

К ВОПРОСУ О СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛНАХ НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ. ВТОРОЙ МЕТОД СТОКСА

© 2024 г. А. И. Руденко¹, *

¹236022 Калининград, Советский проспект, 1, ФГБОУ ВО «КГТУ», Россия

*e-mail: aleksej.rudenko75@bk.ru

Поступила в редакцию 15.05.2024 г.

Переработанный вариант 06.06.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Рассматривается классическая задача о стационарных волнах на поверхности идеальной несжимаемой однородной жидкости конечной глубины. Подход к решению задачи родственен второму методу Стокса, но имеет следующие отличия: благодаря полученному одномерному интегро-дифференциальному уравнению с кубической нелинейностью для профиля стационарной волны на поверхности жидкости конечной глубины исходная задача сведена к одномерной. Решение получено до седьмого приближения. Библ. 19. Фиг. 5.

Ключевые слова: оператор свертки, стационарная периодическая волна, потенциальное движение жидкости, профиль волны, след функции тока, второй метод Стокса.

DOI: 10.31857/S0044466924110096, EDN: KGKYKO

ВВЕДЕНИЕ

При рассмотрении волновых движений в жидкости принято выделять поверхностные гравитационные волны, природа которых обусловлена определяющей возвращающей силой и может быть описана структурой динамических уравнений и граничных условий, определяющих основную характеристику волны — дисперсионное соотношение. При решении задач возникают проблемы, связанные с нелинейностью граничных условий на свободной поверхности, которая представляет собой неизвестную функцию, требующую уточнения.

Визуальные наблюдения Джона Скотта Рассела за уединенной волной большой амплитуды повлияли на теоретические исследования Джорджа Габриеля Стокса, который предложил математическую постановку нелинейной краевой задачи о стационарной волне на поверхности идеальной жидкости, не имеющую точного аналитического решения. Стоксом было предложено два метода в решении поставленной задачи: суть первого метода заключалась в специальном варианте теории возмущений для случая жидкости бесконечной глубины; содержание второго метода состоит в том, что исходная нелинейная краевая задача отображается на полосу в плоскости комплексного переменного и тогда новая краевая задача остается нелинейной, но оказывается существенно проще исходной задачи, поскольку обе границы становятся прямолинейными [1–4].

Стационарные периодические волновые движения жидкости конечной глубины были определены на основе второго метода Стокса в работах Дэ и Сретенского [5, 6]. В монографии [5] для изучения нелинейной краевой задачи о строении и характеристиках стационарной нелинейной периодической волны использован лагранжев подход к описанию динамики жидкости, в [6] предложено усовершенствование второго метода путем сведения определения волн к решению бесконечной системы кубических уравнений.

В работе [7] найден ряд точных решений уравнений Эйлера со свободной поверхностью в присутствии сил гравитации, которые получены путем суммирования ряда Вайтинга; в статье [8] решение задачи ищется в виде ряда, первый член которого соответствует теории мелкой воды. Существенные результаты получены и в таких работах, как [9–18], но несмотря на это данная задача требует дополнительного рассмотрения.

Основной целью исследования является вывод и анализ приближенных выражений профиля волны и основных ее характеристик для случая жидкости конечной глубины. Для достижения цели пришлось видоизменить методику Стокса. Это сделано следующим образом. Введен след функции тока, с помощью которой исходная форма кинематического условия упрощена путем интегрирования. В свою очередь исходная форма динамического условия превращена в новую с помощью интеграла Бернулли–Коши, что позволило исключить

из рассмотрения гидродинамическое давление. Далее введен интегральный оператор типа свертки, благодаря которому существенно упрощена процедура решения нелинейной краевой задачи. Затем определены четыре функции одной переменной, основными из которых являются уровень волны (то есть форма свободной поверхности) и след функции тока на нулевом горизонте. Все выполненные действия позволили решение исходной двумерной задачи свести к решению трех систем одномерных уравнений. Получено решение этих систем и выполнен его анализ.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О СТРОЕНИИ И ХАРАКТЕРИСТИКАХ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Предположим, что на свободной поверхности идеальной однородной несжимаемой жидкости конечной глубины h сформировалась система стационарных нелинейных волн, которая движется с некоторой постоянной скоростью. Рассматривается двумерный случай. Система отсчета движется вместе с системой волн, тогда движение можно приять за стационарное; ось x совместим с средним горизонтальным уровнем, ось y направим вертикально вверх. Горизонтальную и вертикальную компоненты скорости обозначим через $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Для профиля волны и среднего значения скорости течения введем следующую символику: $\eta = \eta(x)$, c .

Используя относительный потенциал скорости $u - iv = cw'(z)$, $z = x + iy$, $w = \varphi + i\psi$, где φ, ψ — относительные потенциал скорости и след функции тока, будем считать, что условие непротекания на дне имеет вид: $\psi = 0$ при $y = -h$. Значение следа функции тока на свободной поверхности, оно постоянно вдоль поверхности, обозначим величиной d . Пусть $d = Q/c$, Q — расход жидкости через каждую вертикаль. Отсюда вытекает, что кинематическое граничное условие на свободной поверхности имеет вид: $\psi = d$ при $y = \eta(x)$. Исходя из интеграла Бернулли—Коши, запишем динамическое условие: $2^{-1}(u^2 + v^2) + g\eta(x) = P$ при $y = \eta(x)$. Заметим, что P — постоянная величина.

В постановке задачи необходимо отдельно выделить, что в отсутствии волн $d = h$. Если принять во внимание волновые движения, то данное равенство нарушается, тогда величину d назовем динамической глубиной.

Следуя второму методу Стокса область течения с помощью относительного комплексного потенциала скорости конформно отображается на полосу (в случае жидкости конечной глубины) или полуплоскость (в случае жидкости бесконечной глубины); в случае жидкости конечной глубины образом этого отображения будет полоса $0 < \psi < d$.

