ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2025, том 65, № 1, с. 23–35

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956.4

ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ БОКОВОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2025 г. Е. А. Бадерко[1,*], К. Д. Федоров[1,]**

[1] *119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия*

**e-mail: baderko.ea@yandex.ru*

***e-mail: konstantin-dubna@mail.ru*

Поступила в редакцию 09.09.2024 г.

Переработанный вариант 09.09.2024 г.

Принята к публикации 26.09.2024 г.

Рассмотрена первая начально-краевая задача для параболической системы второго порядка в полуограниченной области на плоскости. Коэффициенты системы удовлетворяют двойному условию Дини. Функция, задающая боковую границу области, непрерывно дифференцируема на отрезке. При непрерывно дифференцируемой правой части граничного условия первого рода и начальной функции, которая является непрерывной и ограниченной вместе со своими первой и второй производными, установлено, что решение поставленной задачи непрерывно и ограниченно в замыкании области вместе со своими старшими производными. Доказаны соответствующие оценки. Дано интегральное представление решения. Если боковая граница области имеет “углы”, а граничная функция – кусочно-непрерывную производную, то в этом случае доказано, что, несмотря на негладкость боковой границы и граничной функции, старшие производные решения непрерывны всюду в замыкании области, кроме угловых точек, и при этом ограничены. Библ. 22.

Ключевые слова: параболические системы, первая начально-краевая задача, негладкая боковая граница, граничные интегральные уравнения, условие Дини.

DOI: 10.31857/S0044466925010038, **EDN**: CDGSQC

ВВЕДЕНИЕ

Предметом исследования настоящей работы является первая начально-краевая задача для параболической системы второго порядка (одномерной по пространственной переменной) с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в полуограниченной области Ω на плоскости.

Если коэффициенты параболической системы удовлетворяют условию Гёльдера, функция g, задающая боковую границу области, достаточно гладкая, а именно, из класса $H^{1+\alpha/2}[0,T]$, где $0 < \alpha < 1$, и если правая часть граничного условия первого рода $\psi \in H^{1+\alpha/2}[0,T]$, начальная функция $h \in H^{2+\alpha}(\mathbb{R})$, правая часть системы $f \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$, то согласно [1] (см. также [2, с. 706]) существует единственное решение первой начально-краевой задачи в классе $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$.

Естественно возникает вопрос: если в цитируемом выше результате В.А.Солонникова (см. [1]) положить $\alpha = 0$ в условиях для боковой границы, правой части граничного условия и начальной функции, то можно ли утверждать, что решение будет принадлежать пространству $C^{2,1}(\overline{\Omega})$.

В настоящей статье дается положительный ответ на этот вопрос для параболической системы второго порядка с коэффициентами, которые удовлетворяют двойному условию Дини, в полуограниченной области на плоскости. А именно, для такой системы доказывается, что если $g \in C^1[0,T]$, $\psi \in C^1[0,T]$, $h \in C^2(\mathbb{R})$ и $f \in H^{\omega}(\overline{D})$, где $\omega \in \mathcal{D}$ (см. ниже (1)), то решение первой начально-краевой задачи принадлежит классу $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$ (см. ниже (2)). Пространство $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$ совпадает с пространством $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$ при подстановке в определение последнего $\alpha = 0$, при этом их нормы эквивалентны. Доказываются соответствующие оценки. Дается интегральное представление решения.

“Пошаговое” применение полученного результата позволяет рассмотреть случай, когда боковая граница области Ω является негладкой, а именно, может иметь “углы”. В этом случае доказывается, что если функции g и ψ имеют кусочно-непрерывные производные на отрезке $[0,T]$, $h \in C^2(\mathbb{R})$, $f \in H^{\omega}(\overline{D})$, где $\omega \in \mathcal{D}$, то (несмотря на негладкость боковой границы и граничной функции) старшие производные решения непрерывны всюду в замыкании области, кроме угловых точек, и при этом ограничены. Доказываются соответствующие оценки.

Однозначная разрешимость в классе $C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$ рассматриваемых в данной работе задач следует из [3]–[6].

Достаточно слабые условия на коэффициенты системы, боковую границу области, правую часть граничного условия первого рода и начальную функцию не позволяют применить известные методы, которые используются для изучения характера гладкости решения первой начально-краевой задачи (см. [1], [2, с. 461]) в пространстве $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, где $0 < \alpha < 1$.

Ранее в [7], [8] была изучена первая начально-краевая задача с нулевым начальным условием для однородной параболической системы в области Ω, боковая граница которой допускает наличие “клюва” при $t = 0$. Если $\psi \in C^1[0,T]$, то при выполнении двух естественных условий согласования ($\psi(0) = \psi'(0) = 0$), несмотря на негладкость боковой границы области, было показано, что такая задача разрешима в классе $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$. Метод настоящей статьи существенно опирается на этот результат.

Заметим, что начально-краевые задачи для параболических систем моделируют процессы тепло- и массопереноса в многокомпонентных материалах (см., например, [9]–[11]), а рассматриваемый характер негладкости боковой границы области – возможное резкое изменение границ некоторых металлов (железо, марганец, титан, олово и др.) при фазовых превращениях (см., например, [12, с. 49–52]).

В настоящей работе также исследуется задача Коши в полосе D на плоскости. Хорошо известно, согласно [1] (см. также [2, с. 361]), что если коэффициенты параболической системы удовлетворяют условию Гёльдера и если начальная функция $h \in H^{2+\alpha}(\mathbb{R})$, правая часть системы $f \in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{D})$, где $0 < \alpha < 1$, то задача однозначно разрешима в пространстве $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{D})$.

