

Посвящается 85-летию Юрия Гавриловича Евтушенко

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В МОДЕЛИ РАМСЕЕВСКОГО ТИПА¹⁾

© 2024 г. Н. В. Трусов^{1,3,*}, А. А. Шананин^{1,2,3,**}

¹119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

²141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

³119991 Москва, Ленинские горы, 1, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия

*e-mail: trunick.10.96@gmail.com

**e-mail: alexshan@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.03.2024 г.

Переработанный вариант 06.03.2024 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

В работе исследуется математическое описание экономического поведения репрезентативного домашнего хозяйства на несовершенном рынке потребительских кредитов и депозитов. Модель формализована в виде задачи оптимального управления на конечном временном горизонте. Получена классификация поведения социальных слоев в зависимости от параметров экономической конъюнктуры. Построен синтез оптимального управления на бесконечном временном горизонте. Библ. 24. Фиг. 23.

Ключевые слова: модель рамсеевского типа, несовершенный рынок потребительского кредита, синтез оптимального управления, принцип максимума, математическое моделирование.

DOI: 10.31857/S0044466924090052, EDN: WKXWXN

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется математическое описание экономического поведения рационального домашнего хозяйства на рынке потребительских кредитов и депозитов. Моделирование экономического поведения домашних хозяйств опирается на концепцию рационального репрезентативного экономического агента и восходит к работе Ф. Рамсея [1]. Модель формализована в виде задачи оптимального управления на конечном временном горизонте. Домашнее хозяйство максимизирует дисконтированное потребление с постоянным отвращением к риску, управляя динамикой своих расходов в зависимости от текущих параметров экономической конъюнктуры и поведенческих характеристик самого домашнего хозяйства. Модели рамсеевского типа в форме задач оптимального управления исследовались, например, в [2], [3]. В настоящей работе рассматривается несовершенный рынок, когда процентная ставка по кредитам отличается от процентной ставки по депозитам. Различие процентных ставок по кредитам и депозитам приводит к негладкости правой части дифференциального уравнения на фазовую переменную. Применяя принцип максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка [4] к задаче оптимального управления с негладкой правой частью дифференциального уравнения на фазовую переменную, мы получаем область в пространстве фазовой и сопряженной переменных, в которой при описании динамики возникает дополнительное управление, что вносит существенное изменение в анализ задачи. При рассмотрении задачи оптимального управления на бесконечном временном горизонте удастся построить синтез. Синтез позволяет определить оптимальное управление в зависимости от текущего значения фазовой переменной и параметров экономической конъюнктуры. Он зависит от текущих процентных ставок и от поведенческих характеристик репрезентативного домашнего хозяйства. Данная работа является продолжением статьи [5].

Исследование экономического поведения домашнего хозяйства на несовершенном рынке кредитов и депозитов мотивировано обстоятельствами российской экономики. Так, на протяжении более десяти лет отношение процентных ставок по потребительскому кредиту к депозитам варьировалось в диапазоне от 2.5 до 3.5. Проблема задолженности населения по потребительскому кредиту является актуальной. К концу 2023 г. задолженность населения по потребительскому кредиту превысила 15.3 трлн.руб., что составляет около 10% ВВП.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 24-11-00329).

Исследования [6], [7] показывают, что около половины заемщиков имеют высокую долговую нагрузку, а у 20% возникают просрочки по обслуживанию имеющихся кредитов. В [8] отмечено, что просроченная задолженность по кредитам выше в слаборазвитых регионах с низкими доходами. Большинство заемщиков имеют низкие реальные доходы и вынуждены занимать новый потребительский кредит для обслуживания ранее выданных. Такая ситуация приводит к образованию финансовой пирамиды. В 2019 г. в правительстве РФ обсуждалась проблема потребительского кредита как актива коммерческих банков [9], [10]. В аналитической записке ЦБ РФ [11] проводится анализ статистических данных “Всероссийское обследование домохозяйств по потребительским финансам” [12] за 2022 г. Результаты анализа говорят о большом разрыве в доходах и расходах домашних хозяйств. Малообеспеченные домашние хозяйства, как правило, не располагают достаточными средствами для покрытия расходов, поэтому вынуждены осуществлять займы по потребительскому кредиту. Среди них большинство тратит значительную часть своего дохода на покрытие выплат по кредитам. Авторы [11] подчеркивают, что неустойчивое финансовое положение домохозяйств из низкодходных групп и семей с детьми в большей степени должно рассматриваться как социальная проблема.

Работа устроена следующим образом. В разд. 2 представлено математическое описание экономического поведения рационального домашнего хозяйства. В разд. 3 изложено построение синтеза оптимального управления на бесконечном временном горизонте. В заключении (разд. 4) сформулированы основные результаты работы.

2. МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ДОМАШНЕГО ХОЗЯЙСТВА

Мы полагаем, что доходы S_0 репрезентативного домашнего хозяйства растут с темпом $\gamma \in \mathbb{R}$, т.е. $S_0(t) = Se^{\gamma t}$, $S > 0$. Динамика ликвидных средств $M_0(t)$ домашнего хозяйства описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dM_0(t)}{dt} = S_0(t) - p(t)C(t) + H_L(t) - H_D(t), \quad (1)$$

где $C(t)$ — осуществляемые расходы домашним хозяйством, $p(t)$ — индекс потребительских цен, растущий с темпом j . Функции $H_L(t)$ и $H_D(t)$ характеризуют взаимодействие домашнего хозяйства с рынками потребительского кредитования и сбережений в форме депозитов соответственно. Если функция $H_L(t) > 0$, то домашнее хозяйство осуществляет займ по потребительскому кредиту у коммерческого банка. Если $H_L(t) < 0$, то домашнее хозяйство осуществляет платеж по кредитной задолженности. Аналогично, если $H_D(t) > 0$, то домашнее хозяйство увеличивает депозитарный счет. Если $H_D(t) < 0$, то происходит снятие ликвидных средств с депозитарного счета. Пусть $L(t) \geq 0$ — счет кредитной задолженности, $D(t) \geq 0$ — сбережения в форме депозитов. Изменение кредитной задолженности описывается уравнением

$$\frac{dL(t)}{dt} = H_L(t) + r_L L(t), \quad (2)$$

где r_L — процентная ставка по потребительскому кредиту. Изменение сбережений в форме депозитов описывается уравнением

$$\frac{dD(t)}{dt} = H_D(t) + r_D D(t), \quad (3)$$

где r_D — процентная ставка по депозитам.

Отсутствие арбитража на рынке потребительского кредита предполагает, что $r_L > r_D > 0$. Запас ликвидных средств $M_0(t)$, необходимый домашнему хозяйству для осуществления потребительских расходов $p(t)C(t)$, моделируется законом Фишера $M_0(t) = \theta p(t)C(t)$, где $\frac{1}{\theta}$ — скорость обращения денег, $\theta > 0$. Такой подход использовался в [2], [13]. Для дальнейшего изложения удобно ввести величину, характеризующую финансовое состояние домашнего хозяйства $X(t) = M_0(t) + D(t) - L(t)$. Из рационального поведения домашнего хозяйства следует, что оно не осуществляет займы по потребительскому кредиту и не сберегает в форме депозитов одновременно, поэтому $L(t) = (M_0(t) - X(t))_+$, $D(t) = (X(t) - M_0(t))_+$, где $(a)_+ = \max\{a, 0\} \forall a \in \mathbb{R}$. В силу уравнений (1)–(3), финансовое состояние домашнего хозяйства описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dX}{dt} = S_0 - \frac{1}{\theta} M_0 - r_L (M_0 - X)_+ + r_D (X - M_0)_+$$

с начальным условием

$$X(0) = X_0.$$

Домашнее хозяйство стремится максимизировать дисконтированное потребление с коэффициентом дисконтирования $\delta_0 > 0$ и постоянным коэффициентом отвращения к риску $\rho > 0$ на временном интервале $[0, T]$,

управляя своими расходами, т.е.

$$\int_0^T \frac{(C(t))^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-\delta_0 t} dt \rightarrow \max_{C \geq 0}.$$

В данной работе мы полагаем, что показатель отвращения к риску ρ положителен и не ограничен сверху. Мотивировкой данного предположения являются материалы исследований, опубликованные в работе [14], в которой были идентифицированы социальные слои населения России с постоянным отвращением к риску из диапазона (4, 6).

Будем говорить, что финансовое состояние $X(t)$ является ликвидным, если существует управление, обеспечивающее выполнение условия $X(T) \geq 0$. Иными словами, к конечному моменту времени домашнее хозяйство должно расплатиться со своими кредитами.

Пусть $x(t) = X(t)e^{-\gamma t}$, $M(t) = M_0(t)e^{-\gamma t}$, $\delta = \delta_0 + (1 - \rho)\gamma$. Также, предположим, что $r_L > r_D > (\gamma)_+$, $\delta > ((1 - \rho)r_L)_+$. Учитывая связь потребительских расходов с ликвидными средствами, задача оптимального управления на конечном временном горизонте формулируется в следующем виде:

$$\int_0^T \frac{M^{1-\rho}}{1-\rho} e^{-(\delta-(1-\rho)\gamma)t} dt \rightarrow \max_M, \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dt} = S - \gamma x - \frac{1}{\theta} M - r_L (M - x)_+ + r_D (x - M)_+, \quad (5)$$

$$x(0) = x_0, x(T) \geq 0, \quad (6)$$

$$M(t) \geq 0. \quad (7)$$

Замечание 1. Чтобы обеспечить условие $x(T) \geq 0$, необходимо выполнение неравенства $x > -\frac{S}{r_L - \gamma}$. При $T \rightarrow +\infty$ данное условие является не только необходимым, но и достаточным. В случае, если финансовое состояние $x \leq -\frac{S}{r_L - \gamma}$, домашнее хозяйство не имеет возможности расплатиться с кредитами при сохранении текущей экономической конъюнктуры и образуется финансовая пирамида.

Замечание 2. Предельный случай $\rho = 1$ основан на том, что предел $\lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{M^{1-\rho}-1}{1-\rho} = \ln M$. Этому пределу соответствует функционал $\int_0^T \ln M e^{-\delta t} dt \rightarrow \max_M$.

Теорема 1. Пусть $S + (r_L - \gamma)x_0 > 0$, $T > \left(\frac{1}{r_L} \ln \left(\frac{S}{S + (r_L - \gamma)x_0}\right)\right)_+$. Если задача оптимального управления имеет вогнутый функционал, то задача оптимального управления (4)–(7) имеет решение.

Доказательство теоремы 1 для случая $\rho \in (0, 1)$ можно найти в [5]. Более общий случай $\rho > 0$ не нарушает структуру доказательства. В силу выполнения условия $x(T) \geq 0$, множество допустимых управлений ограничено в пространстве L_1 . По теореме Комлоша (см. [15]) из ограниченной в норме пространства L_1 последовательности функций $M_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$, можно выделить подпоследовательность $M_{i_n}(t)$, $n = 1, 2, \dots$, средние по Чезаро которой сходятся почти всюду на отрезке $[0, T]$ к функции $M_{\text{opt}}(t)$. Так как исходная функция $\frac{M^{1-\rho}}{1-\rho}$ является вогнутой при $\rho > 0$ (при $\rho = 1$ подынтегральная дробно-степенная функция переходит в логарифмическую, которая также является вогнутой) на множестве $M \geq 0$, то предельная функция $M_{\text{opt}}(t)$ будет являться максимумом функционала (4).

3. ПОСТРОЕНИЕ СИНТЕЗА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Негладкий анализ в теории оптимального управления исследовался в работах [4], [16], [17]. В силу негладкости правой части дифференциального уравнения (5) применяется принцип максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка [4]. С его помощью выделяются три режима экономического поведения домашнего хозяйства: заимствования, не взаимодействия с банковской системой и сбережения в форме депозитов в зависимости от финансового состояния домашнего хозяйства и параметров экономической конъюнктуры. Результаты сформулированы в теореме 2.

Теорема 2. Если $\{x(t), M(t) | t \in [0, T]\}$ — решение задачи оптимального управления (4)–(7), то существует абсолютно непрерывная функция $\{\varphi(t) | t \in [0, T]\}$.

1. Если

$$x^\rho(t)\varphi(t) < \frac{\theta}{1 + \theta r_L},$$

то оптимальное управление

$$M(t) = \left[\frac{\theta}{(1 + \theta r_L) \varphi(t)} \right]^{\frac{1}{\rho}}, \quad (8)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = S + (r_L - \gamma)x - \frac{1 + \theta r_L}{\theta} \left(\frac{\theta}{(1 + \theta r_L) \varphi} \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad (9)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\delta + \rho\gamma - r_L) \varphi. \quad (10)$$

2. Если

$$\frac{\theta}{1 + \theta r_L} < x^\rho(t) \varphi(t) < \frac{\theta}{1 + \theta r_D},$$

то оптимальное управление

$$M(t) = x(t), \quad (11)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = S - \frac{1 + \theta\gamma}{\theta} x, \quad (12)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\delta + \rho\gamma - u(t)) \varphi, \quad r_D \leq u(t) \leq r_L. \quad (13)$$

3. Если

$$x^\rho(t) \varphi(t) > \frac{\theta}{1 + \theta r_D},$$

то оптимальное управление

$$M(t) = \left[\frac{\theta}{(1 + \theta r_D) \varphi(t)} \right]^{\frac{1}{\rho}}, \quad (14)$$

и

$$\frac{dx}{dt} = S + (r_D - \gamma)x - \frac{1 + \theta r_D}{\theta} \left(\frac{\theta}{(1 + \theta r_D) \varphi} \right)^{\frac{1}{\rho}}, \quad (15)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\delta + \rho\gamma - r_D) \varphi. \quad (16)$$

Кроме того, выполняется условие трансверсальности

$$x(T) = 0.$$

Доказательство теоремы 2 можно найти в [5].

