

О МУЛЬТИОПЕРАТОРНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ 24-ГО ПОРЯДКА В СХЕМАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С КОНВЕКТИВНЫМИ ЧЛЕНАМИ

© 2024 г. А. И. Толстых^{1,*}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

*e-mail: tol@ccas.ru

Поступила в редакцию 19.01.2024 г.

Переработанный вариант 04.04.2024 г.

Принята к публикации 31.05.2024 г.

В рамках исследования мультиоператорных аппроксимаций и схем, использующих экономично обрабатываемые двухточечные операторы, рассмотрены аппроксимации 24-го порядка первых производных в задачах с конвективными членами. Основное внимание уделено спектральным свойствам, характеризующим их высокую точность и разрешающую способность. Для иллюстрации этих свойств приведены примеры решения модельных задач. Рассмотрены возможности использования таких мультиоператорных схем в случае разрывных решений. Библ. 16. Фиг. 7. Табл. 2.

Ключевые слова: мультиоператоры, аппроксимация 24-го порядка производной, уравнения Эйлера, задачи с разрывными решениями.

DOI: 10.31857/S0044466924090024, EDN: WLDQMD

ВВЕДЕНИЕ

Построение схем повышенных порядков аппроксимации, эффективно реализуемых на высокопроизводительных вычислительных системах, является важным направлением развития современных численных методов. Существует множество задач, для которых применение таких методов играет существенную роль. Это связано не только с возможностью значительного сокращения затрат времени вычислений при желаемой точности решений, но и с возможностью осуществлять более точное численное моделирование ряда физических процессов при использовании разумного числа узлов разностных сеток.

На современном уровне при решении многих задач оказываются востребованными численные методы, обладающие не только высокими порядками аппроксимаций. Во многих случаях желательно, чтобы реализующие их коды допускали бы эффективное использование высокопроизводительных вычислительных систем. Это означает возможность их распараллеливания с высокой параллельной эффективностью.

Перечисленными свойствами могут обладать схемы с аппроксимациями производных, использующими мультиоператоры. Концепция мультиоператоров (линейных комбинаций базисных операторов) была введена в [1] в качестве нестандартного подхода к увеличению порядков аппроксимаций формул численного анализа. В традиционных численных методах это увеличение достигается путем увеличения числа базисных функций в лагранжевых полиномах, на которых основаны используемые приближенные формулы. В широко применяемых сеточных методах возрастание числа базисных функций проявляется в расширении шаблонов сеточных операторов. Хорошо известно, что при этом несмотря на формальное повышение порядков аппроксимаций, могут возникать нежелательные эффекты, ограничивающие порядки реально применяемых схем.

В мультиоператорных методах при конструировании базисных операторов используются шаблоны с двумя или тремя узлами. При этом порядки аппроксимации мультиоператоров линейно возрастают с числом базисных операторов и их рост может быть весьма значительным.

На ранних этапах развития мультиоператорных схем в качестве базисных операторов использовались однопараметрические нецентральные (несимметричные) компактные аппроксимации третьего или пятого порядков, основанные на трехточечных операторах [2]. Это позволяло аппроксимировать производные в уравнениях механики жидкости и газа с более высокими порядками и получать достаточно точные решения двумерных задач при сравнительно небольшом числе узлов сетки. Это вполне соответствовало уровню вычислительной

техники в виде однопроцессорных ПК. Не останавливаясь на обзоре решенных задач, отметим успешное применение аппроксимаций 9-го порядка для описания так называемого скрич-эффекта при истечении из сопл сверхзвуковых струй [3].

Хотя порядки аппроксимации мультиоператоров такого типа превосходили порядки стандартных методов, их применение при решении пространственных задач с использованием суперкомпьютерных вычислений не выглядело перспективным.

Новым этапом развития мультиоператорной технологии явились семейства мультиоператоров с базисными операторами в виде компактных аппроксимаций с обрабатываемыми двухточечными операторами. Можно выделить два свойства этих семейств.

Во-первых, при построении мультиоператоров значительно улучшается обусловленность линейных систем, определяющие коэффициенты при базисных операторах. Это позволяет, увеличивая их число, получать очень высокие порядки аппроксимации.

Во-вторых, использование бегущего счета при обращении двухдиагональных матриц вместо трехточечных прогонок в прежних мультиоператорных схемах не только сокращает число арифметических операций, приходящихся на узел сетки, но и допускает высоко эффективное распараллеливание. Хотя первые идеи этого подхода были обозначены в [4], описание семейств с доказательствами существования и единственности были представлены позднее в [5].

