ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 11, с. 2132–2142

УДК 517.95

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА С СИЛЬНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ В ОБЛАСТИ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2024 г. А.Б. Расулов[1,*], Н.В. Якивчик[1,]**

[1] 111250 Москва, Красноказарменная ул., 14, стр. 1, Национальный исследовательский университет “МЭИ”, Россия
*e-mail: rasulzoda55@gmail.com
**e-mail: YakivchikNV@mpei.ru

Поступила в редакцию 21.04.2024 г.
Переработанный вариант 09.07.2024 г.
Принята к публикации 26.07.2024 г.

Целью настоящей работы является построение общего решения уравнения Коши–Римана с сильными особенностями в младшем коэффициенте и исследование краевой задачи Римана–Гильберта в области с кусочно-гладкой границей. Библ. 13.

Ключевые слова: уравнения Коши–Римана, сильные особенности в коэффициенте, оператор Помпейю–Векуа, кусочно-гладкая граница, задача Римана–Гильберта.

DOI: 10.31857/S0044466924110086, **EDN**: KGNVWW

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В конечной области D рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + a_0 u + b_0 \bar{u} = f_0.$$

Теория этого уравнения при $a_0, b_0, f_0 \in L^p(D)$, $p > 2$, где $2\partial_{\bar{z}} = \partial_x + i\partial_y$, решения которого $u \in W^{1,p}(D)$, построена И.Н. Векуа [1].

Коэффициенты и правая часть данного уравнения могут допускать слабые особенности с требованием их p-интегрируемости в области D. На необходимость изучения таких уравнений с коэффициентами, допускающими особенности не ниже первого порядка, впервые было указано И.Н. Векуа [1] и А.В. Бицадзе [2].

Для краткого обзора ранее полученных результатов относительно этого уравнения вводим класс функций $C_\lambda\big(\overline{D}, 0\big)$, где $0 \in D$ и $\lambda < 0$. Это пространство всех непрерывных в $\overline{D} \setminus \{0\}$ функций $\varphi(z)$ с точечной особенностью $z = 0$ и с поведением $O\big(|z|^\lambda\big)$ при $z \to 0$. Это пространство снабжается нормой $\|\varphi\| = \sup\limits_{z \in D} |z|^{-\lambda} |\varphi(z)|$, относительно которой оно является банаховым.

Вопросам построения общего решения вышеприведенного уравнения с сингулярными коэффициентами $a_0 \in C_{-1}$ и $b_0 \in C_{-1}$ были посвящены многочисленные исследования (см., например, [3–5]).

В последнее десятилетие исследованию обобщенного уравнения Коши–Римана с коэффициентами $a_0 \in C_{-\alpha-1}$, где $\alpha \geqslant 0$, и $b_0 \in C_{-1}$ со специальными видами (т.е. когда $|z|^{\alpha+1} z^{-1} a_0(z)$, $|z|^m b_0(z) \in C(D)$, $0 < m < 1$) посвящен ряд работ (см., например, [6]).

В настоящей работе снято условие ограниченности с коэффициента $a_0(z)$, который ранее имел этот специальный вид. Для рассматриваемого уравнения (ниже — уравнения (1)) с сильными особенностями в коэффициенте $a_0(z)$ построено интегральное представление решений и рассмотрена краевая задача типа Римана–Гильберта в области с кусочно-гладкой границей, которая ранее не исследована.

Пусть односвязная область D ограничена простым кусочно-гладким ляпуновским контуром Γ, составленным из гладких дуг $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$ и ориентированным против часовой стрелки. Множество $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$ концов этих дуг обозначим F. Контур Γ разбивает плоскость на «конечную» — D и «бесконечную» — D' области. Для определенности пусть $0 \in D$ и $D_0 = D \setminus \{0\}$, $D_\varepsilon = D \cap \{|z| > \varepsilon\}$ при $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $\infty \in D'$.

Рассмотрим в области D_0 уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - \frac{a(z)}{|z|^\alpha}\, u(z) = f(z) \tag{1}$$

с коэффициентом $a(z) \in C\big(D \cup \Gamma\big)$, который n раз непрерывно дифференцируем в достаточно малой окрестности нуля, где $\alpha \geq 1$, причем $n = [\alpha]$ — целая часть α. Функция f в правой части (1) принадлежит классу $L^p_{loc}(D_0)$, $p > 2$; здесь $L^p_{loc}(D_0) = \{f : f \in L^p(D_\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0\}$.

Решение ищется в классе $W^{1,p}_{loc}(D_0)$ функций, принадлежащих $W^{1,p}(G)$ в любой области G, которая вместе со своим замыканием содержится в D_0. Что касается правой части f, то она выбирается в классе $L^p(D)$.

Как сказано выше, в случае $0 < \alpha < 1$ теория уравнения (1) построена И.Н. Векуа [1] и называется теорией регулярных обобщенных аналитических функций. Случай $\alpha = 1$ исследован многими авторами (см., например, [3,4] и др.). Заметим, что результаты, полученные в случае $\alpha \geq 1$, относятся к теории сингулярных обобщенных аналитических функций.

В настоящей работе найдено интегральное представление решения уравнения (1) с более общим коэффициентом $a(z)$ в областях D_0 и D' при $\alpha \geq 1$ и исследована задача Римана–Гильберта в классе функций, ограниченных в бесконечности и допускающих особенность порядка меньше единицы при $z \to \tau$ в точках $\tau \in F$.

Функция $u(z) \in W^{1,p}_{loc}\big(D_0\big)$, где $p > 2$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду, называется его *регулярным* решением.

2. НЕОБХОДИМЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ

В получении представления регулярного решения данного уравнения существенную роль играет интегральный оператор Помпейю–Векуа (см. монографию И.Н. Векуа [1], стр. 29)

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi} \int_D \frac{f(\zeta)\, d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad z \neq 0, \tag{2}$$

с плотностью $f \in L^p(D)$, где $p > 2$. Здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. В частности, оператор T компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\overline{D})$.

