

МЕТОДОЛОГИЯ БЫСТРОГО АВТОМАТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

© 2024 г. В.И. Зубов^{1,*}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия
*e-mail: vladimir.zubov@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2024 г.

Переработанный вариант 27.03.2024 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

В работе описывается методология быстрого автоматического дифференцирования и ее преимущества при численном решении задач оптимального управления. Представлены результаты, полученные при решении с помощью этой методологии задач оптимального управления тепловыми процессами с фазовыми переходами. Библ. 11. Фиг. 7.

Ключевые слова: оптимальное управление, градиент, быстрое автоматическое дифференцирование, уравнение теплопроводности.

DOI: 10.31857/S0044466924090031, EDN: WLDAIW

ВВЕДЕНИЕ

При численном решении задач управления сложными динамическими системами возникающая при этом задача оптимального управления обычно сводится к задаче нелинейного программирования. В ВЦ РАН более 50 лет проводятся работы по созданию и совершенствованию численных методов решения такого рода задач. Часто они решаются градиентными методами минимизации целевого функционала. Для этого необходимо уметь вычислять градиент целевой функции конечного числа переменных.

Эффективно и с машинной точностью это позволяет сделать методология быстрого автоматического дифференцирования (БАД-методология), связанная с именем Ю.Г. Евтушенко и впервые достаточно полно представленная в [1]. Дальнейшее ее развитие (см. [2]) привело к тому, что в настоящее время БАД-методология представляет собой современный аппарат, помогающий эффективно решать задачи оптимального управления сложными динамическими системами. В основе БАД-методологии лежит общий подход к дифференцированию сложных функций, возникающих в многошаговых процессах. По своей сути эта методология представляет собой метод множителей Лагранжа, который применяется к дискретному варианту задачи оптимального управления. БАД-методология позволяет получить такую аппроксимацию сопряженной задачи, которая согласована с аппроксимацией прямой задачи и с аппроксимацией целевого функционала.

Важность и эффективность использования БАД-методологии при решении задач оптимизации и оптимального управления продемонстрирована, например, в работе [3]. Там показано, с какими трудностями приходится сталкиваться при использовании метода приближенного численного дифференцирования даже для вычисления производных элементарных функций. Эти трудности проиллюстрированы в [3] на примере сложной и практически важной функции, представляющей энергию системы атомов, потенциал взаимодействия которых — потенциал Терсоффа.

В работах [1], [4] сформулировано и обосновано утверждение о том, что время, требуемое для определения градиента целевой функции с помощью БАД-методологии, не превышает времени, требуемого для вычисления трех значений самой функции.

На основе БАД-методологии был разработан и применен на практике эффективный подход к численному решению ряда задач управления динамическими системами. Среди них выделим задачи управления тепловыми процессами с фазовыми переходами. С такого рода задачами (задачи типа Стефана) сталкиваются во многих случаях, из которых важнейшими и наиболее распространенными являются случаи плавления и затвердевания. Существенной чертой таких задач является наличие движущейся поверхности раздела между двумя

фазами (жидкой и твердой). Закон движения этой поверхности заранее неизвестен, и его следует определять. Именно на этой поверхности происходит поглощение или выделение тепла, связанное с фазовым переходом. Термические свойства фаз по обеим сторонам движущейся поверхности могут оказаться различными. Задачи этого класса заметно сложнее тех, в которых отсутствует переход вещества из одной фазы в другую.

Что касается задач оптимального управления процессами с фазовыми переходами, то под ними понимается выбор тех или иных параметров процесса (управляющих параметров) таким образом, чтобы либо сам процесс протекал по сценарию, наиболее близкому к заданному, либо поведение границы раздела жидкой и твердой фаз или функция от значений температуры в некоторой области были наиболее близки к требуемым. К трудностям решения прямых задач здесь прибавляются еще специфические трудности решения задач оптимального управления.

БАД-методология показала свою эффективность и при решении обратных задач, связанных с определением термодинамических параметров исследуемых материалов (см., например, [5]).

Следует также отметить, что предложенный подход с применением БАД-методологии является универсальным и что он может быть успешно применен при исследовании других задач оптимального управления сложными системами.

1. О БАД-МЕТОДОЛОГИИ

В этом разделе приведем канонические соотношения, определяющие сущность БАД-методологии.

Пусть непрерывно-дифференцируемая вектор-функция $\Phi(z, u)$ задает отображение $\Phi : R^n \times R^r \rightarrow R^n$ и пусть имеется связь $\Phi(z, u) = 0_n$, где $z \in R^n$, $u \in R^r$, 0_n есть n -мерный нулевой вектор.

Пусть также задана непрерывно-дифференцируемая скалярная функция $W(z, u)$.

Если функцию $z = z(u)$ определять с помощью соотношения (связи) $\Phi(z, u) = 0_n$, то можно рассматривать сложную функцию $\Omega(u) = W(z(u), u)$. Определить градиент такой сложной функции не всегда просто. БАД-методология позволяет автоматизировать этот процесс.

Представим вычисление функции $z = z(u)$ формально как некоторый многошаговый процесс

$$z_i = F(i, Z_i, U_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (1.1)$$

где Z_i — множество компонент z_j , встречающихся в правой части равенства (1.1), U_i — множество компонент u_j , встречающихся в правой части равенства (1.1).

Тогда градиент сложной функции $\Omega(u) = W(z(u), u)$ относительно переменной u определяется равенствами

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u_i} = W_{u_i}(z, u) + \sum_{q \in K_i} F_{u_i}(q, Z_q, U_q) p_q,$$

где множители $p_i \in R^n$ представляют собой решение сопряженной задачи

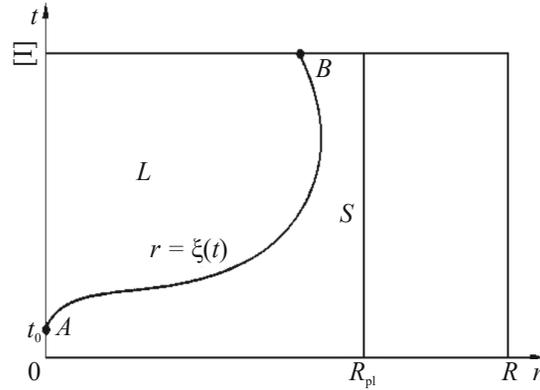
$$p_i = W_{z_i}(z, u) + \sum_{q \in Q_i} F_{z_i}(q, Z_q, U_q) p_q,$$

$$Q_i = \{j : 1 \leq j \leq n, \quad z_i \in Z_j\}, \quad K_i = \{j : 1 \leq j \leq n, \quad u_i \in U_j\}.$$

Важными преимуществами БАД-методологии являются следующие:

- она поставляет канонические формулы для вычисления градиента функции многих переменных, заданной на некотором многообразии;
- с помощью этих формул градиент вычисляется с машинной точностью;
- вычисление градиента функции с помощью формул БАД-методологии оказывается эффективным по сравнению с другими подходами.

Остановимся на рассмотрении некоторых задач оптимального управления, которые не удалось решить без применения БАД-методологии.



Фиг. 1.

2. УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ СВАРКИ МЕТАЛЛОВ

Первая задача, иллюстрирующая применение БАД-методологии, формулируется следующим образом. Пусть имеется некий металлический образец цилиндрической формы и узкий источник энергии, расположенный вдоль оси цилиндра. Благодаря энергии, выделяемой источником, металлический образец нагревается, и часть его, ближайшая к источнику, может расплавиться. Управляя выделяемой энергией, мы можем управлять процессом плавления и кристаллизации металлического образца. Распределение по времени количества выделяемого источником тепла (мощность источника) выбирается в качестве управляющей функции. В задаче требуется найти такое распределение мощности источника по времени, при котором будет расплавлена масса вещества, не меньшая заданной массы, процесс кристаллизации будет протекать со скоростью, не превышающей заданную скорость, и суммарная энергия, выделенная источником за время всего процесса, будет минимальной.

Математическая модель процесса плавления и кристаллизации вещества представляет собой двухфазную начально-краевую задачу типа Стефана. Сформулированная задача исследовалась в рамках одномерной (с радиальной симметрией) нестационарной постановки.

В плоскости независимых переменных (r, t) рассмотрим прямоугольную область $Q = \{(r, t) : 0 < r < R, 0 < t \leq \Xi\}$ (фиг. 1). Область Q гладкой линией AB , уравнение которой есть $r = \xi(t)$, разбивается на две подобласти L (область жидкой фазы) и S (область твердой фазы). Линия AB — траектория движения фронта плавления и кристаллизации. Если $t_0 \geq 0$ — момент времени, при котором зарождается линия AB , то подобласти L и S определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} L &= \{(r, t) : 0 < r < \xi(t), t_0 < t \leq \Xi\}, \\ S &= \{(r, t) : \xi(t) < r < R, 0 < t \leq \Xi\}. \end{aligned}$$

В области Q поставим следующую двухфазную задачу Стефана:

$$\begin{aligned} M_L &\equiv \rho_L C_L \frac{\partial T_L}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_L \frac{\partial T_L}{\partial r} \right) - F(r, t) = 0, & (r, t) \in L, \\ M_S &\equiv \rho_S C_S \frac{\partial T_S}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k_S \frac{\partial T_S}{\partial r} \right) - F(r, t) = 0, & (r, t) \in S, \\ T_S(r, 0) &= T_{in}(r), & 0 < r < R, \\ T_L[\xi(t), t] &= T_S[\xi(t), t] = T_{pl}, & t_0 \leq t \leq \Xi, \\ \left[k_S \frac{\partial T_S}{\partial r} \right] \Big|_{(\xi(t)+0, t)} - \left[k_L \frac{\partial T_L}{\partial r} \right] \Big|_{(\xi(t)-0, t)} &= \rho_S \lambda \xi'(t), & t_0 \leq t \leq \Xi, \\ k_S \frac{\partial T_S}{\partial r} \Big|_R &= \alpha [T_{ex} - T_S(R, t)], & 0 < t \leq \Xi, \\ \frac{\partial T_L}{\partial r}(0, t) &= 0, & t_0 < t \leq \Xi, \quad \frac{\partial T_S}{\partial r}(0, t) = 0, & 0 < t < t_0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $T(r, t)$ — температура вещества в точке с координатами (r, t) ; ρ, C, k — плотность вещества, его теплоемкость и коэффициент теплопроводности соответственно; λ — теплота плавления вещества; нижние индексы L и S указывают на принадлежность величины жидкой или твердой фазе соответственно; T_{pl} — температура

плавления вещества; $T_{in}(r)$ — начальная температура вещества, $T_{in}(r) \leq T_{pl}$; α — коэффициент теплообмена с окружающей средой; T_{ex} — температура окружающей среды.

Источник подводимого тепла $F(r, t)$ представим в виде $F(r, t) = \phi(r) f(t)$, где $\phi(r)$ — некоторая заданная функция, описывающая распределение выделяемой энергии по пространству.

Пусть $\xi(t)$ траектория движения фронта раздела фаз, соответствующая источнику $f(t)$, $t \in [0, \Xi]$, и ξ_f — максимальное значение величины $\xi(t)$ при $t_0 \leq t \leq \Xi$. Будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит классу $K(\Xi)$, если она:

- определена и кусочно-непрерывна на отрезке $[0, \Xi]$,
- имеет кусочно-непрерывную производную,
- удовлетворяет ограничениям $0 \leq f(t) \leq f_{max}$ для всех $t \in [0, \Xi]$,
- соответствующее ей $\xi_f \geq R_{pl}$, где R_{pl} ($R_{pl} < R$) — заданная величина,
- $\xi'(t) \geq -d^2$ для всех $t \in [0, \Xi - \beta^2]$.

Ограничение сверху на функцию $f(t)$ может отсутствовать. Для заданной конечной величины f_{max} значение величины Ξ не должно быть меньше некоторого определенного значения, иначе класс $K(\Xi)$ окажется пустым.

Вариационную задачу можно сформулировать следующим образом: среди функций $f(t)$ из класса $K(\Xi)$ найти такую функцию $f_{opt}(t)$, что функционал

$$J = \int_0^{\Xi} f(t) dt \tag{2.2}$$

достигает на ней минимального значения.

При решении прямой задачи осуществляется переход от неизвестной функции температуры $T(r, t)$ к функции теплосодержания $E(r, t)$, которая определяется через температуру следующим соотношением:

$$E(T) = \begin{cases} \rho_S C_S T, & T < T_{pl}, \\ \rho_L C_L (T - T_{pl}) + \rho_S \lambda + \rho_S C_S T_{pl}, & T_{pl} \leq T. \end{cases}$$

Функция $E(T)$ в точке плавления вещества T_{pl} терпит разрыв. Если считать функцию теплосодержания $E(r, t)$ основной, а температуру определять через нее с помощью равенства

$$T(E) = \begin{cases} E \rho_S^{-1} C_S^{-1}, & E < E_- = \rho_S C_S T_{pl}, \\ T_{pl}, & E_- \leq E \leq E_+ = E_- + \rho_S \lambda, \\ \frac{E + (\rho_L C_L - \rho_S C_S) T_{pl} - \rho_S \lambda}{\rho_L C_L}, & E_+ < E, \end{cases}$$

то температура как функция теплосодержания будет уже функцией непрерывной (эта функция является обратной к функции $E(r, t)$).

Коэффициент теплопроводности в общем случае зависит от температуры и при переходе от твердой фазы к жидкой (при температуре плавления) испытывает скачок. В предлагаемом алгоритме коэффициент теплопроводности рассматривается как функция теплосодержания и определяется формулой:

$$\Omega(E) = k[T(E)] = \begin{cases} k_S, & E < E_-, \\ k_S + \frac{(E - E_-)(k_L - k_S)}{(E_+ - E_-)}, & E_- \leq E \leq E_+, \\ k_L, & E_+ < E. \end{cases}$$

Задача (2.1) в терминах функции теплосодержания $E(r, t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Omega \frac{\partial T(E)}{\partial r} \right) + F(r, t), & (r, t) \in Q, \\ E(r, 0) &= E[T_{in}(r)], & 0 < r < R, \\ \frac{\partial E}{\partial r} \Big|_{r=0} &= 0, & 0 \leq t \leq \Xi, \\ \Omega(E) \frac{\partial T(E)}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \alpha \{ T_{ex} - T[E(R, t)] \}, & 0 \leq t \leq \Xi. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Для аппроксимации краевой задачи (2.3) в области Q вводится неравномерная сетка $\omega = \{r_i, t_j\}$. Использование интегроинтерполяционного метода и неявной аппроксимации по времени приводит к системе конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих краевую задачу (2.3). Получившаяся система нелинейных алгебраических уравнений решалась с помощью нового итерационного алгоритма, предложенного в [6]. Заканчивается процесс решения задачи (2.3) выделением траектории движения фронта раздела фаз.

