ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2025, том 65, № 1, с. 50–61

УДК 519.642

ТЕОРИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОСОБЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

© 2025 г. Н. С. Габбасов[1,*]

[1] 423810 Набережные Челны, пр-т Мира, 68/19, Набережночелнинский ин-т Казанского ун-та, Россия
*e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru

Поступила в редакцию 22.07.2024 г.
Переработанный вариант 22.07.2024 г.
Принята к публикации 23.08.2024 г.

Исследовано линейное интегродифференциальное уравнение с особым дифференциальным оператором в главной части. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложен и обоснован специальный обобщенный вариант метода коллокации. Библ. 16.

Ключевые слова: интегродифференциальное уравнение, приближенное решение, прямой метод, теоретическое обоснование.

DOI: 10.31857/S0044466925010058, **EDN**: CDAYGX

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена приближенному решению линейного интегродифференциального уравнения (ИДУ)

$$(Ax)(t) \equiv x^{(q)}(t)\prod_{j=1}^{l}(t-t_j)^{m_j} + \sum_{j=0}^{p}\int_{-1}^{1} K_j(t,s)x^{(j)}(s)ds = y(t), \tag{1.1}$$

в котором $t \in I \equiv [-1,1]$, числа $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in N$, $j = \overline{1,l}$, и $q, p \in Z^+$ являются фиксированными; K_j, $j = \overline{0,p}$ и y — известные “гладкие” функции, а x — искомая функция. Исследование таких уравнений представляет несомненный интерес как с точки зрения теории (в частности, ИДУ (1.1) является обобщением ряда классов линейных интегральных уравнений типа Фредгольма), так и приложений. Очевидно, что задача об отыскании решения ИДУ (1.1) в классе обычных гладких функций является некорректно поставленной. Следовательно, важен вопрос о построении основных пространств, обеспечивающих корректность данной задачи. При решении этого вопроса вполне естественно учитывать то, что в случае $q = p = 0$ ИДУ (1.1) преобразуется в линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР) (т.е. в этом смысле эти уравнения являются “родственными”). Хорошо известно, что УТР широко применяются в различных областях, в частности, они встречаются в ряде задач теорий переноса нейтронов, упругости, рассеяния частиц (см., например, [1; 2, с. 121–129] и приведенную в них библиографию), в теории уравнений с частными производными смешанного типа [3], а также в теории сингулярных интегральных уравнений с вырождающимся символом [4]. При этом, как правило, естественными классами решений УТР являются специальные пространства обобщенных функций типа D или V. Под D (соответственно V) понимается пространство обобщенных функций, построенных при помощи функционала “дельта-функция Дирака” (соответственно функционала “конечная часть интеграла по Адамару”). Подробный обзор полученных результатов и обширную библиографию по УТР можно найти в монографии [5, с. 3–11, 168–173] и в диссертации [6, с. 3–6, 106–114]. На основе упомянутой выше связи между ИДУ (1.1) и УТР соответствующие идеи и результаты для УТР можно успешно использовать для корректной постановки задачи решения уравнения (1.1), разработки и теоретического обоснования приближенных методов его решения в пространствах обобщенных функций.

ИДУ (1.1) при $l = 1, t_1 = 0, p = 0$ исследовано в работе [7, с. 25–43], в которой с использованием известных результатов по УТР построена теория Нётера для такого уравнения в классах гладких и обобщенных функций типа D. В статье [8] разработана полная теория разрешимости общего ИДУ вида (1.1) при $p = 0$ в некотором пространстве типа D обобщенных функций. Следует отметить, что исследуемые ИДУ точно решаются лишь в очень редких частных случаях. Поэтому особенно актуальна разработка эффективных методов их приближенного решения в пространствах обобщенных функций с соответствующим теоретическим обоснованием.

Определенные результаты в этом направлении получены для ИДУ (1.1) при $p = 0$. Именно, в работах [8–11] предложены и обоснованы прямые проекционные методы его приближенного решения, основанные на применении стандартных и некоторых специальных полиномов, а также сплайнов первого и второго порядков.

В настоящей статье впервые построена полная теория разрешимости ИДУ (1.1) в некотором пространстве типа D обобщенных функций (фредгольмовость уравнения, условия разрешимости, алгоритм отыскания точного решения, достаточные условия непрерывной обратимости оператора A). Более того, разработан полиномиальный прямой проекционный метод, специально приспособленный к приближенному решению ИДУ (1.1) в классе обобщенных функций, и дано его обоснование в смысле [12; гл. 1, §1–5]. Именно, доказана теорема существования и единственности решения соответствующего приближенного уравнения, установлены оценки погрешности этого решения и доказана сходимость последовательности приближенных решений к точному решению в пространстве обобщенных функций. Исследованы также вопросы устойчивости и обусловленности аппроксимирующих уравнений.

2. ПРОСТРАНСТВА ОСНОВНЫХ И ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $C \equiv C(I)$ – банахово пространство всех непрерывных на I функций с обычной max-нормой и $m \in N$. Обозначим через $C\{m;0\} \equiv C_0^{\{m\}}(I)$ множество всех функций $f \in C$, имеющих в точке $t = 0$ тейлоровскую производную $f^{\{m\}}(0)$ порядка m (см., например, [13]). Назовем его классом точечно-гладких функций (естественно считаем, что $C\{0;0\} \equiv C$). Векторное пространство $C\{m;0\}$ снабдим нормой

$$\|f\|_{\{m\}} \equiv \|Tf\|_C + \sum_{i=0}^{m-1} \left|f^{\{i\}}(0)\right|, \tag{2.1}$$

где $T : C\{m;0\} \to C$ – “характеристический” оператор класса $C\{m;0\}$, определяемый следующим образом:

$$Tf \equiv (T^m f)(t) \equiv \left[f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{\{i\}}(0)t^i \big/ i!\right] t^{-m} \equiv F(t) \in C, \quad F(0) \equiv \lim_{t\to 0} F(t). \tag{2.2}$$

Справедлива (см., например, [5, с. 12,14])

Лемма 2.1. i. *Включение $f \in C\{m;0\}$ эквивалентно выражению*

$$f(t) = t^m F(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i t^i, \tag{2.3}$$

причем $Tf = F \in C$ с точностью до устранимого разрыва в точке $t = 0$, а $f^{\{i\}}(0) = \alpha_i i!$, $i = \overline{0, m-1}$.

ii. *Пространство $C\{m;0\}$ по норме* (2.1) *полно и нормально вложено в пространство C.*

Далее, введем следующий класс “точечно-гладких” функций:

$$C\{m,q;0\} \equiv \left\{f \in C\{m;0\} : f^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{0, q-1}, \quad q \in Z^+, \quad q < m\right\}.$$

Следовательно, с учетом (2.1)–(2.3) (в них имеем $i = \overline{q, m-1}$) по норме (2.1) пространство $C\{m,q;0\}$ полно и нормально вложено в C.