Двумерная задача. Требуется определить вид непрерывной функции $\eta(\varphi)$ и вид гармонической функции $y = y(\varphi, \psi)$, которые удовлетворяют следующим граничным условиям (они являются следствием кинематического и динамического условий на свободной поверхности):

$$y(\varphi, 0) = -h, y(\varphi, d) = \eta(\varphi), \quad (1)$$

$$\left(\frac{2P}{c^2} - \frac{2g\eta(\varphi)}{c^2} \right) (y_\varphi^2(\varphi, d) + y_\psi^2(\varphi, d)) = 1, \quad (2)$$

а также условиям нулевого среднего: $\langle \eta(\varphi) \rangle = 0$, $\langle y(\varphi, \psi) \rangle - \psi = 0$.

Проведем предварительный этап в решении поставленной задачи, то есть рассмотрим случай линейных поверхностных волн. В качестве первого шага рассмотрим решение задачи в линейном приближении. Линеаризации потребует только динамическое условие (2) при условии, что $d = h$:

$$-\frac{2g\eta(\varphi)}{c_0^2} + \frac{2P}{c_0^2} (2y_\psi(\varphi, d) - 1) = 1, \quad (3)$$

c_0 — фазовая скорость линейных волн. Задача в линейном приближении сводится к решению уравнения Лапласа для функции $y(\varphi, \psi)$, которая удовлетворяет условиям (1), (3). Данное решение ищем в виде синусоидальной волны с симметричным профилем относительно точки $\varphi = 0$. Получаем

$$\eta(\varphi) = a \cos(k\varphi), \quad y(\varphi, \psi) = \psi - h + A \cos(k\varphi) \operatorname{sh}(k\psi), \quad (4)$$

k — волновое число, $a = A \operatorname{sh}(kh)$ — амплитуда основной гармоники. Решение (4) является основой выбора разложений характеристик нелинейных стационарных волн в виде частичных сумм рядов по степеням амплитуды основной гармоники.

В качестве второго подготовительного этапа рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение с кубической нелинейностью для профиля стационарной поверхностной волны $\eta(\varphi)$. Для этого выразим обе частные

производные $y_\varphi(\varphi, d)$ и $y_\psi(\varphi, d)$ в (2) через $\eta(\varphi)$. Первое выражение получим из (1):

$$y_\varphi(\varphi, d) = \eta'(\varphi). \quad (5)$$

Для определения $y_\psi(\varphi, d)$ введем соответствие $V : y(\varphi, 0) \rightarrow y_\psi(\varphi, 0)$, которое является интегро-дифференциальным оператором типа свертки [14]. При решении рассматриваемой задачи достаточно будет указать его действие на косинусы.

Далее построим гармоническую функцию $y(\varphi, \psi)$, удовлетворяющую двум граничным условиям: $y(\varphi, 0) = 0$, $y(\varphi, d) = \eta(\varphi) = a \cos(k\varphi)$. Такая функция будет иметь вид: $y(\varphi, \psi) = a \cos(k\varphi) \operatorname{sh}(k\psi) / \operatorname{sh}(kd)$. Откуда получаем, что $y_\psi(\varphi, 0) = V(a \cos(k\varphi)) = ak \operatorname{cth}(kd) \cos(k\varphi)$. Так, например, $V(\cos(k\varphi)) = k \operatorname{cth}(kd) \cos(k\varphi)$.

Учитывая тот факт, что $y(\varphi, \psi) = \psi^+$ — периодическая функция, то из свойств оператора V следует равенство $y_\psi(\varphi, 0) = 1 + V\eta(\varphi)$. После подстановки данного равенства и (5) в динамическое условие (2), получаем уравнение для профиля волны:

$$(2P - 2\eta(\varphi)) \left((1 + V\eta(\varphi))^2 + (\eta'(\varphi))^2 \right) = \frac{c^2}{g}. \quad (6)$$

К уравнению (6) присоединим уравнение, определяющее зависимость x от φ , которое получается из соотношения для сопряженных гармонических функций $x(\varphi, \psi)$ и $y(\varphi, \psi)$: $x_\varphi(\varphi, \psi) = y_\psi(\varphi, \psi)$, и имеет следующий вид:

$$x'(\varphi) = 1 + V\eta(\varphi). \quad (7)$$

В уравнениях (6) и (7) обозначения: c — скорость волны, P — константа интегрирования, g — ускорение свободного падения, φ — значение относительного потенциала скорости частиц жидкости на свободной поверхности, x — горизонтальная декартова координата.

Результатом проведения двух предварительных этапов является то, что двумерная задача о строении и характеристиках стационарных волн на поверхности идеальной несжимаемой однородной жидкости конечной глубины сведена к одномерной, в которой необходимо определить константы c , P и функцию $\eta(\varphi)$.

2. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Динамическое условие (6) для случая одномерной задачи можно переписать в следующем виде:

$$\left(2P - \frac{2g\eta(\varphi)}{c^2} \right) W(\varphi) = 1, \quad W(\varphi) = (1 + V\eta(\varphi))^2 + (\eta'(\varphi))^2. \quad (8)$$

Новая функция $W(\varphi)$ имеет следующий физический смысл: ее значение равно обратному квадрату скорости на поверхности жидкости. Решение системы (8) позволяет определить профиль стационарной волны и нелинейное дисперсионное соотношение. Новая математическая постановка одномерной задачи будет следующей.

Одномерная задача. Определить константы c , P и функции $\eta(\varphi)$, $W(\varphi)$, удовлетворяющие следующим уравнениям для профиля стационарной волны и ее характеристик:

$$(2P - 2\eta(\varphi)) W(\varphi) = \frac{c^2}{g}, \quad W(\varphi) = \left((1 + V\eta(\varphi))^2 + (\eta'(\varphi))^2 \right),$$

и условиям периодичности и нулевого среднего:

$$\eta(\varphi + L) = \eta(\varphi), \quad W(\varphi + L) = W(\varphi), \quad L = 2\pi/k, \quad \eta(\varphi) = 0.$$

Таким образом, решение двумерной краевой задачи сводится к решению системы двух дифференциально-алгебраических уравнений (8). Решение системы будем искать с точностью до седьмого приближения по степеням амплитуды основной гармоники.

