

# “СУПЕР-БЫСТРЫЙ” АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАНАКОВА<sup>1)</sup>

© 2024 г. Л. Л. Фрумин<sup>1,\*</sup>, А. Е. Чернявский<sup>1,\*\*</sup>, О. В. Белай<sup>1,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>630090 Новосибирск, пр-т Акад. Коптюга, 1, ИАиЭ СО РАН, Россия

\*e-mail: lfrumin@iae.nsk.su

\*\*e-mail: alexander.cher.99@gmail.com

\*\*\*e-mail: ovbelai@gmail.com

Поступила в редакцию 10.05.2024 г.

Переработанный вариант 29.07.2024 г.

Принята к публикации 23.08.2024 г.

Рассматривается построение ускоренного алгоритма решения прямой задачи рассеяния для непрерывного спектра системы Манакова, ассоциированной с векторным нелинейным уравнением Шрёдингера модели Манакова. Численная постановка задачи приводит к проблеме быстрого расчета произведений полиномов, зависящих от спектрального параметра задачи. Для локализованных решений представлен так называемый “супер-быстрый” алгоритм решения прямой задачи рассеяния второго порядка точности, основанный на теореме о свертке и быстром преобразовании Фурье, требующий для дискретной сетки размером  $N$  асимптотически всего  $O(N \log^2 N)$  арифметических операций. Для ускорения расчета спектров коэффициентов отражения предложен и апробирован матричный вариант быстрого преобразования Фурье, когда коэффициенты ряда дискретного преобразования Фурье представляют собой некоммутирующие матрицы. Численное моделирование на примере точного решения системы Манакова (гиперболического секанса) подтвердило высокую скорость расчетов и второй порядок точности аппроксимации алгоритма. Библ. 24. Фиг. 1.

**Ключевые слова:** уравнение Шрёдингера, система Манакова, прямая задача рассеяния, трансфер-матрица, свертка, преобразование Фурье.

DOI: 10.31857/S0044466924120143, EDN: KBMEIL

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) представляет собой фундаментальную математическую модель, описывающую эффекты нелинейно-дисперсионного взаимодействия волн, порождающие уединенные волны — солитоны (см. [1], [2]). Векторное обобщение НУШ, учитывающее поляризацию волн, известно как модель Манакова (см. [3]). Эта модель одновременно учитывает эффекты нелинейности, дисперсии и поляризации волн, что представляет исключительный интерес для теоретической физики и нелинейной оптики. В последние годы НУШ и модель Манакова нашли важное применение для описания нелинейно-дисперсионных и поляризационных эффектов в процессах передачи информации по волоконно-оптическим линиям связи, составляющим технологическую основу глобальной сети Интернет. Наблюдавшийся в начале века стремительный взлет производительности (пропускной способности) волоконно-оптических линий, обусловленный прогрессом современных оптических технологий, в последние годы практически прекратился из-за усиления роли нелинейно-дисперсионных эффектов, заметно искажающих информационный сигнал (см. [4], [5]). Именно эти эффекты и описывает в скалярном случае НУШ, а в более близком к реальности векторном случае, т.е. с учетом поляризации — модель Манакова. Нелинейное векторное уравнение Шрёдингера модели Манакова имеет следующий нормализованный вид (см. [3]):

$$i \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x^2} - 2\sigma |\mathbf{q}|^2 \mathbf{q} = 0, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{q}(t, x) = (q, p)$  — вектор решения модели Манакова, содержащий две поляризационные нормированные компоненты поля  $q(t, x)$  и  $p(t, x)$ ,  $x$  — пространственная координата,  $t$  — временной параметр,  $i$  — мнимая единица. Параметр  $\sigma$  принимает значения  $+1$  или  $-1$  соответственно для дефокусирующего и фокусирующего слу-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант 24-22-00183.

чаев. Заметим, что в задачах, описывающих эволюцию модулированной огибающей оптического сигнала в оптическом волокне, координаты  $(t, x)$  заменяются парой  $(z, \tau)$ , где  $z$  — расстояние вдоль оптического волокна, а  $\tau$  — временной параметр в сопутствующей оптическому импульсу системе отсчета (см. [4]).

Как и НУШ, модель Манакова принадлежит к числу так называемых интегрируемых уравнений, в исследование которых значительный вклад вносит метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) (см. [1], [2]). Этот метод сводит решение нелинейного уравнения к решению прямых и обратных спектральных задач рассеяния для некоторой ассоциированной с этим уравнением линейной системы, коэффициенты которой определяются решениями исходного нелинейного уравнения. Система двух уравнений Захарова–Шабата служит такой ассоциированной линейной системой для скалярного НУШ. В случае векторного НУШ модели Манакова задачи рассеяния ставятся для системы трех линейных уравнений, называемых системой Манакова (см. [3]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x)}{\partial x} + i\lambda u(x) &= q(x)v(x) + p(x)w(x), \\ \frac{\partial v(x)}{\partial x} - i\lambda v(x) &= \sigma q^*(x)u(x), \quad \frac{\partial w(x)}{\partial x} - i\lambda w(x) = \sigma p^*(x)u(x), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $\lambda$  — собственное значение,  $(u, v, w)$  — трехмерный собственный вектор волновых амплитуд, причем  $u$  имеет смысл амплитуды падающей волны,  $v, w$  — амплитуды отраженных волн,  $i$  — мнимая единица, а символ  $*$  обозначает комплексное сопряжение. Система Манакова (1.2) рассматривается при фиксированном параметре времени  $t$ , который здесь и далее для краткости не указывается в аргументах функций. Система Манакова в фокусирующем случае ( $\sigma = -1$ ) содержит дискретный и непрерывный спектры, а в дефокусирующем ( $\sigma = +1$ ) — только непрерывный спектр. Дискретный спектр системы с комплексным спектральным параметром  $\lambda$  соответствует солитонным решениям НУШ. Непрерывный спектр системы Манакова имеет действительные собственные значения  $\lambda$  и описывает диспергирующие волны.