Одно из семейств мультиоператоров указанного выше типа отличается особой простотой. В нем базисные операторы являются компактными аппроксимациями первых производных, определяемыми произведением двух сеточных операторов вида $A^{-1}(c)B$, где оба оператора являются двухточечными, а первый из них линейно зависит от параметра c . При вычислении действий таких операторов на сеточные функции число арифметических операций, отнесенное к числу узлов сетки, равно трем. Первый опыт их применения связан с численными решениями двумерных и пространственных нестационарных уравнений Эйлера и Навье—Стокса при использовании схемы 16-го порядка. В трехмерных случаях численные решения были получены в результате суперкомпьютерных вычислений, реализующих распараллеленные коды [6], [7]. В первом случае осуществлялось моделирование ламинарно-турбулентного перехода, а во втором изучалась неустойчивость истекающих их сопел дозвуковых струй. В обоих случаях оценки показали параллельную эффективность, достаточно близкую к идеальной.

Успешный опыт применения мультиоператорных аппроксимаций 16-го порядка из данного семейства делает естественным дальнейшие исследования представителей этого семейства, обладающих более высокими порядками.

Вместе с тем следует подчеркнуть, что высокие порядки любых схем повышенной точности достигаются при наличии достаточной гладкости всех функций, входящих в исходные уравнения и, в частности, якобианов в случае криволинейных систем координат. Насколько степени гладкости этих функций влияют на точность получаемых решений зависит от конкретных задач и могут допускать те или иные оценки. При этом мультиоператорные схемы не пригодны в случае неструктурированных сеток, а в случае равномерных сеток в криволинейной системе координат предполагается гладкое (например, аналитическое) преобразование декартовых координат. Таким образом, мультиоператорные схемы следует рассматривать не как универсальный инструмент, а как дополнение к традиционным методам (в том числе невысокого порядка), повышающий возможности численного моделирования для подробного описания ряда сложных физических процессов.

В данной работе рассматривается аппроксимация 24-го порядка в контексте схем для уравнений с конвективными членами и, в частности для уравнений Эйлера. К этой категории можно отнести также уравнения Навье—Стокса, в которых члены с вязкостью могут аппроксимироваться независимо с теми или иными порядками.

1. КЛАСС СХЕМ И ОБРАЗУЮЩИЕ ИХ МУЛЬТИОПЕРАТОРЫ

1.1. Структура схем

Рассматриваемые в данной работе мультиоператоры предназначены для аппроксимации пространственных производных в гиперболических системах вида

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \mathbf{f}_m(\mathbf{u})}{\partial x_m} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}_m$ — векторные функции. При этом имеется в виду их применение в задачах для уравнений Эйлера и Навье—Стокса.

Рассматриваемый класс схем для уравнений (1) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{m=1}^3 L_M^{(m)} \mathbf{f}_m(\mathbf{u}) + \sum_{m=1}^3 C_M D_M^{(m)} \mathbf{u} = 0, \quad C_M \geq 0, \quad (2)$$

где $L_M^{(m)}$ и $D_M^{(m)}$ – мультиоператоры (т.е. линейные комбинации базисных операторов [2]), соответственно, аппроксимирующие производные по переменной x_m и образующие диссипативную часть погрешности аппроксимации схемы. В данной работе предполагается, что формулы, определяющие эти мультиоператоры, одинаковы для всех пространственных переменных.

По построению $L_M^{(m)}$ и $D_M^{(m)}$ являются, соответственно, кососимметричными и положительными самосопряженными операторами в гильбертовом пространстве сеточных функций со скалярным произведением в виде суммирования их значений по узлам сетки. При этом действия $D_M^{(m)} \mathbf{u}$ операторов $D_M^{(m)}$ на сеточные функции $\mathbf{u}$, являющиеся проекциями на сетки достаточно гладких функций, входят в погрешность аппроксимации схемы. Неотрицательные постоянные C_M , рассматриваемые как свободные параметры, позволяют в случае необходимости регулировать уровни диссипации, демпфирующей паразитические осцилляции численных решений.

Полудискретные схемы (2) в приближении “замороженных коэффициентов” являются схемами с положительными операторами и поэтому устойчивы в среднеквадратичной норме при $C > 0$; при $C = 0$ они нейтрально устойчивы. После той или иной дискретизации производной по t устойчивость схем в этом приближении может быть исследована традиционными методами. Опыт применения мультиоператорных схем в настоящее время ограничен явными схемами для нестационарных задач. При использовании метода Рунге–Кутты для интегрирования по переменной t схемы в этом случае оказываются явными условно-устойчивыми схемами. Выбор его порядка и шагов по t легко определяется результатами методических расчетов для конкретных задач.

