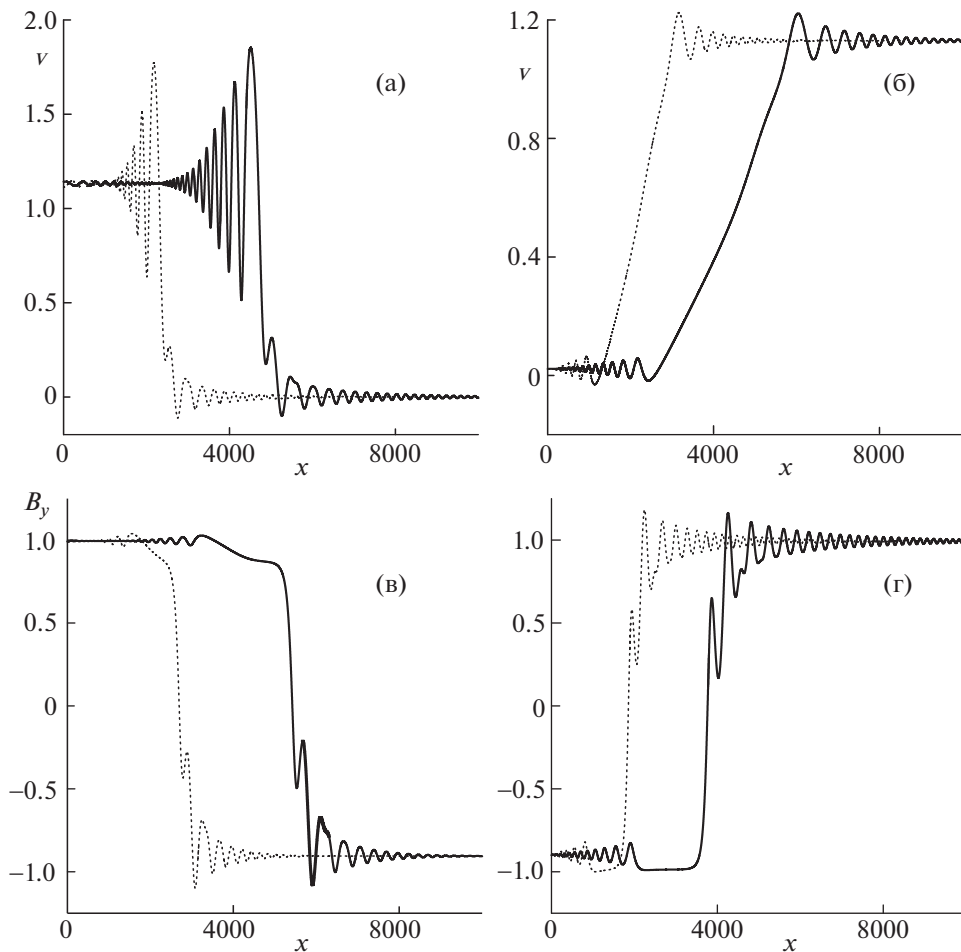
3.4. Расчет задачи о распаде разрыва

Проводились также расчеты исходных уравнений в частных производных с начальной сглаженной ступенькой с параметрами, соответствующими альвеновской и гибридной структуре. Применялась численная схема, разработанная в [9]. Результаты показаны на фиг. 6, $\mu = 0.8$, $v_m = 0.01$, $t = 50000$ (пунктиром), $t = 10000$ (сплошная). Вместо неэволюционной гибридной структуры возникает нестационарная расширяющаяся со временем структура, в которой имеются как альвеновские, так и медленные магнитозвуковые волны, фиг. 6а. Но некоторая аналогия с фиг. 4в все же есть, в частности заметно наличие двухволновой зоны. При перемене местами параметров для правой и левой сторон возникают медленная магнитозвуковая волна и альвеновская структура, фиг. 6б. Они трудно отделимы друг от друга возможно потому, что при наличии вязкости альвеновские структуры как бы расплываются [9]. Вместо эволюционной приближенной альвеновской структуры возникают две структуры: медленная магнитозвуковая типа простой волны и расширяющаяся со временем альвеновская структура максимальной амплитуды с поворотом поперечного магнитного поля на 180° градусов, фиг. 6в. Фактически здесь альвеновская структура — нестационарный аналог кинка, особого разрыва с дополнительным условием. Интересно, что если поменять параметры для правой и левой стороны местами, то аналогичная кинкоподобная альвеновская структура тоже возникает фиг. 6г, но вместо простой медленной магнитозвуковой волны здесь солитонная структура. Подобным свойством обладают решения о распаде разрыва для модифицированного уравнения Кортевега—де Вриза [12].

В случаях фиг. 6б и фиг. 6г выявлялись также малоамплитудные медленные магнитозвуковые и альвеновские структуры, движущиеся влево, они не показаны.

3.5. Об использовании различных систем уравнений для расчетов МГД и ЭМГД

Расчеты эволюции начальных данных в виде сглаженной ступеньки, соответствующей рассмотренным выше структурам разрывов, проводились для уравнений (2.1) и уравнений с $R_e^{-1} = 0$,



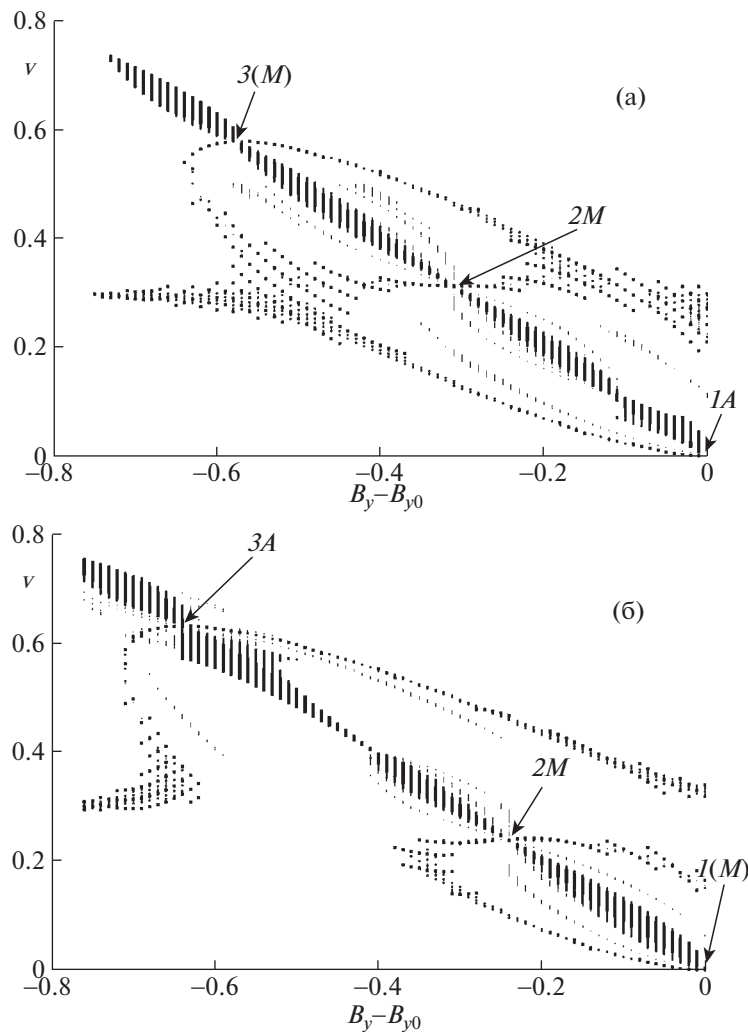
Фиг. 6

как с магнитной вязкостью, так и без нее. Результаты расчетов были схожими, поскольку при использовании системы (2.1) короткие волны не выявлялись из-за недостаточно мелкого пространственного шага сетки, а влияние допущения $R_e^{-1} = 0$ на длинные волны незначительное из-за малости этой величины по сравнению с R_i^{-1} . Добавление небольшой вязкости в (2.1) позволяет делать и формально правильные расчеты полных уравнений, поскольку короткие волны должны подавляться вязкостью. В то же время очевидно, что допущение $R_e^{-1} = 0$ существенно влияет в случае больших градиентов и большой амплитуды разрывов, поскольку опрокидывание волн может устраняться за счет излучения коротких волн. Это допущение совсем не применимо к быстрым магнитозвуковым волнам при $\pi/2 \geq \theta \geq \theta_c$, поскольку оно приводит для них к прямо противоположному типу дисперсии. Подчеркнем, что расчеты полной системы, системы с $R_e^{-1} = 0$, и классических уравнений МГД проводились одной программой, во всех случаях для устойчивости схемы в недиссипативном случае временной шаг брался пропорциональным пространственному, поэтому принципиальной разницы в расходе машинного времени для этих расчетов нет. Хотя, например, для расчетов с $R_e^{-1} = 0$, экспериментально выявленный коэффициент пропорциональности пришлось брать меньшим, чем в случае $R_e^{-1} \neq 0$. Но применение системы с $R_e^{-1} = 0$ полезно для корректного анализа свойств длинных медленных магнитозвуковых и альвеновских волн. В случае недиссипативных уравнений МГД используемая численная схема сама может устранить опрокидывание и создать схемные волновые зоны, но более естественно включать слабую физическую или искусственную вязкость, чтобы получить классические структуры

разрывов [9]. В случае наличия дисперсионных членов в системе уравнений включение вязкости также может потребоваться для устранения опрокидывания разрывов большой интенсивности.

3.6. Взаимодействие длинных альвеновских и длинных быстрых магнитозвуковых волн

В связи с выявленным нелинейным резонансом альвеновских и медленных магнитозвуковых волн аналогичные исследования были проведены и для взаимодействия альвеновских и быстрых магнитозвуковых волн при θ , близком к нулю ($V^a = V^+ = 1$ при $\theta = 0$). Затухание Ландау при этом, как и в случае $\theta \approx \pi/2$, слабое. Примеры расположения ветвей при $\theta = 0.3$ приведены на фиг. 7, а – для $\mu = -0.0025$, б – для $\mu = 0.01$. Здесь $V = V^a(1 + \mu)$. Картины расположения ветвей аналогичны случаю взаимодействия альвеновских и медленных магнитозвуковых волн. Фиг. 7а и фиг. 7б, в аналогичны фиг. 3а и фиг. 1б. Соответственно здесь также наблюдается резонанс длинных альвеновских и длинных быстрых магнитозвуковых волн и существуют структуры разрывов, аналогичные выявленным при длинноволновом нелинейном резонансе альвеновских и быстрых магнитозвуковых волн. При уменьшении μ точки 2 и 3 сливаются и исчезают, расположение ветвей сходно с фиг. 1а. Остаются только длинные альвеновские волны и короткие магнитозвуковые волны. При дальнейшем уменьшении исчезают альвеновские волны, а затем и



Фиг. 7

быстрые магнитозвуковые. При увеличении μ альвеновская точка $З$, как и в случае фиг. 3б, удаляется от точек 1 и 2 , взаимодействия между быстрыми магнитозвуковыми и альвеновскими волнами нет.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы периодические решения, уединенные волны и структуры разрывов для быстрых магнитозвуковых, медленных магнитозвуковых и альвеновских волн. Для медленных магнитозвуковых волн есть приближенные решения солитонного типа, есть также комбинированные приближенные солитонные решения, возникающие в результате резонанса длинных альвеновских и медленных магнитозвуковых волн. Для быстрых магнитозвуковых волн ранее было показано [11] существование классических и обобщенных уединенных волн, а согласно результатам данной работы — и приближенных гибридных альвено-магнитозвуковых волн. Разработан подход, позволяющий проанализировать отдельно поведение длинных волн. Для этого исследованы решения более простой системы уравнений, приводящей к уравнениям бегущих волн второго порядка. Показано, что указанные выше гибридные уединенные волны существуют для нее как точные решения. Проведены также расчеты начальных данных, соответствующих возможной альвеновской солитонной структуре и комбинированному альвено-магнитозвуковому разрыву. Показано, что в первом случае происходит распад на два разрыва, а во втором — замещение на нестационарную расширяющуюся структуру.

Проведенные исследования показывают, что малое значение минимальной амплитуды коротковолновой периодической составляющей при резонансе волн не обязательно связано с малой амплитудой длинноволновой компоненты, оно может быть также связано с большим отношением длин волн. Поэтому и при умеренных значениях амплитуды решение может мало отличаться от солитонного.