Структуру оптимального управления удобно исследовать на плоскости $Ox\varphi$. Режимы заимствования, автономный и сбережения разделены на плоскости $Ox\varphi$ двумя гиперболами: $\varphi_{r_L}(x) = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} x^{-\rho}$ и $\varphi_{r_D}(x) = \frac{\theta}{1 + \theta r_D} x^{-\rho}$. Легко видеть, что $\varphi_{r_D}(x) > \varphi_{r_L}(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \varphi_{r_L}(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \varphi_{r_D}(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{r_L}(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_{r_D}(x) = 0$. Область заимствования определяется множеством

$$\Omega_B : \left\{ (x, \varphi) : -\frac{S}{r_L - \gamma} < x \leq 0 \cup x > 0, \varphi < \varphi_{r_L}(x) \right\}.$$

Область

$$\Omega_A : \{(x, \varphi) : x > 0, \varphi_{r_L}(x) < \varphi < \varphi_{r_D}(x)\}$$

соответствует автономному поведению домашнего хозяйства. Область сбережений определяется множеством

$$\Omega_S : \{(x, \varphi) : x > 0, \varphi > \varphi_{r_D}(x)\}.$$

Утверждение 1. На плоскости $Ox\varphi$ имеется траектория $\varphi_z(x)$, для которой выполнено условие $\frac{dx}{dt} = 0$. Она имеет вид

$$\varphi_z(x) = \begin{cases} \left(\frac{\theta}{1+\theta r_L}\right)^{1-\rho} (S + (r_L - \gamma)x)^{-\rho}, & \text{если } x \leq \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}, 1+\gamma\theta > 0, \\ \left(\frac{\theta}{1+\theta r_D}\right)^{1-\rho} (S + (r_D - \gamma)x)^{-\rho}, & \text{если } x > \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}, 1+\gamma\theta > 0, \\ \left(\frac{\theta}{1+\theta r_L}\right)^{1-\rho} (S + (r_L - \gamma)x)^{-\rho}, & \text{если } 1+\gamma\theta < 0. \end{cases} \quad (17)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $1 + \gamma\theta > 0$. Приравняем правую часть дифференциального уравнения (9) к нулю и выразим сопряженную переменную φ . Получим, что в области заимствования, траектория, удовлетворяющая состоянию $\frac{dx}{dt} = 0$ определяется функцией

$$\left(\frac{\theta}{1+\theta r_L}\right)^{1-\rho} (S + (r_L - \gamma)x)^{-\rho}. \quad (18)$$

В автономном режиме условие $\frac{dx}{dt} = 0$ реализуется в точке $x = \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$ (см. (12)). В области сбережения условие $\frac{dx}{dt} = 0$ определяется функцией

$$\left(\frac{\theta}{1+\theta r_D}\right)^{1-\rho} (S + (r_D - \gamma)x)^{-\rho}. \quad (19)$$

Легко убедиться, что точка $x = \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$ является точкой пересечения функции (18) с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$, а также функции (19) с гиперболой $\varphi_{r_D}(x)$. Таким образом, мы получаем выражение (17).

Рассмотрим случай $1 + \gamma\theta < 0$. Покажем, что функция (18) лежит ниже гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, т.е. $\varphi(x) < \varphi_{r_L}(x)$ для любого $x > 0$:

$$\left(\frac{\theta}{1+\theta r_L}\right)^{1-\rho} (S + (r_L - \gamma)x)^{-\rho} < \frac{\theta}{1+\theta r_L} x^{-\rho}.$$

Разделим обе части на положительную величину $\frac{\theta}{1+\theta r_L}$ и возведем в отрицательную степень $-\frac{1}{\rho}$. Получим

$$\frac{\theta}{1+\theta r_L} (S + (r_L - \gamma)x) > x.$$

Перенесем x в левую часть. После преобразований получим

$$S\theta - (1 + \gamma\theta)x > 0.$$

Так как $1 + \gamma\theta < 0$, $x > 0$, то левая часть больше правой. Значит, $\varphi_z(x) < \varphi_{r_L}(x)$ при любом $x > 0$. Утверждение доказано.

Отметим, что траектория $\varphi_z(x)$ также имеет вид гиперболы. В случае $1 + \gamma\theta > 0$ она терпит разрыв I рода и пересекает гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ и $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x = \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$. Гипербола $\varphi_z(x)$ обладает свойствами

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{S}{r_L - \gamma} + 0} \varphi_z(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_z(x) = 0.$$

В классической модели Рамсея рассматривается совершенный рынок потребительского кредита, когда процентные ставки по кредитам и депозитам совпадают ($r_L = r_D$). В этом случае не возникает дополнительного управления $u(t) \in [r_D, r_L]$ в правой части дифференциального уравнения (13), задача оптимального управления становится гладкой, для решения которой могут быть применены стандартные методы решения [18], [19]. Мы изучаем случай несовершенного рынка, когда ставка по потребительскому кредиту превышает ставку по депозитам. Согласно принципу максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка [4], из-за негладкости дифференциального уравнения (5), возникает дополнительное управление в дифференциальном уравнении на сопряженную переменную (13). Выбор дополнительного управления $u(t)$ в правой части дифференциального уравнения (13), который максимизирует функционал исходной задачи (4) формулирует.

Утверждение 2 (принцип Беллмана). Максимальное значение функционала (4) достигается при $u(t) \equiv r_D$ в дифференциальном уравнении (13) в области автономного режима.

Доказательство. На плоскости (x, φ) движение траектории $\varphi(x)$ описывается дифференциальными уравнениями (9), (10), (12), (13), (15), (16). Зафиксируем начальное значение точки $x(0) = x_0$. Будем двигаться в обратном времени до пересечения оптимальной траектории $\varphi(x)$ с одной из гипербол $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$.

Без ограничения общности, будем считать, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересечет гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ из режима заимствования (случай, когда оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ из области сбережения рассматривается аналогично). Обозначим точку пересечения оптимальной траектории $\varphi(x)$ с нижней гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ точкой A . Дальнейшее движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ из точки A происходит в автономной области и зависит от выбора функции $u(t)$ в дифференциальном уравнении (13). Отметим, что движение траектории вдоль оси Ox не зависит от сопряженной функции $\varphi(t)$, таким образом, не зависит от выбора функции $u(t)$ в автономном режиме (12). Рассмотрим значения функций $\varphi(t)$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (13), при двух управлениях $u(t)$. Обозначим их через $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Положим $u_1(t) \equiv r_D$, $u_2(t) = r_D + \hat{u}(t)$, где $\hat{u}(t) \in [0, r_L - r_D]$. Пусть $\varphi_1(t)$ соответствует значению $u_1(t)$, а $\varphi_2(t)$ соответствует значению $u_2(t)$. Выпишем решение дифференциального уравнения (13) для функции $\varphi_2(t)$ в обратном времени:

$$\varphi_2(t) = \varphi_0 \exp \left[\int_{t_0}^t (\delta + \rho\gamma - r_D - \hat{u}(\tau)) d\tau \right],$$

где t_0 соответствует моменту времени, когда оптимальная траектория $\varphi(x)$ находится в точке A . Заметим, что

$$\varphi_2(t) = \varphi_1(t) \cdot \exp \left[- \int_{t_0}^t \hat{u}(\tau) d\tau \right].$$

Множитель $\exp \left[- \int_{t_0}^t \hat{u}(\tau) d\tau \right] \geq 1$, так как $t < t_0$, $\hat{u}(\tau) \geq 0$. Таким образом, $\varphi_2(t) \geq \varphi_1(t)$. Причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $u_1(t) \equiv u_2(t)$, т.е. $\hat{u}(\tau) \equiv 0$. Рассмотрим $\hat{u}(\tau) \neq 0$. Тогда существует момент времени $\hat{t}$ такой, что для любого $t < \hat{t}$ функция $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$. Обозначим траекторию $\varphi_1(x)$, которая удовлетворяет дифференциальным уравнениям (12), (13) при $u(t) \equiv u_1(t)$, траекторию $\varphi_2(x)$, которая удовлетворяет дифференциальным уравнениям (12), (13) при $u(t) \equiv u_2(t)$. Согласно принципу максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка, обе траектории $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются оптимальными. Пусть траектория $\varphi_1(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке C , а траектория $\varphi_2(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке B . Так как $\varphi_2(t) > \varphi_1(t)$, то точка C лежит правее точки B на оси Ox . Пусть точка B имеет координаты $(x_B, \varphi_{r_D}^B)$, а точка C имеет координаты $(x_C, \varphi_{r_D}^C)$. Зафиксируем $\hat{x} \in (x_B, x_C)$. Траектория $\varphi_1(x)$ при $x = \hat{x}$ находится в автономной области, в то время как траектория $\varphi_2(x)$ при $x = \hat{x}$ находится в области сбережения. Так как в автономной области $M = x$, а в области сбережения $M < x$, то значение функционала (4) больше при выборе оптимальной траектории $\varphi_1(x)$. В силу произвольного выбора функции $\varphi_2(t)$, удовлетворяющего допустимому множеству дополнительного управления $u(t)$ в автономной области, максимальное значение функционала (4) будет достигаться при $u(t) \equiv r_D$. На фиг.1 отображена область $ABCD$, содержащая всевозможные допустимые управления $u(t)$ в правой части дифференциального уравнения (13). Утверждение доказано.

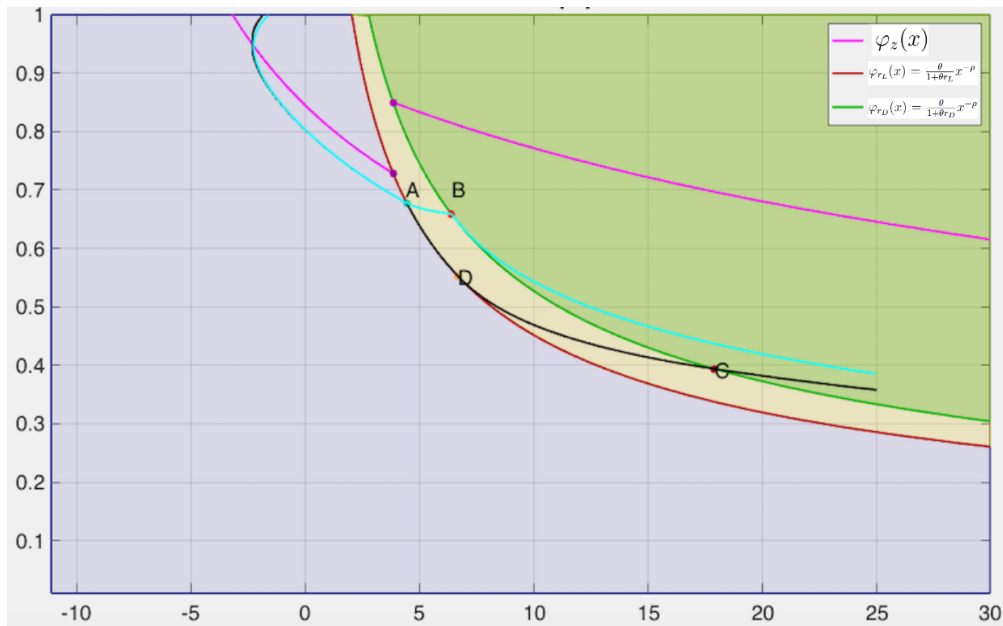
Утверждение 3. Пусть $r_L > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x = \hat{x}$, $\hat{x} \geq \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Если $x_{c1} > \hat{x}$, то на отрезке $x \in [\hat{x}, x_{c1}]$ оптимальная траектория $\varphi(x)$ движется по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$. Причем если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D$, то $x_{c1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. В случае $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, $x_{c1} = +\infty$.

Более того, при движении оптимальной траектории $\varphi(x)$ по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$, дополнительное управление в правой части дифференциального уравнения (13) определяется выражением

$$u(x) = \rho \left(\frac{S}{x} - \frac{1 + \gamma\theta}{\theta} \right) + \delta + \rho\gamma. \quad (20)$$

Доказательство. Без ограничения общности, рассмотрим случай, когда траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ при движении в обратном времени из области заимствования, $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L < \delta + \rho\gamma$, $\varphi(x) < \varphi_z(x)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Из условий следует, что в областях заимствования и автономного поведения $\frac{dx}{dt} < 0$, $\frac{d\varphi}{dt} > 0$. Движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ в области заимствования удовлетворяет дифференциальным уравнениям (9), (10), а в области автономного поведения — дифференциальным уравнениям (12), (13). Изучим движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ в обратном времени. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ попадает на гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $A = \left(\hat{x}, \frac{\theta}{1 + \theta r_L} \hat{x}^{-\rho} \right)$. Подставляя координаты точки A в правые части дифференциальных уравнений (9), (10), найдем вектор направления движения оптимальной траектории $\varphi(x)$ из области заимствования на границе $\varphi_{r_L}(x)$:

$$\bar{V}_B = \left\{ S - \frac{1 + \gamma\theta}{\theta} \hat{x}, (\delta + \rho\gamma - r_L) \frac{\theta}{1 + \theta r_L} \hat{x}^{-\rho} \right\}.$$



Фиг. 1. Движение траекторий $\varphi(x)$ в зависимости от выбора функции $u(t)$. Черная траектория соответствует выбору функции $u(t) \equiv r_D$, бирюзовая траектория соответствует выбору функции $u(t) \equiv r_L$. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно.

Вектор направления движения оптимальной траектории $\varphi(x)$ из автономной области на границе $\varphi_{r_L}(x)$:

$$\bar{V}_A = \left\{ S - \frac{1 + \gamma\theta}{\theta} \hat{x}, (\delta + \rho\gamma - r_D) \frac{\theta}{1 + \theta r_L} \hat{x}^{-\rho} \right\}.$$

Очевидно, что вектор $\bar{V}_A$ лежит выше вектора $\bar{V}_B$. Покажем, что уравнение касательной к гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ лежит между векторами $\bar{V}_A$ и $\bar{V}_B$. Уравнение касательной к гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ определяется выражением

$$\varphi_{\tan}(x) = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} \hat{x}^{-\rho} \cdot \left[-\rho \cdot \left(\frac{x}{\hat{x}} - 1 \right) + 1 \right].$$

Для начала покажем, что касательная $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ лежит выше вектора $\bar{V}_B$. Для этого достаточно показать, что разность углов наклона вектора $\bar{V}_B$ и касательной $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ меньше нуля. Обозначим эту разность через $f(\hat{x})$:

$$f(\hat{x}) = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} \hat{x}^{-\rho-1} \left[\frac{\delta + \rho\gamma - r_L}{\frac{S}{\hat{x}} - \frac{1 + \gamma\theta}{\theta}} + \rho \right].$$

Функция $f(\hat{x})$ обращается в ноль при $\hat{x}^* = \frac{S\rho}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. При $\hat{x} > \frac{S\rho}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$ функция $f(\hat{x}) < 0$. Таким образом, мы показали, что касательная $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ лежит выше вектора $\bar{V}_B$.