Обозначим через $C^{(q)} \equiv C^{(q)}(I)$ векторное пространство q раз непрерывно дифференцируемых на I функций. В силу формулы Тейлора с интегральным остатком ясно, что функция f принадлежит классу $C^{(q)}$ тогда и только тогда, когда она имеет вид

$$f(t) = (JF)(t) + \sum_{j=0}^{q-1} b_j (t+1)^j, \tag{2.4}$$

где

$$JF \equiv \left(J_{q-1}F\right)(t) \equiv ((q-1)!)^{-1} \int_{-1}^{t} (t-s)^{q-1} F(s)ds, \tag{2.5}$$

причем $D^q f \equiv f^{(q)}(t) = F(t) \in C$, $f^{(j)}(-1) = b_j j!$, $j = \overline{0, q-1}$; при этом $J : C \to C^{(q)}$, $(JF)^{(j)} = J_{q-1-j}F$, $j = \overline{0, q-1}$, $D^q JF = F$.

В векторном пространстве $C^{(q)}$ определим специальную норму

$$\|f\|_{(q)} \equiv \|D^q f\|_C + \sum_{j=0}^{q-1} \left|f^{(j)}(-1)\right|, \quad f \in C^{(q)}. \tag{2.6}$$

Из соотношений (2.4), (2.6) и оценки интеграла (2.5) по max-норме легко следует

Лемма 2.2. *Пространство $C^{(q)}$ с нормой (2.6) полно и вложено в пространство C.*

Следствие 1. Обычная норма $\|\cdot\|_{C^{(q)}}$ в $C^{(q)}$ и (2.6) эквивалентны, т.е. существует постоянная $d_0 \geqslant 1$ такая, что

$$\|f\|_{(q)} \leqslant \|f\|_{C^{(q)}} \leqslant d_0\|f\|_{(q)}, \quad \|f\|_{C^{(q)}} \equiv \sum_{i=0}^{q} \left\|f^{(i)}\right\|_C, \quad f \in C^{(q)}.$$

Пусть $C^{(q)}_{-1} \equiv C^{(q)}_{-1}(I) \equiv \left\{f \in C^{(q)} : f^{(i)}(-1) = 0, \quad i = \overline{0, q-1}\right\}$ – банахово пространство гладких функций с нормой $\|f\|_{(q)} \equiv \|D^q f\|_C$.

В дальнейших исследованиях нам понадобится еще один класс гладких функций:

$$C^{(\lambda),(q)}_{-1} \equiv C^{(\lambda),(q)}_{-1}(I) \equiv C^{(\lambda)} \cap C^{(q)}_{-1}, \quad \lambda \equiv q + p.$$

В силу (2.4) очевидно, что включение $f \in C^{(\lambda),(q)}_{-1}$ равносильно представлению

$$f(t) = \left(J_{\lambda-1} f^{(\lambda)}\right)(t) + \sum_{k=q}^{\lambda-1} f^{(k)}(-1)(t+1)^k \big/ k!. \tag{2.7}$$

Следовательно, на основании леммы 2.2 очевидно, что по норме

$$\|f\|_{(\lambda)} \equiv \left\|D^{\lambda} f\right\|_C + \sum_{k=q}^{\lambda-1} \left|f^{(k)}(-1)\right| \tag{2.8}$$

пространство $C^{(\lambda),(q)}_{-1}$ полно и вложено в C. Поэтому обычная норма в $C^{(\lambda)}$ и (2.8) эквивалентны:

$$\|f\|_{(\lambda)} \leqslant \|f\|_{C^{(\lambda)}} \leqslant d_1\|f\|_{(\lambda)}, \quad f \in C^{(\lambda),(q)}_{-1}, \quad d_1 \geqslant 1. \tag{2.9}$$

Лемма 2.3. *Для любой функции $f \in C^{(\lambda),(q)}_{-1}$ справедливо равенство*

$$\left\|f^{(q)}\right\|_{(p)} = \|f\|_{(\lambda)}. \tag{2.10}$$

Доказательство. В силу (2.7) имеем

$$f^{(q)}(t) = \left(J_{\lambda-1-q} f^{(\lambda)}\right)(t) + \left[\sum_{k=q}^{\lambda-1} f^{(k)}(-1)(t+1)^k \big/ k!\right]^{(q)} = \left(J_{p-1} f^{(\lambda)}\right)(t) + \sum_{j=0}^{p-1} f^{(q+j)}(-1)(t+1)^j \big/ j!,$$

откуда в силу (2.4)–(2.6) и (2.8) находим

$$\left\|f^{(q)}\right\|_{(p)} = \left\|D^p f^{(q)}\right\|_C + \sum_{j=0}^{p-1} \left|f^{(q+j)}(-1)\right| \equiv \|f\|_{(\lambda)},$$

что и требовалось.

В дальнейшем при исследовании регулярного интегродифференциального оператора понадобится одно важное свойство “точечно-гладких” функций. В этой связи введем в рассмотрение следующий класс “гладких” функций:

$$C^{\{n\},(r)}_0 \equiv C^{\{n\},(r)}_0(I) \equiv \left\{\varphi \in C\{n; 0\} : T^n\varphi \in C^{(r)}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots\right\},$$

где T^n – “характеристический” оператор класса $C\{n; 0\}$, определенный согласно правилу (2.2). Будем использовать семейство

$$Y_j \equiv C^{\{m-q-1+j\},(j)}_0, \quad j = \overline{0, p}, \quad q < m,$$

где m, q и p – фиксированные параметры, фигурирующие в ИДУ (1.1) при $l = 1$.