В случае уравнений с диссипативными членами и, в частности, уравнений Навье–Стокса, к аппроксимациям (2) добавляются те или иные аппроксимации членов с вязкостью. В частности, последние также могут использовать мультиоператоры того или иного порядка (см. [2]). Однако в случае больших чисел Рейнольдса оценки, численные эксперименты, а также опыт применения схем высокого порядка, отраженный в различных публикациях, показывают, что для поддержания высокой точности решений нет необходимости аппроксимировать члены с вязкостью с тем же высоким порядком, что и остальные члены уравнений.

В данной статье рассматриваются мультиоператоры $L_M^{(m)}$, аппроксимирующие первые производные с 24-м порядком, а также мультиоператоры $D_M^{(m)}$, действия которых на проекции гладких функций стремятся к нулю с 23-м порядком относительно шагов сетки. Для описания структуры мультиоператоров в схеме (2) достаточно ограничиться случаем одной пространственной переменной $x = x_1$.

1.2. Аппроксимация производных

На сетке $\omega_h : x_j = jh, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, h = \text{const}$, мультиоператорная аппроксимация производной по x имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \approx L_M(c_1, c_2, \dots, c_M) = \sum_{i=1}^M \gamma_i l(c_i), \quad \sum_{i=1}^M \gamma_i = 1, \quad (3)$$

где $c_1, c_2, \dots, c_M$ – набор M не совпадающих свободных параметров, а $l(c_i)$ – базисные операторы. Определяющее их семейство операторов $l(c)$ имеет вид

$$l(c) = (L_l(c) + L_r(c))/2,$$

где L_l и L_r являются “левыми” и “правыми” компактными аппроксимациями производных вида

$$L_l(c) = \frac{1}{h} R_l(c)^{-1} \Delta_-, \quad L_r(c) = \frac{1}{h} R_r(c)^{-1} \Delta_+, \quad R_l(c) = I + c \Delta_-, \quad R_r(c) = I - c \Delta_+.$$

Здесь Δ_- и Δ_+ – операторы левых и правых двухточечных разностей ($\Delta_- u_j = u_j - u_{j-1}$, $\Delta_+ u_j = u_{j+1} - u_j$). Из этих формул следует, что вычисление при заданных значениях параметров c_i действия мультиоператора на сеточную функцию u_j сводится к обращениям двухдиагональных матриц методом бегущего счета. Например, вычисление действия $v_j = L_l(c_i) u_j$ оператора $L_l(c_i)$ осуществляется согласно формуле

$$v_j = \alpha v_{j-1} + \beta \Delta_- u_j, \quad \alpha = c_i / (1 + c_i), \quad \beta = 1 / (1 + c_i). \quad (4)$$

Аналогично осуществляется вычисление действия $w_j = L_r(c)u_j$ оператора $L_r(c_i)$, при котором значение сеточной функции с индексом j определяется по ее значению с индексом $j + 1$. Эти процессы очевидно устойчивы при $c_i > -1/2$. В дальнейшем будем предполагать, что это условие выполнено. Результатом являются значения $l(c_i)u_j = (v_j + w_j)/2$, которые затем умножаются на коэффициенты γ_i и суммируются по i . Эти коэффициенты определяются из условия обращения в ноль $M - 1$ низших членов разложения в ряд Тейлора погрешности аппроксимации L_M при предположении о достаточной гладкости функции $u(x)$. $M - 1$ таких условий вместе с равенством единице суммы коэффициенты γ_i в (3) образуют линейную систему с матрицей $M \times M$, зависящей только от c_i (см. [2]). Можно легко убедиться в том, что коэффициенты разложения в ряд по степеням h действия $l(c)u_j$ оператора $l(c_i)$ являются полиномами только с четными степенями h . Из этого следует, что решение системы, определяющее γ_i , $i = 1, 2, \dots, M$, обеспечивает погрешность $O(h^{2M})$ мультиоператорной аппроксимации производной $L_M(c_1, c_2, \dots, c_M)$.

В гильбертовом пространстве H сеточных функций со скалярным произведением $(u, v) = h \sum_{-\infty}^{\infty} u_j v_j$, где суммирование значений сеточных функций производится по узлам сетки ω_h , базисные операторы и, соответственно, мультиоператоры L_M являются кососимметричными операторами, не создающими диссипацию.