С вычислительной точки зрения метод обратной задачи рассеяния, позволивший аналитически исследовать целый ряд нелинейных эволюционных волновых уравнений (см. [1]), оказался мощным инструментом для эффективного численного решения задачи Коши для этих нелинейных уравнений, причем, без каких-либо итераций. Его численная реализация требует развития эффективных алгоритмов решения как обратных, так и прямых задач рассеяния, которым и посвящена настоящая работа, применительно к системе Манакова.

Задачи рассеяния (ЗР) оперируют данными рассеяния, в качестве которых в общем случае служат компоненты матрицы рассеяния (см. [1], [2], [6], [7]). В случае прямой ЗР для непрерывного спектра системы Манакова данные рассеяния содержат амплитуду  $a(\lambda)$  падающей волны, амплитуды  $b_1(\lambda)$ ,  $b_2(\lambda)$  отраженных волн для каждой из двух поляризаций, а также и амплитуду прошедшей волны  $d(\lambda)$ . Две поляризационные компоненты вектора решения  $q(x)$ ,  $p(x)$  следует рассматривать при этом как компоненты рассеивающего потенциала. Прямая ЗР представляет собой определение данных рассеяния, в частности, коэффициентов отражения и импульсных откликов, по заданному вектору решения (рассеивающему потенциалу)  $q$ . Поиск вектора решения (рассеивающего потенциала)  $q(x)$  по данным рассеяния, при фиксированном эволюционном параметре  $t$ , составляет обратную ЗР для системы Манакова. В настоящей работе мы будем придерживаться более узкой, однако, более распространенной в приложениях постановки, где в качестве искомого для прямой ЗР принимаются коэффициенты отражения

$$r_1(\lambda) = b_1(\lambda)/a(\lambda), \quad r_2(\lambda) = b_2(\lambda)/a(\lambda). \quad (1.3)$$

Преобразование Фурье от коэффициентов отражения определяет импульсные отклики  $R_{1,2}(\xi)$  пары компонент рассеивающего потенциала:

$$R_{1,2}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_{1,2}(\lambda) e^{-i\lambda\xi} d\lambda. \quad (1.4)$$

В недавних работах авторов [8]–[11] для решения обратных задач рассеяния системы Манакова были предложены “быстрые” алгоритмы, основанные на методах окаймления и требующие всего  $O(N^2)$  арифметических операций, где  $N$  — размер расчетной сетки. Они представляют собой блочно-матричные алгоритмы второго порядка точности аппроксимации (порядком точности мы называем порядок степенной зависимости погрешности вычислений (остаточного члена) от шага разностной сетки). В одном из алгоритмов применен блочный вариант окаймления Левинсона, восстанавливающий трёхдиагональную структуру блочных матриц, путем переноса некоторых слагаемых дискретных систем уравнений в правую часть. Другой алгоритм был основан на трёхдиагональном разложении (см. [12]) блочной матрицы, близкой к блочно-трёхдиагональной, и алгоритме окаймления Тыртышниковой (см. [13]). Сравнительно недавно в работе [14] были представлены так называемые “супер-быстрые” алгоритмы решения прямой и обратной ЗР для системы Манакова первого порядка точности аппроксимации.

Эти алгоритмы для расчетной сетки размером  $N$  требуют асимптотически всего порядка  $O(N \log^2 N)$  арифметических операций и потому названы “супер-быстрыми”. Аналогичные алгоритмы ранее были предложены для системы Захарова–Шабата в работе [15]. Однако “супер-быстрые” алгоритмы первого порядка точности при заданной точности расчетов (норме ошибки)  $\epsilon$  заметно менее эффективны, так как асимптотически уступают в быстродействии “быстрым” алгоритмам второго порядка точности, требующим порядка  $O(N^2)$  арифметических операций. Действительно, “супер-быстрый” алгоритм первого порядка точности требует порядка  $O(\epsilon^{-1} (\log \epsilon^{-1})^2)$  арифметических операций, тогда как “быстрый” алгоритм второго порядка точности при той же точности расчетов  $\epsilon$  потребует всего  $O(\epsilon^{-1})$  операций, поскольку при заданной точности ему требуется дискретная сетка меньшего размера  $N$ . К настоящему времени порядок точности аппроксимации “супер-быстрых” алгоритмов (см. [15]) для системы Захарова–Шабата достиг второго. Последующие разделы посвящены построению аналогичного эффективного (точного и быстрого) алгоритма решения прямой задачи для системы Манакова.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

В этой работе рассматривается “супер-быстрый” алгоритм решения прямой ЗР для непрерывного спектра системы Манакова, для случая локализованных (убывающих на бесконечности) решений, второго порядка точности аппроксимации. Этот алгоритм основан на методе матриц переноса, называемом также методом трансфер-матриц (МТМ) или методом Т-матриц. МТМ служит основным, базовым методом решения задач рассеяния в оптических, радиофизических и акустических приложениях (см. [16], [17]). В рамках МТМ непрерывная среда разбивается на  $N$  дискретных слоев, каждый из которых характеризуется трансфер-матрицей  $T_m$ , где  $m$  – номер слоя. Эта матрица связывает вектор волновых амплитуд  $(u_m, v_m, w_m)$  в  $m$ -м слое с аналогичным вектором в соседнем слое.

