

МЕТОД МУЛЬТИПОЛЕЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ¹⁾

© 2024 г. А.О. Багапш^{1,*}, В.И. Власов^{1,**}

¹119991 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: a.bagapsh@gmail.com

**e-mail: vlasov@ccas.ru

Поступила в редакцию 16.07.2024 г.

Переработанный вариант 16.07.2024 г.

Принята к публикации 26.07.2024 г.

Представлен аналитико-численный метод мультиполей решения некоторых смешанных краевых задач для уравнения Лапласа в плоских односвязных областях g сложной формы с приложением к построению конформного отображения таких областей. Метод позволяет с высокой точностью получать как само решение, так и его градиент вплоть до сложных участков границы вблизи сингулярностей, а также обеспечивает апостериорную оценку относительной погрешности δ в норме $C(\bar{g})$. Эффективность метода была подтверждена на примерах численной реализации метода для построения конформного отображения областей с криволинейной границей, содержащей входящие дуговые углы и узкие перешейки. При этом погрешность δ составила согласно апостериорной оценке величину не хуже 10^{-4} при использовании всего лишь около 100 аппроксимативных функций. Библ. 18. Фиг. 4.

Ключевые слова: плоские области сложной формы, смешанная краевая задача, метод мультиполей, конформное отображение, входящие углы, апостериорная оценка погрешности.

DOI: 10.31857/S0044466924110011, EDN: KHELRB

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Вводные замечания

Изложен вариант аналитико-численного метода мультиполей, который дает решение некоторых смешанных краевых задач для уравнения Лапласа в плоских односвязных областях g с кусочно-гладкой границей $\partial g = \gamma \cup \Gamma$ (см. фиг. 1а), когда на одной ее части, дуге γ , задано однородное смешанное условие типа Дирихле — Неймана, а на дополнительной дуге Γ — неоднородное условие Дирихле с граничной функцией h из $L_2(\Gamma)$. Решение разыскивается в подходящем пространстве типа Харди, в котором обеспечена однозначная разрешимость задачи. (Первоначальный вариант метода был предложен в [1], дальнейшее развитие он получил, в частности, в работах [2]–[13], а предшествующая теория аналогичных пространств типа Харди была дана в [4], [14], [15].)

Предлагаемый метод основан на использовании специальной аппроксимативной системы функций $\{\Omega_p\}$, $p \in \mathbb{Z}^+$ (где $\mathbb{Z}^+$ — множество целых неотрицательных чисел). Эти функции записываются в явном виде через конформное отображение $\mathcal{F}$ некоторого расширения G исходной области g через дугу Γ на каноническую область (см. фиг. 1). Функции Ω_p , родственные мультиполям из теории потенциала, тождественно удовлетворяют уравнению Лапласа в области g и заданному смешанному однородному граничному условию на γ , а кроме того, составляют полную и минимальную систему на Γ в пространстве L_2 .

Решение рассматриваемой задачи строится в виде предела последовательности приближенных решений, представляющих собой линейные комбинации мультиполей Ω_p , коэффициенты в которых находятся из условия минимума отклонения приближенного решения от граничной функции h на дуге Γ в норме L_2 . При этом полученная априорная оценка гарантирует сходимость приближенных решений к точному вместе с градиентом равномерно на любом компакте $\tilde{\mathcal{E}} \subset (g \cup \tilde{\gamma})$, где $\tilde{\gamma}$ — дуга γ с исключенными точками ее неаналитичности

¹⁾Работа Власова В.И. выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

и точками смены типа граничных условий. Кроме того, метод позволяет получать апостериорную оценку погрешности получаемого приближенного решения в норме $C(\bar{g})$ для случая, когда $h \in C(\Gamma)$.

Дано приложение метода к построению конформного отображения $\mathcal{P}: g \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ описанной выше области g на прямоугольник

$$\mathfrak{R} := \{w = u + iv : u \in (0, 1), v \in (0, L)\}, \quad (1.1)$$

см. фиг. 1в.

Реализация метода проведена на двух примерах построения такого отображения для областей с криволинейной границей, содержащей входящие дуговые углы и узкие перешейки. Апостериорная оценка погрешности в норме $C(\bar{g})$ для этих примеров показала, что погрешность не превышала 10^{-4} при использовании всего лишь около 100 мультиполей при машинном времени расчета 32 сек. на персональном компьютере средней производительности.

1.2. Постановка краевой задачи и пространство типа Харди

Опишем область (точнее, класс областей g), в которой ставится смешанная краевая задача.

Пусть g — жорданова область на комплексной плоскости $z = x + iy$ с границей ∂g , состоящей из двух дуг, $\partial g = \gamma \cup \Gamma$, из которых первая, кусочно—аналитическая дуга γ , образована тремя (непустыми) звеньями,

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3, \quad (1.2)$$

причем γ_2 соединяется с γ_1 и γ_3 соответственно в точках A и B , см. фиг. 1а. Вторая часть границы ∂g , т.е. дуга Γ , является кусочно—гладкой, а составляющие ее гладкие звенья стыкуются между собой под внутренними относительно g углами $\pi\alpha_q$, $q = \overline{1, Q-1}$, причем ее концевые звенья соединяются с дугой γ в точках C и D соответственно под углами $\pi\alpha_0$ и $\pi\alpha_Q$, и эти углы подчиняются включению

$$\alpha_q \in (0, 2), \quad q = \overline{0, Q}. \quad (1.3)$$

Тогда будем говорить, что область g удовлетворяет условиям (γ, Γ) .

Будем обозначать через z' точки дуги Γ , а через z — точки множества $g \cup \text{int } \gamma$, где $\text{int } \gamma$ — дуга γ без концевых точек.

Постановка рассматриваемой краевой задачи в области $g \in (\gamma, \Gamma)$ имеет вид

$$\Delta\psi(z) = 0, \quad z \in g, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu}(z) = 0, \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_3, \quad (1.5)$$

$$\psi(z) = 0, \quad z \in \gamma_2, \quad (1.6)$$

$$\psi(z') = h(z'), \quad z' \in \Gamma; \quad (1.7)$$

где $\partial/\partial\nu$ — производная по внешней нормали, а заданная на Γ граничная функция $h(z')$ полагается принадлежащей классу $L_2(\Gamma)$.