Мы изучаем вопрос о характере гладкости решения, когда в цитируемом выше результате В.А.Солонникова (см. [1]) рассматривается $\alpha = 0$. А именно, для неоднородной параболической системы с коэффициентами, удовлетворяющими двойному словию Дини, доказывается, что если $h \in C^2(\mathbb{R})$ и $f \in H^{\omega}(\overline{D})$, где $\omega \in \mathcal{D}$, то решение задачи Коши принадлежит пространству $\widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$ (в [13] этот случай был рассмотрен для однородной системы). При этом решение имеет вид суммы параболических потенциалов Пуассона и объемных масс. Этот результат используется при рассмотрении указанной выше первой начально-краевой задачи, а также имеет самостоятельный интерес.

Работа состоит из пяти разделов. В разд. 1 вводятся функциональные пространства и формулируются основные теоремы. Раздел 2 посвящен рассмотрению задачи Коши и изучению вопроса о характере регулярности ее решения. В разд. 3 устанавливается разрешимость рассмотренной ранее в [8] первой начально-краевой задачи в области с негладкой при $t = 0$ боковой границей и исследуется характер гладкости полученного решения при отсутствии второго условия согласования. Раздел 4 посвящен доказательству теорем о характере регулярности и об интегральном представлении решения первой начально-краевой задачи в области с боковой границей класса $C^1[0,T]$. В разд. 5 доказывается теорема о характере регулярности решения поставленной задачи в области, боковая граница которой может иметь “углы”.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Пусть числа $T > 0$, $m \in \mathbb{N}$ фиксированы. Для любого отрезка $[\alpha,\beta] \subset [0,T]$ введем пространство $C[\alpha,\beta]$ непрерывных (вектор-) функций $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$, с нормой

$$\|\varphi; [\alpha,\beta]\|^{(0)} = \max_{t\in[\alpha,\beta]} |\varphi(t)|.$$

Через $C^1[\alpha,\beta]$ обозначим пространство (вектор-) функций $\psi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^m$, непрерывных вместе со своей первой производной, с нормой

$$\|\psi; [\alpha,\beta]\|^{(1)} = \max_{t\in[\alpha,\beta]} |\psi(t)| + \max_{t\in[\alpha,\beta]} |\psi'(t)|.$$

Через $C^2(\mathbb{R})$ обозначим пространство (вектор-) функций $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, непрерывных и ограниченных вместе со своей первой и второй производными, с нормой

$$\|h; \mathbb{R}\|^{(2)} = \sum_{k=0}^{2} \sup_{x\in\mathbb{R}} |h^{(k)}(x)|.$$

Модулем непрерывности, согласно [14, с. 150–151], называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию $\omega : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ такую, что $\omega(0) = 0$. Модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\widetilde{\omega}(z) = \int_0^z \omega(x)x^{-1}dx < \infty, \quad z > 0. \tag{1}$$

Через $\mathcal{D}$ обозначим множество, состоящее из модулей непрерывности, удовлетворяющих условию (1).

На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x и t рассматриваем полосу

$$D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, \quad 0 < t < T\}.$$

Через $H^{\omega}(\overline{D})$ обозначим пространство непрерывных (вектор-) функций $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^m$, для которых конечно выражение

$$\|f; D\|^{\omega} = \sup_{(x,t)\in D} |f(x,t)| + \sup_{\substack{(x,t),(x+\Delta x,t)\in D \\ |\Delta x|\neq 0}} \frac{|f(x+\Delta x,t) - f(x,t)|}{\omega(|\Delta x|)},$$

где $\omega \not\equiv 0$ – модуль непрерывности.

Пусть $\Omega \subset D$. Через $C(\overline{\Omega})$ обозначим пространство (вектор-) функций u, непрерывных в $\overline{\Omega}$. Положим $C^{2,1}(\overline{\Omega})$ – пространство (вектор-) функций u, непрерывных и ограниченных вместе со своими первыми по x, t и второй производной по x в $\overline{\Omega}$.

Следуя [2, с. 16], через $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, обозначим пространство (вектор-) функций u, непрерывных вместе со своими первыми по x, t и второй производной по x в $\overline{\Omega}$, для которых конечно выражение

$$\|u\|_{\Omega}^{(2+\alpha)} = \sum_{2l+k\leqslant 2} \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|\frac{\partial^{l+k}u}{\partial t^l \partial x^k}(x,t)\right| +$$

$$+ \sum_{2l+k=2} \Bigg(\sup_{\substack{(x,t),(x+\Delta x,t)\in\Omega \\ |\Delta x|\neq 0}} \frac{1}{|\Delta x|^{\alpha}} \left|\Delta_x \frac{\partial^{l+k}u}{\partial t^l \partial x^k}(x,t)\right| + \sup_{\substack{(x,t),(x,t+\Delta t)\in\Omega \\ |\Delta t|\neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{\alpha/2}} \left|\Delta_t \frac{\partial^{l+k}u}{\partial t^l \partial x^k}(x,t)\right| \Bigg) +$$

$$+ \sup_{\substack{(x,t),(x,t+\Delta t)\in\Omega \\ |\Delta t|\neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{(1+\alpha)/2}} \left|\Delta_t \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|.$$

Здесь и далее

$$\Delta_x f(x,t) = f(x+\Delta x,t) - f(x,t), \quad \Delta_t f(x,t) = f(x,t+\Delta t) - f(x,t),$$

для любой функции f.

Для матрицы B (или вектора b) через $|B|$ (соответственно, $|b|$) обозначаем максимум из модулей элементов B (компонент b).

Под значениями (вектор-) функций и их производных на границе области понимаем их предельные значения "изнутри" области.

