

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГОМ СЛОЕ, НАХОДЯЩИМСЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© 2025 г. Н. Б. Расулова<sup>1,\*</sup>, М. Б. Расулов<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup>AZ1141 Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9, ИММ НАН, Азербайджан

\*e-mail: rasulova@gmail.com

\*\*e-mail: mubarizrasulov1950@gmail.com

Поступила в редакцию 02.08.2024 г.

Переработанный вариант 02.08.2024 г.

Принята к публикации 20.09.2024 г.

В статье исследуется интересное явление, обнаруженное во время землетрясений, происходящих в одной местности южной части Азербайджана. С учетом редких особенностей этой части коры Земли, происходящее событие было смоделировано в виде математической задачи динамической теории упругости, которая раскрыла причину исследуемого явления. Библ. 3. Фиг. 3.

**Ключевые слова:** землетрясение, упругий слой, жидкость, уравнение Ламе.

**DOI:** 10.31857/S0044466925010065, **EDN:** CCZKEN

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При землетрясениях, как обычно, наблюдаются 2 толчка, следующие друг за другом. Первый из них соответствует типу продольных волн, появляющихся в виде колебательных движений с возрастающей амплитудой в плоскости, параллельной поверхности земли. За ним следует второй, одинарно-мгновенный толчок, по-видимому, соответствующий поверхностным волнам Рэлея, в котором движение направлено вверх, т.е. перпендикулярно поверхности земли.

Нами обнаружено, что при землетрясениях в городе Ленкорань Азербайджанской Республики первого типа волн в виде колебательных движений почти не наблюдается, даже при землетрясениях с высокими магнитудами, одно из которых – пятибалльное – произошло совсем недавно в этой местности.

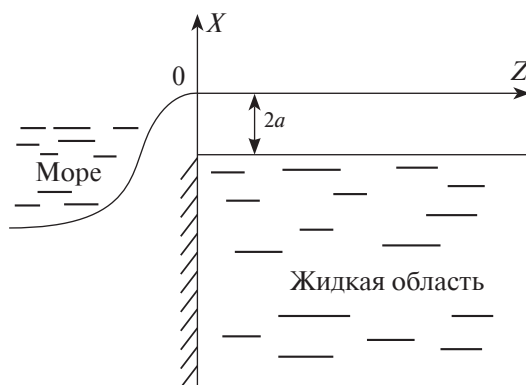
Пытаясь найти причину, мы обратились к факту особенности структуры земной коры этой местности. А отличается она тем, что здесь очень много колодцев, и уровень подземных грунтовых вод довольно близок к поверхности. Этот уровень колеблется от 3 до 5 метров от поверхности земли.

Учитывая эти особенности и то обстоятельство, что Ленкорань находится между Каспийским морем и Талышскими горами, и, обычно, эпицентры толчков находятся на морском дне, была поставлена задача о нестационарной динамике упругого полубесконечного слоя, нижняя часть которого граничит со сжимаемой идеальной жидкостью (фиг. 1). Движение жидкости считается потенциальным, т.е. безвихревым. Ударному воздействию подвергается некая или вся часть торца слоя.

Для решения этой задачи были использованы некоторые результаты работы [1], посвященной исследованию динамики прямоугольных призм, с позиции точной трехмерной теории эластодинамики. В частности, при выполнении некоторых упрощенных краевых условий, исследуемая трехмерная задача становится двумерной, т.е. получается решение для слоя. Здесь будем использовать именно эти готовые решения для полубесконечного упругого слоя, подверженного действию продольного удара по торцевой области этого же слоя. Но в настоящей задаче, существование граничащих между собой разных типов сред, конечно, намного усугубляет процесс решения; получается задача с пятью неизвестными.

Предложен новый метод определения оригиналов от функций-преобразований, которые в настоящей работе имеют очень сложный вид; они представлены через детерминанты пятого ранга. В некотором смысле этот метод является обобщением аналогичного метода, который, с этой же целью, впервые был предложен в [1], а для осесимметричных случаев – в [2].