При такой граничной функции решение $\psi(z)$ этой задачи, очевидно, не является классическим и, следовательно, требует введения специального функционального пространства. Адекватным этой постановке, как показано ниже, является пространство $e_2(g, \Gamma)$ типа Харди, для которого дадим определение и описание некоторых основных свойств.

Определив полукруг $\mathbb{U}^+$ и полуокружность $\mathbb{T}^+$ по формулам

$$\mathbb{U}^+ := \{|\zeta| < 1, \text{Im } \zeta > 0\}, \quad \mathbb{T}^+ := \{|\zeta| = 1, \text{Im } \zeta > 0\}, \quad (1.8)$$

введем конформное отображение $z = \omega(\zeta)$ полукруга $\mathbb{U}^+$ на область $g \in (\gamma, \Gamma)$, переводящее $\mathbb{T}^+$ в дугу Γ , т.е.

$$\omega: \mathbb{U}^+ \xrightarrow{\text{conf}} g, \quad \omega(\mathbb{T}^+) = \Gamma. \quad (1.9)$$

Обозначим через Γ_r образ полуокружности $\mathbb{T}_r^+ := \{|\zeta| = r, \text{Im } \zeta > 0\}$ при отображении ω ,

$$\Gamma_r = \omega(\mathbb{T}_r^+). \quad (1.10)$$

Тогда $e_2(g, \Gamma)$ определяется как пространство гармонических в $g \in (\gamma, \Gamma)$ функций $\psi(z)$, обладающих следующей гладкостью

$$\psi \in C^1(g \cup \text{int } \gamma_1 \cup \text{int } \gamma_3) \bigcup C(g \cup \text{int } \gamma_2), \quad (1.11)$$

удовлетворяющих условиям

$$\psi(z) = 0, \quad z \in \gamma_2; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \nu}(z) = 0, \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_3, \quad (1.12)$$

и отвечающих ограничению

$$\exists a \in (0, 1), \quad \sup_{r \in (a, 1)} \int_{\Gamma_r} |\psi(z)|^2 |dz| < \infty. \quad (1.13)$$

Следующая теорема, являющаяся аналогом теоремы Ф. Рисса [16] для классических пространств Харди H_p функций, аналитических в единичном круге, использует понятие следа на граничной дуге Γ как совокупности определенных почти всюду на Γ некасательных предельных значений (об этих значениях см. [17], [18]).

Теорема 1. *Функция $\psi(z) \in e_2(g, \Gamma)$ имеет на Γ след $\psi(z')$ из $L_2(\Gamma)$, и оператор взятия следа $\mathbb{S}$ устанавливает изометрический изоморфизм между пространствами $e_2(g, \Gamma)$ и $L_2(\Gamma)$.*

Отсюда следует однозначная разрешимость задачи (1.4)–(1.7), сформулированная в следующей теореме.

Теорема 2. *Решение ψ задачи (1.4)–(1.7) с граничной функцией $h \in L_2(\Gamma)$ существует и единственно в пространстве $e_2(g, \Gamma)$; при этом равенство (1.7) понимается в том смысле, что след $\psi(z')$ совпадает с $h(z')$ почти всюду на Γ .*

Таким образом, введенное пространство $e_2(g, \Gamma)$ является подходящим для рассматриваемой задачи. Некоторые априорные оценки для функций из этого пространства дает следующая

Теорема 3. *Для решения $\psi(z)$ задачи (1.4)–(1.7) в пространстве $e_2(g, \Gamma)$ справедлива оценка*

$$\max_{z \in \mathcal{E}} |\psi(z)| \leq \frac{1}{\pi \delta} \left\| \frac{1}{\omega'} \right\|_{L_1(\mathbb{T}^+)}^{1/2} \|h\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (1.14)$$

где ω определяется в (1.9), $\mathcal{E}$ — компакт в $g \cup \text{int } \gamma$, δ — расстояние от $\omega^{-1}(\mathcal{E})$ до $\mathbb{T}^+$. А для градиента этого решения имеет место следующая оценка:

$$\max_{z \in \tilde{\mathcal{E}}} |\text{grad} \psi(z)| \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \max_{z \in \tilde{\mathcal{E}}} |\omega^{-1}'(z)| \left\| \frac{1}{\omega'} \right\|_{L_1(\mathbb{T}^+)}^{1/2} \|h\|_{L_2(\Gamma)}; \quad (1.15)$$

здесь $\tilde{\mathcal{E}}$ — компакт в $g \cup \text{int } \tilde{\gamma}$, где $\tilde{\gamma}$ — дуга γ с исключенными точками ее неаналитичности и точками A и B смены типа граничных условий, а δ — расстояние от $\omega^{-1}(\tilde{\mathcal{E}})$ до $\mathbb{T}^+$.

Отметим, что аналоги теорем 1–3 были доказаны в [4] и [15] для случая, когда дуга γ_2 пустая. Для случая же, рассматриваемого в теоремах 1–3, т.е. когда дуга γ_2 непустая, доказательства получаются путем модификации использованной ранее техники, причем оценки типа (1.15) можно сформулировать и для производных любого порядка.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Пусть для области $g \in (\gamma, \Gamma)$, описанной в п. 1.2 (пример которой изображен на фиг. 1а), существует такая односвязная область G , что выполняются требования:

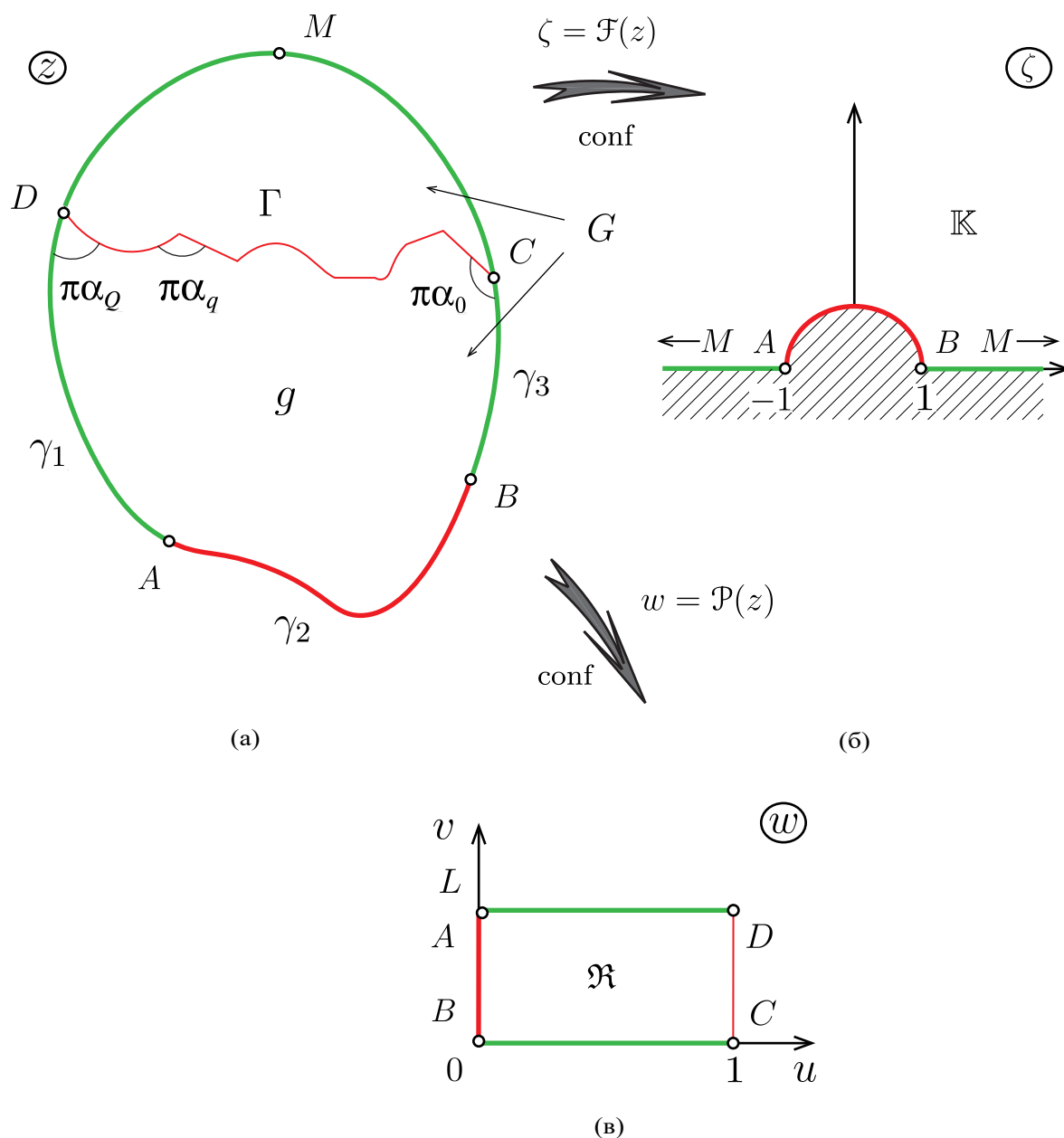
$$1) G \supset g, \quad 2) \partial G \supset \gamma, \quad 3) G \supset \text{int } \Gamma, \quad (2.1)$$

причем дуга $\partial G \setminus \text{int } \gamma$ в некоторых окрестностях ее концевых точек C и D является гладкой и образует с дугой γ в этих точках соответственно углы $\pi\beta_0$ и $\pi\beta_Q$, причем $\beta_0 > \alpha_0$, $\beta_Q > \alpha_Q$. Тогда об области G будем говорить, что она представляет собой расширение области g через дугу Γ , и будем писать $G \overset{\Gamma}{\supset} g$.

Базовую роль в описываемом методе решения задачи (1.4)–(1.7) играют мультиполи $\Omega_p(z)$, образующие необходимую аппроксимативную систему. Они определяются следующим образом.

Пусть для областей g и G выполняются условия $g \in (\gamma, \Gamma)$ и $G \overset{\Gamma}{\supset} g$, а $\mathbb{K}$ представляет собой верхнюю полу-плоскость с удаленным полукругом (см. фиг. 1б),

$$\mathbb{K} := \{\text{Im } \xi > 0, |\xi| > 1\}. \quad (2.2)$$



Фиг. 1.

Определим конформное отображение $\mathcal{F}: G \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{K}$ области G на $\mathbb{K}$ с однозначно определяющей его нормировкой

$$\mathcal{F}(A) = -1, \quad \mathcal{F}(B) = 1, \quad \mathcal{F}(M) = \infty, \quad (2.3)$$

где M — некоторая точка на $\partial G \setminus \gamma$, а точки A и B суть точки смены типа граничного условия на дуге γ ; они изображены на фиг. 1а. (Образы точек при конформном отображении часто будем обозначать теми же буквами, что и прообразы.)

Тогда требуемая аппроксимативная система функций $\{\Omega_p\}_{p=0}^{\infty}$ записывается через введенное отображение $\mathcal{F}$ по формулам

$$\Omega_0(z) = \pi^{-1} \operatorname{Re} \ln \mathcal{F}(z), \quad \Omega_p(z) := \operatorname{Re} \left\{ [\mathcal{F}(z)]^p - [\mathcal{F}(z)]^{-p} \right\}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Эти функции тождественно удовлетворяют уравнению Лапласа в области g и заданному смешанному однородному граничному условию на γ , т.е.

$$\Delta \Omega_p(z) = 0, \quad z \in G; \quad \Omega_p(z) = 0, \quad z \in \gamma_2; \quad \frac{\partial \Omega_p}{\partial \nu}(z) = 0, \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_3, \quad (2.5)$$

а кроме того, они обладают аппроксимативными свойствами, устанавливаемыми следующей теоремой.

Теорема 4. Система $\{\Omega_p(z)\}_{p \in \mathbb{Z}^+}$ является полной и минимальной в пространстве $e_2(g, \Gamma)$.

Отсюда и из теоремы 1 вытекает

Предложение 1. Мультиполи $\Omega_p(z)$ составляют полную и минимальную систему на дуге Γ в пространстве $L_2(\Gamma)$.

