

# ЯВНО-НЕЯВНАЯ ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД С РАЗУПРОЧНЕНИЕМ<sup>1)</sup>

© 2024 г. А.В. Шевченко<sup>1,2</sup>, И.С. Никитин<sup>2</sup>, В.И. Голубев<sup>1,2,\*</sup>, И.Б. Петров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ (НИУ), Россия

<sup>2</sup> 123056 Москва, ул. 2-ая Брестская, 19/18, ИАП РАН, Россия

\*e-mail: golubev.vi@mipt.ru

Поступила в редакцию 04.03.2024 г.

Переработанный вариант 25.04.2024 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

Построена явно- неявная схема для численного решения определяющей системы уравнений упруговязкопластической модели сплошной среды с учетом эффекта разупрочнения. Схема включает явную аппроксимацию уравнений движения и неявную аппроксимацию определяющих соотношений, содержащих малый параметр времени релаксации в знаменателе нелинейных свободных членов. Получены точные корректировочные формулы для девиаторов напряжений после упругого шага расчета в случае линейной функции вязкости и нелинейного закона разупрочнения. Полученные решения неявной аппроксимации для девиаторов напряжений рассматриваемой упруговязкопластической системы допускают предельный переход при стремлении времени релаксации к нулю. Корректировочные формулы, полученные таким предельным переходом, можно трактовать как регуляризаторы численных решений некорректных упругопластических систем с разупрочнением. Библ. 25. Фиг. 4.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, упруговязкопластические среды, полулинейные гиперболические системы, явно-неявные схемы повышенного порядка.

DOI: 10.31857/S0044466924090094, EDN: WJSHRR

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Упруговязкопластическая (УВП) модель описывает нестационарное деформирование неупругой сплошной среды, которая проявляет вязкие свойства за пределом упругости (см. [1]–[3]). При фиксированном значении статического предела текучести, который определяет поверхность текучести Мизеса, динамический предел текучести зависит от скорости деформаций (см. [3], [4]). Дифференциальная часть нестационарных систем уравнений упруговязкопластических сред (см. [2], [4]) совпадает с системой уравнений динамической теории упругости, а нелинейные свободные члены определяются вязкопластическими составляющими скорости деформаций и содержат характерное время релаксации  $\tau$  в знаменателе.

В нестационарных процессах с характерным временем много большим, чем  $\tau$  упруговязкопластические среды ведут себя как упругопластические (УП) (см. [4], [5]), а при  $\tau \rightarrow 0$  УВП системы уравнений переходят в УП системы типа Прандтля–Рейса (см. [5]–[8]).

УП системы уравнений для моделей типа Прандтля–Рейса, к которым сводятся теории пластического течения, не являются дивергентными. Для описания сильных разрывов необходимо строить обобщенные решения, используя формулировки на основе вариационных неравенств (см. [7], [8]). В то же время УВП системы уравнений имеют дивергентную форму, которая позволяет строить консервативные численные методы их решения (см. [9]).

Обе эти модели допускают обобщения для учета эффекта изотропного кинематического упрочнения, который заключается в увеличении статического предела текучести с ростом интенсивности пластических (вязкопластических) деформаций (см. [2], [4]). В этом случае обе системы уравнений остаются гиперболическими, постановки начально-краевых задач динамического нагружения деформируемых тел являются корректными

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 19-71-10060), <https://rscf.ru/project/19-71-10060/>.

(см. [10], [11]). Обзор численных методов решения УП и УВП задач путем проектирования на поверхность текучести для УП и УВП моделей общего вида с упрочнением сделан в работе [12].

Однако некоторые материалы (например, различные геосреды) проявляют эффект разупрочнения, который заключается в уменьшении статического предела текучести с ростом пластических деформаций, что физически связано с увеличением числа микродефектов в единице объема при неупругом деформировании. В этом случае операторы УП теории на шаге по времени теряют свойство положительной определенности. Критерий Адамара корректности краевых задач нарушается, и пошаговые алгоритмы численного решения не работают (см. [13]).

Операторы УВП теории свободны от этого недостатка и допускают корректную постановку начально-краевых задач даже для случая разупрочняющегося материала. Современный обзор УП и УВП моделей, в том числе, включающих эффект разупрочнения, для описания механизмов повреждения и развития полос скольжения в мягких грунтах, а также методов численного моделирования этих эффектов сделан в работе [14]. В работе [15] исследованы неявные алгоритмы интегрирования по времени для УВП системы с упрочнением/разупрочнением, в которых для решения нелинейной системы неявной аппроксимации применяются итерационные методы различного типа (Ньютона–Рафсона, Катона, Ортиц–Симо).

Ранее был предложен явно-неявный численный метод решения динамической системы уравнений для упрочняющейся УВП среды, в том числе, повышенного порядка, и для общего вида функций вязкости (см. [16]–[18]). Этот метод подразумевает аналитическое решение нелинейной алгебраической системы уравнений неявной аппроксимации, содержащих в знаменателе параметр (в том числе, и малый) времени релаксации, без применения каких-либо итерационных процедур. В результате получены корректировочные формулы для девиаторов напряжений в случае идеальной (см. [16], [17]) и упрочняющейся (см. [18]) УВП среды.

В настоящей работе аналогичная явно-неявная схема построена для нестационарной модели разупрочняющейся УВП среды. Этот эффект описывается с помощью динамического уравнения для параметра разупрочнения, который растет с ростом интенсивности вязкопластических деформаций. Предел текучести при этом падает по заданному нелинейному закону в зависимости от параметра разупрочнения. В результате аналитического решения алгебраических уравнений неявной аппроксимации второго порядка получены формулы для корректировки девиаторов напряжений и параметра разупрочнения после упругого шага расчета.

Таким образом, достоинством УВП систем уравнений и полученных на их основе явно-неявных численных схем является то, что они отражают физику динамических процессов деформирования, обеспечивают регуляризацию недивергентных УП систем уравнений типа Прандтля–Рейса и допускают построение корректных численных методов для расчета деформирования материала с разупрочнением.

