

О ЧИСЛЕННОМ ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕСКОЛЬКИХ СТАЦИОНАРНЫХ АКТЬЮАТОРОВ

© 2024 г. И. Е. Михайлов^{1,2,*}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 105005 Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия

*e-mail: mikh_igor@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2024 г.

Переработанный вариант 17.03.2024 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

Ставится задача перевести струну из начального возмущенного состояния в состояние покоя за минимальное время. Гашение колебаний струны осуществляется с помощью нескольких стационарных актьюаторов. Минимизируемым функционалом является некоторый интеграл. Управление гашением колебаний осуществляется с помощью функции, входящей в правую часть гиперболического уравнения, описывающего поперечные колебания струны, и моделирующей действия актьюаторов. Разработаны вычислительные алгоритмы решения задачи на основе сеточного метода и градиентного метода отыскания минимума функций многих переменных, причем градиент вычисляется с помощью метода быстрого автоматического дифференцирования, предложенного Ю.Г. Евтушенко. Приводятся примеры расчетов гашения колебаний струны с помощью различного числа актьюаторов. Библ. 6. Фиг. 6.

Ключевые слова: гашение колебаний струны, быстрое автоматическое дифференцирование.

DOI: 10.31857/S0044466924090084, **EDN:** WJXWRJ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поперечные колебания струны описываются гиперболическим уравнением

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g(t, x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad a > 0. \quad (1)$$

Начальные отклонение и скорость поперечного перемещения струны

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

будем рассматривать как заданные начальные возмущения. В качестве граничных условий возьмем условия закрепления

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \quad (3)$$

Задачу гашения колебаний струны сформулируем следующим образом: требуется найти функцию $g(t, x)$ из класса $L_2(0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l)$, позволяющую перевести струну из состояния (2) в состояние покоя:

$$u|_{t=T} = 0, \quad u_t|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

за минимальное время $T > 0$. Заметим, что условие (4) равносильно обращению следующего интеграла в нуль:

$$I(T) = \int_0^l (u^2 + u_t^2) dx = 0. \quad (5)$$

Методы гашения колебаний элементов сложных механических систем начали интенсивно развиваться в 70-х годах XX в. Наиболее значимыми были работы А. Бутковского [1], Д. Рассела [2], Д. Лагнесса [3], С.Ж. Асланова, И.Е. Михайлова, Л.А. Муравья [4], в которых рассматривалась задача гашения колебаний струны, и получены условия существования решения задачи.

В работе Бутковского [1] рассматривался точечный стационарный актюатор, помещенный в точку x_0 . Им было показано, что существует всюду плотное на $\{0, l\}$ множество точек $\{x_0\}$ таких, что помещенный в них актюатор не позволяет решить задачу гашения колебаний, например, на множестве решений уравнения

$$\sin \frac{k\pi x_0}{l} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

являющихся узлами стоячих волн решений

$$z_k(t, x) = (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t) \sin \frac{k\pi x_0}{l}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

однородного уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad a > 0,$$

где $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$. Поэтому при способе управления, рассмотренном в работе [1], задача может быть неразрешимой.

В работе Рассела [2] функция $g(t, x)$ представлялась в виде $g(t, x) = u(t) f(x)$. Были получены условия на функцию $f(x)$, которые позволяют решить задачу гашения колебаний с помощью одной управляющей функции $u(t)$. Однако функция $f(x)$ распределена на всем интервале ($\text{supp } f(x) = (0, l)$), поэтому для решения задачи управление должно осуществляться вдоль всей длины струны, что не позволяет использовать результаты работы [2] в практических приложениях при достаточно длинной струне.

В работе Лагнесса [3] было показано, что колебания можно погасить с помощью бесконечного числа управляющих функций $u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t), \dots$, если $g(t, x)$ представима в виде бесконечного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) f_k(x)$, определенных на небольшом участке струны $[\alpha, \beta]$, причем, если $\beta - \alpha$ стремится к нулю, то амплитуда управляющей функции стремится к бесконечности, что указывает на невозможность использования управляющей функции Бутковского.