Тогда решение задачи (1.4)–(1.7) будем искать в виде предела при $K \rightarrow \infty$ последовательности $\{\psi^K\}_K$ приближенных решений

$$\psi(z) = \lim_{K \rightarrow \infty} \psi^K(z), \quad \psi^K(z) := \sum_{p=0}^K a_p^K \Omega_p(z), \quad (2.6)$$

которые, в силу свойств (2.5) мультиполей, удовлетворяют первым трем условиям (1.4)–(1.6) постановки задачи (1.4)–(1.7) при любых коэффициентах a_p^K . А эти коэффициенты будем находить — в соответствии с предложением 1 — из требования минимума отклонения приближенного решения $\psi^K(z)$ от точного $\psi(z)$ на дуге Γ в норме $L_2(\Gamma)$,

$$\|\psi^K - \psi\|_{L_2(\Gamma)} = \min, \quad (2.7)$$

порожденной скалярным произведением

$$(a, b) := \int_{\Gamma} a(z') b(z') ds,$$

где ds обозначает дифференциал длины дуги.

Требование (2.7) (будучи условием минимума квадратичной функции) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_p^K . Эта система имеет вид

$$\sum_{q=0}^K c_{pq} a_q^K = h_p, \quad p = 1, \dots, K, \quad (2.8)$$

где

$$c_{pq} = (\Omega_p, \Omega_q) = \int_{\Gamma} \Omega_p(z') \Omega_q(z') ds, \quad h_p = (h, \Omega_p) = \int_{\Gamma} h(z') \Omega_p(z') ds. \quad (2.9)$$

Сходимость описанного метода устанавливает следующая

Теорема 5. Справедливы утверждения:

1) последовательность приближенных решений $\psi^K(z')$ сходится к граничной функции $h(z')$ по норме $L_2(\Gamma)$, т.е.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \|\psi^K - h\|_{L_2(\Gamma)} = 0;$$

2) последовательность $\{\psi^K(z)\}_K$ сходится к решению $\psi(z)$ равномерно на любом компакте $\mathcal{E} \subset (g \cup \gamma)$, т.е.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \max_{z \in \mathcal{E}} |\psi(z) - \psi^K(z)| = 0; \quad (2.10)$$

3) последовательность $\{\text{grad } \psi^K(z)\}_K$ сходится к $\text{grad } \psi(z)$ равномерно на любом компакте $\tilde{\mathcal{E}} \subset (g \cup \tilde{\gamma})$, где $\tilde{\gamma}$ — дуга γ с исключенными точками ее неаналитичности и точками A и B смены типа граничных условий:

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \max_{z \in \tilde{\mathcal{E}}} |\text{grad } \psi(z) - \text{grad } \psi^K(z)| = 0. \quad (2.11)$$

Поскольку погрешность $\psi(z) - \psi^N(z)$, очевидно, принадлежит $e_2(g, \Gamma)$, то из неравенств (1.14), (1.15) вытекают следующие оценки в норме $C(\mathcal{E})$ для погрешности решения и его градиента через $L_2(\Gamma)$ — норму погрешности $h(z') - \psi^N(z')$ на Γ :

$$\max_{z \in \mathcal{E}} |\psi(z) - \psi^K(z)| \leq \frac{1}{\pi \delta} \left\| \frac{1}{\omega'} \right\|_{L_1(\mathbb{T}^+)}^{1/2} \|h(z') - \psi^K(z')\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (2.12)$$

где $\mathcal{E}$ — компакт в $g \cup \text{int } \gamma$, и

$$\max_{z \in \mathcal{E}} |\text{grad } \psi(z) - \text{grad } \psi^K(z)| \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \max_{z \in \mathcal{E}} |\omega^{-1'}(z)| \left\| \frac{1}{\omega'} \right\|_{L_1(\mathbb{T}^+)}^{1/2} \|h(z') - \psi^K(z')\|_{L_2(\Gamma)}, \quad (2.13)$$

где компакт $\tilde{\mathcal{E}}$ определен в теореме 5. Заметим, что оценка типа (2.13) и равенство типа (2.11) могут быть сформулированы и для производных любого порядка.

Если функция $h(z')$ в граничном условии (1.7) непрерывна, то точное $\psi(z)$ и приближенное $\psi^K(z)$ решения задачи (1.4)–(1.7) являются гармоническими в g и непрерывными в $\bar{g}$, а значит, такой же является и их разность, и к ней применим принцип максимума. Отсюда получаем апостериорную оценку погрешности приближенного решения в норме $C(\bar{g})$:

$$\max_{z \in \bar{g}} |\psi(z) - \psi^K(z)| \leq \max_{z' \in \Gamma} |h(z') - \psi^K(z')|; \quad (2.14)$$

очевидно, что правая часть этого неравенства легко вычисляется после нахождения приближенного решения.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЕЙ К ПОСТРОЕНИЮ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

3.1. Задача о конформном отображении произвольной области $g \in (\gamma, \Gamma)$ на прямоугольник $\mathfrak{R}$

В качестве приложения метода мультиполей рассмотрим задачу о построении конформного отображения $\mathcal{P}: g \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ области $g \in (\gamma, \Gamma)$ на прямоугольник $\mathfrak{R}$, определенный в (1.1), со следующим соответствием граничных точек:

$$\mathcal{P}(A) = iL, \quad \mathcal{P}(B) = 0, \quad \mathcal{P}(C) = 1, \quad \mathcal{P}(D) = 1 + iL, \quad (3.1)$$

см. фиг. 1а, в. При заданной области g условия (3.1), как можно убедиться, однозначно определяют отображение $\mathcal{P}$ и высоту L прямоугольника $\mathfrak{R}$.

