ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 11, с. 2114–2131

УДК 517.958

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

© 2024 г. В. В. Веденяпин[1,*]

[1] *125047 Москва, Миусская пл., 4, ФИЦ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия*
**e-mail: vicveden@yahoo.com*

Поступила в редакцию 21.07.2023 г.
Переработанный вариант 11.07.2024 г.
Принята к публикации 26.07.2024 г.

В классических работах уравнения для полей гравитации и электромагнетизма предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даем вывод правых частей и анализ тензора энергии импульса в рамках уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна и рассматриваем космологические модели типа Милна–МакКри и Фридмана. Библ. 36.

Ключевые слова: уравнение Власова, уравнение Власова–Эйнштейна, уравнение Власова–Максвелла, уравнение Власова–Пуассона.

DOI: 10.31857/S0044466924110076, **EDN**: KGPFGE

1. ДЕЙСТВИЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ

Пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, массам $m \in \mathbb{R}$, $m \geqslant 0$ и заряду $e \in \mathbb{R}$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объеме $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ равно $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)\, d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$. Отметим, что в теории вероятностей для этой величины используется термин плотности распределения, а мы пользуемся терминологией, устоявшейся в кинетической теории и статистической физике. Рассмотрим действие:

$$\begin{gathered}S[g_{\mu\nu}, A_\mu] = -c\int mf(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)\sqrt{g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}d^3xd^3vdmdedt - \\ -\frac{1}{c}\int ef(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)A_\mu u^\mu d^3xd^3vdmdedt + \\ +k_1\int (R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x + k_2\int F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\sqrt{-g}d^4x,\end{gathered} \tag{1}$$

где c – скорость света. Здесь u – это четырехмерная скорость, нулевая компонента которой – это скорость света $u^0 = c$, а три другие совпадают с трехмерной, как это принято в теории относительности [1–4]: $u^i = v^i$ $(i = 1, 2, 3)$ – трехмерная скорость, $x^0 = ct$ и x^i (*латинские индексы* $i = 1, 2, 3$) – координата, $g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ – метрика (*греческие индексы* $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \partial A_\mu(\mathbf{x}, t)/\partial x^\nu - \partial A_\nu(\mathbf{x}, t)/\partial x^\mu$ – электромагнитные поля, R – полная кривизна. Λ – лямбда-член Эйнштейна (или просто Лямбда Эйнштейна), $k_1 = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}$ и $k_2 = -\dfrac{1}{4\pi c}$ – константы [1–4], g – определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ – постоянная тяготения, по повторяющимся индексам, как обычно, идет суммирование. В действии (1) интегрирование ведется, как обычно, по всей области изменения параметров, т.е. по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, массам $m \in \mathbb{R}$, $m \geqslant 0$, зарядам $e \in \mathbb{R}$ и времени $t \in \mathbb{R}$. Варьирование ведется обычным способом (см. [1]–[4]).

Вид действия (1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_μ. Такой способ вывода уравнений Власова–Максвелла и Власова–Эйнштейна из действия (1) использовался в работах [5]–[10], [19]–[21]. При варьировании (1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна

$$k_1\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R+\Lambda)\right)\sqrt{-g} = \int m\frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta}}u^\mu u^\nu d^3vdmd + k_2\left(-2F^{\beta\nu}F^{\alpha\mu}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}. \tag{2}$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению тензором энергии-импульса материи (оно выведено впервые в таком виде, видимо, в работах [9], [19]–[21]), второе (электромагнитная составляющая тензора энергии-импульса) известно (см. [1], [2]). Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова–Эйнштейна (см. [3]–[21]). Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (1) по A_μ и называется системой уравнений Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2} \int e u^\mu f\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e\right) v dm de. \tag{3}$$

Мы получили из действия (1) уравнения для полей (2)–(3). Чтобы получить замкнутые уравнения, нужно выписать уравнение на функцию распределения, которая появилась в уравнениях (2)–(3) из действия (1). Для этого нужно вывести уравнения движения частицы в заданных полях. Соответствующее действие хорошо известно (см. [1]–[4]). Отметим, что это действие для частиц можно получить, подставив в первых двух слагаемых действия (1) функцию распределения в виде δ-функции:

$$f\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e\right) = \delta\left(\mathbf{x} - x\left(t\right)\right) \delta\left(\mathbf{v} - \frac{dx}{dt}\right) \delta\left(m - m'\right) \delta\left(e - e'\right). \tag{4}$$

Получаем, опуская штрихи, стандартное действие для частиц (см. [1]–[4]):

$$S\big[x(t)\big] = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu}\big(\mathbf{x}(t), t\big) u^\mu u^\nu} dt - \frac{e}{c} \int A_\mu\big(\mathbf{x}(t), t\big) u^\mu dt. \tag{5}$$

При такой подстановке подразумевается, что трехмерная скорость входит в четырехмерную $\mathbf{u}$, как и раньше, формулой $\mathbf{u} = (c, v^1, v^2, v^3)$, где c – скорость света. Кроме того предполагается, что трехмерная скорость есть производная координаты по времени $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}$, поэтому в левой части (5) стоит только эта координата, по которой и нужно варьировать, как положено, по Лагранжу. Обычное варьирование приводит к уравнениям Эйлера–Лагранжа, а потом к уравнениям для функции распределения. Таким образом, мы получим замкнутую систему уравнений, которая и называется системой уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна. Итак, мы имеем два действия – одно для вывода уравнений для полей (1), другое для вывода уравнений движения частиц в заданных полях (5) в полном соответствии с классическим выводом (см. [1]–[4]). Действия связаны формулой (4). Подстановка (4) хорошо известна для уравнения Власова. Н.Н. Боголюбов: “Особенно ценно то, что уравнения Власова обладают микроскопическими решениями”. Речь идет о том, что сумма дельта функций (4) дает точные решения уравнения Власова, если аргументы дельта-функций удовлетворяют задаче N тел с любым N. Если мы в (4) возьмем сумму дельта функций, то получим соответствующую сумму и в (5): это показывает единственность действия (1), так как любую функцию распределения (в широком классе) можно приблизить в слабом смысле суммой дельта функций, увеличивая их число. Варьирование действия (5) было проведено нами в предыдущих работах и тщательно исследовано (см. [5]–[10], [19]–[21]) как для скоростей, так и для импульсов. Варьирование не совсем тривиально, и мы здесь не будем его воспроизводить, отсылая к этим работам, а здесь ниже проиллюстрируем эту схему в дальнейших примерах в более простых нерелятивистских и слаборелятивистских случаях. В роли частиц могут быть электроны и ионы в плазме, планеты в галактиках, галактики в супергалактиках, скопление галактик во Вселенной.

Постановка задачи о выводе уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия, рассматривалась с различной степенью проникновения. Обзор 1992 г. (см. [15]) по выводу уравнения Власова содержит 5 принципов наименьшего действия. Что касается европейских исследователей, то они работали в скоростях с использованием символов Кристфfeля (см. [3], [4], [11], [12]), и уравнения были выведены только в работах [9], [19]–[21]. Таким образом, уравнения Власова–Эйнштейна оказались прекрасным тестом на схему вывода уравнений типа Власова из принципа наименьшего действия. Отметим постоянные усилия Филиппа Моррисона (см. [14], [15]), который такую задачу поставил, использовал импульсы и вывел уравнения для частиц в заданных полях (уравнения Лиувилля) (см. [14]). Отметим, что до сих пор правильный вид уравнений Власова–Эйнштейна (и даже Эйнштейна) представляет трудности. Например, в недавних работах [11], [12] используются символы Кристоффеля для уравнение Лиувилля (как часть системы Власова–Эйнштейна), но функция распределения зависит от импульсов. Так что этот гибрид требует уточнения. В скоростях система уравнения Власова–Эйнштейна (и Власова–Максвелла–Эйнштейна) была выведена только недавно в работах [5]–[10], и воспроизведена с сокращениями, улучшениями, объяснениями и критикой других выводов в [19]–[21], [26]–[32]. Если европейские ученые во Франции, Германии и Италии работали в скоростях, то в США конкурирующая школа Филиппа Моррисона работала в импульсах и близко подошла к правильной форме системы уравнений

Власова–Эйнштейна. Последняя работа Моррисона (см. [14]), содержащая попытку вывода системы Власова–Эйнштейна, дала правильное уравнение для частиц (уравнение Лиувилля), но правая часть уравнения Эйнштейна не далась: даже она почти правильная, с точностью до множителя. Работа Герхарда Рейна (см. [13]), многолетнего исследователя уравнений Власова–Эйнштейна, уже по части вывода следует линии Моррисона. Похоже, что единственный способ вывести уравнение Эйнштейна и уравнения Максвелла с правой частью дает только действие (1). Действия (1) и (5), таким образом, дает самый простой и прямой вывод замкнутой системы уравнений электродинамики и общей теории относительности (ОТО), упрощая всю ОТО и электродинамику использованием именно принципа наименьшего действия и уравнений Власова–Максвелла–Эйнштейна.