Лемма 2.4. *Для любой функции $\varphi \in Y_j$, $j = \overline{0, p}$ имеет место равенство*

$$\left(\varphi^{(j)}\right)^{\{k\}}(0) = \varphi^{\{k+j\}}(0), \quad j = \overline{0, p}, \quad k = \overline{0, m-q-1}. \tag{2.11}$$

Доказательство. При $j = 0$ свойство очевидно. В силу структуры (2.3) "точечно-гладкой" функции имеем

$$\varphi(t) = t^{m-q-1+j} \cdot \Phi_j(t) + \sum_{k=0}^{m-q-2+j} a_k t^k, \tag{2.12}$$

где

$$\Phi_j \equiv T^{m-q-1+j}\varphi \in C^{(j)}, \quad \varphi^{\{k\}}(0) = a_k k!, \quad k = \overline{0, m-q-2+j}, \quad j = \overline{1,p}.$$

Дифференцируя (2.12) последовательно j раз с применением обычной формулы Лейбница, легко получим следующее представление:

$$\varphi^{(j)}(t) = t^{m-q-1}\left(T^{m-q-1}\varphi^{(j)}\right)(t) + \sum_{k=0}^{m-q-2} \tau_{k,j} a_{k+j} t^k = t^{m-q-1}\left[\tau_{m-q-1,j}\Phi_j(t) + g_j(t)\right] + \sum_{k=0}^{m-q-2} \tau_{k,j} a_{k+j} t^k, \tag{2.13}$$

в котором g_j определенным образом выражается через Φ_j, причем $g_j(t) = o(1)$ при $t \to 0$, а $\tau_{k,j} \equiv \prod_{l=1}^{j}(k+l)$, $j = \overline{1,p}$, $\tau_{k,0} \equiv 1$.

Согласно (2.13), (2.3), (2.12) и определению тейлоровской производной (см., например, [5, с. 12]) находим производные соответствующих порядков:

$$\left(\varphi^{(j)}\right)^{\{k\}}(0) = \tau_{k,j} a_{k+j} k! = a_{k+j}(k+j)!, k = \overline{0, m-q-2}; \tag{2.14}$$

$$\begin{gathered}\left(\varphi^{(j)}\right)^{\{m-q-1\}}(0) \equiv (m-q-1)! \lim_{t\to 0}\left(T^{m-q-1}\varphi^{(j)}\right)(t) = (m-q-1)!\tau_{m-q-1,j}\lim_{t\to 0}\Phi_j(t) = \\ = (m-q-1+j)! \lim_{t\to 0}\Phi_j(t) \equiv \varphi^{\{m-q-1+j\}}(0), \quad j = \overline{1,p}.\end{gathered} \tag{2.15}$$

С другой стороны, в силу (2.12) и (2.3) имеем

$$\varphi^{\{k+j\}}(0) = a_{k+j}(k+j)!, \quad k = \overline{0, m-q-2}, \quad j = \overline{1,p}. \tag{2.16}$$

Из (2.14)–(2.16) следует (2.11), что и требовалось.

Построим теперь основное в наших исследованиях пространство:

$$Y \equiv C^{(p)}\{m,q;0\} \equiv \left\{y \in C\{m,q;0\} : Ty \equiv T^m y \in C^{(p)}\right\}.$$

Зададим в нем норму

$$\|y\|_Y \equiv \|Ty\|_{(p)} + \sum_{i=q}^{m-1}\left|y^{\{i\}}(0)\right|, \quad y \in Y. \tag{2.17}$$

Лемма 2.5 (см. [14]). i. *Включение $\varphi \in Y$ равносильно представлению*

$$\varphi(t) = \left(UJ_{p-1}\Phi\right)(t) + t^m\sum_{j=0}^{p-1}\alpha_j(t+1)^j + \sum_{i=q}^{m-1}\beta_i t^i, \tag{2.18}$$

причем $D^pT\varphi = \Phi \in C$, $\left(T\varphi\right)^{(j)}(-1) = \alpha_j j!$, $j = \overline{0,p-1}$, $\varphi^{\{i\}}(0) = \beta_i i!$, $i = \overline{q,m-1}$; $Uf \equiv t^m f(t)$, оператор J_{p-1} определен согласно (2.5).

ii. *Пространство Y относительно нормы* (2.17) *полно и вложено в пространство $C\{m,q;0\}$.*

Критерий компактности множеств в пространстве Y устанавливает

Лемма 2.6 (см. [14]). *Множество $M \subset Y$ относительно компактно в Y тогда и только тогда, когда:* (i) *M ограничено;* (ii) *семейство $D^pT(M)$непрерывных на I функций равностепенно непрерывно.*

Далее над пространством Y основных функций построим семейство $X \equiv D_{-1}^{(\lambda),(q)}\{m;0\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-q-1}\gamma_i\delta^{\{i\}}(t), \tag{2.19}$$

где $t \in I$, $z \in C_{-1}^{(\lambda),(q)}$, $\lambda \equiv q+p$, $\gamma_i \in R$ – произвольные постоянные, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и ее "тейлоровские" производные, действующие на пространстве Y основных функций согласно следующему правилу:

$$\left(\delta^{\{i\}}, y\right) \equiv \int_{-1}^{1}\delta^{\{i\}}(t)\,y(t)dt \equiv (-1)^i y^{\{i\}}(0), \quad i = \overline{0, m-q-1}. \tag{2.20}$$

Очевидно, что векторное пространство X является банаховым относительно нормы

$$\|x\|_X \equiv \|z\|_{(\lambda)} + \sum_{i=0}^{m-q-1} \left|\gamma_i\right|. \tag{2.21}$$

В заключение этого раздела приведем нужное в дальнейшем свойство о “смешанных” производных дельта-функции.

Лемма 2.7. *На пространстве Y_j основных функций справедливо равенство*

$$\left(\delta^{\{i\}}(t)\right)^{(j)} = \delta^{\{i+j\}}(t), \quad j = \overline{0,p}, \quad i = \overline{0, m-q-1}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Заметим, что (см., например, [15, с. 419]) для любой функции $\varphi \in Y_j$ имеет место соотношение

$$\left(\left(\delta^{\{i\}}\right)^{(j)}, \varphi\right) \equiv (-1)^j \left(\delta^{\{i\}}, \varphi^{(j)}\right) \equiv (-1)^{j+i}\left(\varphi^{(j)}\right)^{\{i\}}(0), \quad j = \overline{0,p}, \quad i = \overline{0, m-q-1}. \tag{2.23}$$

С другой стороны, в силу (2.20) имеем

$$\left(\delta^{\{i+j\}}, \varphi\right) \equiv (-1)^{i+j}\varphi^{\{i+j\}}(0), \quad j = \overline{0,p}, \quad i = \overline{0, m-q-1}. \tag{2.24}$$

Следовательно, из (2.23), (2.24) и (2.11) следует требуемое равенство (2.22).