Из условий (3.1) с учетом введенных в п. 1.2 обозначений следует, что отображение $\mathcal{P}(z) = u(z) + iv(z)$ осуществляет следующее соответствие (см. также фиг. 1а) между дугами, составляющими границу ∂g , и сторонами прямоугольника $\mathfrak{R}$:

$$\mathcal{P}(\gamma_1) = [1 + iL, iL], \quad \mathcal{P}(\gamma_2) = [iL, 0], \quad \mathcal{P}(\gamma_3) = [0, 1], \quad \mathcal{P}(\Gamma) = [1, 1 + iL]. \quad (3.2)$$

Это соответствие означает, что функции $u(z)$ и $v(z)$ принимают на указанных дугах следующие значения:

$$u(z) = 0, \quad z \in \gamma_2; \quad u(z) = 1, \quad z \in \Gamma; \quad v(z) = 0, \quad z \in \gamma_3; \quad v(z) = L, \quad z \in \gamma_1. \quad (3.3)$$

Поскольку, согласно (3.3), функция $v(z)$ принимает на γ_1 и γ_3 постоянные значения, то из условий Коши — Римана вытекает, что на этих дугах обращается в ноль нормальная производная функции $u(z)$. Таким образом, для $u(z)$ имеем следующую смешанную краевую задачу:

$$\Delta u = 0, \quad z \in g; \quad u = 0, \quad z \in \gamma_2; \quad u = 1, \quad z \in \Gamma; \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad z \in \gamma_1 \cup \gamma_3. \quad (3.4)$$

Эта постановка представляет собой частный случай задачи (1.4)–(1.7) с граничной функцией $h(z) = 1$. Применяя к этой задаче метод мультиполей, используя представление (2.6) и комплексифицируя его, получаем, что искомое отображение может быть найдено в виде

$$\mathcal{P}(z) = \lim_{K \rightarrow \infty} \mathcal{P}^K(z), \quad \mathcal{P}^K(z) := a_0^K \pi^{-1} \ln \mathcal{F}(z) + \sum_{p=1}^K a_p^K \left\{ [\mathcal{F}(z)]^p - [\mathcal{F}(z)]^{-p} \right\}. \quad (3.5)$$

Здесь вещественные коэффициенты a_p^K находятся из системы (2.8). При этом оказывается найденным и приближенное значение L^K ширины прямоугольника $\mathfrak{R}$:

$$L^K = \text{Im } \mathcal{P}^K(A) = a_0^K;$$

оно совпадает с нулевым коэффициентом разложения (3.5).

3.2. Построение конформного отображения серпообразной области

Конкретное применение метода мультиполей проведем на примере построения конформного отображения области g , изображенной на фиг. 2а, ограниченной контуром $\partial g = (z_0 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5)$, состоящим из дуги окружности $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ радиуса R , соединяющейся в точках z_1 и z_4 с отрезками $[z_0, z_1]$ и $[z_4, z_5]$ мнимой оси под углами $\pi(\alpha + 1)$, и кусочно—гладкой дуги $(z_5 z_0)$, лежащей в правой полуплоскости $\{\operatorname{Re} z > 0\}$. Форма области g определяется указанными на фиг. 2а параметрами $R > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$, а также конфигурацией дуги $(z_5 z_0)$.

Построим конформное отображение $\mathfrak{P}: g \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ области g на прямоугольник $\mathfrak{R}$, изображенный на фиг. 2б. Переобозначив точки z_2, z_3, z_5, z_0 соответственно через A, B, C, D , примем для этого отображения условия нормировки, аналогичные условиям (3.1), т.е.

$$\mathfrak{P}(A) = iL, \quad \mathfrak{P}(B) = 0, \quad \mathfrak{P}(C) = 1, \quad \mathfrak{P}(D) = 1 + iL, \quad (3.6)$$

а приняв в качестве граничных дуг $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и Γ соответственно дуги $(z_0 z_1 z_2)$, $(z_2 z_3)$, $(z_3 z_4 z_5)$ и $(z_5 z_0)$ границы ∂g , приходим в соответствии с п. 3.1 к краевой задаче (3.4) относительно вещественной части рассматриваемого конформного отображения, т.е. относительно гармонической функции $u(z) = \operatorname{Re} \mathfrak{P}(z)$.

Для построения необходимых для решения задачи (3.6) мультиполей $\Omega_p(z)$, соответствующих условиям задачи, выберем в качестве расширения $\mathfrak{G}$ исходной области g область, изображенную на фиг. 2в, получаемую "отбрасыванием" граничной кривой Γ области g и присоединением к этой области всей правой полуплоскости.

Тогда требуемое для построения мультиполей в нашем случае конформное отображение $\mathfrak{F}: \mathfrak{G} \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{K}$ исходной области g на каноническую $\mathbb{K}$ (фиг. 2г), определяемую формулой (2.2), и подчиненное нормировке

$$\mathfrak{F}(A) = -1, \quad \mathfrak{F}(B) = 1, \quad \mathfrak{F}(M) = \infty, \quad (3.7)$$

аналогичной условиям (2.3) для общего случая, дается выражением

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(z) = & \left\{ [(z_2 - z_4)^\beta - (z_2 - z_1)^\beta]^{\frac{1}{2}} [(z_3 - z_1)^\beta (z - z_4)^\beta - (z_3 - z_4)^\beta (z - z_1)^\beta]^{\frac{1}{2}} + \right. \\ & + [(z_3 - z_4)^\beta - (z_3 - z_1)^\beta]^{\frac{1}{2}} [(z_2 - z_1)^\beta (z - z_4)^\beta - (z_2 - z_4)^\beta (z - z_1)^\beta]^{\frac{1}{2}} \Big\}^2 \times \\ & \times [(z - z_4)^\beta - (z - z_1)^\beta]^{-1} [(z_2 - z_1)^\beta (z_3 - z_4)^\beta - (z_2 - z_4)^\beta (z_3 - z_1)^\beta]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\beta = 1/(1 + \alpha)$.