Дальнейший план статьи таков. В разд. 2 мы исследуем знак электромагнитной части действия (1). В разд. 3 покажем, как получаются космологические решения с помощью уравнений типа Власова в нерелятивистском случае. Этим мы обобщим решение Милна–МакКри (см. [22]). В разд. 4 рассмотрим нерелятивистский электростатический аналог электромагнитного тензора энергии-импульса и его обобщения. В разд. 5 получаются обобщения метода Милна–МакКри (см. [22]) на космологические решения при движении в заданной метрике с примерами метрик Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера, изотропной метрики и некоторых слаборелятивистских случаев. Там мы столкнемся с вопросом, как определять постоянную Хаббла. Делается вывод, что обычный способ определять ее по полям, описанный во многих учебниках, некорректен, так как в телескопы наблюдается материя, а не метрика. Поэтому нужно рассматривать космологическое движение (это понятие мы введем, связав его с уравнениями типа Власова) материи в этой метрике, а константу Хаббла определять, как это делали Милн и МакКри (см. [22]).

2. АНАЛИЗ ТЕНЗОРА ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА (2)

Мы получили кинетическую форму тензора энергии-импульса, но обычно используют его гидродинамическую форму, записывая ее в абстрактной форме (см. [1], [2])

$$T^{\mu\nu} = (p + E)U^{\mu}U^{\nu} + pg^{\mu\nu}.$$

Здесь – давление, – энергия, U – макроскопическая (гидродинамическая) скорость. Такое выражение появляется в кинетической теории из нерелятивистской формы первого слагаемого (2), но немного упрощенного

$$\int mf(t, x, v, m, e)u^{\mu}u^{\nu}d^3vdm.$$

Сравнение явной формулы (2) с этим выражением показывает, что такое выражение получается после гидродинамической подстановки в правую часть формулы (2)

$$f(t, x, v, m, e) = \rho(x, t, m, e)\delta\big(\nu - V(t, x, m, e)\big),$$

где $U(t, x, m, e) = \big(c, V(t, x, m, e)\big)$, а δ – дельта-функция Дирака. Кроме того, появился хороший кандидат вместо Лямбды Эйнштейна $\frac{k_2}{k_1}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta})$. Введение лямбды Эйнштейн считал главной ошибкой своей жизни. Но сейчас эта лямбда стала основным способом объяснять ускоренное расширение Вселенной. Избавиться от лямбды или получить ее естественно есть основная задача тех, кто объясняет ускоренное расширение Вселенной (вводя для этого "темную энергию" или лямбду Эйнштейна). Наш анализ тензора энергии-импульса покажет, что введение лямбды хорошо работает в нерелятивистском случае. Но в разд. 5 постараемся найти способ вывода ее из действия (1) без лямбды.

Итак, рассмотрим электромагнитную часть тензора энергии – импульса. Проверим знак второго слагаемого в уравнении Эйнштейна (2) для компоненты 00. Покажем, что это неотрицательная величина, что полностью согласуется с выражениями в классических учебниках [1]–[4] для случая метрики Минковского–Лоренца. Действительно, выражение

$$-2F^{\beta 0}F^{\alpha 0}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g^{00}$$

достаточно проверить на знак для диагональной метрики, приводя в точке метрику к диагональному виду. Имеем для этого выражения в случае диагональной метрики $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(g_0, g_1, g_2, g_3)$ с Лоренцевой сигнатурой $(+1, -1, -1, -1)$, (что задает знаки этих диагональных элементов) следующее:

$$\frac{1}{2}g_0^{-1}\Sigma(F_{ij}^2g_i^{-1}g_j^{-1}) - g_0^{-2}\Sigma(F_{0i}^2g_i^{-1}). \tag{6}$$

Это выражение положительно, так как $g_0 > 0$, $g_i < 0$. Я благодарен Я.Г Батищевой за помощь в вычислениях. Значит, это выражение вносит тот же вклад, что и материя, и не годится для кандидата вместо лямбды

Эйнштейна, вообще говоря, для описания ускоренного расширения. Мы проверим частные случаи этого выражения в слаборелятивистских случаях и в случае электростатики найдем подтверждение этого неравенства, а потом рассмотрим, какие типы лагранжианов дадут противоположный результат: это и будет возможными моделями знаменитого ускоренного расширения Вселенной (Нобелевская премия 2011 г.) (разд. 4). Но сначала приведем теорию Милна–МакКри космологических решений на основе уравнения Власова–Пуассона в нерелятивистском случае.

3. УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА–ПУАССОНА, КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА С ЛЯМБДА-ЧЛЕНОМ

Коротко воспроизведем простейшее нерелятивистское космологическое решение Милна–МакКри с добавкой лямбда-члена в форме уравнения Власова–Пуассона. Нерелятивистский случай соответствует действию (см. [1], [2], [5]–[9]):

$$S[U] = \int \left[\frac{mv^2}{2} - mU\right] f\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m\right) d\mathbf{x} d\mathbf{v}\, dm dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int \left(\left(\nabla U\right)^2 - 2\lambda U\right) d\mathbf{x} dt. \tag{7}$$

Варьируем по U, получая уравнения Пуассона с лямбда-членом:

$$\Delta U = 4\pi\gamma \int m\, f\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e\right) d\mathbf{v}\, dm de - \lambda. \tag{8}$$

Мы видим, что для получения замкнутой системы уравнений нужно получить уравнение для функции распределения, появившейся в уравнении Пуассона (8). Действие для одной частицы получается из первого слагаемого в (7) при выборе $f\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e\right) = \delta\left(m - M\right) \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{y}\left(t\right)\right) \delta\left(\mathbf{v} - \frac{dy}{dt}\right)$. Это формальная подстановка – правило для получения правильных лагранжианов из действия (7) работает для вывода любых систем типа Власова, и мы широко пользовались этим и будем пользоваться в дальнейшем. Получаем стандартное действие:

$$S_1[y] = \int \left[\frac{My'^2}{2} - MU\left(\mathbf{y}\right)\right] dt.$$

Варьируем как обычно в механике и получаем уравнение Ньютона:

$$\mathbf{y}'' - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} = 0.$$

Переходим к уравнению Лиувилля для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v},$$
$$\dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}$$

и тогда получаем уравнение на функцию распределения, дополняя уравнение (8)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0. \tag{9}$$

Система (8), (9) и есть система уравнений Власова–Пуассона для гравитации с лямбда-членом, который и призван описать ускоренное расширение. Мы провели подробный вывод уравнения Власова–Пуассона в простейшем случае, который иллюстрирует правильность вывода уравнений типа Власова и в более сложных релятивистских и слаборелятивистских случаях. Этот способ вывода уравнений типа Власова отрабатывался в статьях [5]–[9], и является пока единственным способом получать в замкнутой форме уравнения электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. По сути он следует всем учебникам по теории поля (см., например, [1], [2]), где вводятся два действия для полей и для частиц. Наша небольшая добавка с уравнениями типа Власова (см. [5]–[9]) связала эти два действия (подстановкой дельта – функции в одну сторону и переход к интегрированию с помощью функции распределения в обратную аналогичен связи лагранжевых и эйлеровых координат). Это позволило заодно получать правые части в уравнениях для полей (тензор энергии-импульса в уравнениях Эйнштейна). Это поставило на математическую платформу общую теорию относительности, упрощая ее и давая замкнутую систему уравнений из принципа наименьшего действия (1), (3). Это упростило и сделало математически строгой и всю гравитацию и электродинамику именно с помощью уравнения Власова. Правильность такой схемы вывода уравнений типа Власова была сначала проверена на уравнениях Власова—Пуассона и уравнениях Власова—Максвелла, где ответ был известен, хотя правые части уравнений для полей не были выведены, и только после этого схема вывода была перенесена на уравнение Власова—Эйнштейна. Это важно, потому что как зарубежные, так и наши исследователи брали тензор энергии-импульса с потолка, что приводило к заведомо неправильным уравнениям для полей. Более того, сравнение релятивистских действий с нерелятивистскими и слаборелятивистскими позволил твердо установить все коэффициенты действия (1), а потому и для уравнений для полей. Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение.