Решение оптимизационной задачи проводилось численно с использованием градиентных методов спуска. Ограничения, накладываемые на решение задачи, учитывались с помощью метода штрафных функций. В результате этого минимизировался функционал $I = J + g(\xi_f) + \Theta$, где J — целевой функционал (2.2), $g(r) = A_0 \cdot (r - R_{pl})^2$ — штрафной функционал, отвечающий за выполнение условия $\xi_f = R_{pl}$, и $\Theta = \int_0^{\xi} A(t) \cdot \left(\frac{d\xi}{dt} + d^2\right) dt$ — штрафной функционал, обеспечивающий допустимую скорость остывания,

$$A(t) = \begin{cases} 0, & \left(\frac{d\xi}{dt} + d^2\right) \geq 0, \\ A_0(t), & \left(\frac{d\xi}{dt} + d^2\right) < 0. \end{cases}$$

Для аппроксимации обобщенного функционала I применялся метод прямоугольников, в результате чего получалась функция конечного числа переменных $\tilde{I}(f_1, \dots, f_M)$.

Компоненты градиента аппроксимированной целевой функции \tilde{I} по компонентам вектора управления $\{f^j\}$ вычислялись с помощью методологии быстрого автоматического дифференцирования:

$$\frac{\partial \tilde{I}}{\partial f^j} = \tau^j + \sum_{i=0}^w \tau^j p_i^j \phi_i, \quad 1 \leq j \leq M,$$

где w — порядковый номер узла пространственной сетки, удовлетворяющий условию

$$\phi(r) = \begin{cases} \phi_w(r) \neq 0, & 0 \leq r \leq r_w, \\ 0, & r > r_w. \end{cases}$$

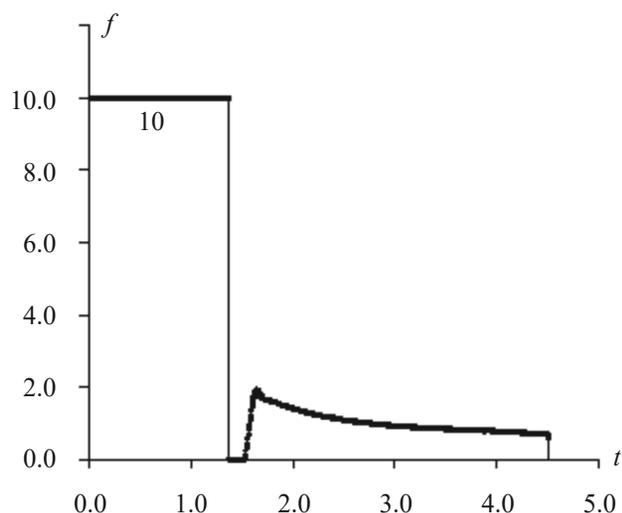
Переменные p_i^j — сопряженные переменные (импульсы), которые должны определяться в результате решения системы уравнений, аппроксимирующих непрерывную сопряженную задачу. Но не любая (даже высокой точности) аппроксимация сопряженной задачи позволяет получить точное значение градиента целевой функции. Аппроксимация сопряженной задачи должна быть согласованной с аппроксимацией прямой задачи (2.3) и с аппроксимацией целевого функционала (2.2). Такую согласованную аппроксимацию сопряженной задачи позволяет автономно получить БАД-методология. Вывод формул аппроксимации сопряженной задачи достаточно громоздок и приведен в работе [7]. Отметим, что использование БАД-методологии позволяет вычислять градиент целевого функционала с машинной точностью.

Анализ результатов проведенных численных расчетов оптимизационной задачи позволил сделать вывод о структуре оптимального управления (фиг. 2):

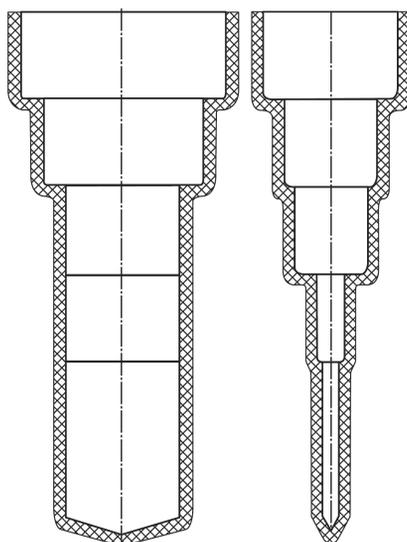
- оптимальное управление состоит из двух основных частей;
- первая часть (ответственная, в основном за плавление вещества) совпадает с верхним участком краевого экстремума $f(t) \equiv f_{\max}$;
- вторая часть оптимального управления (ответственная за кристаллизацию вещества) меньше первой части (если сравнивать их средние значения) и отделяется от нее небольшим участком с $f(t) \equiv 0$. Следует отметить, что включение источника на этапе кристаллизации происходит раньше того момента времени, когда скорость движения фронта кристаллизации достигает максимально допустимой величины (нередко это включение источника происходит на этапе плавления).

Основываясь на результатах проведенных исследований, был предложен алгоритм приближенного построения оптимального управления в рассмотренной выше задаче управления процессом плавления и кристаллизации вещества. А именно, в том диапазоне параметров, в котором проводились исследования, оптимальное управление может быть определено в результате последовательного решения двух вспомогательных задач: вначале задачи плавления, а затем, используя ее результаты как начальные данные, задачи кристаллизации. Использование такого разбиения при решении полной вариационной задачи существенно экономит затраты на получение оптимального решения.

Следует подчеркнуть, что применение БАД-методологии при решении этой задачи оказало существенное влияние на скорость получения результата и на его точность.



Фиг. 2.



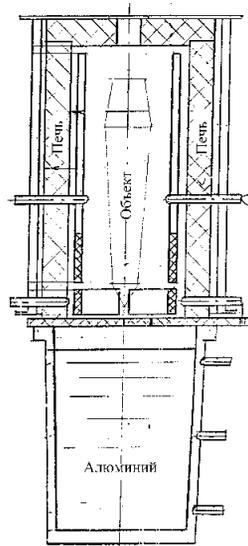
Фиг. 3.

3. УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ МЕТАЛЛА В ЛИТЕЙНОМ ДЕЛЕ

Другая задача, при решении которой использование БАД-методологии оказалось необходимым, относится к литейному делу.