В соответствии с определением для общего случая, система мультиполей $\{\Omega_p\}_{p=0}^\infty$ в нашем случае определяется через отображение $\mathfrak{F}$ по формулам

$$\Omega_0(z) = \pi^{-1} \operatorname{Re} \ln \mathfrak{F}(z), \quad \Omega_p(z) := \operatorname{Re} \left\{ [\mathfrak{F}(z)]^p - [\mathfrak{F}(z)]^{-p} \right\}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Тогда, следуя изложению п. 3.1, получаем искомое конформное отображение $\mathfrak{P}: g \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ в виде

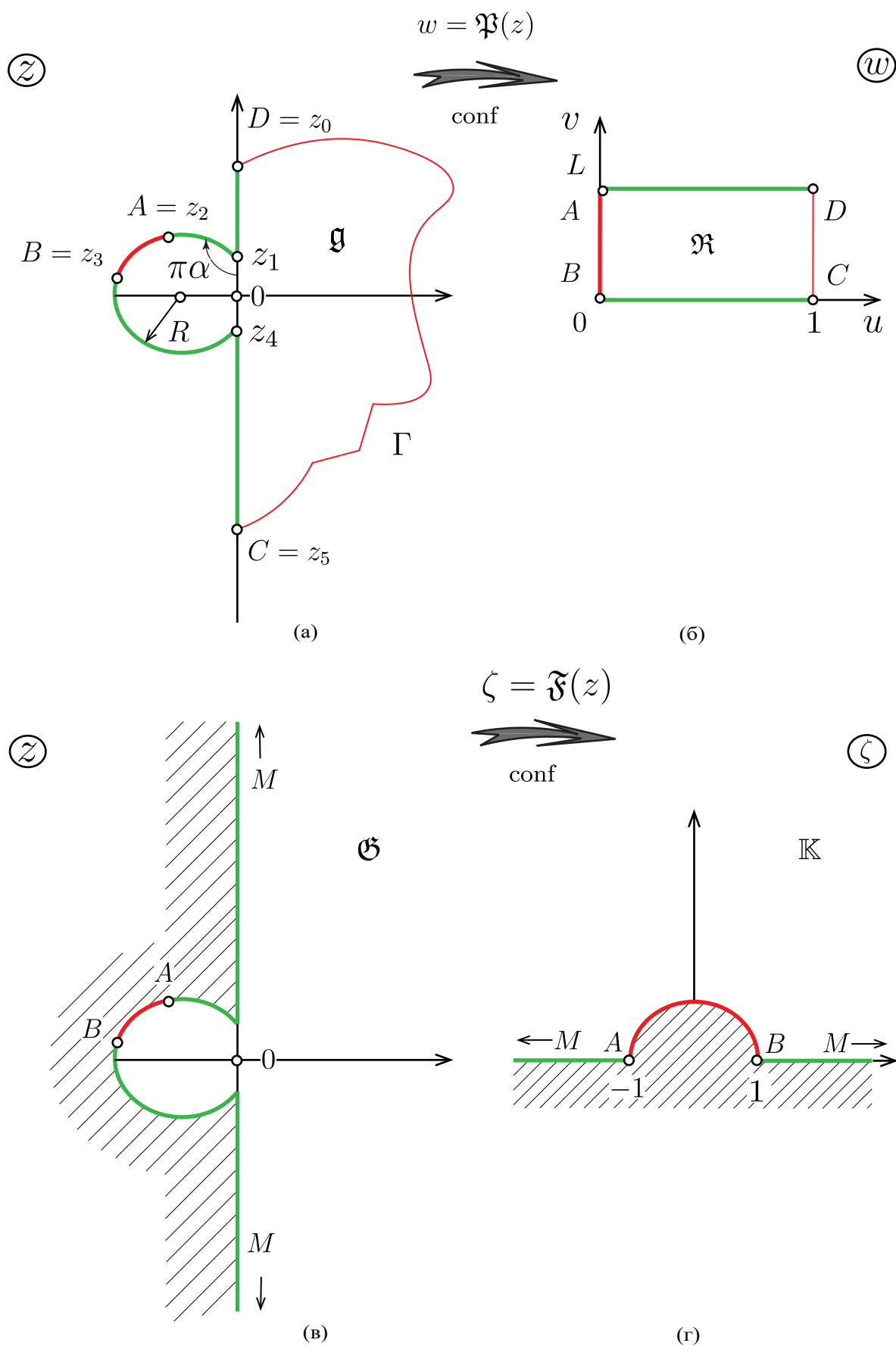
$$\mathfrak{P}(z) = \lim_{K \rightarrow \infty} \mathfrak{P}^K(z), \quad \mathfrak{P}^K(z) := a_0^K \pi^{-1} \ln \mathfrak{F}(z) + \sum_{p=1}^K a_p^K \left\{ [\mathfrak{F}(z)]^p - [\mathfrak{F}(z)]^{-p} \right\}, \quad (3.10)$$

где коэффициенты a_p^K получаются путем решения системы (2.8), (2.9) с функциями $\Omega_p(z)$, определенными по формулам (3.9).

