

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРНОГО РАСТВОРА ДЛЯ КОЛМОГОРОВСКОГО ПОТОКА<sup>1)</sup>

© 2024 г. В.В. Денисенко<sup>1,\*</sup>, С.В. Фортова<sup>1</sup>, В.В. Лебедев<sup>2</sup>, И.В. Колоколов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>123056 Москва, ул. 2-Я Брестская, 19/18, Институт автоматизации проектирования РАН, Россия

<sup>2</sup>142432 Черноголовка, М.о., пр-т Акад. Семенова, 1А, Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Россия

\*e-mail: ned13@rambler.ru

Поступила в редакцию 22.02.2024 г.

Переработанный вариант 22.02.2024 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

Предложен численный метод, аппроксимирующий уравнения динамики течения полимерного раствора. Построенная методика основывается на гибридном подходе. Гидродинамическая составляющая течения описывается системой уравнений Навье–Стокса и численно аппроксимируется линейризованным методом Годунова. Полимерная составляющая течения описывается системой уравнений для вектора растяжения полимеров  $\mathbf{R}$  и численно аппроксимируется методом Курганова–Тедмора. С использованием построенной схемы, исследована задача об устойчивости течения полимерного раствора при низких числах Рейнольдса  $Re \sim 10$  в квадратной периодической ячейке под действием внешней периодической силы. Путем численного эксперимента изучена неустойчивость данного вида течения, характеризующаяся нарушением его ламинарности. Построены спектральные характеристики полимерного раствора при низких числах Рейнольдса. Библ. 38. Фиг. 6.

**Ключевые слова:** численное моделирование, эластическая турбулентность, гидродинамическая неустойчивость, течение Колмогорова.

DOI: 10.31857/S0044466924090179, EDN: WICNKA

### ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие полимерных молекул с потоками жидкости приводит ко множеству интересных явлений, наблюдаемых в природе и лабораторных экспериментах, а именно к уменьшению турбулентного сопротивления, эластической турбулентности и изменению процесса теплопереноса при естественной конвекции [1, 2]. Лабораторные эксперименты показывают, что даже незначительная концентрация полимеров может значительно изменить свойства ламинарных низкорейнольдсовых ( $Re \sim 1$ ) потоков, и породить новую форму турбулентности, получившую название эластической (полимерной) турбулентности. Для ньютоновского потока жидкости переход к турбулентности определяется нелинейным инерционным членом в уравнении импульса, точнее отношением инерционных сил, описываемых этим членом к диссипативным силам, обусловленным вязкостью среды. Это отношение характеризуется безразмерным параметром – числом Рейнольдса  $Re$ . Чем выше  $Re$ , тем более неустойчивым становится поток, что приводит к возникновению и развитию турбулентного режима течения. Однако в жидкости, в которой присутствуют полимерные молекулы, возникает так называемый вязкоупругий эффект, вследствие наличия другого нелинейного члена, характеризующего влияние полимерных молекул на поток. Влияние упругих сил на поток, которые вызваны наличием полимеров, описывается еще одним безразмерным параметром – числом Вайсенберга  $Wi = \frac{U}{\gamma_0 L}$ , определяемым отношением характерного градиента скорости потока жидкости к темпу релаксации полимерной молекулы к своему равновесному состоянию. Здесь  $\gamma_0$  – коэффициент релаксации полимерной молекулы к своему равновесному состоянию. Как показывают физические эксперименты, возникновение и развитие неустойчивости течения при малых числах  $Re$  происходит именно благодаря наличию этих упругих сил [1–4].

Развитие неустойчивостей, обусловленных действием только полимерных сил при низких числах Рейнольдса наблюдается в большом разнообразии экспериментов для криволинейных геометрий потоков. Примерами

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки И.В.Колоколова (госзадание FFWR-2024-0014) и РФФ В.В.Лебедева (код проекта 23-72-30006) в рамках госзадания №124022400174-3 “Вычислительный эксперимент на суперкомпьютерах в задачах механики сплошных сред”.

служат течения Куэтта между двумя цилиндрами, где был предложен механизм развития полимерной неустойчивости [5] и количественно подтвержден экспериментально [6–8], а так же закрученный поток между двумя вращающимися параллельными дисками [9–11], коническо-плоские геометрии [12], криволинейные каналы или поток Дина [13–18], поток в канале [19–22] и неустойчивости следа в потоках, обтекающих различные препятствия [23–26]. Так же результаты по эластической турбулентности были получены в работах [27, 28].

Несмотря на большой интерес, проявляемый к полимерным течениям и широкий спектр потенциальных применений в различных технологических процессах, численное моделирование упругой неустойчивости и эластической турбулентности встречает большие сложности и мало представлена в литературе. При постановке физических экспериментов в настоящее время довольно трудно получить подробную информацию о полимерном растворе, например, поле тензора упругих напряжений полимерных молекул. При этом эти данные имеют большое значение при построении численного исследования механизма течения полимерного раствора и изучения его свойств. Таким образом, актуальной задачей является разработка качественных методов численного моделирования и позволяет путем непосредственного решения системы уравнений, описывающих динамику течения раствора, получить наиболее полную информацию о характеристиках потока. Однако численное моделирование турбулентных потоков полимерных растворов далеко не тривиально [29–32]. Это обусловлено наличием больших градиентов поля растяжений полимерных молекул, возникающих на режимах течений с высоким числом  $Wi$ , что приводит к развитию неустойчивостей численной схемы. Для регуляризации численного решения уравнений, описывающих динамику поля растяжений полимеров, обычно вводят дополнительную искусственную диффузию. Искусственная диффузия преобразует уравнения полимерной модели в параболическую форму за счет сглаживания градиентов растяжения полимеров [31].