В случае $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D$, аналогично можно показать, что при $\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \leq \hat{x} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$ касательная $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ лежит ниже вектора $\bar{V}_A$. С одной стороны, оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ из области заимствования и попадает в автономную область. С другой стороны, попадая в автономную область, оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ и попадает обратно в область заимствования. Таким образом, движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ будет проходить по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ на отрезке $x \in \left[\hat{x}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \right]$. Вычислим дополнительное управление в правой части дифференциального уравнения (13) на гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$, удовлетворяющее движению оптимальной траектории. Гипербола $\varphi_{r_L}(x)$ задается уравнением

$$x^\rho \varphi = C, \quad (21)$$

где $C = \frac{\theta}{1 + \theta r_L}$ — константа. Продифференцируем уравнение (21) в силу системы (12), (13). Получим

$$\rho x^{\rho-1} \left[S - \frac{1 + \gamma\theta}{\theta} x \right] \varphi + x^\rho [\delta + \rho\gamma - u] \varphi = 0.$$

Учитывая, что $x > 0$, $\varphi > 0$, получаем управление на гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$, которое задается уравнением (20). Покажем, что для любого $x \in \left[\hat{x}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}\right]$ управление (20) не выходит за границы $[r_D, r_L]$. Легко видеть, что функция $u(x)$ монотонно убывает по переменной x . Подставляя левое граничное значение $\hat{x}_L = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, получаем, что $u(\hat{x}_L) = r_L$. Подставляя правое граничное значение $\hat{x}_R = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, получаем, что $u(\hat{x}_D) = r_D$.

Рассмотрим случай $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta}$. Покажем, что вектор $\bar{V}_A$ лежит выше касательной $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$ для любого $\hat{x} \geq \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Пусть

$$g(\hat{x}) = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} \hat{x}^{-\rho-1} \left[\frac{\delta + \rho\gamma - r_D}{\frac{S}{\hat{x}} - \frac{1+\gamma\theta}{\theta}} + \rho \right]$$

есть разность углов наклона вектора $\bar{V}_A$ и касательной $\varphi_{\tan}(x)$ в точке $x = \hat{x}$. Функцию $g(\hat{x})$ можно представить в виде произведения двух функций: $g(\hat{x}) = g_1(\hat{x}) \cdot g_2(\hat{x})$:

$$g_1(\hat{x}) = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} \hat{x}^{-\rho-1},$$

$$g_2(\hat{x}) = \frac{\delta + \rho\gamma - r_D}{\frac{S}{\hat{x}} - \frac{1+\gamma\theta}{\theta}} + \rho.$$

Отметим, что $g_1(\hat{x}) > 0$ для любого $\hat{x} > 0$, а производная $\frac{dg_2(\hat{x})}{d\hat{x}} > 0$:

$$\frac{dg_2(\hat{x})}{d\hat{x}} = \frac{S\theta^2(\delta + \rho\gamma - r_D)}{(S\theta - (1 + \gamma\theta)^2)\hat{x}^2} > 0.$$

Функция $g_2(\hat{x})$ монотонно возрастает, имеет единственный отрицательный корень $\hat{x}^* = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, значит, при $\hat{x} > 0$ функция $g(\hat{x}) > 0$. В рассматриваемом случае оптимальная траектория не сойдет с гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ при $x > \hat{x}$. Управление (20) остается допустимым: при $x \rightarrow +\infty$, $u(x) \rightarrow \delta - \frac{\rho}{\theta} > r_D$. Утверждение доказано.

Из доказанного утверждения можно сформулировать два следствия, доказательства которых очевидны.

Следствие 1. Если оптимальная траектория $\varphi(x)$ движется по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ на отрезке $x \in [x_L, x_R]$, то в точках $x = x_L$ и $x = x_R$ оптимальная траектория касается гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$.

Следствие 2. Движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ возможно только на отрезке $x \in \left[\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}\right]$. Причем, если $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ возможно только на множестве $x \in \left[\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, +\infty\right)$.

Утверждение 4. На гиперболе $\varphi_{r_D}(x)$ нет особого режима у оптимальной траектории $\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть оптимальная траектория $\varphi(x)$ попадает на гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $A(\hat{x}, \hat{\varphi})$, причем $\hat{\varphi} = \frac{\theta}{1 + \theta r_D} \hat{x}^{-\rho}$. Подставляя эту точку в правую часть дифференциального уравнения (15), получаем, что в точке A скорость по фазовой координате x равна

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=\hat{x}, \varphi=\hat{\varphi}} = S - \frac{1 + \gamma\theta}{\theta} \hat{x},$$

что соответствует скорости по фазовой координате x в автономной области (12). Согласно утверждению 2, в автономной области $u(t) \equiv r_D$ в правой части дифференциального уравнения (13). Таким образом, скорости по координате φ в автономной области и области сбережения совпадают. Мы получили, что при переходе из автономной области в область сбережения (и обратно) через гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ скорости координат x и φ траектории равны. Таким образом, траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке. Утверждение доказано.

Пусть $y(\bar{x}, \beta)$ — решение уравнения

$$\left[\frac{1 + \theta r_L}{1 + \theta r_D} \right]^{\frac{\beta}{\rho}} \cdot \frac{y(\bar{x}, \beta)}{\bar{x}} = \left[\left(y(\bar{x}, \beta) - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right) \left(\bar{x} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}}, \quad (22)$$

и пусть $M_r(\bar{x}, r)$ — решение уравнения

$$x + \frac{S}{r - \gamma} = \frac{(1 + \theta r)\rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r)} M_r(\bar{x}, r) + \left[\frac{\bar{x}}{M_r(\bar{x}, r)} \right]^{\frac{\rho(r - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r}} \cdot \left[\frac{S}{r - \gamma} - \frac{r - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r} \bar{x} \right]. \quad (23)$$

Оптимальное управление M зависит от сопряженной переменной φ в режиме заимствования (8) и в режиме сбережения (10). На конечном временном промежутке $[0, T]$, решая дифференциальные уравнения (8), (9), (11), (12), (14), (15) в соответствии с начальным условием $x(0) = x_0$ и условием трансверсальности $x(T) = 0$, мы получаем оптимальное управление $M(\varphi; T)$, где $\varphi = \varphi(t, x(t); T)$. Устремив $T \rightarrow +\infty$, можно получить предельную траекторию $\varphi(x)$. Подставляя ее в оптимальное управление $M(\varphi)$, мы получим синтез оптимального управления $M(x)$. Синтез позволяет определить оптимальное управление в зависимости от фазовой координаты x и от параметров экономической конъюнктуры.

Переключение режимов (заимствования, автономного и сбережения) происходят в зависимости от соотношения величин $r_L, r_D, \delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma$. Они определяют тип поведения домашнего хозяйства. Справедлива следующая теорема, описывающая синтез оптимального управления при $T \rightarrow +\infty$.

Теорема 3 (синтез задачи оптимального управления).

1. Если $r_L < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то домашнее хозяйство находится в режиме заимствования.

Тип 1.1. Синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)}{\rho(1 + \theta r_L)} \left(x + \frac{S}{r_L - \gamma} \right).$$

2. Если $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$, то домашнее хозяйство находится либо в режиме заимствования, либо в автономном режиме.

Тип 2.1. Если $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L < \delta + \rho\gamma$, то синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \begin{cases} \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)}{\rho(1 + \theta r_L)} \left(x + \frac{S}{r_L - \gamma} \right), & \text{если } x < \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}, \\ x, & \text{если } x \geq \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}. \end{cases}$$

Тип 2.2. Если $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < \delta + \rho\gamma < r_L$ или $\max\{r_D, \delta + \rho\gamma\} < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$, то синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \begin{cases} M_r(x_{p_1}, r_L), & \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, & \text{если } x \geq x_{p_1}, \end{cases}$$

где $x_{p_1} = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Более того, уравнение (23) имеет единственное решение $M_r(x_{p_1}, r_L)$ на множестве $((x)_+, x_{p_1})$.

3. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D$, то домашнее хозяйство находится в одном из трех режимов: заимствования, автономном или сбережения.

Тип 3.1. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < r_L < \delta + \rho\gamma$, то синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \begin{cases} \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)}{\rho(1 + \theta r_L)} \left(x + \frac{S}{r_L - \gamma} \right), & \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, & \text{если } x_{p_1} \leq x \leq x_{p_2}, \\ M_r(x_{p_2}, r_D), & \text{если } x > x_{p_2}, \end{cases}$$

где $x_{p_1} = \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}$, $x_{c_1} = \max\left\{x_{p_1}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}\right\}$, $x_{p_2} = y(x_{c_1}, -1)$. Более того, уравнение (22) имеет единственное решение $y(x_{c_1}, -1)$ на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$, а уравнение (23) имеет единственное решение $M_r(x_{p_2}, r_D)$ на множестве (x_{p_2}, x) .

Тип 3.2. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < \delta + \rho\gamma < r_L$, то синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \begin{cases} M_r(x_{p_1}, r_L), & \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, & \text{если } x_{p_1} \leq x \leq x_{p_2}, \\ M_r(x_{p_2}, r_D), & \text{если } x > x_{p_2}, \end{cases}$$

где $x_{p_1} = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, $x_{p_2} = y(x_{c_1}, -1)$. Более того, уравнение (22) имеет единственное решение $y(x_{c_1}, -1)$ на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$, уравнение (23) имеет единственное решение $M_r(x_{p_1}, r_L)$ на множестве $((x)_+, x_{p_1})$ и единственное решение $M_r(x_{p_2}, r_D)$ на множестве (x_{p_2}, x) .

Тип 3.3. Если $\max\{\delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma\} < r_D$, то синтез оптимального управления определяется выражением

$$M(x; S, r_L, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \begin{cases} M_r(x_{p_1}, r_L), & \text{если } x < x_{p_1}, \\ x, & \text{если } x_{p_1} \leq x \leq x_{p_2}, \\ \frac{\theta(\delta - (1-\rho)r_D)}{\rho(1+\theta r_D)} \cdot \left(x + \frac{S}{r_D - \gamma}\right), & \text{если } x > x_{p_2}, \end{cases}$$

где $x_{p_2} = \frac{S}{r_D - \gamma} \cdot \frac{\delta - (1-\rho)r_D}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, $x_{p_1} = \min\left\{\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, y(x_{p_2}, 1)\right\}$. Более того, уравнение (23) имеет единственное решение $M_r(x_{p_1}, r_L)$ на множестве $((x)_+, x_{p_1})$, а уравнение (22) имеет единственное решение $y(x_{p_2}, 1)$ на множестве $(0, x_{p_2})$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3, сформулируем и докажем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, существует и единственен экстремум функции $f(x)$ на множестве (a, b) , то существует единственная точка $c \in (a, b)$: $f(c) = 0$.

Доказательство. Без ограничения общности, будем считать, что $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, точка экстремума является точкой максимума (случай, когда точка экстремума является точкой минимума, а также случай $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ доказываются аналогично). Пусть $d = \arg \max_{(a,b)} \{f(x)\}$. Тогда, на множестве $[a, d]$ функция $f(x)$ мо-

нотонно возрастает, а на множестве $(d, b]$ функция $f(x)$ монотонно убывает. Из монотонности следует, что $f(d) > f(b)$. Так как $f(b) > 0$, то на отрезке $[d, b]$ функция $f(x)$ не имеет корней. Функция $f(x)$ монотонна, на концах отрезка $[a, d]$ принимает значения разных знаков, поэтому существует единственная точка $c \in (a, b)$, которая является корнем функции $f(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, принимает значение $0 < f(a) \leq b - a$, а ее производная $\frac{df(x)}{dx} < -1$ на интервале (a, b) , то существует единственная точка $c \in [a, b]$: $f(c) = 0$.

Доказательство. Пусть $g(x) = -x + b$. Легко видеть, что функция $f(x) \leq g(x)$, причем равенство может достигаться только в точке $x = a$. В точке $x = b$ функция $g(b) = 0$, а так как $f(x) < g(x)$, $x \in (a, b)$, то $f(b) < 0$. Так как производная функции имеет определенный знак на интервале (a, b) , то функция $f(x)$ является монотонной. На концах отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, поэтому существует единственная точка $c \in (a, b)$, которая является корнем функции $f(x)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, принимает значение $0 > f(b) \geq -b + a$, а ее производная $\frac{df(x)}{dx} < -1$ на интервале (a, b) , то существует единственная точка $c \in [a, b]$: $f(c) = 0$.

Доказательство. Пусть $g(x) = -x + a$. Легко видеть, что функция $f(x) \geq g(x)$, причем равенство может достигаться только в точке $x = b$. В точке $x = a$ функция $g(a) = 0$, а так как $f(x) > g(x)$, $x \in [a, b)$, то $f(a) > 0$. Так как производная функции имеет определенный знак на интервале (a, b) , то функция $f(x)$ является монотонной. На концах отрезка $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, поэтому существует единственная точка $c \in (a, b)$, которая является корнем функции $f(x)$. Лемма доказана.

Лемма 4. 1. Если $\max\{\delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma\} < r_D$, то уравнение $y(x_{p_2}, 1)$ имеет единственное решение на множестве $(0, x_{p_2})$, где $x_{p_2} = \frac{S}{r_D - \gamma} \cdot \frac{\delta - (1-\rho)r_D}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$.

2. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < r_L < \delta + \rho\gamma$, то уравнение $y(x_{c_1}, -1)$ имеет единственное решение на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$, где $x_{c_1} = \max\left\{x_{p_1}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}\right\}$, $x_{p_1} = \frac{S(\delta - (1-\rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}$.

3. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < \delta + \rho\gamma < r_L$, то уравнение $y(x_{c_1}, -1)$ имеет единственное решение на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$, где $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$.

Доказательство. Докажем каждый из пунктов леммы.