3. ФРЕДГОЛЬМОВОСТЬ ИССЛЕДУЕМЫХ ИДУ

Пусть задано ИДУ (1.1). Ради сокращения громоздких выкладок и упрощения формулировок, не ограничивая при этом общности идей, методов и результатов, всюду в дальнейшем будем считать $l = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим ИДУ вида

$$(Ax)(t) \equiv (Vx)(t) + (Kx)(t) = y(t), \quad t \in I, \tag{3.1}$$

$$V \equiv UD^q, D^q f \equiv f^{(q)}(t), Ug \equiv t^m g(t), Kx \equiv \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} K_j(t,s)x^{(j)}(s)ds,$$

где $q, p \in Z^+$, $m \in N$, $q < m$; $y \in Y \equiv C^{(p)}\{m, q; 0\}$, K_j — известные ядра, обладающие следующими свойствами:

$$\begin{gathered} K_j(t,\cdot) \in Y, \quad K_j(\cdot, s) \in Y_j, \quad \varphi_{jk}(s) \equiv \left(K_j\right)_t^{\{k\}}(0,s) \in C, \\ \psi_{ji}(t) \equiv \left(K_j\right)_s^{\{i+j\}}(t,0) \in Y, \quad j = \overline{0,p}, \quad k = \overline{q, m-1}, \quad i = \overline{0, m-q-1}; \end{gathered} \tag{3.2}$$

а $x \in X$ — искомый элемент.

Теорема 1. *В условиях* (3.2) *оператор $A : X \to Y$ фредгольмов.*

Доказательство. Предварительно изучим уравнение

$$Vx \equiv t^m x^{(q)}(t) = y(t), \quad y \in Y. \tag{3.3}$$

Покажем, что оператор $V : X \to Y$ ограничен. В силу (2.19) и (3.3) имеем

$$(D^q x)(t) = (D^q z)(t) + \sum_{i=0}^{m-q-1} \gamma_i \delta^{\{i+q\}}(t) = (D^q z)(t) + \sum_{k=q}^{m-1} \gamma_{k-q}\delta^{\{k\}}(t). \tag{3.4}$$

Тогда, учитывая свойство

$$\left(t^m \cdot \delta^{\{k\}}(t), \varphi(t)\right) \equiv \left(\delta^{\{k\}}, t^m\varphi(t)\right) \equiv (-1)^k\left(t^m \cdot \varphi\right)^{\{k\}}(0) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad \varphi \in C, \tag{3.5}$$

получаем $Vx \equiv UD^q x = UD^q z$, откуда на основании соотношений (2.17), (2.18), (2.21) и (2.10) следует, что

$$\|Vx\|_Y = \|UD^q z\|_Y \equiv \|TUD^q z\|_{(p)} = \|D^q z\|_{(p)} = \|z\|_{(\lambda)} \leqslant \|x\|_X,$$

т.е. $\|V\| \equiv \|V\|_{X \to Y} \leqslant 1$.

Теперь в пространстве $X \equiv D_{-1}^{(\lambda),(q)}\{m;0\}$ найдем решение уравнения (3.3) и индекс оператора V. Из равенств (3.4) и (3.5) вытекает, что в пространстве X общее решение однородного уравнения $Vx = 0$ имеет вид

$$\tilde{x}(t) \equiv \sum_{i=0}^{m-q-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \quad \gamma_i \in R;$$

следовательно, $\alpha(V) \equiv \dim\ker V = m - q$. С другой стороны, неоднородное уравнение (3.3) разрешимо в X тогда и только тогда, когда выполнены дополнительные условия $\left(\delta^{\{i\}}(t), y\right) = 0$, $i = \overline{q, m-1}$. При их выполнении общее решение уравнения (3.3) представляется формулой

$$x^*(t) = \left(J_{q-1}Ty\right)(t) + \sum_{i=0}^{m-q-1} \gamma_i \delta^{\{i\}}(t), \quad \gamma_i \in R.$$

Это означает, что $\beta(V) \equiv \dim co\ker V = m - q$. Таким образом, $indV \equiv \alpha(V) - \beta(V) = 0$, т.е. оператор $V : X \to Y$ фредгольмов.

Далее обсудим свойства интегродифференциального оператора K. В силу соотношений (3.1), (3.2), (2.19), (2.22) и (2.20) имеем

$$(Kx)(t) = (Kz)(t) + \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{m-q-1} (-1)^{i+j} \gamma_i \psi_{ji}(t). \tag{3.6}$$

Отсюда с учетом условий (3.2) видим, что $Kx \in Y$, $x \in X$.

Прежде чем перейти к оценке образа (3.6) оператора K примем следующие обозначения:

$$d_2 \equiv \max_{j=\overline{0,p}} \left\|D_t^p T_t K_j\right\|_C, \quad d_3 \equiv \max_{j=\overline{0,p}} \sum_{l=0}^{p-1} \left\|\left(T_t K_j\right)_t^{(l)}(-1,s)\right\|_C, \quad d_4 \equiv \max_{j=\overline{0,p}} \sum_{k=q}^{m-1} \left\|\varphi_{jk}\right\|_C, \quad d_5 \equiv \max_{i=\overline{0,m-q-1}} \sum_{j=0}^{p} \left\|\psi_{ji}\right\|_Y.$$