Дальнейшая наша цель – получение космологических решений, И сейчас мы выведем уравнения Милна—МакКри (см. [22]) из уравнения Власова. Система (8), (9) имеет точное гидродинамическое следствие, так как допускается (согласно более общей теории) гидродинамический вид функции распределения (см. [5]—[9], [17]—[22]): $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) = \rho(t, \mathbf{x}, m)\,\delta(\mathbf{v} - \mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m))$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{w}) = 0,\\
&\frac{\partial w_k}{\partial t} + w_i\frac{\partial w_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0,\\
&\Delta U = 4\pi\gamma\int m\rho dm - \lambda.
\end{aligned}$$

Это означает, что если $\rho(t, \mathbf{x}, m)$ и $\mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m)$ удовлетворяют этой системе уравнений, то $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) = \rho(t, \mathbf{x}, m)\,\delta(\mathbf{v} - \mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m))$ удовлетворяет системе уравнений Власова—Пуассона (8)—(9).

Пусть $w_k(t, \mathbf{x}, m) = \frac{\partial W}{\partial x^k}$. Такая подстановка проходит, согласно общей теории [5–9, 17—22], и получается точное Гамильтон—Якобиево следствие системы Власова—Пуассона с лямбда-членом:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\nabla W) = 0,\\
&\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{(\nabla W)^2}{2} + U = 0,\\
&\Delta U = 4\pi\gamma\int m\,\rho\,dm - \lambda.
\end{aligned} \tag{10}$$

Эта система уравнений обобщает систему Милна—МакКри (см. [22]) введением лямбды и зависимостью плотности и константы Хаббла от массы. Мы вывели эту систему из системы Власова—Пуассона, которую мы получили из принципа наименьшего действия: таким образом, мы обосновали и обобщили систему Милна—МаКри (см. [22]), которая признанным образом дает космологические решения в нерелятивистском случае.

Отметим, что если W есть функция только радиуса, то скорость дает как раз обобщенный разлет Хаббла: $w = \nabla W = W'(r)\frac{x}{r}$. Скорость разбегания $\frac{W'(r)}{r}$называется постоянной Хаббла. Обратное тоже верно: любой разлет по Хабблу, если скорость пропорциональна расстоянию, означает, что скорость есть градиент некоторой функции. Этим космологическое расширение связывается с гидродинамическим и даже Гамильтон—Якобиевым следствием уравнения Власова—Пуассона. В космологических решениях плотность не зависит от пространственной координаты. Тогда из первого уравнения получаем $\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} = -3H(m,t)$, а также $\Delta W = 3H(m,t)$. Мы покажем ниже, что$H(m,t) = \frac{W'(r)}{r}$- совпадает с постоянной Хаббла. Из третьего уравнения имеем уравнение: $\Delta U = 4\pi\gamma\int m\rho(m,t)dm - \lambda$. Решая два последних уравнения, имеем

$$W(r,m,t) = \frac{H(m,t)}{2}r^2 + \frac{A(m,t)}{r} + B(m,t) \quad \text{и} \quad U(r,t) = \frac{4\pi\gamma\int m\rho(m,t)dm - \lambda}{6}r^2 + \frac{C(t)}{r} + D(t).$$

Мы видим, дифференцируя $W(r,m,t)$, что $H(m,t) = \frac{W'(r)}{r}$, т.е. что это действительно постоянная Хаббла.

Здесь $A(m,t), B(m,t), C(t), D(t)-$произвольные функции. Получаем, подставляя эти выражения во второе уравнение системы (13):

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial t}r^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{H^2}{2}r^2 - \frac{2AH}{r} + \frac{A^2}{r^4} + \frac{4\pi\gamma\int m\rho(m,t)dm - \lambda}{6}r^2 + \frac{C}{r} + D = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при степенях радиуса (как это делали Милн и МаКри [22]), получаем :

$$A(m,t) = 0, \quad C(t) = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t} + D(t) = 0.$$

Получаем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho(m,t)}{\partial t} + 3H(m,t)\rho(m,t) = 0,\\
&\frac{\partial H(m,t)}{\partial t} + H^2 + \frac{4\pi\gamma}{3}\int m\rho\,(t,m)\,dm\, - \frac{\lambda}{3} = 0.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Так как скорость разбегания $\vec{w} = \nabla W = H\vec{r}$, имеем

1) Условие расширения Вселенной $H \geqslant 0$.

2) Условие ускоренного расширения $\frac{\partial H(m,t)}{\partial t} \geqslant 0$, т.е. $H^2 + \frac{4\pi\gamma}{3}\int m\rho\,(t,m)\,dm\, - \frac{\lambda}{3} \leqslant 0$.

Из второго условия видим определяющую роль лямбды для ускоренного расширения. Мы также видим: так как $\rho(m,t)$ обязано, вообще говоря, зависеть от массы, то и "постоянная" Хаббла $H(m,t)$, вообще говоря, зависит от массы. Мы получили систему уравнений (11), которая в принципе объясняет как изменение постоянной Хаббла так и ее "напряжения" (Constant Hubble Tension [25]) именно зависимостью от времени и от массы: уравнения (11) можно считать точным уравнением константы Хаббла с лямбда-членом в не релятивизме. Если, однако, $H(m,t)$ не зависит от массы, (что второе из уравнений (11) допускает, как это и предполагали Милн и МакКри в [22]) мы можем свести систему (11) к системе двух обыкновенных уравнений. Обозначим $K(t) = \frac{4\pi\gamma}{3}\int m\rho(t,m)\,dm$ и получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{dK(t)}{dt} + 3HK = 0,\\
&\frac{dH}{dt} + H^2 + K - \frac{\lambda}{3} = 0.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Первое из уравнений (12) есть в точности уравнение (4) Милна–МакКри (см. [22]), а второе из уравнений (12) – это их уравнение (7), (но с лямбда-членом), полученное без всяких предположений из принципа наименьшего действия как его точное следствие. Система (12) решается точно, но нам достаточно и фазового портрета, который исследовался в [19], [26]. Условия ускоренного расширения – это узкая область под параболой $H \geqslant 0, K \geqslant 0, H^2 + K - \frac{\lambda}{6} \leqslant 0$.

Система (11) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и в более общем случае, когда $H(m,t)$ кусочно-постоянна на конечном числе интервалов I_i. Пусть значение $H(m,t)$ на этом интервале равно $H(i,t)$, $i = 1,\ldots,r$. Обозначая $m(i,t) = \frac{4\pi\gamma}{3}\int\limits_{I_i} m\rho(t,m)dm$, получаем систему $2r$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{dm(i,t)}{dt} + 3H(i,t)m(i,t) = 0, \quad i = 1,\ldots,r,\\
&\frac{dH(i,t)}{dt} + H(i,t)^2 + \sum_{k=1,\ldots,r} m(k,t) - \frac{\lambda}{3} = 0.
\end{aligned}
$$

В литературе широко обсуждается натяжения константы Хаббла (Constant Hubble Tension [25]), оно выражает несоответствие постоянной Хаббла наблюдениям и вопросам, от чего она вообще может зависеть. Получение точного решения следствия действия (1) для постоянной Хаббла в принципе может убрать это несоответствие. Теперь исследуем тензор энергии-импульса для электростатики и соответствующие обобщения.

4. МЕТРИКА СЛАБОРЕЛЯТИВИСТСКАЯ И ОБОБЩЕННАЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Теперь модифицируем нерелятивистское действие (7), добавив электростатику в случае слаборелятивистской метрикой $g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1)$, как это предписывается исходным релятивистским выражением (1)

$$
\begin{aligned}
S[U,\varphi] = &\int \left[\frac{mv^2}{2} - e\varphi - mU\right] f\,(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e)\,d\mathbf{x}d\mathbf{v}\,dm de dt +\\
&+\frac{1}{8\pi}\int \frac{(\nabla\varphi)^2}{\sqrt{1+\frac{U}{c^2}}}d\mathbf{x}dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int (\nabla U)^2 d\mathbf{x}dt + \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int U d\mathbf{x}dt.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Варьируем по φ и по U, получая дважды уравнения Пуассона с модификацией:

$$\begin{gathered}\frac{\Delta\varphi}{\sqrt{1+\frac{U}{c^2}}}=-4\pi\int ef\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)d\mathbf{v}\,dmde+\frac{1}{2c^2}\frac{(\nabla\varphi,\nabla U)}{(1+\frac{U}{c^2})^{\frac{3}{2}}},\\ \Delta U=4\pi\gamma\int mf\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)d\mathbf{v}\,dmde-\frac{1}{2}c\Lambda^2+\frac{\gamma(\nabla\varphi)^2}{4c^2(1+\frac{U}{c^2})^{\frac{3}{2}}}.\end{gathered}\tag{14}$$