1. Пусть $\hat{y} = y(x_{p_2}, 1)$. Подставим $\beta = 1$, $\bar{x} = x_{p_2}$ в уравнение (22). Вычтем из левой части уравнения (22) правую и рассмотрим функцию

$$f(\hat{y}) = \left[\frac{1 + \theta r_L}{1 + \theta r_D}\right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\hat{y}}{x_{p_2}} - \left[\left(\hat{y} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right) \left(x_{p_2} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right)^{-1}\right]^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}}.$$

По условию, $x_{p_2} = \frac{S}{r_D - \gamma} \cdot \frac{\delta - (1 - \rho)r_D}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Покажем, что $x_{p_2} < \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$:

$$\frac{S}{r_D - \gamma} \cdot \frac{\delta - (1 - \rho)r_D}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} < \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}.$$

Так как в рассматриваемом случае $r_D > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то обе части неравенства положительны. Умножим обе части неравенства на величину $\frac{1}{S} \cdot (r_D - \gamma) (r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}) (1 + \gamma\theta)$. После преобразований, получим

$$(r_D\theta + 1) [\rho\gamma - r_D + \delta] < 0. \quad (24)$$

Так как $r_D > \max \left\{ \delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma \right\}$, то выражение в квадратных скобках (24) отрицательно. Значит, неравенство (24) верно, и $x_{p_2} < \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$. Определим знаки функции $f(\hat{y})$ в точках $\hat{y} = 0$ и $\hat{y} = x_{p_2}$:

$$f(0) = - \left[\frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \left(\frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} - x_{p_2} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}} < 0,$$

$$f(x_{p_2}) = \left[\frac{1 + \theta r_L}{1 + \theta r_D} \right]^{\frac{1}{\rho}} - 1 > 0.$$

Последнее верно, так как $1 + \theta r_L > 1 + \theta r_D$.

Отметим, что функция $f(\hat{y})$ имеет единственный экстремум. Если этот экстремум находится вне множества $(0, x_{p_2})$, то функция $f(\hat{y})$ монотонна на отрезке $[0, x_{p_2}]$, $f(0) \cdot f(x_{p_2}) < 0$, значит, существует единственное значение $\hat{y}^* \in (0, x_{p_2}) : f(\hat{y}^*) = 0$. Это значение и будет является корнем уравнения $y(x_{p_2}, 1)$. Если экстремум функции $f(\hat{y})$ находится внутри множества $(0, x_{p_2})$, то, согласно лемме 1, функция $f(\hat{y})$ также имеет единственный корень на множестве $(0, x_{p_2})$.

2. Перейдем к доказательству второго пункта леммы. Пусть $\check{y} = y(x_{c_1}, -1)$. Подставим $\beta = -1$, $\bar{x} = x_{c_1}$ в уравнение (22). Вычтем из левой части уравнения (22) правую и рассмотрим функцию

$$g(\check{y}) = \left[\frac{1 + \theta r_D}{1 + \theta r_L} \right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\check{y}}{x_{c_1}} - \left[\left(\check{y} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right) \left(x_{c_1} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}}.$$

По условию, $x_{c_1} = \max \left\{ \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}, \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \right\}$. Сравним значение x_{c_1} со значением $\frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$. Пусть $x_{c_1} = \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}$. Покажем, что в данном случае $x_{c_1} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$:

$$\frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}.$$

Так как в рассматриваемом случае $r_L > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то обе части неравенства положительны. Умножим обе части неравенства на величину $\frac{1}{S} \cdot (r_L - \gamma) (r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}) (1 + \gamma\theta)$. После преобразований, получим

$$(r_L\theta + 1) [\rho\gamma - r_L + \delta] > 0. \quad (25)$$

Так как $r_L > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то выражение в квадратных скобках (25) положительно. Значит, $x_{c_1} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$. Если $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, то $x_{c_1} \geq \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}$. Таким образом, у функции $g(\check{y})$ коэффициент при множителе $\check{y}^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}}$ отрицателен, а при множителе $\check{y}$ положителен. Сравним положительные степени переменной $\check{y}$ у функции $g(\check{y})$. Покажем, что

$$1 > \frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1 + \gamma\theta)\rho}.$$

Перенесем левую часть в правую. После преобразований, получим

$$0 > \delta - \frac{\rho}{\theta} - r_D.$$

По условию $r_D > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, значит, неравенство $1 > \frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1+\gamma\theta)\rho}$ верно. Отсюда следует, что $g(\tilde{y}) \rightarrow +\infty$ при $\tilde{y} \rightarrow +\infty$. В точке $\tilde{y} = x_{c_1}$ функция

$$g(x_{c_1}) = \left[\frac{1 + \theta r_D}{1 + \theta r_L} \right]^{\frac{1}{\rho}} - 1 < 0.$$

Отметим, что функция $g(\tilde{y})$ имеет единственный экстремум. Если этот экстремум находится вне множества $(x_{c_1}, +\infty)$, то функция $g(\tilde{y})$ монотонна на $[x_{c_1}, +\infty)$, $g(x_{c_1}) \cdot f(\tilde{y}) < 0$ при $\tilde{y} \rightarrow +\infty$, значит, существует единственное значение $\tilde{y}^* \in (x_{c_1}, +\infty) : g(\tilde{y}^*) = 0$. Это значение и будет являться корнем уравнения $y(x_{c_1}, -1)$. Если экстремум функции $g(\tilde{y})$ находится внутри множества $(x_{c_1}, +\infty)$, то, согласно лемме 1, функция $g(\tilde{y})$ также имеет единственный корень на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$.

3. Перейдем к доказательству последнего пункта леммы. Покажем, что $x_{c_1} > \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$, где $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$:

$$\frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}.$$

Умножим обе части неравенства на положительную величину $\frac{1}{S} \cdot (r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta})(1 + \gamma\theta)$. После преобразований, получим

$$\delta + \rho\gamma > r_D.$$

По условию, $r_D < \delta + \rho\gamma$, значит, $x_{c_1} > \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$. Дальнейшее доказательство повторяет доказательство из п. 2.

Лемма доказана.

Лемма 5. Если $r_L > \max\{\delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma\}$, то уравнение $M_r(x_{p_1}, r_L)$, где $0 < x_{p_1} \leq \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, имеет единственный корень на множестве $((x)_+, x_{p_1})$.

Доказательство. Пусть $M_{r_L} = M_r(x_{p_1}, r_L)$. Подставим $\bar{x} = x_{p_1}$, $r = r_L$ в уравнение (23). Вычтем из левой части уравнения (23) правую и рассмотрим функцию

$$f(M_{r_L}) = x + \frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1 + \theta r_L)\rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)} M_{r_L} + \left[\frac{M_{r_L}}{x_{p_1}} \right]^{\frac{\rho(r_L - \gamma)}{r_L - \delta - \rho\gamma}} \cdot \left[\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} \right].$$

Рассмотрим случай, когда $x \leq 0$. Тогда корень функции $f(M_{r_L})$ будем искать на множестве $[0, x_{p_1})$. В точке $M_{r_L} = 0$ функция

$$f(0) = x + \frac{S}{r_L - \gamma} > 0,$$

а в точке $M_{r_L} = x_{p_1}$ функция

$$\begin{aligned} f(x_{p_1}) &= x + \frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1 + \theta r_L)\rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)} x_{p_1} + \frac{r_L\theta - \delta\theta + \rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} = \\ &= x + \frac{(1 - \rho)r_L - \delta}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} = x - x_{p_1} < 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Вычислим производную функции $f(M_{r_L})$:

$$\frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} = -\frac{(1 + \theta r_L)\rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)} + \frac{\rho(r_L - \gamma)}{r_L - \delta - \rho\gamma} \cdot \frac{1}{x_{p_1}} \cdot \left[\frac{M_{r_L}}{x_{p_1}} \right]^{\frac{\delta - (1 - \rho)r_L}{r_L - \delta - \rho\gamma}} \cdot \left[\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} \right].$$

Если $\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} < 0$, то функция $f(M_{r_L})$ монотонна, $f(0) \cdot f(x_{p_1}) < 0$, значит, существует единственный корень на интервале $(0, x_{p_1})$. Если $\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} > 0$, то функция $f(M_{r_L})$ имеет единственный экстремум. Если этот экстремум находится вне множества $(0, x_{p_1})$, то функция $f(M_{r_L})$ монотонна на $[0, x_{p_1}]$, $f(0) \cdot f(x_{p_1}) < 0$, значит, существует единственный корень на интервале $(0, x_{p_1})$. Если экстремум функции $f(M_{r_L})$ находится внутри множества $(0, x_{p_1})$, то, согласно лемме 1, функция $f(M_{r_L})$ также имеет единственный корень на множестве $(0, x_{p_1})$.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $x > 0$. В этом случае корень функции $f(M_{r_L})$ будем искать на множестве (x, x_{p_1}) .

Пусть $\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} < 0$. Получим оценку снизу на функцию $f(M_{r_L})$ при $M_{r_L} = x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{(1 + \theta r_L) \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_L)} x - \\ &\quad - \left[\frac{x}{x_{p_1}} \right]^{\frac{\rho(r_L - \gamma)}{r_L - \delta - \rho\gamma}} \cdot \left[\frac{S}{r_L - \gamma} - \frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} \right] > \left\{ \frac{x}{x_{p_1}} < 1, \text{ т.к. } x < x_{p_1} \right\} > \\ &\geq \frac{\theta \delta - \rho - \theta r_L}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_L)} x + \frac{r_L \theta - \delta \theta + \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_L)} x_{p_1} = \frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} (x_{p_1} - x) > 0. \end{aligned}$$

В точке $M_{r_L} = x_{p_1}$ функция $f(M_{r_L})$ положительна (26). Аналогично, функция $f(M_{r_L})$ монотонна, $f(x) \cdot f(x_{p_1}) < 0$, значит, существует единственный корень на интервале (x, x_{p_1}) .

Пусть $\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} > 0$. Производная функции $f(M_{r_L})$ удовлетворяет выражению (26). Вычислим значение производной функции $f(M_{r_L})$ в точке $M_{r_L} = x_{p_1}$. После упрощений подобных слагаемых, получим

$$\left. \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} \right|_{M_{r_L}=x_{p_1}} = \frac{\rho(1 + \gamma\theta)x_{p_1} - \rho S \theta}{\theta(r_L - \delta - \rho\gamma)x_{p_1}}.$$

Покажем, что $\left. \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} \right|_{M_{r_L}=x_{p_1}} < -1$:

$$\frac{\rho(1 + \gamma\theta)x_{p_1} - \rho S \theta}{\theta(r_L - \delta - \rho\gamma)x_{p_1}} < -1.$$

Разделим обе части неравенства на θ , приведем подобные слагаемые и выразим x_{p_1} . Получим

$$x_{p_1} < \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}.$$

По условию, $x_{p_1} \leq \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, значит, $\left. \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} \right|_{M_{r_L}=x_{p_1}} \leq -1$. Пусть $x < z < x_{p_1}$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} \right|_{M_{r_L}=z} &= -\frac{(1 + \theta r_L) \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_L)} + \frac{\rho(r_L - \gamma)}{r_L - \delta - \rho\gamma} \cdot \frac{1}{x_{p_1}} \cdot \left[\frac{z}{x_{p_1}} \right]^{\frac{\delta - (1 - \rho)r_L}{r_L - \delta - \rho\gamma}} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} \right] < -\frac{(1 + \theta r_L) \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_L)} + \frac{\rho(r_L - \gamma)}{r_L - \delta - \rho\gamma} \cdot \frac{1}{x_{p_1}} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_L} x_{p_1} - \frac{S}{r_L - \gamma} \right] = \left. \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} \right|_{M_{r_L}=x_{p_1}} \leq -1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что на отрезке $[x, x_{p_1}]$, функция $f(M_{r_L})$ в точке $M_{r_L} = x_{p_1}$: $f(x_{p_1}) = x - x_{p_1} < 0$, производная $\left. \frac{df(M_{r_L})}{dM_{r_L}} \right|_{M_{r_L}=x_{p_1}} < -1$ на интервале (x, x_{p_1}) , значит, выполняются условия леммы 3, и существует единственный корень функции $f(M_{r_L})$ на интервале (x, x_{p_1}) . Лемма доказана.

Лемма 6. Если $\delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D < \delta + \rho\gamma$, $x > x_{p_2} \geq \frac{S\rho}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, то уравнение $M_r(x_{p_2}, r_D)$ имеет единственное решение на множестве (x_{p_2}, x) .

Доказательство. Пусть $M_{r_D} = M_r(x_{p_2}, r_D)$. Подставим $\bar{x} = x_{p_2}$, $r = r_D$ в уравнение (23). Вычтем из левой части уравнения (23) правую и рассмотрим функцию

$$f(M_{r_D}) = x + \frac{S}{r_D - \gamma} - \frac{(1 + \theta r_D) \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_D)} M_{r_D} + \left[\frac{x_{p_2}}{M_{r_D}} \right]^{\frac{\rho(r_D - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r_D}} \cdot \left[\frac{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_D} x_{p_2} - \frac{S}{r_D - \gamma} \right].$$

Определим знак функции $f(M_{r_D})$ в точке $M_{r_D} = x_{p_2}$. Получим

$$f(x_{p_2}) = x - x_{p_2} > 0.$$

Рассмотрим случай, когда $\frac{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_D} x_{p_2} - \frac{S}{r_D - \gamma} > 0$. Определим знак функции $f(M_{r_D})$ в точке $M_{r_D} = x$. Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{S}{r_D - \gamma} - \frac{(1 + \theta r_D) \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_D)} x + \left[\frac{x_{p_2}}{x} \right]^{\frac{\rho(r_D - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r_D}} \cdot \left[\frac{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_D} x_{p_2} - \frac{S}{r_D - \gamma} \right] \leq \\ &\leq \left\{ \frac{x_{p_2}}{x} < 1, \text{ т.к. } x_{p_2} < x \right\} \leq x - \frac{(1 + \theta r_D) \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_D)} x + \frac{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_D} x_{p_2} = \\ &= \frac{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_D} (x_{p_2} - x) < 0. \end{aligned}$$

Покажем, что экстремума у функции $f(M_{r_D})$ на множестве $(0, +\infty)$ нет. Выпишем производную:

$$\frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} = -\frac{(1 + \theta r_D) \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_D)} - \frac{\rho(r_D - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r_D} \cdot \frac{1}{M_{r_D}} \cdot \left[\frac{x_{p_2}}{M_{r_D}} \right]^{\frac{\rho(r_D - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r_D}} \cdot \left[\frac{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_D} x_{p_2} - \frac{S}{r_D - \gamma} \right]. \quad (27)$$

Очевидно, что $\frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} < 0$ на всей области определения, т.е. функция $f(M_{r_D})$ убывающая, не имеющая экстремумов. Таким образом, функция $f(M_{r_D})$ монотонна на множестве (x_{p_2}, x) , имеет разные знаки на концах этого множества, значит, существует единственный корень функции $f(M_{r_D})$ внутри множества (x_{p_2}, x) .