Эластическая турбулентность была впервые изучена численно в работе [29] в двумерном колмогоровском потоке полимерного раствора. Основные явления, наблюдаемые в лабораторных экспериментах, были воспроизведены с помощью численного моделирования, например, увеличение лобового сопротивления с увеличением  $Wi$  и наблюдение степенного энергетического спектра. Трехмерное (3D) моделирование колмогоровского течения вязкоупругой жидкости было выполнено в работе [34]. Авторы показали, что эластическая турбулентность возникает при меньшем числе Вайсенберга  $Wi$  по сравнению с двумерным случаем.

В настоящей работе представлены результаты прямого численного моделирования неустойчивости течения вязкой жидкости, содержащей полимерную примесь под действием внешней периодической силы в периодической квадратной двумерной ячейке. Получены зависимости кинетической энергии течения от времени, показывающие переход от ламинарного течения ко вторичному периодическому режиму. Построены спектры скорости и кинетической энергии для гидродинамической составляющей течения, показывающие наличие степенной зависимости для энергетического каскада с коэффициентом  $k \sim -3$ . Аналогичные спектры растяжений полимерных молекул демонстрируют зависимость  $k \sim -1$ .

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Система уравнений, описывающих динамику полимерного раствора вязкой жидкости, включает в себя уравнения Навье–Стокса и уравнения, описывающие эволюцию состояния полимерной составляющей [1]. Эта составляющая описывается векторным полем растяжения полимерной молекулы  $\mathbf{R}$  — вектором, соединяющим начало и конец молекулы (end-to-end vector). Запишем нашу модель в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0, \\
 \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho G \sin ky + \mu \Delta u + A \frac{\partial}{\partial x} [\gamma(R) \{R^x\}^2] + A \frac{\partial}{\partial y} (\gamma(R) R^x R^y), \\
 \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho G \sin kx + \mu \Delta v + A \frac{\partial}{\partial y} [\gamma(R) \{R^y\}^2] + A \frac{\partial}{\partial x} (\gamma(R) R^x R^y), \\
 \frac{\partial (\frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} + e)}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \mathbf{V} \left( \frac{\rho \mathbf{V}^2}{2} + p + e \right) \right) &= \frac{\partial}{\partial x} (\mu \nu \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + A \nu \gamma(R) (R^x)^2 + \\
 &+ \nu \mu \rho \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + A \nu \gamma(R) R^x R^y) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \nu \rho \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + A \nu \gamma(R) R^x R^y + \\
 &+ \mu \nu \rho \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + A \nu \gamma(R) (R^y)^2) + \nu \rho G \sin ky - \nu \rho G \sin kx, \\
 \frac{\partial R^x}{\partial t} + u \frac{\partial R^x}{\partial x} + v \frac{\partial R^x}{\partial y} - R^x \frac{\partial u}{\partial x} - R^y \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(R) R^x &= C_d \Delta R^x,
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial R^y}{\partial t} + u \frac{\partial R^y}{\partial x} + v \frac{\partial R^y}{\partial y} - R^x \frac{\partial v}{\partial x} - R^y \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma(R)R^y = C_d \Delta R^y,$$

$$p = \sigma r e, \quad \sigma = \frac{2}{3}, \quad \gamma(R) = \gamma_0 \left(1 + \frac{R^2}{R_m^2}\right), \quad \mathbf{V} = (u, v)^T.$$

Здесь  $A$  — коэффициент концентрации полимеров в растворе,  $C_d$  — коэффициент искусственной диффузии полимеров, введенный для стабилизации численного решения,  $\gamma(R)$  — модель релаксации полимерной молекулы,  $G$  — интенсивность внешней силы. В качестве модели упругости полимеров использовано приближение модели FENE-P [1], когда  $R \ll R_m$  :  $\gamma(R) = \gamma_0 \left(1 + \frac{R^2}{R_m^2}\right)$ . Здесь  $R_m$  — максимальная величина растяжения полимерной молекулы.

В начале расчетов раствор находился в состоянии покоя:  $u(x, y, t = 0) = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ;  $v(x, y, t = 0) = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ . Плотность и давление принимались равными  $\rho(x, y, t = 0) = 10 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ;  $p(x, y, t = 0) = 10^3$  Па. Начальные значения растяжения полимерных молекул  $R^x(x, y, t = 0) = 10^{-2}$  м;  $R^y(x, y, t = 0) = 10^{-2}$  м. Коэффициент искусственной диффузии подбирался эмпирически, исходя из требований устойчивого численного счета  $C_d = 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ . Во всех расчетах интенсивность внешней силы  $G = 10^{-2} \frac{\text{Н}}{\text{кг}}$ . Коэффициент релаксации полимерной молекулы положим  $\gamma_0 = 10^{-4} \text{с}^{-1}$ . Величина динамической вязкости  $\mu = 0.5$  Па·с. Частота внешней периодической силы  $k = 2 \text{м}^{-1}$ .

Расчетная область представляет из себя квадрат со сторонами  $L \times L = 2\pi \times 2\pi$ , на границе которого поставлены периодические граничные условия и покрыта равномерной вычислительной сеткой размерностью  $250 \times 250$  ячеек. Также были проведены расчеты на сектах размерностью  $500 \times 500$  и  $1000 \times 1000$  для проверки того, что полученные результаты не являются численным эффектом.