Для доказательства этого удобно записать левые и правые двухточечные разности, используя кососимметричные и самосопряженные операторы, определенные, соответственно, формулами

$$\Delta_0 u_j = u_{j+1} - u_{j-1}, \quad \Delta_2 u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}.$$

При этом двухточечные разности принимают вид

$$\Delta_- = (\Delta_0 - \Delta_2)/2, \quad \Delta_+ = (\Delta_0 + \Delta_2)/2.$$

С учетом этих представлений использование алгебры перестановочных операторов (арифметические действия с операторами аналогичны операциям с комплексными числами, при которых самосопряженные и кососимметричные операторы рассматриваются как действительные и мнимые переменные) приводит после простейших выкладок к следующему выражению для семейства $l(c)$:

$$l(c) = \frac{1}{2}(I - c\Delta_2 - c\Delta_2^2)^{-1}\Delta_0, \quad (5)$$

где I - единичный оператор. При выводе этого выражения использовалось легко проверяемое тождество

$$\Delta_0^2 = 4\Delta_2 + \Delta_2^2.$$

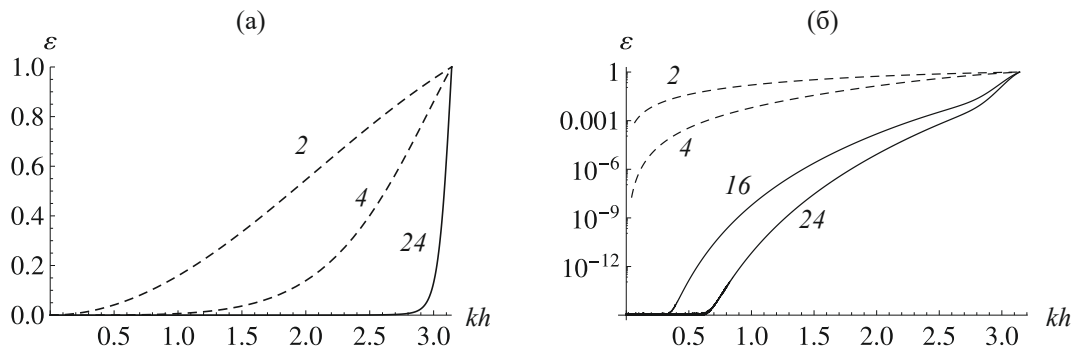
Из (5) следует, что базисные операторы $l(c_i)$ кососимметричны как произведение самосопряженного и кососимметричного операторов. Соответственно таковыми являются и их линейные комбинации, определяющие мультиоператоры.

1.3. Выбор параметров c_i

Из описанной выше процедуры построения мультиоператора следует, что любой выбор различающихся параметров $c_i > -1/2$ в случае разрешимости системы обеспечивает погрешность аппроксимации $O(h^{24})$ при $M = 12$. Однако более информативной оценкой погрешности является ее оценка в пространстве Фурье. Ее асимптотика имеет вид $O((kh)^{24})$, где k - переменная Фурье. В случае гармоник с большими значениями k (т.е. коротковолновых гармоник) для достижения малости этой погрешности для некоторых наборов параметров могут потребоваться достаточно малые значения шага h . В случае, когда желательно правильно воспроизводить мелкомасштабные детали точных решений при разумных шагах сетки, требуется выбор параметров, при котором в пространстве Фурье образ мультиоператора $h^{-1}\mu(\alpha)$, $\alpha = kh$, был бы близок к этому образу производной в как можно более широком диапазоне kh гармоник, поддерживаемых сеткой с шагом h . Как известно, предельное значение kh определяется равенством $\alpha = \pi$. Определим погрешность аппроксимации в пространстве Фурье как отличие от единицы отношения этих образов. Тогда можно показать, что оптимальный набор c_i можно рассматривать как тот, при котором величина

$$\varepsilon(\alpha; c_1, c_2, \dots, c_M) = |\mu(\alpha; c_1, c_2, \dots, c_M)/\alpha - 1|$$

была бы малой в как можно более широком диапазоне волновых чисел $\alpha < \pi$. Для упрощения поиска требуемых значений c_i будем рассматривать мультиоператоры, у которых c_i равномерно распределены между своими минимальными и максимальными значениями $c_{\min}, c_{\max}$, $c_{\min} > -1/2$. Здесь можно поставить задачу о минимизации некоторого функционала. Однако мы ограничимся в рассматриваемом случае $M = 12$ поиском этих пар, для которых графики функции $\varepsilon(\alpha)$ визуальнo совпадали бы с осью абсцисс в как можно более широком



Фиг. 1. Дисперсионные погрешности аппроксимаций производных в обычном (а) и логарифмическом представлении; цифры около кривых отмечают порядки аппроксимаций.