## 2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ УВП СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С РАЗУПРОЧНЕНИЕМ

Система уравнений изотропной УВП среды с разупрочнением при малых деформациях имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial t} &= \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \mathbf{e} : \mathbf{I}, \\ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial t} &= 2\mu \mathbf{e}' - 2\mu \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}}{\sigma_s(\kappa)} - 1 \right) \right\rangle / \tau, \\ \frac{\partial \kappa}{\partial t} &= \sqrt{\mathbf{e}'_{vp} : \mathbf{e}'_{vp}}, \sigma_s(\kappa) = \sigma_0 f(\kappa), \\ \mathbf{e}'_{vp} &= \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}}{\sigma_s(\kappa)} - 1 \right) \right\rangle / \tau, \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma \mathbf{I}, \sigma = (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I}) / 3, \\ \mathbf{e} &= (\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla) / 2, \mathbf{e}' = \mathbf{e} - (\mathbf{e} : \mathbf{I}) \mathbf{I} / 3, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений,  $\mathbf{s}$  – девиатор напряжений,  $\sigma$  – среднее напряжение,  $\mathbf{e}$  – тензор скорости деформации,  $\mathbf{e}'$  – девиатор тензора скорости деформации,  $\mathbf{e}'_{vp}$  – девиатор тензора скорости вязкопластической деформации,  $\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}$  – второй инвариант девиатора напряжений,  $\sigma_s(\kappa)$  – переменный предел текучести, зависящий от параметра разупрочнения  $\kappa$ ,  $\sigma_0$  – начальное значение предела текучести (до начала процесса разупрочнения),  $F \left( \frac{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}}{\sigma_s(\kappa)} - 1 \right)$  – в общем случае нелинейная функция вязкости,  $F \geq 0$ ,  $F(0) = 0$ ,  $\langle F \rangle = FH(F)$ ,  $H(F)$  – функция Хэвисайда,  $f(\kappa)$  – функция разупрочнения,  $f(0) = 1$ ,  $f'(\kappa) < 0$ ,  $\tau$  – характерное время релаксации компонент девиатора напряжений на поверхность текучести,  $\rho$  – плотность среды,  $\lambda$  и  $\mu$  – модули упругости Ламе.

Система уравнений (1) рассматривается в параллелепипедной области  $D : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z$ , где  $L_x, L_y, L_z$  – ее размеры вдоль соответствующих координатных осей. Дополнительно задаются следующие начальные условия:  $\mathbf{v}(x, y, z, t = 0) = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t = 0) = \mathbf{0}$ ,  $\kappa(x, y, z, t = 0) = 0$  и граничные условия  $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{n})|_{\partial D} = \mathbf{f}$ . Здесь  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали,  $\mathbf{f}$  – приложенная к границе области  $\partial D$  сила.

С учетом выражения для девиатора  $\mathbf{e}'_{vp}$  эволюционное уравнение для параметра разупрочнения примет вид

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} = \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\mathbf{s} : \mathbf{s}}}{\sigma_s(\kappa)} - 1 \right) \right\rangle / \tau.$$

### 3. НЕЯВНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАЗУПРОЧНЕНИЯ

Построим неявную аппроксимацию второго порядка уравнения для девиаторов тензора напряжений с нелинейным свободным членом из УВП системы с разупрочнением (1) путем аппроксимации правой части полулинейных уравнений в виде полусуммы слагаемых на верхнем и нижнем слоях по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{s}^{n+1} - \mathbf{s}^n}{\Delta t} &= 2\mu \frac{\mathbf{e}'^{n+1} + \mathbf{e}'^n}{2} - \frac{2\mu}{\tau} \left( \frac{\mathbf{s}^{n+1}}{\sqrt{\mathbf{s}^{n+1} : \mathbf{s}^{n+1}}} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\mathbf{s}^{n+1} : \mathbf{s}^{n+1}}}{\sigma_0 f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle + \frac{\mathbf{s}^n}{\sqrt{\mathbf{s}^n : \mathbf{s}^n}} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\mathbf{s}^n : \mathbf{s}^n}}{\sigma_0 f(\kappa^n)} - 1 \right) \right\rangle \right) / 2, \\ \frac{\kappa^{n+1} - \kappa^n}{\Delta t} &= \frac{1}{\tau} \left( \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\mathbf{s}^{n+1} : \mathbf{s}^{n+1}}}{\sigma_0 f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle + \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\mathbf{s}^n : \mathbf{s}^n}}{\sigma_0 f(\kappa^n)} - 1 \right) \right\rangle \right) / 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Индексами  $n$  и  $n + 1$  помечены значения искомым величин на верхнем и нижнем слоях разбиения по времени,  $\Delta t$  – шаг по времени. Эту нелинейную систему уравнений для безразмерных  $\bar{\mathbf{s}}^{n+1}$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{s}}^{n+1} &= \bar{\mathbf{s}}_e^{n+1} - \frac{1}{\delta} \left( \frac{\bar{\mathbf{s}}^{n+1}}{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^{n+1} : \bar{\mathbf{s}}^{n+1}}} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^{n+1} : \bar{\mathbf{s}}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle + \frac{\bar{\mathbf{s}}^n}{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^n : \bar{\mathbf{s}}^n}} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^n : \bar{\mathbf{s}}^n}}{f(\kappa^n)} - 1 \right) \right\rangle \right), \\ \kappa^{n+1} - \kappa^n &= \frac{1}{\beta_2} \left( \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^{n+1} : \bar{\mathbf{s}}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle + \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^n : \bar{\mathbf{s}}^n}}{f(\kappa^n)} - 1 \right) \right\rangle \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь введены безразмерные величины  $\bar{\mathbf{s}}^{n+1} = \mathbf{s}^{n+1} / \sigma_0$ ,  $\bar{\mathbf{s}}^n = \mathbf{s}^n / \sigma_0$ ,  $\bar{\mathbf{s}}_e^{n+1} = \mathbf{s}_e^{n+1} / \sigma_0$ , где  $\mathbf{s}_e^{n+1} = \mathbf{s}^n + \mu (\mathbf{e}'^{n+1} + \mathbf{e}'^n) \Delta t$  – компоненты девиатора после упругого шага по времени,  $\delta = \frac{\tau}{\Delta t} \frac{\sigma_0}{\mu}$  – безразмерный, возможно малый, параметр системы уравнений,  $\beta_2 = \frac{2\tau}{\Delta t}$  – еще один безразмерный, возможно, малый параметр системы уравнений. В данном построении, за исключением особо оговоренных случаев, мы не будем устанавливать ограничений на величины  $\delta$  и  $\beta_2$ .