Мы получили выражение (14), где знак третьего слагаемого во втором из уравнений (14) согласуется с общим выражением (6) и не дает шанса объяснения ускоренного расширения Вселенной. Благодарю рецензента, помогшего уточнить первое из уравнений (14). Здесь мы в любом случае имеем источник “искажений константы Хаббла” (Hubble constant tension [22]). Однако этот пример может подсказать нам и возможный вид лагранжиана темной энергии. Если мы обобщим это действие, то получим и возможную модель темной энергии как аналог исходной электростатики

$$\begin{gathered}S[U,\eta]=\int\left[\frac{mv^2}{2}-e\eta-mU\right]f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)d\mathbf{x}d\mathbf{v}\,dmdedt+\\ +\frac{1}{8\pi}\int(\nabla\eta)^2\alpha(U)d\mathbf{x}dt-\frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2d\mathbf{x}dt+\frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Ud\mathbf{x}dt.\end{gathered}$$

Здесь поле η – поле темной энергии (аналог электрического потенциала φ, действительная функция), e теперь ее заряд, $\alpha\left(U\right)$ – это функция, условия на которую мы хотим выяснить, чтобы получалось желанное и необходимое ускоренное расширение. Получаем соответствующие уравнения

$$\begin{gathered}\alpha\left(U\right)\Delta\eta=-4\pi\int e\,f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)d\mathbf{v}\,dmde-(\nabla\eta,\nabla U)\frac{d\alpha}{dU},\\ \Delta U=4\pi\gamma\int m\,f\left(t,\mathbf{x},\mathbf{v},m,e\right)d\mathbf{v}\,dmde-\frac{1}{2}c\Lambda^2-\frac{\gamma(\nabla\eta)^2}{2}\frac{d\alpha}{dU}.\end{gathered}$$

Если бы выражение $\frac{d\alpha}{dU}$ было бы больше нуля, то это и было бы возможным объяснением ускоренного расширения вселенной. Такие модели иногда изучаются, но хорошо было бы получить ускоренное расширения из уравнения Власова–Эйнштейна автоматически, без введения лямбды-члена или таких искусственных полей. Поэтому рассмотрим некоторые важные примеры, обобщая на релятивистский и слаборелятивистский случаи подход Милна–МакКри (см. [22]), используя наши знания о его происхождении из уравнений типа Власова.

5. ПРИМЕРЫ

Примеры, рассмотренные здесь, структурированы следующим образом. В первом примере изучается, как движется материя в плоской метрике Фридмана, во втором – классическое решение из учебников. Делается вывод, что определять константу Хаббла просто на основе метрики нельзя, так как наблюдатель измеряет движение именно материи. В третьем примере мы получаем космологическое решение для движения материи в произвольной изотропной метрике. Пример 4 – это космологическое движение материи в метрике Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера. Пример 5 – космология слабого релятивизма.

Пример 1. Метрика диагональная Фридмана: уравнения движения частиц в космологической задаче (Веденяпин В.В., Бай А.А., В. М. Аушев, А. О. Гладков, Ю. А. Измайлова, А. А. Реброва [27]–[33]). Рассмотрим действие (частный случай общего действия (5))

$$S=-cm\int\sqrt{c^2-a^2(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}dt+k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x=\int Ldt+k_1\int(R+\Lambda)\sqrt{-g}d^4x=S_p+S_f,$$

где лагранжиан частиц $L=-cm\sqrt{c^2-a^2(t)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=cmL_1$; S_p означает действие частиц; S_f означает действие полей. Варьирование действия S_p с учетом условия $\delta S_p=0$ дает уравнения движения частиц:

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\right)=-\frac{d}{dt}\left(cm\frac{a^2\dot{x}_i}{L_1}\right)=0,\qquad i=1,2,3.$$

Получаем выражение для гамильтониана:

$$H=\sum p_i\dot{x}_i-L=\frac{c}{a}\sqrt{(mca)^2+p^2}.$$

Этот же результат получаем из массового соотношения, из общей формулы. Гамильтоновы канонические уравнения $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$:

$$\dot{x}_i = \frac{c}{a}\frac{p}{\sqrt{(mca)^2 + p^2}}, \qquad \dot{p} = 0,$$

приводят к уравнению Лиувилля на функцию распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$от пространственных переменных $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и импульсов $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(p, \frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{c}{a}\frac{1}{\sqrt{(mca)^2 + p^2}} = 0.$$

Используя гидродинамическую подстановку $f(t, x, p, m, e) = \rho(x, t, m)\delta(p - P(t, x, m))$, получаем уравнение неразрывности и уравнение движения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + V\frac{\partial P}{\partial x} = 0,$$

где

$$V = \left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{p=P} = \frac{c}{a}\frac{P}{\sqrt{(mca)^2 + P^2}}.$$

Отсюда получаем после градиентной подстановки $P = \nabla W$ уравнение неразрывности и уравнение Гамильтона–Якоби в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{c}{a}\frac{\nabla W}{\sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2}}\rho\right) = 0,$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{c}{a}\sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2} = 0.$$

Рассмотрим изотропный случай $W = W(r, t)$, который вместе с условием $\rho = \rho(t, m)$ дает космологические решения. Получаем выражения для импульсов и скоростей частиц

$$\nabla W = \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial W}{\partial r}, \qquad v = \frac{c}{a}\frac{\nabla W}{\sqrt{(mca)^2 + (\nabla W)^2}} = \frac{c}{a}\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\frac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{(mca)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}} = \widehat{\mathbf{r}}\phi(r).$$

Также считая, что $\rho = \rho(t, m)$, разделяем переменные в уравнении неразрывности:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\widehat{\mathbf{r}}\phi(r)) = -3H(m, t).$$

Здесь $\widehat{\mathbf{r}}$ – это единичный вектор $\widehat{\mathbf{r}}^i = \frac{x^i}{r}$

$$\operatorname{div}(\widehat{\mathbf{r}}\phi(r)) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\phi(r)) = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{r}\phi,$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{2}{r}\phi = 3H,$$
$$\phi = H(m, t)r + \frac{A(m, t)}{r^2}.$$

Получаем систему

$$\frac{c}{a}\frac{\frac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{(mca)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}} = \phi,$$
$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{c}{a}\sqrt{(mca)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2} = 0.$$

Из первого уравнения выражаем $\frac{\partial W}{\partial r}$, берем положительный корень:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{a^2 cm\phi}{\sqrt{c^2 - a^2\phi^2}},$$

Выражаем корень:

$$\sqrt{(mca)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2} = \frac{ac^2m}{\sqrt{c^2 - a^2\phi^2}}.$$

Подставляем во второе уравнение:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - a^2\phi^2}} = 0.$$

Получаем систему уравнений для определения $W(r,t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial r} &= \frac{a^2cm\phi}{\sqrt{c^2 - a^2\phi^2}},\\ \frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{mc^3}{\sqrt{c^2 - a^2\phi^2}}.\end{aligned}$$

Кроме того, из условия $\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial r}$ имеем связь между функциями $a(t)$ и $\phi(r,t,m)$:

$$-a^2c^3m\phi\phi' = cma(\phi(2c^2 - a^2\phi^2)\dot{a} + c^2a\dot{\phi}).$$

После подстановки ϕ получаем

$$-c^3ma^2\left(\frac{A}{r^2} + rH\right)\left(-2\frac{A}{r^3} + H\right) = cma\left(\left(\frac{A}{r^2} + rH\right)\left(2c^2 - a^2\left(\frac{A}{r^2} + rH\right)^2\right)\dot{a} + c^2a\left(\frac{A}{r^2} + rH\right)\right).$$

Приравниваем коэффициенты при степенях r. Из выражений при отрицательных степенях r следует, что $A = 0$, и остается

$$-c^3ma^2rH^2 = cma(2c^2rH\dot{a} - r^3a^2H^3\dot{a} + c^2ra\dot{H}).$$

Из коэффициента при r^3 имеем $\dot{a} = 0$, то есть $a = \text{const}$. Приравниваем коэффициенты при r:

$$-c^3ma^2rH^2 = c^3ma^2r\,\dot{H},$$

откуда получаем

$$H^2 + \dot{H} = 0.$$

Вывод. Точное следствие уравнений движения частиц в метрике модели Фридмана в космологическом случае имеет независимо от уравнений для полей вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial t} &+3\rho H = 0,\\ H^2 + \dot{H} &= 0,\\ a &= \text{const}.\end{aligned} \tag{15}$$

Из этих уравнений видно, что рассмотрение во всех учебниках модели Фридмана недостаточно, так как нужно рассматривать движение материи, и на основе этого определять уравнение для константы Хаббла, как это сделано здесь. Третье из уравнений (15) показывает, что первый из отзывов Эйнштейна (см. [35], [36]) оправдался, а не второй, как это следует при рассмотрении движения материи. Второе из уравнений (15) показывает, что мы движемся в правильном (см. [27]–[32]) направлении: уже устранено влияние притяжения, осталось только свободное движения, как это видно из уравнений Милна–МаКри (13), и осталось только получить аналог лямбды в (13), при этом лямбда релятивистская из действия (1) здесь уже не участвует. Иными словами, имеется шанс получить лямбду нерелятивистскую (13) просто как следствие уравнений Власова–Эйнштейна, что и было бы триумфальным объяснением ускоренного расширения Вселенной из классического действия ОТО (1). Поэтому имеет особый смысл получить аналоги решений (15) в общем случае изотропной метрики. Это будет сделано в примере 3, а в примере 2 продолжим классические рассмотрения модели Фридмана. Отметим также, что определение во многих руководствах постоянной Хаббла как отношение $\frac{1}{a}\frac{da}{dt}$ неправомерно: в телескопы мы наблюдаем именно материю, а не метрику.