Тогда, используя определение (2.17), оценку (2.9) и определение (2.21), последовательно находим, что

$$\|Kx\|_Y \leqslant \|Kz\|_Y + \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{m-q-1} \left|\gamma_i\right| \left\|\psi_{ji}\right\|_Y \equiv \left\| \sum_j \int_{-1}^{1} \left(D_t^p T_t K_j\right)(t,s) z^{(j)}(s)ds \right\|_C + \sum_{l=0}^{p-1} \left| \sum_j \int_{-1}^{1} \left(T_t K_j\right)_t^{(l)}(-1,s) z^{(j)}(s)ds \right| +$$

$$+ \sum_{k=q}^{m-1} \left| \sum_j \int_{-1}^{1} \varphi_{jk}(s) z^{(j)}(s)ds \right| + \sum_j \sum_i \left|\gamma_i\right| \left\|\psi_{ji}\right\|_Y \leqslant 2d_2 d_1 \|z\|_{(\lambda)} + 2d_3 d_1 \|z\|_{(\lambda)} + 2d_4 d_1 \|z\|_{(\lambda)} + d_5 \sum_i \left|\gamma_i\right| \leqslant d_6 \|x\|_X,$$

$$d_6 \equiv 2d_1\left(d_2 + d_3 + d_4\right) + d_5.$$

Следовательно, оператор K действует из X в Y ограниченно, причем $\|K\| \equiv \|K\|_{X\to Y} \leqslant d_6$.

Далее, пусть $L \equiv \{x\} \subset X$ – произвольное ограниченное множество. Рассуждая аналогично случаю интегральных уравнений третьего рода (см. [5, с. 52, 53]), с использованием леммы 2.6 несложно показать, что множество $M \equiv K(L)$ относительно компактно в Y. Другими словами, оператор $K : X \to Y$ вполне непрерывен. Тогда утверждение теоремы 1 непосредственно следует из того, что возмущение нётерова оператора вполне непрерывным оператором сохраняет нётеровость и не изменяет его индекса.

4. НЕПРЕРЫВНАЯ ОБРАТИМОСТЬ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рассмотрим ИДУ (3.1), в котором ядра K_j подчинены условиям (3.2), $y \in Y$, а $x \in X$ – искомая обобщенная функция вида (2.19). С учетом соотношений (2.19), (3.4)–(3.6) преобразуем уравнение (3.1) к виду

$$(Az)(t) = y(t) - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i f_i(t), \tag{4.1}$$

где $f_i(t) \equiv \sum\limits_{j=0}^{p} (-1)^j \psi_{ji}(t)$, $c_i \equiv (-1)^i \gamma_i$, $i = \overline{0, m-q-1}$. Наша задача заключается в нахождении функции $z \in C_{-1}^{(\lambda),(q)}$ и произвольных постоянных c_i.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены следующие требования:*

$$K_j(t,\cdot) \in Y, \quad \varphi_{jk}(s) \equiv \left(K_j\right)_t^{\{k\}}(0,s) \in C, \quad y \in Y, \quad j = \overline{0,p}, \quad k = \overline{q, m-1}.$$

Тогда ИДУ (3.1) $\left(A : C_{-1}^{(\lambda),(q)} \to Y\right)$ *эквивалентно в пространстве* $C_{-1}^{(\lambda),(q)}$ *ИДУ*

$$Bx \equiv \left(D^q x\right)(t) + \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} \left(T_t K_j\right)(t,s)\, x^{(j)}(s)ds = (Ty)(t)$$

и соотношениям

$$\sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} \varphi_{jk}(s) x^{(j)}(s)ds = y^{\{k\}}(0), \quad k = \overline{q, m-1}.$$

Доказательство. В силу выражения (2.3) очевидно, что для любой функции $g \in Y$ имеет место эквивалентность:

$$g = 0 \Leftrightarrow Tg = 0, \quad g^{\{k\}}(0) = 0, \quad k = \overline{q, m-1}. \tag{4.2}$$

Тогда, взяв в (4.2) $g \equiv Ax - y \in Y$, $x \in C_{-1}^{(\lambda),(q)}$, $y \in Y$, убеждаемся в справедливости утверждения леммы.

Из этой леммы следует, что уравнение (4.1) равносильно ИДУ

$$(Bz)(t) = (Ty)(t) - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i (T f_i)(t) \tag{4.3}$$

в пространстве $C_{-1}^{(\lambda),(q)}$ и соотношениям

$$y^{\{k\}}(0) - \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} \varphi_{jk}(s) z^{(j)}(s)ds - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i f_i^{\{k\}}(0) = 0, \quad k = \overline{q, m-1}. \tag{4.4}$$

Предварительно подробно изучим ИДУ вида (4.3) с оператором B:

$$(Bz)(t) \equiv z^{(q)}(t) + \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} \mu_j(t,s) z^{(j)}(s)ds = f(t), \tag{4.5}$$

в котором $\mu_j \equiv T_t K_j$, $j = \overline{0,p}$, $f \in C^{(p)}$. Будем использовать подстановку $z^{(q)} \equiv u(t) \in C^{(p)}$. В силу (2.4), (2.5) и определения класса $C_{-1}^{(q)}$ имеем

$$z = J_{q-1} u, \quad z^{(j)} = J_{q-1-j} u, \quad j = \overline{0, q-1}. \tag{4.6}$$

Займемся теперь исследованием оператора

$$Mz \equiv \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} \mu_j(t,s) z^{(j)}(s)ds.$$

Рассмотрим сначала случай $p < q$. Изменяя порядок интегрирования в двойном интеграле, находим, что

$$(Mz)(t) = \sum_j ((q-1-j)!)^{-1} \int_{-1}^{1} \mu_j(t,s) \left(\int_{-1}^{s} \left(s - \rho\right)^{q-1-j} u(\rho)d\rho \right) ds =$$

$$= \sum_j ((q-1-j)!)^{-1} \int_{-1}^{1} u(\rho) \left(\int_{\rho}^{1} \mu_j(t,s)(s-\rho)^{q-1-j} ds \right) d\rho.$$

Следовательно, в этом случае ИДУ (4.5) эквивалентно следующему уравнению Фредгольма второго рода в пространстве $C^{(p)}$:

$$Gu \equiv u(t) + \int_{-1}^{1} G_p(t,\rho) u(\rho)d\rho = f(t), \tag{4.7}$$

где

$$G_p(t,\rho) \equiv \sum_{j=0}^{p} ((q-1-j)!)^{-1} \int_{\rho}^{1} \mu_j(t,s)(s-\rho)^{q-1-j} ds. \tag{4.8}$$