В связи с отсутствием обнаруженных заострений у периодических длинных волн при наличии резонанса можно ожидать, что и в нестационарных решениях уравнений в частных производных при наличии резонанса между длинными и короткими волнами приближение амплитуды длинных волн к значениям, при которых могло бы быть опрокидывание волны, приводит к резкому росту амплитуды коротковолновой составляющей в разложении Фурье этой волны. Это ведет к увеличению амплитуды резонансно излучаемой короткой волны, что должно предотвратить опрокидывание. То есть излучение волн, как и вязкость, может препятствовать опрокидыванию. Но излучаемые короткие волны затем могут опрокинуться, что потребует включения вязкости для получения классического решения. Рассуждение справедливо как для случая резонанса медленных магнитозвуковых волн и коротких альвеновских, так и для случаев саморезонансов быстрых магнитозвуковых или альвеновских волн, подтверждается расчетами задачи о распаде разрыва [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликовский А.Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
2. Вайнштейн С.И., Быков А.М., Топтыгин И.Н. Турбулентность токовых слоев и ударные волны в космической плазме. М.: Наука, 1989. 313 с.
3. Kakutani T., Ono H., Taniuti T., Wei C. Reductive perturbation method in nonlinear wave propagation. II. Application to hydromagnetic waves in a cold plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1968. V. 24. P. 1159–1166.
4. Kakutani T., Ono H. Weak nonlinear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. P. 1305–1318.
5. Pichev A. Steady waves in a cold plasma. // J. Plasma Phys. 1996. V. 55. P. 181–194.
6. Pichev A.T., Solitary wave trains in a cold plasma // Fluid Dynamics. 1996. V. 31. P. 754–760.
7. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. М.: Физматлит, 2003. 256 с.
8. Гавриков М.Б. Двухжидкостная гидродинамика. М.: URSS КРАСАНД, 2018. 578 с.
9. Бахолдин И.Б. Анализ уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики и структур разрывов в их решениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 68. № 3. С. 458–474.

10. *Bakholdin I.B., Ilichev A.T.* Fast magnetosonic solitonic structures in a quasi-neutral collision-free finite-beta plasma // *Wave Motion*. 2022. V. 112. 102936.
11. *Бахолдин И.Б.* Структуры бездиссипативных разрывов и уединенные волны в решениях уравнений двухжидкостной плазмы в приближении электромагнитной гидродинамики // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2022. Т. 62. № 12. С. 162–176.
12. *Бахолдин И.Б.* Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004. 318 с.
13. *Бахолдин И.Б.* Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега–Бюргерса // *Прикл. матем. и механ.* 2011. Т. 75. Вып. 2. С. 271–302.
14. *Бахолдин И.Б.* Теория и классификация обратимых структур разрывов в моделях гидродинамического типа // *Прикл. матем. и механ.* 2014. Т. 78. Вып. 6. С. 833–852.
15. *Бахолдин И.Б.* Уравнения, описывающие волны в трубах с упругими стенками, и численные методы с низкой схемной диссипацией // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 7. С. 1224–1238.
16. *Lombardi E.* Orbits homoclinic to exponentially small periodic orbits for a class of reversible systems // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1997. V. 137. P. 227–304.
17. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики, 3-е изд. М.: Наука, 1989. 472 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.634

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КВАНТОВЫХ ЭФФЕКТОВ НА ОПТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАЗМОННЫХ НАНОЧАСТИЦ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ¹⁾

© 2023 г. Ю. А. Еремин^{1,*}, В. В. Лопушенко^{1,**}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52, МГУ им. М.В. Ломоносова, ВМК, Россия

*e-mail: eremin@cs.msu.ru

**e-mail: lopushnk@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 24.05.2023 г.
Переработанный вариант 24.05.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Метод дискретных источников адаптирован для исследования проявления поверхностных квантовых эффектов, основанных на мезоскопических граничных условиях с параметрами Фейбельмана. Проводится сравнительный анализ влияния объемных эффектов нелокальности в рамках теории обобщенного нелокального отклика и поверхностных эффектов на оптические характеристики золотых и серебряных наночастиц. Установлено, что если учет эффекта нелокальности для благородных металлов всегда сопровождается снижением амплитуды и сдвигом в коротковолновую область, то влияние поверхностного эффекта существенно зависит от геометрии частиц. При этом мезоскопические граничные условия в значительной степени восстанавливают амплитуду плазмонного резонанса по сравнению с объемным эффектом нелокальности. Это различие особенно заметно при сравнительном анализе коэффициента усиления поля на поверхности частиц. Также установлено существенное отличие в поведении плазмонного резонанса для золотых и серебряных частиц для случая мезоскопических граничных условий. Библ. 27. Фиг. 6.

Ключевые слова: метод дискретных источников, математические модели, квантовая наноплазмоника, эффект нелокальности, мезоскопические граничные условия.

DOI: 10.31857/S004446692311011X, **EDN:** KSAEFB

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория Максвелла применительно к исследованию оптических свойств металлических структур нашла широкое применение в плазмонике, способствуя успешному описанию особенностей взаимодействия света с веществом в масштабах выше 10 нм [1]. Углубленное исследование наноплазмонных структур позволило обнаружить множество оптических эффектов, одним из которых является локализованный поверхностный плазмонный резонанс (ПР). ПР способен на порядки усиливать поля и концентрировать энергию в объемах, намного превосходящих рэлеевский оптический предел. Подобные эффекты имеют фундаментальное значение для развития новых технологий, включая обнаружение и терапию онкологических образований, исследования свойств отдельных молекул, разработку резонаторов плазмонного нанолазера, а также создание конгломератов, позволяющих концентрировать и удерживать солнечную энергию [2].

Вместе с тем современное развитие прорывных технологий нанопроизводства ведет к необходимости манипулировать наноразмерными структурами размерами 1–10 нм [3]. В таком масштабе описание происходящих процессов посредством классической теории Максвелла оказывается недостаточным, так как она дает лишь качественную картину наблюдаемых явлений. Это связано прежде всего с возникновением таких квантовых эффектов, как нелокальность и концентрация свободных электронов вблизи и внутри плазмонного металла [4, 5]. Следует отметить, что существующие чисто квантовомеханические подходы практически неприменимы для пол-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ и в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2022-284).

ного описания подобных эффектов в плазмонном материале реальных наноструктур [5]. Например, даже после значительных приближений и упрощений очень хорошо зарекомендовавшая себя теория функционала плотности, зависящей от времени (TDDFT) [6], не позволяет исследовать металлические наночастицы размером более нескольких нанометров [7].

В связи с этим было предложено множество методов, основанных на квазиклассических теориях, для описания квантовых эффектов в целях исследования плазмонных объектов мезоскопического масштаба с характерной длиной от 1 до 10 нм [8]. Среди этих теорий наибольшее распространение получила гидродинамическая теория Друде [4] и ее обобщение – теория обобщенного нелокального отклика (GNOR) [9]. В частности, GNOR вместе с граничными условиями непротекания для тока на границе раздела металл–диэлектрик способна учитывать эффект нелокальности и поверхностное затухание Ландау. Однако даже теория GNOR, учитывающая эффект нелокальности, не описывает выброс электронов за пределы металла [10].

В последнее время был разработан подход, позволяющий учитывать квантовые эффекты в диапазоне 1–10 нм, так называемом мезоскопическом масштабе. Он оперирует функциями поверхностного отклика (SRF) – d -параметрами Фейбельмана $d_{\perp}$ и $d_{\parallel}$ [11, 12]. При этом вещественные части $d_{\perp}$ и $d_{\parallel}$ описывают положение центра масс индуцированного заряда и плотности тока вблизи границы металла соответственно, тогда как их мнимые части вносят вклад в поверхностное поглощение и затухание. Использование функций поверхностного отклика направлено на то, чтобы учесть доминирующие квантовые явления вблизи поверхности, при этом рассмотрение взаимодействия света и вещества в объеме плазмонного металла производится в рамках классической теории Максвелла [13, 14]. Недавно d -параметры были успешно включены в граничные условия для электромагнитных полей с целью учета доминирующего неклассического поверхностного оптического отклика [13]. Этот подход имеет большое значение при изучении плазмонных систем мезоскопического масштаба, поскольку он значительно повышает эффективность вычислений по сравнению с трудоемким подходом TDDFT [15, 16]. Следует отметить, что функции поверхностного отклика представляются одним из многообещающих путей преодоления разрыва между чисто квантово-механическими подходами и феноменологическими моделями квантовой наноплазмоники [17, 18].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В РАМКАХ ТЕОРИИ ОБОБЩЕННОГО НЕЛОКАЛЬНОГО ОПТИЧЕСКОГО ОТКЛИКА (GNOR)

Будем рассматривать задачу дифракции поля плоской электромагнитной волны $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ на однородной осесимметричной плазмонной наночастице с внутренней областью D_i и внешней D_e , разделенных гладкой замкнутой поверхностью ∂D_i . Будем предполагать, что все среды немагнитные, а зависимость от времени выбрана в виде $\exp(j\omega t)$.

Суть теории нелокальности состоит в том, что локальная связь между электрическим полем и смещением $\mathbf{D}_i(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon_i(\omega) \mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega)$ преобразуется в интегральную $\mathbf{D}_i(\mathbf{r}, \omega) = \int \varepsilon_i(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{E}_i(\mathbf{r}', \omega) d^3 \mathbf{r}'$. Последнее обстоятельство влечет за собой возникновение в D_i продольного поля $\mathbf{E}_i^L$: $\text{rot} \mathbf{E}_i^L = 0$ вдобавок к классическому поперечному $\mathbf{E}_i^T$: $\text{div} \mathbf{E}_i^T = 0$. Таким образом, поле внутри частицы D_i представляется в виде суммы поперечного и продольного полей $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i^T + \mathbf{E}_i^L$. Можно показать, что эти поля внутри D_i удовлетворяют следующим уравнениям Гельмгольца:

$$\Delta \mathbf{E}_i^T(\mathbf{r}, \omega) + k_T^2(\omega) \mathbf{E}_i^T(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad \Delta \mathbf{E}_i^L(\mathbf{r}, \omega) + k_L^2(\omega) \mathbf{E}_i^L(\mathbf{r}, \omega) = 0. \quad (1a)$$

Во внешней области рассеянное поле $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ удовлетворяет классической системе уравнений Максвелла

$$\text{rot} \mathbf{H}_e = jk \varepsilon_e \mathbf{E}_e; \quad \text{rot} \mathbf{E}_e = -jk \mathbf{H}_e; \quad \text{в } D_e. \quad (1b)$$

На поверхности частицы имеют место условия сопряжения для тангенциальных компонент полей

$$\mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P)) = \mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_0(P); \quad P \in \partial D_i, \quad \mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_e(P)) = \mathbf{n}_i \times \mathbf{H}_0(P); \quad (1b)$$

с дополнительным граничным условием на поверхности металл–диэлектрик, которое формулируется как обращение в нуль нормальной компоненты тока проводимости и может быть преобразовано к виду [9]

$$\varepsilon_b \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_i(Q) = \varepsilon_e \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{E}_e(Q), \quad Q \in \partial D_i. \quad (1г)$$

На бесконечности поля удовлетворяют условиям излучения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_e \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{H}_e \right) = 0; \quad r = |\mathbf{M}|. \quad (1д)$$

Здесь $\varepsilon_{i,e}$ – диэлектрические проницаемости сред в соответствующих областях, при этом $\text{Im} \varepsilon_e = 0$, $\text{Im} \varepsilon_i \leq 0$, $k = \frac{\omega}{c}$, $k_T^2(\omega) = k^2 \varepsilon_i(\omega)$ – поперечное волновое число, а $k_L^2(\omega) = \frac{\varepsilon_i(\omega)}{\xi^2(\omega)}$ – продольное. Соответствующие квантовые параметры имеют вид: ξ – длина корреляции в рамках теории GNOR, $\xi^2(\omega) = \varepsilon_b \frac{\beta^2 + D(\gamma + j\omega)}{\omega^2 - j\gamma\omega}$, $\varepsilon_b = \varepsilon_i + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - j\gamma\omega}$, ω_p – плазменная частота металла, $\beta^2 = \left(\frac{3}{5}\right) v_F^2$, v_F – скорость Ферми, γ – скорость затухания Друде, D – коэффициент диффузии электронов в металле. В случае, когда $D = 0$ теория GNOR переходит в гидродинамическую теорию Друде [4].

Таким образом, математическая постановка граничной задачи дифракции в рамках теории GNOR включает в себя уравнения Гельмгольца внутри D_i (1а), систему уравнений Максвелла вне рассеивателя (1б), условия сопряжения для тангенциальных компонент полей на границе ∂D_i (1в), плюс дополнительное граничное условие (1г) и условия излучения на бесконечности (1д). Мы будем полагать, что граничная задача (1) разрешима единственным образом. Для случая сферы это может быть установлено аналитически [4].

3. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДИФРАКЦИИ С МЕЗОСКОПИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В данном случае математическая постановка задачи дифракции может быть записана в следующем виде:

$$\text{rot} \mathbf{H}_{i,e} = jk \varepsilon_{i,e} \mathbf{E}_{i,e}; \quad \text{rot} \mathbf{E}_{i,e} = -jk \mathbf{H}_{i,e} \quad \text{в } D_{e,i}; \quad (2а)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_i \times (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0(P)) &= -d_{\perp} \mathbf{n}_i \times \nabla \{ \mathbf{n}_i \cdot (\mathbf{E}_i(P) - \mathbf{E}_e(P) - \mathbf{E}_0(P)) \}, \\ \mathbf{n}_i \times (\mathbf{H}_i(P) - \mathbf{H}_e(P) - \mathbf{H}_0(P)) &= -j\omega d_{\parallel} \{ \mathbf{n}_i \times [\mathbf{D}_i(P) - \mathbf{D}_e(P) - \mathbf{D}_0(P)] \} \times \mathbf{n}_i, \\ P &\in \partial D_i; \end{aligned} \quad (2б)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\sqrt{\varepsilon_e} \mathbf{E}_e \times \frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{H}_e \right) = 0; \quad r = |\mathbf{M}|. \quad (2в)$$

Здесь $d_{\perp}$, $d_{\parallel}$ – параметры Фейбельмана (ПФ). Формально они определяются следующим образом:

$$d_{\perp}(\omega) = \frac{\int \rho(x, \omega) x dx}{\int \rho(x, \omega) dx}, \quad d_{\parallel}(\omega) = \frac{\int \partial_x J_y(x, \omega) x dx}{\int \partial_x J_y(x, \omega) dx},$$

где $\rho(x, \omega)$ – плотность индуцированных поверхностных зарядов, а $J_y(x, \omega)$ – токов. Уместно отметить, что для случая границы раздела сред металл–диэлектрик параметр Фейбельмана $d_{\parallel} = 0$ [15]. Параметр $d_{\perp}$ представляет собой комплексную функцию, зависящую от длины падающей волны. Его действительная часть описывает положение центра индукции зарядов по отношению к границе, а мнимая отвечает за поглощение энергии вблизи поверхности (затухание Ландау) [18].