Все эти ученые использовали метод разделения переменных Фурье и сводили задачу к тригонометрической проблеме моментов – бесконечной системе интегральных уравнений. Их результаты основывались на условии Левинсона (см. [5]), установившим, что гарантированно погасить колебания струны можно за время $T = 2l/a$, где l – длина струны, a – скорость распространения возмущений вдоль струны.

В 2006 г. С. Асланов, И. Михайлов и Л. Муравей показали, что если актюатор движется с постоянной скоростью $v \geq a$ на небольшом участке струны, то погасить колебания струны можно за время $T = 2l/v$, т.е. меньшее времени Левинсона.

Отметим, что все ограничения работ [1]–[4] сильно затрудняют использование результатов этих работ в практических приложениях.

Основная идея настоящей работы заключается в использовании нескольких стационарных актюаторов, действующих на небольших участках струны шириной δ . Будем искать функцию $g(t, x)$ в виде

$$g(t, x) = \sum_{i=1}^p W_i(t) f_i(x), \quad (6)$$

где W_i – управляющие функции,

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & |x - x_i| \leq \delta/2, \\ 0, & |x - x_i| > \delta/2, \end{cases}$$

x_i – центры отрезков, в которых помещаются актюаторы.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ

2.1. Численный алгоритм решения начально-краевой задачи для волнового уравнения

Для того чтобы численно решить начально-краевую задачу (1)–(3), аппроксимируем ее явной конечно-разностной схемой второго порядка аппроксимации по обоим переменным. В области решения введем расчетную сетку. Зададим натуральные числа M и N и разобьем рассматриваемые отрезки $\{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ на промежутки точками x_m и t_n соответственно:

$$\omega_h = \{x_m = mh, m = \overline{0, M}\}, \quad \omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0, N}\},$$

где $h = \frac{l}{M}$ и $\tau = \frac{T}{N}$ – шаги сетки по переменным x и t соответственно. В качестве сетки $D_{h,\tau}$ используем совокупность точек пересечения прямых $\omega_h \times \omega_\tau$. Введем вместо точного решения $u(x_m, t_n)$ сеточную функцию

$\{U_m^n\}_{\substack{m=\overline{0,M} \\ n=\overline{0,N}}}$, которая будет удовлетворять следующей конечно-разностной схеме:

$$\frac{U_m^{n+1} - 2U_m^n + U_m^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{h^2} + g_m^n, \quad m = \overline{1, M-1}, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (7)$$

Она аппроксимирует уравнение (1) со вторым порядком по h и τ .

Выразим U_m^{n+1} :

$$U_m^{n+1} = 2U_m^n - U_m^{n-1} + S(U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n) + \tau^2 g_m^n, \quad \text{где } S = \frac{\tau^2 a^2}{h^2}.$$

Аппроксимируем начальные условия (2). Первое начальное условие запишется в виде

$$U_m^0 = \varphi_m. \quad (8)$$

Для того чтобы аппроксимировать второе начальное условие (2) со вторым порядком по h и τ , введем фиктивный слой по времени $t = -\tau$. Значения сеточной функции на этом слое обозначим U_m^{-1} . Будем полагать, что уравнение (1) справедливо на промежутке $[-\tau; 0]$, т.е. уравнение (7) выполняется при $n = 0$. С использованием “замечательного свойства средней точки” выпишем выражение, аппроксимирующее второе начальное условие (2) со вторым порядком аппроксимации, и выпишем разностную схему (8) на слое $n = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{U_m^1 - U_m^{-1}}{2\tau} &= \psi_m, \\ \frac{U_m^1 - 2U_m^0 + U_m^{-1}}{\tau^2} &= a^2 \frac{U_{m+1}^0 - 2U_m^0 + U_{m-1}^0}{h^2} + g_m^0. \end{aligned}$$

Исключим из этих двух уравнений U_m^{-1} .