диапазоне $[0, \alpha]$. Примером такого выбора ($c_{\min} = -0.46$, $c_{\max} = 0.45$), определяющего рассматриваемый в дальнейшем конкретный мультиоператор, являются графики функции $\varepsilon(\alpha)$, изображенные на фиг. 1 в обычном и логарифмическом масштабах. Как следует из фиг. 1а, погрешность $\varepsilon(\alpha)$ визуально равна нулю приблизительно для гармоник с волновыми числами $kh < 2.75$. Отсюда следует, что погрешности приблизительно равны нулю, если длины волн гармоник $\lambda = 2\pi/k$ удовлетворяют неравенству $\lambda \gtrsim 2.3h$. Рассматривая такую оценку как вполне удовлетворительную, в дальнейшем будем считать, что для аппроксимации производных используется именно таким образом выбранный мультиоператор. Для сравнения на фиг. 1 приведены в виде штриховых линий графики погрешностей для трехточечной центральной разности второго порядка аппроксимации и компактной аппроксимации четвертого порядка. Как видно, эти погрешности значительно превосходят погрешности мультиоператора и имеют более узкие интервалы kh , где они визуально малы. Известны способы некоторого увеличения этих интервалов путем расширения шаблонов без увеличения порядков аппроксимации.

Более подробная оценка погрешности для построенного мультиоператора следует из графика фиг. 1б, где те же функции представлены с использованием логарифмического масштаба для их значений, превосходящих 10^{-15} . Из такого представления можно заключить, что визуально нулевая погрешность на первом графике при $kh = 2.75$ на самом деле приблизительно равна 0.004, а при $kh < 0.6$ применение мультиоператора с точностью до 10^{-15} эквивалентно дифференцированию. Кроме того, на фиг. 1 показана функция $\varepsilon(kh)$ для мультиоператорной аппроксимации 16-го порядка, использованной ранее в [8]. Как видно, она уступает аппроксимации 24-го порядка вследствие больших значений ε на всем интервале $[0, \pi]$ и более узкого интервала kh , на котором численное дифференцирование можно считать точным.

Рассмотрим простейшие тесты, иллюстрирующие точность и разрешающую способность схемы с построенной мультиоператорной аппроксимацией производной. Эти тесты основаны на вариантах задач для уравнений конвективного переноса вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Для получения численных решений будем использовать схему с описанной выше мультиоператорной аппроксимацией 24-го порядка без диссипативной добавки и стандартный метод Рунге–Кутты четвертого порядка.

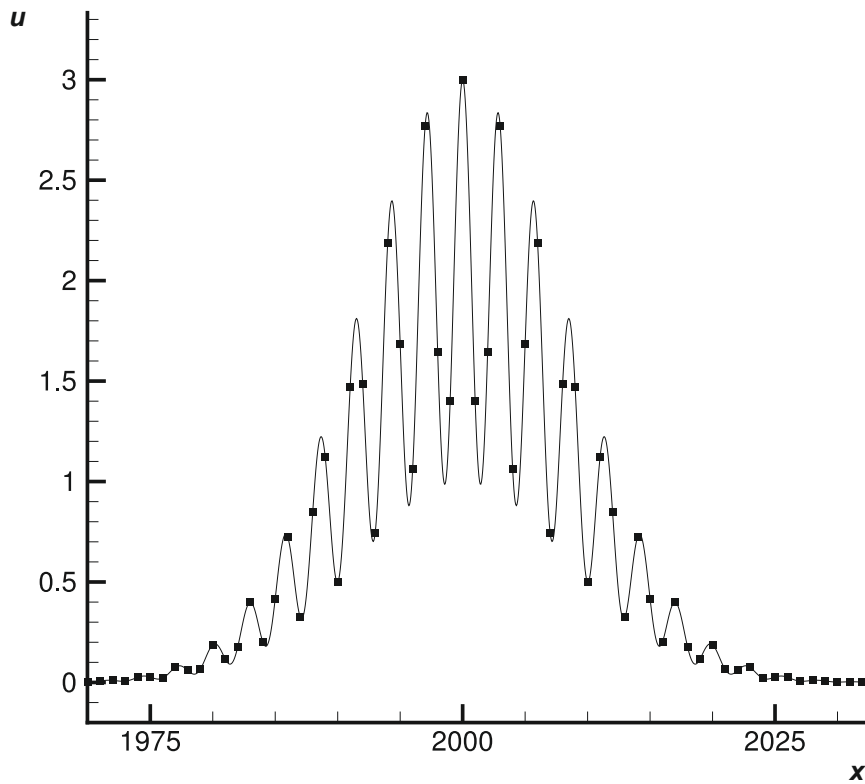
Тест 1. Сохранение дисперсионных свойств на больших интервалах времени.