Одним из важных этапов литейного дела является кристаллизация расплавленного металла. От того, как протекал процесс затвердевания жидкого металла, зависит качество полученного образца. Установлено, что для получения образца хорошего качества желательно, чтобы поверхность раздела фаз была бы как можно ближе к плоской, и чтобы скорость ее движения была бы небольшой.

Процесс кристаллизации металла начинается с того, что в рабочую полость литейной формы с определенной конфигурацией внешней границы и рабочей полости (продольные проекции реального объекта представлены на фиг. 3) заливают жидкий металл. Литейная форма подогрета до заданной температуры T_{form} , а залитый в нее металл до температуры T_{met} . После этого под воздействием изменяющихся внешних условий начинается постепенное охлаждение объекта (литейная форма с залитым в нее металлом). Для управления этим процессом используется специальная установка (фиг. 4). Она состоит из верхней и нижней частей. Верхняя часть представляет собой плавильную печь, внутри которой перемещается объект. Она моделируется двумя вертикальными, расположенными друг против друга стенками, которые соединены сверху горизонтальной стенкой (“крыша”).



Фиг. 4.

Стенки печи и “крыша” разогреты до заданной сравнительно высокой температуры. Нижняя часть установки является охладителем и состоит из большой емкости, заполненной жидким алюминием.

В работе рассматривается вариант, когда две боковые стенки литейной формы (с тех сторон, где отсутствуют стенки печи) изготовлены из теплоизолированного материала. Такая модель литейной формы описывает ситуацию, когда в рассматриваемой установке обрабатываются несколько литейных форм, расположенных в ряд недалеко друг от друга. Литейная форма, заполненная жидким металлом, медленно погружается в охладитель. Жидкий алюминий имеет сравнительно низкую температуру, благодаря чему происходит кристаллизация металла. Однако объект получает тепло от стенок плавильной печи, что не позволяет процессу кристаллизации протекать слишком быстро.

Процесс остывания металла и литейной формы описывается нелинейным уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (x, y, z) \in Q. \quad (3.1)$$

Здесь Q — область литейной формы с залитым в нее металлом, имеющая кусочно-гладкую границу Γ ; T — температура вещества в точке с координатами (x, y, z) в момент времени t . Функция теплосодержания $G(T(x, y, z, t))$ определяется соотношениями:

$$G(T(x, y, z, t)) = \begin{cases} G_1(T), & (x, y, z) \in \text{металлу}, \\ G_2(T), & (x, y, z) \in \text{форме}, \end{cases}$$

$$G_1(T) = \begin{cases} \rho_S c_S T, & T < T_1, \\ \left[\rho_S c_S + \rho_S \lambda (T_2 - T_1)^{-1} \right] T - \rho_S \lambda T_1 (T_2 - T_1)^{-1}, & T_1 \leq T < T_2, \\ \rho_L c_L (T - T) + \rho_S c_S T_2 + \rho_S \lambda, & T \geq T_2, \end{cases} \quad G_2(T) = \rho_\Phi c_\Phi T,$$

λ — удельная теплота плавления. Коэффициент теплопроводности имеет вид:

$$K(T) = \begin{cases} K_1(T), & (x, y, z) \in \text{металлу}, \\ k_\Phi, & (x, y, z) \in \text{форме}, \end{cases} \quad K_1(T) = \begin{cases} k_S, & T < T_1, \\ \frac{k_L - k_S}{T_2 - T_1} T + \frac{k_S T_2 - k_L T_1}{T_2 - T_1}, & T_1 \leq T < T_2, \\ k_L, & T \geq T_2. \end{cases}$$

Константы c_S , c_L , c_Φ , ρ_S , ρ_L , ρ_Φ , k_S , k_L , k_Φ , T_1 , T_2 заданы. Термодинамические коэффициенты претерпевают разрыв на границе металл-форма. На этой границе требуется выполнение двух условий: непрерывность температуры и потока тепла. Интервал $[T_1, T_2]$ — узкий интервал температур, где термодинамические коэффициенты и функция теплосодержания изменяются очень быстро.

При пересечении поверхности раздела фаз температура остается непрерывной, а тепловой поток претерпевает скачок такой величины: $\left[K \frac{\partial T}{\partial n} \right] = \rho_S \lambda v_n$, (v_n — скорость поверхности раздела фаз).

Процесс остывания литейной формы и находящегося в ней металла происходит благодаря воздействию окружающей среды на объект. Одним из механизмов переноса тепла в данной задаче является тепловое излучение (см. [8]), а именно, потеря тепловой энергии тела за счет собственного излучения, приобретение энергии за счет излучения окружающего жидкого алюминия, приобретение энергии за счет излучения стенок печи и “крыши”, приобретение энергии за счет излучения поверхности жидкого алюминия. Кроме того, учитывается обмен тепловой энергией за счет теплопередачи между жидким алюминием и объектом.

На границе Γ области Q задаются условия теплообмена с внешней средой. Как отмечалось выше, эти условия зависят от рассматриваемой точки поверхности и времени. Однако все условия теплообмена можно записать в таком общем виде:

$$\tilde{\alpha}T + \tilde{\beta} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{\gamma}. \tag{3.2}$$

В соотношении (3.2) $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ — известные функции координат (x, y, z) точки поверхности Γ и температуры $T(x, y, z, t)$, а под $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = T_{\mathbf{n}}$ понимается производная от температуры T по направлению внешней нормали \mathbf{n} к поверхности Γ .

Решение прямой задачи состоит в определении функции $T(x, y, z, t)$, удовлетворяющей уравнению (3.1) в рассматриваемой области Q , условиям (3.2) на внешней границе Γ области Q , двум условиям на поверхности раздела фаз (температура должна быть непрерывной, а тепловой поток должен испытывать указанный выше скачок) и двум условиям на границе металл — форма (непрерывность температуры и теплового потока).

Для решения прямой задачи исследуемый объект аппроксимировался телом, которое состоит из конечного числа параллелепипедов. Это тело образно помещается в некоторый вспомогательный параллелепипед, размеры которого совпадают с габаритами исследуемого объекта. Система координат связана с движущейся литейной формой. Ось Oz направлена вертикально вверх, ось Ox располагается в горизонтальной плоскости и направлена слева направо, а ось Oy выбрана так, чтобы система координат $Oxyz$ была бы правой. Начало O этой системы координат — это левая, ближайшая к наблюдателю вершина вспомогательного параллелепипеда, расположенная на его дне.

Вводятся временная сетка и две пространственные разностные сетки (в общем случае, неравномерные). Основная сетка построена таким образом, что все внешние поверхности аппроксимирующего тела, а также все границы металл — форма являются одной из координатных поверхностей этой сетки. Поверхности вспомогательной сетки параллельны поверхностям основной сетки и узлы этой сетки расположены на серединах отрезков, соединяющие узлы основной сетки. Плоскости $x = \tilde{x}_n, y = \tilde{y}_i, z = \tilde{z}_l$ делят объект на так называемые элементарные объемы, или элементарные ячейки. Элементарной ячейке приписываются индексы (n, i, l) , если вершина этой ячейки, ближайшая к началу координат, совпадает с узловой точкой $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_i, \tilde{z}_l)$. Пусть V_{nil} — объем такой элементарной ячейки, а S_{nil} — ее внешняя поверхность.