Тогда получим с учетом (9) выражение для U_m^1 :

$$U_m^1 = \frac{S}{2} (\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1}) + \varphi_m + \tau\psi_m + \frac{\tau^2}{2} g_m^0. \quad (9)$$

В результате конечно-разностная аппроксимация уравнения (1) и начальных условий (2) имеет второй порядок аппроксимации по обоим переменным.

Краевые условия имеют вид

$$U_0^n = U_M^n = 0, \quad n = \overline{0, N}. \quad (10)$$

Легко показать, что конечно-разностная схема (8) устойчива по Нейману при условии

$$S \leq 1 \quad \text{или} \quad \frac{a\tau}{h} \leq 1. \quad (11)$$

2.2. Численный алгоритм выбора оптимального управления

Для численного расчета интеграла (5) воспользуемся квадратурной формулой трапеций, которая с учетом краевых условий (10) имеет вид

$$I(T) = \sum_{m=1}^{M-1} \left((U_m^N)^2 + \left(\frac{U_m^N - U_m^{N-1}}{\tau} \right)^2 \right) h. \quad (12)$$

Условием гашения будем полагать выполнение неравенства $I(T) \leq \varepsilon$, где ε – заданная точность вычислений.

Аппроксимируем управляющие функции $W_i(t)$, $i = \overline{1, p}$, кусочно-постоянными функциями такими, что $\forall t \in [t_n, t_{n+1})$, $n = \overline{0, N-1}$, $W_i(t) = W_i^n = \text{const}$.

Тогда интеграл (12) будет являться функцией переменных $W_1^0, \dots, W_1^N, W_2^0, \dots, W_2^N, \dots, W_p^0, \dots, W_p^N$:

$$I(T) = \Phi(W_1^0, \dots, W_1^N, W_2^0, \dots, W_2^N, \dots, W_p^0, \dots, W_p^N). \quad (13)$$

Оптимальные значения W_i^n , минимизирующие (13) с заданной точностью ε и являющиеся искомым решением задачи, будем искать методом градиентного спуска

$$(W_i^j)^{k+1} = (W_i^j)^k - \alpha_k \text{grad } \Phi(W_i^j).$$

Градиент будем находить с помощью метода быстрого автоматического дифференцирования, предложенного Ю.Г. Евтушенко (см. [6]). Опишем идею метода быстрого автоматического вычисления градиента функции $I(U, W)$, где U – решение некоторой начально-краевой задачи $G(U, W) = 0$, а W – управление. Пусть связи $G(U, W) = 0$ неявным образом определяют решение $U = U(W)$.

Тогда

$$G_U \frac{dU}{dW} + G_W = 0. \tag{14}$$

Из уравнения (14) следует

$$G_U \frac{dU}{dW} = -G_W.$$

Градиент $I(U, W)$ по управлению W определяется следующим образом:

$$\frac{dI}{dW} = I_U \frac{dU}{dW} + I_W.$$

Введем функцию Лагранжа

$$L = I(U(W), W) + pG(U(W), W).$$

Стационарные точки L определяются из равенств

$$\begin{aligned} L_U &= I_U + pG_U = 0, \\ L_W &= I_W + pG_W = 0, \\ L_p &= G(U(W), W) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Из первого уравнения системы (15) с учетом (14) выражение для градиента примет вид

$$\frac{dI}{dW} = I_U \frac{dU}{dW} + I_W = I_W - pG_U \frac{dU}{dW} = I_W + pG_W.$$