Через $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$ обозначим подпространство (вектор-) функций $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega})$, для которых конечно выражение

$$\|u;\Omega\|^{(2)} = \sum_{2l+k\leqslant 2} \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|\frac{\partial^{l+k}u}{\partial t^l \partial x^k}(x,t)\right| + \sup_{\substack{(x,t),(x,t+\Delta t)\in\Omega \\ |\Delta t|\neq 0}} \frac{1}{|\Delta t|^{1/2}} \left|\Delta_t \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|. \tag{2}$$

Кроме того, полагаем

$$\underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{\Omega}) = \{u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega}) : u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\}.$$

Заметим, что пространство $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$ совпадает с пространством $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$ при подстановке в определение последнего $\alpha = 0$, при этом нормы $\|\cdot;\Omega\|^{(2)}$ и $\|\cdot\|_{\Omega}^{2+0}$ эквивалентны.

Через $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ обозначим пространство (вектор-) функций u, непрерывных и ограниченных вместе со своей первой производной по x в $\overline{\Omega}$, с нормой

$$\|u;\Omega\|^{(1)} = \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|u(x,t)\right| \quad + \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right|.$$

Пусть ω_0 – модуль непрерывности, удовлетворяющий *двойному условию Дини*:

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int_0^z y^{-1} dy \int_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1} d\xi < \infty, \quad z > 0,$$

и такой, что для некоторого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ функция $\nu(z) = \omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z > 0$, почти убывает, а именно, существует $C > 0$ такое, что $\nu(z_1) \leqslant C\nu(z_2)$, $z_1 \geqslant z_2 > 0$.

В полосе D рассмотрим равномерно параболический по Петровскому (см. [15]) оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=0}^{2} A_k(x,t)\frac{\partial^k u}{\partial x^k},$$

где $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^\top$, $m \in \mathbb{N}$, и $A_k = \|a_{ijk}\|_{i,j=1}^m$, $k = 0,1,2$, суть $m \times m$ матрицы, элементы которых — вещественнозначные функции, определенные в $\overline{D}$ и удовлетворяющие следующим условиям:

(а) для собственных чисел μ_r матрицы A_2 выполнено $\operatorname{Re}\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}$, $r = 1, \dots, m$;

(б) функции a_{ijk} ограничены в $\overline{D}$ и справедливы оценки

$$\left|a_{ijk}(x+\Delta x, t+\Delta t) - a_{ijk}(x,t)\right| \leqslant \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2}),$$

где $(x,t), (x+\Delta x, t+\Delta t) \in \overline{D}$, $i, j = 1, \dots, m$, $k = 0,1,2$.

Пусть

$$Z(x,t;A_2(\xi,\tau)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x}\exp(-A_2(\xi,\tau)\sigma^2 t)d\sigma,$$

где $x, \xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$. Справедливы неравенства (см. [16, с. 298, 306]):

$$\left|\frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;A_2(\xi,\tau))\right| \leqslant C(l,k)t^{-(2l+k+1)/2}\exp(-cx^2/t), \tag{3}$$

$$\left|\frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;A_2(\xi+\Delta\xi,\tau)) - \frac{\partial^{l+k} Z}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;A_2(\xi,\tau))\right| \leqslant C(l,k)t^{-(2l+k+1)/2}\omega_0(|\Delta\xi|)\exp(-cx^2/t), \tag{4}$$

где $x, \xi, \xi+\Delta\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$, $k, l \geqslant 0$.

Положим $D^* = \{(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}\times\overline{D} : t > \tau\}$. Известно (см. [17], если $m = 1$, и [18], если $m \geqslant 2$), что при условиях (а), (б) существует фундаментальная матрица решений $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ системы $Lu = 0$, для нее выполнены оценки:

$$\left|\frac{\partial^{l+k}\Gamma}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C(t-\tau)^{-(2l+k+1)/2}\exp\Big(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\Big), \quad 0 \leqslant 2l+k \leqslant 2, \tag{5}$$

и, кроме того, для функции

$$W(x,t;\xi,\tau) \equiv \Gamma(x,t;\xi,\tau) - Z(x-\xi, t-\tau; A_2(\xi,\tau))$$

справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial^{l+k} W}{\partial t^l \partial x^k}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-(2l+k+1)/2}\exp\Big(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\Big), \quad 0 \leqslant 2l+k \leqslant 2, \tag{6}$$

$$\left|\Delta_t \frac{\partial W}{\partial x}(x,t;\xi,\tau)\right| \leqslant C\frac{|\Delta t|^{1/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\Big(-c\frac{(x-\xi)^2}{t-\tau}\Big), \tag{7}$$

$(x,t;\xi,\tau), (x,t+\Delta t;\xi,\tau) \in D^*$, $0 < \Delta t \leqslant t-\tau$.

Пусть Ω – полуограниченная область следующего вида:

$$\Omega = \{(x,t) \in D \,|\, x > g(t)\}, \quad g \in C[0,T],$$

с боковой границей

$$\Sigma = \{(x,t) \in \overline{D} \,|\, x = g(t)\}.$$

Рассмотрим задачу о нахождении (вектор-) функции $u \in C(\overline{\Omega})$, являющуюся классическим решением уравнения

$$Lu = f, \quad (x,t) \in \Omega, \tag{8}$$

удовлетворяющей начальному условию

$$u(x,0) = h(x), \quad x \geqslant g(0), \tag{9}$$

и граничному условию первого рода
$$u(g(t),t) = \psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{10}$$

Следуя [8], для $\varphi \in C[0,T]$ положим

$$S\varphi(x,t) = \int_0^t Y(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{11}$$

где

$$Y(x,t;g(\tau),\tau) = \int_0^{+\infty} \Gamma(x,t;g(\tau)-r,\tau)dr, \quad (x,t) \in \overline{D}, \quad 0 \leqslant \tau < t.$$

Кроме того, для любых непрерывных и ограниченных функций $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ и $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^m$ положим

$$Ph(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,0)h(\xi)d\xi, \quad h = (h_1,h_2,\ldots,h_m)^\top, \quad (x,t) \in \overline{D}, \tag{12}$$

$$Vf(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x,t;\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi, \quad f = (f_1,f_2,\ldots,f_m)^\top, \quad (x,t) \in \overline{D}. \tag{13}$$

Основными результатами работы являются следующие три теоремы.