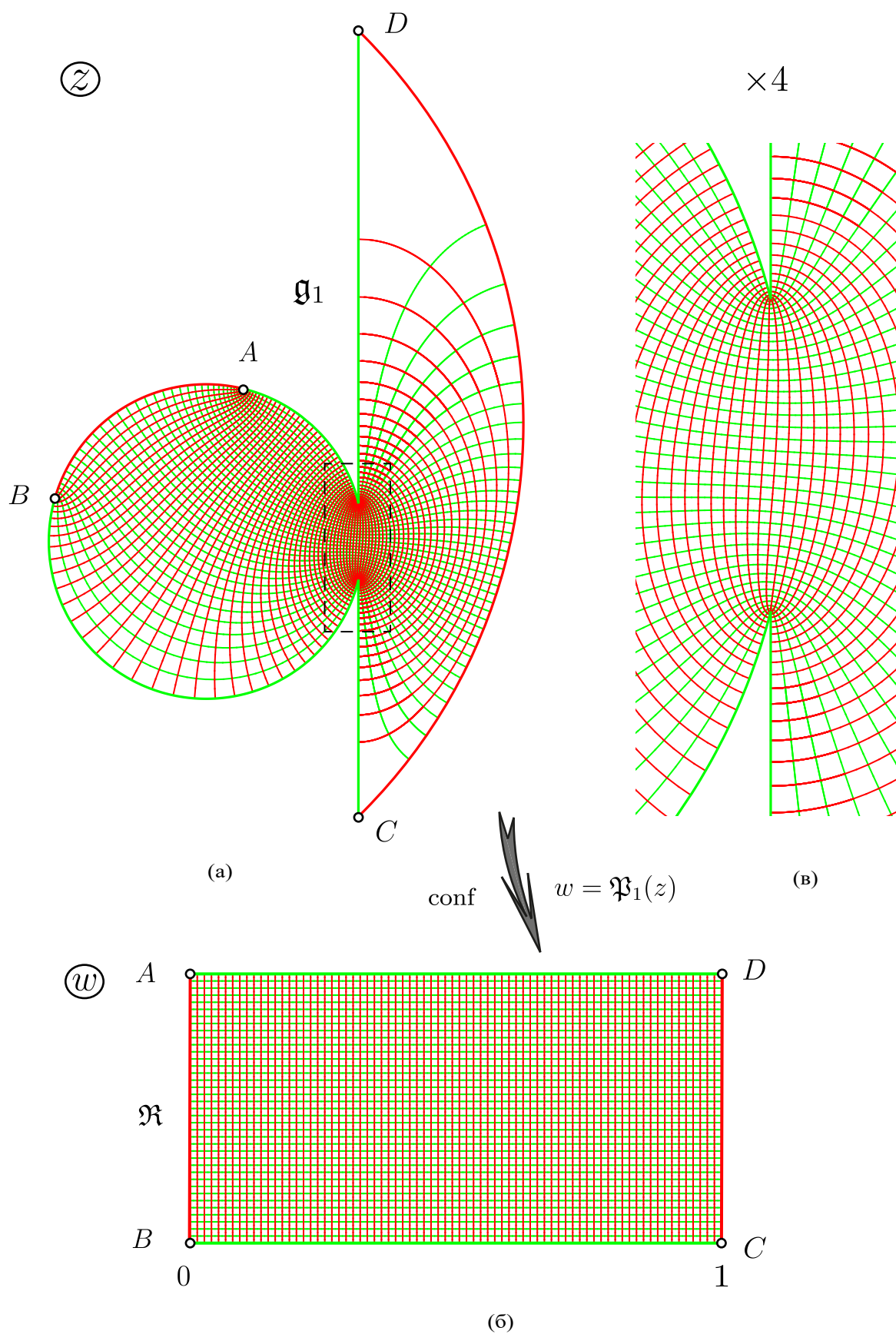
Численная реализация изложенного алгоритма построения конформного отображения $\mathfrak{P}: g \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ была выполнена для двух конкретных примеров области g .

На фиг. 3а изображен первый пример такой области, обозначенной через g_1 , представляющей собой серпообразную фигуру, для которой строилось конформное отображение $\mathfrak{P}_1: g_1 \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{R}$ на прямоугольник, представленный на фиг. 3б. Там же представлена конформная сетка в области g_1 и ее прообраз — декартова сетка в прямоугольнике $\mathfrak{R}$. На фиг. 3в дана увеличенная в 4 раза сетка в выделенном прямоугольнике серпообразной области g_1 . Вычисленная для этого решения апостериорная оценка погрешности в норме $C(\bar{g}_1)$ составила 10^{-7} при использовании 101-й аппроксимативной функции Ω_p .

На фиг. 4а изображен второй пример области, обозначенной через g_2 , также представляющей собой серпообразную фигуру с пилообразным лезвием, для которой также строилось конформное отображение

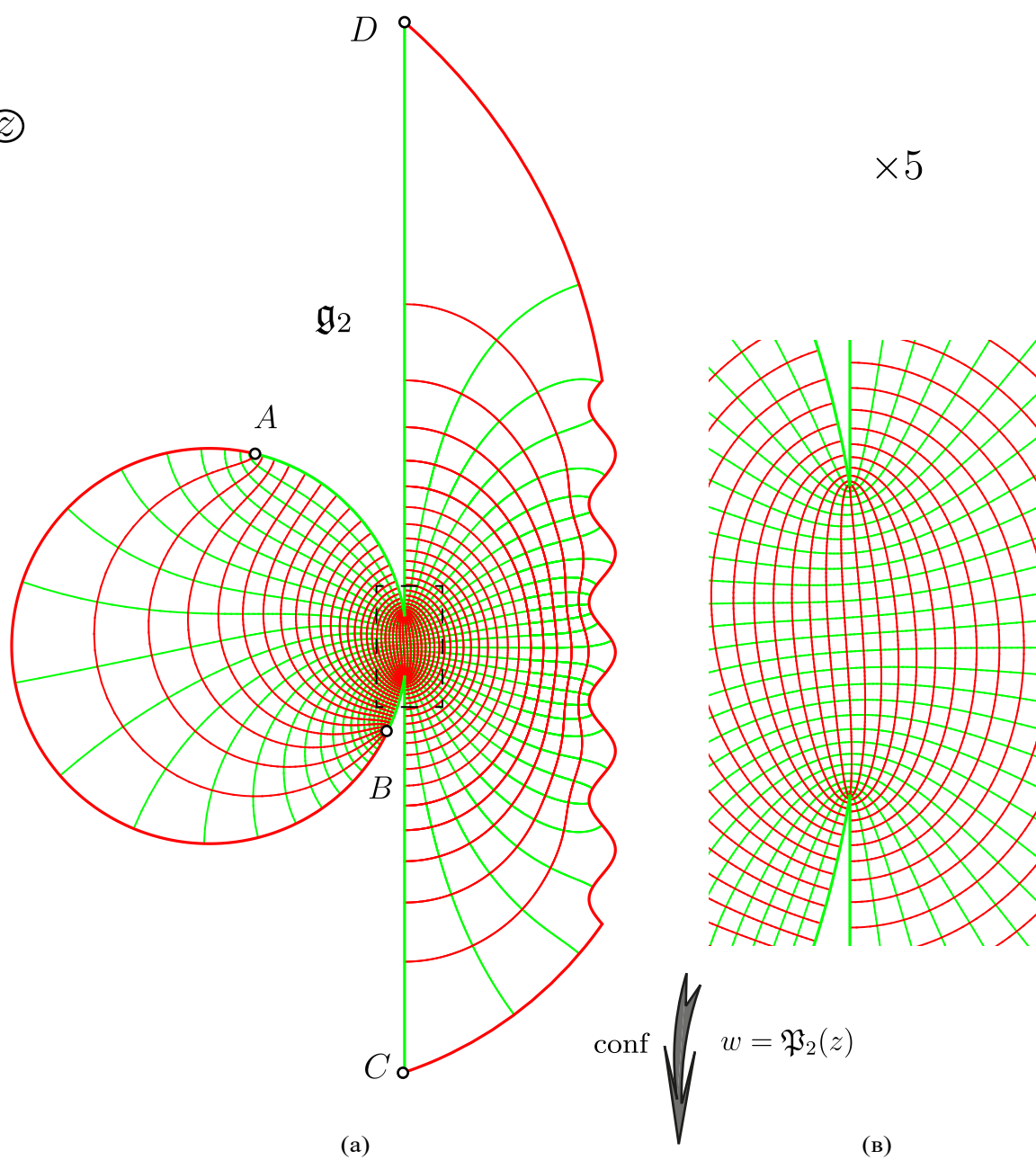


Фиг. 2.