Перейдем к рассмотрению случая, когда $\frac{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_D} x_{p_2} - \frac{S}{r_D - \gamma} < 0$. Производная функции $f(M_{r_D})$ удовлетворяет выражению (27). Вычислим значение производной функции $f(M_{r_D})$ в точке $M_{r_D} = x_{p_2}$. После упрощений подобных слагаемых, получим

$$\left. \frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} \right|_{M_{r_D}=x_{p_2}} = \frac{\rho S \theta - \rho(1 + \gamma \theta) x_{p_2}}{\theta (\delta + \rho\gamma - r_D) x_{p_2}}.$$

Покажем, что $\left. \frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} \right|_{M_{r_D}=x_{p_2}} < -1$:

$$\frac{\rho S \theta - \rho(1 + \gamma \theta) x_{p_2}}{\theta (\delta + \rho\gamma - r_D) x_{p_2}} < -1.$$

Разделим обе части неравенства на θ , приведем подобные слагаемые и выразим x_{p_2} . Получим

$$\frac{S \rho}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} < x_{p_2}.$$

По условию, $\frac{S \rho}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \leq x_{p_2}$, значит, $\left. \frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} \right|_{M_{r_D}=x_{p_2}} \leq -1$.

Пусть $z > x_{p_2}$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \left. \frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} \right|_{M_{r_D}=z} &= -\frac{(1 + \theta r_D) \rho}{\theta (\delta - (1 - \rho)r_D)} + \frac{\rho(r_D - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r_D} \cdot \frac{1}{z} \cdot \left[\frac{x_{p_2}}{z} \right]^{\frac{\rho(r_D - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r_D}} \times \\ &\times \left[\frac{S}{r_D - \gamma} - \frac{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}{\delta - (1 - \rho)r_D} x_{p_2} \right] < \left\{ \frac{1}{z} < \frac{1}{x_{p_2}} \right\} < \left. \frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} \right|_{M_{r_D}=x_{p_2}} \leq -1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что на отрезке $[x_{p_2}, x]$ функция $f(M_{r_D})$ в точке $M_{r_D} = x_{p_2}$: $f(x_{p_2}) = x - x_{p_2} > 0$, производная $\frac{df(M_{r_D})}{dM_{r_D}} < -1$ на интервале (x_{p_2}, x) , значит, выполняются условия леммы 2, и существует единственный корень функции $f(M_{r_D})$ на интервале (x_{p_2}, x) . Лемма доказана.

Для качественного анализа экономического поведения репрезентативного домашнего хозяйства на несовершенном рынке кредитов и депозитов было разработано специализированное Приложение [20]. В зависимости от задаваемых параметров модели: экономической конъюнктуры r_L, r_D, γ и поведенческих характеристик репрезентативного домашнего хозяйства θ, ρ, δ , Приложение строит поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$. Гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ и $\varphi_{r_D}(x)$ разделяют плоскость $Ox\varphi$ на три области: заимствования, не взаимодействия с банками и

сбережения. Приложение позволяет интерактивно строить траектории $\varphi(x; x_0, T)$ по заданной начальной точке $x(0) = x_0$ для конечного временного горизонта T , подбирая начальное значение $\varphi(0) = \varphi_0$ так, чтобы удовлетворить условию трансверсальности $x(T) = 0$. Визуализация поля скоростей координат x, φ на плоскости $Ox\varphi$ и построения траекторий $\varphi(x; x_0, T)$ позволяет на качественном уровне изучать структуру оптимальной траектории $\varphi(x)$, которая является предельной для $\varphi(x; x_0, T)$ при $T \rightarrow +\infty$.

Опираясь на утверждения и леммы выше, приступим к доказательству теоремы 3.

Доказательство. Рассмотрим каждый из типов поведения теоремы.

Тип 1.1. Зафиксируем начальное значение $x(0) = x_0$. Нам необходимо найти такое значение сопряженной переменной в начальный момент времени $\varphi(0) = \varphi_0$, чтобы удовлетворить условию трансверсальности в конечный момент времени $x(T) = 0$. В режиме заимствования сопряженная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (10). Решением этого дифференциального уравнения является функция

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{[\delta + \rho\gamma - r_L]t}. \quad (28)$$

Подставим решение (28) в дифференциальное уравнение (9). Решив его, получим траекторию изменения фазовой координаты x в зависимости от начальных значений φ_0, x_0 :

$$x(t; \varphi_0, x_0) = -\frac{S}{r_L - \gamma} + \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \varphi_0^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\delta - (1-\rho)r_L} e^{\frac{r_L - \delta - \rho\gamma}{\rho}t} + e^{(r_L - \gamma)t} \left[x_0 + \frac{S}{r_L - \gamma} - \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \varphi_0^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\delta - (1-\rho)r_L} \right]. \quad (29)$$

Выразим φ_0 из уравнения (29), разделив уравнение (29) на величину $e^{(r_L - \gamma)T}$ и устремив $T \rightarrow +\infty$. Получим

$$\varphi_0 = \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L}\right)^{1-\rho} \left[\frac{(r_L - \gamma)\rho}{(x_0(r_L - \gamma) + S)(\delta - (1-\rho)r_L)} \right]^\rho.$$

Так как начальное значение x_0 произвольно из допустимого множества $\left(-\frac{S}{r_L - \gamma}, +\infty\right)$, мы получаем оптимальную траекторию $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L}\right)^{1-\rho} \left[\frac{(r_L - \gamma)\rho}{(x(r_L - \gamma) + S)(\delta - (1-\rho)r_L)} \right]^\rho. \quad (30)$$

Подставляя оптимальную траекторию $\varphi(x)$ в уравнение (8), мы получаем синтез оптимального управления в области заимствования

$$M(x; S, r_L, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \frac{\theta(\delta - (1-\rho)r_L)}{\rho(1 + \theta r_L)} \left(x + \frac{S}{r_L - \gamma}\right).$$

Покажем, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ лежит ниже гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, т.е. $\varphi(x) < \varphi_{r_L}(x)$ для любого $x > 0$:

$$\left(\frac{\theta}{1 + \theta r_L}\right)^{1-\rho} \left[\frac{(r_L - \gamma)\rho}{(x(r_L - \gamma) + S)(\delta - (1-\rho)r_L)} \right]^\rho < \frac{\theta}{1 + \theta r_L} x^{-\rho}. \quad (31)$$

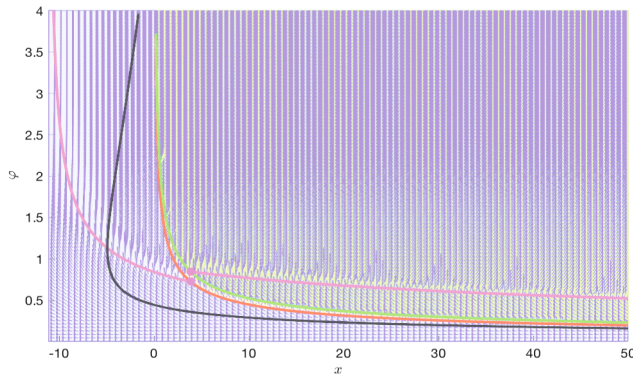
Разделим обе части неравенства на $\frac{\theta}{1 + \theta r_L}$ и возведем их в степень $\frac{1}{\rho}$. После преобразований, получим

$$x(r_L - \gamma)[\rho + \theta(r_L - \delta)] < S\theta(\delta - (1-\rho)r_L).$$

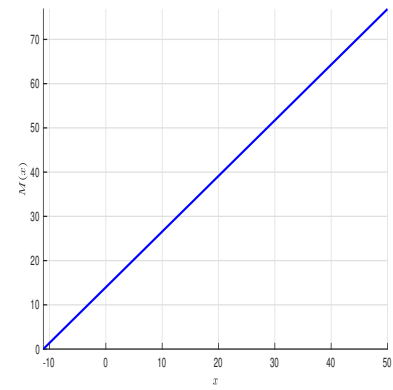
Разделив обе части неравенства на величину θ , получим

$$x(r_L - \gamma) \left[r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta} \right] < S(\delta - (1-\rho)r_L).$$

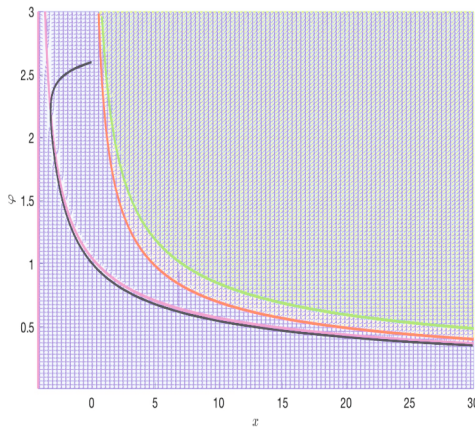
По условию, $r_L < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, значит, неравенство верно, оптимальная траектория $\varphi(x)$ не пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$, т.е. реализуется только режим заимствования. Для наглядности отобразим вид оптимальной траектории на плоскости $Ox\varphi$ и синтез оптимального управления на фиг. 2, 3. Пусть $S = 1, r_L = 0.1, r_D = 0.05, \gamma = 0.01, \theta = 4, \rho = 0.5, \delta = 0.2701, x_0 = 50, T = 20$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ устроена следующим образом. Она лежит в области заимствования ниже гиперболы $\varphi_z(x)$, с течением времени фазовая координата x уменьшается. За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ разворачивается вокруг гиперболы $\varphi_z(x)$, чтобы удовлетворить условию трансверсальности $x(T) = 0$.



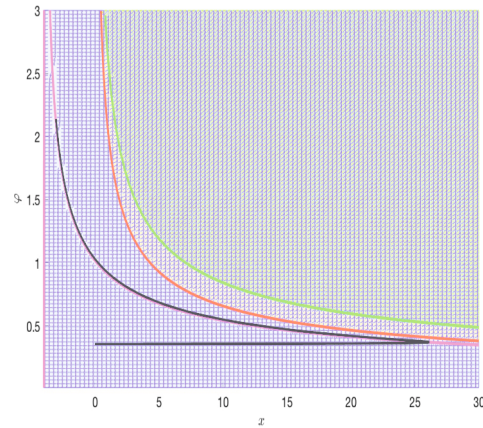
Фиг. 2. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.



Фиг. 3. Синтез оптимального управления.



Фиг. 4. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.



Фиг. 5. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.

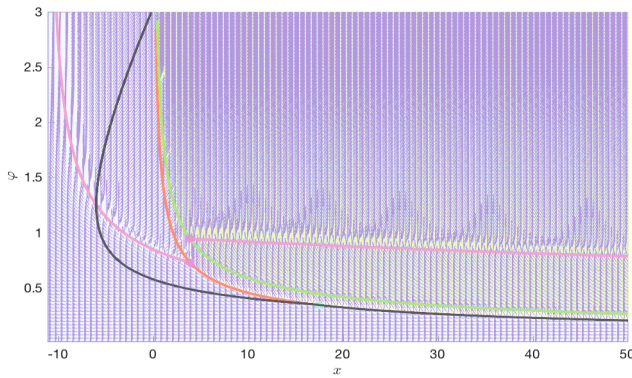
Для полноты картины продемонстрируем как устроена оптимальная траектория $\varphi(x)$ в случаях, когда $1 + \gamma\theta < 0$. Неравенство $1 + \gamma\theta < 0$ эквивалентно неравенству $\delta + \rho\gamma < \delta - \frac{\rho}{\theta}$. Согласно утверждению 1, в данном случае $\varphi_z(x) < \varphi_{r_L}(x)$.

Фиг. 4 соответствует условию $r_L < \delta + \rho\gamma$, где $S = 1$, $r_L = 0.14$, $r_D = 0.1$, $\gamma = -0.1$, $\theta = 11.4$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.2$, $x_0 = 30$, $T = 200$. Принцип движения оптимальной траектории $\varphi(x)$ на плоскости $Ox\varphi$ аналогичен фиг. 2. Фиг. 5 соответствует условию $\delta + \rho\gamma < r_L < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, где $S = 1$, $r_L = 0.153$, $r_D = 0.1$, $\gamma = -0.1$, $\theta = 11.4$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.2$, $x_0 = -3$, $T = 600$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ лежит в области заимствования между гиперболами $\varphi_{r_L}(x)$ и $\varphi_z(x)$. С течением времени фазовая координата x увеличивается. За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ разворачивается вокруг гиперболы $\varphi_z(x)$, чтобы удовлетворить условию трансверсальности $x(T) = 0$.

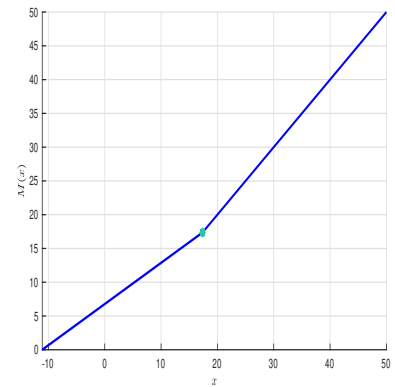
Тип 2.1. По условию, $r_L > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, значит, оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересечет гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ (см. (31)). Приравняв функции $\varphi(x)$ и $\varphi_{r_L}(x)$ друг к другу, получаем точку входа x_{p_1} оптимальной траектории $\varphi(x)$ из режима заимствования в автономный режим, где

$$x_{p_1} = \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}. \quad (32)$$

Так как $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то, по условию утверждения 3, оптимальная траектория $\varphi(x)$ после попадания на гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x = x_{p_1}$ остается на ней для любого $x \geq x_{p_1}$. Мы получили синтез оптимального управления, соответствующий типу 2.1. На фиг. 6, 7 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления



Фиг. 6. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.



Фиг. 7. Синтез оптимального управления.

при $S = 1$, $r_L = 0.1$, $r_D = 0.0201$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 4$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.1567$, $x_0 = 50$, $T = 40$. Точка касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $x_{p_1} = 17.4$.

Продолжим доказательство теоремы, приступив к рассмотрению типа 3.1.