Утверждение 1. *Если в уравнении* (1) *функции* $A(z) = |z|^{-\alpha}\, a(z) \in L^p(D)$ *и* $f \in L^p(D)$, *то* $\Omega = TA \in W^{1,p}_{loc}(D)$ *является решением уравнения* $\Omega_{\bar{z}} - A = 0$.

Следовательно, для функции $V = e^{-\Omega}\, u$ имеем соотношение

$$V_{\bar{z}} = e^{-\Omega}\, u_{\bar{z}} - A\, e^{-\Omega}\, u = e^{-\Omega}\, f.$$

В результате приходим к представлению

$$u = e^{\Omega}\, [\phi + T(e^{-\Omega}\, f)]$$

с произвольной аналитической в D функцией $\phi \in C(\overline{D})$ [1].

Приведем некоторые определения и предложения из работ [7–9], необходимые для решения краевой задачи Римана–Гильберта в области с кусочно-гладкой границей. Напомним, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_m$, $F = \{\tau_1, \ldots, \tau_m\}$ и $\rho_\lambda = |z - \tau_1|^{\lambda_1} \cdots |z - \tau_m|^{\lambda_m}$.

По определению дуга Γ радиальная по отношению к своему концу τ, если она допускает параметризацию вида

$$\gamma(r) = \tau + r e^{i\theta(r)}, \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho,$$

где вещественная функция θ непрерывно дифференцируема на полуоткрытом интервале $(0, \rho]$ и допускает пределы $\lim \theta(r) = \theta(0)$ и $\lim r\theta'(r) = 0$ при $r \to 0$.

Рассмотрим функции, заданные на конечной радиальной дуге Γ с отмеченным концом $\tau \neq \infty$.

Определение 1. Весовое пространство $C^\mu_\lambda(\overline{D}, F)$, $0 < \mu < 1$, состоит из функций в D, для которых норма

$$|\varphi| = \sup_{z \in D} |\rho_{-\lambda}\varphi| + \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|(\rho_{-\lambda}\varphi)(z_1) - (\rho_{-\lambda}\varphi)(z_2)|}{|z_1 - z_2|^\mu} \tag{3}$$

конечна. Относительно данной нормы это пространство банахово.

При $\lambda = 0$ оно состоит из ограниченных функций, а отображение $\phi \to \rho_\lambda \phi$ осуществляет изоморфизм $C^\mu_\lambda \to \to C^\mu_0$. Сама весовая функция ρ_λ принадлежит C^μ_λ и ее норма (3) равна 2, поскольку полунорма $[\rho_\mu]_\mu = 1$. Из этих же соображений функция $\rho_\lambda \in C^\mu_0$ при $\lambda > 0$ и $\tau \neq \infty$. Функция $\rho_\mu(z) = |z|^\mu$ в окрестности нуля, а в окрестности точек $\tau \in F$ она совпадает с $|z-\tau|^\mu$.

В работе [9] доказано

Утверждение 2. a) *Пространство $C^\mu_0(\Gamma, F)$ является банаховой алгеброй по умножению, так что произведение функций как билинейное отображение ограничено $C^\mu_{\lambda'} \times C^\mu_{\lambda''} \to C^\mu_{\lambda' \times \lambda''}$.*

b) *Суперпозиция $f \circ \varphi$ функции $\varphi \in C^\mu_0$ с функцией f, которая задана на множестве значений φ и удовлетворяет условию Липшица, не выводит из класса $f \in C^\mu_0$.*

c) *Семейство банаховых пространств $C^\mu_\lambda(G, F)$ монотонно убывает (в смысле вложений) по каждому из параметров μ и λ_τ, $\tau \in F$. В частности, для любого $\varepsilon > 0$ имеют место вложения банаховых пространств $C^\mu_{\lambda+\varepsilon}(\Gamma, \tau) \subset \subset C^\mu_\lambda(\Gamma, \tau)$ при $\tau \neq \infty$.*

d) *В частности, пространство $C^\mu_0(D)$ является банаховой алгеброй по умножению и монотонно убывает по μ, т.е. имеет место вложение*

$$C^\nu_0(D, \tau) \subseteq C^\mu_0(D, \tau), \quad 0 < \mu < \nu.$$

В работе [10] доказан следующий факт: если граница области Γ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$, то имеет место

Утверждение 3. *Пусть контур Γ составлен из гладких дуг $\Gamma_j \in C^{1,\mu}_{(1+0)}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, причем все растворы $\pi\alpha_\tau$ криволинейных секторов S_τ, $\tau \in F$, положительны. Пусть функция $\zeta = \omega(z) \in C(\overline{D})$ отображает область D на единичный круг $D_0 = \{|\zeta| < 1\}$. Тогда оператор суперпозиции $\varphi \to \varphi \circ \omega$ ограничен $C^\mu_{\alpha\lambda}(D_0, F_0) \to C^\mu_\lambda(D, F)$, где $\alpha\lambda = (\alpha_\tau \lambda_\tau, \tau \in F)$, $F_0 = \omega(F)$, и семейство $(\lambda_{\omega(\tau)}, \tau \in F)$ обозначено также λ. В частности, этот оператор действует $C^\mu_{(+0)}(D_0, F_0) \to C^\mu_{(+0)}(D, F)$.*

Основным инструментом исследования краевых задач для аналитических функций служат интеграл типа Коши

$$\varphi(z) = (I\phi)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\phi(t)\,dt}{t - z}, \quad z \notin \Gamma, \tag{4}$$

и связанный с ним сингулярный интеграл Коши

$$(S\phi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\phi(t)\,dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma \setminus F. \tag{5}$$

Действие интегрального оператора типа Коши (4) в весовых пространствах Гёльдера (без конкретизации показателя μ) изучено в [7]. В пространствах C^μ_λ этот результат был уточнен в [8]. Сформулируем его отдельно.

Утверждение 4. *Пусть кусочно-гладкая кривая $\Gamma = \sum_{j=1}^m \Gamma_j$ представлена с помощью ориентируемых гладких дуг Γ_j и $D = \mathbb{C} \setminus \Gamma$.*

Тогда интегральный оператор типа Коши I ограничен $C^\mu_\lambda(\Gamma, F) \to C^\mu_{\lambda(0)}(\widehat{D}, F)$, $-1 < \lambda < 0$, и справедливы формулы Сохоцкого–Племеля $2\varphi^\pm = \pm\phi + S\phi$, связывающие интегралы (4) *и* (5).