Как и в предыдущем случае, будем полагать, что граничная задача (2) имеет единственное решение. Для случая однородной сферы это установлено в [14].

4. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Для построения приближенных решений граничных задач (1) и (2) мы используем метод дискретных источников (МДИ) [19, 20], который представляет собой строгий полуаналитический поверхностно ориентированный метод. В рамках МДИ представление для поля строится как конечная линейная комбинация распределенных мультиполей низшего порядка [21], удовлетворяющая уравнениям Максвелла (Гельмгольца) везде вне разрывов среды и условиям излучения Сильвера-Мюллера на бесконечности в явном аналитическом виде. Соответствующие амплитуды дискретных источников определяются из граничных условий, заданных на поверхности частицы. Основное преимущество МДИ состоит в том, что он позволяет оценивать погрешность полученного решения путем вычисления невязки полей на поверхности частицы. Последнее обстоятельство позволяет с заданной точностью рассчитывать оптические характеристики полей вблизи поверхности частиц. Кроме того, мы хотели бы подчеркнуть, что МДИ весьма удобен для анализа задачи рассеяния с мезоскопическими граничными условиями (2), потому что не требуется никаких дополнительных усилий для учета дифференциального оператора в граничных условиях. Так как в рамках МДИ поля вблизи поверхности частицы представляют собой аналитические функции, можно вычислять производные любого типа и порядка.

Начнем с построения приближенного решения граничной задачи (1) для случая p -поляризации падающей плоской волны. Именно в этом случае возникает наиболее заметный ПР [20]. Поле внешнего возбуждения может быть записано в виде

$$\mathbf{E}_0^p = (e_x \cos \theta_0 + e_z \sin \theta_0) \chi(x, z), \quad \mathbf{H}_0^p = -\sqrt{\epsilon_e} \mathbf{e}_y \chi(x, z), \quad (3)$$

где $\chi(x, z) = \exp\{-jk_e(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)\}$, $k_e = k\sqrt{\epsilon_e}$, а $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ – декартов базис.

Будем строить поперечные поля в областях $D_{i,e}$ на основе векторных потенциалов, индуцированных источниками, распределенными вдоль оси симметрии рассеивателя. Потенциалы могут быть записаны, см. [22], в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{mn}^{1,\alpha} &= Y_m^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \{ \mathbf{e}_p \cos[(m+1)\varphi] - \mathbf{e}_\varphi \sin[(m+1)\varphi] \}; \quad \alpha = i, e; \\ \mathbf{A}_{mn}^{2,\alpha} &= Y_m^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \{ \mathbf{e}_p \sin[(m+1)\varphi] + \mathbf{e}_\varphi \cos[(m+1)\varphi] \}; \quad \mathbf{A}_n^{3,\alpha} = Y_0^\alpha(\zeta, z_n^\alpha) \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь соответствующие функции имеют вид

$$Y_m^e(\zeta, z_n^e) = h_m^{(2)}(k_{e,s} R_{z_n^e}) \left(\frac{k_e \rho}{R_{z_n^e}} \right)^m; \quad Y_m^i(\zeta, z_n^i) = j_m(k_i R_{z_n^i}) \left(\frac{\rho}{R_{z_n^i}} \right)^m;$$

где $h_m^{(2)}$ – сферические функции Ханкеля, удовлетворяющие условиям излучения, j_m – сферические функции Бесселя, $k_i = k\sqrt{\epsilon_i}$, $\zeta = (\rho, z)$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, $R_{z_n}^2 = \rho^2 + (z - z_n)^2$, $\{z_n^\alpha\}_{n=1}^{N_\alpha^m}$ – координаты дискретных источников, распределенных вдоль оси вращения $0z$, число которых может различаться в зависимости от номера гармоники по φ .

В свою очередь, приближенное решение для продольных полей внутри частицы D_i строится на основе скалярных потенциалов, которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца вида (1а):

$$\Psi_{mn}^p = j_{m+1}(k_L R_{z_n^i}) \left(\frac{\rho}{R_{z_n^i}} \right)^{m+1} \cos[(m+1)\varphi], \quad \Psi_n = j_0(k_L R_{z_n^i}). \quad (5)$$

Тогда конкретные представления для поперечных и продольных полей в случае p -поляризации приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{T,\alpha}^N &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_\alpha^m} \left\{ p_{mn}^\alpha \frac{j}{k\epsilon_\alpha} \text{rotrot} \mathbf{A}_{mn}^{1,\alpha} + q_{mn}^\alpha \frac{j}{\epsilon_\alpha} \text{rot} \mathbf{A}_{mn}^{2,\alpha} \right\} + \sum_{n=1}^{N_\alpha^0} r_n^\alpha \frac{j}{k\epsilon_\alpha} \text{rotrot} \mathbf{A}_n^{3,\alpha}, \\ \mathbf{E}_L^N &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^{N_\alpha^m} p_{mn}^L \nabla \Psi_{mn}^p + \sum_{n=1}^{N_\alpha^0} r_n^L \nabla \Psi_n; \quad \mathbf{H}_\alpha^N = \frac{j}{k} \text{rot} \mathbf{E}_\alpha^N, \quad \alpha = i, e. \end{aligned} \quad (6)$$

Легко убедиться, что построенные поля удовлетворяют всем условиям граничной задачи (1) за исключением граничных условий (1в), (1г). Неизвестные амплитуды дискретных источников $\mathbf{p}_m^N = \{p_{mn}^{e,i}, q_{mn}^{e,i}, r_n^{e,i}, p_{mn}^L, r_n^L\}$ как раз и определяются из этих граничных условий.

Что касается приближенного решения граничной задачи (2), то оно имеет вид (6), но без продольного поля, т.е. остаются только представления для полей $\{\mathbf{E}_{T,\alpha}^N, \mathbf{H}_\alpha^N\}$, $\alpha = e, i$.

Остановимся кратко на схеме численного алгоритма. Он включает в себя несколько этапов.

АЛГОРИТМ

Шаг 1. Проводится разложение в ряд Фурье по ϕ плоской волны $\chi(\rho, \phi, z)$ и выбирается число членов ряда, достаточное для аппроксимации на поверхности.

Шаг 2. Поскольку приближенное решение (6) представляет собой конечную сумму ряда Фурье и поверхность рассеивателя осесимметрична, поверхностная аппроксимация полей переходит в последовательное решение задач аппроксимации их фурье-гармоник на образующей.

Шаг 3. Для решения одномерной задачи аппроксимации используется обобщенный метод коллокаций [23]. Для этого выбираются точки на образующей, в которых сшиваются гармоники полей, причем число этих точек выбирается в 2–4 раза больше, чем суммарное число источников для каждой гармоники. Таким образом, матрицы оказываются переопределенными.

Шаг 4. Амплитуды определяются как нормальные псевдорешения соответствующих систем. При необходимости вычисляется невязка полей на поверхности в сеточной норме L_2 .

Как только определены амплитуды дискретных источников для внешнего поля, можно вычислять интересующие характеристики рассеяния. Важной характеристикой, описывающей реакцию рассеивателя на внешнее возбуждение, служит диаграмма направленности рассеянного поля. Она определяется, см. [24], в виде

$$\mathbf{E}_e(M)/|\mathbf{E}^0(M)| = \frac{\exp(-jk_e r)}{r} \mathbf{F}(\theta, \phi) + O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty.$$

Следуя асимптотике рассеянного поля (6), компоненты θ, ϕ диаграммы направленности для p -поляризации принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} F_\theta^P(\theta, \phi) &= jk_e \sum_{m=0}^M (jk_e \sin \theta)^m \cos(m+1)\phi \sum_{n=1}^{N_e^m} \{p_{mn}^e \cos \theta + q_{mn}^e\} \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\} - \\ &\quad - jk_e \sin \theta \sum_{n=1}^{N_e^0} r_n^e \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\}, \\ F_\phi^P(\theta, \phi) &= -jk_e \sum_{m=0}^M (jk_e \sin \theta)^m \sin(m+1)\phi \sum_{n=1}^{N_e^m} \{p_{mn}^e + q_{mn}^e \cos \theta\} \exp\{jk_e z_n^e \cos \theta\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Наш основной интерес будет связан с анализом поведения сечения экстинкции

$$\sigma_{\text{ext}}^P(\theta_0) = -\frac{4\pi}{k_e} \text{Im} F_\theta^P(\pi - \theta_0, \pi), \quad (8)$$

которое показывает, какую часть энергии плоской волны забирает частица на поглощение и рассеяние. Кроме того, мы будем вычислять коэффициент усиления поля на поверхности частицы ∂D_i , а именно:

$$F(\lambda) = \frac{\int_{\partial D_i} |E_e^N + E^0|^2 d\sigma}{\int_{\partial D_i} |E^0|^2 d\sigma}. \quad (9)$$

Напомним, что МДИ позволяет вычислять ближние поля, компоненты диаграммы рассеяния и сечение экстинкции с учетом ЭН в аналитическом виде [25].

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Перейдем к обсуждению результатов математического моделирования. Соответствующие квантовые параметры для золота и серебра в рамках модели GNOR будут выбираться равными [20]

$$\text{Au: } \hbar\omega_p = 9.02 \text{ eV}, \quad \hbar\gamma = 0.071 \text{ eV}, \quad v_F = 1.39 \times 10^{12} \text{ м/с}, \quad D = 8.62 \times 10^8 \text{ м}^2/\text{с}.$$

$$\text{Ag: } \hbar\omega_p = 8.99 \text{ eV}, \quad \hbar\gamma = 0.025 \text{ eV}, \quad v_F = 1.39 \times 10^{12} \text{ м/с}, \quad D = 9.62 \times 10^8 \text{ м}^2/\text{с}.$$

Несмотря на то что теория GNOR адекватно описывает происходящие явления и ее результаты сопоставимы с измерениями и другими подходами [10], сами авторы теории считают, что она нуждается в некоторой коррекции [26]. В этой работе исследуется связь коэффициента диффузии с индуцированными поверхностными зарядами, описываемыми ПФ. В результате было получено следующее соотношение:

$$D(\omega) = 4\sqrt{2}\beta \operatorname{Im}(d_{\perp}(\omega)). \quad (10)$$

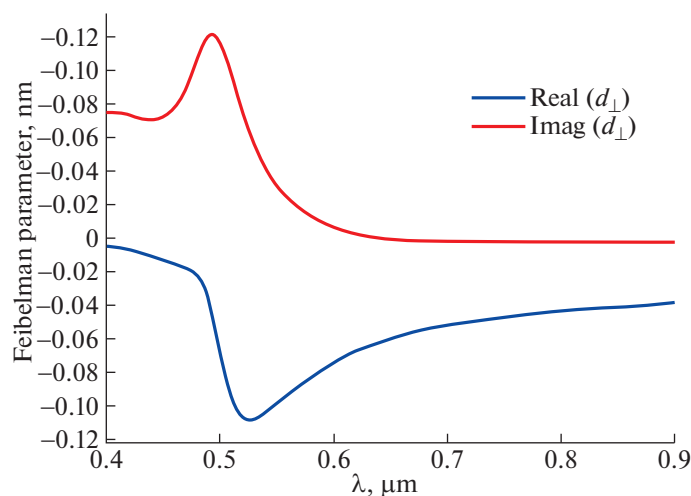
Отсюда непосредственно следует, что коэффициент диффузии, который изначально принимал постоянное значение, может зависеть от длины волны. Мы будем ссылаться на него, как на динамический коэффициент диффузии (D-din). На фиг. 1 представлены экспериментально измеренные [27] значения действительной и мнимой частей параметра Фейбельмана $d_{\perp}$ для золота в зависимости от длины волны. Можно видеть значительные изменения этого параметра в диапазоне от 400 до 600 нм.

При представлении численных результатов будут исследованы следующие модели.