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Для численной аппроксимации системы (1.1) применялась комбинация двух численных методов — линеаризованного метода Годунова [35] и метода Курганова–Тедмора (КТ) [36]. Линеаризованным методом Годунова аппроксимировалась гидродинамическая часть модели — уравнения Навье–Стокса, уравнения, описывающие полимерную часть, аппроксимировались методом Курганова–Тедмора (КТ). Подробное описание линеаризованной схемы Годунова представлено в работе [35]. Опишем аппроксимацию уравнений на полимерную составляющую более подробно. Запишем уравнения системы (1.1) для вектора растяжения полимеров в дивергентном виде:

$$\begin{pmatrix} R^x \\ R^y \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} uR^x \\ uR^y \end{pmatrix}_x - \begin{pmatrix} C_d \frac{\partial R^x}{\partial x} \\ C_d \frac{\partial R^y}{\partial x} \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} vR^x \\ vR^y \end{pmatrix}_y - \begin{pmatrix} C_d \frac{\partial R^x}{\partial y} \\ C_d \frac{\partial R^y}{\partial y} \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 2R^x \frac{\partial u}{\partial x} + R^y \frac{\partial u}{\partial y} + R^x \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma(R)R^x \\ R^x \frac{\partial v}{\partial x} + 2R^y \frac{\partial v}{\partial y} + R^y \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma(R)R^y \end{pmatrix}.$$

Суть методики КТ состоит в алгоритме негдуновского типа для вычисления конвективных потоков  $\begin{pmatrix} uR^x \\ uR^y \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} vR^x \\ vR^y \end{pmatrix}$  на гранях расчетных ячеек, для аппроксимации остальных членов (диффузионных и источника) применяется обычное осреднение на гранях ячеек расчетной сетки. Обозначим конвективный поток вдоль осей  $x, y$  :  $F = \begin{pmatrix} uR^x \\ uR^y \end{pmatrix}$ ;  $G = \begin{pmatrix} vR^x \\ vR^y \end{pmatrix}$ , вектор-столбец неизвестных  $R = \begin{pmatrix} R^x \\ R^y \end{pmatrix}$ . Конвективные потоки тогда будут вычисляться следующим образом:

$$F_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{F((R_{i+\frac{1}{2},j}^+)^n) + F((R_{i-\frac{1}{2},j}^-)^n)}{2} - \frac{(a_{i+\frac{1}{2},j}^x)^n}{2} \left( (R_{i+\frac{1}{2},j}^+)^n - (R_{i-\frac{1}{2},j}^-)^n \right);$$

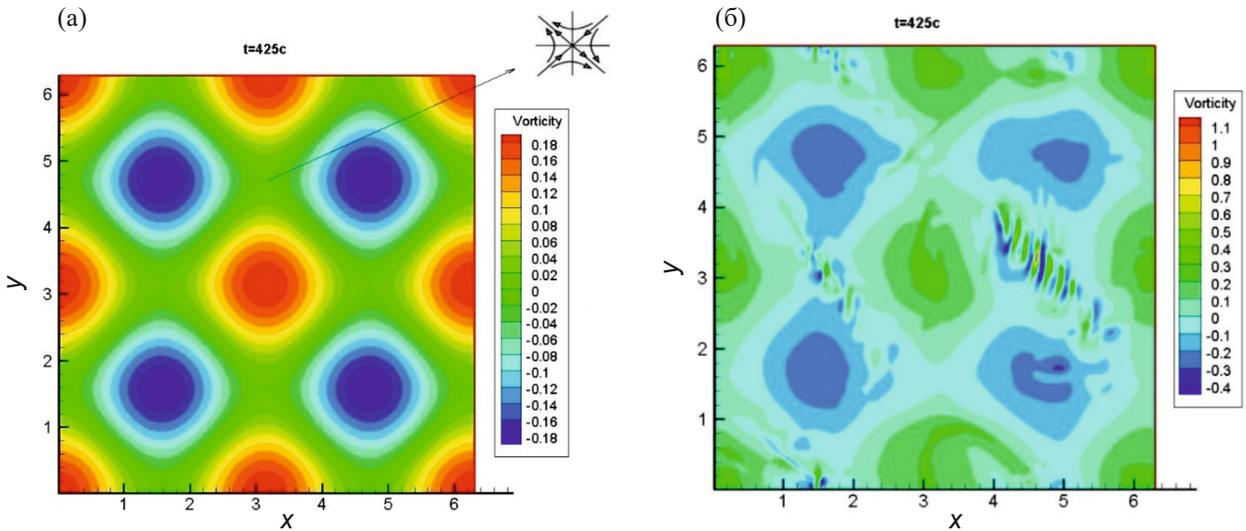
$$G_{i+\frac{1}{2},j}^n = \frac{G((R_{i+\frac{1}{2},j}^+)^n) + G((R_{i-\frac{1}{2},j}^-)^n)}{2} - \frac{(a_{i+\frac{1}{2},j}^y)^n}{2} \left( (R_{i+\frac{1}{2},j}^+)^n - (R_{i-\frac{1}{2},j}^-)^n \right);$$

$$(R_{i+\frac{1}{2},j}^\pm)^n = R_{i+1,j}^n \mp \frac{\Delta x}{2} (R_x)_{i+\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2},j}^n; \quad (R_{i,j+\frac{1}{2}}^\pm)^n = R_{i,j+1}^n \mp \frac{\Delta y}{2} (R_y)_{i,j+\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}^n;$$

$$(a_{i+\frac{1}{2},j}^x)^n = \max_{\pm} \left( \frac{\partial F}{\partial R} \left( (R_{i+\frac{1}{2},j}^\pm)^n \right) \right) = \left| u_{i+\frac{1}{2},j} \right|; \quad (a_{i+\frac{1}{2},j}^y)^n = \max_{\pm} \left( \frac{\partial G}{\partial R} \left( (R_{i,j+\frac{1}{2}}^\pm)^n \right) \right) = \left| v_{i+\frac{1}{2},j} \right|;$$

$$u_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{i+1,j}); \quad v_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{i+1,j});$$

$$(R_x)_{i,j}^n = \min \text{ mod} \left( \theta \frac{(R_x)_{i,j}^n - (R_x)_{i-1,j}^n}{\Delta x}, \frac{(R_x)_{i+1,j}^n - (R_x)_{i-1,j}^n}{2\Delta x}, \theta \frac{(R_x)_{i+1,j}^n - (R_x)_{i,j}^n}{\Delta x} \right);$$



**Фиг. 1.** Завихренность течения, характеризующегося числом Рейнольдса  $Re \sim 10$ , в отсутствии полимерной примеси (а) и при ее наличии (б).

$$(R_y)_{i,j}^n = \min \text{mod} \left( \theta \frac{(R_y)_{i,j}^n - (R_y)_{i-1,j}^n}{\Delta y}, \frac{(R_y)_{i+1,j}^n - (R_y)_{i-1,j}^n}{2\Delta y}, \theta \frac{(R_y)_{i+1,j}^n - (R_y)_{i,j}^n}{\Delta y} \right);$$

$\theta = 1.5$  — весовой коэффициент ограничителя.