При решении многих нестационарных задач аэрогидродинамики (в частности, задач аэроакустики, задач о развитии неустойчивости течений) возникает необходимость осуществлять вычисления на достаточно больших интервалах времени. Эти интервалы могут включать в себя отрезок времени до выхода на статистически стационарный режим и время, необходимое для вычисления статистических характеристик решений.

В [9] был предложен тест, выясняющий в контексте задач аэроакустики способность схем правильно описывать распространение коротковолновых гармоник на заданном интервале времени. Задача формулировалась следующим образом. Для уравнения (6) при $f(u) = u$ и начальным условием

$$u(x, 0) = [2 + \cos(\beta x)] [\exp(-\ln 2 (x/10)^2)]$$

требуется получить для значения $\beta = 1.7$ численное решение при $t = 800$, используя тестируемую схему с шагом сетки $h = 1$. Начальные данные описывают волновой пакет с достаточно коротковолновым наполнением,



Фиг. 2. Решения задачи о распространении волнового пакета при $t = 2000$; сплошная кривая представляет точное решение, а маркеры — численное решение в узлах сетки.

поскольку безразмерное волновое число kh гармоник, наложенных на экспоненту, для единичного шага сетки равно 1.7. Согласно точному решению этой задачи, волновой пакет, задаваемый начальными данными, должен перемещаться при возрастании времени t вдоль оси x в неизменном виде с единичной скоростью. Однако численные решения при $t = 800$ и заявленном шаге сетки даже в случае схем повышенной точности могут заметно отличаться от точного решения в силу накопления с течением времени указанных выше погрешностей. Кроме того, дополнительные ошибки могут образовываться вследствие диссипативности тестируемых схем. На фиг. 2 показано точное решение в виде сплошной линии, на которой маркерами отмечено численное решение для рассматриваемой схемы при $C = 0$, т.е. без диссипативной добавки. Оно получено при более жестких условиях $t = 2000$ и $\beta = 2.2$. Как видно, эти решения визуально не различимы.

Рассмотрим более подробно оценки интервалов времени, на которых численные решения для различных схем, не содержащих диссипативный механизм, сохраняют некоторую точность. В силу простоты уравнения его решение с использованием преобразования Фурье, может быть записано в виде

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{ik(x-t)} dk,$$

где $\hat{u}(k)$ — преобразование Фурье функции $u(x, 0)$. После замены производной по x некоторым разностным оператором решение разностной задачи можно получить аналогичным образом, считая что сеточные функции являются проекциями на сетку функций непрерывного аргумента, а интегрирование по времени осуществляется абсолютно точно. Это решение имеет вид

$$u_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) e^{ik(x-t(1+\varepsilon(k)))} dk. \quad (7)$$

На основании анализа выражения для фурье-образа оператора можно заключить, что в случае $h = 1$ функция погрешности аппроксимации $\varepsilon(k)$, входящая в (7), является четной ограниченной функцией, определенной на интервале $k \in [-\infty, \infty]$. Элементарные выкладки для разности $\delta u = u_1(x, t) - u(x, t)$, использующие четность и нечетность функций из подынтегральных выражений, приводит к равенству

$$\delta u = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k) \cos k(x-t) \sin^2 \frac{k\varepsilon(k)t}{2} dk. \quad (8)$$

Правая часть этого равенства допускает приближенную оценку, поскольку функция

$$\hat{u}(k) = a(\exp(-b(k - \beta)^2) + \exp(-b(k + \beta)^2) + 4 \exp(-bk^2)),$$

где $a \approx 3.6$, $b \approx 36$, пренебрежимо мала везде за исключением очень узких окрестностей точек $k = 0, \pm\beta$. Это позволяет для приближенной оценки заменить в (8) функцию $\sin^2 \frac{k\epsilon(k)t}{2}$ на постоянное значение $\sin^2 \frac{\beta\epsilon(\beta)t}{2}$. В результате для относительной погрешности решения возникает приближенное равенство

$$\frac{\delta u(x, t)}{u(x, t)} \approx 2 \sin^2 \frac{\beta\epsilon(\beta)t}{2}. \quad (9)$$

При использовании функций $\epsilon(kh)$ для различных схем оно позволяет оценить без проведения расчетов времени, на которых эти схемы способны сохранять достаточную точность решений при заданных значениях волновых чисел гармоник. В частности, для схем 2-го, 4-го и 24-го порядков значения $\epsilon(1.7)$ равны соответственно 0.42, 0.06 и $4 \cdot 10^{-7}$. Если довольствоваться относительной погрешностью 0.01, то максимальные значения времени оказываются, согласно (9), равными 0.2, 1.4 и 208146. Если же ужесточить тест, положив $\beta = 2.2$, то в случае мультиоператорной схемы расчет можно вести до $t = 1821$. Эта оценка приблизительно согласуется с результатом расчета для $t = 2000$.