Обратно, если $\phi \in C^\mu_{\lambda(k)}(\widehat{D}, F)$, $-1 < \lambda < 0$, и $\phi = \varphi^+ - \varphi^-$, то $\varphi = I\phi + p$ с некоторым многочленом $p \in P_k$, причем

$$\int_\Gamma \phi(t)\,q(t)\,dt = 0, \quad q \in P_{-k}. \tag{6}$$

Условия ортогональности в этой теореме следуют из разложения

$$(I\phi)(z) = \sum_{j \geqslant 0} c_j z^{-j-1}, \quad c_j = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \phi(t)\,t^j\,dt,$$

интеграла типа Коши в окрестности ∞. Оно показывает, что неравенство $\deg(I\phi) \leqslant k - 1$ обеспечивается условиями $c_j = 0$ при $0 \leqslant j \leqslant -k-1$, которые равносильны (6).

Утверждение 5. *Если $\phi \in C^\mu_{(+0)}(\widehat{\Gamma}, F)$, то в секторе $S_{\tau,j}$ интеграл типа Коши $\varphi = I\phi$ представим в виде*

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{j=1}^{n_\tau} \sigma_{\tau,j}\phi(\tau_j)\right] \ln(z - \tau) + \phi_\tau(z), \quad \phi_\tau(z) \in C^\mu_{(+0)}(S_{\tau,j}, \tau),$$

где $\sigma_{\tau,j} = 1$ ($\sigma_{\tau,j} = -1$), если τ является правым (левым) концом дуги $\Gamma_{\tau,j}$.

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ В КОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

Напомним, что коэффициент уравнения (1), $a(z) \in C(\overline{D^+})$, n раз непрерывно дифференцируем в окрестности нуля, где $\alpha \geq 1$, $n = [\alpha]$ — целая часть α. Следовательно, функцию $a(z)$ в окрестности особой точки $z = 0$ можно разложить по формуле Тейлора

$$a(z) = p(z) + a_0(z), \quad \text{где} \quad a_0(z) = o(z^n) \ \text{ при } \ z \to 0.$$

Здесь $p(z) = 2\sum_{k\leq n} a_{k_1k_2} \cdot z^{k_1}\,\bar{z}^{k_2}$ — ее главная часть, $k = (k_1, k_2)$, $a_{k_1k_2}$ — коэффициенты ряда Тейлора, $a_0(z)$ — остаток в форме Пеано.

Область D^+ содержит точку $z = 0$ и ограничена простым кусочно-гладким ляпуновским контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки. Пусть $D^+_\varepsilon = D^+ \cap \{|z| > \varepsilon\}$ и оператор T_ε определяется как выше по отношению к D^+_ε.

Введем сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}\big(T_\varepsilon(a\,|\zeta|^{-\alpha})\big)(z) \equiv -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{D^+_\varepsilon}\frac{a(\zeta)\,d_2\zeta}{|\zeta|^\alpha\,(\zeta - z)}, \tag{7}$$

где интегральный оператор T_ε определяется аналогично (2) по отношению к области D^+_ε.

Лемма 1. *Если $\alpha > 1$, то существует регулярное решение уравнения*

$$\Omega_{\bar{z}} = |z|^{-\alpha}\,a(z),$$

представимое в виде

$$\Omega(z) = \omega(z) + h(z), \tag{8}$$

где

$$\omega(z) = \begin{cases} \dfrac{2}{|z|^\alpha}\displaystyle\sum_{k\leq n} a_{k_1k_2}\cdot\frac{z^{k_1}\,\bar{z}^{k_2+1}}{2(k_2+1)-\alpha} + \big(T(|\zeta|^{-\alpha}\,a_0)(z) & \textit{при}\ \ \alpha \neq 2(k_2+1),\\ \displaystyle\sum_{k\leq n} a_{k_1k_2}\cdot z^{k_1-k_2-1}\,\ln\bar{z} + \big(T(|\zeta|^{-\alpha}\,a_0)\big)(z) & \textit{при}\ \ \alpha = 2(k_2+1),\end{cases}$$
$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{j=1}^{n_\tau}\sigma_{\tau,j}\,\omega(\tau_j)\right]\ln(z-\tau) + \omega_\tau(z), \quad \omega_\tau(z) \in C^\mu_{(+0)}(S_{\tau,j}, \tau), \tag{9}$$

$\sigma_{\tau,j} = 1$ ($\sigma_{\tau,j} = -1$), *если τ является правым* (*левым*) *концом дуги $\Gamma_{\tau,j}$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что функция $|z|^{-\alpha}$ является многозначной; при разрезе расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ вдоль линии, соединяющей точки 0 и ∞ (например, луча $\arg z = \beta$), мы выбираем фиксированную ветвь данной функции, и этот выбор нужно учитывать при дифференцировании. В самом деле, $|z|^{-\alpha} = z^{-\alpha/2}\,\bar{z}^{-\alpha/2} = e^{-\frac{\alpha}{2}\ln z}\,e^{-\frac{\alpha}{2}\ln\bar{z}}$; при этом значения логарифма $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ и $\ln\bar{z} = \ln|z| - i\arg z$ комплексно сопряжены, так что значение функции остается положительным вещественным числом.