Пример 2. Оценка стандартной модели Фридмана с точки зрения предыдущих вычислений. Модель Фридмана сыграла выдающуюся роль, но необходимо оценить теперь ее с точки зрения точных выражений примера 1.

Уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu v} - \frac{1}{2} R g_{\mu v} + \Lambda g_{\mu v} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu v}.$$

После подстановки полученных ранее выражений для компонент тензора кривизны имеем стандартные выражения для модели Фридмана

$$\Lambda + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00},$$

$$\Lambda a^2 + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{i,i}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Выражение для тензора энергии-импульса имеет вид в стандартной модели Фридмана

$$T = \begin{pmatrix} c^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что на самом деле тензор энергии—импульса имеет точное выражение в уравнении (2), и хорошо видно, что там нет нулевых компонент. Это показывает, что метрика Фридмана не проходит как точное решение уравнений Эйнштейна. Тем не менее она и сейчас является способом получать простые модели, что мы и сделали в примере 1. В итоге имеем два уравнения Фридмана из учебников:

$$\Lambda + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho,$$
$$\Lambda a^2 + \dot{a}^2 + 2a\ddot{a} = 0.$$

Если учесть, что $a = \mathrm{const}$, (пример 1), то получим

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2} \rho,$$
$$\Lambda a^2 = 0.$$

Из второго уравнения получаем, что $a = 0$. Это понятный ответ. Модель Фридмана несовместима с правильным выражением тензора энергии-импульса, когда вселенная разбегается: там все компоненты при разбегании ненулевые. Поэтому программа должна выглядеть так: найти простейшую метрику, дающую точное космологическое решение уравнения Власова—Эйнштейна.

Выводы. Простота получения решений движения частиц в метрике Фридмана в космологическом случае наталкивает на мысль сделать то же самое в более общих изотропных случаях: это бы было первым точным космологическим решением уравнения Эйнштейна. В следующем пункте мы начнем вычисления в общем случае изотропной метрики.

Пример 3. Общая изотропная метрика: уравнения движения частиц и космологические решения. Изотропная метрика:

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e(r,t) & a(r,t)x & a(r,t)y & a(r,t)z \\ a(r,t)x & b(r,t) + d(r,t)x^2 & d(r,t)xy & d(r,t)xz \\ a(r,t)y & d(r,t)xy & b(r,t) + d(r,t)y^2 & d(r,t)yz \\ a(r,t)z & d(r,t)xz & d(r,t)yz & b(r,t) + d(r,t)z^2 \end{pmatrix}.$$

Имеем (машинное) выражение для обратной метрики (А.О. Гладков, А.А. Руссков)

$$g_{\alpha\beta} = K \cdot \begin{pmatrix} b + d(x^2 + y^2 + z^2) & -ax & -ay & -az \\ -ax & g_{11} & \frac{a^2xy - edxy}{b} & \frac{a^2xz - edxz}{b} \\ -ay & \frac{a^2xy - edxy}{b} & g_{22} & \frac{a^2yz - edyz}{b} \\ -az & \frac{a^2xz - edxz}{b} & \frac{a^2yz - edyz}{b} & g_{33} \end{pmatrix},$$

$$K = \frac{1}{be - (a^2 - ed)(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$g_{11} = \frac{1}{b}\left(-a^2y^2 - a^2z^2 + eb + edy^2 + edz^2\right),$$

$$g_{22} = \frac{1}{b}\left(-a^2x^2 - a^2z^2 + eb + edx^2 + edz^2\right),$$

$$g_{33} = \frac{1}{b}\left(-a^2x^2 - a^2y^2 + eb + edx^2 + edy^2\right).$$

По массовому соотношению $g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta = (mc)^2$ составим и решим квадратное уравнение относительно p_0:

$$g^{00}p_0^2 + 2g^{i0}p_ip_0 + g^{ij}p_ip_j = (mc)^2.$$

Физический смысл имеет корень, взятый с минусом (см. [1]):

$$p_0 = \frac{1}{e}\left(-2a\left(p_1x + p_2y + p_3z\right) - \sqrt{\left(a^2 - ed\right)\left(p_1x + p_2y + p_3z\right)^2 + e((mc)^2 - bp^2)}\right).$$

Здесь использовано обозначение $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$.

Сделаем подстановку $p = \nabla W\left(r, t\right)$; $W_t = \frac{\partial W}{\partial t} = -H\left(x, p\right) = cp_0$ и выпишем уравнение Гамильтона–Якоби:

$$W_t = -H = \frac{c}{e}\left(-arW_r - \sqrt{W_r^2(a^2r^2 - eb - dr^2e) + e(mc)^2}\right). \tag{16}$$

Нам нужно еще посчитать скорости и уравнение неразрывности в изотропном случае, и мы докажем следующую лемму.

Лемма об изотропных гамильтонианах и уравнении неразрывности в космологических моделях. *Пусть гамильтониан $H(p, x)$ зависит от этих аргументов через изотропные переменные p^2 и (p, x) : $H(p, x) = H((p, x), p^2)$. Тогда при Гамильтон–Якобиевой подстановке $p = \nabla W$ гамильтониан приобретает вид*

$$H(p, x) = H((p, x), p^2) = H(rW_r, {W_r}^2).$$

1. *Скорости имеют вид $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}$.*
2. *Уравнение неразрывности принимает вид $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho\frac{\partial H}{\partial p_i}) = 0$ или $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}(\rho\frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}) = 0$.*
3. *В космологическом случае, когда плотность $\rho = \rho(m, t)$ не зависит от пространственной координаты, переменные разделяются, и появляется “постоянная” интегрирования $h(t)$, которая называется постоянной Хаббла:*
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho h = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}\right) = 3h.$$
4. *Уравнение $\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}) = 3h$ имеет следующее общее решение: $\frac{\partial H}{\partial W_r} = hr + \frac{A(t)}{r^2}$.*
5. *В космологических моделях “постоянную” $A(t)$ можно положить равной нулю. При этом, подставляя это выражение для скоростей $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial W_r}\frac{x^i}{r}$ из п. 2, получаем $v^i = h(t)x^i$, что полностью соответствует общепризнанному представлению о “постоянной Хаббла”.*

Используя эту лемму для гамильтониана (16), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3h\rho = 0,\\ \frac{\mu\frac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{e(mc)^2 + \mu\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}} = R,\\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{c}{e}\frac{\partial W}{\partial r}ar + \frac{c}{e}\sqrt{e(mc)^2 + \mu\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2} = 0,\end{gathered} \tag{17}$$

где $\mu\left(r, t\right) = r^2\left(a^2 - de\right) - be$, $R(m, r, t) = (\frac{e}{c}h - a)r$ – безразмерный радиус-вектор r.

Эту систему уравнений следует дополнить уравнениями Эйнштейна для полей в изотропном случае, т.е. на метрические коэффициенты a, b, d, e. Но выведем следствия уравнений (17).

Решаем среднее уравнение системы (17) относительно W_r, получаем

$$W_r = Remc \cdot \sqrt{\frac{1}{e(\mu^2 - R^2\mu)}}.$$

Подставляя это выражение в нижнее уравнение (Гамильтона–Якоби), получаем

$$W_r = -mc^2\sqrt{\frac{1}{e(\mu^2 - R^2\mu)}} \cdot (arR + \mu).$$

Получаем, как и в случае примера 1 для метрики Фридмана, уравнение на коэффициенты метрики, приравнивая вторые частные производные (условие совместности):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial r}.$$

Перепишем выражения в удобном виде

$$W_t = mcT\sqrt{\frac{1}{Z}}, \quad W_r = mcQ\sqrt{\frac{1}{Z}}, \tag{18}$$

где $Z = e(\mu^2 - R^2\mu)$, $T = -c(arR + \mu)$. $Q = eR$, где $R = (\frac{e}{c}h - a)r$, $\mu(r,t) = r^2\left(a^2 - de\right) - be$. Здесь все компоненты метрики есть функции (r,t) радиус-вектора и времени, а постоянная Хаббла есть, вообще говоря, функция (m,t) времени и массы.