Получены точные решения, которые справедливы в начальном коротком времени процесса, но дают довольно широкую возможность видения целого процесса и для последующих времен. Результаты с высокой точностью подтверждают верность определения причин отсутствия первого типа толчков на поверхности земной коры при землетрясениях.



Фиг. 1.

## 2. ПОСТАНОВКА И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Учитывая расположенность города Ленкорань Азербайджанской Республики, рассматриваемая задача моделируется следующим образом.

Упругий полубесконечный слой, толщиной  $2a$ , находится на поверхности идеальной сжимаемой жидкой области бесконечной глубины. (см. фиг. 1). На границе жидкой области  $z = 0$  принято существование непроницаемой стенки. Предполагается, что удар наносится по торцевой области слоя, и движение жидкости считается потенциальным. При этих условиях, поставленная задача может быть сформулирована следующей начально-краевой задачей для данной конструкции, состоящей из двух разных сред.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{U} + \mu \Delta \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(u, w), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} u &= w = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \text{при } t = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= \sigma_0 f(t), \quad u = 0 \quad \text{при } z = 0, \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{xz} = 0 \quad \text{при } x = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В дальнейшем будем считать, что  $f(t) = H(t)$ , где  $H(t)$  — функция Хевисайда.

На границе жидкой области и слоя имеют место следующие условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\rho_{\text{ж}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{при } x = -2a, \\ \sigma_{xz} &= 0 \quad \text{при } x = -2a, \\ \dot{u} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0 \quad (5)$$

и уравнение, описывающее движение жидкой области, следующее:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{a_{\text{ж}}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Здесь  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(u, w)$  — вектор перемещения упругого слоя,  $\lambda$  и  $\mu$  коэффициенты Ламе,  $a_{\text{ж}}$  — скорость распространения звуковых волн в жидкой среде, движение которой описывается потенциальной функцией —  $\varphi$ ,  $\rho$ ,  $\rho_{\text{ж}}$  — соответственно, плотности слоя и жидкости,  $t$  — время.

Для решения этой системы будет применен аналогичный метод, который разработан и использован в [1]. Благодаря этому методу, система уравнений Ламе, сводится к простейшей системе неоднородных уравнений Гельмгольца, в правой части которых присутствуют краевые функции ударных нагрузок. Этот метод предусматривает применение двукратных интегральных преобразований, наряду с методом замены отыскиваемых

функций, что приводит к вышеупомянутому прекрасному результату. Но этот факт еще не избавляет нас от той сложности, которая связана с переходом от преобразований к оригиналам. И для преодоления этих трудностей, там же предложен наиболее универсальный способ для нахождения аналогичных оригиналов двукратных интегральных преобразований.

Итак, используя готовые уравнения этой работы для двумерного движения, после несложных выкладок в отношении уравнения движения жидкой части этой конструкции можно получить следующую алгебраическую систему линейных уравнений для определения пяти неизвестных постоянных, фигурирующих в составе новых потенциальных функций:

$$\begin{Bmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ A_{01} \\ A_{02} \\ g_0 \end{Bmatrix} \{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Omega q^2 \\ 0 \\ \Omega q^2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \text{где } \Omega = -\frac{f(p) \sigma_0}{(\lambda + 2\mu) v_1^2 q}. \quad (6)$$