Пусть $P_0 = (g(0),0)$. Через $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P_0)$ обозначим пространство (вектор-) функций u, непрерывных вместе со своей первой производной по x в $\overline{\Omega}$ и имеющих непрерывные в $\overline{\Omega} \setminus P_0$ вторую по x и первую по t производные, для которых конечно выражение (2).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (*а*), (*б*) *и* $g \in C^1[0,T]$. *Тогда для любых* (*вектор-*) *функций* $f \in H^\omega(\overline{D})$, *где* $\omega \in \mathcal{D}$, $h \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1[0,T]$ *с условием согласования*

$$\psi(0) = h(g(0)), \tag{14}$$

для решения $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$ *задачи* (8)–(10) *справедливы включение* $u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P_0)$ *и оценка*

$$\|u;\Omega\|^{(2)} \leqslant C\Big(\|\psi;[0,T]\|^{(1)} + \|h;\mathbb{R}\|^{(2)} + \|f;D\|^{\omega}\Big). \tag{15}$$

Если, кроме того, выполнено второе условие согласования

$$\psi'(0) = g'(0)h'(g(0)) + \sum_{k=0}^{2} A_k(g(0),0)h^{(k)}(g(0)) + f(g(0),0), \tag{16}$$

то для решения $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$ *задачи* (8)–(10) *справедливо включение* $u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega})$.

Здесь и далее через C обозначаем положительные постоянные, зависящие от T, δ, m, коэффициентов оператора L и боковой границы Σ, конкретный вид которых для нас неважен.

Замечание 1. Существование и единственность решения задачи (8)–(10) в классе $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ следует из [3]–[6].

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любого решения* $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$ *задачи* (8)–(10) *имеет место интегральное представление*

$$u(x,t) = S\varphi(x,t) + Ph(x,t) + Vf(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega},$$

где $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ – *единственное в пространстве* $C[0,T]$ *решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерра первого рода*

$$\int_0^t Y(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau = \psi(t) - Ph(g(t),t) - Vf(g(t),t), \quad t \in [0,T]. \tag{17}$$

Замечание 2. Если $m = 1$, то утверждения теорем 1, 2 справедливы для любого ограниченного решения задачи (8)–(10) (см. [19]).

Замечание 3. В случае $f \equiv 0$, $h \equiv 0$, при выполнении условий $\psi \in C^1[0,T]$, $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, существование решения задачи (8)–(10) в классе $u \in \underset{0}{\widehat{C}}{}^{2,1}(\overline{\Omega})$ доказано в [8]. При этом допускается негладкость боковой границы Σ при $t = 0$, а именно, предполагается выполненным условие

$$g \in C[0,T], \quad \left|g'(t)\right| \leqslant \frac{\omega(t^{1/2})}{t^{1/2}}, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{18}$$

где ω – некоторый модуль непрерывности.

Далее рассмотрим случай, когда боковая граница Σ области Ω является негладкой, а именно, имеет углы.

Пусть на интервале $(0,T)$ задано множество точек

$$\{t_1,\ldots,t_N \in (0,T) \quad | \quad 0 < t_1 < \cdots < t_N < T\}, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Через $PC^1[0,T]$ обозначим пространство непрерывных (вектор-) функций $\psi \in C[0,T]$, производные ψ' которых кусочно-непрерывны со множеством (19) точек разрыва первого рода, с нормой

$$\left\|\psi;[0,T]\right\|_N^{(1)} = \sum_{k=0}^{N} \|\psi;[t_k,t_{k+1}]\|^{(1)}, \text{ где } t_0 = 0, \quad t_{N+1} = T.$$

Пусть

$$P = \{P_0, P_1, \ldots, P_N\}, \text{ где } P_k = (g(t_k), t_k), \quad k = 1,\ldots,N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Через $\widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P)$ обозначим пространство (вектор-) функций u, непрерывных вместе со своей первой производной по x в $\overline{\Omega}$ и имеющих непрерывные в $\overline{\Omega} \setminus P$ вторую по x и первую по t производные, для которых конечно выражение (2).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (а), (б) *и* $g \in PC^1[0,T]$. *Тогда для любых* (*вектор-*) *функций* $f \in H^{\omega}(\overline{D})$, *где* $\omega \in \mathcal{D}$, $h \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in PC^1[0,T]$, *с условием согласования* (14), *для решения* $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$ *задачи* (8)–(10) *справедливы включение* $u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P)$ *и оценка*

$$\|u;\Omega\|^{(2)} \leqslant C\left(\left\|\psi;[0,T]\right\|_N^{(1)} + \|h;\mathbb{R}\|^{(2)} + \|f;D\|^{\omega}\right). \tag{20}$$

Замечание 4. Существование и единственность решения задачи (8)–(10) в классе $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ следует из [3]–[6].