Для решения трех линейных уравнений системы Манакова требуется три граничных условия. Прямая ЗР для локализованных потенциалов модели Манакова при постановке граничных условий опирается на асимптотики волновых решений системы Манакова на бесконечности. Рассматривая, для определенности, правую ЗР, когда исходная волна падает справа на рассеивающий потенциал, запишем асимптотики решения системы Манакова в следующем виде (см. [1], [3]):

$$(u, v, w)_{x \rightarrow -\infty} = (e^{-i\lambda x}, 0, 0), \quad (u, v, w)_{x \rightarrow +\infty} = (a(\lambda) e^{-i\lambda x}, b_1(\lambda) e^{i\lambda x}, b_2(\lambda) e^{i\lambda x}).$$

Подобные асимптотики определяют линейно независимые фундаментальные решения системы Манакова, называемые функциями Йоста.

В численных подходах, где используется конечный носитель, к примеру, интервал  $[x_0, x_N]$ , асимптотики принимают вид граничных условий:

$$(u_0, v_0, w_0) = (e^{-i\lambda x_0}, 0, 0), \quad (u_N, v_N, w_N) = (a(\lambda) e^{-i\lambda x_N}, b_1(\lambda) e^{i\lambda x_N}, b_2(\lambda) e^{i\lambda x_N}), \quad (2.1)$$

где  $u_0 = u(x_0)$ ,  $v_0 = v(x_0)$ ,  $w_0 = w(x_0)$ ,  $u_N = u(x_N)$ ,  $v_N = v(x_N)$ ,  $w_N = w(x_N)$ .

Решение прямой ЗР сводится к расчету неизвестных спектральных коэффициентов  $a(\lambda)$ ,  $b_1(\lambda)$ ,  $b_2(\lambda)$  путем последовательного умножения трансфер-матриц на вектор-столбец амплитуды прошедшей волны:

$$\begin{pmatrix} u_N \\ v_{1,N} \\ v_{2,N} \end{pmatrix} = T_{N-1} T_{N-2} \dots T_1 T_0 \begin{pmatrix} u_0 \\ v_{1,0} \\ v_{2,0} \end{pmatrix}.$$

Используя граничные условия (2.1), для определения данных рассеяния получим

$$\begin{pmatrix} a(\lambda) e^{-i\lambda x_N} \\ b_1(\lambda) e^{i\lambda x_N} \\ b_2(\lambda) e^{i\lambda x_N} \end{pmatrix} = T_{N-1} T_{N-2} \dots T_1 T_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\lambda x_0}. \quad (2.2)$$

Спектральные данные  $a(\lambda)$ ,  $b_1(\lambda)$ ,  $b_2(\lambda)$ , полученные в результате перемножения матриц в (2.2), далее используются для расчета коэффициентов отражения  $r_{1,2}(\lambda)$  по формулам (1.3), а затем и для импульсных откликов задачи рассеяния  $R_{1,2}(\xi)$ , с помощью численного расчета преобразования Фурье (1.4).

## 3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Определим по координате  $x$  равномерную расчетную сетку

$$x_m, \quad m = 0, 1, \dots, N : x_m \in [-L/2 = x_0, x_1, \dots, x_N = L/2],$$

с шагом  $L/N$ , где  $L = x_N - x_0$  — размер интервала. Половину этого шага  $L/(2N)$  будем обозначать далее, как  $h$ . В узлах сетки находятся дискретные отсчеты поляризационных компонент решения (рассеивающего потенциала)  $q_m, p_m, m = 0, 1, \dots, N$ . Для локализованных потенциалов предполагается, что основная часть потенциала сосредоточена в пределах выбранного интервала, а на его границах значения компонент потенциала пренебрежимо малы. Для численного расчета дискретных значений импульсных откликов  $R_{1,2}(\xi)$  требуется сетка  $\xi_m = 2x_m, m = 0, 1, \dots, N$ , на вдвое большем интервале  $[-L, L]$  с шагом  $\tilde{h} = \frac{2L}{N} = 4h$ . Импульсные отклики определяют непрерывную часть спектра данных рассеяния (ядер) обратной ЗР в интегральной постановке, опирающейся на уравнения Гельфанда—Левитана—Марченко (ГЛМ). Уравнения ГЛМ представляют собой интегральный вариант системы Манакова (см. [18]). В дефокусирующем случае импульсные отклики полностью определяют интегральные ядра этих уравнений. Фурье-преобразование (1.4) при расчете импульсных откликов требует применения (быстрого) дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и соответствующей дискретной сетки в спектральной области  $\lambda_k = k\Delta\lambda, k = 0, 1, \dots, N$ . Шаг сетки по спектральной переменной  $\Delta\lambda$  выбирается из условия, налагаемого ДПФ:  $\tilde{h}\Delta\lambda = 2\pi/N$ , что дает  $\Delta\lambda = \pi/L$ .