Напомним, что если $f(x,y)$ — аналитическая функция переменных x и y, то можно указать формулу, которая несколько упрощает вычисление интеграла Помпейю–Векуа Tf ([1], стр. 30). Сделав замену $x = 2^{-1}(z + \bar{z})$, $y = (2i)^{-1}(z - \bar{z})$ и вычислив неопределенный интеграл

$$F(z,\bar{z}) = \int f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)d\bar{z},$$

согласно формуле Бореля–Помпейю получим

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_D\frac{f(\zeta)\,d_2\zeta}{\zeta - z} = F(z,\bar{z}) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{F(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Рассмотрим случай $\alpha \neq 2(k_2+1)$. Используя представление коэффициента $a(z) = p(z) + a_0(z)$, в вышеприведенных обозначениях (7)

$$\left(T_\varepsilon\,\frac{a}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) = \left(T_\varepsilon\frac{p}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) + \left(T_\varepsilon\,\frac{a_0}{|\zeta|^\alpha}\right)(z).$$

Отсюда

$$\left(T_\varepsilon \frac{a}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) = \left(T_\varepsilon \frac{a_0(z)}{|z|^\alpha}\right)(z) - \omega_1(z) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega_1(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

где обозначено $\omega_1(z) = \bigl(T(p\,|\zeta|^{-\alpha})\bigr)(z)$; или, что равносильно,

$$\left(T_\varepsilon \frac{a}{|\zeta|^\alpha}\right)(z) = \frac{1}{\pi}\int_{|\zeta|\leqslant\varepsilon} \frac{a_0}{|\zeta|^\alpha\,(\zeta - z)}\,d_2\zeta - \omega(z) + \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad |z| > \varepsilon. \tag{10}$$

Убедимся, что функция $\Omega_\varepsilon(z) = \bigl(T_\varepsilon(a\,|\zeta|^{-\alpha})\bigr)(z)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходится к $\Omega(z) = \bigl(T(a\,|\zeta|^{-\alpha})\bigr)(z)$ и, в частности, справедливо равенство (9) при $\alpha \neq 2(k_2+1)$. В самом деле, используя неравенство Гёльдера, можно показать, что первый интеграл в правой части (10) по модулю не превосходит $CL_p(a_0\,|\zeta|^{-\alpha})\,\varepsilon^\delta$, $C = C(d)$ — постоянная (здесь d — диаметр области), $\delta = 1 - p^{-1}$, так что соответствующий интеграл равномерно стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим контурный интеграл по границе Γ. Заметим, что $\omega(t) \equiv \bigl(T(a\,|\zeta|^{-\alpha})\bigr)(t)$, $t \in \Gamma$, где $a\,|\zeta|^{-\alpha} \in H(\Gamma)$, в частности, $\omega \in C^\mu_{(+0)}(\widehat{\Gamma}, F)$. Следовательно, согласно утверждению 5, для

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = h(z)$$

имеет место

Лемма 2. *Если $\omega \in C^\mu_{(+0)}(\widehat{\Gamma}, F)$, то в секторе $S_{\tau,j}$ интеграл типа Коши $h = I\omega$ представим в виде*

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{j=1}^{n_\tau} \sigma_{\tau,j}\,\omega(\tau_j)\right]\ln(z-\tau) + \omega_\tau(z), \quad \omega_\tau(z) \in C^\mu_{(+0)}(S_{\tau,j}, \tau), \tag{11}$$

где $\sigma_{\tau,j} = 1$ ($\sigma_{\tau,j} = -1$), если τ является правым (левым) концом дуги $\Gamma_{\tau,j}$.

Заметим, что в представлении $h(z)$ значение ω в точках τ_j непосредственно зависит от коэффициента $a(z)$ и степени сингулярности α, которая играет важную роль в формировании класса C^μ_λ, так как $\lambda = \lambda(a, \alpha, \tau) = \operatorname{Re}\omega(\tau_j)$.

При $\alpha = 2(k_2+1)$ доказательство леммы проводится аналогично.

Следовательно, при $\alpha \geq 1$

$$\exp\Omega = \exp\{\omega + \omega_\tau(z)\}\prod_{j=1}^{n_\tau}(z-\tau)^{\gamma_{\tau,j}}.$$

В обозначениях $\gamma_{\tau,j} = \sigma_{\tau,j}\,\omega(\tau_j)\,(2\pi i)^{-1}$ функция $(z-\tau)^{\gamma_{\tau,j}}$ является многозначной; при разрезе расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ вдоль линии, соединяющей точки τ и ∞ (например, луча $\arg z = \beta$) мы выбираем фиксированную ветвь данной функции.

Итак, на основе лемм 1, 2 и согласно предложению 1 может быть сформулирована

Теорема 1. *Пусть число $\alpha \geq 1$ и функция Ω определена по формуле (2), а правая часть f удовлетворяет условию $e^{-\Omega} f \in L^p(D) = f_0$ с $p > 2$. Тогда любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде*

$$u = e^\Omega\,[\phi + Tf_0], \tag{12}$$

где $\phi \in C\bigl(\overline{D} \setminus F\bigr)$ — произвольная аналитическая в области D_0 функция, которая для заданного семейства $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ вещественных чисел подчиняется степенному поведению

$$\phi(z) = O\bigl((z-\tau)^{\lambda_\tau}\bigr) \quad \textit{при} \;\; z \to \tau.$$

При этом регулярное решение $u(z)$ вблизи особой точки $z = 0$ и вблизи концов $\tau \in F$ контура Γ имеет поведение

$$u(z) = \begin{cases} O\bigl(e^{-\operatorname{Re}\Omega(z)}\bigr) & \text{при } \; z \to 0, \\ O\bigl((z-\tau)^{\gamma_\tau + \lambda_\tau}\bigr) & \text{при } \; z \to \tau. \end{cases} \tag{13}$$

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

В этом случае интегральный оператор Помпейю–Векуа T понимается по отношению к неограниченной области $D^- = \mathbb{C} \setminus (D \cup \Gamma)$. Если граница области Γ принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$, то имеет место утверждение 3 (доказанное в работе [10]), и рассматриваемая область D отображается на единичный круг. Поэтому для наглядности исследование ведем в основном в областях $B = \{t : |t - z| \leqslant 1\}$ и $B' = \{t : |t - z| \geqslant 1\}$.

Хорошо известно [1], что если функция φ непрерывно дифференцируема и $\varphi(z) = O\big(|z|^\delta\big)$ при $z \to \infty$ с некоторым $\delta < -1$, то функция

$$(T\varphi)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)\, d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad \zeta, z \in \mathbb{C}, \tag{14}$$

непрерывно дифференцируема и является решением уравнения (1) при $a = 0$ и $\varphi = f$.