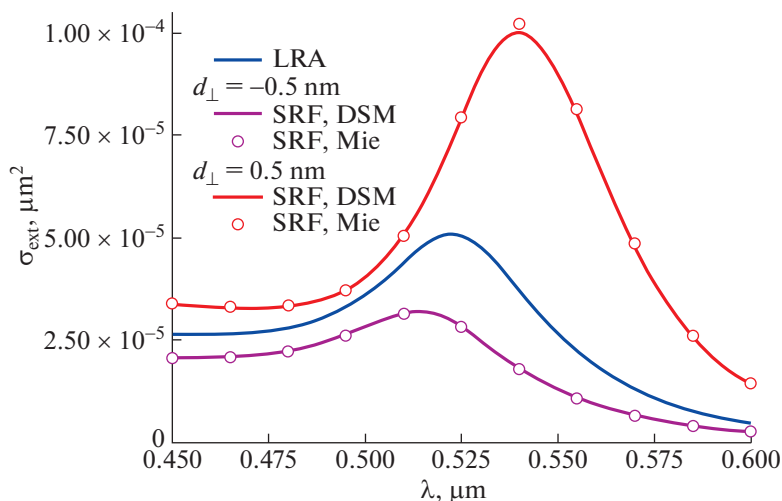
- Классическая теория Максвелла — локальный случай (LRA).
- Теория GNOR с постоянным коэффициентом диффузии D .
- Модифицированная теория GNOR с динамическим коэффициентом диффузии (D-din).
- Модель с мезоскопическими граничными условиями, описываемыми параметрами Фейбельмана (SRF).

Будем исследовать задачу дифракции плоской волны p -поляризации на сфероидальной частице эквиобъемного диаметра $D = 10$ нм. Пусть частица располагается в воде с показателем преломления $n_e = 1.33$. Мы рассмотрим вытянутый сфероид с соотношением продольной и поперечной осей 1 : 3 ($r = 3.0$) и сплюснутый сфероид с соотношением осей 3 : 1 ($r = 3.0$). Во всех случаях плоская волна падает таким образом, чтобы вектор электрического поля был параллелен большей оси сфероида.

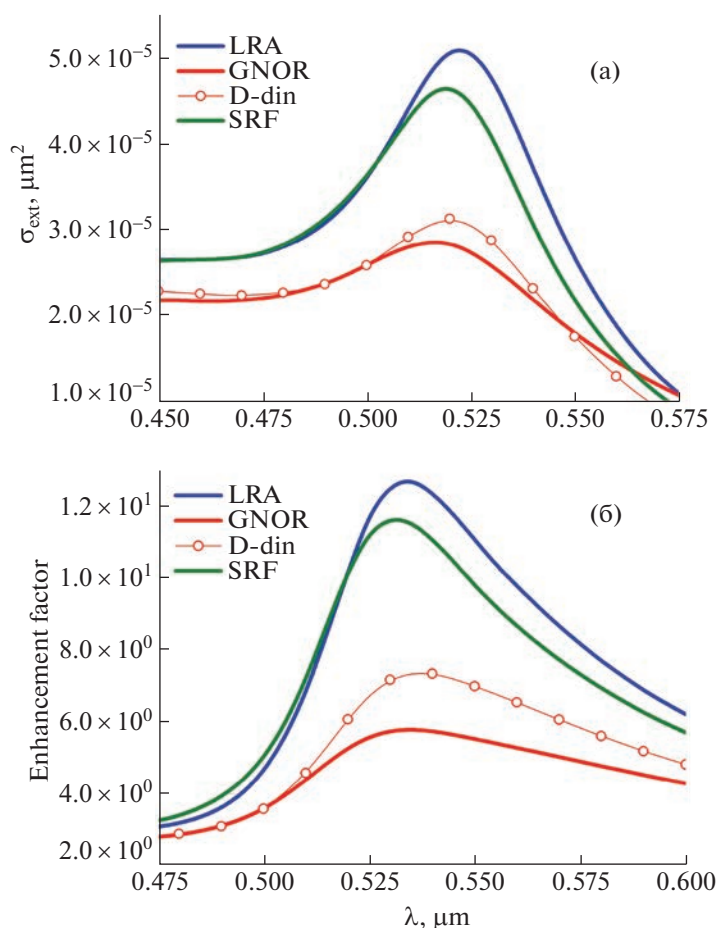
На фиг. 2 показано сечение экстинкции в зависимости от длины волны падающего излучения, рассчитанное в рамках классической теории Максвелла (локальный отклик) и модели SRF для двух различных значений параметра Фейбельмана. В данном случае результаты, полученные с помощью МДИ, сравнивались со значениями, которые дает обобщенная неклассическая теория Ми [14] для сферической золотой частицы диаметром $D = 10$ нм. Отметим полное соответ-



Фиг. 1. Зависимость действительной и мнимой частей параметра Фейбельмана $d_{\perp}$ от длины волны.

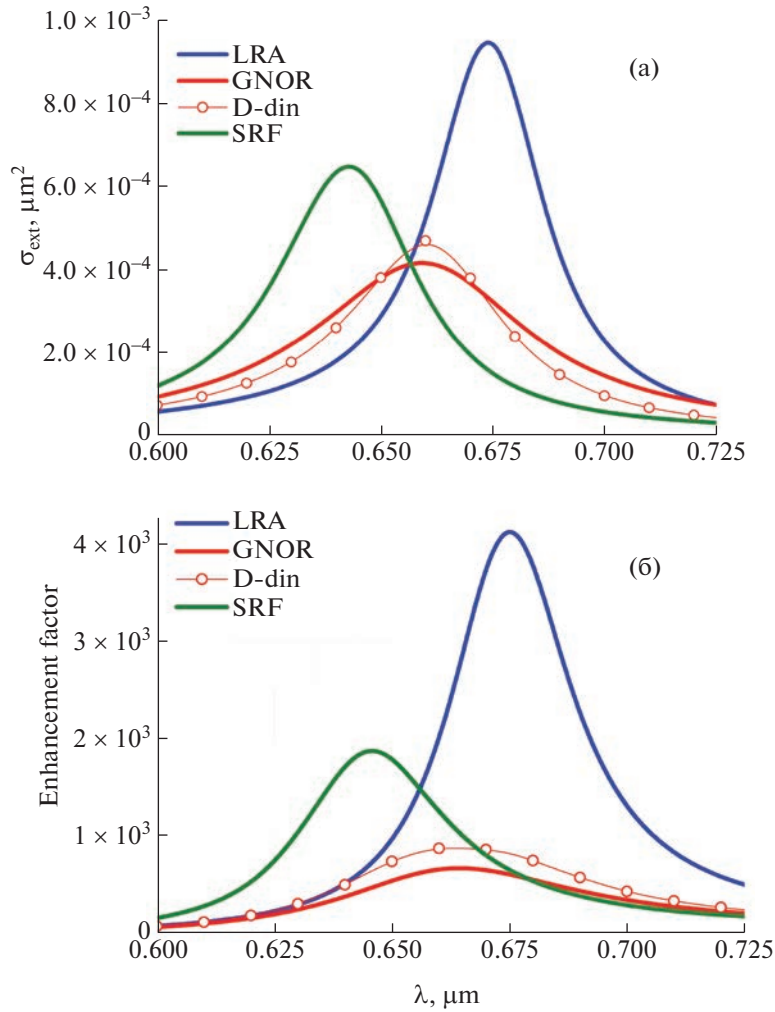


Фиг. 2. Сечение экстинкции золотой сферы диаметром 10 нм, расположенной в SiO_2 , полученное в рамках моделей LRA и SRF методом дискретных источников и с помощью теории Ми.



Фиг. 3. Сечение экстинкции (а) и коэффициент усиления (б) золотой сферы диаметром 10 нм, расположенной в воде. Сравнение результатов, полученных в рамках моделей LRA, GNOR, D-din и SRF.

ствие результатов МДИ и теории Ми. В то же время наблюдается существенное отличие графиков, соответствующих различным значениям параметра Фейбельмана: при $d_{\perp} = +0.5$ нм максимальное значение кривой SRF оказывается почти вдвое больше, чем у кривой LRA, при этом

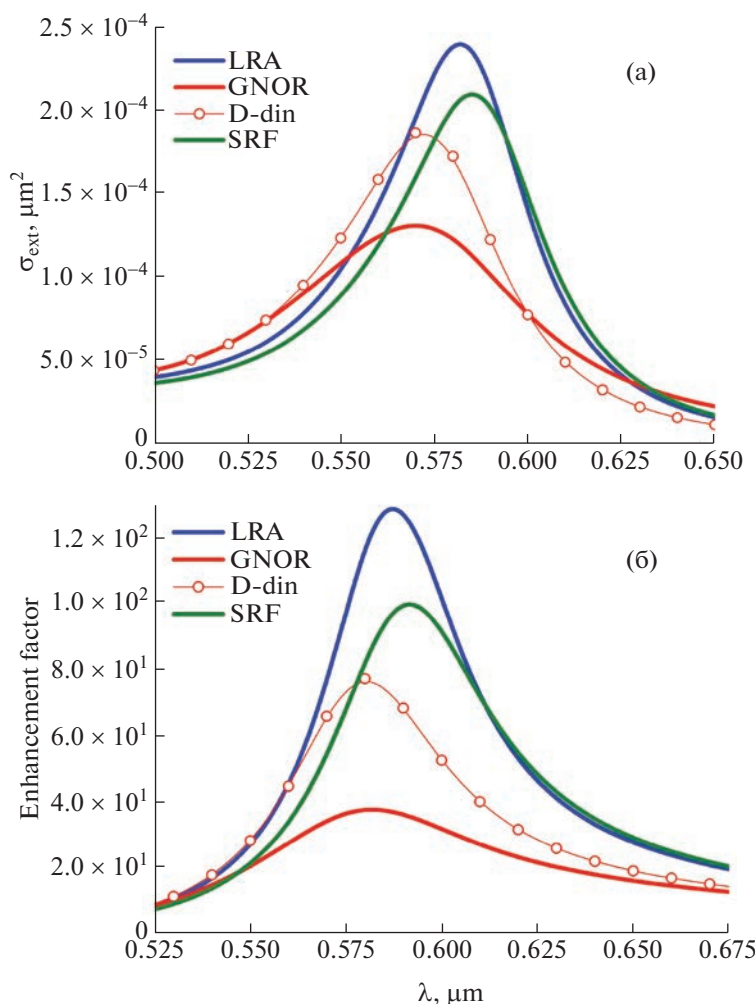


Фиг. 4. Сечение экстинкции и коэффициент усиления для вытянутого золотого сфероида с соотношением осей 1: 3 и эквиобъемным диаметром 10 нм, расположенного в воде. Угол падения плоской волны $\theta_0 = 90^\circ$. Сравнение результатов, полученных в рамках моделей LRA, GNOR, D-din и SRF.

максимум смещается в сторону длинных волн, а при $d_{\perp} = -0.5$ нм, график SRF, наоборот, имеет сниженное значение максимума, который сдвигается в сторону коротких волн.

На фиг. 3 представлены графики для сечения экстинкции (8) и коэффициента усиления (9), построенные для сферической частицы из золота диаметром 10 нм, находящейся в воде, и соответствующие различным моделям: LRA, GNOR, D-din и SRF. Ближе всего к локальному случаю (LRA) оказалась кривая SRF, у которой несколько уменьшен и сдвинут влево максимум. Кривые модели GNOR имеют максимальное значение, примерно на 40% меньше, чем у кривой LRA, причем учет динамического коэффициента диффузии корректирует максимальное значение в сторону увеличения по сравнению со стандартной моделью GNOR, использующей постоянное значение коэффициента. Наблюдается также небольшое смещение максимумов этих кривых в сторону коротких волн. Указанные особенности проявляются в большей степени на графиках, соответствующих коэффициенту усиления.

Фигура 4 демонстрирует сравнение аналогичных результатов, полученных в рамках моделей LRA, GNOR, D-din и SRF для сфероидальной частицы из золота, имеющей эквиобъемный диаметр 10 нм, соотношение поперечной и продольной осей 1: 3 и расположенной в воде. Волна падает перпендикулярно продольной оси, т.е. угол падения $\theta_0 = 90^\circ$. Различия графиков, отмеченные на фиг. 3, проявляются в данном случае намного значительнее, причем в большей степени для коэффициента усиления. Максимальное значение кривой SRF оказывается почти в два раза

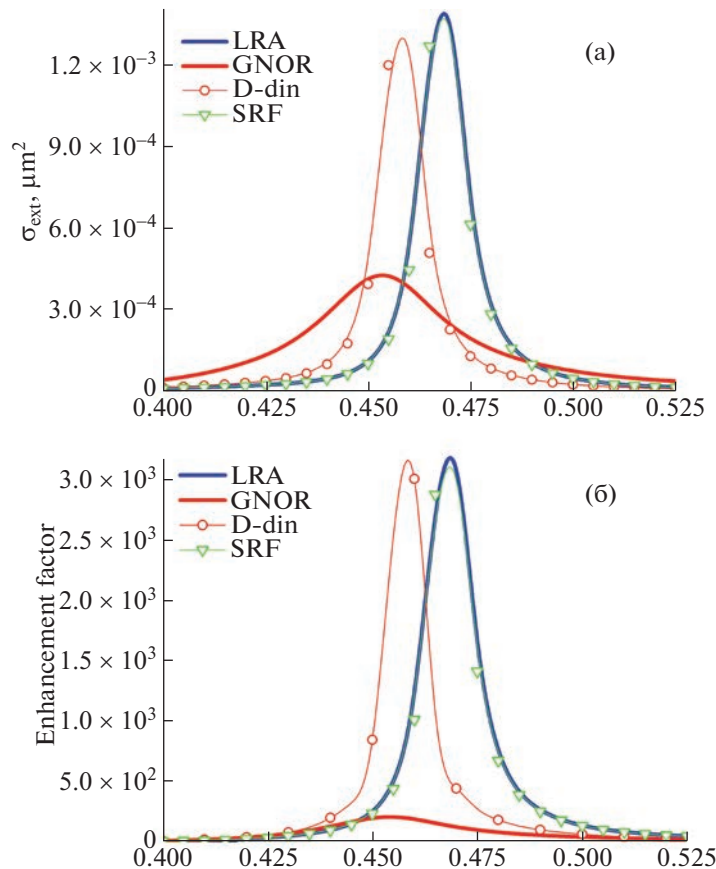


Фиг. 5. Сечение экстинкции и коэффициент усиления для сплюснутого золотого сфероида с соотношением осей 3 : 1 и эквиобъемным диаметром 10 нм, расположенного в воде. Угол падения плоской волны — $\theta_0 = 0^\circ$. Сравнение результатов, полученных в рамках моделей LRA, GNOR, D-din и SRF.