Отметим, что с учетом проведенного ранее явного шага расчета уравнений движения и значений компонент скорости на верхнем временном слое, компоненты «упругого» девиатора  $\bar{\mathbf{s}}_e^{n+1}$  также можно считать известными, как и значения  $\bar{\mathbf{s}}^n$  на  $n$ -ом слое.

Нелинейную систему, из которой необходимо найти неизвестные компоненты девиатора напряжений  $\bar{\mathbf{s}}^{n+1}$  и параметр разупрочнения  $\kappa^{n+1}$  на верхнем слое, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{s}}^{n+1} \left( \delta + \frac{\left\langle F \left( \frac{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^{n+1} : \bar{\mathbf{s}}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle}{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^{n+1} : \bar{\mathbf{s}}^{n+1}}} \right) + \bar{\mathbf{s}}^n \frac{\left\langle F \left( \frac{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^n : \bar{\mathbf{s}}^n}}{f(\kappa^n)} - 1 \right) \right\rangle}{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^n : \bar{\mathbf{s}}^n}} &= \delta \bar{\mathbf{s}}_e^{n+1}, \\ \kappa^{n+1} = \kappa^n + \frac{1}{\beta_2} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^{n+1} : \bar{\mathbf{s}}^{n+1}}}{f(\kappa^{n+1})} - 1 \right) \right\rangle + \frac{1}{\beta_2} \left\langle F \left( \frac{\sqrt{\bar{\mathbf{s}}^n : \bar{\mathbf{s}}^n}}{f(\kappa^n)} - 1 \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

Сворачивая уравнение для девиаторов напряжений последовательно с  $\bar{\mathbf{s}}^{n+1}$ ,  $\bar{\mathbf{s}}^n$ ,  $\bar{\mathbf{s}}_e^{n+1}$ , получим нелинейную алгебраическую систему уравнений для сверток  $X = \sqrt{\bar{\mathbf{s}}^{n+1} : \bar{\mathbf{s}}^{n+1}}$ ,  $Y = \sqrt{\bar{\mathbf{s}}^{n+1} : \bar{\mathbf{s}}^n}$  и  $Z = \sqrt{\bar{\mathbf{s}}^{n+1} : \bar{\mathbf{s}}_e^{n+1}}$  с уже вычисленными правыми частями  $T = \sqrt{\bar{\mathbf{s}}^n : \bar{\mathbf{s}}^n}$ ,  $S = \sqrt{\bar{\mathbf{s}}^n : \bar{\mathbf{s}}_e^{n+1}}$ ,  $\Sigma = \sqrt{\bar{\mathbf{s}}_e^{n+1} : \bar{\mathbf{s}}_e^{n+1}}$ .

Из этой системы находим, что

$$\begin{aligned} \delta X + \left\langle F(X/f(\kappa^{n+1}) - 1) \right\rangle &= \delta \tilde{S}, \\ \beta_2 \kappa^{n+1} - \left\langle F(X/f(\kappa^{n+1}) - 1) \right\rangle &= \beta_2 \tilde{\kappa}^n, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\tilde{s}^{n+1} = \bar{s}_e^{n+1} - \frac{\bar{s}^n \langle F(T/f(\kappa^n) - 1) \rangle}{T \delta}, \quad \tilde{\kappa}^n = \kappa^n + \frac{1}{\beta_2} \langle F(T/f(\kappa^n) - 1) \rangle, \quad \tilde{S} = \sqrt{\bar{s}^{n+1} : \bar{s}^{n+1}}, \quad T = \sqrt{\bar{s}^n : \bar{s}^n}.$$

Нетрудно видеть, что промежуточный девиатор  $\tilde{s}^{n+1}$  и его свертка  $\tilde{S}$  вычисляются по результатам упругого шага по времени. Из (4) и (5) следует формула для искомых компонент девиатора и параметра упрочнения на верхнем временном слое в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{s}^{n+1} &= \frac{\delta \tilde{s}^{n+1}}{\left( \delta + \frac{\langle F(X/f(\kappa^{n+1}) - 1) \rangle}{X} \right)} = \frac{\tilde{s}^{n+1}}{\tilde{S}} X, \\ \kappa^{n+1} &= \tilde{\kappa}^n + \delta \left( \tilde{S} - X \right) / \beta_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, для полного определения компонент девиатора  $\bar{s}^{n+1}$  и параметра разупрочнения  $\kappa^{n+1}$  следует решить уравнение (5) и подставить результат в (6). После этого можно совершить предельный переход при  $\delta \rightarrow 0$  в формуле для промежуточного девиатора  $\tilde{s}^{n+1}$ , которая содержит малый параметр в знаменателе. Для этого первое уравнение в (5), справедливое для  $n + 1$ -го слоя по времени, перепишем для  $n$ -го слоя:

$$\delta T + \langle F(T/f(\kappa^n) - 1) \rangle = \delta \sqrt{\bar{s}^n : \bar{s}^n}. \quad (7)$$

Тогда в формуле для промежуточного девиатора, с учетом того, что  $\delta/\beta_2 = \sigma_0/(2\mu)$ , удается снять особенность при  $\delta \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{s}^{n+1} &= \bar{s}_e^{n+1} - \frac{\bar{s}^n}{\sqrt{\bar{s}^n : \bar{s}^n}} \left\langle \sqrt{\bar{s}^n : \bar{s}^n} - \sqrt{\bar{s}^n : \bar{s}^n} \right\rangle, \\ \kappa^{n+1} &= \tilde{\kappa}^n + \sigma_0 \left( \tilde{S} - X \right) / (2\mu), \\ \tilde{\kappa}^n &= \kappa^n + \sigma_0 \left\langle \sqrt{\bar{s}^n : \bar{s}^n} - \sqrt{\bar{s}^n : \bar{s}^n} \right\rangle / (2\mu). \end{aligned} \quad (8)$$

#### 4. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ ВЯЗКОСТИ И НЕЛИНЕЙНОГО РАЗУПРОЧНЕНИЯ

Для того чтобы решить нелинейную алгебраическую систему (5) и получить явные выражения для неизвестных величин  $\bar{s}^{n+1}$  и  $\kappa^{n+1}$ , необходимо конкретизировать функцию вязкости  $F(x)$  и функцию разупрочнения  $f(\kappa)$ .