Тип 3.1. Покажем, что при условиях типа 3.1. достигается режим сбережения. В рассматриваемом случае $r_D > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, таким образом оптимальная траектория $\varphi(x)$ сходит с гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в автономный режим в обратном времени в точке (x_{c_1}, φ_{c_1}) , где, согласно утверждению 3, $x_{c_1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, $x_{c_1} \geq x_{p_1}$, x_{p_1} — определяется выражением (32), $\varphi_{c_1} = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} x_{c_1}^{-\rho}$. Найдем решения дифференциальных уравнений (12), (13) в обратном времени при начальных условиях $x(0) = x_{c_1}$, $\varphi(0) = \varphi_{c_1}$. В соответствии с утверждением 2, положим $u(t) \equiv r_D$ в правой части дифференциального уравнения (13). Получим

$$x(t) = \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} + \left(x_{c_1} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right) e^{-\frac{1+\gamma\theta}{\theta}t}, \quad t \leq 0, \quad (33)$$

$$\varphi(t) = \varphi_{c_1} e^{[\delta + \rho\gamma - r_D]t}, \quad t \leq 0. \quad (34)$$

Условие пересечения оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_D}(x)$ означает выполнение равенства $\varphi(t) = \varphi_{r_D}(x(t))$. Подставим в него уравнения (33), (34). Учитывая, что $\varphi_{c_1} = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} x_{c_1}^{-\rho}$, получим

$$\frac{\theta}{1 + \theta r_L} x_{c_1}^{-\rho} \cdot e^{[\delta + \rho\gamma - r_D]t} = \frac{\theta}{1 + \theta r_D} \cdot \left[\frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} + \left(x_{c_1} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right) e^{-\frac{1+\gamma\theta}{\theta}t} \right]^{-\rho} \quad (35)$$

Выразим e^t из уравнения (33):

$$e^t = \left[\left(x - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right) \left(x_{c_1} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right)^{-1} \right]^{-\frac{\theta}{1+\gamma\theta}}. \quad (36)$$

Подставим выражение (36) в (35) и возведем обе части в степень $-\frac{1}{\rho}$. После преобразований, получим

$$\left[\frac{1 + \theta r_L}{1 + \theta r_D} \right]^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{x}{x_{c_1}} = \left[\left(x - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right) \left(x_{c_1} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1+\gamma\theta)\rho}}. \quad (37)$$

Уравнение (37) соответствует $y(\bar{x}, \beta)$ при $\beta = -1$, $\bar{x} = x_{c_1}$. Согласно п.2 леммы 4, уравнение (37) имеет единственное решение на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$. Обозначим решение уравнения (37) через x_{p_2} .

Найдем синтез оптимального управления в области сбережения при $x > x_{p_2}$. Согласно утверждению 4, точка входа оптимальной траектории $\varphi(x)$ в область сбережения имеет координаты (x_{p_2}, φ_{p_2}) , где $\varphi_{p_2} = \frac{\theta}{1 + \theta r_D} x_{p_2}^{-\rho}$. В области сбережения оптимальная траектория удовлетворяет дифференциальным уравнениям (15), (16). Представим решения дифференциальных уравнений (15), (16) в обратном времени из точки (x_{p_2}, φ_{p_2}) :

$$\varphi(t) = \varphi_{p_2} e^{[\delta + \rho\gamma - r_D]t}, \quad (38)$$

$$x(t) = -\frac{S}{r_D - \gamma} + \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_D}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \Phi_{p_2}^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\delta - (1-\rho)r_D} e^{\frac{r_D - \delta - \rho\gamma}{\rho} t} + e^{(r_D - \gamma)t} \left[x_{p_2} + \frac{S}{r_D - \gamma} - \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_D}\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} \Phi_{p_2}^{-\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{\rho}{\delta - (1-\rho)r_D} \right]. \quad (39)$$

Выразим из уравнения (38) e^t и подставим его в уравнение (39). После преобразований, получим связь фазовой координаты x с сопряженной функцией φ :

$$x = -\frac{S}{r_D - \gamma} + \frac{(1 + \theta r_D)\rho}{\theta(\delta - (1-\rho)r_D)} \cdot \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_D}\right)^{\frac{1}{\rho}} \cdot \varphi^{-\frac{1}{\rho}} + \varphi^{-\frac{r_D - \gamma}{r_D - \delta - \rho\gamma}} \times \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_D}\right)^{\frac{r_D - \gamma}{r_D - \delta - \rho\gamma}} \cdot x_{p_2}^{-\frac{\rho(r_D - \gamma)}{r_D - \delta - \rho\gamma}} \cdot \left[x_{p_2} + \frac{S}{r_D - \gamma} - \frac{(1 + \theta r_D)\rho}{\theta(\delta - (1-\rho)r_D)} \cdot x_{p_2} \right]. \quad (40)$$

Оптимальное управление в области сбережения удовлетворяет (14). Выразим из него φ :

$$\varphi = \frac{\theta}{1 + \theta r_D} \cdot M^{-\rho}.$$

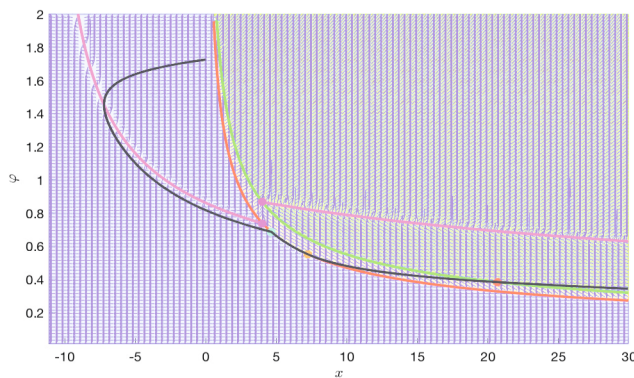
Последнее подставим в (40). Получим неявное уравнение, определяющее синтез оптимального управления в области сбережения:

$$x + \frac{S}{r_D - \gamma} = \frac{(1 + \theta r_D)\rho}{\theta(\delta - (1-\rho)r_D)} M + \left[\frac{x_{p_2}}{M}\right]^{\frac{\rho(r_D - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r_D}} \cdot \left[\frac{S}{r_D - \gamma} + \frac{\theta(\delta - r_D) - \rho}{\theta(\delta - (1-\rho)r_D)} x_{p_2} \right]. \quad (41)$$

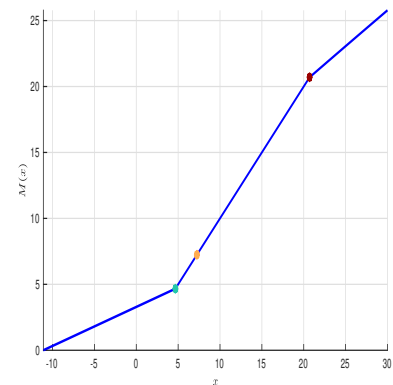
Согласно лемме 6, уравнение (41) имеет единственное решение на множестве (x_{p_2}, x) . Если уравнение (41) имеет решение на множестве $[0, x_{p_2}]$, то синтез оптимального управления $M(x)$ не монотонен. Это неверно, так как из монотонности функции цены для исходной задачи (4) при $T \rightarrow +\infty$ следует монотонность сопряженной переменной $\varphi(x)$, и, значит, синтез оптимального управления $M(x)$ также монотонен. Мы получили синтез оптимального управления, соответствующий типу 3.1.

На фиг. 8, 9 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления при $S = 1$, $r_L = 0.1$, $r_D = 0.05$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 4.2$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.1$, $x_0 = 30$, $T = 200$. Точки касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ равны соответственно $x_{p_1} = 4.7$, $x_{c_1} = 7.2$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p_2} = 20.7$.

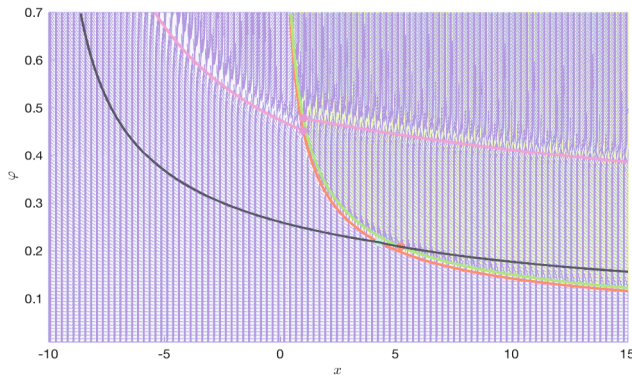
На фиг. 10, 11 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления при $S = 1$, $r_L = 0.1098$, $r_D = 0.05$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 1$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.2206$, $x_0 = 15$, $T = 80$. На гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ нет особого режима, оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает ее в точке $x_{p_1} = 4.3$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p_2} = 5.2$. Отметим, что в типе 3.1. движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ по



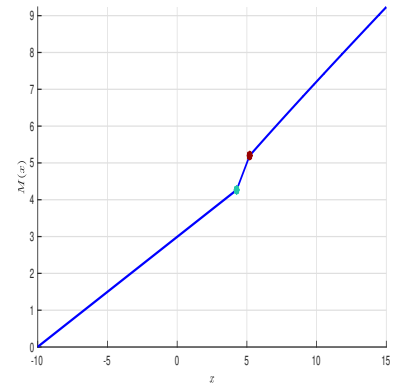
Фиг. 8. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.



Фиг. 9. Синтез оптимального управления.



Фиг. 10. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.



Фиг. 11. Синтез оптимального управления.

гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ имеет место быть в случае, когда выполнено неравенство

$$(r_L - r_D)(\delta - (1 - \rho)r_L) > \left(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}\right)(r_L - \delta - \rho\gamma).$$

Приступим к доказательству типа 2.2.

Тип 2.2. Рассмотрим случай $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < \delta + \rho\gamma < r_L$. В этом случае гипербола $\varphi_z(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $\hat{x} = \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}$. Согласно утверждению 3 и следствиям 1,2, оптимальная траектория $\varphi(x)$ касается гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x_{p_1} = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Покажем, что $x_{p_1} < \hat{x}$. Если это так, то

$$\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}} < \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}.$$

Обе части последнего неравенства умножим на положительную дробь $\frac{(1+\gamma\theta)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}{S}$. Перенесем все в левую часть. После преобразований, получим

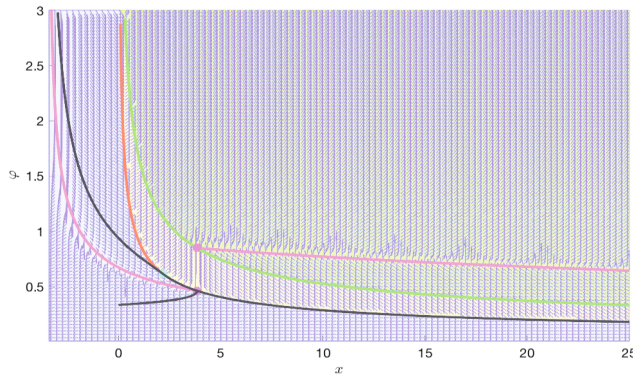
$$\theta(\delta + \rho\gamma - r_L) < 0,$$

что верно в рассматриваемом случае. Таким образом, $x_{p_1} < \hat{x}$. Так как $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то, согласно утверждению 3, для любого $x > x_{p_1}$, оптимальная траектория $\varphi(x)$ будет двигаться по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ и останется в автономном режиме. Найдём синтез оптимального управления в области заимствования. Рассуждения аналогичны доказательству типа 3.1.: Из точки $(x_{p_1}, \varphi_{r_L}(x_{p_1}))$ выпустим траекторию в обратном времени, удовлетворяющую дифференциальным уравнениям (9), (10). Аналогично рассуждениям (38)-(40), получим неявное уравнение, определяющее синтез оптимального управления в области заимствования:

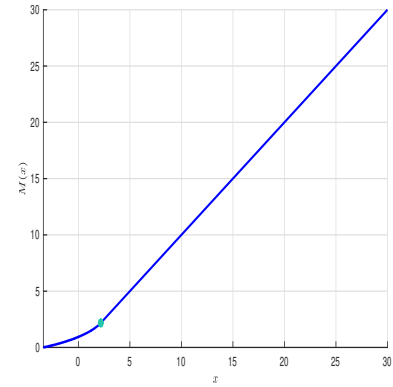
$$x + \frac{S}{r_L - \gamma} = \frac{(1 + \theta r_L)\rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)}M + \left[\frac{x_{p_1}}{M}\right]^{\frac{\rho(r_L - \gamma)}{\delta + \rho\gamma - r_L}} \cdot \left[\frac{S}{r_L - \gamma} + \frac{\theta(\delta - r_L) - \rho}{\theta(\delta - (1 - \rho)r_L)}x_{p_1}\right]. \quad (42)$$

Согласно лемме 5, уравнение (42) имеет единственное решение на множестве $((x)_+, x_{p_1})$. Аналогично рассуждениям доказательства типа 3.1., любой другой корень уравнения (42), лежащий на луче $[x_{p_1}, +\infty)$ не является синтезом оптимального управления в области заимствования.

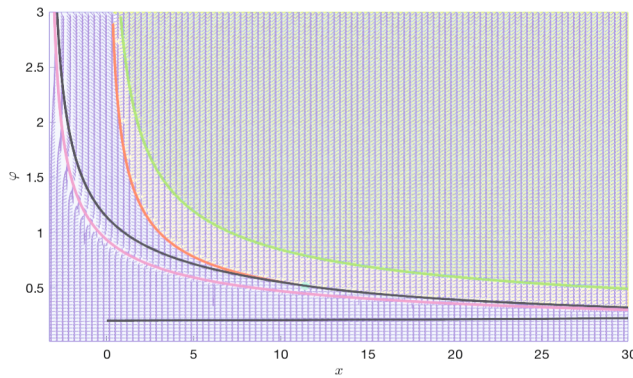
Оптимальная траектория состоит из двух частей. С одной стороны, она движется из области заимствования, касается гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x_{p_1} < \hat{x}$, после чего начинает движение по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$. В точке $\hat{x}$ на гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ меняется направление движения вдоль фазовой координаты x . За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ развернется вокруг гиперболы $\varphi_z(x)$ в точке $\bar{x} < \hat{x}$ и удовлетворит условию трансверсальности $x(T) = 0$. При $T \rightarrow +\infty$, оптимальная траектория $\varphi(x)$ спустится по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ в точку $A(\hat{x}, \varphi_{r_L}(\hat{x}))$. Легко убедиться, что точка A является точкой покоя системы в рассматриваемом случае. Действительно, относительно точки A движение траектории вдоль фазовой координаты x меняет направление, так как в нее входит гипербола $\varphi_z(x)$. Движение траектории вдоль координаты φ также меняет направление: при рассматриваемых соотношениях процентных ставок относительно величины $\delta + \rho\gamma$, в автономной области имеем $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, а в области заимствования $\frac{d\varphi}{dt} < 0$. С другой стороны, при $x > \hat{x}$ оптимальная траектория $\varphi(x)$ движется по гиперболе



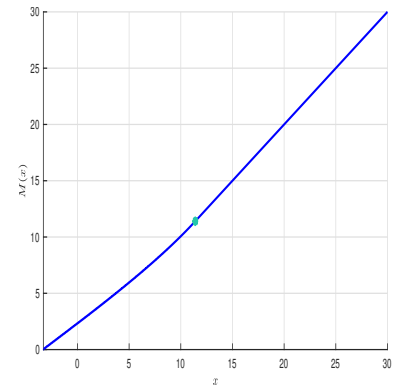
Фиг. 12. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.