При $p \geqslant q$ с учетом (4.8) имеем

$$\begin{gathered}(Mz)(t) = \int_{-1}^{1} G_{q-1}(t,\rho) u\left(\rho\right) d\rho + \sum_{j=q}^{p} \int_{-1}^{1} \mu_j(t,s) u^{(j-q)}(s) ds = \\ = \int_{-1}^{1} G_{q-1} \cdot u\left(\rho\right) d\rho + \int_{-1}^{1} \mu_q(t,\rho) u(\rho) d\rho + \sum_{k=1}^{p-q} \int_{-1}^{1} \mu_{q+k}(t,\rho) u^{(k)}(\rho) d\rho.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Далее введем в рассмотрение ядра:

$$g_k(t,\rho) \equiv \begin{cases} G_{q-1}(t,\rho) + \mu_q(t,\rho) & \text{при } k = 0; \\ \mu_{q+k}(t,\rho), & \text{если } k = \overline{1, p-q}. \end{cases}$$

Тогда с учетом (4.9) ИДУ (4.5) принимает вид

$$Lu \equiv u(t) + \sum_{k=0}^{p-q} \int_{-1}^{1} g_k(t,\rho) u^{(k)}(\rho) d\rho = f(t), \tag{4.10}$$

причем $g_k(t,\cdot) \in C^{(p)}$.

Итак, при $p < q$ подстановка $z^{(q)} \equiv u$ равносильным образом приводит ИДУ (4.3) к уравнению второго рода

$$(Gu)(t) = (Ty)(t) - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i (Tf_i)(t). \tag{4.11}$$

Пусть $\nu = -1$ не является собственным значением уравнения (4.11) (или ядра G_p) и R — разрешающий оператор этого уравнения. Тогда функция

$$u^*(t) \equiv (RTy)(t) - \sum_i c_i (RTf_i)(t)$$

является единственным гладким решением уравнения (4.11). Следовательно,

$$z^*(t) \equiv \left(J_{q-1}u^*\right)(t) = \left(J_{q-1}RTy\right)(t) - \sum_i c_i \left(J_{q-1}RTf_i\right)(t)$$

есть единственное гладкое решение ИДУ (4.3), которое будет решением и исходного уравнения (4.1), если в силу (4.4) постоянные $\{c_i\}$ удовлетворяют квадратной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{i=0}^{m-q-1} c_i (Qf_i)^{\{k\}}(0) = (Qy)^{\{k\}}(0), \quad k = \overline{q, m-1}, \tag{4.12}$$

где оператор $Q \equiv E - KJ_{q-1}RT$ отображает Y в Y, а E — единичный оператор в Y.

В случае $p \geqslant q$, с учетом (4.9) и (4.10), ИДУ (4.3) эквивалентно уравнению Фредгольма II рода

$$(Lu)(t) = (Ty)(t) - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i (Tf_i)(t) \tag{4.13}$$

с разрешающим оператором $\tilde{R} : C^{(p)} \to C^{(p)}$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

а) *ядра* K_j, $j = \overline{0, p}$, *удовлетворяют требованиям* (3.2)*, а функция* $y \in Y$;

б) *число* $\nu = -1$ *не является собственным значением уравнения* (4.11) *при* $p < q$ (*соответственно, уравнения* (4.13) *в случае* $p \geqslant q$)*;*

в) *определитель СЛАУ* (4.12) *отличен от нуля* (*при* $p \geqslant q$ *роль оператора* R *играет* $\tilde{R}$).

Тогда для любой правой части $y \in Y$ ИДУ (3.1) имеет единственное обобщенное решение $x^* \in X$, представляемое формулой

$$x^*(t) = \left(J_{q-1}STy\right)(t) - \sum_{i=0}^{m-q-1} c_i^* \left(J_{q-1}STf_i\right)(t) + \sum_{i=0}^{m-q-1} (-1)^i c_i^* \delta^{\{i\}}(t),$$

где $S = R$ при $p < q$, $S = \tilde{R}$ в случае $p \geqslant q$, а $\left\{c_i^*\right\}$ – единственное решение СЛАУ вида (4.12).

Следствие 2. В условиях теоремы 2 интегродифференциальный оператор $A : X \to Y$, определенный равенством (3.1), непрерывно обратим.

5. ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ (ОМК)

Пусть задано ИДУ (3.1), в котором ядра K_j, $j = \overline{0, p}$, обладают свойствами (3.2), $y \in Y$, а $x \in X$ – искомый элемент. Его приближенное решение будем искать в виде

$$x_n \equiv x_n\left(t; \left\{c_j\right\}\right) \equiv z_n(t) + \sum_{i=0}^{m-q-1} c_{i+n+\lambda}\delta^{\{i\}}(t), \tag{5.1}$$

$$z_n(t) \equiv \sum_{i=q}^{n+\lambda-1} c_i t^i, \quad \lambda \equiv q + p, n = 2, 3, \ldots. \tag{5.2}$$

Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)}$, $j = \overline{q, n+m+p-1}$, найдем, согласно ОМК, из квадратной СЛАУ $(n+m+p-q)$-го порядка:

$$\left(D^p T\rho_n\right)(\nu_k) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad \left(T\rho_n\right)^{(j)}(-1) = 0, \quad j = \overline{0, p-1}, \quad \rho_n^{\{i\}}(0) = 0, \quad i = \overline{q, m-1}, \tag{5.3}$$

где $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближенного решения, а $\{\nu_k\} \subset I$ – система узлов Чебышёва I (или II) рода.

Для вычислительного алгоритма (3.1), (5.1)–(5.3) справедлива

Теорема 3. *Пусть однородное ИДУ* $Ax = 0$ *имеет в* X *лишь нулевое решение* (*например, в условиях теоремы* 2)*, а функции* $h_j \equiv D_t^p T_t K_j$ (*по* t), $g_{ji} \equiv D^p T\psi_{ji}$, $j = \overline{0, p}$, $i = \overline{0, m-q-1}$, *и* $D^p Ty$ *принадлежат классу Дини–Липшица. Тогда при всех* $n \in N$, $n \geqslant n_0$, *СЛАУ* (5.3) *обладает единственным решением* $\left\{c_j^*\right\}$ *и последовательность приближенных решений* $x_n^* \equiv x_n\left(t; \left\{c_j^*\right\}\right)$ *сходится к точному решению* $x^* = A^{-1}y$ *уравнения* (3.1) *по норме пространства* X *со скоростью*

$$\Delta x_n^* = \left\|x_n^* - x^*\right\| = O\left\{\left[\sum_{j=0}^{p}\left(E_{n-1}^t(h_j) + \sum_{i=0}^{m-q-1} E_{n-1}(g_{ji})\right) + E_{n-1}\left(D^p Ty\right)\right]\ln n\right\}, \tag{5.4}$$

где $E_l(f)$ – *наилучшее равномерное приближение функции* $f \in C$ *алгебраическими полиномами степени не выше* l, *а через* $E_l^t(\cdot)$ *обозначен функционал* $E_l(\cdot)$, *примененный по переменной* t.