Точность численного решения прямой ЗР определяется точностью дискретной аппроксимации трансфер-матриц  $T_m$ . В работе [19] был представлен алгоритм решения прямой ЗР для системы Захарова—Шабата со вторым глобальным порядком точности аппроксимации. Используя аналогичный подход для системы Манакова (1.2), перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{aligned} (e^{i\lambda x} u)' &= (qv + pw) * e^{i\lambda x}, \\ (e^{-i\lambda x} v)' &= \sigma q^* u * e^{-i\lambda x}, \\ (e^{-i\lambda x} w)' &= \sigma p^* u * e^{-i\lambda x}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $x$ . Интегрируя систему уравнений (3.1) на отрезке  $[x_m, x_{m+1}]$ , получим

$$\begin{aligned} e^{i\lambda x_{m+1}} u(x_{m+1}) - e^{i\lambda x_m} u(x_m) &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} e^{i\lambda x} [qv + pw] dx, \\ e^{-i\lambda x_{m+1}} v(x_{m+1}) - e^{-i\lambda x_m} v(x_m) &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} \sigma e^{-i\lambda x} q^* u dx, \\ e^{-i\lambda x_{m+1}} w(x_{m+1}) - e^{-i\lambda x_m} w(x_m) &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} \sigma e^{-i\lambda x} p^* u dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Заменим интегралы в (3.2) по формуле трапеций с третьим локальным порядком точности аппроксимации  $O(h^3)$ :

$$\begin{aligned} u_{m+1} - e^{-2i\lambda h} u_m &= h(q_{m+1}v_{m+1} + p_{m+1}w_{m+1} + e^{-2i\lambda h}(q_mv_m + p_mw_m)), \\ v_{m+1} - e^{2i\lambda h} v_m &= \sigma h(q_{m+1}^* u_{m+1} + e^{2i\lambda h} q_m^* u_m), \\ w_{m+1} - e^{2i\lambda h} w_m &= \sigma h(p_{m+1}^* u_{m+1} + e^{2i\lambda h} p_m^* u_m). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Обозначим  $z = e^{2i\lambda h}$ , и запишем систему (3.3) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & -hq_{m+1} & -hp_{m+1} \\ -\sigma h q_{m+1}^* & 1 & 0 \\ -\sigma h p_{m+1}^* & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{m+1} \\ v_{m+1} \\ w_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1} & hz^{-1}q_m & hz^{-1}p_m \\ \sigma h z q_m^* & z & 0 \\ \sigma h z p_m^* & 0 & z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Обратной к матрице, стоящей первой слева в (3.4), является матрица

$$\frac{1}{1 - \sigma h^2(|q_{m+1}|^2 + |p_{m+1}|^2)} \begin{bmatrix} 1 & hq_{m+1} & hp_{m+1} \\ \sigma h q_{m+1}^* & 1 - \sigma h^2|p_{m+1}|^2 & \sigma h^2 q_{m+1}^* p_{m+1} \\ \sigma h p_{m+1}^* & \sigma h^2 q_{m+1} p_{m+1}^* & 1 - \sigma h^2|q_{m+1}|^2 \end{bmatrix}.$$

Умножив слева систему (3.4) на эту матрицу, опуская члены с  $h^3$  и приближенно принимая  $h^2 p_{m+1} = h^2 p_m + O(h^3)$  и  $h^2 q_{m+1} = h^2 q_m + O(h^3)$ , запишем итоговую трансфер-матрицу  $T_m$ :

$$T_m = \begin{bmatrix} 1 + \sigma h^2 \zeta(|q_m|^2 + |p_m|^2) & h(q_m + \zeta q_{m+1}) & h(p_m + \zeta p_{m+1}) \\ \sigma h(q_{m+1}^* + \zeta q_m^*) & \zeta - \sigma h^2(\zeta|p_m|^2 - |q_m|^2) & \sigma h^2 q_m^* p_m(1 + \zeta) \\ \sigma h(p_{m+1}^* + \zeta p_m^*) & \sigma h^2 p_m^* q_m(1 + \zeta) & \zeta - \sigma h^2(\zeta|q_m|^2 - |p_m|^2) \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

где обозначено  $\zeta = z^2 = e^{4i\lambda h} = e^{i\lambda \tilde{h}}$ . У этой матрицы опущен общий множитель  $\frac{z^{-1}}{1 - \sigma h^2 (|q_{m+1}|^2 + |p_{m+1}|^2)}$ . При расчете коэффициентов отражения в виде отношения коэффициентов  $r_{1,2}(\lambda) = b_{1,2}(\lambda)/a(\lambda)$  общий множитель  $b_{1,2}(\lambda)$  и  $a(\lambda)$  сокращается, однако его необходимо учитывать, если требуется расчет коэффициента прохождения  $d(\lambda)$ .