Для получения аналитического решения примем простую линейную зависимость  $F(x) = x$ . При этом не будем ограничивать диапазон значений безразмерных параметров  $\beta_2 \geq 0$ ,  $\delta \geq 0$ . Также рассмотрим случай нелинейной функции  $f(\kappa)$ , которая фактически (в силу убывания) описывает процесс разупрочнения, так как при  $\alpha > 0$  имеем падение предела текучести:

$$f(\kappa) = \frac{1}{1 + \alpha \kappa}, \quad (9)$$

где величина параметра  $\alpha$  регулирует режим и скорость изменения предела текучести. В этих предположениях система (5) примет вид

$$\begin{aligned} \delta X + \langle X(1 + \alpha \kappa^{n+1}) - 1 \rangle &= \delta \tilde{S}, \\ \beta_2 \kappa^{n+1} - \langle X(1 + \alpha \kappa^{n+1}) - 1 \rangle &= \beta_2 \tilde{\kappa}^n. \end{aligned} \quad (10)$$

Ее аналитическое решение приводит к формулам для девиатора и параметра разупрочнения на верхнем слое по времени вида ( $\gamma = \alpha/\beta_2$ )

$$\begin{aligned} \bar{s}^{n+1} &= \frac{\tilde{s}^{n+1}}{\tilde{S}} \left( \tilde{S} - \frac{\sqrt{\left(1 + \alpha \tilde{\kappa}^n + \delta(1 - \gamma \tilde{S})\right)^2 + 4\gamma\delta \left(\tilde{S}(1 + \alpha \tilde{\kappa}^n) - 1\right) - \left(1 + \alpha \tilde{\kappa}^n + \delta(1 - \gamma \tilde{S})\right)}}{2\gamma\delta} \right), \\ \kappa^{n+1} &= \tilde{\kappa}^n + \frac{\delta}{\beta_2} \left( \frac{\sqrt{\left(1 + \alpha \tilde{\kappa}^n + \delta(1 - \gamma \tilde{S})\right)^2 + 4\gamma\delta \left(\tilde{S}(1 + \alpha \tilde{\kappa}^n) - 1\right) - \left(1 + \alpha \tilde{\kappa}^n + \delta(1 - \gamma \tilde{S})\right)}}{2\gamma\delta} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Данные формулы могут быть значительно упрощены, если предположить, что коэффициент разупрочнения  $\alpha$  мал, точнее справедливо  $\gamma \ll 1$ . Тогда итоговые упрощенные формулы будут иметь вид

$$\begin{aligned} X &\approx \tilde{S} - \frac{\tilde{S}(1 + \alpha\tilde{\kappa}^n) - 1}{(1 + \alpha\tilde{\kappa}^n + \delta(1 - \gamma\tilde{S}))}, \\ \bar{s}^{n+1} &\approx \frac{\tilde{s}^{n+1}}{\tilde{S}} \left( \tilde{S} - \frac{\tilde{S}(1 + \alpha\tilde{\kappa}^n) - 1}{(1 + \alpha\tilde{\kappa}^n + \delta(1 - \gamma\tilde{S}))} \right), \\ \kappa^{n+1} &\approx \tilde{\kappa}^n + \frac{\delta}{\beta_2} \frac{\tilde{S}(1 + \alpha\tilde{\kappa}^n) - 1}{(1 + \alpha\tilde{\kappa}^n + \delta(1 - \gamma\tilde{S}))}. \end{aligned} \tag{12}$$

Данные формулы допускают предельный переход при  $\delta \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \bar{s}^{n+1} &\approx \frac{\tilde{s}^{n+1}}{\tilde{S}(1 + \alpha\tilde{\kappa}^n)}, \\ \kappa^{n+1} &\approx \tilde{\kappa}^n + \frac{\sigma_0}{2\mu} \frac{\tilde{S}(1 + \alpha\tilde{\kappa}^n) - 1}{(1 + \alpha\tilde{\kappa}^n)}. \end{aligned} \tag{13}$$

При этом условие реализации УВП режима имеет вид  $\tilde{S}(1 + \alpha\tilde{\kappa}^n) - 1 \geq 0$ .

### 5. СХЕМА РАСЧЕТА УПРУГОГО ШАГА

Система уравнений задачи линейной теории упругости для изотропного тела имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1,2,3} A_{x_i}(\rho, \lambda, \mu) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{0}. \tag{14}$$

Вектор искомых функций  $\mathbf{u}$  включает в себя компоненты скорости смещения и компоненты тензора напряжений. Параметры  $\lambda, \mu$  и  $\rho$  определяются свойствами описываемой среды. В работе используется сеточно-характеристический метод (см. [19]). Используя метод расщепления по пространственным направлениям (см. [20]), исходная задача разделяется на три одномерные линейные гиперболические системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A_{x_i} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{15}$$

Каждая матрица  $A_{x_i}$  может быть представлена в виде

$$\Lambda = \Omega_{x_i} A_{x_i} \Omega_{x_i}^{-1}, \tag{16}$$

где матрицы  $\Omega_{x_i}$  и  $\Omega_{x_i}^{-1}$  вычисляются аналитически, а матрица  $\Lambda$  диагональная и состоит из собственных значений матрицы  $A_{x_i}$ . Рассмотрим случай однородной среды, когда матрицы  $A_{x_i}$  не зависят от координат. В дальнейшем в выкладках опустим индекс  $x_i$  у матриц. Переход от неизвестных функций  $\mathbf{u}$  к вектору из инвариантов Римана  $\boldsymbol{\omega} = \Omega \mathbf{u}$  приводит к системе независимых одномерных линейных уравнений переноса с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial x_i} = \mathbf{0}. \tag{17}$$

Решением линейного уравнения переноса с постоянным коэффициентом является произвольная функция  $\omega_j(t, x_i, x_k, x_l) = \phi(x_i - \lambda_j t, x_k, x_l)$ . Тогда справедливо следующее равенство:

$$\omega_j(t + \Delta t, x_i, x_k, x_l) = \omega_j(t, x_i - \lambda_j \Delta t, x_k, x_l). \tag{18}$$