Процедуру решения задачи начнем с того, что исходные представления для профиля волны $\eta(\varphi)$ и вспомогательной функции $W(\varphi)$ запишем в виде тригонометрических многочленов седьмой степени:

$$\eta(\varphi) = \eta_1 \cos(k\varphi) + \eta_2 \cos(2k\varphi) + \eta_3 \cos(3k\varphi) + \eta_4 \cos(4k\varphi) + \eta_5 \cos(5k\varphi) + \eta_6 \cos(6k\varphi) + \eta_7 \cos(7k\varphi),$$

$$W(\varphi) = W_0 + W_1 \cos(k\varphi) + W_2 \cos(2k\varphi) + W_3 \cos(3k\varphi) + W_4 \cos(4k\varphi) + W_5 \cos(5k\varphi) + W_6 \cos(6k\varphi) + W_7 \cos(7k\varphi).$$

Условия периодичности и нулевого среднего выполняются автоматически. Далее выполним подстановку тригонометрических многочленов в систему дифференциально-алгебраических уравнений (8), в результате получаем систему алгебраических уравнений для коэффициентов рядов:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{g} &= PW_0 - \sum_{j=1}^{+\infty} \eta_j W_j, \\ PW_n - \sum_{j=0}^{n-1} \eta_{n-j} W_j - \sum_{j=0}^{+\infty} (\eta_{n+j} W_j + \eta_{j+1} W_{j+n+1}) &= 0, \\ W_n &= \delta_{n0} + 2knR_n\eta_n + 2^{-1} (2 - \delta_{n0}) k^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j(j+n) (R_j R_{n+j} + 1) \eta_j \eta_{n+j} + \\ &+ 2^{-1} k^2 \sum_{j=1}^{n-1} j(n-j) (R_j R_{n-j} - 1) \eta_j \eta_{n-j}, \\ n &= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) расчетная формула для R_n имеет вид:

$$\begin{aligned} R_n &= \text{cth}(nkd) = ((R+1)^n + (R-1)^n) / ((R+1)^n - (R-1)^n), \quad n \in N, \\ R &= \text{cth}(kd). \end{aligned}$$

Решение (9), системы алгебраических уравнений для коэффициентов тригонометрических многочленов, будем искать в виде разложений по степеням (ka) с точностью до седьмого приближения.

Тогда частичные суммы для степенных рядов для констант c , P имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{g} &= (kR)^{-1} \left(c_0 + c_1(ka)^2 + c_2(ka)^4 + c_3(ka)^6 \right), \\ P &= (kR)^{-1} \left(P_0 + P_1(ka)^2 + P_2(ka)^4 + P_3(ka)^6 \right). \end{aligned}$$

Частичные суммы степенных рядов для коэффициентов рядов запишем в виде:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= a = k^{-1} (ka), \\ \eta_2 &= k^{-1} \left(\eta_{20}(ka)^2 + \eta_{21}(ka)^4 + \eta_{22}(ka)^6 \right), \\ \eta_3 &= k^{-1} \left(\eta_{30}(ka)^3 + \eta_{31}(ka)^5 + \eta_{32}(ka)^7 \right), \\ \eta_4 &= k^{-1} \left(\eta_{40}(ka)^4 + \eta_{41}(ka)^6 \right), \\ \eta_5 &= k^{-1} \left(\eta_{50}(ka)^5 + \eta_{51}(ka)^7 \right), \\ \eta_6 &= k^{-1} \eta_{60}(ka)^6, \\ \eta_7 &= k^{-1} \eta_{70}(ka)^7, \\ W_0 &= W_{00} + W_{01}(ka)^2 + W_{02}(ka)^4 + W_{03}(ka)^6, \\ W_1 &= W_{10}(ka) + W_{11}(ka)^3 + W_{12}(ka)^5 + W_{13}(ka)^7, \\ W_2 &= W_{20}(ka)^2 + W_{21}(ka)^4 + W_{22}(ka)^6, \\ W_3 &= W_{30}(ka)^3 + W_{31}(ka)^5 + W_{32}(ka)^7, \\ W_4 &= W_{40}(ka)^4 + W_{41}(ka)^6, \\ W_5 &= W_{50}(ka)^5 + W_{51}(ka)^7, \\ W_6 &= W_{60}(ka)^6, \\ W_7 &= W_{70}(ka)^7. \end{aligned}$$

Часть степенного ряда для глубины жидкости h :

$$h = Fd, \quad F = F_0 + F_1(ka)^2 + F_2(ka)^4 + F_3(ka)^6. \quad (10)$$

В результате подстановки частичных сумм степенных рядов в систему уравнений для коэффициентов рядов (9) сначала получаем следующие значения коэффициентов степенных рядов:

$$c_0 = P_0 = \eta_{10} = W_{00} = 1, \quad W_{10} = 2R, \quad F_0 = 1. \quad (11)$$

Далее выпишем три системы уравнений для коэффициентов степенных рядов.

Система 1 уравнений для коэффициентов степенных рядов $c_1, P_1, \eta_{20}, W_{20}, W_{01}, W_{11}, F_1, R_2$:

$$-2R\eta_{20} + W_{20} = A_{20}, \quad -4R_2\eta_{20} + W_{20} = B_{20}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} A_{20} &= R\eta_{10}W_{10}, \quad B_{20} = 2^{-1}(R^2 - 1)\eta_{10}^2, \quad W_{01} = 2^{-1}(R^2 + 1), \\ W_{11} &= 2(RR_2 + 1)\eta_{10}\eta_{20}, \quad c_1 = P_1W_{00} + W_{01} - R\eta_{10}W_{10}, \quad F_1 = (2kd)^{-1}R, \\ P_1 &= W_{01} - 2^{-1}R^{-1}W_{11} + 2^{-1}\eta_{20}W_{10} + 2^{-1}\eta_{10}W_{20}, \\ R_2 &= \left((R+1)^2 + (R-1)^2\right) / \left((R+1)^2 - (R-1)^2\right). \end{aligned}$$