А так как $I_W = 0$, то

$$\frac{dI}{dW} = pG_W. \tag{16}$$

Итак, будем искать минимум функционала (12), причем конечно-разностное уравнение, начальные и краевые условия рассматриваются как связи. Выпишем функцию Лагранжа, учитывая связи с помощью переменных множителей Лагранжа P_m^n :

$$\begin{aligned} L = & \sum_{m=1}^{M-1} \left((U_m^N)^2 + \left(\frac{U_m^N - U_m^{N-1}}{\tau} \right)^2 \right) h + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=2}^N P_m^n \left(2U_m^{n-1} - U_m^{n-2} + S(U_{m+1}^{n-1} - 2U_m^{n-1} + U_{m-1}^{n-1}) - \right. \\ & \left. - U_m^n + \tau^2 g_m^{n-1} \right) + \sum_{m=0}^M P_m^0 (\varphi_m - U_m^0) + \sum_{m=1}^{M-1} P_m^1 \left(\frac{S}{2} (\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1}) + \varphi_m + \tau \psi_m + \frac{\tau^2}{2} g_m^0 - U_m^1 \right) + \\ & + \sum_{n=1}^N P_0^n (0 - U_0^n) + P_M^n (0 - U_M^n). \end{aligned}$$

Стационарные точки функции Лагранжа находятся из соотношений $\frac{\partial L}{\partial U_m^n} = 0$.

Тогда множители Лагранжа P_m^n определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} P_m^N &= 2hU_m^N + \frac{2h}{\tau^2} (U_m^N - U_m^{N-1}), \quad m = \overline{1, M-1}, \\ P_m^{N-1} &= 2P_m^N + S(P_{m-1}^N - 2P_m^N + P_{m+1}^N) - \frac{2h}{\tau^2} (U_m^N - U_m^{N-1}), \quad m = \overline{1, M-1}, \\ P_m^n &= 2P_m^{n+1} - P_m^{n+2} + S(P_{m-1}^{n+1} - 2P_m^{n+1} + P_{m+1}^{n+1}), \quad m = \overline{1, M-1}, \quad n = \overline{1, N-2}, \\ P_0^n &= 0; \quad P_M^n = 0, \quad n = \overline{0, N}, \\ P_m^1 &= 0, \quad m = \overline{1, M-1}, \\ P_m^0 &= 0, \quad m = \overline{1, M-1}. \end{aligned} \tag{17}$$

Положим в (6) ширину актьюаторов $\delta = h$. Тогда $\text{grad } \Phi (W_i^j)$ находится по формулам

$$\frac{\partial \Phi}{\partial W_m^0} = \begin{cases} \frac{\tau^2}{2} P_m^1, & m = m_1 \vee \dots \vee m = m_p, \\ 0, & m \neq m_1 \wedge \dots \wedge m \neq m_p, \end{cases} \quad m = \overline{1, M-1}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial W_m^n} = \begin{cases} \tau^2 P_m^{n+1}, & m = m_1 \vee \dots \vee m = m_p, \\ 0, & m \neq m_1 \wedge \dots \wedge m \neq m_p, \end{cases} \quad m = \overline{1, M-1}, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (19)$$

Здесь m_i – номера точек отрезка $[0, l]$, в которых помещены центры актьюаторов.

Если, например, $S = 1/4$ и $h \rightarrow 0$, то значения P_m^n являются решениями уравнения

$$P_{tt} = P_{xx} \quad (20)$$

с краевыми условиями

$$P|_{x=0} = 0, P|_{x=l} = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (21)$$

и начальными условиями

$$P|_{t=T} = \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial t}, \quad P_t|_{t=T} = \frac{1}{a} U(T, x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (22)$$

Легко видеть, что эта задача аналогична задаче (1)–(3).

Таким образом, чтобы вычислить, достаточно один раз решить задачу (20)–(22) с использованием разностных уравнений (17) и сразу выписать значение градиента по формулам (18), (19).

3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

3.1. Сравнение результатов прямого расчета с аналитическим решением

Для проверки правильности прямого расчета был проведен расчет начально-краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad u > 0 \\ u|_{t=0} &= \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < l, \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u|_{x=l} = 0, \end{aligned}$$

которая имеет аналитическое решение $u(t, x) = \cos \frac{\pi a t}{l} \sin \frac{\pi x}{l}$.