Здесь полуцелые индексы обозначают потоки на гранях ячеек, целые — значения величин в центре ячейки,  $u, v$  суть  $x, y$ -компоненты скорости течения,  $a$  — локальная скорость распространения возмущений. Для ограничения наклонов реконструированного решения в ячейке использовался  $\min \text{mod}$  ограничитель.

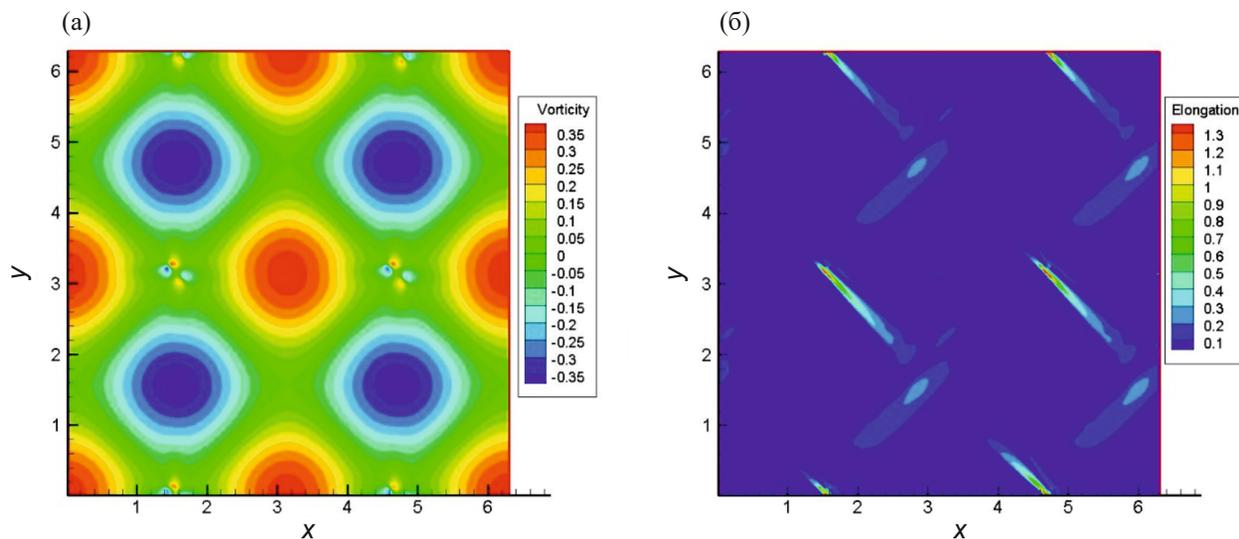
### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Основным результатом численного моделирования следует выделить разрушение ламинарного режима течения и переход во вторичный колебательный режим, показанный на фиг. 1. Для данного режима характерно колебательное движение потока около равновесного положения, обусловленного действием внешней силы. В данном расчете были исследованы следующие значения полимерных параметров:  $R_m = 0.1$  м,  $A = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \text{с}}$ . Значение для коэффициента обратного влияния полимеров на поток  $A$  было подобрано эмпирически. Данный коэффициент увеличивался до тех пор, пока течение оставалось устойчивым. На фиг. 1 для сравнения показана завихренность ламинарного течения в отсутствии полимерной примеси и вторичного с полимерной примесью для числа  $Re \sim 10$  и числа  $Wi \sim 100$ . Если говорить о переходном режиме — когда происходит переход от ламинарного течения ко вторичному, то он характеризуется тем, что неустойчивость возникает в областях, где течение имеет гиперболический характер (фиг.1). Это объясняется максимальным растяжением полимеров в этих областях и, соответственно, возникновением обратного влияния полимеров на гидродинамический поток.

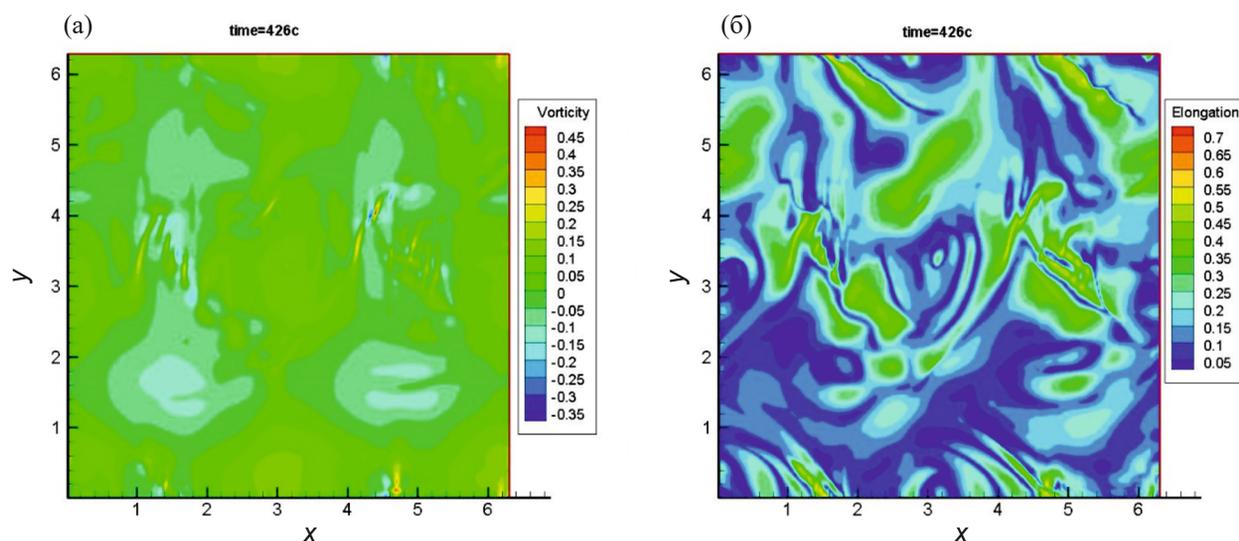
На фиг. 2 показан начальный момент смены режима течения. Видно, что в областях гиперболичности течения растяжение полимеров принимает наибольшее значение и именно здесь начинает быть заметно обратное влияние полимеров на поток.