Система 2 уравнений для коэффициентов степенных рядов $c_2, P_2, \eta_{30}, \eta_{21}, W_{30}, W_{21}, W_{02}, W_{12}, F_2, R_3$:

$$-2R\eta_{30} + W_{30} = A_{30}, \quad -6R_3\eta_{30} + W_{30} = B_{30}, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A_{30} &= R\eta_{20}W_{10} + R\eta_{10}W_{20}, \quad B_{30} = 2(RR_2 - 1)\eta_{10}\eta_{20}, \\ -2R\eta_{21} + W_{21} &= A_{21}, \quad -4R_2\eta_{21} + W_{21} = B_{21}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{21} &= -P_1W_{20} + R\eta_{30}W_{10} + R\eta_{10}W_{30} + 2R\eta_{20}W_{01} + R\eta_{10}W_{11}, \quad B_{21} = 3(RR_3 + 1)\eta_{10}\eta_{30}, \\ W_{02} &= 2(R_2^2 + 1)\eta_{10}^2, \quad W_{12} = 2(RR_2 + 1)\eta_{10}\eta_{21} + 6(R_2R_3 + 1)\eta_{20}\eta_{30}, \\ F_2 &= (2kd)^{-1}R_2\eta_{20}^2, \quad G_3 = (3R_3 - R)^{-1}, \quad R_3 = \left((R+1)^3 + (R-1)^3\right) / \left((R+1)^3 - (R-1)^3\right), \\ c_2 &= P_2W_{00} + P_1W_{01} + W_{02} - R\eta_{20}W_{20} - R\eta_{10}W_{11}, \\ P_2 &= -2^{-1}R^{-1}P_1W_{11} + W_{02} - 2^{-1}R^{-1}W_{12} + 2^{-1}\eta_{21}W_{10} + 2^{-1}\eta_{30}W_{20} + 2^{-1}\eta_{20}W_{30} + 2^{-1}\eta_{20}W_{11} + 2^{-1}\eta_{10}W_{21}. \end{aligned}$$

Система 3 уравнений для коэффициентов степенных рядов $c_3, P_3, \eta_{40}, \eta_{31}, \eta_{22}, W_{40}, W_{31}, W_{22}, W_{03}, W_{13}, F_3, R_4$:

$$-2R\eta_{40} + W_{40} = A_{40}, \quad -8R_4\eta_{40} + W_{40} = B_{40}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} A_{40} &= R\eta_{30}W_{10} + R\eta_{20}W_{20} + R\eta_{10}W_{30}, \quad B_{40} = 2(R_2^2 - 1)\eta_{20}^2 + 3(RR_3 - 1)\eta_{10}\eta_{30}, \\ -2R\eta_{31} + W_{31} &= A_{31}, \quad -6R_3\eta_{31} + W_{31} = B_{31}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{31} &= -P_1W_{30} + R\eta_{40}W_{10} + R\eta_{21}W_{10} + R\eta_{10}W_{40} + 2R\eta_{30}W_{01} + R\eta_{20}W_{11} + R\eta_{10}W_{21}, \\ B_{31} &= 4(RR_4 + 1)\eta_{10}\eta_{40} + 2(RR_2 - 1)\eta_{10}\eta_{21}, \quad -2R\eta_{22} + W_{22} = A_{22}, \quad -4R_2\eta_{22} + W_{22} = B_{22}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_{22} &= -P_1W_{21} - P_2W_{20} + R\eta_{31}W_{10} + R\eta_{40}W_{20} + R\eta_{20}W_{40} + 2R\eta_{21}W_{01} + \\ &+ R\eta_{30}W_{11} + R\eta_{10}W_{31} + R\eta_{20}W_{02} + R\eta_{10}W_{12}, \\ B_{22} &= 8(R_2R_4 + 1)\eta_{20}\eta_{40} + 3(RR_3 + 1)\eta_{10}\eta_{31}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{03} &= 4(R_2^2 + 1)\eta_{20}\eta_{21} + 2^{-1}3^2(R_3^2 + 1)\eta_{30}^2, \\
W_{13} &= 2(RR_2 + 1)\eta_{10}\eta_{22} + 6(R_2R_3 + 1)\eta_{21}\eta_{30} + 6(R_2R_3 + 1)\eta_{20}\eta_{31} + 3 \times 2^2(R_3R_4 + 1)\eta_{30}\eta_{40}, \\
c_3 &= P_3W_{00} + P_2W_{01} + P_1W_{02} + W_{03} - R\eta_{21}W_{20} - R\eta_{30}W_{30} - R\eta_{20}W_{21} - R\eta_{10}W_{12}, \\
P_3 &= -2^{-1}R^{-1}P_2W_{11} - 2^{-1}R^{-1}P_1W_{12} + W_{03} - 2^{-1}R^{-1}W_{13} + 2^{-1}\eta_{22}W_{10} + 2^{-1}\eta_{31}W_{20} + 2^{-1}\eta_{40}W_{30} + \\
&\quad + 2^{-1}\eta_{21}W_{30} + 2^{-1}\eta_{30}W_{40} + 2^{-1}\eta_{21}W_{11} + 2^{-1}\eta_{30}W_{21} + 2^{-1}\eta_{20}W_{31} + 2^{-1}\eta_{20}W_{12} + 2^{-1}\eta_{10}W_{22}, \\
F_3 &= (2kd)^{-1}R_2\eta_{20}\eta_{21} + 3(2kd)^{-1}R_3\eta_{30}^2, \\
R_4 &= \left((R+1)^4 + (R-1)^4\right) / \left((R+1)^4 - (R-1)^4\right).
\end{aligned}$$

В результате выполнения необходимых расчетов, решение систем (12)–(14), и в дополнении к значениям коэффициентов степенных рядов (11), получаем три сводки значений коэффициентов степенных рядов.

Сводка 1 значений коэффициентов степенных рядов c_1 , P_1 , η_{20} , W_{20} , W_{01} , W_{11} , F_1 и значений R_2 , G_2 , A_{20} , B_{20} :

$$\begin{aligned}
c_1 &= 2^{-3}(9R^4 - 6R^2 + 5), \quad P_1 = 2^{-3}(3R^2 + 1)^2, \quad \eta_{20} = 2^{-2}R(3R^2 + 1), \\
W_{20} &= 2^{-1}R^2(3R^2 + 5), \quad W_{01} = 2^{-1}(R^2 + 1), \quad W_{11} = 2^{-2}R(R^2 + 3)(3R^2 + 1), \\
F_1 &= (2kd)^{-1}R, \quad R_2 = 2^{-1}R^{-1}(R^2 + 1), \quad G_2 = R, \quad A_{20} = 2R^2, \quad B_{20} = 2^{-1}(R^2 - 1).
\end{aligned}$$