2. О ЗАДАЧЕ КОШИ

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (а), (б). *Тогда для любой* (*вектор-*) *функции* $f \in H^{\omega}(\overline{D})$, *где* $\omega \in \mathcal{D}$, *объемный потенциал* Vf *принадлежит пространству* $\widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$ *и справедлива оценка*

$$\|Vf;D\|^{(2)} \leqslant C\|f;D\|^{\omega}.$$

Доказательство. Так как потенциал Vf удовлетворяет уравнению

$$Lu = f \text{ в } D,$$

то для доказательства включения $Vf \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$ достаточно установить неравенства

$$\left|\frac{\partial^k Vf}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant C\|f;D\|^{\omega} t^{1-k/2}, \quad k = 0,1, \tag{21}$$

$$\left|\frac{\partial^2 Vf}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant C\left(\widetilde{\omega}(t^{1/2}) + \widetilde{\widetilde{\omega}}_0(t^{1/2})\right)\|f;D\|^{\omega}, \tag{22}$$

$$\left|\Delta_t \frac{\partial Vf}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant C\|f;D\|^{\omega}|\Delta t|^{1/2}, \tag{23}$$

$(x,t), (x,t+\Delta t) \in \overline{D}$. Оценки (21), (22) доказываются аналогично методу, изложенному в [20, с. 109–110].

Докажем оценку (23). При $0 < t \leqslant \Delta t$ неравенство (23) следует из оценки (21) при $k = 1$. В случае $0 < \Delta t < t$ справедливо представление

$$\Delta_t \frac{\partial Vf}{\partial x}(x,t) = \int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x,t+\Delta t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi - \int\limits_{t-\Delta t}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi + \int\limits_{0}^{t-\Delta t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial \Gamma}{\partial x}(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi \equiv$$

$$\equiv J_1(x,t,\Delta t) + J_2(x,t,\Delta t) + J_3(x,t,\Delta t).$$

Оценим J_1 (интеграл J_2 оценивается аналогично). Из неравенства (5) имеем

$$\left|J_1(x,t,\Delta t)\right| \leqslant C\|f;D\|^{\omega} \int\limits_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \frac{d\tau}{(t+\Delta t-\tau)^{1/2}} \leqslant C\|f;D\|^{\omega}|\Delta t|^{1/2}.$$

Оценим J_3. Из представления

$$J_3(x,t,\Delta t) = \int\limits_0^{t-\Delta t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial Z}{\partial x}(x-\xi, t-\tau; A_2(\xi,\tau)) f(\xi,\tau) d\xi + \int\limits_0^{t-\Delta t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta_t \frac{\partial W}{\partial x}(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi$$

и неравенств (3), (7) следует оценка

$$\left|J_3(x,t,\Delta t)\right| \leqslant C|\Delta t|^{1/2}\|f;D\|^{\omega} \int\limits_0^{t-\Delta t} \Big(\frac{|\Delta t|^{1/2}}{(t-\tau)^{3/2}} + \frac{\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})}{t-\tau}\Big) d\tau \leqslant C\|f;D\|^{\omega}(1+\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(T^{1/2}))|\Delta t|^{1/2}.$$

Отсюда получаем неравенство (23). Лемма 1 доказана.

В [13] доказана следующая

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (а), (б). *Тогда для любой* (*вектор*-) *функции* $h \in C^2(\mathbb{R})$ *потенциал Пуассона* Ph *принадлежит пространству* $\widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$ *и справедлива оценка:*

$$\|Ph;D\|^{(2)} \leqslant C\|h;\mathbb{R}\|^{(2)}.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$Lu = f, \quad (x,t) \in D, \quad u(x,0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Из лемм 1, 2 следует

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (а), (б). *Тогда для любых* $f \in H^{\omega}(\overline{D})$, *где* $\omega \in \mathcal{D}$, *и* $h \in C^2(\mathbb{R})$ (*вектор*-) *функция*

$$u(x,t) = Vf(x,t) + Ph(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D},$$

является единственным в классе $C^{2,1}(\overline{D})$ *решением задачи* (24). *Это решение принадлежит пространству* $\widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$, *и справедлива оценка*

$$\|u;D\|^{(2)} \leqslant C\Big(\|h;\mathbb{R}\|^{(2)} + \|f;D\|^{\omega}\Big).$$

Замечание. Единственность решения задачи (24) в классе $C^{2,1}(\overline{D})$ следует из [21].

3. О ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ С НУЛЕВЫМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассмотрим следующую первую начально-краевую задачу:

$$Lu = 0 \text{ в } \Omega, \quad u\Big|_{t=0} = 0, \quad u\Big|_{\Sigma} = \psi. \tag{25}$$

В этом разделе боковая граница Σ допускает при $t = 0$ наличие “клюва” (см. (18)).

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (а), (б) *и* (18). *Тогда для любой* (*вектор*-) *функции* $\psi \in C^1[0,T]$ *с условием* $\psi(0) = 0$ *решением задачи* (25) *является* (*векторный*) *параболический потенциал* (*см.* (11))

$$u(x,t) = S\varphi(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{26}$$

где $\varphi : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ *единственное в пространстве* $C[0,T]$ *решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерра первого рода*

$$\int\limits_0^t Y(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau = \psi(t), \quad t \in [0,T]. \tag{27}$$

При этом справедливы включение $u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P_0)$ *и оценка*

$$\|u;\Omega\|^{(2)} \leqslant C\|\psi;[0,T]\|^{(1)}. \tag{28}$$

Если, кроме того, выполнено условие $\psi'(0) = 0$, то справедливо включение $u \in \underset{0}{\widehat{C}^{2,1}}(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Ищем решение в виде потенциала (26) с плотностью φ, подлежащей определению. Для любой $\varphi \in C[0, T]$ потенциал (26) удовлетворяет уравнению и начальному условию из (25). Подставляя (26) в граничное условие из (25), для определения неизвестной плотности $\varphi \in C[0, T]$ получаем интегральное уравнение Вольтерры первого рода (27). Из леммы 4 работы [8] следует, что это уравнение имеет единственное решение $\varphi \in C[0, T]$ и справедлива оценка

$$\|\varphi; [0, T]\|^{(0)} \leqslant C\|\psi; [0, T]\|^{(1)}. \tag{29}$$

Подставляя решение φ уравнения (27) в выражение (26), получим, что определенная таким образом функция u является решением задачи (25). При этом из лемм 1–3 работы [8] следует включение $u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P_0)$ и оценка

$$\|u; \Omega\|^{(2)} \leqslant C\|\varphi; [0, T]\|^{(0)}.$$

Отсюда и из (29) получаем неравенство (28).