Если функция

$$\varphi \in L^p(\mathbb{C}) \cap L^q(\mathbb{C}), \quad \text{где } 1 < q < 2 < p,$$

то, применяя неравенство Гёльдера к подынтегральному выражению в областях B и B', убеждаемся, что интеграл (14) существует и справедлива оценка

$$|T\varphi|_{0,\mathbb{C}} \leqslant M\big(|\varphi|_{L^p} + |\varphi|_{L^q}\big), \tag{15}$$

где постоянная M зависит только от p и q. Здесь и ниже $|\varphi|_{0,G}$ означает $\sup$-норму функции φ, заданной в некоторой области G.

Функции $\varphi \in C^\mu(\mathbb{C})$ могут осциллировать на бесконечности, оставаясь ограниченными. В противоположность этому обозначим $C^\mu_*(\mathbb{C})$ пространство функций φ, которые вместе с $\varphi(1/z)$ принадлежат $C^\mu(B)$ в единичном круге $B = \{|z| \leqslant 1\}$ (разумеется, при дополнительном требовании непрерывности φ в точках единичной окружности). Очевидно, эти функции имеют предел $\varphi(\infty) = \lim \varphi(z)$ на бесконечности и $\varphi(z) - \varphi(\infty) = O\big(|z|^{-\mu}\big)$ при $z \to \infty$.

В монографии [1] И.Н. Векуа описал условие на функцию f, обеспечивающее принадлежность Tf классу $C^\mu(\mathbb{C})$ в терминах введенного им пространства $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$, где $p > 2$. Под $C^\mu(\mathbb{C})$ здесь понимается класс непрерывных функций $f(z)$, которые вместе с $f(1/z)$ принадлежат $C^\mu(B)$ в единичном круге $B = \{z : |z| \leq 1\}$. По определению пространство $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$ состоит из всех функций f, для которых $f(z)$ и $f_\nu(z) = |z|^{-\nu} f(1/z)$ принадлежат $L^p(B)$.

Для $\varphi \in L^{p,2}$ функция $T\varphi$ принадлежит классу $C^\mu(\mathbb{C})$ и обращается в нуль на бесконечности. В действительности имеет место следующий результат (см. теоремы 1.24, 1.25 в монографии [1]).

Теорема 2. *Оператор T ограничен $L^{p,2} \to C^\mu_*$, $\mu = 1 - 2/p$. В частности, для $\varphi \in L^{p,2}$ функция $(T\varphi)(z) = O\big(|z|^{-\mu}\big)$ при $z \to \infty$.*

На основе теоремы 2, рассуждая аналогично тому, как при доказательстве теоремы 1, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть число $\alpha \geq 1$, функция Ω определена по формуле (2) и функция $f_0 = e^{-\Omega} f \in L^{p,2}(D^-)$, где $p > 2$. Тогда любое регулярное решение уравнения (1) с правой частью f представимо по формуле (12), где $\phi \in C\big(\overline{D^-} \setminus F\big)$ — произвольная аналитическая в области D^- функция, которая для заданного семейства $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ вещественных чисел подчиняется степенному поведению*

$$\phi(z) = O\big((z - \tau)^{\lambda_\tau}\big) \quad \textit{при } z \to \tau;$$

кроме того, $e^{-\Omega}\, u(z) = o\big(|z|^{-2/p}\big)$ при $|z| \to \infty$ и аналитическая функция ϕ также имеет аналогичное поведение $\phi(z) = o\big(|z|^{-2/p}\big)$ при $|z| \to \infty$.

Замечание 1. При $a(0) \neq 0$, как следует из поведения $e^{-\operatorname{Re}\Omega(z)} = O\big(|z|^{1-\alpha}\big)$ при $z \to \infty$ и $(Tf)(z) = o\big(|z|^{\mu-1}\big)$ при $z \to \infty$, условие

$$u(z) = O\big(e^{-\operatorname{Re}\Omega(z)}\big)$$

при $z \to \infty$ равносильно тому, что в этом представлении функция ϕ в $z = \infty$ обращается в нуль и, следовательно, аналитична во всей области D^-.

5. СЛУЧАЙ ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГЁЛЬДЕРА

В работе А.П. Солдатова [11] теорема 2 распространена на семейства весовых пространств. Эти пространства строятся исходя из соответствующего основного пространства X_0 функций $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, где символ X принимает значения $L^p, C, C^\mu, C^{1,\mu}$. Мы ниже приведем и используем часть этих результатов [11] для получения интегрального представления решений уравнения (1) в различных весовых классах в неограниченной области.

Исходя из X_0, весовое пространство $X_\lambda = X_\lambda(\mathbb{C}; 0, \infty)$, отвечающее паре $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1)$ вещественных чисел, строится следующим образом. Введем весовую функцию

$$\rho_\lambda(z) = \begin{cases} |z|^{\lambda_0}, & |z| \leqslant 1, \\ |z|^{\lambda_1}, & |z| \geqslant 1. \end{cases}$$

При $\lambda_0 = \lambda_1 = \nu$ пару λ отождествляем с ν, так что в этом случае $\rho_\lambda(z) = |z|^\nu$. Тогда по определению пространство X_λ состоит из функций $\varphi = \rho_\lambda \varphi_0$, $\varphi_0 \in X_0$ и снабжается перенесенной нормой $|\varphi| = |\varphi_0|_{X_0}$.

В случаях $C_0, C^\mu, C^{1,\mu}$ определению пространств X_0 можно придать другую трактовку. С этой целью каждой функции φ на полуоси поставим в соответствие двустороннюю последовательность φ_k, $k = 0, \pm 1, \ldots$, функций в кольце $K = \{1/2 \leqslant |z| \leqslant 2\}$ по формуле

$$\varphi_k(z) = \varphi(2^k z), \quad z \in K, \quad k = 0, \pm 1, \ldots \tag{16}$$

Тогда в обозначениях (16) для каждого из случаев $X = C, C^\mu, C^{1,\mu}$ равенство

$$|\varphi| = \sup_{k=0,\pm 1,\ldots} |\varphi_k|_{X(K)}$$

определяет в пространстве X_0 эквивалентную норму.