На фиг. 3 показаны картины установившегося вторичного периодического течения; а — завихренность, б — растяжение полимерных молекул.

На фиг. 4 показана зависимость кинетической энергии течения от времени для различных режимов, отличающихся числами  $Re$  и  $Wi$ . Отчетливо виден момент, когда течение перестает быть ламинарным — зависимость энергии становится более хаотической. Как и следовало ожидать, при увеличении чисел  $Re$  и  $Wi$ , течение становится менее устойчивым, что не связано с влиянием только числа  $Re$ . Влияние числа Рейнольдса обуславливает перенос энергии из гидродинамического потока в полимерную часть, вследствие чего полимеры сильнее растягиваются и начинают оказывать обратное влияние на течение. В результате чего ламинарный режим теряет свою устойчивость и развивается вторичный колебательный режим течения.



Фиг. 2. Завихренность течения (а) и растяжение полимеров (б) в начальные моменты смены режима течения.



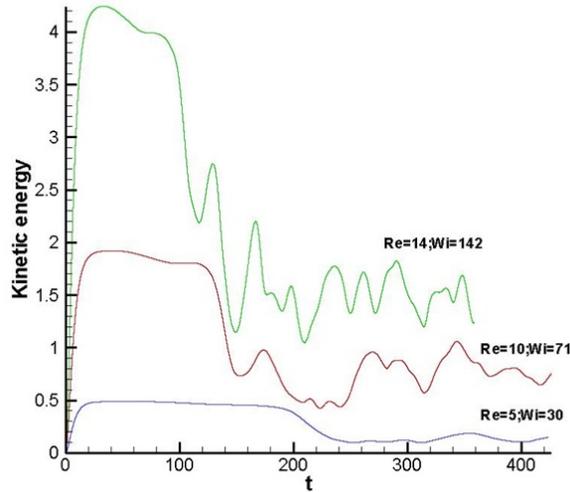
Фиг. 3. Установившееся турбулентное течение полимерного раствора, (а) - распределение в расчетной области завихренности, (б) – растяжения полимеров.

Фиг. 5 иллюстрирует энергетический спектр (см. фиг. 5б) сформировавшегося вторичного течения (см. фиг. 5а), который вычислялся следующим образом:

$$\varepsilon(k_x, k_y) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^4 u_{i(j)}^2(k_x, k_y) \right];$$

$$u_{i(1)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_i(x, y) \cos(k_x x) \cos(k_y y) dx dy,$$

$$u_{i(2)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_i(x, y) \cos(k_x x) \sin(k_y y) dx dy,$$



Фиг. 4. Кинетическая энергия течения в зависимости от времени для различных течений, характеризующихся различными  $Re$  и  $Wi$ .

$$u_{i(3)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_i(x, y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) dx dy,$$

$$u_{i(1)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_i(x, y) \sin(k_x x) \sin(k_y y) dx dy.$$

Осреднение по направлениям вектора  $\mathbf{k}$  осуществлялось по кольцу шириной  $\delta = 0.5$ :

$$E_k(k) = \sum_{k_x, k_y: |k - \sqrt{k_x^2 + k_y^2}| < \delta} \varepsilon(k_x, k_y).$$

На фиг. 5 изображен спектр растяжений полимерных молекул (см. фиг. 5г):

$$R(k_x, k_y) = \sqrt{r_{i(1)}^2(k_x, k_y) + r_{i(2)}^2(k_x, k_y) + r_{i(3)}^2(k_x, k_y) + r_{i(4)}^2(k_x, k_y)};$$