Если дополнительно выполнено условие $\psi'(0) = 0$, то из теоремы 1 работы [8] следует включение $u \in \underset{0}{\widehat{C}^{2,1}}(\overline{\Omega})$. Лемма 3 доказана.

Замечание. Если модуль непрерывности в (18) дополнительно удовлетворяет условию (1), то однозначная разрешимость задачи (25) в классе $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$ следует из результатов работ [3], [6].

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1, 2

С помощью замены (см. (12), (13))

$$u(x, t) = v(x, t) + Ph(x, t) + Vf(x, t), \tag{30}$$

поставленная задача (8)–(10) сводится к задаче

$$Lv = 0 \text{ в } \Omega, \tag{31}$$

$$v(x, 0) = 0, \quad x \geqslant g(0), \tag{32}$$

$$v(g(t), t) = \Psi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{33}$$

где

$$\Psi(t) = \psi(t) - Ph(g(t), t) - Vf(g(t), t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Из условия согласования (14), неравенства (21) при $k = 0$, а также из леммы 2 получаем, что $\Psi(0) = 0$. Из условия $g \in C^1[0, T]$, включений $Ph, Vf \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{D})$ (см. леммы 1, 2) и равенства

$$\Psi'(t) = \psi'(t) - g'(t)\left(\frac{\partial Ph}{\partial x}(g(t), t) + \frac{\partial Vf}{\partial x}(g(t), t)\right) - \frac{\partial Ph}{\partial t}(g(t), t) - \frac{\partial Vf}{\partial t}(g(t), t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

получаем, что $\Psi \in C^1[0, T]$.

Из леммы 3 следует, что решением задачи (31)–(33) является (векторный) параболический потенциал

$$v(x, t) = S\varphi(x, t),$$

где (вектор-) функция φ единственное в пространстве $C[0, T]$ решение уравнения (17). При этом $v \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P_0)$ и справедлива оценка

$$\|v; \Omega\|^{(2)} \leqslant C\|\Psi; [0, T]\|^{(1)}.$$

Если дополнительно выполнено условие согласования (16), то $\Psi'(0) = 0$. В этом случае из леммы 3 следует включение $v \in \underset{0}{\widehat{C}^{2,1}}(\overline{\Omega})$.

Подставляя полученную функцию v в представление (30) и используя леммы 1, 2, получаем окончательно утверждения теорем 1 и 2.

Введем вспомогательные функциональные пространства и рассмотрим две леммы, необходимые для дальнейшего.

Через $C^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P_0)$ обозначим пространство (вектор-) функций u, непрерывных вместе со своей первой производной по x в $\overline{\Omega}$ и имеющих непрерывные и ограниченные в $\overline{\Omega} \setminus P_0$, вторую по x и первую по t производные, для которых конечно выражение

$$\|u; \Omega\|^{2,1} = \sum_{2r+s \leqslant 2} \sup_{(x,t)\in\Omega} \left|\frac{\partial^{r+s} u}{\partial t^r \partial x^s}(x, t)\right|.$$

Через $C^2([a,+\infty))$, $a \in \mathbb{R}$, обозначим пространство (вектор-) функций $h : [a,+\infty) \to \mathbb{R}^m$, непрерывных и ограниченных вместе со своей первой и второй производными, с нормой

$$\|h;[a,+\infty)\|^{(2)} = \sum_{k=0}^{2} \sup_{x\in[a,+\infty)} |h^{(k)}(x)|.$$

Лемма 4. *Пусть*

$$u \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P_0), \quad \overline{h}(x) = u(x,T), \quad x \geqslant g(T).$$

Тогда справедливы включение

$$\overline{h} \in C^2[g(T),+\infty), \tag{34}$$

оценка

$$\|\overline{h};[g(T),+\infty)\|^{(2)} \leqslant \|u,\Omega\|^{2,1} \tag{35}$$

и предельные соотношения

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_T,T)\\(x,t)\in\Omega}} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t) = \overline{h}^{(k)}(x_T), \quad k=1,2, \quad x_T \geqslant g(T). \tag{36}$$

Доказательство. Сделаем замену переменной

$$y = x - g(t)$$

и положим

$$v(y,t) = u(y+g(t),t), \quad (y,t) \in [0,+\infty)\times[0,T]. \tag{37}$$

Тогда

$$\frac{\partial^k v}{\partial y^k}(y,t) = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t)\Big|_{x=y+g(t)}, \quad k=0,1,2, \quad (y,t)\in[0,+\infty)\times[0,T].$$