Считается, что в рамках одной элементарной ячейки температура среды не зависит от пространственных координат, а зависит только от времени. Обозначается эта температура как $T_{nil}(t)$.

Любая элементарная ячейка либо полностью заполнена только одной средой (металл или литейная форма), либо одна ее часть заполнена одной средой, а другая ее часть другой средой. Обозначим через V_{nil}^1 часть объема V_{nil} элементарной ячейки, которая заполнена металлом, а через V_{nil}^2 — часть объема V_{nil} , которая заполнена материалом формы. Аналогично, S_{nil}^1 — часть внешней поверхности S_{nil} элементарной ячейки, которая прилегает к объему V_{nil}^1 , а S_{nil}^2 — часть внешней поверхности S_{nil} , которая прилегает к объему V_{nil}^2 .

В том случае, когда рассматриваемый объект параллелепипед, все элементарные ячейки также имеют форму параллелепипеда. Если же рассматривается объект сложной геометрической формы, то на стыке разных частей объекта возникают новые элементарные ячейки более сложной конфигурации. Ячейки такого вида всегда выходят на внешнюю границу литейной формы, и в этом случае усложняется конфигурация поверхности S_{nil}^2 .

Для любого объема V с внешней границей S , выделенного из объекта, справедлив закон теплового баланса, который состоит в том, что изменение теплосодержания в объеме V за фиксированный промежуток времени τ равняется количеству тепла, проходящему через поверхность S объема V за этот же промежуток времени. Поэтому, учитывая независимость температуры вещества от пространственных координат в пределах расчетной ячейки, имеем

$$\begin{aligned} & \left[V_{nil}^1 G_1 \left(T_{nil}^{j+1} \right) + V_{nil}^2 G_2 \left(T_{nil}^{j+1} \right) \right] - \left[V_{nil}^1 G_1 \left(T_{nil}^j \right) + V_{nil}^2 G_2 \left(T_{nil}^j \right) \right] = \\ & = \int_{t^j}^{t^{j+1}} \left[\iint_{S_{nil}^1} K_1 \left(\tilde{T}_{nil}(t) \right) \cdot \left(\tilde{T}_n(t) \right)_{nil} ds + \iint_{S_{nil}^2} K_2 \left(\tilde{T}_{nil}(t) \right) \cdot \left(\tilde{T}_n(t) \right)_{nil} ds \right] dt, \tag{3.3} \end{aligned}$$

где $T_{nil}^j = T_{nil}(t^j)$, а $K_1(\tilde{T}_{nil}(t)) \cdot (\tilde{T}_n(t))_{nil}$ и $K_2(\tilde{T}_{nil}(t)) \cdot (\tilde{T}_n(t))_{nil}$ — плотности теплового потока через внешнюю поверхность расчетной ячейки для металла и для материала формы соответственно.

В основе алгоритма численного решения прямой задачи лежит использование уравнения теплового баланса и переход от формулировки задачи в терминах температуры к формулировке в терминах теплосодержания. Дальнейшие преобразования соотношения (3.3) осуществляются подобно тому, как это было сделано в первом разделе. Однако теперь необходимо учитывать тот факт, что рассматриваемая расчетная область неоднородна (содержит и металл, и материал формы). Для того чтобы лучше учитывать геометрию расчетных ячеек, и то, как они заполнены, введено понятие так называемой “суммарной плотности теплосодержания” в ячейке.

Пусть $\Phi_{nil} = V_{nil}^2/V_{nil}$ — объемная доля материала формы в расчетной ячейке с индексами (n, i, l) , а $M_{nil} = V_{nil}^1/V_{nil}$ — объемная доля металла в этой ячейке. Тогда “суммарная плотность теплосодержания” в ячейке с индексами (n, i, l) в момент времени t^j определяется формулой: $E_{nil}^j = M_{nil}G_1(T_{nil}^j) + \Phi_{nil}G_2(T_{nil}^j)$. Принимая во внимание выражения для $G_1(T)$ и $G_2(T)$, получаем следующее представление для новой функции теплосодержания $E_{nil}^j(T_{nil}^j)$:

$$E_{nil}^j(T_{nil}^j) = \begin{cases} b_{nil}T_{nil}^j, & T_{nil}^j < T_1, \\ p_{nil}^1T_{nil}^j - p_{nil}^2, & T_1 \leq T_{nil}^j < T_2, \\ r_{nil}^1T_{nil}^j + r_{nil}^2, & T_{nil}^j \geq T_2, \end{cases}$$

где

$$b_{nil} = M_{nil}\rho_{SCS} + \Phi_{nil}\rho_{FCF}, \quad p_{nil}^1 = M_{nil}\left(\rho_{SCS} + \frac{\rho_S\lambda}{(T_2 - T_1)}\right) + \Phi_{nil}\rho_{FCF},$$

$$p_{nil}^2 = \frac{M_{nil}\rho_S\lambda T}{(T_2 - T_1)}, \quad r_{nil}^1 = M_{nil}\rho_{LCL} + \Phi_{nil}\rho_{FCF}, \quad r_{nil}^2 = M_{nil}(\rho_S\lambda + (\rho_{SCS} - \rho_{LCL})T_2).$$

Определим температуру T_{nil}^j как функцию, зависящую от теплосодержания E_{nil}^j :

$$T_{nil}^j \equiv \beta(E_{nil}^j) = \begin{cases} E_{nil}^j/b_{nil}, & E_{nil}^j < b_{nil}T_1, \\ (E_{nil}^j + p_{nil}^2)/p_{nil}^1, & b_{nil}T_1 \leq E_{nil}^j < r_{nil}^1T_2 + r_{nil}^2, \\ (E_{nil}^j - r_{nil}^2)/r_{nil}^1, & E_{nil}^j \geq r_{nil}^1T_2 + r_{nil}^2. \end{cases}$$

Эта функция является обратной к функции $E_{nil}^j(T_{nil}^j)$. Коэффициенты теплопроводности $K_1(T_{nil}^j)$ и $K_2(T_{nil}^j)$ также представим как функции от E_{nil}^j :

$$K_1(T_{nil}^j) \equiv W_1(E_{nil}^j) = \begin{cases} k_S, & E_{nil}^j < E_1, \\ (E_2 - E_1)^{-1} [(k_L - k_S)E_{nil}^j + (k_S E_2 - k_L E_1)], & E_1 \leq E_{nil}^j < E_2, \\ k_L, & E_{nil}^j \geq E_2, \end{cases}$$

$$K_2(T_{nil}^j) \equiv W_2(E_{nil}^j) = \begin{cases} k_{\Phi_1}, & E_{nil}^j < E_3, \\ (E_4 - E_3)^{-1} [(k_{\Phi_2} - k_{\Phi_1})E_{nil}^j + (k_{\Phi_1} E_4 - k_{\Phi_2} E_3)], & E_3 \leq E_{nil}^j < E_4, \\ k_{\Phi_2}, & E_{nil}^j \geq E_4, \end{cases}$$