Пусть  $\lambda_j > 0$ . Для  $\lambda_j < 0$  дальнейший вывод может быть проделан аналогично. Зафиксируем далее набор узлов  $(x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1})$  в пространстве координат и по известным значениям  $\omega_j$  в них восстановим однозначно коэффициенты полинома третьей степени  $P_3(x)$ . Здесь нижний индекс  $m$  означает номер узла в равномерной пространственной сетке вдоль координаты  $x_i$  с шагом  $h$ . Будем вычислять приближенно значения  $\omega_j$  на новом временном слое по формуле  $\omega_j(t + \Delta t, x_i, x_k, x_l) = \omega_j(t, x_i - \lambda_j \Delta t, x_k, x_l) \approx P_3(x_i - \lambda_j \Delta t)$ . Тогда конечное

выражение для искоемых функций может быть получено как  $\mathbf{u}^{n+1} = \Omega^{-1} \boldsymbol{\omega}^{n+1}$ , где компоненты вектора  $\boldsymbol{\omega}^{n+1}$  вычислены по формуле

$$\omega_m^{n+1} = \omega_m^n - \frac{K}{2} (\omega_{m+1}^n - \omega_{m-1}^n) + \frac{K^2}{2} (\omega_{m-1}^n - 2\omega_m^n + \omega_{m+1}^n) + \frac{K(K^2 - 1)}{6} (\omega_{m-2}^n - 3\omega_{m-1}^n + 3\omega_m^n - \omega_{m+1}^n), \quad (19)$$

где  $K = \lambda_j \Delta t / h$  – число Куранта. Условие устойчивости данного алгоритма  $K < 1$ . Случай неоднородных сред рассмотрен подробнее в работе [21]. Метод сохранения повышенного порядка аппроксимации схемы вблизи границ расчетной области предложен, например, в работе [22].

Таким образом, вычислительный алгоритм для решения динамической задачи УВП среды может быть сформулирован следующим образом:

- по известным значениям величин  $\mathbf{s}^n$ ,  $\sigma^n$  и  $\mathbf{v}^n$  на текущем временном слое выполняется упругий шаг по времени с использованием сеточно-характеристического метода;
- по формулам (11) производится корректировка полученных значений  $\mathbf{s}^{n+1}$  и вычисление значения  $\kappa^{n+1}$  на следующем временном слое.

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Данный вычислительный алгоритм был применен для решения полноволновых трехмерных динамических задач. На первом этапе были выбраны две задачи, для которых в случае УП среды без разупрочнения известны аналитические решения (см. [23]). Рассматривался параллелепипед размерами  $50 \times 50 \times 10\,000$  м, заполненный изотропной УВП средой. Параметры среды были следующие: скорость продольных волн  $C_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = 4500$  м/с, скорость поперечных волн  $C_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = 2250$  м/с, плотность  $\rho = 2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $\sigma_0 = 112\,500$  Па. Задача решалась на равномерной расчетной сетке с шагом 5 м по пространству и 1 мс по времени, что соответствует выполнению условию устойчивости Куранта.

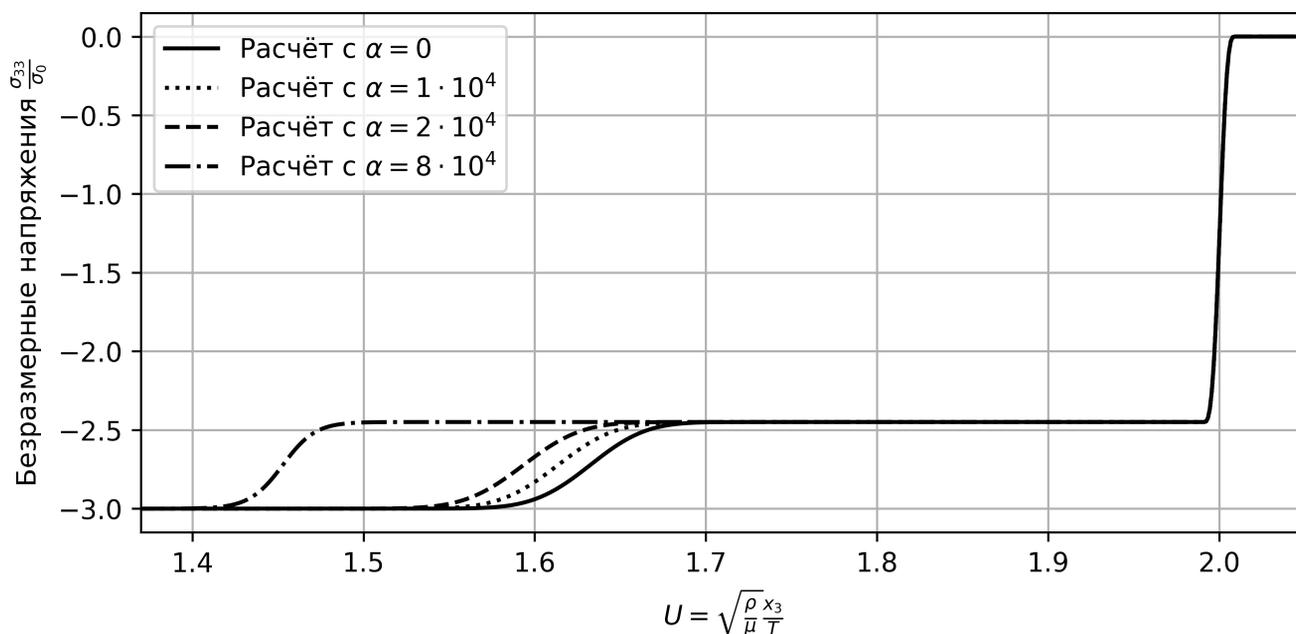
К одной границе расчетной области в начале расчета прикладывалось постоянное сжимающее напряжение величиной 337 500 Па, которое в дальнейшем расчете удерживалось постоянным. Известно аналитическое решение данной квазиодномерной задачи: для упругой среды – распространение продольной волны со скоростью  $C_p$ , для упругопластической среды без разупрочнения – распространение продольной волны со скоростью  $C_p$  и пластической волны со скоростью  $C_f = \sqrt{\frac{\lambda+(2/3)\mu}{\rho}} \approx 3674$  м/с. Картины пространственного распределения напряжения  $\sigma_{33}$  в среде через 2 с от начала расчета приведены на фиг. 1. При этом значение параметра  $\delta$  было задано равным 1. Достаточно точно разрешается разрыв в решении, соответствующий продольной волне, а также фронт пластической волны. Отметим, что разупрочнение материала приводит к снижению скорости распространения пластической волны, что видно по отставанию ее фронта при увеличении параметра  $\alpha$ .