Доказательство. Очевидно, что ИДУ (3.1) представляется в виде линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Vx + Kx = y, \quad x \in X \equiv D_{-1}^{(\lambda),(q)}\{m; 0\}, \quad y \in Y \equiv C^{(p)}\{m, q; 0\}, \tag{5.5}$$

в котором оператор $A : X \to Y$ непрерывно обратим. Систему (5.1)–(5.3) запишем также в операторной форме. С этой целью построим соответствующие конечномерные подпространства. Именно, через $X_n \subset X$ обозначим $(n+m+p-q)$ – мерное подпространство элементов вида (5.1), а за $Y_n \subset Y$ примем класс $\Pi_q^{n+m+p-1} \equiv \operatorname{span}\left\{t^i\right\}_q^{n+m+p-1}$. Далее введем линейный оператор $\Gamma_n \equiv \Gamma_{n+m+p-q} : Y \to Y_n$ согласно правилу

$$\Gamma_n y \equiv \Gamma_{n+m+p-q}(y; t) \equiv (UJ_{p-1}L_n D^p Ty)(t) + \sum_{j=0}^{p-1} (Ty)^{(j)}(-1)\frac{t^m(t+1)^j}{j!} + \sum_{i=q}^{m-1} y^{\{i\}}(0)\frac{t^i}{i!}, \tag{5.6}$$

где $L_n : C \to \Pi_0^{n-1} \equiv \Pi_{n-1} \equiv \operatorname{span}\left\{t^i\right\}_0^{n-1}$ представляет собой интерполяционный оператор Лагранжа по системе узлов $\{\nu_k\}_1^n$. Тогда система (5.1)–(5.3) эквивалентна следующему линейному уравнению:

$$A_n x_n \equiv Vx_n + \Gamma_n Kx_n = \Gamma_n y, \quad x_n \in X_n, \Gamma_n y \in Y_n. \tag{5.7}$$

В этом нетрудно убедиться, проведя соответствующие рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 3 [8].

Таким образом, для доказательства теоремы 3 достаточно установить существование, единственность и сходимость решений уравнений (5.7). В этих целях нам понадобится аппроксимативное свойство оператора Γ_n.

Лемма 5.1. *Для любой функции $y \in Y$ справедлива оценка*

$$\|y - \Gamma_n y\|_Y \leqslant d_7 E_{n-1}\left(D^p T y\right) \ln n, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{5.8}$$

(*здесь и далее d_i $\left(i = \overline{7,9}\right)$ — некоторые константы, значения которых не зависят от числа n*).

Справедливость данной леммы легко следует из представления (2.18), определений (5.6), (2.17) и оценки (см., например, [12, с. 107])

$$\|f - L_n f\|_C \leqslant d_7 E_{n-1}(f) \ln n, \quad f \in C. \tag{5.9}$$

Обсудим теперь вопрос о "близости" операторов A и A_n на подпространстве X_n. Используя уравнения (3.1), (5.7) и оценку (5.8), для произвольного элемента $x_n \in X_n$ находим, что

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Kx_n - \Gamma_n K x_n\|_Y \leqslant d_7 E_{n-1}\left(D^p T K x_n\right) \ln n. \tag{5.10}$$

В силу (3.6) и (5.1) имеем

$$(Kx_n)(t) = (Kz_n)(t) + \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{m-q-1} (-1)^{i+j} c_{i+n+\lambda} \psi_{ji}(t).$$

Следовательно,

$$D^p T K x_n = \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} h_j(t,s) z_n^{(j)}(s) ds + \sum_j \sum_i (-1)^{i+j} c_{i+n+\lambda} g_{ji}(t). \tag{5.11}$$

В целях полиномиального приближения функции $D^p T K x_n \in C$ построим следующий элемент:

$$\left(P_{n-1} x_n\right)(t) \equiv \sum_j \int_{-1}^{1} h_{n-1}^j(t,s) z_n^{(j)}(s) ds + \sum_j \sum_i (-1)^{i+j} c_{i+n+\lambda} g_{n-1}^{ji}(t), \tag{5.12}$$

где h_{n-1}^j и g_{n-1}^{ji} — полиномы степени $n-1$ наилучшего равномерного приближения для h_j (по t) и g_{ji} соответственно. Согласно структуре (5.12) ясно, что $P_{n-1} x_n \in \Pi_{n-1}$.

На основании выражений (5.11) и (5.12), оценки (2.9) и определения (2.21) последовательно выводим промежуточную оценку:

$$\begin{gathered}
E_{n-1}\left(D^p T K x_n\right) \leqslant \|D^p T K x_n - P_{n-1} x_n\|_C \equiv \\
\equiv \max_{t \in I} \left| \sum_j \int_{-1}^{1} \left(h_j - h_{n-1}^j\right)(t,s) z_n^{(j)}(s) ds + \sum_j \sum_i (-1)^{i+j} c_{i+n+\lambda} \left(g_{ji} - g_{n-1}^{ji}\right)(t) \right| \leqslant \\
\leqslant 2\|z_n\|_{C^{(\lambda)}} \sum_j E_{n-1}^t(h_j) + \sum_j \sum_i |c_{i+n+\lambda}| E_{n-1}\left(g_{ji}\right) \leqslant 2d_1 \|z_n\|_{(\lambda)} \sum_j E_{n-1}^t(h_j) + \|x_n\|_X \sum_j \sum_i E_{n-1}\left(g_{ji}\right) \leqslant \\
\leqslant 2d_1 \|x_n\|_X \sum_j E_{n-1}^t(h_j) + 2d_1 \|x_n\|_X \sum_j \sum_i E_{n-1}\left(g_{ji}\right) = d_8 \left\{ \sum_j \left[E_{n-1}^t(h_j) + \sum_i E_{n-1}(g_{ji}) \right] \right\} \|x_n\|, \quad d_8 \equiv 2d_1.
\end{gathered} \tag{5.13}$$

Из неравенств (5.10) и (5.13) следует искомая оценка "близости" операторов A и A_n:

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \leqslant d_9 \left\{ \sum_j \left[E_{n-1}^t(h_j) + \sum_i E_{n-1}(g_{ji}) \right] \right\} \ln n. \tag{5.14}$$

Тогда на основании оценок (5.14) и (5.8) из теоремы 7 (см. [12; гл. 1, §4]) получаем утверждение теоремы 3 с оценкой погрешности (5.4).