Сводка 2 значений коэффициентов степенных рядов c_2 , P_2 , η_{30} , η_{21} , W_{30} , W_{21} , W_{02} , W_{12} , F_2 и значений R_3 , G_3 , A_{30} , B_{30} , A_{21} , B_{21} :

$$\begin{aligned}
c_2 &= 2^{-9}(3R^2 + 1)(27R^8 + 180R^6 + 306R^4 - 108R^2 + 43), \\
P_2 &= 2^{-9}(3R^2 + 1)(27R^8 + 324R^6 + 354R^4 + 4R^2 - 5), \\
\eta_{30} &= 2^{-6}(3R^2 + 1)(9R^4 + 14R^2 + 1), \\
\eta_{21} &= -2^{-7}R(27R^8 - 36R^6 - 70R^4 + 12R^2 + 3), \\
W_{30} &= 2^{-5}R(27R^6 + 147R^4 + 113R^2 + 1), \\
W_{21} &= -2^{-6}R^2(27R^8 - 36R^6 - 310R^4 - 340R^2 - 45), \\
W_{02} &= 2^{-5}(3R^2 + 1)^2(R^4 + 6R^2 + 1), \\
W_{12} &= 2^{-8}R(27R^{10} + 873R^8 + 2342R^6 + 1674R^4 + 207R^2 - 3), \\
F_2 &= 2^{-5}(2kd)^{-1}R(R^2 + 1)(3R^2 + 1)^2, \\
R_3 &= (3R^2 + 1)^{-1}R(R^2 + 3), \quad G_3 = 2^{-3}R^{-1}(R^2 + 1), \\
A_{30} &= 3R^3(R^2 + 1), \quad B_{30} = 2^{-2}R(R^2 - 1)(3R^2 + 1), \\
A_{21} &= 2^{-2}R^2(15R^4 + 22R^2 + 3), \\
B_{21} &= 3 \times 2^{-6}(R^4 + 6R^2 + 1)(9R^4 + 14R^2 + 1).
\end{aligned}$$

Сводка 3 значений коэффициентов степенных рядов c_3 , P_3 , η_{40} , η_{31} , η_{22} , W_{40} , W_{31} , W_{22} , W_{03} , W_{13} , F_3 и значений A_{40} , B_{40} , A_{31} , B_{31} , A_{22} , B_{22} , R_4 , G_4 :

$$\begin{aligned}
c_3 &= -2^{-15}(5R^2 + 1)^{-1}(10935R^{18} - 51273R^{16} - 693252R^{14} - 1627812R^{12} - 1123758R^{10} - 215054R^8 - \\
&\quad - 39348R^6 - 12180R^4 - 337R^2 + 143), \\
P_3 &= -2^{-15}(5R^2 + 1)^{-1}(3R^2 + 1)(3645R^{16} - 6966R^{14} - 319914R^{12} - 657390R^{10} - 378224R^8 - \\
&\quad - 15394R^6 + 6154R^4 + 70R^2 - 45), \\
\eta_{40} &= 2^{-7}(5R^2 + 1)^{-1}R(R^2 + 1)(135R^8 + 522R^6 + 328R^4 + 38R^2 + 1), \\
\eta_{31} &= -2^{-12}(5R^2 + 1)^{-1}(3R^2 + 1)(1215R^{12} + 648R^{10} - 6633R^8 - 5688R^6 + 477R^4 + 240R^2 + 13), \\
\eta_{22} &= 2^{-13}(5R^2 + 1)^{-1}R(3645R^{16} - 11826R^{14} + 14778R^{12} + 75030R^{10} + 45460R^8 - 6838R^6 - \\
&\quad - 1706R^4 + 210R^2 + 31), \\
W_{40} &= 2^{-6}R^2(5R^2 + 1)^{-1}(135R^{10} + 1557R^8 + 3730R^6 + 2406R^4 + 359R^2 + 5),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{31} &= -2^{-11}(5R^2 + 1)^{-1}R(3645R^{14} + 12879R^{12} - 48627R^{10} - 180057R^8 - 138593R^6 - 26731R^4 - \\
 &\quad - 1385R^2 - 11), \\
 W_{22} &= 2^{-12}(5R^2 + 1)^{-1}R^2(3645R^{16} - 8586R^{14} + 41346R^{12} + 359166R^{10} + 646620R^8 + 407170R^6 + \\
 &\quad + 69230R^4 + 1290R^2 - 265), \\
 W_{03} &= -2^{-13}(567R^{14} - 6723R^{12} - 57297R^{10} - 89347R^8 - 41811R^6 - 4321R^4 + 237R^2 + 39), \\
 W_{13} &= 2^{-14}(5R^2 + 1)^{-1}R(3645R^{18} + 3969R^{16} - 980172R^{14} - 3964332R^{12} - 5210810R^{10} - 2614834R^8 - \\
 &\quad - 385244R^6 + 4644R^4 + 3109R^2 + 57), \\
 F_3 &= -2^{-13}(kd)^{-1}R(3R^2 + 1)(189R^{10} - 1629R^8 - 4606R^6 - 2938R^4 - 15R^2 + 39), \\
 R_4 &= 2^{-2}(R^2 + 1)^{-1}R^{-1}(R^4 + 6R^2 + 1), \\
 G_4 &= (5R^2 + 1)^{-1}R(R^2 + 1), \\
 A_{40} &= 2^{-4}R^2(45R^6 + 135R^4 + 75R^2 + 1), \\
 B_{40} &= 2^{-6}(R^2 - 1)(45R^6 + 63R^4 + 35R^2 + 1), \\
 A_{31} &= -2^{-8}(5R^2 + 1)^{-1}R(1215R^{12} - 3672R^{10} - 19545R^8 - 16792R^6 - 3491R^4 - 208R^2 - 3), \\
 B_{31} &= 2^{-4}(5R^2 + 1)^{-1}R(270R^{10} + 807R^8 + 694R^6 + 248R^4 + 28R^2 + 1), \\
 A_{22} &= 2^{-9}(5R^2 + 1)^{-1}R^2(405R^{14} + 3321R^{12} + 35517R^{10} + 75145R^8 + 51751R^6 + 8867R^4 + 135R^2 - 37), \\
 B_{22} &= -2^{-12}(5R^2 + 1)^{-1}(405R^{16} - 38394R^{14} - 269358R^{12} - 526130R^{10} - 368548R^8 - 77774R^6 - \\
 &\quad - 2786R^4 + 506R^2 + 31).
 \end{aligned}$$