#### 4. “СУПЕР-БЫСТРЫЙ” АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Все элементы  $t_{m;ij}$  полученной матрицы в (3.5)  $T_m$  представляют собой биномы вида  $t_{m;ij} = \alpha_{m;ij} + \zeta \beta_{m;ij}$ , т.е. полиномы первого порядка от спектрального параметра  $\zeta = e^{i\lambda \tilde{h}}$ . Эти биномы можно представить в виде матричных биномов:

$$T_m = A_m + \zeta B_m.$$

Здесь  $A_m$  и  $B_m$  — матрицы размером  $3 \times 3$  с элементами соответственно  $\alpha_{m;ij}, \beta_{m;ij}$ .

Расчет произведения трансфер-матриц (2.2) сводится к вычислению произведений полиномов. Спектральные данные рассеяния  $a(\lambda), b_1(\lambda), b_2(\lambda)$  в итоге принимают вид полиномов  $N$ -й степени от параметра  $\zeta = e^{i\lambda \tilde{h}}$ . В результате мы получаем полиномиальную аппроксимацию спектральных данных. Расчет этих полиномов на дискретной спектральной сетке определяет дискретизованные спектры данных рассеяния  $a(\lambda_k), b_1(\lambda_k), b_2(\lambda_k), k = 0, 1, \dots, N$ . Дискретизованные спектры отражения представляют собой соответствующие отношения полиномов  $r_{1,2}(\lambda_k) = b_{1,2}(\lambda_k)/a(\lambda_k)$  для аргумента  $\lambda_k$ .

Последовательное перемножение всех трансфер-матриц  $T_m$  размерностью  $3 \times 3$ , элементы которых являются биномами, приводит к алгоритму, основным вычислительным этапом которого является умножение полиномов (элементов матриц) на бином. При каждом таком перемножении степень результирующих полиномов будет увеличиваться на единицу. На  $k$ -м шаге процесса перемножения матриц для каждого из девяти элементов результирующей матрицы требуется умножить  $k+1$  коэффициент полинома на два коэффициента бинома. Суммарное число операций умножения при этом составит для каждого элемента  $\sum_{k=1}^{N-1} 2(k+1) = N^2 + N - 2$ . Число сложений имеет такой же порядок величины  $O(N^2)$ .

В работе [15], применительно к системе Захарова—Шабата, был предложен более быстрый способ перемножения  $N = 2^M$  матриц, основанный на алгоритме дублирования и быстром дискретном преобразовании Фурье. В процессе перемножения трансфер-матриц они разбиваются на соседние пары. Сначала перемножаются эти пары, и получается  $N/2$  матриц с элементами в виде полиномов 2-го порядка. Результаты такого парного перемножения снова разбиваются на пары, затем эти новые пары перемножаются. Процедура перемножения полиномов повторяется  $M - 1 = \text{Log}_2(N) - 1$  раз. Степень результирующего полинома при каждом перемножении удваивается. На  $k$ -м шаге перемножается  $2^{M-k}$  пар полиномов. Каждый из них имеет степень  $2^{k-1}$  и после приведения общих членов содержит  $2^{k-1} + 1$  коэффициентов. Перемножение пары таких полиномов потребует  $(2^{k-1} + 1)^2$  умножений. Полное число умножений пар полиномов составит  $\sum_{k=1}^{M-1} (2^{k-1} + 1)^2 2^{M-k} = M2^M + 2^{2(M-1)} - 2^{M-1} - 2$ . Таким образом, по порядку величины этот способ расчета приводит к оценке числа операций  $O(2^{2(M-1)}) = O(N^2/4)$ .

Для системы Захарова—Шабата в работе [15] для еще большего ускорения расчетов произведений полиномов было предложено использовать теорему о свертке. Пусть на  $k$ -м шаге попарного произведения матриц полином степени  $n = 2^{k-1}$  умножается на другой полином той же степени. Произведение полиномов  $a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots + a_n\zeta^n$  и  $b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \dots + b_n\zeta^n$  дает полином степени  $2n = 2^k$  с коэффициентами  $c_j, j = 0, 1, \dots, 2n$ . Если дополнить нулевыми коэффициентами оба исходных полинома до степени  $2n$ , то коэффициенты  $c_j$  результирующего полинома можно представить в виде дискретной свертки:

$$c_j = \sum_{s=0}^j a_s b_{j-s}, \quad j = 0, 1, \dots, 2n. \quad (4.1)$$

Прямое вычисление свертки потребует  $\sum_{j=0}^{2n} (j+1) = 2n^2 + 3n + 1$  умножений и почти столько же сложений. Число арифметических операций можно значительно уменьшить, если применить теорему о свертке. Согласно этой теореме свертку (4.1) можно вычислить как обратное дискретное преобразование Фурье от почленного произведения векторов дискретных преобразований Фурье от коэффициентов исходных массивов:

$$c = \text{IFFT}(\text{FFT}(a) \cdot \text{FFT}(b)). \quad (4.2)$$

Здесь точка “ $\cdot$ ” обозначает почленное произведение векторов, дискретных фурье-образов полиномов  $a$  и  $b$ , а прямое и обратное дискретные преобразования Фурье обозначены как  $\text{FFT}$  и  $\text{IFFT}$  соответственно, что указывает на использование быстрого дискретного преобразования Фурье (БПФ — fast Fourier transform) (см. [20]).