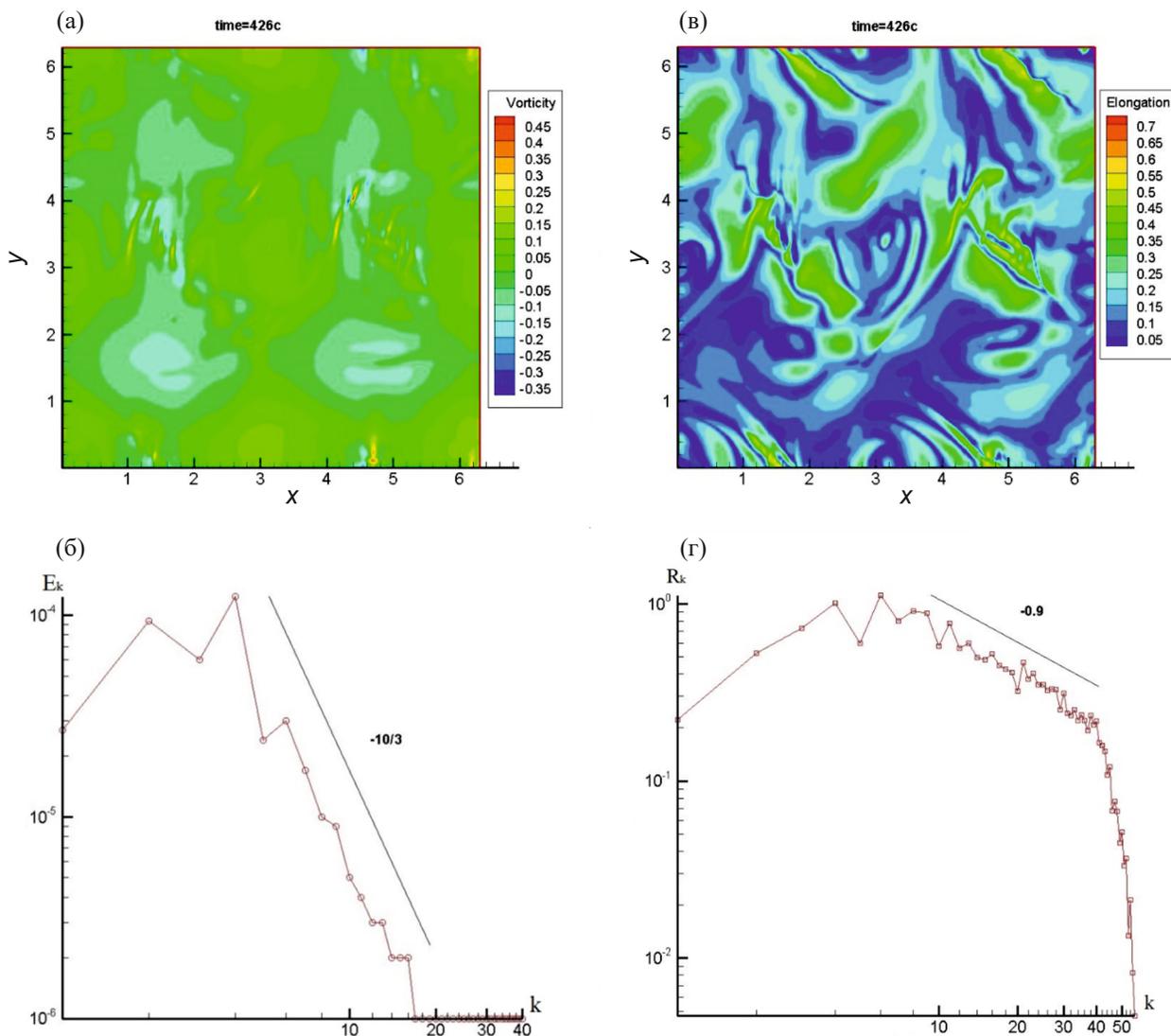
$$r_{i(1)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R^i(x, y) \cos(k_x x) \cos(k_y y) dx dy,$$

$$r_{i(2)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R^i(x, y) \cos(k_x x) \sin(k_y y) dx dy,$$

$$r_{i(3)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R^i(x, y) \sin(k_x x) \cos(k_y y) dx dy,$$

$$r_{i(4)}(k_x, k_y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R^i(x, y) \sin(k_x x) \sin(k_y y) dx dy.$$

Осреднение по направлениям вектора  $\mathbf{k}$  осуществлялось аналогично случаю с энергией. На фиг. 6 изображены течения, посчитанные на более мелких сетках для параметров задачи  $R_m = 0.1$  м,  $A = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \text{с}}$ . Видно, что также нарушается ламинарность течения, что говорит о том, что рассмотренный нами вторичный режим не является численным эффектом.



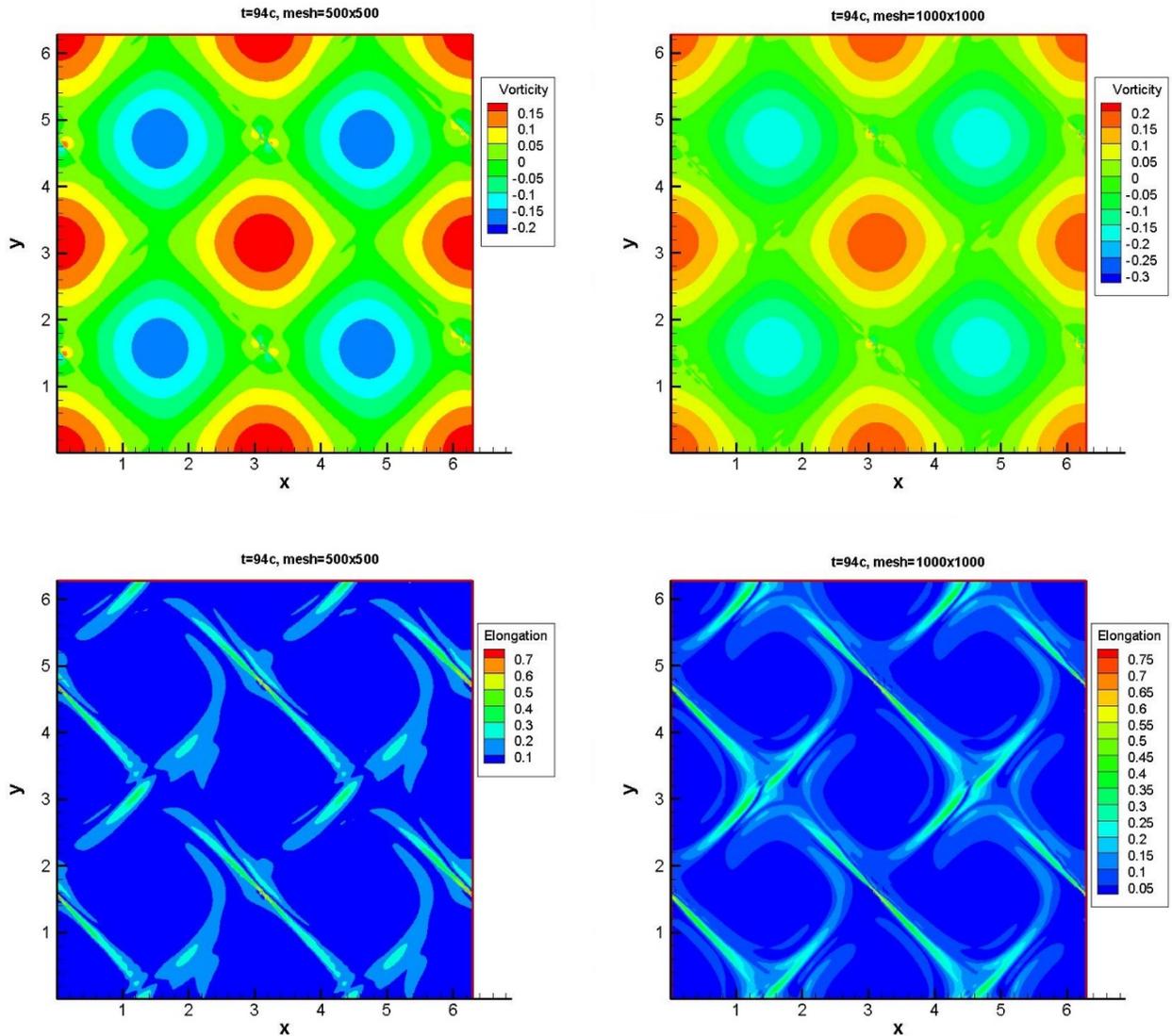
**Фиг. 5.** Энергетический спектр (б)  $E_k(k)$  и спектр растяжений полимерных молекул (г)  $R_k(k)$ , изображенный в системе координат двойного логарифмического масштаба, вторичного течения (в) полимерного раствора для чисел  $Re \sim 10$  и  $Wi \sim 100$ .