Получаем уравнение

$$2ZQ_t - QZ_t = 2ZT_r - TZ_r. \tag{19}$$

Это и есть общее соотношение на коэффициенты метрики в изотропном случае, которые дают космологические решения.

Все три функции этого уравнения есть полиномы по r, если коэффициенты метрики сами полиномы по r. Тогда можно приравнять коэффициенты при степенях r, что и будет обобщением метода Милна–МакКри.

Рассмотрим случай, когда метрика есть функции только от времени: $Z = z_4r^4 + z_2r^2 + z_0$, $T = t_2r^2 + t_0$, $Q = q_1r$. Получаем три уравнения при 5-й, третьей и первой степенях:

$$\begin{aligned} &2z_4q_{1t} - z_{4t}q_1 = 0,\\ &2z_2q_{1t} - z_{2t}q_1 = 2z_2t_2 - 4z_4t_0,\\ &2z_0q_{1t} - z_{0t}q_1 = 4z_0t_2 - 2z_2t_0. \end{aligned} \tag{20}$$

Первое уравнение интегрируется

$$\frac{q_1}{\sqrt{z_4}} = \mathrm{const} = I(m), \quad \text{безразмерный интеграл},$$

где $q_1 = \frac{e^2}{c}h - ae$, $z_4 = e(a^2 - de)^2 - e(a^2 - de)(\frac{e}{c}h - a)^2$.

Остальные коэффициенты в (20):

$$\begin{aligned} &z_2 = -2be^2(a^2 - de) + be^2\left(\frac{e}{c}h - a\right)^2, \quad z_0 = e(be)^2,\\ &t_2 = -c(a^2 - de) - ca\left(\frac{e}{c}h - a\right) = cde - ca^2 - aeh + ca^2 = cde - aeh = e(cd - ah), \quad t_0 = cbe. \end{aligned}$$

Эти уравнения обобщают соотношения примера 1. Пример 1 (см. [33]) значительно обобщает и упрощает результаты работ [27]–[32], а также показывает, что первое [35], [36] из предположений Эйнштейна в отношении работы Фридмана [34] о тривиальности этой модели для космологических решений оказалось оправданным. Особый интерес представляет последнее из уравнений (20), так как оно содержит уравнение на постоянную Хаббла, имеющее вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h^2 = \lambda(a,b,d,e,h).$$

Отклонение от свободного движения (метрики Минковского и модели Фридмана) $\lambda(a,b,d,e,h)$ должно дать ускоренное расширение в терминах метрики, если оно положительно. Для следующего примера метрики, обобщающей ФРЛУ, $\lambda(a,b,d,e,h) = \frac{hb_t}{b}$. Итак, мы построили общую теорию движения материи в космологических решениях в изотропной метрике. Для окончания нужно еще движения полей в заданной метрике по уравнениям Эйнштейна. Рассмотрение частных случаев представляет значительный интерес: мы свели задачу к исследованию знака $\lambda(a,b,d,e,h)$.

Пример 4. Рассмотрим случай с произвольными $b(t)$ и $d(t)$, но с $e = 1$, $a = 0$.

Найдем обратную матрицу, обозначая ее соответствующие компоненты большими буквами, получим $E = 1$, $A = 0$, $D = \frac{-d}{b(b+dr^2)}$, $B = \frac{1}{b}$. Это обобщает случай Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера (см. [1]–[4]). Мы видим, что если уравнения для полей описываются метрическим тензором с нижними индексами, которые входят в действие (1) (здесь это соответствует коэффициентам с большими буквами), то необходимые уравнения для материи – метрикой с верхними индексами. Получим для движения материи уравнения (20). $q_1 = \frac{h}{c}$, $z_4 = (d)^2 + d(\frac{h}{c})^2$, что дает первое из уравнений (20)

$$2\left((d)^2 + d\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)\left(\frac{h}{c}\right)_t - \left((d)^2 + d\left(\frac{h}{c}\right)^2\right)_t\left(\frac{h}{c}\right) = 0$$

или $2d^2h_t - h(d^2)_t - d_t(\frac{h}{c})^2 = 0$, где интеграл (21) дает связь $(\frac{h}{c})^2 = I^2(m)((d)^2 + d(\frac{h}{c})^2)$.

Во втором из уравнений (20) $z_2 = 2bd + b(\frac{h}{c})^2$, $t_2 = cd$, и оно превращается в

$$2\left(2bd + b\left(\frac{1}{c}h\right)^2\right)\left(\frac{h}{c}\right)_t - \left(2bd + b\left(\frac{1}{c}h\right)^2\right)_t\left(\frac{h}{c}\right) = 2\left(2bd + b\left(\frac{1}{c}h\right)^2\right)(cd) - 4\left((d)^2 + d\left(\frac{1}{c}h\right)^2\right)(cb)$$

или $4bd(\frac{h}{c})_t - (2bd)_t(\frac{h}{c}) - b_t\frac{h^3}{c^3} = -2b\frac{1}{c}(h)^2d$ или $4bdh_t - 2(bd)_th - b_t\frac{h^3}{c^2} + 2bd(h)^2 = 0$.

Наконец, третье уравнение $2z_0q_{1t} - z_{0t}q_1 = 4z_0t_2 - 2z_2t_0$ (20) дает при $z_0 = b^2$, $q_1 = \frac{1}{c}h$, $2b^2\frac{h_t}{c} - (b^2)_t\frac{h}{c} = 4b^2cd - 2(2bd + b(\frac{h}{c})^2)cb$. Или $bh_t - b_th + bh^2 = 0$. Система уравнений

$$\begin{aligned}
&2d^2h_t - h(d^2)_t - d_t\left(\frac{h}{c}\right)^2 = 0,\\
&4bdh_t - 2(bd)_th - b_t\frac{h^3}{c^2} + 2bd(h)^2 = 0,\\
&bh_t - b_th + bh^2 = 0.
\end{aligned}$$

Условие ускоренного расширения из третьего уравнения дают ограничения на метрику: $\frac{hb_t}{b}$ больше нуля.

Отметим, что при $d = 0$ мы получаем ответ примера 1. Здесь же мы получили космологическое уравнение движения материи в метрике, обобщающей FLRU, но это лишь полдела. Чтобы замкнуть уравнения, нужно исследовать еще уравнения для полей Эйнштейна, а там тензор энергии-импульса навязывает неравенство нулю всех компонент тензора Эйнштейна. Это еще одно препятствие к получению точных решений уравнений Власова–Эйнштейна в космологической задаче. Однако из третьего уравнения видна принципиальная возможность получить ускоренное расширение Вселенной. Мы прикинули возможности и оценили трудности, но из развитой техники вычислений можно получить точно решаемый случай слаборелятивистской метрики следующего примера.

Пример 5. Еще одно релятивистское действие, но с метрикой не Лоренца, а слаборелятивистской. Это пример с метрикой (см. [1]), зависящей не только от времени, но и от расстояния, когда нетривиален только коэффициент е метрики :

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\left(1 + \frac{2U}{c^2}, -1, -1, -1\right).$$

При этом потенциал вносится в действии под корень:

$$S = -cm\int\sqrt{c^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2U}dt - \frac{1}{8\pi\gamma}\int(\nabla U)^2dxdt - \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma}\int Udxdt.$$

Действуя обычным способом гамильтоновой механики, получаем импульсы и гамильтониан (16)

$$H = -cp_0(x,p,t) = c\sqrt{\left((mc)^2 + p^2\right)\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)}$$

и систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(v^i\left(\nabla W\right)\rho\right) = 0,\\
&\frac{\partial W}{\partial t} + c\sqrt{\left((mc)^2 + (\nabla W)^2\right)\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)} = 0,\\
&\Delta U = 4\pi\gamma\textstyle\int M\left(m,U,\nabla W\right)\rho\left(m,t\right)dm - \frac{c^2\Lambda}{2},
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$v(p) = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{M'}, \quad \text{где } M\,(m, U, p) = \frac{\sqrt{(mc)^2 + p^2)}}{\sqrt{(c)^2 + 2U}}.$$

Возьмем систему с нерелятивистской зависимостью от массы, когда $M = m$ в третьем уравнении. Этим мы упростили модель, но сделали ее точнорешаемой:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i}\big(\rho v^i(\nabla W)\big) = 0,\\ &\frac{\partial W}{\partial t} + \sqrt{\Big((mc)^2 + (\nabla W)^2\Big)\Big(1 + \frac{2U}{c^2}\Big)} = 0,\\ &\Delta U = 4\pi\gamma \int m\rho(m,t)dm - \lambda. \end{aligned} \tag{22}$$