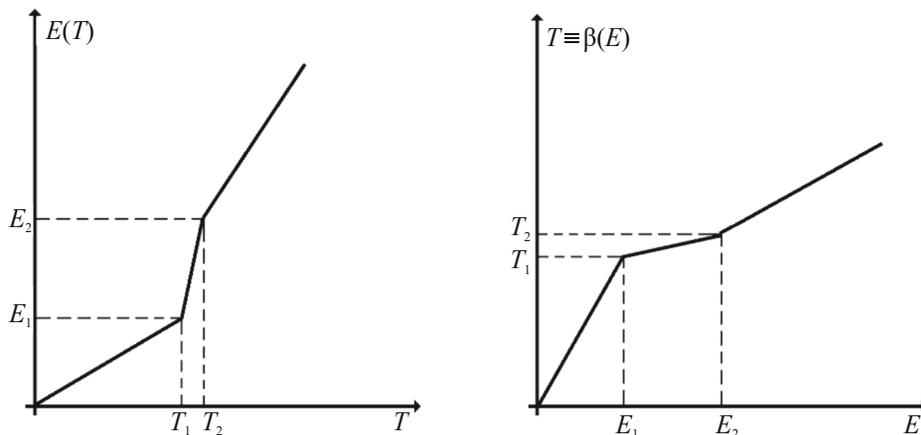
$$E_1 \equiv \rho_{SCS}T_1, \quad E_2 \equiv \rho_{SCS}T_2 + \rho_S\lambda, \quad E_3 \equiv \rho_{FCF}(T_3 - \delta), \quad E_4 \equiv \rho_{FCF}(T_3 + \delta).$$

Величина $\delta \ll T_3$ — произвольная, но фиксированная (в расчетах полагалось $\delta = 20$).

Функция $E_{nil}^j(T_{nil}^j)$ как функция, зависящая от температуры, в металле ведет себя так же, как и функция теплосодержания $G_1(T)$, т.е. в узком интервале температур $[T_1, T_2]$ меняется очень быстро (фиг. 5). По этой причине итерационные алгоритмы решения полученных систем конечно-разностных уравнений плохо сходятся.

Температура T_{nil}^j как функция от E_{nil}^j , меняется не так быстро (фиг. 5), и при выполнении определенных условий численные алгоритмы решения систем уравнений гарантированно сходятся (см. [6]). Из этих соображений в равенстве (3.3) перейдем от переменной $T_{nil}(t)$ к переменной $E_{nil}(t)$:

$$V_{nil} \cdot (E_{nil}^{j+1} - E_{nil}^j) = \int_{t^j}^{t^{j+1}} \left[\iint_{S_{nil}^1} H_1(E_{nil}(t)) ds + \iint_{S_{nil}^2} H_2(E_{nil}(t)) ds \right] dt, \quad (3.4)$$



Фиг. 5.

где

$$H_1(E_{nil}(t)) = W_1(\tilde{E}_{nil}(t)) \cdot \beta_n(\tilde{E}_{nil}(t)), \quad H_2(E_{nil}(t)) = W_2(\tilde{E}_{nil}(t)) \cdot \beta_n(\tilde{E}_{nil}(t)),$$

$$(n = \overline{n^*(m), N^*(m)}; \quad i = \overline{i^*(m), I^*(m)}; \quad l = \overline{l^*(m), L^*(m)}; \quad j = \overline{0, J-1}; \quad m = \overline{1, M}).$$

Соотношение (3.4) есть не что иное, как уравнение теплового баланса, записанное в терминах новой функции $E_{nil}(t)$ для каждой расчетной ячейки исследуемого объекта. Дискретизация по времени и аппроксимация по пространству соотношения (3.4) приводят к системе конечно-разностных уравнений относительно неизвестной E_{nil}^{j+1} .

Для дискретизации по времени уравнения (3.4) использовалась схема Писмена–Рекфорда.

Для схемы Писмена–Рекфорда характерен тот факт, что рассматриваемый интервал времени $(t^j, t^j + \tau)$ разбивается на три подинтервала: $(t^j, t^j + \tau/3)$, $(t^j + \tau/3, t^j + 2\tau/3)$ и $(t^j + 2\tau/3, t^j + \tau)$. В указанном выше соотношении $E_{nil}^{j+1/3} = E_{nil}(t^j + \tau/3)$, $E_{nil}^{j+2/3} = E_{nil}(t^j + 2\tau/3)$.

Для того чтобы более компактно записать эту разностную схему, введем следующие обозначения:

$$\tilde{\Lambda}E = \iint_{S_{nil}^{1x}} H_1(E(t)) ds + \iint_{S_{nil}^{2x}} H_2(E(t)) ds, \quad \tilde{\Lambda}_xE = \iint_{S_{nil}^{1x+} \cup S_{nil}^{1x-}} H_1(E) ds + \iint_{S_{nil}^{2x+} \cup S_{nil}^{2x-} \cup S_{nil}^{2xd}} H_2(E) ds,$$

$$\tilde{\Lambda}_yE = \iint_{S_{nil}^{1y+} \cup S_{nil}^{1y-}} H_1(E) ds + \iint_{S_{nil}^{2y+} \cup S_{nil}^{2y-} \cup S_{nil}^{2yd}} H_2(E) ds, \quad \tilde{\Lambda}_zE = \iint_{S_{nil}^{1z+} \cup S_{nil}^{1z-}} H_1(E) ds + \iint_{S_{nil}^{2z+} \cup S_{nil}^{2z-} \cup S_{nil}^{2zd}} H_2(E) ds.$$

Тогда временная аппроксимация уравнения теплового баланса по схеме Писмена–Рекфорда принимает вид:

$$V_{nil} \left(E_{nil}^{j+1} - E_{nil}^j \right) = \frac{2\tau}{3} \tilde{\Lambda}_xE_{nil}^{j+1/3} + \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_xE_{nil}^{j+2/3} +$$

$$+ \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_yE_{nil}^j + \frac{2\tau}{3} \tilde{\Lambda}_yE_{nil}^{j+2/3} + \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_zE_{nil}^j + \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_zE_{nil}^{j+1/3} + \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_zE_{nil}^{j+1}, \quad (3.5)$$

$$(n = \overline{n^*(m), N^*(m)}; \quad i = \overline{i^*(m), I^*(m)}; \quad l = \overline{l^*(m), L^*(m)}; \quad j = \overline{0, J-1}; \quad m = \overline{1, M}).$$

В левую часть уравнения (3.5) добавим и вычтем значения: $V_{nil}E_{nil}^{j+1/3}$ и $V_{nil}E_{nil}^{j+2/3}$. После этого разобьем это уравнение на три равенства, и тем самым образуем три одномерных по пространству подзадачи:

x направление

$$V_{nil} \cdot \left(E_{nil}^{j+1/3} - E_{nil}^j \right) = \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_xE_{nil}^{j+1/3} + \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_yE_{nil}^j + \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_zE_{nil}^j,$$

y направление

$$V_{nil} \cdot \left(E_{nil}^{j+2/3} - E_{nil}^{j+1/3} \right) = \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_y E_{nil}^{j+2/3} + \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_x E_{nil}^{j+1/3} + \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_z E_{nil}^{j+1/3},$$

z направление

$$V_{nil} \cdot \left(E_{nil}^{j+1} - E_{nil}^{j+2/3} \right) = \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_z E_{nil}^{j+1} + \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_x E_{nil}^{j+2/3} + \frac{\tau}{3} \tilde{\Lambda}_y E_{nil}^{j+2/3},$$

$$\left(n = \overline{n^*(m), N^*(m)}; \quad i = \overline{i^*(m), I^*(m)}; \quad l = \overline{l^*(m), L^*(m)}; \quad j = \overline{0, J-1}; \quad m = \overline{1, M} \right).$$

Пространственная аппроксимация указанных выше подзадач приведена в работе [9].