меньше, чем в локальном случае (LRA), и сдвигается влево более чем на 25 нм. Снижение максимумов на графиках GNOR и D-din оказывается еще больше — более 4 раз по сравнению со значением LRA для коэффициента усиления, но сдвиг влево получается меньше — около 10 нм.

На фиг. 5 показаны результаты сравнения моделей LRA, GNOR, D-din и SRF для сфероидальной частицы из золота с эквиобъемным диаметром 10 нм и соотношением поперечной и продольной осей 3 : 1. В данном случае волна падает перпендикулярно поперечной оси сфероида под углом $\theta_0 = 0^\circ$. В отличие от предыдущего случая, максимум кривой SRF снижается незначительно, но смещается теперь в другую сторону — на несколько нанометров в сторону длинных волн. Кривые GNOR и D-din демонстрируют значительное расхождение, которого не было ранее. Учет динамического коэффициента диффузии (D-din) приводит к существенному увеличению максимального значения по сравнению с традиционной моделью GNOR. При этом обе кривые, как и на фиг. 4, смещаются на несколько нанометров в сторону коротких волн относительно LRA.

Рассмотрим теперь различия в результатах моделей LRA, GNOR, D-din и SRF на примере серебряной сфероидальной частицы с эквиобъемным диаметром 10 нм и соотношением поперечной и продольной осей 3 : 1 (фиг. 6). Частица размещена в воде, а плоская волна падает перпендикулярно поперечной оси сфероида под углом $\theta_0 = 0^\circ$. Следует отметить почти полное совпадение кривых SRF и LRA, что означает очень слабое влияние поверхностных эффектов в серебре.



Фиг. 6. Сечение экстинкции и коэффициент усиления для сплюснутого серебряного сфероида с соотношением осей 3 : 1 и эквивалентным диаметром 10 нм, расположенного в воде. Угол падения плоской волны — $\theta_0 = 0^\circ$. Сравнение результатов, полученных в рамках моделей LRA, GNOR, D-din и SRF.

Напротив, кривые GNOR и D-din, демонстрирующие влияние объемных эффектов, ведут себя иначе. Максимум кривой GNOR оказывается в разы меньше, чем у остальных кривых, а учет динамического коэффициента диффузии (D-din) приводит к многократному росту максимальных значений. В то же время максимумы обеих кривых смещены влево относительно LRA, и больше всего сдвигается кривая GNOR — примерно на 12 нм.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты статьи.

1. Метод дискретных источников был успешно адаптирован к исследованию квантовых эффектов, основанных на мезоскопических граничных условиях.

2. Сравнительный анализ объемных (GNOR) и поверхностных эффектов (SRF) позволил установить их существенные отличия. Если учет GNOR для благородных металлов всегда сопровождается снижением амплитуды и сдвигом в коротковолновую область, то проявление эффекта SRF существенно зависит от геометрии частицы, при этом он в значительной степени восстанавливает амплитуду ПР, сопровождая сдвигом, который может превышать 25 нм. Это различие особенно заметно при сравнительном анализе коэффициентов усиления поля на поверхности частицы.

3. Установлено, что различие между классическим случаем (LRA) и мезоскопическим (SRF) для серебра минимально. Это связано с тем, что для серебра параметр Фейбельмана отличен от нуля в узком диапазоне длин волн вблизи $\lambda = 250$ нм. В то же время для золота область изменения существенно сдвинута в видимый диапазон $\lambda = 450$ нм [27].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barnes W.L., Dereux A., Ebbesen T.W.* Surface plasmon subwavelength optics // *Nature*. 2003. V. 424. P. 824.
2. *Chon J.W.M., Iniewski K.* Nanoplasmonics. Advanced Device Applications. CRC Press. 2018.
3. *Shi H., Zhu X., Zhang S. et al.* Plasmonic metal nanostructures with extremely small features: new effects, fabrication and applications // *Nanoscale Adv.* 2021. V. 3. P. 4349.
4. *David C., Garcia de Abajo F.J.* Surface Plasmon Dependence on the Electron Density Profile at Metal Surfaces // *ACS Nano*. 2014. V. 8. № 9. P. 9558.
5. *Zhu W., Esteban R., Borisov A.G. et al.* Quantum mechanical effects in plasmonic structures with subnanometre gaps // *Nat. Commun.* 2016. V. 7. 11495.
6. *Ullrich C.A.* Time-Dependent Density-Functional Theory: Concepts and Applications. OUP Oxford. 2011.
7. *Sinha-Roy R., Garcia-González P., Weissker H.-C. et al.* Classical and ab initio plasmonics meet at sub-nanometric noble metal rods // *ACS Photonics*. 2017. V. 4. № 6. P. 1484.
8. *Toscano G., Straubel J., Kwiatkowski A. et al.* Resonance shifts and spill-out effects in self-consistent hydrodynamic nanoplasmonics // *Nat. Commun.* 2015. V. 6. № 1. P. 7132.
9. *Mortensen N.A., Raza S., Wubs M. et al.* A generalized non-local optical response theory for plasmonic nanostructures // *Nat. Commun.* 2014. V. 5. 3809.
10. *Kupresak M., Zheng X., Gae V., Moshchalkov V.V.* Appropriate nonlocal hydrodynamic models for the characterization of deep-nanometer scale plasmonic scatterers // *Adv. Theory Simul.* 2019. V. 3. 1900172.
11. *Feibelman P.J.* Surface electromagnetic fields // *Prog. Surf. Sci.* 1982. V. 12. 287.
12. *Deng H.-Y.* A theory of electrodynamic response for bounded metals: Surface capacitive effects // *Ann. Phys.* 2020. V. 418. 168204.
13. *Yang Y., Zhu D., Yan W. et al.* A general theoretical and experimental framework for nanoscale electromagnetism // *Nature (London)*. 2019. V. 576. 248.
14. *Gonçalves P.A.D., Christensen T., Rivera N. et al.* Plasmon–emitter interactions at the nanoscale // *Nat. Commun.* 2020. V. 11. 366.
15. *Stamatopoulou P.E., Tserkezis C.* Finite-size and quantum effects in plasmonics: manifestations and theoretical modelling [Invited] // *Optical Materials Express*. 2022. V. 12. № 5. P. 1869.
16. *Mortensen N.A.* Mesoscopic electrodynamics at metal surfaces (Review) // *Nanophotonics* 2021. V. 10. № 10. P. 2563.
17. *Yang F., Ding K.* Transformation optics approach to mesoscopic plasmonics // *Phys. Rev. B*. 2022. V. 105. L121410.
18. *Mortensen N.A., Gonçalves P.A.D., Shuklin F.A. et al.* Surface-response functions obtained from equilibrium electron-density profiles // *Nanophotonics*. 2021. V. 10. № 14. P. 3647.
19. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Математическая модель учета эффекта нелокальности плазмонных структур на основе метода дискретных источников // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 4. С. 586.
20. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода Дискретных источников (обзор) // *Журн. вычисл. матем.и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 4. С. 34.
21. *Doicu A., Eremim Yu., Wriedt T.* Acoustic and Electromagnetic Scattering Analysis Using Discrete Sources. San Diego: Academic Press, 2000.
22. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Математические модели задач нанооптики и биофотоники на основе метода дискретных источников // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2007. Т. 47. № 2. С. 266.
23. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. М.: Наука, 1975.
24. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987.
25. *Еремин Ю.А., Захаров Е.В.* Аналитическое представление для интегрального поперечника рассеяния в рамках интегрофункционального метода Дискретных источников // *Дифференц. ур-ния*. 2022. Т. 58. № 8. С. 1073.
26. *Svendsen M.K., Wolff C., Jauho A.-P. et al.* Role of diffusive surface scattering in nonlocal plasmonics // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2020. V. 32. 395702.
27. *Echarri R.A., Gonçalves P.A.D., Tserkezis C. et al.* Optical response of noble metal nanostructures: Quantum surface effects in crystallographic facets // *Optica*. 2021. V. 8. № 5. P. 710.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.63

AN APPROACH TO THE IMPLEMENTATION OF THE MULTIGRID METHOD WITH FULL APPROXIMATION FOR CFD PROBLEMS¹⁾

© 2023 г. А. В. Gorobets^{a,*}

^a*Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: gorobets@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 10.06.2023 г.

Переработанный вариант 10.06.2023 г.

Принята к публикации 25.07.2023 г.

Подход к реализации многосеточного метода с полной аппроксимацией для задач газовой динамики. Статья посвящена использованию многосеточного метода для ускорения расчетов сжимаемых течений в стационарной постановке на неструктурированных сетках. Используется многосеточный метод с построением полной аппроксимации для каждого сеточного уровня (FAS MG – Full Approximation Scheme Multigrid). Такой метод в случае неструктурированной сетки может вызывать сложности, связанные как с построением сеточных уровней и операторов перехода между ними, так и с программной реализацией в существующем расчетном коде. В программе требуется иметь дело сразу с несколькими разными дискретизациями. Если изначально вся структура данных, включающая массивы с сеточными данными, топологию, данные интегрирования по времени, спроектирована для работы на одной сетке, то внедрение FAS MG может превратиться в катастрофу, сопряженную с переписыванием всего кода. Целью данной работы является получение многократного ускорения расчета ценой минимальных усилий. Решается проблема реализации многосеточного метода на базе существующего программного комплекса, не предназначенного для работы с несколькими сеточными уровнями. Внедрение многосеточного метода в MPI-параллельный код осуществляется таким образом, что вообще не нужно переделывать программу для работы с несколькими сетками. Также избегаются сложности с построением сеточных уровней для неструктурированной сетки, не используется агломерация ячеек, не увеличивается количество граней у ячеек на грубых уровнях. В данной статье описывается, как даже в устаревшем с точки зрения программной архитектуры коде развернуть FAS MG в кратчайшие сроки.

Ключевые слова: CFD, FAS Multigrid, многосеточный метод, MPI, вычислительная газовая динамика, стационарный расчет.

DOI: 10.31857/S0044466923110133, **EDN:** CXAHZV

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.63

ON NUMERICAL BEAMFORMING FOR CORRELATED
DIPOLE TYPE SOURCES¹⁾

© 2023 г. Т. К. Kozubskaya^{a,*}, G. M. Plaksin^{a,**}, I. L. Sofronov^{a,b,***}

^aKeldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia

^bMoscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141700 Russia

*e-mail: tatiana.kozubskaya@gmail.com

**e-mail: glebyp@gmail.com

***e-mail: ilsofronov@gmail.com

Поступила в редакцию 10.06.2023 г.

Переработанный вариант 10.06.2023 г.

Принята к публикации 25.07.2023 г.

О численном бимформинге для коррелированных источников дипольного типа. В статье разрабатывается и исследуется метод численного бимформинга для коррелированных источников дипольного типа в частотной области. В основе лежит предложенный авторами ранее подход решения аналогичной задачи для источников монопольного типа. В качестве модельной геометрической конфигурации рассматриваются расположенные параллельно друг над другом плоскости, на верхней из которых задается функция-источник, а на нижних — сетка микрофонов. Такая конфигурация характерна для анализа источников акустического поля, генерируемого под собой летательным аппаратом в режимах турбулентного обтекания. На тестовых примерах рассмотрены три различных задачи численного бимформинга с целью обеспечения возможности использования наиболее подходящих наборов параметров, задающих дипольную функцию. В первой задаче отыскиваются независимо все три декартовы компоненты функции-источника, во второй отыскиваются интенсивность диполя и единичный вектор его направления, наконец, в третьей отыскивается только функция интенсивности, а вектор направлений диполей предполагается известным. Как и в случае монопольных источников, проведены оценки параметров дискретизации сеток функции-источника и микрофонов для обеспечения корректности матриц в алгоритмах численного бимформинга.

Численные эксперименты по восстановлению тестовых функций-источников по данным микрофонов показали, что в первых двух задачах функция нормальной к поверхности компоненты диполя разрешается с высокой точностью, в то время как функции касательных компонент не воспроизводятся. Все же, получить хорошее качество восстановления касательных компонент во второй задаче удается за счет удачного выбора начального приближения в итерационном процессе нахождения решения. Третья постановка задачи всегда обеспечивает хорошее восстановление интенсивности дипольной функции.