Здесь  $\{D\} = \{a_{ik}\} e^{2av_1} e^{2av_2}$ ,  $\{D\}$  — матрица 5-го ранга

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2qv_1, \\ a_{21} &= \left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right) v_1^2 - q^2, \\ a_{31} &= 2qv_1 e^{-2av_1}, \\ a_{41} &= \left[\left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right) v_1^2 - q^2\right] e^{-2av_1}, \\ a_{51} &= pv_1 e^{-2av_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= -2qv_1 e^{-2av_1}, \\ a_{22} &= \left[\left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right) v_1^2 - q^2\right] e^{-2av_1}, \\ a_{32} &= -2qv_1, \\ a_{42} &= \left[\left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right) v_1^2 - q^2\right], \\ a_{52} &= pv_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= -(q^2 + v_2^2) v_2, \\ a_{23} &= \frac{2\mu}{\lambda} qv_2^2, \\ a_{33} &= (q^2 + v_2^2) v_2 \times e^{-2av_2}, \\ a_{43} &= \frac{2\mu}{\lambda} qv_2^2 e^{-2av_2}, \\ a_{53} &= pqv_2 e^{-2av_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{14} &= (q^2 + v_2^2) v_2 e^{-2av_2}, \\ a_{24} &= -\frac{2\mu}{\lambda} qv_2^2 e^{-2av_2}, \\ a_{34} &= (q^2 + v_2^2) v_2, \\ a_{44} &= -\frac{2\mu}{\lambda} qv_2^2, \\ a_{54} &= pqv_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{15} &= 0, \\ a_{25} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{35} &= 0, \\ a_{45} &= -\rho_{\text{ж}} \frac{p}{\lambda} e^{-2av_{\text{ж}}}, \\ a_{55} &= v_{\text{ж}} e^{-2av_{\text{ж}}}. \end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$v_k = \sqrt{\left(\frac{p^2}{c_k^2} + q^2\right)}, \quad k = 1, 2, \quad \text{и} \quad v_{\text{ж}} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{c_{\text{ж}}^2} + q^2\right)}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

являются скоростями распространения продольных и поперечных волн в материале слоя.

Видоизменим  $\{D\}$  следующим образом:

$$\{D\} = e^{-2av_{\text{ж}}} \{D_0\}.$$

Тогда в новой матрице  $\{D_0\}$  будут фигурировать только минусовые степени  $e^{-2av_k}$  ( $k = 1, 2$ ).

Преобразование продольной скорости на свободной поверхности слоя при  $x = 0$ , согласно [1], и при выбранной координатной системе (фиг.1) выражается следующей формулой:

$$\tilde{W} = -\frac{\sigma_0}{(\lambda + 2\mu) v_1^2} + C_{01}q + C_{02}q - v_2^2 A_{01} - v_2^2 A_{02}. \quad (7)$$

Таким образом, в переменных параметрах преобразований решение определено полностью. Но оно выражено через детерминанты 5-го ранга, и, поэтому, нахождение оригиналов обычными способами почти невозможно. В таких случаях уместно применить метод, основанный в [1]. Принцип, на котором базируется данный метод, становится более актуальным, когда мы имеем дело с очень сложными функциями-преобразованиями.

Прежде всего, согласно вышеупомянутому методу, чтобы определить поведение преобразований в бесконечности, когда  $p \rightarrow \infty$ , необходимо их разложить в сходящиеся ряды по функциям  $1/v_1^n$ . Именно в этом случае, каждый член этого ряда окажется функцией-преобразованием для оригиналов и по Лапласу, и по Фурье.

Сначала возьмем основной детерминант  $\{D_0\}$  и видоизменим его следующим образом: поставим 0 в тех местах, где фигурирует выражение  $e^{-2av_k}$  ( $k = 1, 2$ ) так как все слагаемые с участием этих членов, образующихся при раскрытии этого детерминанта, в сумме быстрее приближаются к нулю, чем любая степень  $v_1^{-n}$ .

В таком случае выражение для  $\{D_0\}$  заметно упрощается — у него остается только восемь членов из общей суммы. Из этих 8-и членов сохраним тот член, который в бесконечности  $p \rightarrow \infty$  имеет наибольшую степень:

$$|D_0| \approx -\Omega q^2 a_{21} a_{13} a_{34} \cdot (a_{55} a_{42} - a_{45} a_{52}).$$

Тем же способом определим главные члены и других детерминантов  $|D_n| \cdot e^{-2av_{\text{ж}}}$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ), образующихся из системы (6), согласно правилу Крамера для определения постоянных  $C_{01}, C_{02}, A_{01}, A_{02}$ :

$$\begin{aligned} |D_1| &\approx -\Omega q^2 \cdot a_{13} \cdot a_{34} \cdot (a_{55} a_{42} - a_{45} a_{52}) \cdot e^{2av_1} \cdot e^{2av_2}, \\ |D_2| &\approx -\Omega q^2 \cdot a_{13} \cdot a_{34} \cdot a_{55} \cdot e^{2av_2}, \\ |D_3| &\approx -\Omega q^2 \cdot a_{11} \cdot a_{34} \cdot (a_{55} a_{42} - a_{45} a_{52}) \cdot e^{2av_1} \cdot e^{2av_2}, \\ |D_4| &\approx -\Omega q^2 \cdot a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{55} \cdot e^{2av_1}. \end{aligned}$$