Введем обозначение

$$\widehat{h}(y) = v(y,T), \quad y \in [0,+\infty).$$

В силу (37) справедливы включение $\widehat{h} \in C[0,+\infty)$ и оценка

$$\sup_{y\in[0,+\infty)} |\widehat{h}(y)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\Omega} \Big|u(x,t)\Big|.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$h_n(y) = v(y, T-1/n), \quad y \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Не ограничивая общности, считаем, что $1/n < T/2$. Зафиксируем произвольно $M > 0$. Имеем $h_n(y) \in C^2[0,M]$, последовательность функций $(h_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к функции $\widehat{h}(y)$ на $[0,M]$, последовательность производных $(h_n'(y))_{n\in\mathbb{N}}$ сходится равномерно на отрезке $[0,M]$ в силу равномерной непрерывности $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ на $[0,M]\times[T/2,T]$. Следовательно, существует $\widehat{h}' \in C[0,M]$, причем

$$\lim_{n\to\infty} h_n'(y) = \widehat{h}'(y), \quad y \in [0,M],$$

и

$$\sup_{y\in[0,+\infty)} |\widehat{h}'(y)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\Omega} \Big|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big|.$$

Аналогично, получаем, что существует $\widehat{h}'' \in C[0,M]$, причем

$$\lim_{n\to\infty} h_n''(y) = \widehat{h}''(y), \quad y \in [0,M],$$

и

$$\sup_{y\in[0,+\infty)} |\widehat{h}''(y)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\Omega} \Big|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\Big|.$$

В силу произвольности $M > 0$, отсюда следует, что имеет место включение $\widehat{h} \in C^2[0, +\infty)$ и оценка

$$\|\widehat{h}; [0, +\infty)\|^2 \leqslant \|u, \Omega\|^{2,1}.$$

Возвращаясь к функции $\overline{h}$, получаем включение (34), оценку (35) и предельные соотношения (36). Лемма 4 доказана.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 5. *Если* $u \in C^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P_0)$ *и* $h(x) = u(x, 0)$, *то справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\(x,t)\in\Omega}} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = h'(x_0), \quad x_0 \geqslant g(0),$$

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\(x,t)\in\Omega}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = h''(x_0), \quad x_0 > g(0).$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Заметим (см. [22, с. 587–588]), что любую функцию $h \in C^2([a, +\infty))$ можно продолжить на всю числовую ось с сохранением класса $h^* \in C^2(\mathbb{R})$, причем

$$\|h^*; \mathbb{R}\|^{(2)} \leqslant C\|h; [a, +\infty)\|^{(2)}. \tag{38}$$

Перейдем к доказательству теоремы 3. Пусть $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$ – решение задачи (8)–(10). Положим

$$h_k(x) = u(x, t_k), \quad x \geqslant g(t_k), \quad k = 0, \ldots, N,$$

$$\Omega_k = \{(x, t) \in D \mid x > g(t), \quad t_k < t < t_{k+1}\}, \quad k = 0, \ldots, N,$$

где

$$t_0 = 0, \quad t_{N+1} = T.$$

Докажем сначала, что

$$u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega}_k \setminus P_k), \quad k = 0, \ldots, N, \tag{39}$$

причем

$$\|u; \Omega_k\|^{(2)} \leqslant C\left(\Big\|\psi; [0, T]\Big\|_N^{(1)} + \|h; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^{\omega}\right), \quad k = 0, \ldots, N. \tag{40}$$

В самом деле, для $k = 0$ включение (39) и оценка (40) сразу следуют из теоремы 1. Предположим, что (39), (40) выполнены для некоторого k, $0 \leqslant k \leqslant N - 1$. В силу леммы 4 справедливы включение

$$h_{k+1} \in C^2[g(t_{k+1}), +\infty)$$

и оценка

$$\|h_{k+1}; [g(t_{k+1}), +\infty)\|^{(2)} \leqslant \|u, \Omega_k\|^{2,1}. \tag{41}$$

Обозначим продолжение функции h_{k+1} на всю числовую ось с сохранением класса через $h^*_{k+1} \in C^2(\mathbb{R})$. Из неравенства (38) следует оценка

$$\|h^*_{k+1}; \mathbb{R}\|^{(2)} \leqslant C\|h_{k+1}; [g(t_{k+1}), +\infty)\|^{(2)}. \tag{42}$$

Рассмотрим u на множестве Ω_{k+1}. Функция $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}_{k+1})$ является решением первой начально-краевой задачи

$$Lu = f \text{ в } \Omega_{k+1}, \tag{43}$$

$$u(x, t_{k+1}) = h^*_{k+1}(x), \quad x \geqslant g(t_{k+1}), \tag{44}$$

$$u(g(t), t) = \psi(t), \quad t_{k+1} \leqslant t \leqslant t_{k+2}, \tag{45}$$

где

$$\psi \in C^1[t_{k+1}, t_{k+2}], \quad h^*_{k+1} \in C^2(\mathbb{R}),$$

причем справедливо условие согласования

$$\psi(t_{k+1}) = h_{k+1}(g(t_{k+1})) = h^*_{k+1}(g(t_{k+1})).$$

Из теоремы 1 для решения $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}_{k+1})$ задачи (43)–(45) справедливы включение (39) с заменой в нем k на $k+1$ и оценка

$$\|u; \Omega_{k+1}\|^{(2)} \leqslant C\left(\left\|\psi; [0, T]\right\|_N^{(1)} + \|h^*_{k+1}; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^{\omega}\right).$$

Отсюда, используя неравенства (41), (42), получаем оценку (40) с заменой в ней k на $k+1$. Таким образом, (39), (40) доказаны по индукции.