Заметим, что аналогично этому пространство L_0^p может быть определено эквивалентной нормой

$$|\varphi| = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\varphi_k|^p_{L^p(K)} \right)^{1/p}.$$

В этой связи удобно ввести пространство $X_0 = \widetilde{L}_0^p$ с помощью нормы

$$|\varphi| = \sup_k |\varphi_k|_{L^p(K)}. \tag{17}$$

Легко видеть, что семейство весовых пространств X_λ монотонно убывает (в смысле вложения) по параметру λ_0 и возрастает по λ_1. При фиксированном λ пространства C_λ^μ и $\widetilde{L}_\lambda^p$ монотонно убывают по, соответственно, μ и p. Ясно также, что все пространства X_λ вложены в $\widetilde{L}_\lambda^p$.

Естественным образом определяются весовые пространства $X_\lambda(B, 0)$ и $X_\lambda(B', \infty)$ с одной особой точкой по отношению к весовой функции $\rho_\lambda(z) = |z|^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Нетрудно видеть, что

$$\widetilde{L}_\lambda^p(B, 0) \subseteq L^{p_0}(B), \quad \lambda \geqslant -2/p_0, \quad 1 \leqslant p_0 \leqslant p, \tag{18}$$

$$\widetilde{L}_\lambda^p(B', \infty) \subseteq L^{p_1}(B'), \quad \lambda \leqslant -2/p_1, \quad 1 \leqslant p_1 \leqslant p. \tag{19}$$

При $0 < \lambda < 1$ удобно ввести пространство $C_{(\lambda)}^\mu(B, 0)$ всех функций $\varphi \in C(B)$, для которых $\varphi(z) - \varphi(0) \in$ $\in C_\lambda^\mu(B, 0)$, снабженное соответствующей нормой. В частности, $C_{(\mu)}^\mu(B, 0) = C^\mu(B)$. При $\lambda \leqslant 0$ для единообразия полагаем $C_{(\lambda)}^\mu(B, 0) = C_\lambda^\mu(B, 0)$. Аналогичным образом при $-1 < \lambda < 0$ вводится и пространство $C_{(\lambda)}^\mu(B', \infty)$ условием $\varphi(z) - \varphi(\infty) \in C_\lambda^\mu(B', \infty)$, полагая для единообразия $C_{(\lambda)}^\mu(B', \infty) = C_\lambda^\mu(B', \infty)$ при $\lambda \geqslant 0$.

Обратимся к оператору T, определяемому интегралом (14) с плотностью $\varphi \in \widetilde{L}_\lambda^p(\mathbb{C}; 0, \infty)$, $p > 2$, где $-2 <$ $< \lambda_0 < 0$ и $\lambda_1 < -1$. При $z \neq 0$ подынтегральное выражение с этой плотностью принадлежит $\widetilde{L}^1_{\lambda_0, \lambda_1 - 1}(\mathbb{C}; 0, \infty)$, так что в соответствии с (18), (19) оно суммируемо на всей плоскости.

Теорема 4 (А.П. Солдатов [11]). *Пусть $p > 2$, $-2 < \lambda_0 < 0$, $\lambda_0 \neq -1$ и $-2 < \lambda_1 < -1$. Тогда оператор T ограничен*

$$\widetilde{L}_\lambda^p \to C^\mu_{(\lambda_0+1), \lambda_1+1}, \quad C_\lambda^\mu \to C^{1,\mu}_{(\lambda_0+1), \lambda_1+1}, \tag{20}$$

где $\mu = 1 - 2/p$ для первой пары пространств L^p, C и $0 < \mu < 1$ для второй пары C^μ, $C^{1,\mu}$. В частности, для тех же значений μ оператор T ограничен $L_\lambda^p \to C^\mu_{(\lambda_0+1), \lambda_1+1}$ и $C_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_0+1), \lambda_1+1}$.

На основе этой теоремы, полученной в работе [11], и на основе леммы 1 и формулы (2) можно сформулировать теорему об интегральном представлении решений уравнения (1) в весовых классах $L^p_\lambda,\ C^\mu_\lambda$ при $\mu = 1-2/p$ и $C^\mu,\ C^{1,\mu}$ при $0<\mu<1$ в неограниченной области.

Теорема 5. *Пусть в уравнении* (1) *число* $\alpha \geq 1$, *функция* Ω *определена по формуле* (2) *и функция* $f_0 = e^{-\Omega} f$. *Пусть* $p>2$, $-2<\lambda_0<0$, $\lambda_0 \neq -1$ *и* $-2<\lambda_1<-1$. *Тогда*

$$Tf_0:\ \ L^p_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1} \quad \textit{при}\ \ \mu = 1-2/p, \tag{21.a}$$

$$Tf_0:\ \ C^\mu_\lambda \to C^\mu_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1} \quad \textit{при}\ \ \mu = 1-2/p, \tag{21.b}$$

а также

$$Tf_0:\ \ C^\mu \to C^\mu_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1} \quad \textit{при}\ \ 0<\mu<1, \tag{22.a}$$

$$Tf_0:\ \ C^{1,\mu} \to C^{1,\mu}_{(\lambda_0+1),\lambda_1+1} \quad \textit{при}\ \ 0<\mu<1. \tag{22.b}$$

Любое регулярное решение уравнения (1) *представимо в виде* (12) *с произвольной аналитической функцией*

$$\phi(z) \in \begin{cases} L^p_\lambda,\ \ C^\mu_\lambda & \textit{при}\ \ \mu = 1-2/p,\\ C^\mu,\ C^{1,\mu} & \textit{при}\ \ 0<\mu<1, \end{cases} \tag{23}$$

и с весовой функцией $e^{-\Omega}$ *оно принадлежит классу*

$$(e^{-\Omega}\, u)(z) \in \begin{cases} L^p_\lambda,\ C^\mu_\lambda & \textit{при}\ \ \mu = 1-2/p,\\ C^\mu,\ C^{1,\mu} & \textit{при}\ \ 0<\mu<1. \end{cases} \tag{24}$$