Далее была решена задача о совместной нормальной  $\sigma_n = 249\,107$  Па и тангенциальной  $\sigma_\tau = -72\,322$  Па нагрузках. Все параметры модели оставались неизменными, кроме обновленного значения  $C_s = 2598$  м/с. Результаты расчетов представлены на фиг. 2. Полученные численные решения воспроизводят все типы упругих и пластических волн.

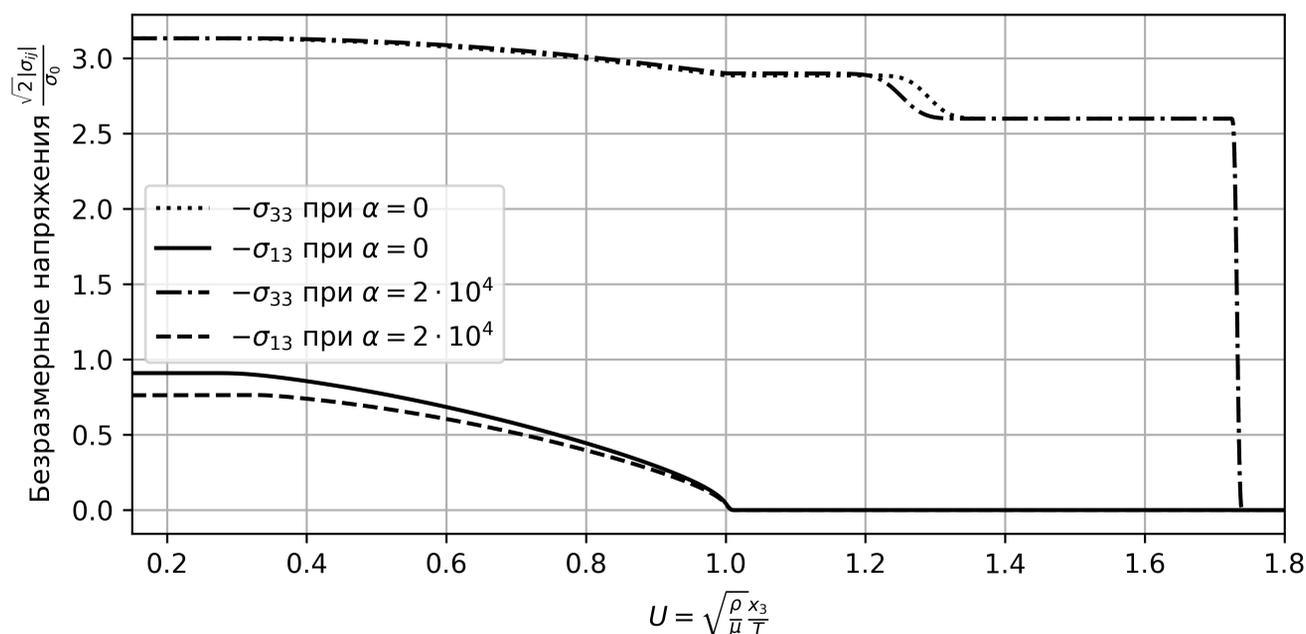
В дальнейшем была решена задача о нагружении нормальной нагрузкой полупространства  $z \geq 0$ , содержащего включение из отличающегося по упругим характеристикам материала. Выбор данной постановки задачи обусловлен общезначимыми соображениями о наличии концентрации напряжений вблизи контрастных границ, что должно привести к локализованному в пространстве переходу материала в пластическое состояние. Размеры рассматриваемой области были равны  $2000 \times 2000 \times 1700$  м. Параметры вмещающего массива  $C_p = 4800$  м/с,  $C_s = 2400$  м/с,  $\rho = 3125$  кг/м<sup>3</sup>. В центральной части области  $x \in [700, 1300]$  м,  $y \in [700, 1300]$  м,  $z \in [700, 1300]$  м было задано кубическое включение с параметрами  $C_p = 300$  м/с,  $C_s = 150$  м/с,  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Величина приложенной нормальной нагрузки задавалась соотношением

$$\sigma_n = A \times \begin{cases} t/t_0, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 1, & t > t_0, \end{cases} \quad (20)$$

где  $t_0 = 51$  мс, амплитуда  $A = -250\,000$  Па. Использовалось разбиение по пространству с шагом 5 м и по времени с шагом 1 мс. Всего было рассчитано 800 шагов по времени. Во всей расчетной области считались заданными параметры  $\sigma_0 = 112\,500$  Па,  $\tau = 112.5$ . На фиг. 3 и фиг. 4 представлены пространственные распределения параметра разупрочнения  $\kappa$  на момент окончания расчета. На фиг. 3 размытая серая зона вокруг кубического