Как известно, быстрые дискретные преобразования Фурье для массива размером  $N = 2^M$  требуют всего порядка  $O(NM) = O(N \log_2 N)$  умножений. Оценку полного числа умножений пары полиномов, с учетом почленного умножения фурье-образов в (4.2), дает сумма  $\sum_{k=1}^{M-1} (2^k (k+2)) 2^{M-k} = NM^2/2 + 3/2 NM - 2N$ . В результате для итогового числа операций умножения для такого “супер-быстрого” алгоритма получаем асимптотическую оценку

$$O(N(\log_2^2 N + 3 \log_2 N)). \quad (4.3)$$

В оценке (4.3) помимо квадратичного оставлено линейное по  $\log_2 N$  слагаемое, которое для диапазона умеренных значений  $M = \log_2 N \sim 7-13$  дает заметный вклад в итоговую оценку числа операций умножения. Мы не приводим здесь оценку числа операций сложения, полагая, что оценка числа умножений дает вполне удовлетворительную асимптотическую оценку полного числа арифметических операций.

В процессе расчета произведения пары матричных полиномов на каждом шаге перемножения требуется с помощью БПФ вычислять девять полиномов, по числу элементов матрицы размером  $3 \times 3$ . В работе [21], где рассматривалось быстрое перемножение полиномов с матричными коэффициентами с помощью теоремы о свертке и ДПФ, отмечается, что число вычислений ДПФ можно уменьшить, учитывая, что каждый полином как элемент матрицы размером, например,  $3 \times 3$  в процессе вычисления произведений матриц трижды подвергается преобразованию Фурье. Использование памяти для запоминания результата БПФ позволяет выполнить только одно преобразование, и тем самым заметно сократить число требуемых арифметических операций. Такую же экономию числа операций может давать матричный вариант быстрого ДПФ для матричных полиномов, коэффициенты которых представляют собой некоммутирующие в общем случае матрицы. Матричный вариант БПФ кратко рассмотрен в разд. 6.

## 5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЗР

Для тестирования алгоритма использовалось следующее точное решение системы Манакова – гиперболический секанс (см. [22], [23]):

$$\begin{aligned} q(x, t = 0) &= A \operatorname{sch}(x - x_c) \sin(\varphi), \\ p(x, t = 0) &= A \operatorname{sch}(x - x_c) \cos(\varphi), \end{aligned}$$

где  $\varphi$  – угол, определяющий поляризацию,  $A$  – амплитуда секанса,  $x_c$  – координата его центра. Спектральные коэффициенты отражения для такого решения для непрерывного спектра (вещественные  $\lambda$ ) имеют следующий вид:

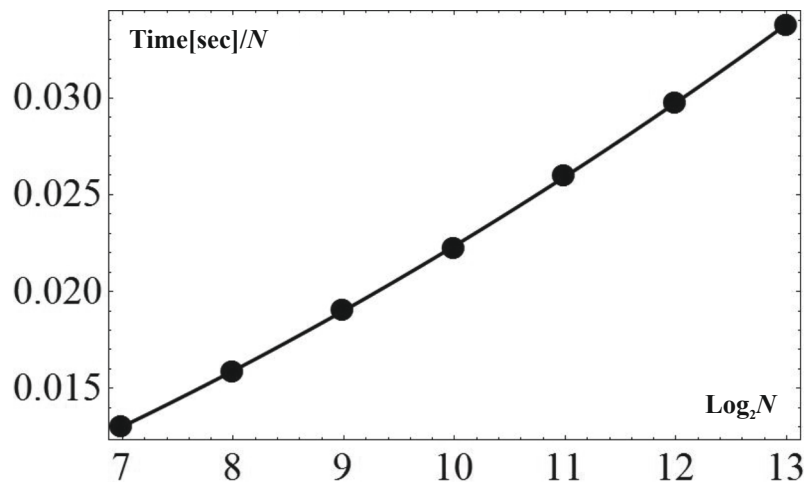
$$r_1(\lambda) = -\frac{\sin(\pi A)}{\operatorname{ch}(\pi \lambda)} \frac{\Gamma(-i\lambda + A + \frac{1}{2})\Gamma(-i\lambda - A + \frac{1}{2})}{\Gamma(-i\lambda + \frac{1}{2})^2} e^{-2i\lambda x_c} \sin(\varphi), \quad (5.1)$$

$$r_2(\lambda) = -\frac{\sin(\pi A)}{\operatorname{ch}(\pi \lambda)} \frac{\Gamma(-i\lambda + A + \frac{1}{2})\Gamma(-i\lambda - A + \frac{1}{2})}{\Gamma(-i\lambda + \frac{1}{2})^2} e^{-2i\lambda x_c} \cos(\varphi). \quad (5.2)$$

Здесь  $\Gamma$  – гамма-функция Эйлера. Гиперболический секанс – это, по существу, решение системы Захарова–Шабата, “повернутое” на поляризационный угол  $\varphi$ . Помимо непрерывного спектра гиперболический секанс порождает также и дискретный спектр (см. [22], [23]). Прямая ЗР для секанс-потенциала рассматривалась на интервале  $x \in [-30, 30]$  при следующем наборе параметров:  $A = 0.25$ ,  $\varphi = 2\pi/3$ . Численное моделирование прямой задачи рассеяния с помощью представленного супер-быстрого алгоритма и сравнение результатов расчетов с точными формулами (5.1), (5.2) показало, что при увеличении размера  $N$  задачи (размера дискретной сетки) вдвое, среднеквадратичная норма ошибки расчета спектральных коэффициентов отражения падает в 4 раза, что подтверждает второй порядок точности расчетов. В качестве примера приведем значения евклидовых норм  $\varepsilon$  абсолютной ошибки расчета вектора импульсного отклика (5.1), (5.2) при  $N = 2^{11}$  и  $N = 2^{12}$ :  $\varepsilon = 0.00014385$  и  $\varepsilon = 0.00003597$  соответственно. Отношение этих ошибок равно 3.99917.