Первые два уравнения этой системы (21) или (22) можно рассматривать как систему (18), если

$$a = d = 0, \quad b = -1, \quad e = \frac{1}{1 + \frac{2U}{c^2}}.$$

Система (18) получается в виде $W_t = \frac{-emc^2}{\sqrt{e^3 - e^2R^2}}$, $W_r = \frac{mce^2\frac{hr}{c}}{\sqrt{e^3 - e^2R^2}}$, где $R = e\frac{hr}{c}$. Теперь преобразуем эти выражение, имея в виду в равенстве (19) использовать полиномы по r, и равенство

$$e^{-1} = 1 + \frac{2U}{c^2}, \quad W_t = \frac{-e^{-1}mc^2}{\sqrt{e^{-1} - \frac{h^2r^2}{c^2}}}, \quad W_r = \frac{\frac{hr}{c}mc}{\sqrt{e^{-1} - \frac{h^2r^2}{c^2}}}.$$

Третье уравнение (22) решается как обычно:

$$U(r,t) = J(t)r^2,$$

где

$$J(t) = \frac{4\pi\gamma}{6}\int m\rho(m,t)dm - \frac{\lambda}{6}.$$

При такой записи имеем в уравнении (19)

$$Z = z_0 + z_2r^2 = 1 + \left(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\right)r^2, \quad T = t_0 + t_2r^2 = -e^{-1}c = -c\left(\frac{2J}{c}\right)r^2, \quad Q = q_1r = \frac{h}{c}r.$$

Уравнение (19) $2ZQ_t - QZ_t = 2ZT_r - TZ_r$ дает

$$2\bigg(1+\Big(\frac{2J}{c^2}-\frac{h^2}{c^2}\Big)r^2\bigg)\Big(\frac{h_t}{c}r\Big)-\Big(\frac{2J}{c^2}-\frac{h^2}{c^2}\Big)_t r^2\Big(\frac{h}{c}r\Big) = 2\bigg(1+\Big(\frac{2J}{c^2}-\frac{h^2}{c^2}\Big)r^2\bigg)\Big(-4J\frac{r}{c}\Big)-\bigg(\Big(\frac{2J}{c^2}-\frac{h^2}{c^2}\Big)2r\bigg)\Big(-c-\frac{2J}{c}r^2\Big).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях и получаем

Степень = 1

$$2\frac{h_t}{c} = -4c\Big(\frac{2J}{c^2}\Big) + 2c\Big(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\Big), \text{ т.е. } h_t = -2J - h^2.$$

Степень = 3

$$2\Big(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\Big)\frac{h_t}{c} - \Big(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\Big)_t\frac{h}{c} = -4\Big(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\Big)\frac{2J}{c} + 2\Big(\frac{2J}{c}\Big)\Big(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\Big),$$

$$\text{т.е. } \frac{4J}{c^3}h_t - 2J_t\frac{h}{c^3} = -2\Big(\frac{2J}{c}\Big)\Big(\frac{2J}{c^2} - \frac{h^2}{c^2}\Big), \text{ т.е. } 4Jh_t - 2J_th = -4(J)(2J - h^2).$$

Если мы учтем уравнение для степени 1, то получим

$$J_t = -4Jh.$$

Мы видим, что слабый релятивизм дает почти то же уравнение для постоянной Хаббла, что и не релятивизм и не дает ускоренного расширения вселенной, если лямбда Эйнштейна равна нулю. Выпишем полностью эту систему слабого релятивизма и сравним с полученной системой (13) в не релятивизме:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho(m,t)}{\partial t} + 3H(m,t)\rho(m,t) = 0,\\
&\frac{\partial H(m,t)}{\partial t} + H^2 + \frac{4\pi\gamma}{3}\int m\rho\,(t,m)\,dm\, - \frac{\lambda}{3} = 0.
\end{aligned}$$

Получаем для действия (22)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho(m,t)}{\partial t} + 3H(m,t)\rho(m,t) = 0,\\
&\frac{\partial H(m,t)}{\partial t} + H^2 + \frac{4\pi\gamma}{3}\int m\rho\,(t,m)\,dm\, - \frac{\lambda}{3} = 0,\\
&\frac{d}{dt}(\frac{2\pi\gamma}{3}\int m\rho\,(t,m)\,dm\, - \frac{\lambda}{6}) = -4(\frac{2\pi\gamma}{3}\int m\rho\,(t,m)\,dm\, - \frac{\lambda}{6})H.
\end{aligned}$$

Мы видим интересные изменения. Первые два уравнения совпадают, и появилось третье уравнение. Из него вытекает, что постоянная Хаббла есть функция только времени (не зависит от массы) и навязывается зависимость лямбды Эйнштейна от времени (обычно она полагается постоянной). Предполагая, что лямбда зависит от времени, можно свести систему к следующей:

$$\begin{aligned}
&\frac{dK}{dt} + 3H(t)K = 0,\\
&\frac{dH(t)}{dt} + H^2 + 2K - \frac{\lambda}{3} = 0,\\
&\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda H + 6KH.
\end{aligned}$$

Здесь мы обозначили $K(t) = \frac{2\pi\gamma}{3}\int m\rho\,(t,m)\,dm$.

Если лямбда не зависит от времени, то из третьего уравнения получаем $\lambda = 6K$. А это равенство дает нам как раз решение примера 1 метрики Фридмана и метрики Минковского (см. [29]–[31]). Прекрасное согласие всех моделей всех примеров. Отсюда делаем вывод, что переход к слабому релятивизму навязывает нам зависимость лямбды от времени. Отметим, что первые два уравнения в точности совпадают с решением Милна–МакКри. Поэтому систему можно рассматривать как хорошо согласующуюся с этим решением, если лямбда медленно меняется, а это медленное изменение описывается третьим уравнением.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы получили возможность выводить уравнения электродинамики и гравитации в замкнутой форме из принципа наименьшего действия в форме уравнения Власова (ср. [3]–[15]). Проясняется смысл уравнений типа Власова: это единственный пока способ получать и уравнения гравитации и уравнения электродинамики из принципа наименьшего действия. А также единственный пока способ замкнуть систему уравнений гравитации и электродинамики с помощью принципа наименьшего действия, используя функцию распределения объектов (электронов, ионов, звёзд в галактиках, галактик в супергалактиках или Вселенной) по скоростям и пространству. Соответствующие уравнения гидродинамического уровня (например, уравнения магнитной гидродинамики или гравитирующей газодинамики) также естественно получать из уравнений типа Власова гидродинамической подстановкой (пока единственный способ связи с классическим действием и для этих уравнений). Ранее система уравнений Власова Максвелла-Эйнштейна была получена для скоростей (см. [9]), и для импульсов (см. [19]– 21]), что дает возможность исследовать космологические решения переходом к уравнению Гамильтона–Якоби. Здесь мы исследовали важные слаборелятивистские примеры (см. [20]–[23]) – обобщения моделей типа Милна–МакКри. Отметим, что именно приводя модель Милна–МакКри на семинаре академика М.В. Келдыша, трижды герой соц. труда академик Я.Б. Зельдович привел глубокое философское следствие расширяющейся Вселенной: “Мы вернулись к библейскому взгляду на мир”. Мы – это ученые – астрофизики. Библейский взгляд на мир – это взгляд первой главы книги Бытия и Библии, который теперь согласуется с научным взглядом о развитии Вселенной: от безмассовых частиц (“Да будет свет”-фотоны) через спонтанное появление массы (механизм Хиггса – нобелевская премия 2014 г.), клетку и растения, появление животных и человека (все по науке, по Дарвину). “Мы вернулись” когда? Когда Фридман получил нестационарные решения уравнений Эйнштейна, а Хаббл обнаружил расширение Вселенной, а к 50-м годам XX в. именно нестационарная версия стала общепринятой. “Мы вернулись” – значит, мы не были в “библейском взгляде”: со времен Коперника до Фридмана и Хаббла не было мысли о не стационарности Вселенной, и все противоречило Книге Бытия. Итак, мы получили согласование Библейского и научного взгляда, которое дает нам гигантские усложнения от элементарных частиц до клетки, животных, человека, а это противоречит росту энтропии. Мы имеем шанс получить естественнонаучное обоснование для основного вопроса философии. Это мне сказал другой выдающийся ученый, изобретатель стреловидного крыла, академик В.В. Струминский: “Ты ж понимаешь, что Бог есть. Ну да, ты же занимался вторым законом термодинамики”. Эти два высказывания двух академиков доставляют нам естественнонаучное решение основного вопроса философии на стыке кинетической теории и космологии. В работах [19]–[21] были получены космологические решения в нерелятивистском случае, где была выведена и обобщена модель Милна–МакКри (см. [20], [21]). На основе этого был обоснован потенциал Гурзадяна $U(r) = -\frac{\gamma}{r} + ar^2$ (см. [24], [25]), где второе слагаемое связано с лямбда – членом Эйнштейна. Мы построили математическую теорию темной энергии двумя способами: 1) с лямбдой в нерелятивизме (разд. 3) , обобщая модель Милна–МакКри, и 2) без обращения к лямбде Эйнштейна из принципа наименьшего действия, отождествив темную энергию с энергией взаимодействия гравитационного и гипотетического поля (разд. 4). Эти модели дают возможность описывать и космические аномалии или напряжения постоянной Хаббла (the Hubble constant tension). Мы проанализировали классические модели ФЛРУ и нашли, как в них движется материя в космологии, обобщая решение Милна–МакКри. Мы рассмотрели слаборелятивистские модели, где нашли уравнение для лямбды Эйнштейна. Представляет значительный интерес продолжить исследование предложенных здесь моделей для оценки лямбды Эйнштейна и различных релятивистских и слаборелятивистских приближений как аналитически и численно, так и в сравнении с экспериментами. Подход с помощью уравнений типа Власова и их гидродинамических и Гамильтон–Якобиевых следствий здесь наиболее адекватен именно в космологических моделях. Автор выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. М.: ЛКИ, 2007.

2. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.

3. *Choquet-Bruhat Y.* Introduction to general relativity, black holes and cosmology. New York: Oxford, Univer. Press, 2015.

4. *Cercigniani C., Kremer G.M.* The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. Berlin: Birkhauser, 2002.

5. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // СМФН 2013. Т. 47. С. 5–17; V.V. Vedenyapin, M.A. Negmatov, On derivation and classification of Vlasov type equations and equations of magnetohydrodynamics. The Lagrange identity, the Godunov form, and critical mass // J. Math. Sci. 2014. V. 202. P. 769–782.

6. *Веденяпин В.В., Фимин Н.Н.* Метод Гамильтона–Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка // Докл. АН. 2015. V. 461. P. 136–139.

7. *Веденяпин В.В., Фимин Н.Н. Чечеткин В.М.* Уравнение типа Власова–Максвелла–Эйнштейна и переход к слаборелятивистскому приближению // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. С. 1883–1898. V.V. Vedenyapin, N.N. Fimin, V.M. Chechetkin, Equation of Vlasov–Maxwell–Einstein type and transition to a weakly relativistic approximation // Comput. Math. Math. Phys. 2019. V. 59. P. 1816–1831.

8. *Веденяпин В.В., Негматов М.А.* О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона–Якоби // Докл. АН. 2013. Т. 449. С. 521–526.

9. *Веденяпин В.В., Воронина М.Ю., Руссков А.А.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Докл. АН. 2020. Т. 495. С. 9–139.

10. *Vedenyapin V., Fimin N., Chechetkin V.* The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models // Europ. Phys. J. Plus. 2020. V. 135. № 5. С. 400.

11. *Lars Andersson and Mikolaj Korzynski* Variational principle for the Einstein–Vlasov equations arXiv:1910.12152; (October 2019).

12. *Hakan Andreasson* The Einstein–Vlasov System/Kinetic Theory // Living Rev. Relativ. 2011. V. 14. P. 4; https://doi.org/10.48550/arXiv.1106.1367

13. *Rein G.* Stability and instability results for equilibria of a (relativistic) self-gravitating collisionless gas // Rev. Class. Quant. Grav. 2023. V. 40. 193001. DOI: 10.1088/1361-6382/acf436.

14. *Okabe T., Morrison P.J., Friedrichsen III J.E., Shepley L.C.* Hamiltonian dynamics of spatially-homogeneous Vlasov–Einstein systems // Phys. Rev. D. 2011. V. 84. 024011.

15. *Huanchun Ye and Morrison P.J.* Action principles for the Vlasov equations // Phys. Fluids B. 1992. V. 4. № 4. P. 771–777.

16. *Madelung E.* Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form) // Z Phys. 1926. V. 40. P. 322–326.

17. *Козлов В.В.* Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех. 1983. № 6. С. 10–22.

18. *Козлов В.В.* Общая теория вихрей. Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1998, 239 с.

19. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* The generalized Friedmann model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equation system // Europ. Phys. J. Plus. 2021. V. 136. №. 6.

20. *Веденяпин В.В., Парёнкина В.И., Свирщевский С.Р.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 6. С. 1016–1029.

21. *Веденяпин В.В.* О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона–Якоби и космологических решениях // Докл. АН. Матем., информ., проц. упр. 2022. Т. 504. С. 51–55.

22. *McCrea W.H., Milne E.A.* Quart. J. Math. 1934. V. 5. P. 73.

23. *Orlov Yu.N., Pavlotsky I.P.* BBGKY hierarchies and Vlasov's equations in postgalilean aproximation // Physica A. 1988. V. 151. P. 318.

24. *Чернин А.Д.* Темная энергия и всемирное антитяготение // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178. № 3. С. 267–300.

25. *Capozziello S., Gurzadyan V.G.* Focus point on tensions in cosmology from early to late universe: the value of the Hubble constant and the question of dark energy // Europ. Phys. J. Plus. 2023. V. 138. №. 2. P. 184.

26. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N.,Chechetkin V.M.* Hydrodynamic consequences of Vlasov-Maxwell-Einstein equations and their cosmological applications // Gravit. Cosmol. 2023. V. 29. № 1. P. 1–9.

27. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* Gravitation and Cosmology. 2020. V. 26. № 2. P. 173–183.

28. *Vedenyapin V.V., Fimin N.N., Chechetkin V.M.* Cosmological aspects of hydrodynamic treatment of the Einstein–Vlasov equations // Eur. Phys. J. Plus. 2022. V. 137. № 9. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03257-7.

29. *Веденяпин В.В., Бай А.А., Петров А.Г.* О выводе уравнений гравитации из принципа наименьшего действия, релятивистских решениях Милна–МакКри и о точках Лагранжа // Докл. АН. Матем., информ., проц. упр. 2023. Т. 514. С. 69–73.

30. *Vedenyapin V.V., Bay A.A.* Least action principle for gravity and electrodynamics, the Lambda-term and the analog of Milne–McCrea solution for Lorentzian metric // Europ. Phys. J. Plus. 2024. V. 139. P. 111. https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-024-04885-x.

31. *Vedenyapin V.V., Bay A.A., Parenkina V.I., Petrov A.G.* Minimal action principle for gravity and electrodynamics, Einstein lambda, and Lagrange points // Markov Processes Relat. Field. 2023. V. 29. P. 515–532.

32. *Веденяпин В.В., Фимин Н.Н., Чечеткин В.М.* Уравнения типа Власова–Максвелла–Эйнштейна и их следствия. Приложения к астрофизическим задачам // ТМФ. 2024. Т. 218. № 2. С. 258–279. DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10551.

33. *Веденяпин В.В., Аушев В.М., Гладков А.О., Измайлова Ю.А., Реброва А.А.* Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия и модели Фридмана и Милна–МакКри // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 3. 28 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2024-3. https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2024-3

34. *Фридман А.А.* О кривизне пространства // УФН. 1963. Т. 80. № 3. С. 439–446. Журн. Русск. физ.-хим. о-ва, часть физ. 56 (1), 59 (1924). Работа впервые опубликована на нем. языке в Zs. Phys. 11, 377 (1922).

35. *Эйнштейн А.* Замечание к работе А. Фридмана “О кривизне пространства” // УФН. 1963. Т. 80. № 3. С. 453. A. E i n s t e i n , Bemerkung zu der Arbeit von A.Friedman “Uber die Krummung des Raumes”, Zs. Phys. 11, 326 (1922).

36. *Эйнштейн А.* К работе А. Фридмана “О кривизне пространства” // УФН. 1963. Т. 80. № 3. С. 453. A. E i n s t e i n , Notiz zu der Arbeit von A.Friedman “Uber die Krummung des Raumes”, Zs. Phys. 21, 228 (1923).

A MATHEMATICAL THEORY OF THE EXPANSION OF THE UNIVERSE BASED ON THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION

V. V. Vedenyapin*

125047 Moscow, Miusskaya pl., 4, FRC Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Russia
**e-mail: vicveden@yahoo.com*

Received: 21.07.2023
Revised: 11.07.2024
Accepted: 26.07.2024

Abstract. In classical works, equations for the fields of gravity and electromagnetism are proposed without subtracting the right-hand sides. Here we give the subtraction of the right–hand sides and the analysis of the momentum energy tensor in the framework of the Vlasov–Maxwell–Einstein equations and consider cosmological models of the Milne-McCree and Friedman types.

Keywords: Vlasov equation, Vlasov–Einstein equation, Vlasov–Maxwell equation, Vlasov–Poisson equation.