Ключевые слова: численный бимформинг, коррелированный источник, диполь, неединственность.

DOI: 10.31857/S0044466923110182, **EDN:** CPKLIN

¹⁾ Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.63

A FAST SINGLE-PASS METHOD FOR SOLVING THE GENERALIZED EIKONAL EQUATION IN A MOVING MEDIUM¹⁾

© 2023 г. Myong-Song Ho^{a,*}, Ji-Song Pak^a

^a*Faculty of Mathematics, Kim Il Sung University, Pyongyang, Democratic People's Republic of Korea*

^{*}*e-mail: ms.ho0511@ryongnamsan.edu.kp*

Поступила в редакцию 11.01.2023 г.

Переработанный вариант 11.01.2023 г.

Принята к публикации 25.07.2023 г.

Быстрый метод решения обобщенного уравнения эйконала в движущейся среде. Разработан метод быстрого решения обобщенного уравнения эйконала. На первой стадии задача преобразуется к решению анизотропного уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана с управлением по времени. Затем проводится модификация метода градиентного спуска, учитывающая специфику поставленной задачи. Для случая, когда число Маха в исследуемом процессе не близко к единице, на ряде примеров проводится сравнение разработанного алгоритма с быстрым характеристическим методом решения и показывается его эффективность. Также показана высокая эффективность разработанного метода для конкретных трехмерных задач при числах Маха, близких к единице.

Ключевые слова: анизотропное уравнение эйконала, вязкое решение, уравнение Гамильтона—Якоби—Беллмана, число Маха.

DOI: 10.31857/S0044466923110157, **EDN:** BOEXLD

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 531.01

**CONTROLLING CHAOS IN 3D POROUS MEDIA
IN THE PRESENCE OF ORIENTATION EFFECT¹⁾**

© 2023 г. **Н. Rouaha^{a,*}, Y. Joundy^b, A. Taika^a**

^a*Department of Mathematics, FSTM, Laboratory of Mathematics and Applications, University Hassan II-Casablanca,
PO Box 146, Mohammedia, Morocco*

^b*Polydisciplinary Faculty of Sidi Bennour, Chouaib Doukkali University, El Jadida, Morocco*

**e-mail: rouah.hamzaa@gmail.com*

Поступила в редакцию 21.06.2023 г.

Переработанный вариант 21.06.2023 г.

Принята к публикации 25.07.2023 г.

Управляемый хаос в трехмерных пористых средах при наличии ориентации. Исследуется влияние ориентации на управление хаотическим поведением системы в пористой среде на основе теории динамических систем. С использованием спектрального метода получена трехмерная модель системы. Результаты показали, что хаос можно подавить в случае низких или умеренных чисел Прандтля, выбрав соответствующие углы наклона.

Ключевые слова: управляемый хаос, Фурье-гармоники, анализ устойчивости, бифуркационная диаграмма, пористая среда.

DOI: 10.31857/S0044466923110261, **EDN:** CRNCJZ

¹⁾ Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.634

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ УДЛИНЕННОГО КОНТУРА ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ФРУДА

© 2023 г. С. И. Филиппов*

420111 Казань, ул. Московская, 42, КИУ, Россия

*e-mail: sf759@bk.ru

Поступила в редакцию 17.05.2022 г.
Переработанный вариант 13.06.2023 г.
Принята к публикации 25.07.2023 г.

Рассматривается задача обтекания удлиненного гладкого контура под свободной поверхностью жидкости. Жидкость идеальная несжимаемая весома. Критические точки разветвления и схода потока находятся на контуре. Задаются погружение контура и его длина. Используется гипотеза о близости модуля скорости на свободной поверхности к его значению в невозмущенном потоке. Применяется нелинейное приближенное выражение интеграла Бернулли на свободной поверхности, связанное с логарифмированием. Используются две вспомогательные плоскости, в которых область течения представляет полуплоскость с исключенным кругом и кольцевую область. Комплексный потенциал определяется в первой параметрической плоскости с использованием конформного отображения на кольцевую область. Выведена система уравнений для нахождения определяющих параметров, для решения которой применяется минимизация функционала и используется метод итераций по двум комплексам параметров. Разработаны алгоритм и программа решения системы. Проведены расчеты гидродинамических характеристик конкретного профиля. Проанализированы результаты для коэффициентов волнового сопротивления, подъемной силы, момента и положения центра контура в зависимости от числа Фруда и циркуляции разного знака. Приведены примеры расчетов нелинейных волн, образующихся на свободной поверхности при значительных числах Фруда. Библ. 9. Фиг. 9.

Ключевые слова: удлиненный контур, свободная поверхность, нелинейные волны, большие числа Фруда.

DOI: 10.31857/S0044466923110121, **EDN:** KJGDUL

ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных задач математического моделирования в современной гидродинамике — исследование движения подводных тел со значительными скоростями, что связано с использованием рек, морей и океанов как транспортных артерий. Однако наибольшее развитие до недавнего времени имели исследования, основанные на линейной и нелинейной теории волн малой амплитуды, как, например, работы [1, 2] при не слишком больших числах Фруда. А изучение интервала больших скоростей ограничивалось изучением обтекания гидродинамических особенностей.

Настоящая работа продолжает исследования, связанные с нелинейной аппроксимацией граничного условия на свободной поверхности, предложенной О.М. Киселевым и Г.Г. Тумашевым, основные положения которой представлены в монографии [3]. Движение глубоко погруженного кругового цилиндра данным методом было численно реализовано О.В. Троепольской в совместной с О.М. Киселевым работе [4]. В [5, 6] удалось реализовать метод для мало погруженного кругового цилиндра при минимальном расстоянии от поверхности цилиндра до свободной границы, равном 0.15 длины радиуса. При проведении численных экспериментов обнаружен эффект уменьшения амплитуды волн при приближении цилиндра к свободной поверхности при определенных значениях циркуляции. В [7] были продолжены исследования, начатые в [5], и изучался эллиптический цилиндр небольшого удлинения с произвольным наклоном к горизонтали. В

настоящем исследовании предлагаются результаты по вытянутому контуру, впервые частично представленные на конференции (см. [8]).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарный поток жидкости со свободной поверхностью, находящийся под действием силы тяжести с ускорением g . Пусть поток неограничен снизу. Под свободной поверхностью находится гладкий замкнутый контур Ω длины L (фиг. 1). В плоскости $z = x + iy$ ось y направлена вертикально вверх, а ось x — по невозмущенному уровню свободной поверхности Λ в направлении движения жидкости. Считаем, что критические точки A, B — разветвления и схода потока лежат на контуре Ω . Пусть H — расстояние от разветвляющейся на Ω линии тока до свободной поверхности при $x \rightarrow -\infty$. Обозначим через α угол наклона касательной к Ω , а через s — безразмерную дуговую координату, которая отнесена к длине контура и увеличивается при обходе Ω так, что контур остается слева. Если $G(s)$ определяет форму контура, то

$$\alpha = G(s) + 2\pi s, \quad G(s) = G(s+1).$$

Полагаем заданными длину контура L_0 , безразмерную циркуляцию Γ_0 , значение числа Фруда Fr , т.е. Fr_0 :

$$L_0 = \frac{L}{H}, \quad \Gamma_0 = \frac{\Gamma}{2\pi V_0 H}, \quad Fr_0 = \frac{V_0^2}{gH},$$

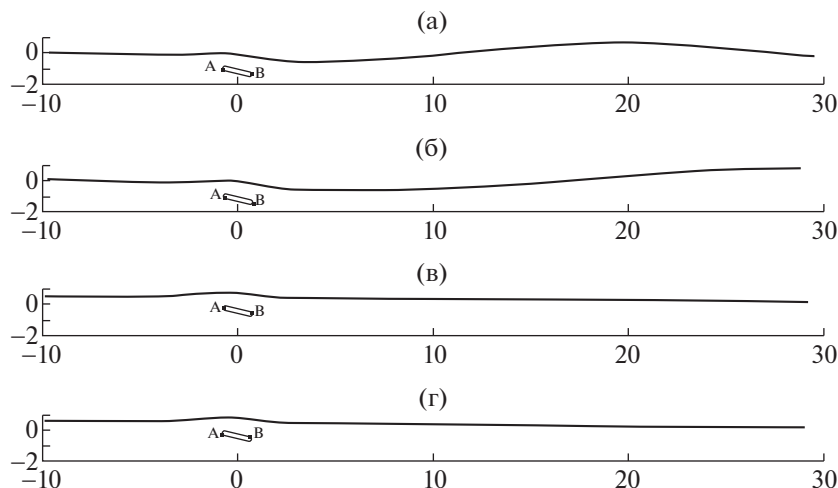
где V — модуль скорости, V_0 — значение V в невозмущенном потоке, Γ — циркуляция скорости по контуру.

Считая, что на свободной поверхности V мало отличается от V_0 , интеграл Бернулли для свободной поверхности

$$\ln V_0 + \frac{1}{2} \ln(1 - 2vy) - \ln V = 0$$

запишем в приближенном виде

$$\ln V_0 - vy - \ln V = 0. \quad (1.1)$$



Фиг. 1. Картина течения при $\Gamma_0 = -0.025$, $L_0 = 3.5$, $H = 1$. Варианты (а), (б), (в), (г) соответствуют $Fr_0 = \{5, 7, 10, 100\}$.

Коэффициент давления $C_p = \left(\frac{p - p_0}{\rho V_0/2} \right)$ на свободной поверхности имеет порядок η^2 , где $\eta = vy$ на свободной поверхности при $\eta \rightarrow 0$, p – давление в жидкости, p_0 – давление газа над свободной границей, ρ – плотность жидкости.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Введем параметрическую плоскость $t = u + iv$, в которой область течения будет представлять нижнюю полуплоскость с исключенным кругом

$$|t - t_0| < \frac{2r}{1 - r^2}, \quad (2.1)$$

где $t_0 = -i(1 + r^2)/(1 - r^2)$, r – положительно и меньше единицы. Бесконечно удаленные точки физической и параметрической плоскостей соответствуют друг другу. В плоскости t контуру Ω отвечает окружность с уравнением

$$t = t_0 + 2r \exp(i\omega)/(1 - r^2), \quad (\text{Im } \omega = 0). \quad (2.2)$$

Свободная поверхность в области t – ось u ($v = 0$).

Пусть функция $z(t)$ – конформное отображение параметрической области течения на физическую область, w – комплексный потенциал, тогда

$$\text{Re} \left(\ln \frac{dz}{dt} + ivz \right) - \ln \left| \frac{dw}{dz} \right| - \ln V_0 = 0, \quad t \in \Lambda_t, \quad (2.3)$$

$$\text{Im } z(t) \rightarrow 0, \quad v = 0, \quad u \rightarrow -\infty, \quad (2.4)$$

$$\frac{dw}{dt} \rightarrow K \quad (K = \text{const}), \quad u \rightarrow -\infty \quad \text{или} \quad v \rightarrow -\infty. \quad (2.5)$$

Условие (2.3) соответствует (1.1), условия (2.4), (2.5) характеризуют затухание возмущений, $K > 0$.

В основе построения комплексного потенциала $w(t)$ лежат формулы, предложенные Милн-Томсоном (см. [9]) для бесциркуляционного течения в области, ограниченной осью u и окружностью $(x - b)^2 + y^2 = a^2$, $b > a$, с вектором скорости набегающего потока, направленного по оси u . Модуль скорости равен V . Тогда для области z

$$w = -iVz + 2iVa^2z \left[(z^2 - b^2)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(b + x_n)^2 (z^2 - x_n^2)} \right], \quad (2.6)$$

$$z = x + iy, \quad x_0 = b, \quad x_n = b - a^2/(b + x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Преобразуя выражение (2.6), используем замены

$$V = KV_0, \quad z = it, \quad x_n = \xi_{n+1},$$

учитывая циркуляционность течения, получим

$$w = KV_0 \left(t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n t}{t^2 + \xi_n^2} - i\delta \ln \frac{t+i}{t-i} \right), \quad (2.7)$$

$$\delta = \Gamma/(2\pi KV_0), \quad A_1 = 2a^2, \quad A_n = 2a^2 / \prod_{k=1}^{n-1} (b + \xi_k)^2, \quad n = 2, 3, \dots$$

И, наконец, следует положить $a = \frac{2r}{1 - r^2}$, $b = \frac{1 + r^2}{1 - r^2}$, т.е.

$$\xi_n = \frac{1 + r^{2n}}{1 - r^{2n}}, \quad A_n = \frac{8r^{2n}}{(1 - r^{2n})^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Введем в рассмотрение кольцевую область $r < |\zeta| < 1$, соответствующую области течения, используя конформные отображения

$$t = i(\zeta + 1)/(\zeta - 1), \quad \zeta = (t + i)/(t - i). \quad (2.9)$$

Окружность $\zeta = r \exp(i\sigma)$ соответствует окружности Ω_t :

$$\omega = -\frac{\pi}{2} + \sigma + 2 \operatorname{arctg} \frac{r \sin \sigma}{1 - r \sin \sigma}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2} + \omega - 2 \operatorname{arctg} \frac{r \cos \omega}{1 - r \sin \omega}. \quad (2.10)$$

Из (2.7)–(2.9) можно получить

$$\begin{aligned} g_0 = t|_{\Omega_t} &= -i \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ik\sigma} \right), \quad g_n = \frac{A_n t}{t^2 + \xi_n^2} \Big|_{\Omega_t} = 2i \left(\sum_{k=1}^{\infty} r^{(2n-1)k} e^{-ik\sigma} - \sum_{k=1}^{\infty} r^{(2n+1)k} e^{ik\sigma} \right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} g_n &= -i + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1 - r^{2n}} \sin n\sigma, \quad -i\delta \ln \frac{t+i}{t-i} \Big|_{\Omega_t} = \delta(\sigma - i \ln r), \quad \phi|_{\Omega_t} = KV_0 \left(4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{1 - r^{2n}} \sin n\sigma \right), \\ \psi|_{\Omega_t} &= -KV_0 (1 + \delta \ln r), \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} \phi \Big|_{\Omega_t} = KV_0 \left(4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^n}{1 - r^{2n}} \cos n\sigma + \delta \right), \end{aligned}$$

где ϕ и ψ – потенциал скорости и функция тока. Так как $\psi|_{\Omega_e}$ не зависит от σ , то окружность Ω_t есть линия тока.