Фиг. 13. Синтез оптимального управления.



Фиг. 14. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.



Фиг. 15. Синтез оптимального управления.

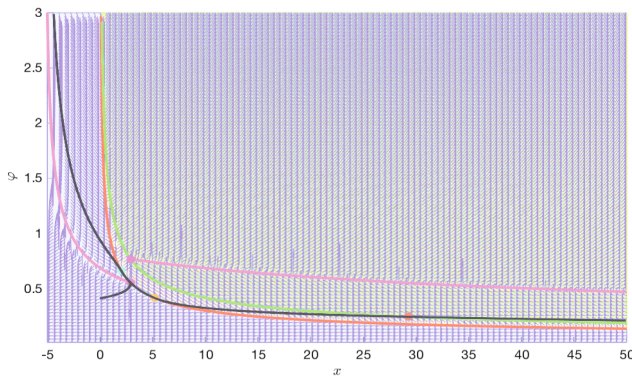
$\varphi_{r_L}(x)$ в направлении точки $\hat{x}$. За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ сойдет в область заимствования, чтобы удовлетворить условию трансверсальности $x(T) = 0$. При $T \rightarrow +\infty$, оптимальная траектория $\varphi(x)$ поднимется по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ в неподвижную точку A .

Рассмотрим случай $\max\{r_D, \delta + \rho\gamma\} < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$. Из неравенств следует, что $\delta + \rho\gamma < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, т.е. $1 + \gamma\theta < 0$. Согласно утверждению 1, в данном случае $\varphi_z(x) < \varphi_{r_L}(x)$. Аналогично, оптимальная траектория $\varphi(x)$ касается гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в точке $x_{p1} = \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Так как $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta}$, то, согласно утверждению 3, для любого $x > x_{p1}$ оптимальная траектория $\varphi(x)$ будет двигаться по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ и останется в автономном режиме. Движение по гиперболе определено однозначно ($\varphi_z(x) < \varphi_{r_L}(x)$). За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ развернется вокруг гиперболы $\varphi_z(x)$ в точке $\tilde{x} < \hat{x}$ и удовлетворит условию трансверсальности $x(T) = 0$.

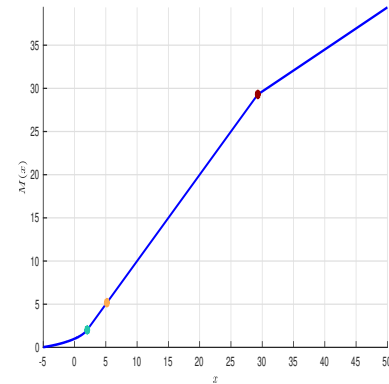
На фиг. 12, 13 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления для случая $r_D < \delta - \frac{\rho}{\theta} < \delta + \rho\gamma < r_L$. Пусть $S = 1$, $r_L = 0.3$, $r_D = 0.05$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 4$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.1959$, $x_0 = -3$ и $x_0 = 25$, $T = 70$. Точка касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ $x_{p1} = 2.2$.

На фиг. 14, 15 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления для случая $\max\{r_D, \delta + \rho\gamma\} < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_L$. Пусть $S = 1$, $r_L = 0.2$, $r_D = 0.1$, $\gamma = -0.1$, $\theta = 11.4$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.2$, $x_0 = -3$, $T = 70$. Точка касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ $x_{p1} = 11.4$.

Тип 3.2. Построение синтеза в типе 3.2. отличается от построения синтеза в типе 2.2. тем, что в рассматриваемом случае $r_D > \delta - \frac{\rho}{\theta}$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ сходит с гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$ в автономный режим в обратном времени в точке (x_{c1}, φ_{c1}) , где, согласно утверждению 3, $x_{c1} = \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Покажем, что $x_{c1} > \hat{x}$, где



Фиг. 16. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.



Фиг. 17. Синтез оптимального управления.

$$\hat{x} = \frac{S\theta}{1+\gamma\theta}.$$

$$\frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} > \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}.$$

Обе части последнего неравенства умножим на положительную дробь $\frac{(1+\gamma\theta)(r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta})}{S}$. Перенесем все в левую часть. После преобразований, получим

$$\theta(\delta + \rho\gamma - r_D) > 0,$$

что верно в рассматриваемом случае. Таким образом, $x_{c_1} > \hat{x}$. Покажем, что при условиях типа 3.2. достигается режим сбережения. Аналогично доказательству типа 3.1., получаем, что точка попадания оптимальной траектории на гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ определяется уравнением. (37). Оно соответствует $y(\bar{x}, \beta)$ при $\beta = -1$, $\bar{x} = x_{c_1}$. Согласно п. 3 леммы 4, уравнение (37) имеет единственное решение на множестве $(x_{c_1}, +\infty)$. Обозначим решение уравнения (37) через x_{p_2} . Нахождение синтеза оптимального управления в области сбережения повторяет рассуждения доказательства типа 3.1. В области сбережения синтез определяется неявным уравнением (41). Согласно лемме 6, уравнение (41) имеет единственное решение на множестве (x_{p_2}, x) . Если уравнение (41) имеет решение на множестве $[0, x_{p_2}]$, то синтез оптимального управления $M(x)$ не монотонен. Такого быть не может (см. доказательство типа 3.1.), значит, значение синтеза оптимального управления в области сбережения определяется однозначно на множестве (x_{p_2}, x) . Мы получили синтез оптимального управления, соответствующий типу 3.2.

На фиг. 16, 17 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления. Пусть $S = 1$, $r_L = 0.2$, $r_D = 0.05$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 3$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.12$, $x_0 = -5$ и $x_0 = 50$, $T = 50$. Точки касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ равны соответственно $x_{p_1} = 2$, $x_{c_1} = 5.2$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p_2} = 29.3$.

Тип 3.3. Отличие типа 3.3. от типа 3.1. состоит в том, что в типе 3.1. $\frac{dq}{dt} > 0$ во всех трех областях, а в типе 3.3. $\frac{dq}{dt} < 0$ во всех трех областях. В некотором смысле, можно сказать, что тип 3.3. “зеркален” типу 3.1. За любое конечное время T траектория $\varphi(x; T)$ развернется вокруг гиперболы $\varphi_z(x)$ и удовлетворит условию трансверсальности $x(T) = 0$. При $T \rightarrow +\infty$ оптимальная траектория $\varphi(x)$ будет лежать выше траектории разворота $\varphi_z(x)$. Рассуждая аналогично доказательству типа 1.1., повторяя шаги (28)–(30) с точностью до процентной ставки, получаем, что в области сбережения оптимальная траектория $\varphi(x)$ задается формулой

$$\varphi(x) = \left(\frac{\theta}{1 + \theta r_D} \right)^{1-\rho} \left[\frac{(r_D - \gamma)\rho}{(x(r_D - \gamma) + S)(\delta - (1 - \rho)r_D)} \right]^\rho. \quad (43)$$

Подставляя оптимальную траекторию $\varphi(x)$ в уравнение (14), мы получаем синтез оптимального управления в области сбережения

$$M(x; S, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta) = \frac{\theta(\delta - (1 - \rho)r_D)}{\rho(1 + \theta r_D)} \left(x + \frac{S}{r_D - \gamma} \right).$$

Согласно утверждению 4, на гиперболе $\varphi_{r_D}(x)$ нет особого режима оптимальной траектории, траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке x_{p_2} . Приравняв функцию (43) к $\varphi_{r_D}(x)$, получаем точку пересечения

оптимальной траектории гиперболы $\varphi_{r_D}(x)$. Получаем

$$x_{p_2} = \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_D)}{(r_D - \gamma)(r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta})}. \quad (44)$$

В автономной области движение оптимальной траектории подчиняется дифференциальным уравнениям (12)–(13). Найдем точку касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$, двигаясь в обратном времени из точки $A(x_{p_2}, \frac{\theta}{1+\theta r_D} x_{p_2}^{-\rho})$ на гиперболе $\varphi_{r_D}(x)$. Условие пересечения оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ означает выполнение равенства $\varphi(t) = \varphi_{r_L}(x(t))$, где

$$x(t) = \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} + \left(x_{p_2} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right) e^{-\frac{1+\gamma\theta}{\theta}t}, \quad t \leq 0, \quad (45)$$

$$\varphi(t) = \varphi_{p_2} e^{[\delta + \rho\gamma - r_D]t}, \quad t \leq 0.$$

Учитывая, что $\varphi_{p_2} = \frac{\theta}{1+\theta r_D} x_{p_2}^{-\rho}$, получим

$$\frac{\theta}{1 + \theta r_D} x_{p_2}^{-\rho} \cdot e^{[\delta + \rho\gamma - r_D]t} = \frac{\theta}{1 + \theta r_L} \cdot \left[\frac{S\theta}{1 + \gamma\theta} + \left(x_{p_2} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right) e^{-\frac{1+\gamma\theta}{\theta}t} \right]^{-\rho}. \quad (46)$$

Выразим e^t из уравнения (45):

$$e^t = \left[\left(x - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right) \left(x_{p_2} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right)^{-1} \right]^{-\frac{\theta}{1+\gamma\theta}}. \quad (47)$$

Подставим выражение (47) в (46) и возведем обе части в степень $-\frac{1}{\rho}$. После преобразований, получим

$$\left[\frac{1 + \theta r_L}{1 + \theta r_D} \right]^{\frac{1}{\rho}} \cdot \frac{x}{x_{p_2}} = \left[\left(x - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right) \left(x_{p_2} - \frac{S\theta}{1 + \gamma\theta}\right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[\delta + \rho\gamma - r_D]}{(1+\gamma\theta)\rho}}. \quad (48)$$

Уравнение (48) соответствует $y(\bar{x}, \beta)$ при $\beta = 1$, $\bar{x} = x_{p_2}$. Согласно п.1 леммы 4, уравнение (48) имеет единственное решение на множестве $(0, x_{p_2})$. Обозначим решение уравнения (48) через x_{c_1} .

Согласно следствию 2, движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ по гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ возможно на отрезке $x \in \left[\frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, \left[\frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}} \right] \right]$. Если $x_{c_1} < \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, то оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_L}(x)$ без движения по ней. Покажем, что $x_{c_1} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Очевидно, что $x_{c_1} < x_{p_2}$. Покажем, что $x_{p_2} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$:

$$\frac{S(\delta - (1 - \rho)r_D)}{(r_D - \gamma)(r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta})} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}.$$

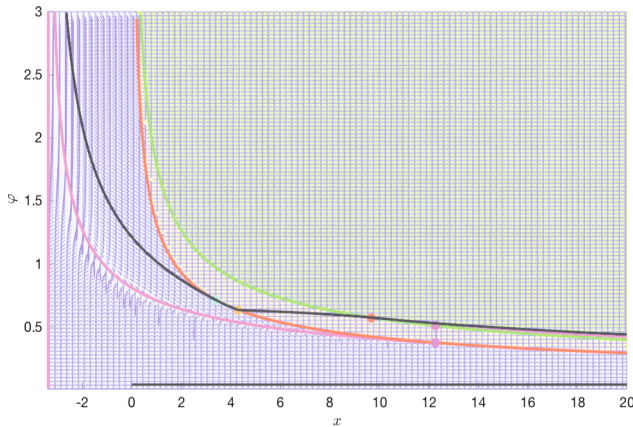
Обе части неравенства умножим на положительную дробь $\frac{(r_D - \gamma)(r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta})}{S}$. Перенесем все слагаемые в левую часть. После преобразований получим

$$\delta + \rho\gamma < r_D.$$

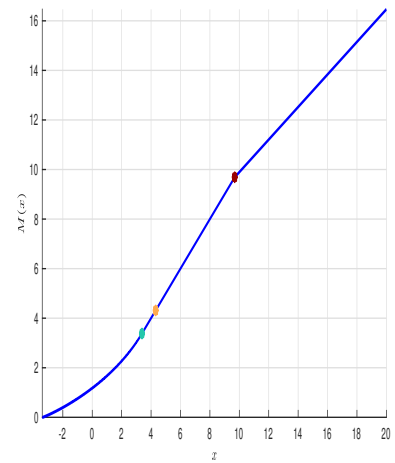
Последнее неравенство верно в рассматриваемом случае. Так как $x_{c_1} < x_{p_2}$, $x_{p_2} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$, то $x_{c_1} < \frac{\rho S}{r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta}}$. Обозначим точку начала движения оптимальной траектории $\varphi(x)$ в обратном времени в области заимствования через $x_{p_1} = \min \left\{ \frac{\rho S}{r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}}, x_{c_1} \right\}$. По условию, $r_D > \max \left\{ \delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma \right\}$. Так как $r_L > r_D$, то в рассматриваемом случае справедливо неравенство $r_L > \max \left\{ \delta - \frac{\rho}{\theta}, \delta + \rho\gamma \right\}$. Последнее выполняется в типе 3.2., поэтому построение синтеза оптимального управления в области заимствования аналогично типу 3.2.

Рассмотрим случай, когда справедлива следующая цепочка неравенств: $\delta - \frac{\rho}{\theta} < \delta + \rho\gamma < r_D$. На фиг. 18, 19 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления. Пусть $S = 1$, $r_L = 0.3$, $r_D = 0.2$, $\gamma = 0.0021$, $\theta = 12.6$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.1918$, $x_0 = -3$, $T = 100$. Точки касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ равны соответственно $x_{p_1} = 3.4$, $x_{c_1} = 4.3$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p_2} = 9.7$.