Расчет проводился со следующими входными параметрами: $l = 1, T = 2, a = 1, M = 20, N = 80$. Результаты численного расчета совпали с аналитическим решением с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

3.2. Примеры расчетов для различного числа актьюаторов

Пример 1. Рассматривалась задача гашения колебаний струны с использованием одного актьюатора. В расчете принималось $a = 1, l = 1$, начальное положение центра актьюатора

$$x_1 = \frac{3}{16}, \quad h = \frac{1}{16}, \quad \tau = \frac{1}{32}.$$

Начальные возмущения задавались функциями $\varphi(x) = \sin 2\pi x, \psi(x) = 0$. Точность вычислений $\varepsilon = 10^{-4}$. Процесс гашения колебаний и оптимальное управление $W_1(t)$, позволяющее погасить начальные колебания за время $T = 2.0$, показаны на фиг. 1 и 2 соответственно.

Пример 2. Были проведены расчеты с теми же параметрами, что и в примере 1, но с использованием двух актьюаторов. Начальные положения центров актьюаторов

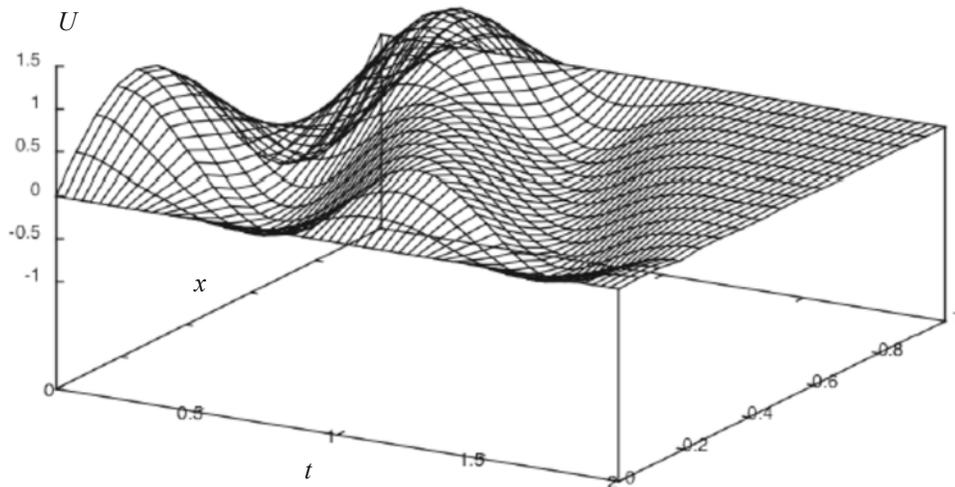
$$x_1 = \frac{3}{16}, \quad x_2 = \frac{11}{16}, \quad h = \frac{1}{16}, \quad \tau = \frac{1}{32}.$$

За время $T = 1.2$ происходит практически полное гашение колебаний. Процесс гашения колебаний и графики оптимальных управлений $W_1(t), W_2(t)$ представлены на фиг. 3 и 4 соответственно.