Полученная в результате пространственной аппроксимации первой подзадачи, система нелинейных уравнений состоит из множества других систем. Для каждой из них значения индексов i и l — фиксированы. Эти подсистемы уравнений решаются независимо друг от друга предложенным в [10] новым итерационным методом с привлечением метода прогонки. Значения коэффициентов во всех уравнениях определяются по полученным значениям функции теплосодержания в момент времени $(j + 1/3)$ на предыдущей итерации. Итерационный процесс прекращается при достижении требуемой точности. При численном решении задачи требовалось, чтобы максимальное относительное отклонение между двумя последующими итерациями не превосходило 10^{-12} .

Системы нелинейных уравнений, полученные в результате пространственной аппроксимации второй и третьей подзадач, решаются подобным образом. В качестве начальных данных для них используются значения функции теплосодержания, полученные в результате решения предыдущей подзадачи.

При проведении численных экспериментов, связанных с определением температурного поля объекта, основное внимание обращалось на динамику фронта кристаллизации. Многочисленные расчеты прямой задачи показали, что скорость перемещения литейной формы в рассматриваемой промышленной установке оказывает сильное влияние на эволюцию поверхности раздела фаз в металле. Этим параметром сравнительно легко управлять на практике. Поэтому в качестве функции, управляющей процессом, выбиралась скорость движения литейной формы относительно плавильной печи. Для того чтобы определить управляющую функцию, удовлетворяющую технологическим требованиям к процессу кристаллизации, была сформулирована задача оптимального управления. Эта задача состоит в определении такого режима остывания расплавленного металла, при котором поверхность раздела фаз имеет предписанную технологами форму и движется со скоростью, близкой к заданной.

Если движением литейной формы в рассматриваемой установке не управлять, то внутри детали могут формироваться и схлопываться пузыри, состоящие из жидкого металла. В результате получается металлический образец плохого качества.

В качестве целевого функционала выбран следующий:

$$I(u) = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \iint_{S(z_*(t))} [Z_{pl}(x, y, t) - z_*(t)]^2 dx dy dt. \tag{3.6}$$

Здесь t_1 — момент времени, при котором зарождается фронт кристаллизации; t_2 — момент времени, при котором наступает полное затвердевание металла; $(x, y, Z_{pl}(x, y, t))$ — реальные координаты поверхности раздела фаз в момент времени t ; $(x, y, z_*(t))$ — желаемые координаты поверхности раздела фаз в момент времени t ; S — проекция поверхности раздела фаз на плоскость XOY .

Функционал (3.6) представляет собой среднее по времени среднеквадратичное отклонение реальной поверхности раздела фаз от требуемой. Он призван следить как за выпрямлением поверхности раздела фаз, так и за скоростью ее перемещения.

Пусть A_* и B_* — некоторые заданные константы (A_* есть z -координата, определяющая начальное расположение объекта относительно печи; B_* есть z -координата, определяющая расположение объекта при его максимально допустимом погружении в охладитель). Будем говорить, что функция $u(t)$ принадлежит классу K , если $u(t)$ непрерывная, кусочно-гладкая при $t \in [0, \infty)$ и удовлетворяет ограничениям $A_* \leq u(t) \leq B_*$, $u(0) = A_*$. Задача оптимального управления состоит в выборе такого управления $u(t) \in K$, при котором функционал (3.6) достигает минимального значения.

Функционал (3.6) аппроксимируется функцией $F(u)$ с помощью метода трапеций:

$$I(u) \cong F(u) = \frac{1}{2(t_2 - t_1)} \left(\tau^{j_1+1} f^{j_1} + \sum_{j=j_1+1}^{j_2-1} (\tau^j + \tau^{j+1}) f^j + \tau^{j_2} f^{j_2} \right).$$

Здесь j_1 — номер узла временной сетки, который соответствует моменту времени t_1 ; j_2 — номер узла временной сетки, который соответствует моменту времени t_2 ; $f^j = \sum_{n=0}^{n_1} \sum_{i=0}^{i_1} (Z_{ni}^j - z_*^j)^2 h_n^x h_i^y$; n_1 и i_1 — номера узлов сетки вдоль осей OX и OY соответственно, которые определяют границы площади \tilde{S} (\tilde{S} — четверть наибольшего горизонтального сечения части литейной формы, которая заполнена металлом); $Z_{ni}^j = Z_{pl}(x_n, y_i, t^j)$, $z_*^j = z_*(t^j)$.

В численных расчетах величины Z_{ni}^j ($j = \overline{0, J-1}$; $n = \overline{0, n_1}$, $i = \overline{0, i_1}$) на каждом j -м временном слое определяются по температурному полю, полученному в результате решения начально-краевой задачи Стефана. Если x_n, y_i, z_l — координаты узловых точек пространственной расчетной сетки, тогда для любой точки $(x_n, y_i) \in \tilde{S}$, ($n = \overline{0, n_1}$, $i = \overline{0, i_1}$) находим такой индекс l_* , который удовлетворяет следующему условию:

$$\left(\beta(E_{ni, l_*+1}^j) \leq T_{pl} \leq \beta(E_{ni, l_*}^j) \right) \cup \left(\beta(E_{ni, l_*}^j) \leq T_{pl} \leq \beta(E_{ni, l_*+1}^j) \right). \quad (3.7)$$

В этом случае полагаем

$$Z_{ni}^j = \frac{(z_{l_*+1} - z_{l_*})T_{pl} + (z_{l_*} \beta_{ni, l_*+1}^j - z_{l_*+1} \beta_{ni, l_*}^j)}{\beta_{ni, l_*+1}^j - \beta_{ni, l_*}^j}.$$

Если же условие (3.7) не выполняется, то полагаем $Z_{ni}^j = z_*^j$.

Указанная выше задача оптимального управления для различных параметров установки (температуры печи, температуры жидкого алюминия, глубины погружения объекта в жидкий алюминий) решалась численно с помощью градиентного метода минимизации функционала качества. Компоненты градиента целевой функции вычислялись с помощью БАД-методологии. Вывод формул для вычисления этого градиента и используемого при этом дискретного варианта сопряженной задачи для указанной здесь оптимизационной задачи достаточно громоздкий. Все необходимые соотношения представлены в работе [9].

Следует отметить важную особенность, связанную с применением БАД-методологии в этой задаче. Предложенный алгоритм решения прямой задачи предполагает указанную выше последовательность решения подзадач: x — направление, y — направление, z — направление. Что касается решения сопряженной задачи, то БАД-методология требует совершенно другой последовательности решения расщепленных задач, а именно: y — направление, x — направление, z — направление. Другой порядок решения подзадач приводит к неточному значению градиента функционала. Угадать нужную последовательность решения подзадач сопряженной задачи, по-видимому, нереально.