В ходе численного моделирования рассматривалась зависимость времени решения прямой задачи рассеяния Time от размера задачи  $N$ . Эта зависимость иллюстрируется на фиг. 1.

График на фиг. 1 показывает, что зависимость времени расчета Time (в секундах), деленного на размер задачи  $N$ , хорошо аппроксимируется квадратичной зависимостью  $a + bM + cM^2$ . Выше, на примере операций умножения, уже отмечалось, что при умеренных значениях  $M$  линейное по  $M$  слагаемое дает заметный вклад, сравнимый с вкладом квадратичного. Асимптотически, с ростом  $M$ , основной вклад станет давать квадратичное по  $M$  слагаемое, и итоговая оценка числа операций будет соответствовать оценке  $O(N \log_2^2 N)$ .



**Фиг. 1.** Зависимость времени расчета Time (в секундах) от размера задачи  $N$  для прямой задачи рассеяния для системы Манакова “супер-быстрым” алгоритмом. Кружки — дискретные значения  $\text{Time}/N$ . Сплошная кривая — аппроксимация параболой от аргумента  $M = \text{Log}_2 N$ .

## 6. МАТРИЧНЫЙ АЛГОРИТМ БПФ

Для локализованных потенциалов в предыдущих разделах был представлен быстрый алгоритм решения прямой задачи рассеяния, второго порядка точности, основанный на теореме о свертке и быстром преобразовании Фурье. В поисках еще большего ускорения расчетов был реализован матричный вариант быстрого преобразования Фурье, когда коэффициенты ряда дискретного преобразования Фурье представляют собой некоммутирующие матрицы, возникающие при парном перемножении матриц, начиная с биномов  $A_m + \zeta B_m$ .

Детальный анализ алгоритма БПФ по основанию 2 для варианта, предложенного Кули и Тьюки (см. [20]), показывает, что этот алгоритм не требует коммутативности коэффициентов дискретного ряда Фурье. Следовательно, его можно распространить на конечные ряды Фурье, коэффициенты которых представляют собой некоммутирующие объекты, например, матрицы. Для некоммутирующих коэффициентов рядов Фурье теорема о свертке выполняется, если не изменяется исходный порядок умножения. Такой матричный алгоритм БПФ был реализован и протестирован, на примере теоремы о свертке, для конечных рядов с коэффициентами в виде случайных матриц. Матричный алгоритм заметно упрощает схему алгоритма, и ожидалось, что он позволит уменьшить число арифметических операций и вызовов тригонометрических функций. Однако больших преимуществ в скорости расчета матричный алгоритм БПФ не дает, если применение “обычного” скалярного алгоритма БПФ достаточно оптимизировано.

Ускорение расчетов прямой ЗР в перспективе можно достичь с помощью так называемых теоретико-числовых преобразований Ферма, Мерсенна и др (см. [24]) в суррогатных полях, например, в полях Галуа, где тригонометрические функции заменяются на целочисленные выражения. Теоретико-числовые “спектры” хотя и не имеют того физического смысла, какой имеют фурье-спектры, однако для них тоже выполняется теорема о свертке. Использование целочисленной арифметики при расчете сверток полиномов позволит в будущем еще более ускорить расчеты прямой ЗР.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен алгоритм “супер-быстрого” решения прямых задач рассеяния для непрерывного спектра системы Манакова, ассоциированной с векторным нелинейным уравнением Шрёдингера модели Манакова, требующий для дискретной сетки размером  $N$  асимптотически порядка  $O(N \text{Log}_2^2 N)$  арифметических операций. Алгоритм имеет второй порядок точности для гладких локализованных (убывающих на бесконечности) решений прямой задачи рассеяния для непрерывного спектра системы Манакова. Этот алгоритм находит полиномиальную аппроксимацию зависимости спектральных данных (коэффициентов рассеяния  $a(\lambda)$ ,  $b_{1,2}(\lambda)$ ) от спектрального параметра  $\zeta = e^{i\lambda\hbar}$ , которые определяют спектральные коэффициенты отражения  $r_{1,2}(\lambda)$ . Для ускорения расчетов прямой задачи рассеяния для системы Манакова используется теорема о свертке и быстрое преобразование Фурье. Предложен и апробирован матричный вариант быстрого преобразования Фурье, когда коэффициенты ряда дискретного преобразования Фурье представляют собой некоммутирующие матри-