Тест 2. Сравнение точности решений при уменьшении шагов сетки.

Рассмотрим периодическую задачу с начальными данными для уравнения Хопфа ($f(u) = u^2$ в (6)), используемую в ряде публикаций для оценки точности решений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} &= 0, \quad -1 \leq x \leq 1, \\ u(0, x) &= 1 + 0.5 \sin(\pi x) \end{aligned}$$

Ее решение до некоторого момента времени t является гладким. При фиксированном значении t оно может быть получено с машинной точностью с помощью итерационной процедуры, описанной в [10]. В табл. 1 представлены C -нормы погрешностей численных решений (т.е. их отличий от “точного”), полученных на последовательности сеток с шагами $h = 2/N$, $N = 16, 32, 64, 128, 256$, а также локальные порядки сходимости. В таблице кроме рассматриваемой схемы (обозначенной как L_{24}) представлены для сравнения решения, полученные при использовании компактной аппроксимации 4-го порядка (L_4), а также мультиоператорной аппроксимации 9-го порядка [2] (L_{59}). Во всех случаях применялся метод Рунге–Кутты 4-го порядка с контролем шага по t . Как видно, при $h = 1/64$, $N = 128$ точность решений в случае рассматриваемой схемы имеет порядок точности машинной арифметики. Однако точность вычислений “точного” решения согласно алгоритму из [10] имеет тот же порядок. Это делает проблематичным сравнение с “точным” решением при этом значении h и тем более при его уменьшении. Возможно, что это влияет также на локальные показатели k_c скорости сходимости, вычисленные как отношение логарифмов текущей и предыдущей погрешности. Они не достигают порядка аппроксимации мультиоператорной схемы на данном интервале шагов сетки, что, однако, не представляется существенным с практической точки зрения в виду очень малых значений погрешностей. Чтобы не связывать оценку точности рассматриваемой схемы с точностью “точного” решения, сформулируем следующий вопрос: каким должен приблизительно быть шаг сетки, чтобы в процессе счета до рассматриваемого значения t осуществлялось бы с погрешностью 10^{-15} точное дифференцирование по x ? Чтобы ответить на него, вернемся к фиг. 1. Из приведенного там графика следует, что это происходит приблизительно при $kh < \approx 0.5$. С другой стороны, дискретные преобразования Фурье решений при $h = 1/64$ (т.е. $N = 128$) и $t \leq 0.2$

Таблица 1. Сеточные нормы C погрешностей решений и локальные скорости сходимости k_c

N	16	32	64	128	256
L_4	1.80e-2	2.486e-3	2.052e-4	1.40e-5	9.30e-7
k_c	—	2.6	3.6	3.9	3.9
L_{59}	1.86e-3	2.16e-5	5.02e-8	4.7e-11	9.96e-14
k_c	—	6.4	8.7	10.0	9.2
L_{24}	1.3e-3	7.5e-6	1.4e-9	1.2e-14	—
k_c	—	7.7	9.1	11.1	—

показывают, что их спектры визуально отличны от нуля при $k < 20$. Следовательно, приближенно можно считать, что шаги h должны быть такими, чтобы $20h < 0.5$. Это дает оценку $h < 1/40$.

1.4. Мультиоператор диссипации

Мультиоператор D_M для координаты x имеет вид

$$D_M(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_M) = \sum_{i=1}^M \bar{\gamma}_i d(\bar{c}_i), \quad \sum_{i=1}^M \bar{\gamma}_i = 1.$$

Базисные операторы $d(\bar{c}_i)$ образованы подстановками наборов M значений параметра c в однопараметрическое семейство операторов, записанных в виде разности левых и правых операторов $L_l(c)$ и $L_r(c)$ в (3):