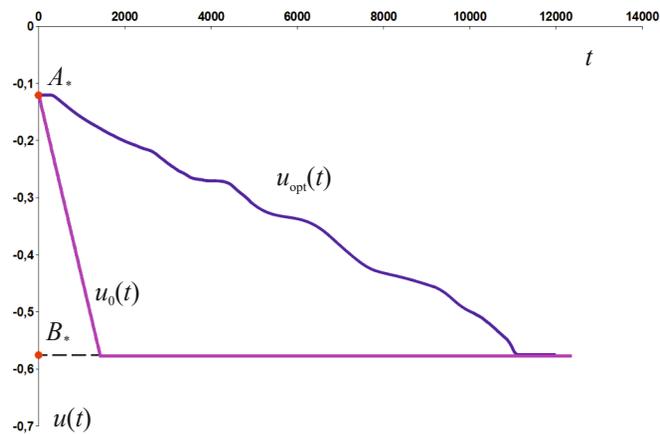
Отметим также, что решить рассматриваемую задачу, используя другие методы вычисления градиента целевой функции (например, метод конечных разностей), оказалось практически невозможным. Спуск на один-два шага в направлении антиградиента приводит к останову процесса минимизации (функция возрастает в направлении антиградиента). Поэтому вычисление точного значения градиента целевой функции с помощью БАД-методологии представляется необходимым, неизбежным элементом решения сложных задач оптимального управления, и это несмотря на громоздкость и трудности получения дискретного варианта сопряженной задачи и формул для вычисления градиента.

Для иллюстрации работоспособности и эффективности предложенного алгоритма ниже приводятся результаты одного из многочисленных проведенных численных экспериментов. Расчеты проводились для образца, сечения которого представлены на фиг. 3. Его размеры и все остальные параметры задачи даны в [11]. Температура стенок печи равнялась 1920°K . Координата $z_*(t)$ требуемой поверхности раздела фаз менялась во времени с постоянной скоростью 2 мм/мин. В качестве начального управления $u_0(t)$ выбрано перемещение литейной формы с постоянной скоростью 25 мм/мин (фиг. 6). Значение целевого функционала при этом равнялось $I(u_0) = 8.56$. На фиг. 7 проиллюстрировано отличие реальной поверхности раздела фаз Z_{pl} (кривая линия) от требуемой z_* (горизонтальная прямая линия) в некоторый момент времени t .

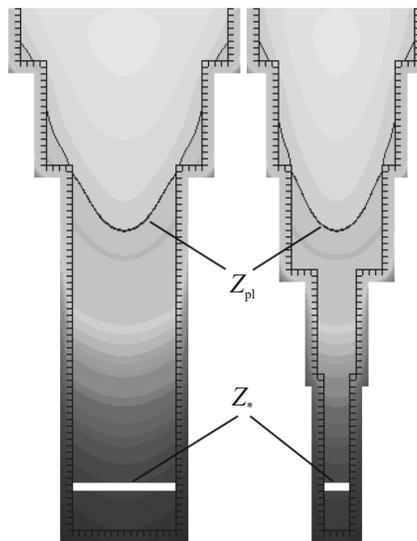
В результате оптимизации значение целевого функционала уменьшилось более чем в 3500 раз и составило $I(u_{\text{opt}}(t)) = 0.0024$. Оптимальное управление $u_{\text{opt}}(t)$ показано на фиг. 6. Его использование позволило существенно выпрямить поверхность раздела фаз и одновременно обеспечило ее движение с требуемой скоростью. При таком управлении реальная поверхность раздела фаз практически совпала с требуемой.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описывается предложенная Ю.Г. Евтушенко методология быстрого автоматического дифференцирования и демонстрируются ее применение к решению тепловых задач. Делается акцент на то, что эта методология позволяет эффективно и с машинной точностью вычислять градиент любой, сколь угодно сложной целевой функции конечного числа переменных. Большой опыт решения разнообразных задач оптимизации



Фиг. 6.



Фиг. 7.

позволяет утверждать, что в настоящее время предложенная Ю.Г. Евтушенко БАД-методология представляет собой современный аппарат, помогающий эффективно решать задачи оптимального управления разнообразными сложными динамическими системами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Evtushenko Y.G.* Computation of exact gradients in distributed dynamic systems // Optimization Methods and Software. 1998. V. 9. P. 45–75.
2. *Евтушенко Ю.Г., Зубов В.И.* Об обобщенной методологии быстрого автоматического дифференцирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 11. С. 1847–1862.
3. *Албу А.Ф., Горчаков А.Ю., Зубов В.И.* БАД-методология и дифференцирование сложной функции // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 1. С. 61–73.
4. *Албу А.Ф., Зубов В.И.* Об эффективности решения задач оптимального управления с помощью методологии быстрого автоматического дифференцирования // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 4. С. 20–29.

5. *Зубов В.И., Албу А.Ф.* Идентификация коэффициента теплопроводности по результатам эксперимента // Монография. М.: МАКС Пресс, 2023. 188 с. ISBN 978-5-317-07020-5.
6. *White R.E.* An enthalpy formulation of the Stephan problem // *SIAM J. Numer. Anal.* 1982. Vol. 19. No 6. P. 1129–1157.
7. *Alla Albu, Vladimir Zubov.* Modeling and optimization of melting and solidification process // *BULETINUL ACADEMIEI DE STIINTE A REPUBLICII MOLDOVA. MATEMATICA.* 2004. Number 3(46). P. 91–109.
8. *Албу А.Ф.* Расчет теплового излучения при моделировании процесса кристаллизации вещества в литейном деле // *Информационные технологии и вычисл. системы.* 2015. Т. 65. № 1. С. 47–55.
9. *Албу А.В., Албу А.Ф., Зубов В.И.* Вычисление градиента функционала в одной задаче оптимального управления сложной динамической системой // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2011. Т. 51. № 5. С. 814–833.
10. *Албу А.Ф., Зубов В.И.* О модификации одной схемы для расчета процесса плавления // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2001. Т. 41. № 9. С. 1434–1443.
11. *Албу А.Ф., Зубов В.И.* О влиянии параметров установки на управление процессом кристаллизации вещества в литейном деле // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2013. Т. 53. № 2. С. 238–248.

METHODOLOGY OF RAPID AUTOMATIC DIFFERENTIATION AND CONTROL OF THERMAL DYNAMIC SYSTEMS

V. I. Zubov*

119333 Moscow, Vavilov Str., 44, Federal Research Center Computer Science and Control, RAS, Russia

**e-mail: vladimir.zubov@mail.ru*

Received: 17.03.2024

Revised: 27.03.2024

Accepted: 31.05.2024

Abstract. The paper describes the methodology of rapid automatic differentiation and its advantages in the numerical solution of optimal control problems. The results obtained in solving problems of optimal control of thermal processes with phase transitions using this methodology are presented.

Keywords: optimal control, gradient, fast automatic differentiation, thermal conductivity equation.