Когда δ удовлетворяет неравенству

$$-4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^n}{1 - r^{2n}} < \delta < 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} nr^n}{1 - r^{2n}}, \quad (2.11)$$

из уравнения для δ

$$KV_0 \left(4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nr^n}{1 - r^{2n}} \cos n\sigma + \delta \right) = 0$$

получаются корни $\sigma = \beta \in (0, \pi)$, $\sigma = 2\pi - \beta$ и по формулам (2.2), (2.10) для критических точек t_A, t_B на Ω_t имеем

$$\begin{aligned} t_A &= t_0 - \frac{2r}{1 - r^2} e^{-i\omega_\beta}, \quad t_B = t_0 + \frac{2r}{1 - r^2} e^{i\omega_\beta}, \\ \omega_\beta &= -\frac{\pi}{2} + \beta + 2 \operatorname{arctg} \frac{r \sin \beta}{1 - r \cos \beta}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

При выполненном условии (2.11) критические точки лежат на контуре. Так как

$$H = \frac{1}{V_0} (\psi|_{S_1 S_2} - \psi|_{\Omega}) = K(1 + \delta \ln r) = \frac{K}{1 - \Gamma_0 \ln r}, \quad (2.13)$$

$$\Gamma_0 = \frac{\delta}{1 + \delta \ln r}, \quad \delta = \frac{\Gamma_0}{1 - \Gamma_0 \ln r}. \quad (2.14)$$

Перейдем к рассмотрению отображающей функции $z(t)$. Согласно представлению w ,

$$\frac{dw}{dt} = KV_0 E(t), \quad E(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\xi_n^2 - t^2}{(t^2 - \xi_n^2)^2} - \frac{2\delta}{1 + t^2}. \quad (2.15)$$

Из условия (2.3) тогда получим

$$\operatorname{Re} \left(\ln \frac{dz}{dt} + i\nu z \right) = \ln K + \ln |E(t)|, \quad t \in \Lambda_t. \quad (2.16)$$

Условие (2.16) с учетом условий затухания (2.4), (2.5) примет вид

$$\ln \frac{dz}{dt} + i\nu z = iat + ib + \ln K + \ln F(t), \quad (2.17)$$

где

$$a = \nu K = \frac{1 - \Gamma_0 \ln r}{Fr_0} = \frac{(1 + \delta \ln r)^{-1}}{Fr_0}, \quad b = \text{const}, \quad (2.18)$$

$$|F(t)| = |E(t)|, \quad t \in \Lambda, \quad F(\infty) = 1. \quad (2.19)$$

Удобно представить $F(t)$ в виде произведения трех функций

$$F(t) = E(t)Q(t)R(t), \quad (2.20)$$

$$Q(t) = \frac{(t - \bar{t}_A)(t - \bar{t}_B)(t - t_0)^2}{(t - t_A)(t - t_B)(t - t_0)}, \quad R(t) = \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n (t - t_0)^{-n}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_n} (t - \bar{t}_0)^{-n}},$$

$$B_n = b_n + i d_n,$$

что позволяет удовлетворить (2.19).

Из решения (2.17) с условием (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \nu z = at + b - i \ln T(t), \quad \frac{dz}{dt} = KU(t), \quad U(t) = F(t)/T(t), \\ T(t) = 1 + ia e^{-iat} \int_{-\infty}^t e^{iat} (F(t) - 1) dt. \end{aligned} \quad (2.21)$$

В результате необходимо определить параметры r, b_n, d_n . Остальные параметры выражены через r по формулам (2.1), (2.8), (2.12), (2.13), (2.18).

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Пусть функции $E(t), R(t), F(t), T(t), U(t)$ при $t \in \Omega_t$ имеют обозначения $E_*(\omega), R_*(\omega), F_*(\omega), T_*(\omega), U_*(\omega)$. Используя формулы (2.21), можно получить

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \omega + \arg U_*(\omega), \quad s = s_0 + \int_0^\omega |U_*(\omega)| d\omega \bigg/ \int_0^{2\pi} |U_*(\omega)| d\omega, \quad (3.1)$$

где s_0 — решение уравнения

$$2\pi s + G(s) - \arg U_*(0) - \frac{\pi}{2} = 0. \quad (3.2)$$

Задание числа Фруда, циркуляции и длины контура приводит к уравнениям (2.14), (2.18) и

$$\frac{2r(1 - \Gamma_0 \ln r)}{1 - r^2} \int_0^{2\pi} |U_*(\omega)| d\omega = L_0. \quad (3.3)$$

Выберем большое целое число M . Пусть при $n \geq M$ коэффициенты $B_n = 0$. Введем в рассмотрение два комплекта μ и τ , первый из которых зависит от параметров, связанных с r , а второй представляет вектор коэффициентов B_n ($n = \overline{1, M-1}$).

Расположим на окружности Ω_t точки

$$t_j = t_0 + 2r e^{i\omega_j} / (1 - r^2), \quad \omega_j = \pi j / N, \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

и рассмотрим функционал

$$W = \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha_j - 2\pi s_j - G(s_j))^2. \quad (3.4)$$

Используем метод итераций. Если $\mu^{(k)}, \tau^{(k)}$ — k -е приближение, то применим его для определения $F_1(\omega)$ и $T_1(\omega)$ в (3.3), которое совместно с (2.8), (2.1), (2.12), (2.20) дает возможность нахождения $\mu^{(k+1)}$. Минимизируя функционал W , найдем $\tau^{(k+1)}$, используя $\mu^{(k+1)}, \tau^{(k)}$ для F_1, T_1 в (3.1), (3.2). Для минимизации функционала применялся метод сопряженных градиентов при следующих соотношениях:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial c_n} &= 2 \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha_j - 2\pi s_j - G(s_j)) \left(\frac{\partial \alpha_j}{\partial c_n} - (2\pi + G'(s_j)) \frac{\partial s_j}{\partial c_n} \right), \\ \frac{\partial s_j}{\partial c_n} &= \frac{\partial s_0}{\partial c_n} + \left(\int_0^{2\pi} |U_*| d\omega \int_0^{\omega_j} \frac{\partial |U_*|}{\partial c_n} d\omega - \int_0^{2\pi} \frac{\partial |U_*|}{\partial c_n} d\omega \int_0^{\omega_j} |U_*| d\omega \right) / \left(\int_0^{2\pi} |U_*| d\omega \right)^2, \\ \frac{\partial s_0}{\partial c_n} &= \frac{1}{2\pi + G'(s_0)} \frac{\partial \alpha_0}{\partial c_n}, \quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial c_n} = \text{Im} \left(\frac{1}{R_*} \frac{\partial R_*}{\partial c_n} \right), \quad \frac{\partial |U_*|}{\partial c_n} = |U_*| \text{Re} \left(\frac{1}{R_*} \frac{\partial R_*}{\partial c_n} \right), \\ c_n &= b_n, \quad d_n, \quad \frac{\partial R_*}{\partial b_n} = S_* \left((t_\omega - t_0)^{-n} - R_*(t_\omega - \bar{t}_0)^{-n} \right), \\ \frac{\partial R_*}{\partial d_n} &= i S_* \left((t_\omega - t_0)^{-n} + R_*(t_\omega - \bar{t}_0)^{-n} \right), \quad S_* = \left(1 + \sum_{n=1}^{M-1} \bar{B}_n (t_\omega - \bar{t}_0)^{-n} \right)^{-1}.\end{aligned}$$

На последнем шаге $(k+1)$ -го приближения находим T_* при $\mu^{(k+1)}, \tau^{(k+1)}$.

Для вычисления сопротивления, подъемной силы и момента относительно точки z_0 воспользуемся формулами Чаплыгина–Блазиуса, тогда для коэффициентов данных характеристик имеем формулы

$$C_x - iC_y = \frac{i}{V_0^2 H} \oint_{\Omega_t} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dt}{dz} dt, \quad C_m = -\frac{1}{V_0^2 H^2} \text{Re} \oint_{\Omega_t} \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \frac{dt}{dz} (z - z_0) dt,$$

т.е.

$$\begin{aligned}C_x - iC_y &= -\frac{2r}{1-r^2} (1 - \Gamma_0 \ln r) \int_0^{2\pi} \frac{E_*^2(\omega)}{U_*(\omega)} e^{i\omega} d\omega, \\ C_m &= \text{Fr}_0 \frac{2r}{1-r^2} (1 - \Gamma_0 \ln r) \int_0^{2\pi} \frac{E_*^2(\omega)}{U_*(\omega)} \left(\frac{2ar}{1-r^2} (e^{i\omega} - e^{i\omega_a}) - i \ln \frac{T_*(\omega)}{T_*(\omega_a)} \right) e^{i\omega} d\omega,\end{aligned}$$

$z_0 = z_a$, z_a — точка на контуре Ω , у которой $\omega = \omega_a$.

Из формулы (2.21) можно получить вид свободной поверхности.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

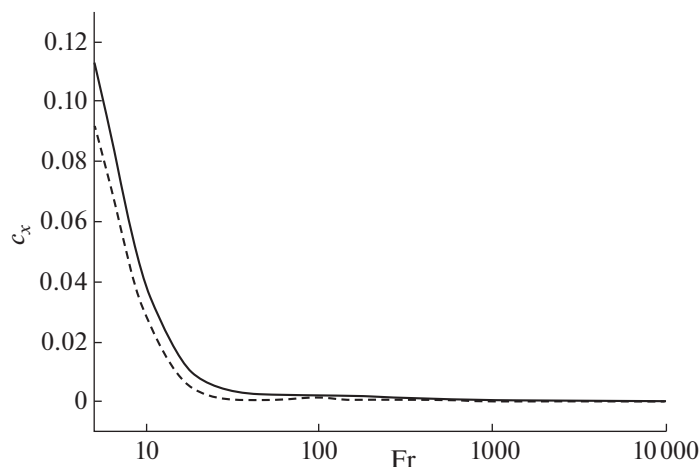
Контур, для которого проводились расчеты, изображен на фиг. 1. Уравнение профиля имеет вид

$$\alpha = 2\pi s + a_0 + \sum_{k=1}^4 a_k \sin 4k\pi s,$$

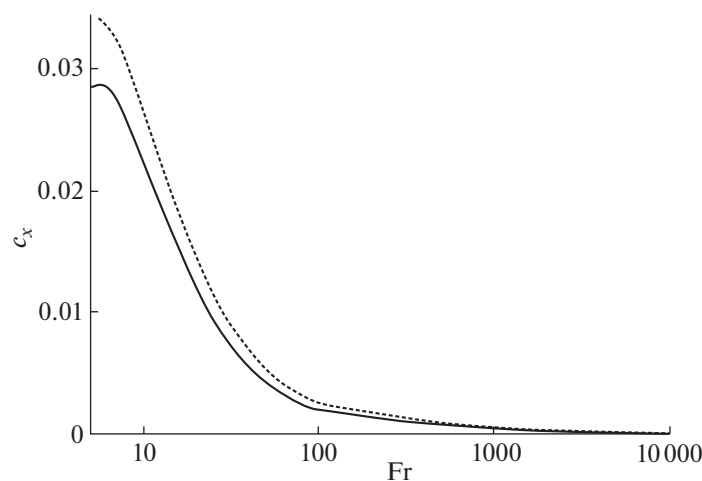
где коэффициенты a_k следующие:

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
−0.27	−0.87	0.3	−0.09	−0.025

В расчетах полагалось $N = 150-200$, $M = 40-65$, $L_0 = 3.5$, $H = 1$. На фиг. 2–7 представлены расчеты коэффициентов волнового сопротивления C_x , подъемной силы C_y и момента C_m в зави-



Фиг. 2. Зависимость коэффициента волнового сопротивления от числа Фруда для положительных значений циркуляции.