Для коротких промежутков времени, в течение которых действует ударная нагрузка, поведение отношений  $\frac{D_k}{D_0}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , в бесконечности, конечно, будет определяться, в основном, из отношений этих же членов наивысшей степени. Тогда получим

$$C_{01} = \frac{\Omega q^2}{a_{21}}, \quad C_{02} = \frac{\Omega q^2 \cdot a_{55} \cdot e^{-2av_1}}{(a_{55} \cdot a_{42} - a_{45} \cdot a_{52})}, \quad A_{01} = \frac{\Omega q^2 \cdot a_{11}}{a_{21} \cdot a_{13}}, \quad A_{02} = -\frac{\Omega q^2 \cdot a_{32} \cdot a_{55} \cdot e^{-2av_2}}{a_{34} \cdot (a_{55} \cdot a_{42} - a_{45} \cdot a_{52})}. \quad (8)$$

Поставив значения этих постоянных в формулы (7), получим выражение искомого решения в параметрах преобразований. Используя существующий аналитический метод [3], легко можно определить двукратные оригиналы этих преобразований.

Отдельно определим оригиналы первого, второго и четвертого члена в сумме правой части (7):

$$1) -\frac{\sigma_0}{(\lambda + 2\mu) \cdot v_1^2} \leftrightarrow -\frac{\sigma_0 \cdot c_1}{(\lambda + 2\mu)} H\left(t - \frac{z}{c_1}\right); \quad (9)$$

$$2) C_{01}q = \frac{\Omega q^3}{a_{21}} = -\frac{\sigma_0 q^2}{(\lambda + 2\mu)v_1^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right)v_1^2 - q^2} = -\frac{\sigma_0 \cdot c_1^2}{(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{H\left(t - \frac{z}{\sqrt{2}c_2}\right)}{\sqrt{2}c_2} - \frac{H\left(t - \frac{z}{c_1}\right)}{c_1} \right], \quad (10)$$

$$3) -v_2^2 A_{01} = -v_2^2 \cdot \frac{\Omega q^2 \cdot a_{11}}{a_{21} \cdot a_{13}} = \frac{\sigma_0 v_2^2}{(\lambda + 2\mu)v_1^2} \cdot \frac{2q^2 v_1}{\left[\left(1 + \frac{2\mu}{\lambda}\right)v_1^2 - q^2\right] \cdot [(q^2 + v_2^2)v_2]} \leftrightarrow \frac{\sigma_0 \cdot (c_1^2 - 2c_2^2)}{(\lambda + 2\mu)} \frac{c_1}{c_2} \frac{H\left(t - \frac{z}{\sqrt{2}c_2}\right)}{\sqrt{2}c_2}. \quad (11)$$

Заметим, что в последней формуле использовано очевидное приближение

$$\frac{v_2}{v_1} \approx \frac{c_1}{c_2} \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty.$$

Как видно из этих формул, сумма их тождественно равна нулю для соотношения  $c_1 = 2c_2$ , которое справедливо для значения коэффициента Пуассона  $\nu = \frac{1}{3}$ , и что для большинства материалов эта величина имеет как раз это значение.

Это необыкновенно интересный результат, подтверждающий высокую точность определения причины исследуемого явления, так как основной тон в формировании продольных движений на поверхности слоя задают именно эти компоненты. Остальные два компонента в (7) представляют дифракционные волны, пришедшие с низшей стороны, контактирующей с жидкостью. Они незначительны, и не в силах изменить волновую картину, сложившуюся от выше построенных решений. Тем не менее, внизу приводим готовые решения и графики распределений для последующих значений времени, продольных скоростей на верхней границе слоя, соответствующие каждой волне отдельно.