Заметим, что из включения (39) и неравенства (40) следует оценка

$$\left|\Delta_t \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant C|\Delta t|^{1/2}, \quad (x, t), \quad (x, t + \Delta t) \in \overline{\Omega},$$

и из результатов работ [3], [4] — неравенства

$$\left|\frac{\partial^s u}{\partial x^s}(x, t)\right| \leqslant C\left(\left\|\psi; [0, T]\right\|_N^{(1)} + \|h; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^{\omega}\right), \quad (x, t) \in \overline{\Omega}, \quad s = 0, 1. \tag{46}$$

Далее, учитывая леммы 4, 5, делаем вывод, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t_k) = h''_k(x), \quad x > g(t_k), \quad k = 1, \ldots, N,$$

причем $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывна и ограничена на всем множестве $\overline{\Omega} \setminus P$, и справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\right| \leqslant C\left(\left\|\psi; [0, T]\right\|_N^{(1)} + \|h; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^{\omega}\right), \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \setminus P. \tag{47}$$

Наконец, из лемм 4, 5 получаем, что

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x,t_k-0)\\(x,t)\in\Omega_{k-1}}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \lim_{\substack{(x,t)\to(x,t_k+0)\\(x,t)\in\Omega_k}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{s=0}^{2} A_s(x, g(t_k)) h_k^{(s)}(x) + f(x, t_k), \quad x > g(t_k), \quad k = 1, \ldots, N.$$

Отсюда и из непрерывности u на $\overline{\Omega}$ следует, что в точках (x, t_k), $x > g(t_k)$, $k = 1, \ldots, N$, существует $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. Учитывая непрерывность производных $\dfrac{\partial^s u}{\partial x^s}$, $s = 0, 1, 2$, и неравенства (46), (47), получаем непрерывность и ограниченность $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ на всем множестве $\overline{\Omega} \setminus P$, и оценку

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right| \leqslant C\left(\left\|\psi; [0, T]\right\|_N^{(1)} + \|h; \mathbb{R}\|^{(2)} + \|f; D\|^{\omega}\right), \quad (x, t) \in \overline{\Omega} \setminus P.$$

Таким образом, справедливы включение $u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P)$ и неравенство (20). Теорема 3 доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 3 и из леммы 4 следует, что старшие производные решения $u \in \widehat{C}^{2,1}(\overline{\Omega} \setminus P)$ задачи (8)–(10) непрерывны “снизу” в точках множества $P \setminus P_0$, а именно:

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t_k),t_k)\\(x,t)\in\Omega_{k-1}}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(g(t_k), t_k), \quad k = 1, \ldots, N,$$

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(g(t_k),t_k)\\(x,t)\in\Omega_{k-1}}} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(g(t_k), t_k), \quad k = 1, \ldots, N.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Матем. ин-та В.А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.

2. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.

3. *Baderko E.A., Cherepova M.F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients // Appl. Analysis. 2021. V. 100. № 13. P. 2900–2910.

4. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2022. Т. 58. № 10. С. 1333–1343.

5. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. АН. 2022. Т. 503. № 2. С. 26–29.

6. *Бадерко Е.А., Сахаров С.И.* О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 4. С. 584–595.

7. *Федоров К.Д.* О первой начально-краевой задаче для модельной параболической системы в области с криволинейными боковыми границами // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 12. С. 1623–1634.

8. *Федоров К.Д.* Гладкое решение первой начально-краевой задачи для параболических систем в полуограниченной области с негладкой боковой границей на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2022. Т. 58. № 10. С. 1400–1413.

9. *Ворошнин Л.Г., Хусид Б.М.* Диффузионный массоперенос в многокомпонентных системах. Минск: Наука и техн., 1979. 255 с.

10. *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.

11. *Криштал М.А.* Многокомпонентная диффузия в металлах. М.: Металлургия, 1985. 177 с.

12. *Гуляев А.П.* Металловедение. М.: Металлургия, 1986. 544 с.

13. *Бадерко Е.А., Федоров К.Д.* О гладкости потенциала Пуассона для параболических систем второго порядка на плоскости // Дифференц. ур-ния. 2023. Т. 59. № 12. С. 1606–1618.

14. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.

15. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. МГУ. Секц. А. 1938. Т. 1. № 7. С. 1–72.

16. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968. 428 с.

17. *Бадерко Е.А.* О потенциалах для $2p$-параболических уравнений // Дифференц. ур-ния. 1983. Т. 19. № 1. С. 9–18.

18. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в класссах Дини. 1992. Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294-В92.

19. *Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Успехи матем. наук. 1962. Т. 17. № 3 (105). С. 3–146.

20. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964. 444 с.

21. *Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.* О единственности решения задачи Коши для параболических систем // Дифференц. ур-ния. 2019. Т. 55. № 6. С. 822–830.

22. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М.: Наука, 1968. 607 с.

THE FIRST INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC SYSTEMS IN A SEMI-BOUNDED DOMAIN WITH CURVILINEAR LATERAL BOUNDARY

E. A. Baderko* and K. D. Fedorov**

Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991 Russia
**e-mail: baderko.ea@yandex.ru*
***e-mail: konstantin-dubna@mail.ru*

Received: 09 September 2024
Revised: 09 September 2024
Accepted: 26 September 2024

Abstract. The first initial boundary value problem for a second-order parabolic system in a semi-bounded domain on the plane is considered. The coefficients of the system satisfy the double Dini condition. The function defining the lateral boundary of the domain is continuously differentiable on the closed interval. When the right-hand side of the boundary condition of the first kind is continuously differentiable and the initial function is continuous and bounded together with its first and second derivatives, it is established that the solution of the problem is continuous and bounded in the closure of the domain together with its higher order derivatives. The corresponding estimates are proved. An integral representation of the solution is given. If the lateral boundary of the domain has “corners” and the boundary function has a piecewise continuous derivative, it is proved that, despite the lateral boundary and the boundary function being non-smooth, the higher order derivatives of the solution are continuous everywhere in the closure of the domain, except the corner points, and are bounded.

Keywords: parabolic systems, first initial boundary value problem, nonsmooth lateral boundary, boundary integral equations, Dini condition