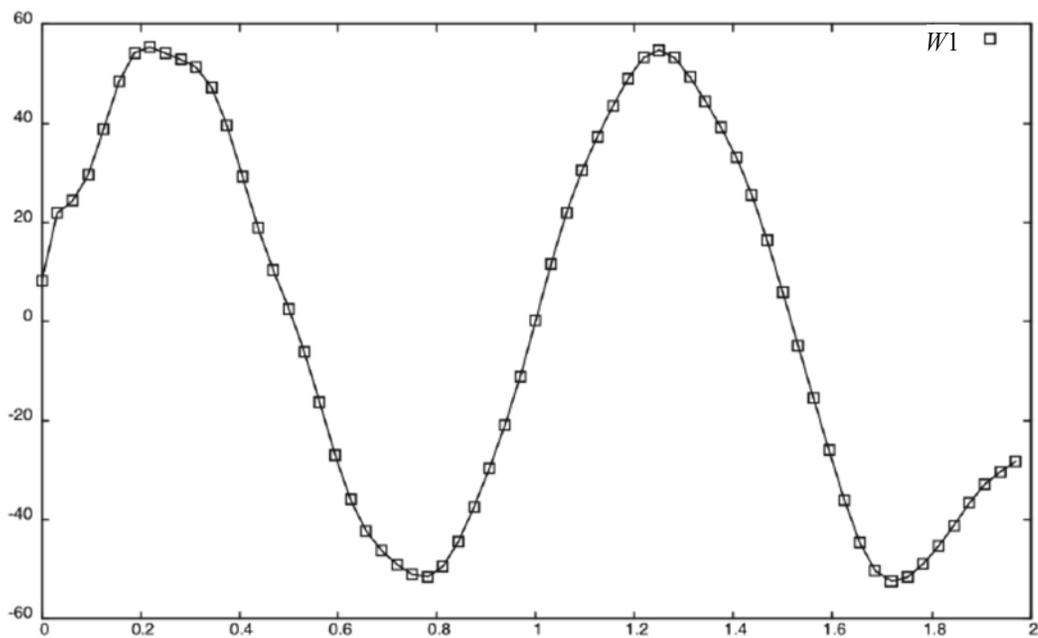
Пример 3. Были проведены расчеты с теми же параметрами, что и в примере 1, но с использованием трех актьюаторов. Начальные положения центров актьюаторов

$$x_1 = \frac{3}{16}, \quad x_2 = \frac{7}{16}, \quad x_3 = \frac{11}{16}, \quad h = \frac{1}{16}, \quad \tau = \frac{1}{32}.$$

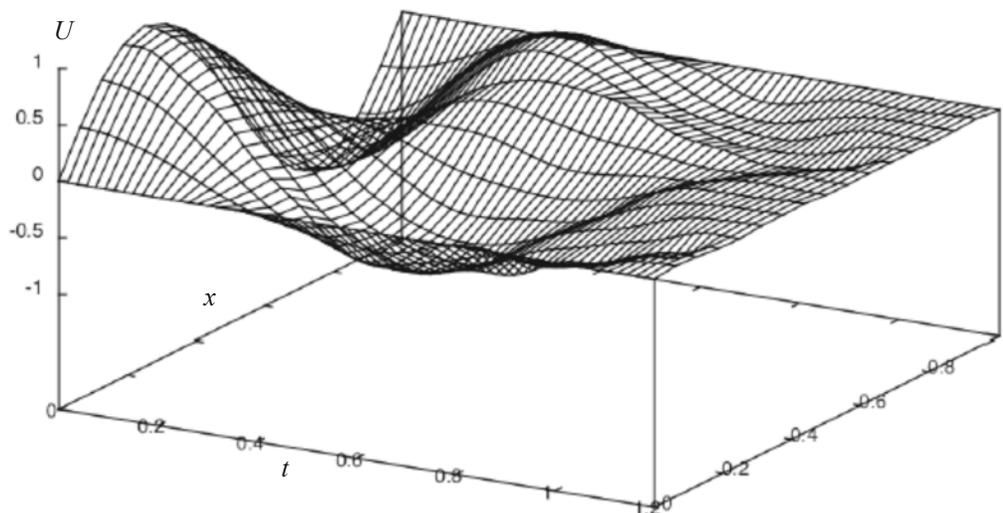
Начальные возмущения удалось погасить за время $T = 1.0$. Процесс гашения колебаний и графики оптимальных управлений $W_1(t), W_2(t), W_3(t)$ представлены на фиг. 5 и 6 соответственно.