Сперва рассмотрим продольные дифракционные волны, отразившиеся с низшей стороны слоя. Из формул (7), (8) и из выражений компонентов основного детерминанта (\*) можно легко определить математическое выражение этой волны. Оно следующее:

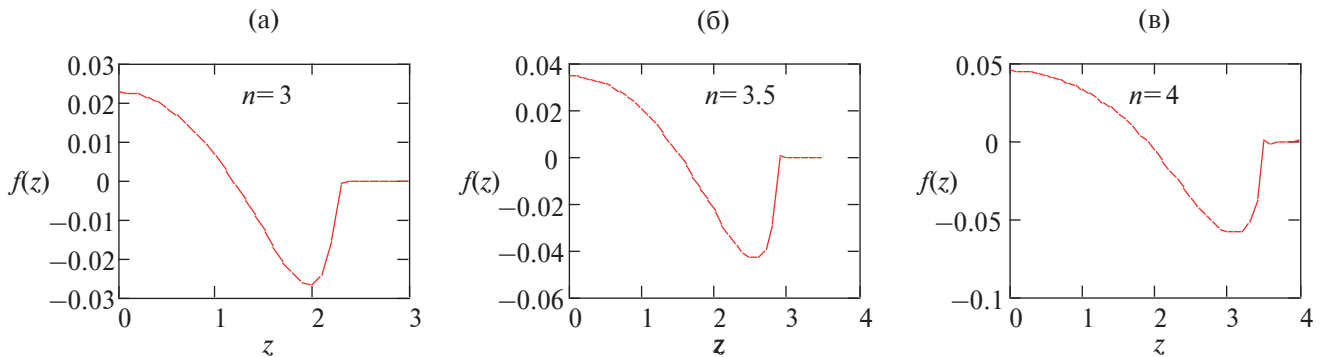
$$\dot{W}_{\text{прод.}} = C_{02}q = \frac{\Omega q^3 \cdot a_{55} \cdot e^{-2av_1}}{(a_{55} \cdot a_{42} - a_{45} \cdot a_{52})} = \frac{\sigma_0 \cdot c_1}{(\lambda + 2\mu)v_1^2} \cdot \frac{c_1 \cdot (c_1^2 - 2c_2^2)q^2 e^{-2av_1}}{p^2 \left(1 + \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho} \cdot \frac{a_{\text{ж}}}{c_1}\right) + 2 \cdot c_2^2 q^2}. \quad (12)$$

Пусть  $\frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho} \cdot \frac{a_{\text{ж}}}{c_1} = \alpha$ , тогда обратное преобразование по Лапласу формулы (12), может представляться в следующем виде:

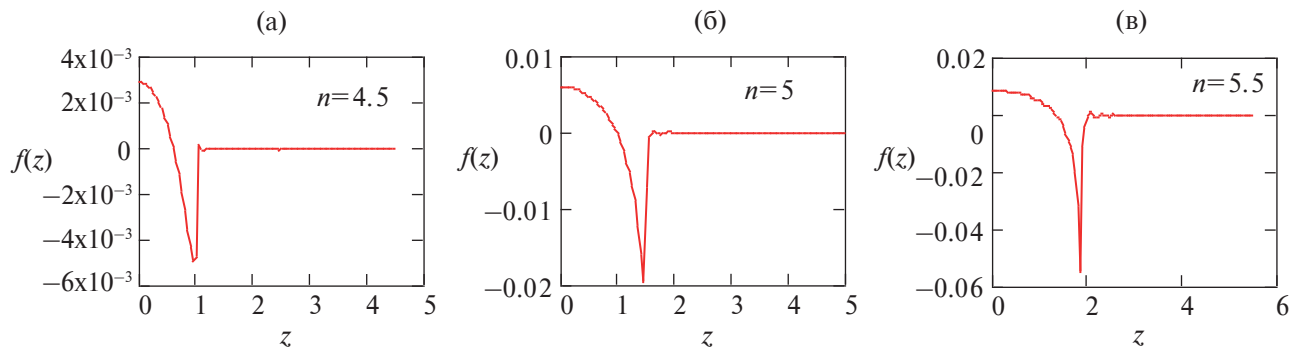
$$\frac{\dot{W}_{\text{прод.}}}{\frac{\sigma_0 \cdot c_1}{(\lambda + 2\mu)}} = \frac{0.5}{(1 + \alpha)} \int_2^t \left( \int_2^{\tau_1} \left( J_0(q(\tau_1 - \tau)) \right) \left( J_0(q\sqrt{\tau^2 - 4}) \right) d\tau \right) q \sin \left( 0.5 \sqrt{2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}} q(t - \tau_1) \right) d\tau_1.$$