цы. При применении матричного алгоритма заметно упрощается структура алгоритма и оптимизируется число вычислений тригонометрических функций и арифметических операций. Впрочем, скалярный вариант алгоритма, при должной оптимизации, не уступает в быстродействии матричному алгоритму. Полученная полиномиальная аппроксимация спектральной зависимости коэффициентов рассеяния может быть использована в дальнейшем для поиска дискретного спектра системы Манакова.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
2. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Ж. эксперим. и теор. физ. 1971. Т. 61. С. 118.
3. Манаков С. В. К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн // Ж. эксперим. и теор. физ. 1973. Т. 65. № 2. С. 505.
4. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1995. 848 с.
5. Richardson D. J. Filling the Light Pipe // Science. 2010. V. 330 (6002). P. 327.
6. Boffetta G. and Osborne A. R. Computation of the direct scattering transform for the nonlinear Schroedinger equation // J. Comput. Phys. 1992. V. 102. P. 252.
7. Burtsev S., Camassa R., Timofeyev I. Numerical algorithms for the direct spectral transform with applications to nonlinear Schroedinger type systems // J. Comp. Phys. 1998. V. 147. № 1. P. 166.
8. Белай О. В., Фрумин Л. Л., Чернявский А. Е. Алгоритмы решения обратной задачи рассеяния для модели Манакова. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 64. № 2.
9. Chernyavsky A. E., Frumin L. L. Inverse scattering transform algorithm for the Manakov system // Comput. Optic. 2023. V. 47. № 6. P. 856.
10. Белай О. В. Быстрый численный метод второго порядка точности решения обратной задачи рассеяния // Квант. электроника. 2022. Т. 52. № 11. С. 1039.
11. Frumin L. L. Algorithms for solving scattering problems for the Manakov model of nonlinear Schrodinger equations // J. Inv. and Ill-posed Probl. 2021. V. 29. № 2. P. 369.
12. Воеводин В. В., Тыртышиников Е. Е. Вычислительные процессы с тёплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987. 320 с.
13. Тыртышиников Е. Е. Тёплицевы матрицы, некоторые их аналоги и приложения. М.: Изд. АН СССР, 1989. 310 с.
14. Долматов А. Р., Коняев Д. А. Обобщение сверхбыстрых алгоритмов LayerPeeling для системы уравнений Манакова // Вестн. Московского ун-та. 2022. № 1. С. 23.
15. Wahls S., Poor H. V. Introducing the fast nonlinear Fourier transform. // Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech Signal Process. (ICASSP). 2013. P. 5780.
16. Борн М., Вольф Л. Ф. Основы оптики. М.: Наука, 1977. 720 с.
17. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
18. Maimistov A. I., Basharov A. M. Nonlinear optical waves. Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 670 p.
19. Горбенко Н. И., Ильин В. П., Фрумин Л. Л. Расчет рассеяния на Брэговской решетке рекурсией трансформатриц на неравномерной сетке // Автометрия. 2019. Т. 55. № 1. С. 40.
20. Cooley, J. W., Tukey, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series // Math. Comput. 1965. V. 19. P. 297.



21. Бусленко А.С., Икрамов Х.Д. Об умножении числовых и матричных степенных рядов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 1. С. 3.
22. Satsuma J., Yajima N. B. Initial value problems of one-dimensional self-modulation of nonlinear waves in dispersive media // Progress Theor. Phys. Suppl. 1974. Т. 55. С. 284.
23. Мулладжанов Р.И., Гелаиш А.А. Разложение Магнуса для прямой задачи рассеяния: схемы высокого порядка // Изв. высш. уч. заведений. Радиофизика. 2020. Т. 63. № 9–10. С. 874.
24. Маккеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 264 с.

## A “SUPER-FAST” ALGORITHM FOR SOLVING THE DIRECT SCATTERING PROBLEM FOR THE MANAKOV SYSTEM

L. L. Frumin\*, A. E. Chernyavsky\*\*, O. V. Belay\*\*\*

630090 Novosibirsk, Akademika Koptyuga Ave., 1, Institute of Automation and Electrometry, SB RAS, Russia

\*e-mail: lfrumin@iae.nsk.su

\*\*e-mail: alexander.cher.99@gmail.com

\*\*\*e-mail: ovbelai@gmail.com

Received: 10.05.2024

Revised: 29.07.2024

Accepted: 23.08.2024

**Abstract.** The construction of an accelerated algorithm for solving the direct scattering problem for the continuous spectrum of the Manakov system associated with the vector nonlinear Schrodinger equation of the Manakov model is considered. The numerical formulation of the problem leads to the problem of quickly calculating the products of polynomials dependent on the spectral parameter of the problem. For localized solutions, the so-called “super-fast” algorithm for solving the direct scattering problem of the second order of accuracy is presented, based on the convolution theorem and the fast Fourier transform, which requires asymptotically only  $O(N \log^2 N)$  arithmetic operations for a discrete grid of size  $N$ . To speed up the calculation of the reflection coefficient spectra, a matrix variant of the fast Fourier transform is proposed and tested, when the coefficients of a series of discrete Fourier transforms are non-commuting matrices. Numerical simulation using the example of the exact solution of the Manakov system (hyperbolic secant) confirmed the high calculation speed and the second order of accuracy of the algorithm approximation.

**Keywords:** Schrodinger equation, Manakov system, direct scattering problem, transfer matrix, convolution, Fourier transform.