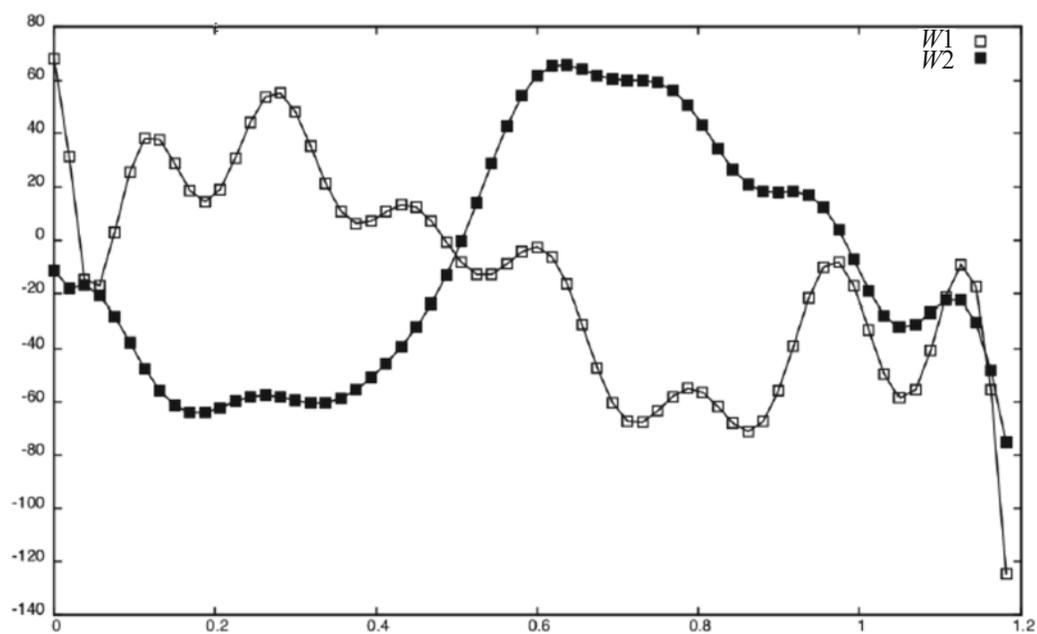
Фиг. 1. Процесс гашения колебаний, $T = 2.0$.



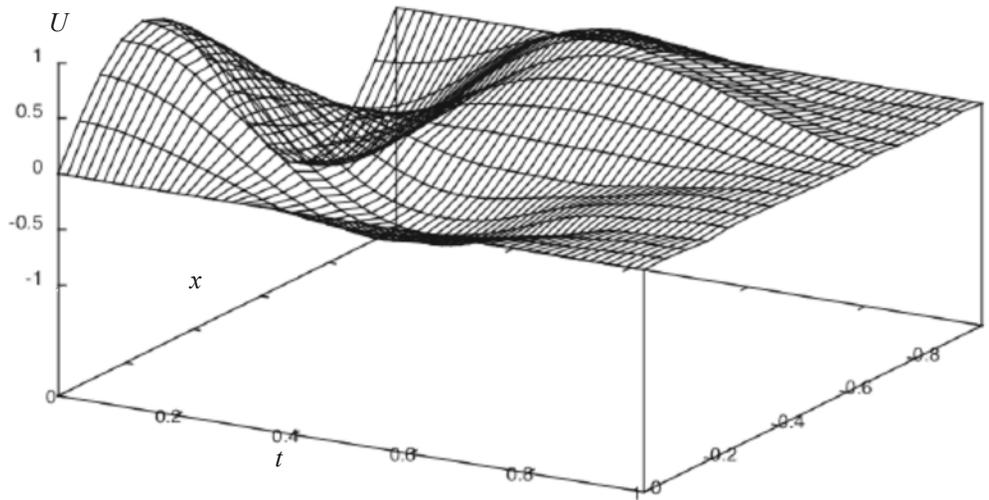
Фиг. 2. Оптимальное управление $W_1(t)$.