Наличие степенной зависимости в спектре энергии говорит о том, что наблюдаемый нами вторичный режим течения показывает наличие влияния полимеров на поток и требует дальнейшего тщательного исследования в части изучения влияния различных параметров на характеристики потока.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена гибридная численная схема второго порядка точности, аппроксимирующая уравнения динамики полимерного раствора (1.1). Гидродинамическая часть системы (1.1) – уравнения Навье–Стокса аппроксимировались линеаризованным методом Годунова [35], полимерная часть – методикой Курганова–Тедмора [36].

Основным результатом численного моделирования колмогоровского течения при наличии полимеров является наличие обратного влияния полимеров на гидродинамический поток и формирование вторичного колебательного режима течения. Неустойчивость рождается из областей т.н. гиперболичности течения, где растяжение полимеров имеет максимальную величину. Следует отметить, что параметром, характеризующим устой-



**Фиг. 6.** Возникновение вторичного режима в расчетах на сетках размером  $500 \times 500$  и  $1000 \times 1000$ . Вверху показаны завихренности, ниже – растяжения полимерных молекул.

чивость течения здесь не является по отдельности ни число  $Re$ , ни число  $Wi$ , а их комбинация, коэффициент эластичности  $El = \frac{Wi}{Re}$  (см. [1]).

Анализ спектральных характеристик энергии полученного течения показывает, что режим данного течения является неустойчивым. Отметим, что энергетический спектр течения вязкого полимерного раствора характеризуется более крутым углом наклона с коэффициентом  $\sim -3$ , чем известный спектр турбулентного колмогоровского течения вязкой жидкости  $\sim -5/3$ , что согласуется с экспериментальными данными [37, 38]. Спектр растяжений полимерных молекул имеет зависимость  $\sim -1$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Victor Steinberg*. Elastic Turbulence: An Experimental View on Inertialess Random // *Flow. Annu. Rev. Fluid Mech.* 2021. V. 53. P. 27–58.
2. *Armin Shahmardi, Sagar Zade, Mehdi N. Ardekani, Rob J. Poole, Fredrik Lundell, Marco E. Rosti, and Luca Brandt*. Turbulent duct flow with polymers // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 859. P. 1057–1083.
3. *Belan S., Chernykh A., Lebedev V.* Boundary layer of elastic turbulence // *J. Fluid Mech.* 2018. V. 855. P. 910–921.

4. *Zhang Hong-Na, Li Feng-Chen, Cao Yang, Kunugi Tomoaki, Yu Bo.* Direct numerical simulation of elastic turbulence and its mixing-enhancement effect in a straight channel flow // *Chin. Phys. B* 2013. V. 22. No 2. 024703.
5. *Larson R.G, Shaqfeh E.S.G., Muller S.J.* A purely elastic instability in Taylor–Couette flow // *J. Fluid Mech.* 1990. V. 218. P. 573–600.
6. *Groisman A., Steinberg V.* Elastic versus inertial instability in a polymer solution flow // 1998a. *Europhys. Lett.* 43:165–70.
7. *Groisman A., Steinberg V.* Mechanism of elastic instability in Couette flow of polymer solutions: experiment // 1998b. *Phys. Fluids* 10:2451–63.
8. *Steinberg V, Groisman A.* Elastic versus inertial instability in Couette–Taylor flow of a polymer solution: review // *Philos. Mag. B* 1998. V. 78. P. 253–63.
9. *McKinley G.H, Byars J.A, Brown R.A, Armstrong R.C.* Observations on the elastic instability in cone-and-plate and parallel-plate flows of a polyisobutylene Boger fluid// *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 1991. V. 40:201–29.
10. *Oeztekin A., Brown R.A.* Instability of a viscoelastic fluid between rotating parallel disks: analysis for the Oldroyd-B fluid // *J. Fluid Mech.* 1993. 255:473–502.
11. *Byars J.A, Oeztekin A., Brown R.A., McKinley G.H.* Spiral instabilities in the flow of highly elastic fluids between rotating parallel disks // 1994. *J. Fluid. Mech.* 271:173–218.
12. *Oeztekin A., Brown R.A., McKinley G.H.* Quantitative prediction of the viscoelastic instability in coneand plate flow of a Boger fluid using a multi-mode Giesekus model // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 1994. 54:351–77.
13. *Joo Y.L, Shaqfeh E.S.G.* A purely elastic instability in Dean and Taylor–Dean flow // 1992. *Phys. Fluids. A.* 1992. V. 4:524–42.
14. *Burghlelea T., Segre E., Bar-Joseph I., Groisman A., Steinberg V.* Chaotic flow and efficient mixing in a microchannel with a polymer solution // *Phys. Rev.* 2004. E 69:066305.
15. *Burghlelea T., Segre E., Steinberg V.* Mixing by polymers: experimental test of decay regime of mixing // 2004b. *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 92:164501.
16. *Groisman A., Steinberg V.* Elastic turbulence in curvilinear flows of polymer solutions // *New J. Phys.* 2004. V. 6:29–48.
17. *Jun Y., Steinberg V.* Elastic turbulence in a curvilinear channel flow // *Phys. Rev. E* 2011. V. 84:056325.
18. *Soulies A., Aubril J., Castelain C., Burghlelea T.* Characterization of elastic turbulence in a serpentine micro-channel // *Phys. Fluids.* 2017. V. 29:083102.
19. *Arratia P.E., Thomas C.C., Diorio J., Gollub J.P.* Elastic instabilities of polymer solutions in cross-channel flow // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 96:144502.
20. *Poole R.J., Alves M.A., Oliveira P.J.* Purely elastic flow asymmetries // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99:164503.
21. *Haward S.J., McKinley G.H.* Instabilities in stagnation point flows of polymer solutions. // *Phys. Fluids.* 2013. V. 25:083104.
22. *Varshney A., Afik E., Kaplan Y., Steinberg V.* Oscillatory elastic instabilities in an extensional viscoelastic flow // *Soft Matter.* 2016. 12:2186–91.
23. *McKinley G.H., Armstrong R.C., Brown R.A.* The wake instability in viscoelastic flow past confined circular cylinders // *Philos. Trans. R. Soc. A.* 1993. 344:265–304.
24. *Vazquez-Quesada A., Ellero M.* SPH simulations of a viscoelastic flow around a periodic array of cylinders confined in a channel // *J. Non-Newton. Fluid Mech.* 2012. 167–68:1–8.
25. *Grilli M., Vazquez-Quesada A., Ellero M.* Transition to turbulence and mixing in a viscoelastic fluid flowing inside a channel with a periodic array of cylindrical obstacles. // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 110:174501.
26. *Varshney A., Steinberg V.* Elastic wake instabilities in a creeping flow between two obstacles // *Phys. Rev. Fluids.* 2017. 2:051301(R).