6. ЗАДАЧА ТИПА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА

Задача Римана–Гильберта исчерпывающим образом изучена в известных монографиях [1, 7, 12] в классе H^* интегрируемых функций ϕ, принадлежащих классу $C^\mu_\lambda\big(\overline{D},F\big)$ с некоторыми $-1<\lambda<0$ и $0<\mu<1$, а также в классах H_ε почти ограниченных функций $H\big(\overline{D},F\big)$ и ограниченных функций, принадлежащих соответственно классам $C^\mu_\lambda\big(\overline{D},F\big)$, $0<\lambda<1$, и $C^\mu_{(+0)}\big(\overline{D},F\big)$ с некоторым $0<\mu<1$. Однако, во-первых, различные приложения требуют исследования этой задачи в пространстве $C^\mu_\lambda\big(\overline{D},F\big)$ для всех весовых порядков и, во-вторых, для уравнения (1) краевые задачи в областях с кусочно-гладкими границами не исследованы.

Постановка задачи

Требуется найти регулярное решение $u(z)$ *уравнения* (1) *в области* D *такое, что* $e^{-\Omega}\, u \in C^\mu_\lambda\big(\overline{D},F\big)$, *предельные значения которого на контуре* Γ *удовлетворяют граничному условию*

$$\big(\operatorname{Re} G_0 e^{-\Omega}\, u\big)\,(t) = g_0(t), \quad t\in\Gamma, \tag{25}$$

где $G_0(t), g_0(t) \in H(\Gamma,F)$, *причем* $G_0(t), G_0^{-1}(t) \neq 0$, $t\in\Gamma$, *включая односторонние пределы* $G_0(\tau\pm 0)$.

При этом регулярное решение $u(z)$ *вблизи особой точки* $z=0$ *и вблизи концов* $\tau=\tau_j\in F$ *контура* Γ *имеет поведение*

$$u(z) = \begin{cases} O\big(e^{-\operatorname{Re}\Omega(z)}\big) & \textit{при}\ \ z\to 0,\\ O\big((z-\tau_j)^{\gamma_{\tau,j}+\varepsilon_j}\big) & \textit{при}\ \ z\to\tau_j,\ \ j=\overline{1,m}, \end{cases} \tag{26}$$

где $\gamma_{\tau,j}\in\mathbb{C},\ \ -1<\varepsilon_j<0.$

Решение задачи

На основе представления решений уравнения (1) в виде (12) задача (25) редуцируется к задаче: *Найти аналитическую в области* D *функцию* $\phi(z) \in C^\mu_\lambda\big(\overline{D},F\big)$, *которая на границе* $\Gamma = \partial D$ *удовлетворяет условию*

$$\operatorname{Re} G_0\phi\big|_{\Gamma_0} = g_0, \tag{27}$$

где функция $G \in H(\Gamma_0)$ *всюду отлична от нуля,* $g_0(\tau+0) = g_0(\tau-0)$, *т.е.* $g_0\in H(\Gamma_0)$ (см. [7], стр. 18, 145).

Таким образом, задача (25) сводится к задаче Римана–Гильберта, которая была изучена в работах [10, 13].

Очевидно, задачу (25) можно представить в форме

$$\phi^+ = G\phi^- + g$$

с коэффициентом

$$G(t) = \overline{G_0(t)}\, G_0^{-1}(t) := \exp\bigl[2i \arg \overline{G_0(t)}\,\bigr] \quad \text{и} \quad \arg G(t) := \arg\bigl[\,\overline{G_0(t)}\,\bigr]$$

и правой частью $g = 2g_0(t)\, G_0^{-1}(t)$.

Введем индекс Коши функции G_0, представляющий собой целое число

$$\kappa = \operatorname{Ind}_\Gamma G_0 = \frac{1}{2\pi}[\arg G_0]_\Gamma,$$

следовательно, $\operatorname{Ind}_\Gamma G = -2\kappa$.

Тогда дополнительные условия (26) переходят к условиям

$$\phi(z) = \begin{cases} O\bigl((z-\tau_j)^{\varepsilon_j}\bigr) & \text{при } \ z \to \tau_j, \ \ j = \overline{1,m}, \quad \text{где } \ -1 < \varepsilon_j < 0, \\ O(1) & \text{при } \ z \to \infty. \end{cases}$$

Напомним некоторые свойства функции G и кусочно-гладкой кривой Γ. В дальнейшем предполагается, что кривая Γ удовлетворяет условиям утверждения 4, т.е. составлена из дуг Γ_j класса $C^{1,\mu}_{(1+0)}$, причем внутренние углы $\pi\alpha_\tau$ области D в точках $\tau \in F$ положительны. Относительно функции G также предполагаем, что ее сужение G_j на каждую дугу Γ_j принадлежит классу $C^{\mu}_{(+0)}(\Gamma_j, F_j)$, где F_j — двухточечное множество ее концов $\tau_j^0,\ \tau_j^1$. Пусть в этой нумерации τ_j^0 является левым концом ориентированной дуги Γ_j, тогда комплексное число

$$\sum_{\tau\in F}[G(\tau-0) - G(\tau+0)] = \sum_{j=1}^{m} G_j\big|_{\Gamma_j}, \quad G_j\big|_{\Gamma_j} = G_j(\tau_j^1) - G_j(\tau_j^0),$$

можно назвать приращением $G\big|_\Gamma$ функции G на контуре Γ.

Пусть выбрана непрерывная ветвь аргумента $\arg G$ на каждой из дуг Γ_j; она определена с точностью до кусочно постоянной функции, принимающей на Γ_j постоянное значение $2\pi k_j$ с некоторым целым k_j. С помощью утверждения 4 нетрудно убедиться, что и $\arg G_j \in C^{\mu}_{(+0)}(\Gamma_j, F_j)$. Положим

$$\pi a_\tau = (\arg G)(\tau+0) - (\arg G)(\tau-0), \quad \tau \in F. \tag{28}$$

Очевидно, a_τ зависит от выбора ветви аргумента и определено с точностью до четного целого числа, однако суммы

$$\sum\nolimits_\tau a_\tau = -\frac{1}{\pi}(\arg G)\big|_\Gamma, \quad \sum\nolimits_\tau [a_\tau],$$

где $[x]$ — целая часть числа, не зависят от выбора этой ветви.