Отметим лишь, что для получения этой формулы были использованы теоремы Эфрос, теоремы о свертках и таблицы, приведенные в [3]. Теперь, совершив обратное преобразование по Фурье-косинус, можно привести графики продольной скорости на верхней поверхности слоя.

Расчет произведен для  $\nu = \frac{1}{3}$  и для следующих значений времени  $t = \frac{a}{c_1}n$ , и для безразмерной продольной скорости  $\dot{W}_{\text{прод.}} = \frac{\dot{W}_{\text{прод.}}}{\frac{\sigma_0 \cdot c_1}{(\lambda + 2\mu)}}$ .



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Первая дифракционная волна пересечет эту поверхность при  $n = 2$ .

Теперь вычислим соответствующий безразмерный компонент дифракционной поперечной волны, которая пересечет верхний слой в моменте  $n = 4$ . Тогда получим

$$\dot{W}_{\text{попер.}} = -v_2^2 A_{02} = v_2^2 \frac{\Omega q^2 a_{32} a_{55} e^{-2av_2}}{a_{34}(a_{55} a_{42} - a_{45} \cdot a_{52})} = \frac{\sigma_0 c_1}{(\lambda + 2\mu)} \frac{(c_1^2 - 2c_2^2)^2 q^2 e^{-2av_2}}{c_2(p^2 + 2c_2^2) \left( p^2 \left( 1 + \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho} \cdot \frac{a_{\text{ж}}}{c_1} \right) + 2c_2^2 q^2 \right)},$$

$$\dot{W}_{\text{попер.}} = -\frac{1}{2\alpha(1+\alpha)} \int_4^t \left( \cos\left(\frac{q}{2}(\tau-4)\right) - \cos\left(\frac{q}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}}(\tau-4)\right) \right) \cdot J_0\left(\frac{q}{2}\sqrt{t^2-\tau^2}\right) d\tau.$$

Как видно из этих графиков, их значения достаточно малы; они меньше, чем сотая часть значения каждой волны (9)–(11), которая образуется на верхней границе слоя. Естественно, они не могут вызвать ощутимых колебаний. Следует отметить еще один интересный факт: в этих составляющих, движение вдоль направления удара быстро меняет знак в обратный, как это показывают графики.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученный результат позволяет сформулировать следующее интересное заключение: верхний слой объектов, находящихся на поверхности жидкости, почти не испытывает продольной нагрузки удара.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rassoulova N.B.* On dynamics of bar of rectangular cross section // Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics. 2001. V. 68 № 4. P. 662–666.
2. *Rassoulova N.B., Mirzoyeva G.R.* A method for solving dynamic problems for cylindrical domains // Trans. of NAS of Azerbaijan, Issue Mechanics. 2015. V. 35 № 7. P. 68–75.
3. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционные исчисления. М.: Физматгиз, 1961.

# STUDYING DYNAMIC PROCESSES IN AN ELASTIC LAYER ON THE SURFACE OF A COMPRESSIBLE FLUID

N. B. Rasulova<sup>a,\*</sup> and M. B. Rasulov<sup>a,\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Institute of Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences, Baku, AZ1141 Azerbaijan*

<sup>\*</sup>*e-mail: rasulova@gmail.com*

<sup>\*\*</sup>*e-mail: mubarizrasulov1950@gmail.com*

Received: 02 August 2024

Revised: 02 August 2024

Accepted: 20 September 2024

**Abstract.** An interesting phenomenon discovered during earthquakes occurring in one area of the southern part of Azerbaijan is studied. Taking into account the rare features of this part of the Earth's crust, the occurring event was modeled in the form of a mathematical problem of the dynamic theory of elasticity, which revealed the cause of the phenomenon involved.

**Keywords:** earthquake, elastic layer, fluid, Lamé equation