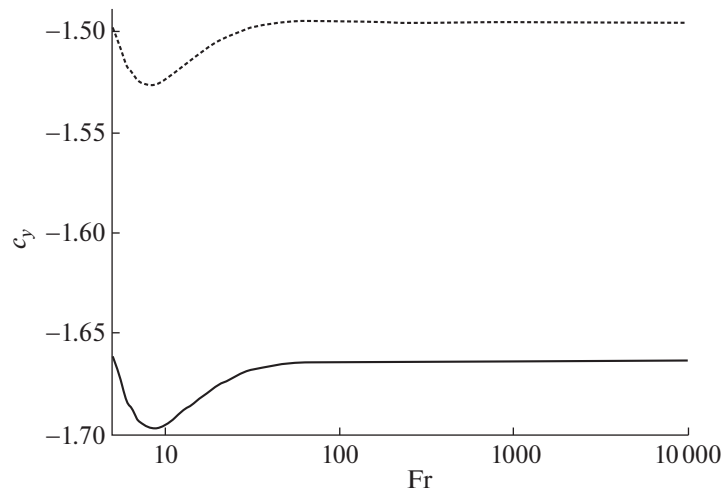


Фиг. 3. Зависимость $C_x(Fr)$ для отрицательных значений циркуляции.

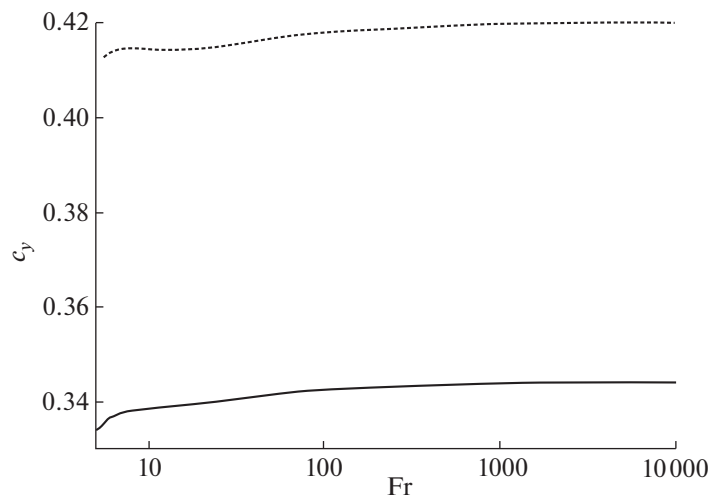
симости от числа Фруда в диапазоне $5 \leq Fr \leq 10^4$. На фиг. 8, 9 изображено положение центра контура в потоке. По горизонтальной оси применена шкала десятичного логарифма. Левая граница интервала связана с критерием применимости развиваемого в работе метода. Расчеты проводились для двух значений положительной циркуляции $\Gamma_0 = \{0.09; 0.1\}$ и отрицательной циркуляции $\Gamma_0 = \{-0.03; -0.025\}$. Сплошные линии соответствуют большим значениям циркуляции, штриховые — меньшим. На фиг. 2, 3 представлены результаты для коэффициента волнового сопротивления $C_x(Fr)$. При положительной циркуляции (фиг. 2) большие значения имеют место для больших значений Γ , а для отрицательной циркуляции (фиг. 3) — для меньших значений Γ . Для отрицательной циркуляции в рассмотренном диапазоне параметров кривые имеют максимум.

На фиг. 4, 5 даны расчеты коэффициента подъемной силы в зависимости от числа Фруда. Расчетные значения имеют знак, противоположный знаку циркуляции, и большие значения достигаются при меньшей циркуляции любого знака. При $\Gamma > 0$ (фиг. 4) кривые имеют минимум, а при $\Gamma < 0$ (фиг. 5) — монотонно растут.

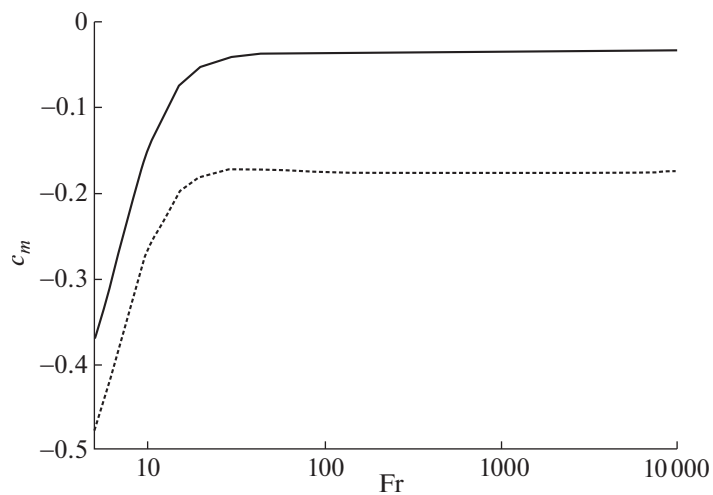
На фиг. 6, 7 изображены зависимости коэффициента момента $C_m(Fr)$ относительно точки $\omega = 0$. Большие значения характеристики достигаются при больших значениях циркуляции лю-



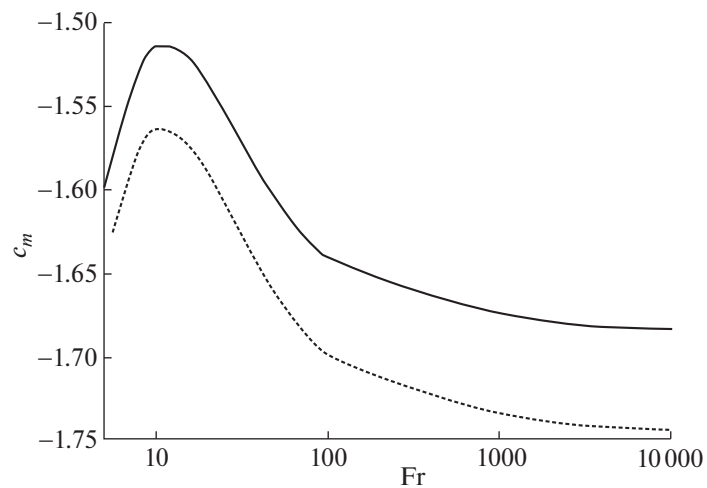
Фиг. 4. Зависимость коэффициента подъемной силы от числа Фруда для $\Gamma > 0$.



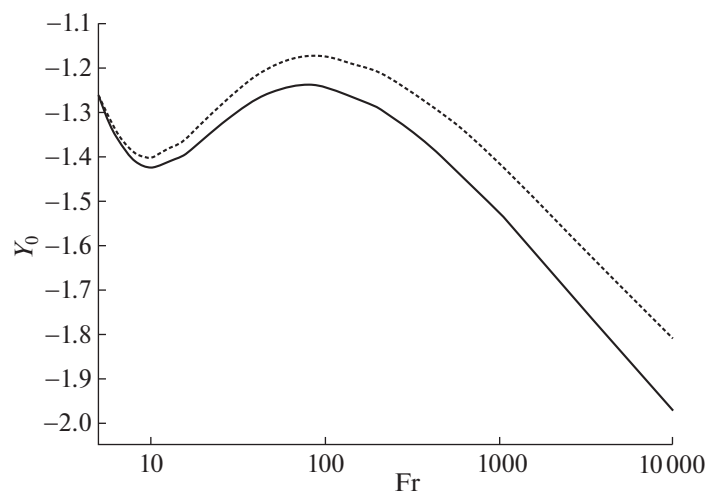
Фиг. 5. Зависимость $C_y(Fr)$ для $\Gamma < 0$.



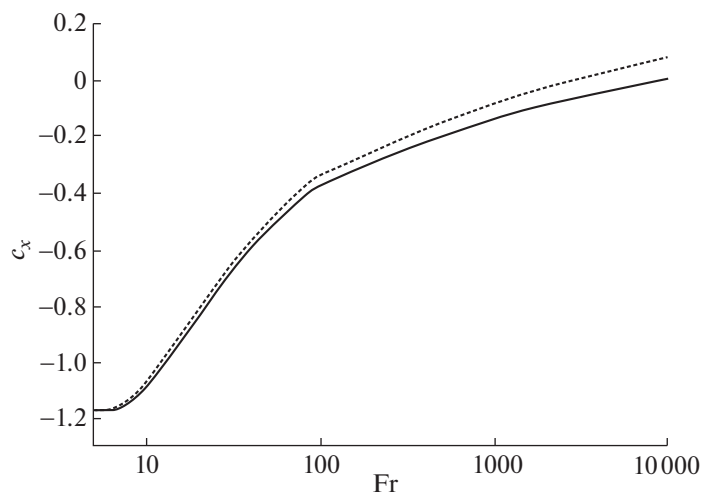
Фиг. 6. Зависимость коэффициента момента от числа Фруда при положительной циркуляции.



Фиг. 7. Зависимость $C_m(Fr)$ для $\Gamma < 0$.



Фиг. 8. Положение безразмерной ординаты центра контура от числа Фруда для положительной циркуляции.



Фиг. 9. Положение $Y_0(Fr)$, $\Gamma < 0$.

бого знака. При $\Gamma > 0$ (фиг. 6) значения C_m монотонно растут при увеличении числа Фруда, а при отрицательной циркуляции (фиг. 7) имеют максимум.

На фиг. 8, 9 представлены графики нахождения ординаты центра контура в зависимости от числа Фруда. При $\Gamma > 0$ (фиг. 8) кривые имеют и минимум, и максимум, и большие значения на всем интервале чисел Фруда получены для меньших значений циркуляции. При отрицательной циркуляции (фиг. 9) контур “всплывает” и тем интенсивнее, чем меньше Γ и больше число Фруда. При $Fr \approx 7$ есть минимум. Можно также отметить линейность зависимости $Y_0(Fr)$ при $Fr > 10^3$, однако это достигается при значительно больших числах Фруда, чем для кругового цилиндра и контура малого удлинения.

Пример изменения свободной поверхности с нелинейными волнами представлен на фиг. 1 для четырех значений числа Фруда при $\Gamma_0 = -0.025$. Контур при увеличении числа Фруда поднимается к свободной поверхности. На фиг. 1 видно, как с увеличением скорости увеличивается длина волн, изменяется их амплитуда и меняется положение точек разветвления и схода потока на контуре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Filippov S.I.* Flow past a submerged hydrofoil // *Fluid Dynamics*. 2001. V. 36. № 3. P. 489–496.
2. *Кириллин К.В., Филиппов С.И.* Обтекание крылового профиля над границей раздела двухслойной вязкой жидкости при наличии свободной поверхности и твердого дна // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2010. Т. 50. № 9. С. 1632–1639.
3. *Киселев О.М., Котляр Л.М.* Нелинейные задачи теории струйных течений тяжелой жидкости. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 156 с.
4. *Киселев О.М., Тропольская О.В.* О поступательном движении цилиндра под свободной поверхностью // *Изв. РАН. МЖГ*. 1996. № 6. С. 9–22.
5. *Киселев О.М., Филиппов С.И.* Движение подводного контура при больших числах Фруда и малом погружении // *Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского*. Казань: Унипресс, 1999. Т. 3. С. 106–116.
6. *Kiselev O.M., Filippov S.I.* Motion of a cylinder below the free surface of a fluid at large Froude numbers // *Fluid Dynamics*. 2000. V. 35. № 4. P. 496–506.
7. *Филиппов С.И.* Моделирование движения подводного эллиптического контура при больших скоростях // *Вестник Казанского технологического ун-та*. 2021. Т. 24. № 9. С. 65–69.
8. *Филиппов С.И.* Движение гладкого вытянутого контура при больших числах Фруда // *Материалы XXII НТК по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСПС'21)*. М.: Изд-во МАИ, 2021. С. 473–474.
9. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 656 с.

УДК 519.87

SOFT COMPUTING ARTIFICIAL INTELLIGENCE OF SCHRÖDINGER TIME INDEPENDENT EQUATION ARISES IN WHEELER-DEWITT MODEL OF QUANTUM COSMOLOGY¹⁾

© 2023 г. Najam Ul Basat^{a,*}, Mahmooda Asghar^{b,**}

^a*Department of Mathematics, Grand Asian University Sialkot, Pasrur Road, Sialkot, Punjab, 51310, Pakistan*

^b*Department of Mathematics, University of Gujrat, Haz Hayyat Campus, Gujrat, Punjab, 50700, Pakistan*

**e-mail: najam.basat@gaus.edu.pk*

***e-mail: 17016109-006@uog.edu.pk*

Поступила в редакцию 18.06.2023 г.

Переработанный вариант 18.06.2023 г.

Принята к публикации 25.07.2023 г.

Использование методов искусственного интеллекта для расчетов стационарного уравнения Шрёдингера, возникающего в модели квантовой космологии Уилера—Девитта. Рассматривается стационарное уравнение Шрёдингера для анализа волновой функции в модели квантовой космологии Уилера—Девитта. Представлены точные решения некоторой специальной модели, а затем реализован алгоритм с использованием нейронных сетей при оптимизации Левенберга—Марквардта. Набор данных в модели Вселенной генерируется пакетом Mathematica для четырех различных случаев и затем импортируется в алгоритм оптимизации для обучения, тестирования и валидации предложенной методики. Эффективность алгоритма обеспечивается анализом среднеквадратической ошибки, регрессионным анализом и статистическим анализом средних значений, минимума, максимума и стандартного отклонения.

DOI: 10.31857/S0044466923110078, EDN: AJKJRN

Ключевые слова: модель квантовой космологии Уилера—Девитта, стационарное уравнение Шрёдингера, оптимизация Левенберга—Марквардта, контролируемое обучение.

¹⁾Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.