Исходя из сводок 1–3 значений коэффициентов степенных рядов получим, например, нелинейное дисперсионное соотношение для стационарных поверхностных волн с точностью до седьмого порядка включительно.

$$\begin{aligned}
 \frac{c^2}{g} &= k^{-1}th(kd) \left(1 + 2^{-3}(9R^4 - 6R^2 + 5)(ka)^2 + 2^{-9}(3R^2 + 1)(27R^8 + 180R^6 + 306R^4 - \right. \\
 &\quad - 108R^2 + 43)(ka)^4 - 2^{-15}(5R^2 + 1)^{-1}(10935R^{18} - 51273R^{16} - 693252R^{14} - 1627812R^{12} - 1123758R^{10} - \\
 &\quad \left. - 215054R^8 - 39348R^6 - 12180R^4 - 337R^2 + 143)(ka)^6 \right).
 \end{aligned}$$

3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И НЕЛИНЕЙНОГО ДИСПЕРСИОННОГО СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

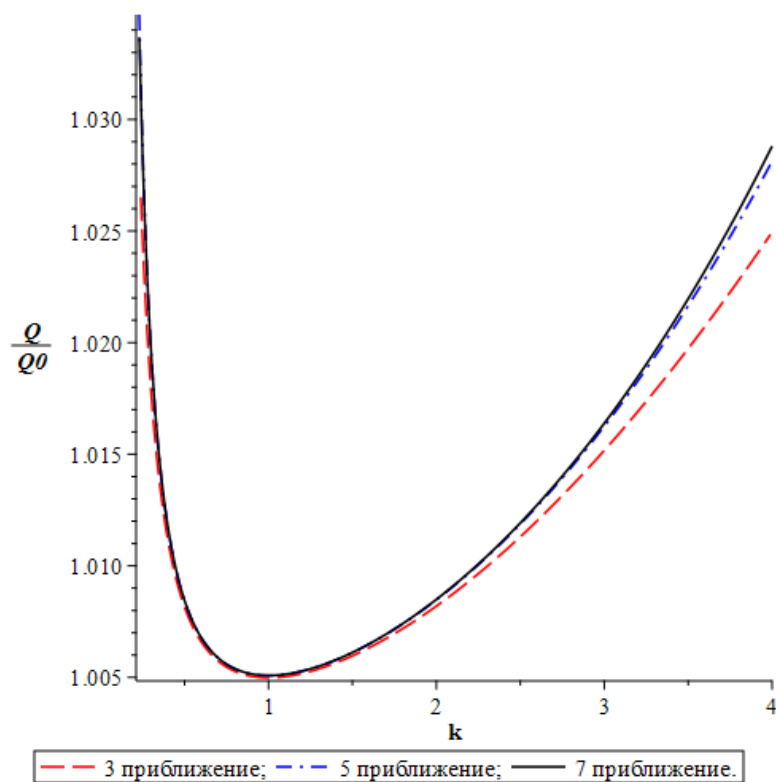
Анализ полученных результатов начнем с сравнения потока жидкости Q , переносимого через каждую вертикаль стационарными нелинейными волнами с потоком, который переносится линейными волнами Q_0 , для чего воспользуемся расчетной формулой (10):

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{cd}{c_0h} = \frac{c}{c_0}F.$$

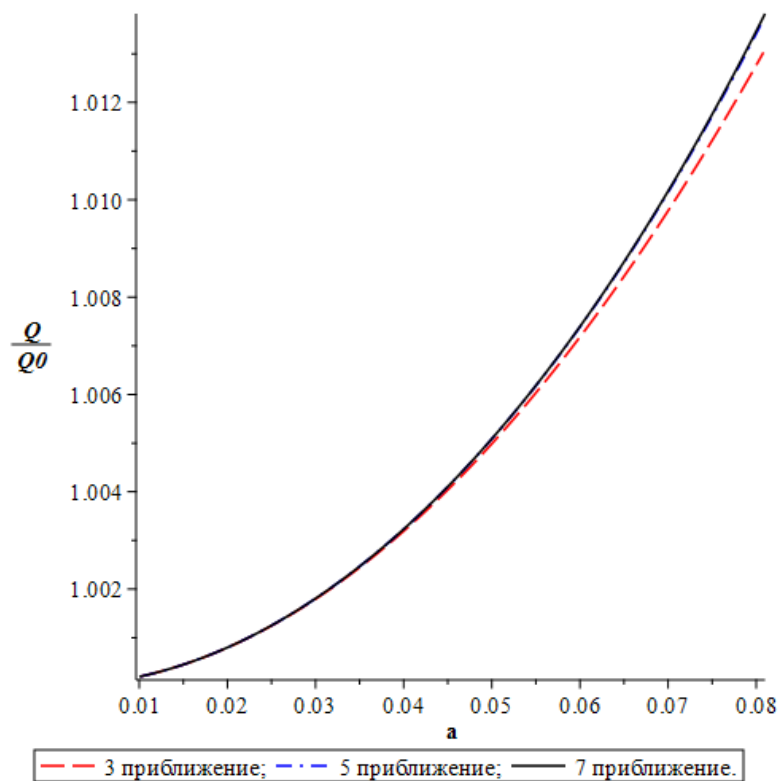
На фиг. 1 представлены графики зависимости относительного потока от волнового числа, построенные по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений, выполненных в пункте 2. Графики показывают, что поток жидкости существенно возрастает как в коротковолновом, так и в длинноволновом диапазонах, а в области промежуточных длин волн его возрастание незначительно.

На фиг. 2 представлены графики зависимости относительного потока от амплитуды основной гармоники в профиле нелинейной волны, построенный по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений. Они показывают естественный результат: с ростом амплитуды волны поток растет. По этим графикам можно судить о точности выбранных приближений.