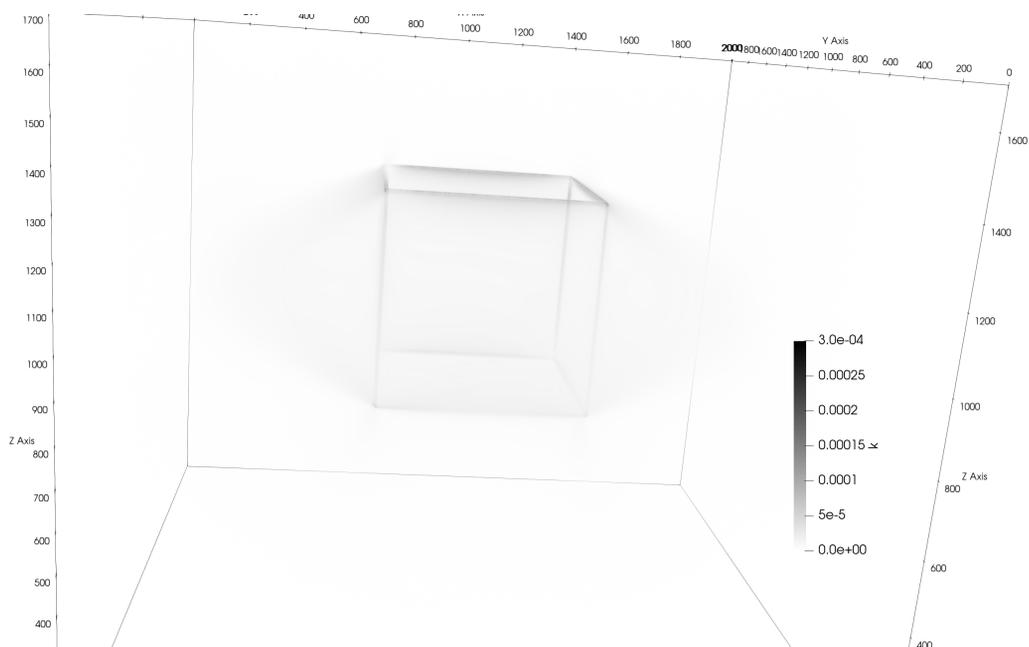


Фиг. 1. Распределение  $\sigma_{33}$  в УВП среде под нормальной нагрузкой через 2 с от момента ее приложения.

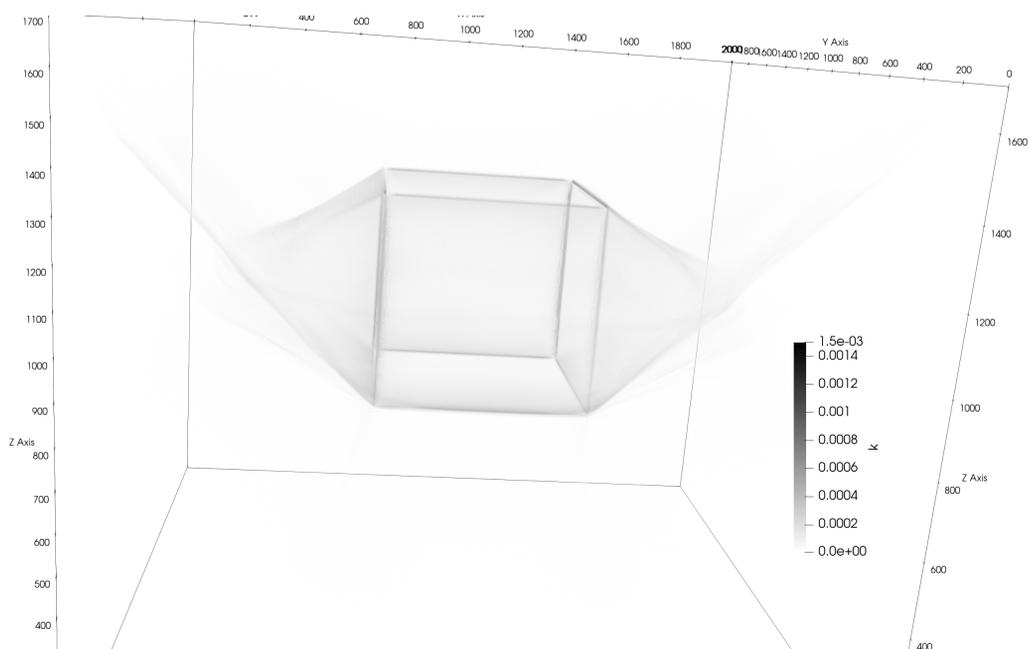


Фиг. 2. Распределение  $\sigma_{33}$  и  $\sigma_{13}$  в УВП среде под смешанной нагрузкой через 2 с от момента ее приложения.

включения в окружающей УВП среде без разупрочнения ( $\alpha = 0$ ) представляет собой область вязкопластических деформаций ( $\kappa > 0$ ). Она связана с релаксацией девиаторов напряжений на поверхность текучести Мизеса в некотором объеме вокруг включения, которое является концентратором напряжений. На фиг. 4 при  $\alpha > 0$  (разупрочнение) хорошо видны сформировавшиеся плоскости скольжения, идущие от ребер куба. Этот эффект локализации неупругих деформаций в узких линиях (2D задачи) и плоскостях скольжения (3D задачи) характерен для сред с разупрочнением (см. [24]).



Фиг. 3. Итоговое распределение параметра разупрочнения  $\kappa$  ( $\alpha = 0$ ).



Фиг. 4. Итоговое распределение параметра разупрочнения  $\kappa$  ( $\alpha = 2 \times 10^4$ ).

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе был рассмотрен процесс деформирования УВП среды под действием внешней нагрузки. Отличительной особенностью рассматриваемой задачи являлся учет процесса разупрочнения материала. В общем случае произвольных функций вязкости и разупрочнения предложена процедура построения явно- неявной схемы. Подход, основанный на применении неявной схемы для дискретизации определяющих соотношений, содержащих малый параметр времени релаксации в знаменателе нелинейных свободных членов, позволил свести задачу к решению нелинейной алгебраической системы уравнений на неизвестные значения девиаторов напряжений и параметра разупрочнения.

Для специального случая линейной функции вязкости и нелинейной функции разупрочнения специального вида полученная система уравнений разрешена аналитически, что позволило построить явный расчетный алгоритм. Он опирается на численное решение определяющей системы уравнений линейной изотропной теории упругости. Для этого был использован сеточно-характеристический метод на расширенном шаблоне. Отметим, что последующая корректировочная процедура выполняется независимо в каждом узле расчетной сетки. Данное свойство построенного вычислительного алгоритма, например, не снижает эффективность использования современных CPU (см. [25]) и технологий параллельных вычислений (OpenMP, MPI).

Построенные вычислительные алгоритмы были успешно применены для численного решения трех трехмерных динамических задач: о нормальной нагрузке УВП однородного полупространства, о смешанной нагрузке УВП однородного полупространства и о нормальной нагрузке неоднородного УВП полупространства.