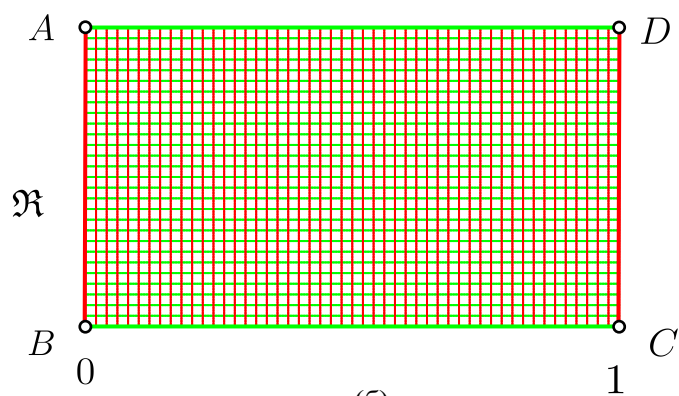


Фиг. 3.

⓪



⓪



Фиг. 4.

$\mathfrak{F}_2 : \mathfrak{g}_2 \xrightarrow{\text{conf}} \mathfrak{K}$ на прямоугольник, представленный на фиг. 4б. Там же представлена конформная сетка в области $\mathfrak{g}_2$ и ее прообраз — декартова сетка в прямоугольнике $\mathfrak{K}$. На фиг. 4в дана увеличенная в 5 раз сетка в выделенном прямоугольнике серпообразной области $\mathfrak{g}_2$. Вычисленная для этого решения апостериорная оценка погрешности в норме $C(\bar{\mathfrak{g}}_2)$ составила 10^{-4} при использовании 251-й аппроксимативной функции Ω_p .

Авторы выражают благодарность С.И. Безродных и С.Л. Скороходову за ценные консультации и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В.И. Об одном методе решения некоторых плоских смешанных задач для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 5. С. 1012–1015.
2. Власов В.И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1987.
3. Власов В.И., Волков Д.Б., Рачков А.В. Численно-аналитический метод решения уравнения Пуассона в сложных областях // Сообщения по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
4. Власов В.И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. М.: ВЦ АН СССР, 1990.
5. Власов В.И., Рачков А.В. Некоторые обобщения метода мультиполей // Сообщения по прикл. матем. М.: ВЦ РАН, 1994.
6. Власов В.И., Волков Д.Б. Метод мультиполей для решения уравнения Пуассона в областях со скругленным углом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1995. Т. 35. № 6. С. 867–892.
7. Vlasov V.I. Multipole method for solving some boundary value problems in complex-shaped domains // Z. Angew. Math. und Mech. 1996. V. 76. Suppl. 1. P. 279–282.
8. Власов В.И., Пальцев А.Б. О применении метода мультиполей к расчету электрического поля в лазере специальной конструкции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 10. С. 1221–1236.
9. Власов В.И., Пальцев А.Б. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях с узкой щелью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1786–1805.
10. Власов В.И. Метод решения краевых задач для уравнения Лапласа в областях с конусами // Докл. АН. 2004. Т. 397. № 5. С. 586–589.
11. Skorokhodov S.L., Vlasov V.I. The multipole method for certain elliptic equations with discontinuous coefficient // Belgorod State Univ. Sci. bull. Math. and Phys. 2009. № 14 (69). Issue 15. P. 89–100.
12. Безродных С.И., Власов В.И. Применение метода мультиполей к прямым и обратным задачам для уравнения Грэда–Шафранова с нелокальным условием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 4. С. 619–685.
13. Безродных С.И., Власов В.И. Исследование дефектов и построение гармонических сеток в областях с углами и выемками // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 12. С. 2096–2129.
14. Власов В.И. О решении задачи Дирихле посредством разложения в ряд Фурье // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 1. С. 19–22.
15. Vlasov V.I. Hardy spaces, approximation issues and boundary value problems // Eurasian Math. J. 2018. V. 9. № 3. P. 85–94.
16. Riesz F. Über die Randwerte einer analytischen Function // Math. Zeitschr. 1923. B. 18. S. 87–95.
17. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
18. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.

THE MULTIPOLE METHOD FOR SOME MIXED BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND ITS APPLICATION TO THE CONSTRUCTION OF A CONFORMAL MAPPING

A. O. Bagapsh*, V. I. Vlasov**

119991 Moscow, Vavilov str., 44, FRC CSC RAS

**e-mail: a.bagapsh@gmail.com*

***e-mail: vlasov@ccas.ru*

Received: 16.07.2024

Revised: 16.07.2024

Accepted: 26.07.2024

Abstract. An analytical and numerical multipole method for solving some mixed boundary value problems for the Laplace equation in planar simply connected domains G of complex shape with application to the construction of conformal mapping of such domains is presented. The method allows obtaining both the solution itself and its gradient with high accuracy up to complex boundary sections near singularities, and also provides a posteriori estimate of the relative error δ in the norm $C(\bar{G})$. The effectiveness of the method was confirmed by examples of numerical implementation of the method for constructing a conformal mapping of regions with a curved boundary containing reentrant arc angles and narrow isthmuses. At the same time, the error of δ was, according to the a posteriori estimate, a value no worse than only about 10^2 approximative functions.

Keywords: flat areas of complex shape, mixed boundary value problem, multipole method, conformal mapping, reentrant angles, a posteriori error estimation.