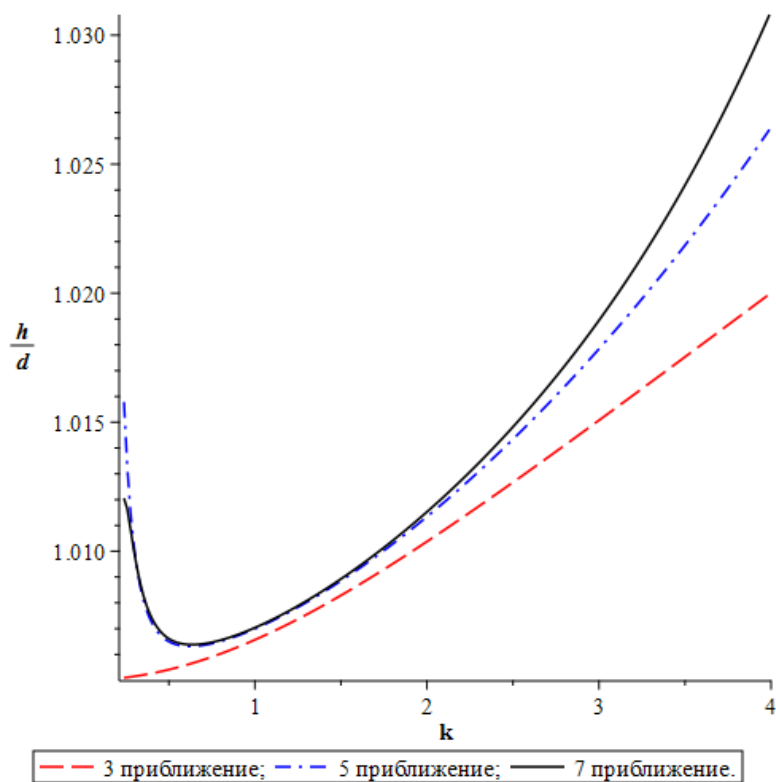
На фиг. 3 показан график отношения глубины жидкости к динамической глубине в зависимости от волнового числа (расчеты третьего, пятого и седьмого приближений); здесь нижняя кривая соответствует третьему приближению, средняя и верхняя — соответственно пятому и седьмому приближениям. Из графика видно, что динамическая глубина меньше глубины жидкости.



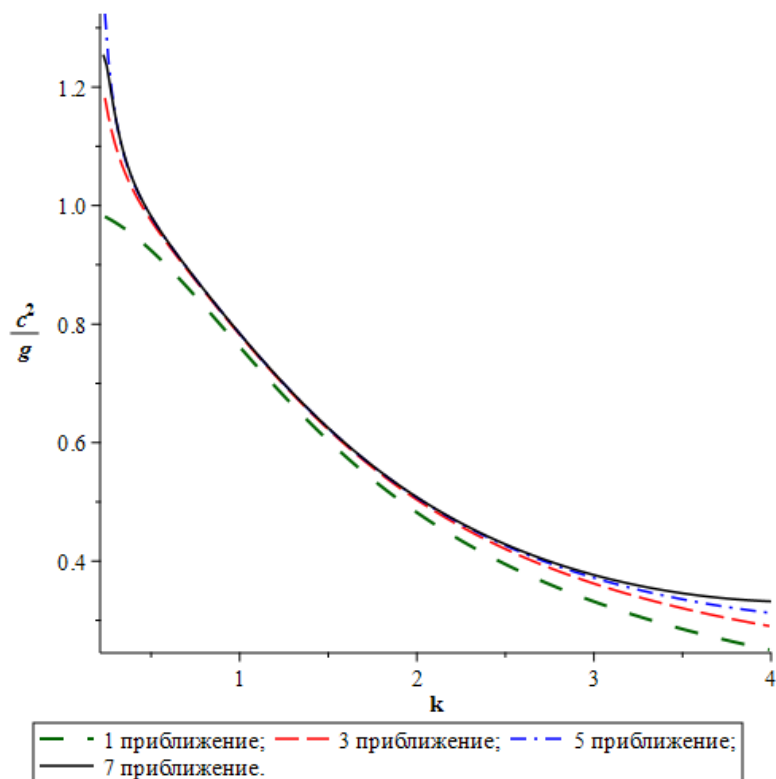
Фиг. 1. Графики зависимости относительного потока от волнового числа, построенный по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений ($d = 1$, $a = 0.5$).



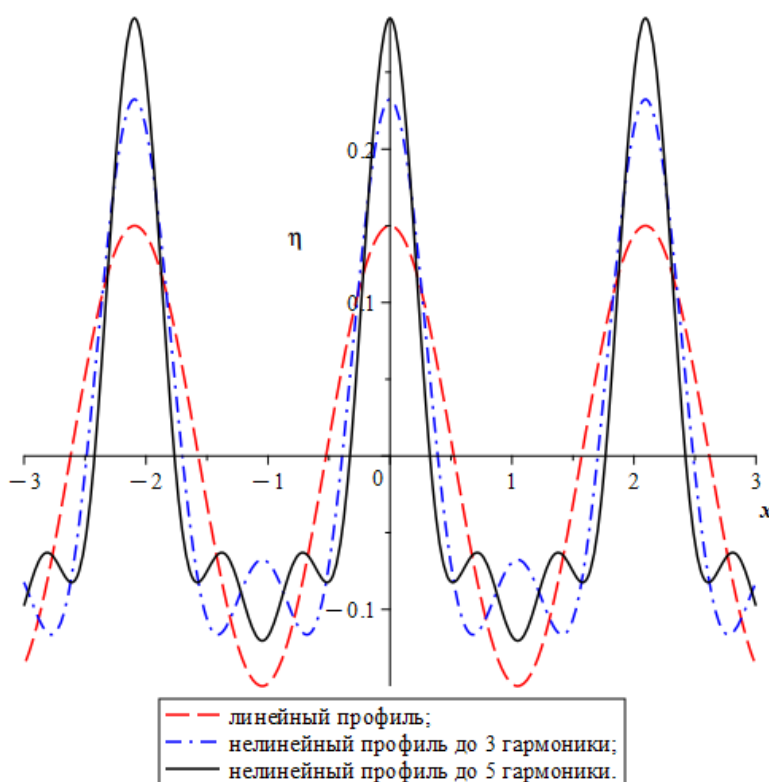
Фиг. 2. Графики зависимости относительного потока от амплитуды основной гармоники в профиле нелинейной волны, построенный по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений ($d = 1$, $k = 1$).