Отметим, что в реальных геоматериалах (грунтах) предел текучести не монотонен, с начальным участком упрочнения, затем разупрочнения и выходом на конечную асимптоту (см. [14]). Поэтому при моделировании реальных материалов необходимо в общем случае использовать комбинацию из корректировочных формул для упрочнения и разупрочнения. Также в используемой нами классической модели не учитываются объемные вязкопластические эффекты, проявляющиеся в реальных грунтах (см. [14]). Это можно отнести к ограничениям разработанного вычислительного алгоритма. В настоящей работе мы хотели остаться в рамках классической УВП модели, при этом обобщение на более сложные УВП модели может быть выполнено аналогично. К недостаткам текущей программной реализации можно отнести тот факт, что расчет упругого решения и его последующая корректировка реализованы отдельными циклами по узлам расчетной сетки, что может незначительно увеличивать расчетное время. Однако данное архитектурное решение позволило напрямую использовать имеющиеся программные наработки по линейно упругой задаче.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. М.: Наука, 1962. 431 с.
2. *Кукуджанов В.Н.* Вычислительная механика сплошных сред. М.: Физматлит, 2008. 320 с.
3. *Perzyna P.* *Fundamental problems in viscoplasticity* // *Adv. Appl. Mech.* 1966. V. 9. С. 243–377.
4. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 310 с.
5. *Коларов Д., Балтов А., Бончева Н.* Механика пластических сред. М.: Мир, 1979. 302 с.
6. *Кукуджанов В.Н.* *Распространение волн в упруговязкопластических материалах с диаграммой общего вида* // *Механика твердого тела.* 2001. № 5. С. 96–111.
7. *Дюво Г., Лионс Н.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
8. *Садовский В.М.* Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред. М., 1997. 208 с.
9. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001. 600 с.
10. *Wilkins M.L.* *Computer simulation of dynamic phenomena.* Berlin-Heidelberg-New-York, 1999. 264 с.
11. *Simo J.C., Hughes T.J.* *Elastoplasticity and viscoplasticity – computational aspects.* New York: Springer, 1988.
12. *Ortiz M., Simo J.C.* *An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations* // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 1986. V. 23. № 3. P. 353–366.
13. *Бураго Н.Г.* *Моделирование разрушения упругопластических тел* // *Вычисл. механика сплошных сред.* 2008. Т. 1. № 4. С. 5–20.

14. *Urmi Z.A., Saeidi A., Chavali R., Yerro A. Failure mechanism, existing constitutive models and numerical modeling of landslides in sensitive clay: a review // Geoenvironmental Disasters. 2023. V. 10. P. 14.*
15. *Yin Z., Li J., Jin Y., Liu, Feng Y. Estimation of Robustness of Time Integration Algorithms for Elasto-Viscoplastic Modeling of Soils // Inter. J. Geomechanics. 2019. V. 19. № 2. P. 0401819.*
16. *Голубев В.И., Никитин И.С., Бурого Н.Г., Голубева Ю.А. Явно- неявные схемы расчета динамики упруговязко-пластических сред с малым временем релаксации // Дифференц. ур-ния. 2023. Т. 59. № 6. С. 803–813.*
17. *Голубев В.И., Никитин И.С. Уточненные схемы расчета динамики упруговязкопластических сред // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 10. С. 1674–1686.*
18. *Golubev V.I., Nikitin I.S., Mi X. Numerical schemes of higher approximation orders for dynamic problems of elastoviscoplastic media // J. Siberian Federal University. Math. and Phys. 2024. V. 17. № 1. P. 8–17.*
19. *Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы: учебное пособие для вузов. М.: Юрайт, 2023.*
20. *Golubev V.I., Shevchenko A.V., Petrov I.B. Raising convergence order of grid-characteristic schemes for 2D linear elasticity problems using operator splitting // Comput. Res. and Model. 2022. V. 14. Iss. 4. P. 899–910.*
21. *Khokhlov N.I., Petrov I.B. High-order grid-characteristic method for systems of hyperbolic equations with piecewise constant coefficients // Diff. Equat. 2023. V. 59. P. 985–997.*
22. *Shevchenko A.V., Golubev V.I. Boundary and contact conditions of higher order of accuracy for grid-characteristic schemes in acoustic problems // Comput. Math. and Math. Phys. 2023. V. 63. P. 1760–1772.*
23. *Bleich H.H., Nelson I.I. Plane waves in an elastic-plastic half-space due to combined surface pressure and shear // ASME J. Appl. Mech. 1966. V. 33. № 1. P. 149–158.*
24. *Бурого Н.Г., Никитин И.С. Алгоритмы сквозного счета для процессов разрушения // Компьют. исслед. и моделирование. 2018. Т. 10. № 5. С. 645–666.*
25. *Furgailo V., Ivanov A., Khokhlov N. Research of techniques to improve the performance of explicit numerical methods on the CPU // 2019 Ivannikov Memorial Workshop (IVMEM), Velikiy Novgorod, Russia, 2019. P. 79–85.*

## An explicit-implicit numerical scheme for problems of dynamics of elastic-viscoplastic media with softening

A. V. Shevchenko<sup>a,b</sup>, I. S. Nikitin<sup>b</sup>, V. I. Golubev<sup>a,b,\*</sup>, I. B. Petrov<sup>a</sup>

<sup>a</sup> 141701 Dolgoprudny, Moscow region, Institutsky Lane, 9, Moscow Institute of Physics and Technology (NRU), Russia

<sup>b</sup> 123056 Moscow, 2nd street, Brestskaya, 19/18, IAP RAS, Russia,

\*e-mail: golubev.vi@mipt.ru

Received: 04.03.2024

Revised: 25.04.2024

Accepted: 31.05.2024

**Abstract.** An explicit-implicit scheme is constructed for the numerical solution of the defining system of equations of the elastic-viscoplastic continuum model, taking into account the softening effect. The scheme includes an explicit approximation of the equations of motion and an implicit approximation of the defining relations containing a small relaxation time parameter in the denominator of the free terms. Precise correction formulas for stress deviators are obtained after the elastic calculation step in the case of the linear viscosity function and the nonlinear law of softening. The obtained solutions of the implicit approximation for the stress deviators of the elastic-viscoplastic system under consideration allow for a limiting transition when the relaxation time tends to zero. Correction formulas, obtained by such a limiting transition, can be interpreted as regularizers of numerical solutions of incorrect elastoplastic systems with a softening effect.

**Keywords:** mathematical modeling, elastic-viscoplastic media, semi-linear hyperbolic systems, explicit-implicit schemes of increased order.