27. *Larson R.G.* Instabilities in viscoelastic flows // *Rheol. Acta.* 1992. 31:213–63.
28. *Shaqfeh E.S.G.* Purely elastic instabilities in viscometric flows // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1996. V. 28:129–85.
29. *Berti S., Bistagnino A., Boffetta G., Celani A., and Musacchio S.* Two-dimensional elastic turbulence // *Physical Review.* E2008. 77, 055306 R.
30. *Anupam Gupta, Dario Vincenzi.* Effect of polymer-stress diffusion in the numerical simulation of elastic turbulence // 7 Mar 2019. arXiv:1809.09648v2 [physics.flu-dyn].
31. *Berti S., Boffetta G.* Elastic waves and transition to elastic turbulence in a two-dimensional viscoelastic Kolmogorov flow // *Physical Review.* 2010 E 82, 036314.
32. *Dzanic V., From C.S., and Saurt E.* Conserving elastic turbulence numerically using artificial diffusivity // 20 Jun 2022. arXiv: 2203.12962v2 [physics.flu-dyn].
33. *Денисенко В.В., Фортова С.В.* Численное моделирование эластической турбулентности в ограниченной двумерной ячейке // *Сиб. журнал индустриальной матем.* 2023. Т. 26. № 1. С. 55–64.
34. *Zhang H. N., Li F. C., Cao Y., Yang J. C., Li X. B., Cai W. H.* Proceedings of the 6th International Conference on Fluid Mechanics, 2011, June 30–July 3, Guangzhou, China, p. 107.
35. *Годунов С.К., Денисенко В.В., Ключинский Д.В., Фортова С.В., Шенелев В.В.* Исследование энтропийных свойств линеаризованной редакции метода Годунова // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. № 4. С. 639–651.
36. *Alexander Kurganov, Eitan Tadmor.* New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection–Diffusion Equations // *J. of Comput. Phys.* 2000. V. 160. P. 241–282.
37. *Groisman A., Steinberg V.* *Nature.* 2000. 405, 53.
38. *Burghelca T., Segre E., Steinberg V.* Elastic turbulence in von Karman swirling flow between two disks // *Phys. Fluids.* 2007. 19, 053104.

## Numerical simulation of polymer solution flow for Kolmogorov flow

V. V. Denisenko<sup>a,\*</sup>, S. V. Fortova<sup>a</sup>, V. V. Lebedev<sup>b</sup>, I. V. Kolokolov<sup>b</sup>

<sup>a</sup> 123056 Moscow, 2nd Brestskaya str., 19/18, Institute of Design Automation of the Russian Academy of Sciences, Russia

<sup>b</sup> 142432 Chernogolovka, Moscow region, Ave. Akad Semenova, 1A, L.D. Landau Institute of Theoretical Physics of the Russian Academy of Sciences, Russia

\*e-mail: ned13@rambler.ru

Received: 22.02.2024

Revised: 22.02.2024

Accepted: 31.05.2024

**Abstract.** A numerical method approximating the equations of the dynamics of the polymer solution flow is proposed. The developed methodology is based on a hybrid approach. The hydrodynamic component of the flow is described by a system of Navier–Stokes equations and is numerically approximated by the linearized Godunov method. The polymer component of the flow is described by a system of equations for the polymer stretching vector  $\mathbf{R}$  and is numerically approximated by the Kurganov–Tadmor method. Using the constructed scheme, the problem of the stability of the polymer solution flow at low Reynolds numbers  $Re \sim 10$  in a square periodic cell under the action of an external periodic force is investigated. The instability of this type of flow, characterized by a violation of its laminarity, has been studied by numerical experiment. Spectral characteristics of the polymer solution at low Reynolds numbers are constructed.

**Keywords:** numerical modeling, elastic turbulence, hydrodynamic instability, Kolmogorov flow.