Фиг. 3. График отношения глубины жидкости к динамической глубине в зависимости от волнового числа, построенный по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений ($d = 1$, $a = 0.1$).



Фиг. 4. Графики линейного и нелинейного дисперсионных соотношений (по результатам расчетов третьего, пятого и седьмого приближений), ($d = 1$, $a = 0.1$).



Фиг. 5. Профили линейных и нелинейных волн, рассчитанных с промежуточной точностью до третьей и пятой гармоник ($d = 1$, $a = 0.15$, $k = 3$).

На фиг. 4 изображены графики линейного и нелинейного дисперсионного соотношений (расчеты третьего, пятого и седьмого приближений). Они показывают, что скорость нелинейных волн больше скорости линейных и в длинноволновом и коротковолновом диапазонах она возрастает. Достигнута достаточная степень точности.

На фиг. 5 изображены профили нелинейных волн; профиль нелинейной волны рассчитан с точностью до пятой гармоники. Из фиг. 5 видно, что с ростом амплитуды гребень волны заостряется, т.е. волна близка к волне предельной амплитуды.

Заметим, что когда волна приближается к предельной форме, которая характеризуется угловой точкой на вершине, то к ней будут стремиться гребни промежуточных волн. В натурных условиях данное явление можно наблюдать в случае набегания из открытого бассейна волн на монотонно возрастающую линию дна.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено приближенное решение задачи о строении и характеристиках стационарной слабонелинейной периодической волны на поверхности жидкости конечной глубины. Проанализированы выражения уровня волны и зависимости относительного потока от амплитуды основной гармоники в профиле нелинейной волны, а также нелинейное дисперсионное соотношение и динамическая глубина жидкости. Изучены случаи короткой и длинной волн.

Отличительным моментом при решении задачи является то, что двумерная задача была сформулирована через след функции тока, а не через потенциал скоростей, как в [2], а затем сведена к одномерной путем введения вспомогательных функций. Было введено понятие динамической глубины, как необходимой компоненты при решении, с целью дальнейшего сопоставления с реальной глубиной жидкости. Отмечено, что динамическая глубина меньше глубины жидкости во всем диапазоне длин волн.

Поскольку задача является классической, то она, естественно, рассматривалась во многих работах, например, в [19] значительная часть отведена преобразованиям нелинейных граничных условий, а процедура решения практически полностью отсутствует, что затрудняет дальнейший анализ. В работе [5] исследования проведены с точностью до пятого порядка включительно, что не вносит ясности применительно к скорости нелинейных волн как в длинноволновом, так и коротковолновом диапазонах. Однако, необходимо отметить, что численные результаты, приведенные в работе [5], согласуются с результатами, изложенными в данной статье.

В работе построены профили нелинейных волн, рассчитанных с точностью до третьей и пятой гармоник и показано, что волна приближается к волне предельной амплитуды, обозначенной Стоксом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Scott Russel J.* Report on waves // Reports of the Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. London: John Murray. 1845. P. 311–390.
2. *Stokes, G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Cambr. Trans.* V. 8, 1847. P. 441–473.
3. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // *Mathematical and Physical Papers* 1. Cambridge. 1880. P. 197–229.
4. *Stokes G.G.* Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves // *Mathematical and Physical Papers* 1. Cambridge. 1880. P. 314–326.
5. *De S.C.* Contributions to the theory of stokes waves. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* 51. 1955. P. 713–736.
6. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука. 1984.
7. *Карabut Е.А.* О суммировании ряда Вайтинга в задаче об уединенной волне // *ПМТФ*. Т. 40. № 1. 1999. С. 44–54.
8. *Карabut Е.А.* Высшие приближения теории кноидальных волн // *ПМТФ*. Т. 41. № 1. 2000. С. 92–104.
9. *Бабенко К.И.* Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды // *Докл. АН СССР*. 1987. Т. 294. № 5. С. 1033–1037.
10. *Karabut E.A.* An approximation for the highest gravity waves on water of finite depth // *J. Fluid Mech.* 1998. V. 372. P. 45–70.
11. *Fenton, J.D.* A high-order conidial wave theory // *J. Fluid Mech.* 1979. V. 94. P. 129–161.
12. *Овсянников Л.В.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
13. *Захаров В. Е.* Интегрирование уравнений глубокой жидкости со свободной поверхностью // *ТМФ*. 2020. Т. 202. № 3. С. 327–338.
14. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков. С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука. 1980. 319 с.
15. *Красовский Ю.П.* Теория установившихся волн конечной амплитуды // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1961. Т. 1. С. 836–855.
16. *Тер-Крикоров А.М.* Существование периодических волн, вырождающихся в уединенную // *Прикладн. матем. и механ.* 1960. Т. 24. Вып. 4. С. 622–636.
17. *McLean, J.W.* Instabilities of finite-amplitude gravity waves on water of finite depth // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 114. P. 331–341.
18. *Scott A.C., Chu F.Y.F., McLaughlin D.W.* // *Proc. IEEE*. 1973. V. 61. P. 1993.
19. *Сунь Цао.* Поведение поверхностных волн на линейно изменяющемся течении // *Исследования по механике*. М.: Оборонгиз. 1959. № 3. С. 66–84.

ON THE QUESTION OF STATIONARY WAVES ON THE SURFACE OF AN IDEAL LIQUID OF FINITE DEPTH. THE SECOND STOKES METHOD

A. I. Rudenko*

236022 Kaliningrad, Sovetsky Prospekt, 1, KSTU Federal State Budgetary Educational Institution, Russia

**e-mail: aleksej.rudenko75@bk.ru*

Received: 15.05.2024

Revised: 06.06.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. The classical problem of stationary waves on the surface of an ideal incompressible homogeneous liquid of finite depth is considered. The approach to solving the problem is related to the second Stokes method, but has the following differences: due to the obtained one-dimensional integrodifferential equation with cubic nonlinearity for the profile of a stationary wave on the surface of a liquid of finite depth, the original problem is reduced to a one-dimensional one. The solution is obtained up to the seventh approximation.

Keywords: convolution operator, stationary periodic wave, potential fluid motion, wave profile, trace of current function, second Stokes method.