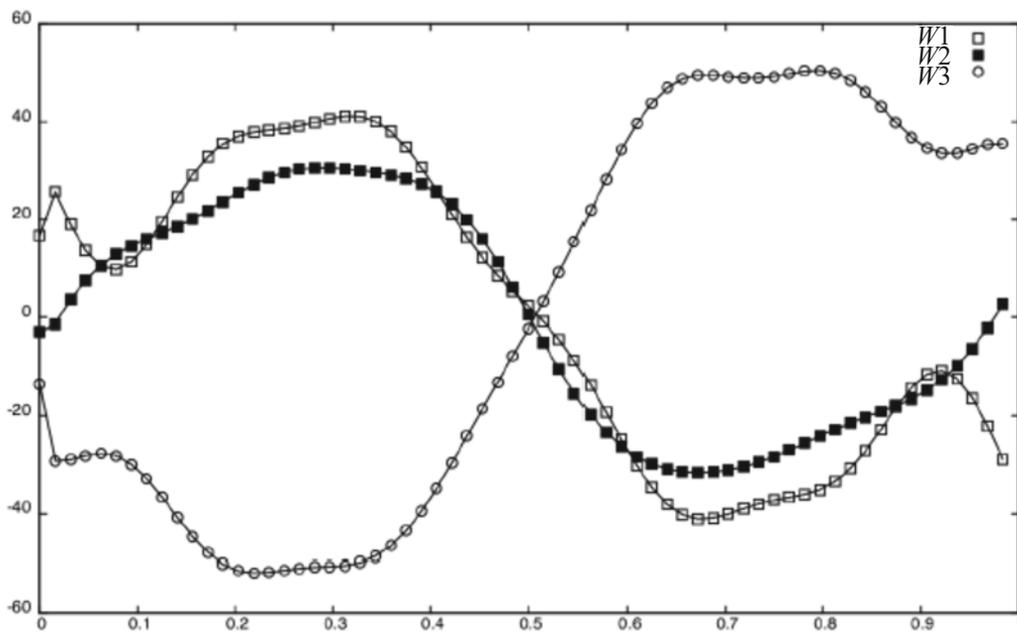
Фиг. 3. Процесс гашения колебаний, $T = 1.2$.



Фиг. 4. Оптимальные управления $W_1(t)$, $W_2(t)$.



Фиг. 5. Процесс гашения колебаний, $T=1.0$.



Фиг. 6. Оптимальные управления $W_1(t)$, $W_2(t)$, $W_3(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 366 с.
2. *Russel D.L.* Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations // *SIAM Rev.* 1978. V. 20. № 5. P. 639–739.
3. *Lagness J.* Control of wave process with distributed controls supported on a subregion // *SIAM J. Control and Optim.* 1983. V. 1. № 1. P. 68–85.
4. *Асланов С.Ж., Михайлов И.Е., Муравей Л.А.* Аналитические и численные методы в задаче гашения колебаний струны точечным демпфером // *Мехатроника, автоматизация, управление.* 2006. № 7. С. 28–35.
5. *Levinson N.* Gap and density theorem // *Am. Math. Soc. Colog. Publ.* 1940. V. 26.
6. *Евтушенко Ю.Г.* Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. М.: ВЦ им. А.А. Дородницына РАН, 2013. 144 с.

ON THE NUMERICAL DAMPING OF STRING VIBRATIONS USING SEVERAL STATIONARY ACTUATORS

I. E. Mikhailov^{a,b,*}

^a 119333 Moscow, Vavilov Str., 44, Federal Research Center Computer Science and Control, RAS, Russia

^b 105005 Moscow, 2nd Baumanskaya str., 5, building 1, Bauman Moscow State Technical University, Russia

*e-mail: mikh_igor@mail.ru

Received: 17.03.2024

Revised: 17.03.2024

Accepted: 31.05.2024

Abstract. The task is to transfer the string from the initial disturbed state to a state of rest in the shortest possible time. The damping of the string vibrations is carried out using several stationary actuators. The minimized functional is a certain integral. Vibration damping is controlled using a function included in the right part of the hyperbolic equation describing the transverse vibrations of the string and simulating the actions of the actuators. Computational algorithms for solving the problem based on the grid method and the gradient method of finding the minimum of functions of many variables have been developed, and the gradient is calculated using the method of rapid automatic differentiation proposed by Yu. G. Yevtushenko. Examples of calculations of string vibration damping using a different number of actuators are given.

Keywords: damping of string vibrations, rapid automatic differentiation.