Следствие 3. Если функции h_j (по t), g_{ji} и $D^p T y$ принадлежат классу $H_\alpha^r(S)$, то в условиях теоремы 3 верна оценка

$$\Delta x_n^* = O\left(n^{-r-\alpha} \ln n\right), \quad r + 1 \in N, \alpha \in (0, 1],$$

где

$$H_\alpha^r(S) \equiv \left\{ f \in C^{(r)}(I) : \omega\left(f^{(r)}; \Delta\right) \leqslant S \Delta^\alpha, \quad S \equiv \text{const} > 0 \right\},$$

а $\omega(f; \Delta)$ — модуль непрерывности функции $f \in C$ с шагом Δ, $0 < \Delta \leqslant 2$.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Замечание 1. Согласно определению нормы в пространстве $X \equiv D_{-1}^{(\lambda),(q)}\{m;0\}$ нетрудно заметить, что из сходимости последовательности (x_n^*) приближенных решений к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в метрике X следует обычная сходимость в пространстве обобщенных функций, т.е. слабая сходимость.

Замечание 2. При численном решении операторных уравнений $Ax = y$ возникает естественный вопрос о скорости сходимости невязки $\rho_n^*(t) \equiv (Ax_n^* - y)(t)$ исследуемого метода. Один из результатов в этом направлении легко вытекает из основной теоремы 3, а именно: если исходные данные h_j, g_{ji} и D^pTy уравнения (3.1) принадлежат классу $H_\alpha^r \quad (0 < \alpha \leqslant 1, \quad r = 0, 1, 2, \ldots)$, то в условиях теоремы 3 справедлива оценка $\left\|\rho_n^*\right\|_Y = O(n^{-r-\alpha}\ln n)$.

Замечание 3. При $q = 0$ исследуемое ИДУ (3.1) является ИДУ третьего рода с оператором $A : D^{(p)}\{m;0\} \to \to C_0^{\{m\},(p)}$, а прямой проекционный метод (5.1)–(5.3) – специальным для ИДУ третьего рода вариантом ОМК. Следовательно, теорема 3 содержит в себе известные результаты [16] по обоснованию специального варианта ОМК при приближенном решении уравнений третьего рода в классе обобщенных функций.

Замечание 4. Так как в условиях теоремы 3 аппроксимирующие операторы A_n обладают свойством вида $\left\|A_n^{-1}\right\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \to X_n, \quad n \geqslant n_1$, то, очевидно (см. [12; гл. 1, §5]), что предложенный в настоящей работе прямой метод для ИДУ (3.1) устойчив относительно малых возмущений исходных данных. Это позволяет найти численное решение исследуемых уравнений на ЭВМ с любой наперед заданной степенью точности. Более того, если ИДУ (3.1) хорошо обусловлено, то хорошо обусловленной является также СЛАУ (5.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bart G.R., Warnock R.L.* Linear integral equations of the third-kind // SIAM J. Math. Anal. 1973. V. 4. № 4. P. 609–622.
2. *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
3. *Бжихатлов Х.Г.* Об одной краевой задаче со смещением // Дифференц. ур-ния. 1973. Т. 9. № 1. С. 162–165.
4. *Расламбеков С.Н.* Сингулярное интегральное уравнение первого рода в исключительном случае в классах обобщенных функций // Изв. вузов. Математика. 1983. № 10. С. 51–56.
5. *Габбасов Н.С.* Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2006. 176 с.
6. *Замалиев Р.Р.* О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре: Дисс. … канд. физ.-матем. наук. Казань: КФУ, 2012. 114 с.
7. *Абдурахман.* Интегральное уравнение третьего рода с особым дифференциальным оператором в главной части: Дисс. … канд. физ.-матем. наук. Ростов-на-Дону, 2003. 142 с.
8. *Габбасов Н.С.* Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 7. С. 889–899.
9. *Габбасов Н.С.* Коллокационные методы для одного класса особых интегродифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2022. Т. 58. № 9. С. 1234–1241.
10. *Габбасов Н.С.* К приближенному решению одного класса особых интегро-дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 2. С. 263–272.
11. *Габбасов Н.С.* Специальный вариант метода коллокации для одного класса интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2023. Т. 59. № 4. С. 512–519.
12. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. 232 с.
13. *Пресдорф З.* Сингулярное интегральное уравнение с символом, обращающимся в нуль в конечном числе точек // Матем. исследования. 1972. Т. 7. № 1. С. 116–132.
14. *Габбасов Н.С.* Теория разрешимости одного класса интегро-дифференциальных уравнений в пространстве обобщенных функций // Дифференц. ур-ния. 1999. Т. 35. № 9. С. 1216–1226.
15. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1969. 1071 с.

16. *Габбасов Н.С.* Прямые методы решения интегро-дифференциальных уравнений в особом случае // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 7. С. 904–916.

SOLVABILITY THEORY OF SPECIAL INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE CLASS OF GENERALIZED FUNCTIONS

N. S. Gabbasov[a,*]

[a] *Naberezhnye Chelny Institute of Kazan University, Naberezhnye Chelny, 423810 Russia*
**e-mail: gabbasovnazim@rambler.ru*

Received: 22 July 2024
Revised: 22 July 2024
Accepted: 23 August 2024

Abstract. A linear integrodifferential equation with a special differential operator in the principal part is studied. For its approximate solution in the space of generalized functions, a special generalized version of the collocation method is proposed and justified.

Keywords: integrodifferential equation, approximate solution, direct method, theoretical justification