Согласно утверждениям 4 и 5 и аналогично работе [10] получим представление для канонической функции.

Теорема 6. *Пусть функция $\zeta = \omega(z) \in C\bigl(\,\overline{D}\,\bigr)$ отображает область D на единичный круг D_0, задано семейство целых чисел s_τ, $\tau \in F$, и*

$$\varkappa = 1 + \sum\nolimits_\tau [a_\tau + s_\tau]. \tag{29}$$

Тогда существует единственная (с точностью до ненулевого множителя $c \in \mathbb{R}$) аналитическая в D функция

$$X(z) = A(z)\prod_{\tau\in F}(z-\tau)^{\delta_\tau}, \quad \delta_\tau = (a_\tau - [a_\tau] - s_\tau)/\alpha_\tau, \tag{30}$$

где коэффициент $A(z)$ принадлежит $C^{\mu}_{(+0)}\bigl(\,\overline{D}, F\bigr)$ и всюду отличен от нуля, удовлетворяющая краевому условию

$$[\omega(t)]^{\varkappa-1} G(t)\, X^+(t) + \overline{G(t)\, X^+(t)} = 0, \quad t \in \Gamma. \tag{31}$$

С помощью полученной канонической функции (см. [7, 10]) и утверждений 3–5 мы приходим к решению задачи (25):

Теорема 7. *Пусть* $a_\tau - \alpha_\tau\lambda_\tau \notin \mathbb{Z}$, $\tau \in F$, *и в условиях теоремы 1 каноническая функция* $X(z)$ *построена по семейству целых чисел* $s_\tau = [a_\tau - \alpha_\tau\lambda_\tau] - [a_\tau]$, *так что*

$$\varkappa = 1 + \sum\nolimits_\tau [a_\tau + \alpha_\tau\lambda_\tau]. \tag{32}$$

Тогда при $\varkappa \le 0$ *задача* (1) *безусловно разрешима в классе* $C^\mu_\lambda\big(\overline{D}, F\big)$, *и все ее решения* ϕ *даются формулой*

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \left(1 + \frac{[\omega(z)]^\varkappa}{[\omega(t)]^\varkappa}\right)\frac{g(t)}{G(t)\,X^+(t)}\,\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)-z} + X(z)\,p[\omega(z)], \quad p \in P^0_{-2\varkappa}. \tag{33}$$

При $\varkappa > 0$ *для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы в обозначениях* (28) *ее правая часть* g *удовлетворяла условиям ортогональности*

$$\int_\Gamma [X^+(t)]^{-1}\,g(t)\,q(t)\,|\omega'(t)|\,d_1t = 0, \quad q \in P^0_{2\varkappa-2},$$

где d_1t *означает элемент длины дуги. При выполнении этих условий ее* (*единственное*) *решение определяется равенством*

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)}{G(t)\,X^+(t)}\,\frac{\omega'(t)\,dt}{\omega(t)-z}. \tag{34}$$

При этом общее решение уравнения (1) *определяется формулой* (12), *в которой аналитическая функция* $\phi(z)$ *согласно знаку индекса* $\varkappa$ *определяется при помощи одной из формул* (33) *или* (34), *причем*

$$u(z) = \begin{cases} O\big(e^{-\operatorname{Re}\Omega}\big) & \textit{при}\ \ z \to 0, \\ O\big((z-\tau_j)^{\gamma_{\tau_j}+\varepsilon_j}\big) & \textit{при}\ \ z \to \tau_j,\ \ j = \overline{1,m}, \quad \textit{где}\ \ -1 < \varepsilon_j < 0. \end{cases}$$

Авторы выражают искреннюю благодарность А.П. Солдатову за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
3. *Михайлов Л.Г.* Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: Таджик НИИНТИ, 1963.
4. *Усманов З.Д.* Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе: Изд-во АН ТаджССР, 1993.
5. *Раджабов Н.Р.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992.
6. *Расулов А.Б., Солдатов А.П.* Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. № 5. С. 637–650.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
8. *Солдатов А.П.* Обобщенный интеграл типа Коши // Дифф. уравнения. 1991. Т. 27. № 2. С. 3–8.
9. *Солдатов А.П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Функц. анализ, СМФН. 2017. Т. 63. № 1. С. 1–189.
10. *Мещерякова Е.С., Солдатов А.П.* Задача Римана–Гильберта в семействе весовых пространств Гёльдера // Дифф. уравнения. 2016. Т. 52. № 4. С. 518–527.
11. *Солдатов А.П.* Об интеграле Помпею и некоторых его обобщениях // Вестник ЮУрГУ, ММП. 2021. Т. 14. № 1. С. 53–67.
12. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М: Наука, 1977.

13. *Аверьянов Г.Н., Солдатов А.П.* Задача линейного сопряжения для аналитических функций в семействе весовых пространств Гёльдера // Известия вузов. Математика. 2015. № 9. С. 56–61.

INTEGRAL REPRESENTATION OF SOLUTIONS AND RIEMANN–HILBERT TYPE PROBLEM FOR THE CAUCHY–RIEMANN EQUATION WITH STRONG SINGULARITY IN THE LOWER ORDER COEFFICIENT IN A DOMAIN WITH PIECEWISE SMOOTH BOUNDARY

A. B. Rasulov* , N. V. Yakivchik**

National Research University "Moscow Power Engineering Institute," Moscow, 111250 Russia
**e-mail: rasulzoda55@gmail.com*
***e-mail: YakivchikNV@mpei.ru*

Received: 21.04.2024
Revised: 09.07.2024
Accepted: 26.07.2024

Abstract. The goal of this work is to construct the general solution of the Cauchy–Riemann equation with strong singularities in the lower order coefficient and to study the Riemann–Hilbert boundary value problem in a domain with a piecewise smooth boundary.

Keywords: Cauchy–Riemann equations, strong singularities in coefficient, Pompeiu–Vekua operator, piecewise smooth boundary, Riemann–Hilbert problem.