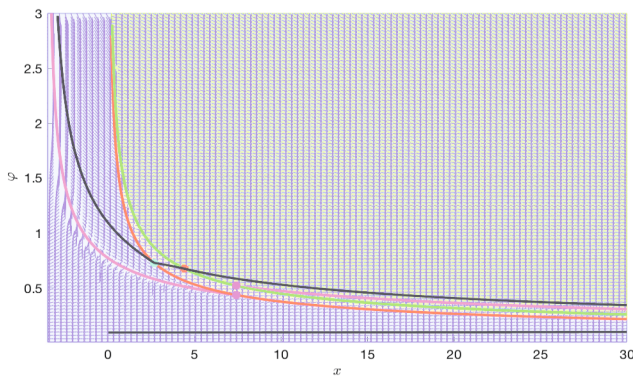
На фиг. 20, 21 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления при $S = 1$, $r_L = 0.2954$, $r_D = 0.2273$, $\gamma = 0.01$, $\theta = 8$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.2$, $x_0 = -3$, $T = 100$. На гиперболе $\varphi_{r_L}(x)$ нет особого



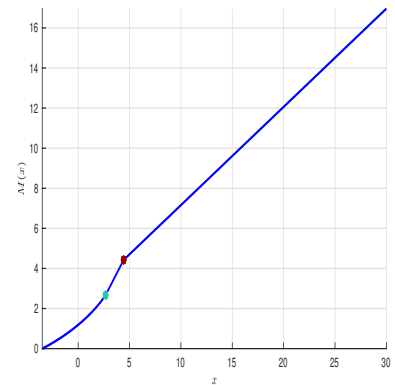
Фиг. 18. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.



Фиг. 19. Синтез оптимального управления.



Фиг. 20. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.



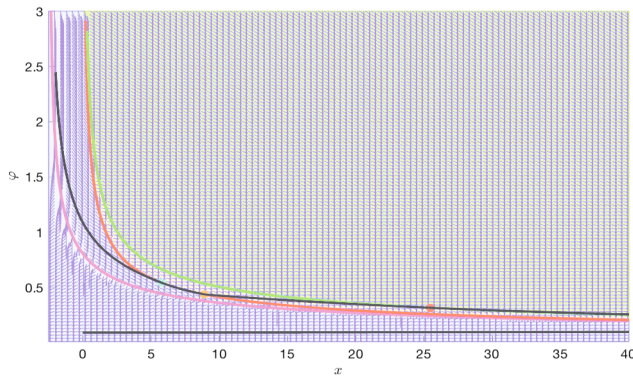
Фиг. 21. Синтез оптимального управления.

режима, оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает ее в точке $x_{p_1} = 2.7$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p_2} = 4.4$.

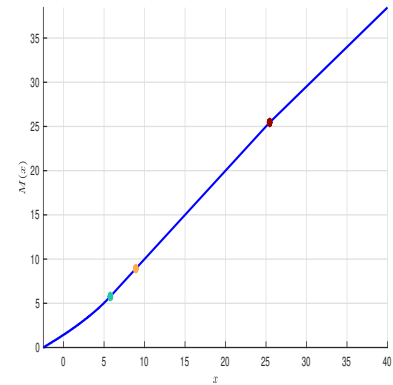
Случай, когда справедлива цепочка неравенств $\delta + \rho\gamma < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D$ отличается от предыдущего тем, что гипербола $\varphi_z(x)$ лежит ниже гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$. Покажем, что оптимальная траектория также будет находиться в трех областях. Для этого достаточно показать, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ при $x > x_{p_2}$ будет находиться в области сбережения. Предположим, что это не так. Пусть оптимальная траектория находится только в области заимствования. Тогда она определяется функцией (30) и справедливо неравенство $\varphi(x) < \varphi_{r_L}(x)$. Как и в доказательстве типа 1.1., это приводит к неравенству

$$x(r_L - \gamma) \left[r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta} \right] < S(\delta - (1 - \rho)r_L). \quad (49)$$

По условию, $r_L > \delta - \frac{\rho}{\theta}$, обе части неравенства (49) положительны. Для любого $x > \frac{S(\delta - (1 - \rho)r_L)}{(r_L - \gamma)[r_L - \delta + \frac{\rho}{\theta}]}$ неравенство (49) будет нарушаться, значит, предположение о том, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ находится только в области заимствования неверное. Предположим, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ находится в двух областях: заимствования и автономной. Движение оптимальной траектории $\varphi(x)$ в автономной области определяется дифференциальными уравнениями (9), (10), их решения определяются формулами (33), (34). Зафиксируем начальную точку $x(0) = x_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$ в автономной области. Выразим зависимость $t(x)$ и подставим в траекторию



Фиг. 22. Красным, зеленым и розовым отображены гиперболы $\varphi_{r_L}(x)$, $\varphi_{r_D}(x)$, $\varphi_z(x)$ соответственно. Черным отображена траектория $\varphi(x; x_0, T)$. Синим отображено поле скоростей на плоскости $Ox\varphi$.



Фиг. 23. Синтез оптимального управления.

$\varphi(t)$. Получим, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ в автономной области описывается функцией

$$\varphi(x) = \varphi_0 \left[\left(x - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta} \right) \left(x_0 - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[r_D - \delta - \rho\gamma]}{1+\gamma\theta}}. \quad (50)$$

При наших предположениях, функция (50) лежит ниже $\varphi_{r_D}(x)$, т.е.

$$\varphi_0 \left[\left(x - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta} \right) \left(x_0 - \frac{S\theta}{1+\gamma\theta} \right)^{-1} \right]^{\frac{\theta[r_D - \delta - \rho\gamma]}{1+\gamma\theta}} < \frac{\theta}{1+\theta r_D} x^{-\rho}. \quad (51)$$

Отметим, что степень множителя x в левой части неравенства (51) положительна: $\frac{\theta[r_D - \delta - \rho\gamma]}{1+\gamma\theta} > 0$, а в правой части неравенств отрицательна: $-\rho < 0$. Значит, существует значение $\hat{x}$ такое, что при любом $x > \hat{x}$ неравенство (51) будет нарушаться. Значит, предположение о том, что оптимальная траектория $\varphi(x)$ не находится в области сбережения неверное. В области сбережения оптимальная траектория $\varphi(x)$ определяется функцией (43). Покажем, что в области сбережения $\varphi(x) > \varphi_{r_D}(x)$: Аналогично (49), это приводит к неравенству

$$x(r_D - \gamma) \left[r_D - \delta + \frac{\rho}{\theta} \right] > S(\delta - (1 - \rho)r_D). \quad (52)$$

Неравенство (52) верно для любых $x > x_{p2}$, где x_{p2} определяется формулой (44).

На фиг. 22, 23 изображены оптимальная траектория и синтез оптимального управления для случая $\delta + \rho\gamma < \delta - \frac{\rho}{\theta} < r_D$. Пусть $S = 1$, $r_L = 0.3$, $r_D = 0.23$, $\gamma = -0.1$, $\theta = 12$, $\rho = 0.5$, $\delta = 0.255$, $x_0 = -2$, $T = 70$. Точки касания оптимальной траектории $\varphi(x)$ с гиперболой $\varphi_{r_L}(x)$ равны соответственно $x_{p1} = 5.8$, $x_{c1} = 8.9$. Оптимальная траектория $\varphi(x)$ пересекает гиперболу $\varphi_{r_D}(x)$ в точке $x_{p2} = 25.5$.

Мы рассмотрели все типы теоремы, для каждого из которых нашли оптимальную траекторию на плоскости $Ox\varphi$, построили синтез оптимального управления $M(x; S, r_L, r_D, \theta, \rho, \gamma, \delta)$. Теорема доказана.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалось математическое описание экономического поведения рационального домашнего хозяйства на несовершенном рынке потребительских кредитов и депозитов. Модель формализована в виде задачи оптимального управления на конечном временном горизонте. Негладкость правой части дифференциального уравнения на фазовую переменную мотивирует использовать принцип максимума Понтрягина в форме Ф. Кларка. При его применении возникает область, в которой домашние хозяйства не взаимодействуют с банковской системой. С областью не взаимодействия с банковской системой связана возможность особых режимов, исследование которых проделано в работе. Структура оптимального управления исследована на плоскости координат фазовой и сопряженной переменных. В зависимости от соотношений процентных ставок и поведенческих характеристик домашнего хозяйства, построена оптимальная траектория. При стремлении временного горизонта задачи оптимального управления к бесконечности построен синтез.

Математическая модель экономического поведения домашнего хозяйства может быть использована для идентификации поведенческих характеристик, как репрезентативного, так и группового поведения домашних хозяйств из различных социальных слоев. Модели группового поведения позволяют следить за экономическим поведением не репрезентативного домашнего хозяйства, а за поведением группового поведения большого количества домашних хозяйств. С математической точки зрения такие модели базируются на концепции игр среднего поля и представляют систему из связанных между собой уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, которое описывает выбор стратегии поведения домашних хозяйств, и уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка, которое описывает динамику состояния системы. В основе идентификации группового поведения домашних хозяйств лежит идентификация репрезентативного домашнего хозяйства, характерное для рассматриваемого социального слоя. Для идентификации используются статистические данные. Статистические данные Российского Мониторинга Экономического Положения и Здоровья Населения (РМЭЗ) [21], собираемые НИУ ВШЭ, и статистические данные Обследования Бюджетов Домашних Хозяйств (ОБДХ) [22], собираемые Росстатом [22], использовались авторами работы для калибровки модели экономического поведения репрезентативного домашнего хозяйства в [5], [23] и группового поведения домашних хозяйств в [24]. С их помощью на основе математической модели рамсеевского типа анализировалось состояние рынка потребительского кредита в России.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ramsey F.P. A mathematical theory of savings // The Economic Journal. 1928. Vol. 152. No 38. P. 543–559.
2. Рудева А.В., Шананин А.А. Синтез управления в модифицированной модели Рамсея с учетом ограничения ликвидности // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 12. С. 1799–1803.
3. Гималтдинов И.Ф. Исследование спроса на потребительские кредиты и наличные деньги // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 2. С. 84–98.
4. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988, 280 с.
5. Тарасенко М.В., Трусов Н.В., Шананин А.А. Математическое моделирование экономического положения домашних хозяйств в России // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 6. С. 1034–1056.
6. Крупенский Н.А., Кузина О.Е. Перекредитованность россиян: миф или реальность? // Вопросы экономики. 2018. Т. 11. С. 85–104.
7. World Bank. Household Over-Indebtedness in Russia, 2020.
8. Зубаревич Н.В., Сафронов С. Г. Люди и деньги: доходы, потребление и финансовое поведение населения российских регионов в 2000–2017 гг. // Изв. РАН. Сер. географическая. 2019. Т. 5. С. 3–17.
9. Базанова Е. Минэкономразвития готово поддержать закредитованное население. Ведомости, 2019; <https://www.vedomosti.ru/economics/articles/2019/07/2>.
10. Синяков А., Ушакова Ю. Опыт двух кредитных бумов в России и текущий рост ипотеки: почему важно вовремя остановиться // Аналитическая записка Департамента исследований и прогнозирования Банка России, 2019, 17 с.
11. Бессонова Е., Цветкова А. Финансы российских домохозяйств в 2022 году // Аналитическая записка Департамента исследований и прогнозирования Банка России, 2023. 28 с.
12. Всероссийское обследование домохозяйств по потребительским финансам [Электронный ресурс]. 2013–2022. http://www.cbr.ru/ec_research/vserossiyskoe-obsledovanie-domokhozyaystv-po-potrebitel-skim-finansam/ (дата обращения: 05.03.2024)
13. Гурьев С. М. Модель формирования сбережений и спроса на деньги: I // Матема. моделирование. 1994. Т. 6. № 7. С. 25–40.
14. Коваль П.К., Полбин А.В. Оценка потребительского поведения домохозяйств в РФ // Вопросы экономики. 2022. Т. 3. С. 98–117.
15. Komlos J. A generalization of a problem of Steinhaus // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1967. Vol. 18. P. 217–229.

16. *Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.* Nonsmooth Analysis and Control Theory. N.Y.: Springer-Verlag, 1998. 276 p.
17. *Плотников В.И., Сумин М.И.* Необходимые условия в негладкой задаче оптимального управления // Математические заметки. 1982. Т. 32. № 2. С. 187–197.
18. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961. 391 с.
19. *Ли Э., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972, 574 с.
20. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ No 2023685827. “Моделирование экономического поведения домашних хозяйств в условиях несовершенного рынка кредитов”. Автор: Трусов Николай Всеволодович. Правообладатель: Федеральное государственное учреждение “Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук” (ФИЦ ИУ РАН). Заявка No 2023685469. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 30 ноября 2023г.
21. "Russia Longitudinal Monitoring survey, RLMS-HSE "Российский мониторинг экономического положения и здоровья населения НИУ ВШЭ (RLMS HSE) проводимый Национальным исследовательским университетом "Высшая школа экономики" и ООО "Демоскоп" при участии Центра народонаселения Университета Северной Каролины в Чапел Хилле и Института социологии Федерального научно-исследовательского социологического центра РАН.
22. Обследование бюджетов домашних хозяйств [Электронный ресурс] / Федеральная служба государственной статистики. 2015–2022. <https://obdx.gks.ru/> (дата обращения: 05.03.2024)
23. *Трусов Н.В., Шананин А.А.* Математическое моделирование рынка потребительского кредита в России в условиях санкций // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 507. № 6. С. 71–80.
24. *Trusov N.V.* Identification of the household behavior modeling based on modified Ramsey model // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44. No 1. P. 455–469.

OPTIMAL CONTROL SYNTHESIS IN A RAMSAY-TYPE MODEL

N. V. Trusov^{a,b,*}, A. A. Shanani^{a,b,c,**}

^a 119333 Moscow, Vavilov Str., 44, Federal Research Center Computer Science and Control, RAS, Russia

^b 119991 Moscow, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Russia

^c 141701 Dolgoprudny, M.O., Institutsky lane, 9, MIPT, Russia

*e-mail: asantip@yandex.ru

**e-mail: khorelena@lamil.com

Received: 06.03.2024

Revised: 06.03.2024

Accepted: 31.05.2024

Abstract. The paper examines the mathematical description of the economic behavior of a representative household in an imperfect consumer credit and deposit market. The model is formalized as an optimal control problem on a finite time horizon. A classification of the behavior of social strata, dependence on the parameters of the economic environment is obtained. The synthesis of optimal control over an infinite time horizon is constructed.

Keywords: Ramsey type model, imperfect consumer credit market, synthesis of optimal control, maximum principle, mathematical modeling.