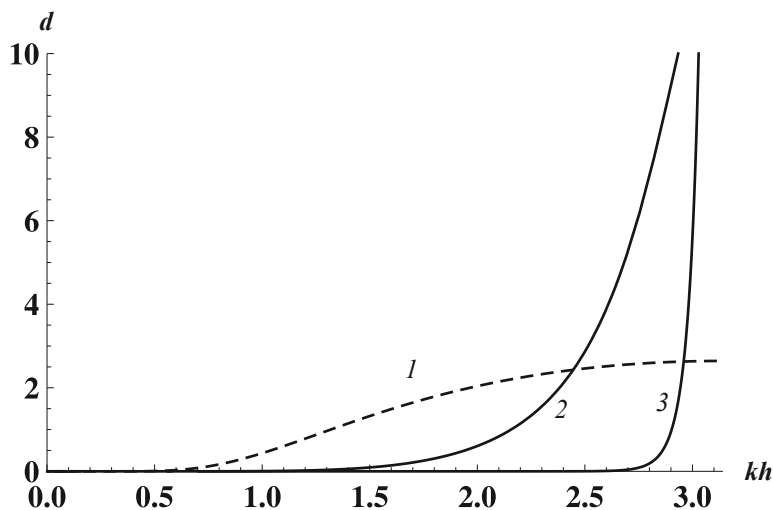
$$d(c) = L_l(c) - L_r(c).$$

Используя алгебраические манипуляции, аналогичные описанным выше для оператора $l(c)$, можно показать, что оператор $d(c)$ является самосопряженным. В отличие от L_M , коэффициенты $\bar{\gamma}_i$ определяются из условий обращения в ноль низших $M - 1$ членов в ряде Тейлора для функции $u(x)$, а не для погрешности аппроксимации производных. Таким образом, действие мультиоператора на гладкую функцию аппроксимирует ее производную порядка $2M$, умноженную на h^{2M-1} .

Поскольку базисные операторы являются самосопряженными, самосопряженным является и оператор $D_M(\bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max})$. Однако он необязательно является положительным, как этого требует устойчивость схемы. Поэтому возникает ограничение на выбор значений $\bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max}$, основанное на требовании положительности фурье-образа $\hat{D}_M(kh; \bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max})$ оператора D_M .

На фиг. 3 приведены варианты функций $d(kh) = \hat{D}_M(kh; \bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max})$, соответствующие различным значениям $\bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max}$. Все они имеют одну и ту же асимптотику $d = O(\alpha^{23})$, $\alpha = kh$, но разные интервалы kh , на которых графики этих функций визуально близки к оси абсцисс. При расширении этих интервалов значения функций монотонно возрастают до максимальных значений при $kh = \pi$; последние увеличиваются при этом расширении. В случае кривых 1, 2, 3 действие диссипативного мультиоператора на фурье-гармоники оказывается весьма малым, соответственно, при $kh < \approx 0.6$, $kh < \approx 1.5$, $kh < \approx 2.7$. Для краткости в дальнейшем будем называть эти спектры оператора D_M диссипациями 1, 2, 3.

Рассмотрим вопрос об использовании перечисленных или иных диссипаций. Поскольку действие мультиоператора является частью погрешности аппроксимации и имеет порядок $O(h^{23})$ при любом выборе параметров, значения $\bar{c}_i$ могут быть достаточно произвольными по крайней мере в случае умеренных градиентов точных решений. В этом случае роль мультиоператора сводится в силу его положительности к увеличению запаса устойчивости полудискретной схемы в приближении замороженных коэффициентов. Выбор постоянной C , характеризующей интенсивность диссипации также может быть достаточно произвольным при условии, что ее значение не является чрезмерно большим. Например, она вообще может быть равной нулю, как в случае



Фиг. 3. Фурье-образы диссипативного оператора трех типов.

приведенных выше примеров. В иных случаях достаточно универсальным выбором может быть $C = 1$. Таким образом, можно было бы рассматривать схемы с фиксированными параметрами не только мультиоператора производной, но и оператора диссипации. Однако, в отличие от L_M , параметры диссипации полезно не фиксировать в результате той или иной оптимизации, а рассматривать как свободные параметры, контролирующие ее спектральные свойства. Для упрощения анализа этих свойств будем предполагать, что $\bar{c}_i$ выбираются равномерно распределенными между минимальными и максимальными значениями $\bar{c}_{\min}$, $\bar{c}_{\max}$, обеспечивающими положительность мультиоператора. Такую свободу выбора можно использовать для улучшения монотонных свойств численных решений в случае больших градиентов или разрывов точных решений. В приводимых ниже расчетах использовались пары $\bar{c}_{\min} = 0.5$, $\bar{c}_{\max} = 5$, $\bar{c}_{\min} = -0.3$, $\bar{c}_{\max} = 0.1$ и $\bar{c}_{\min} = -0.3$, $\bar{c}_{\max} = 0.1$, соответствующие кривым 1, 2 и 3 на фиг. 3.

1.5. О граничных условиях

При вычислении действия мультиоператора на известную сеточную функцию согласно процедуре бегущего счета типа (4) для начала счета для каждого значения параметра требуется стартовое значение на границе, например значение v_0 в случае границы $x = x_0$. Являясь аппроксимацией производной на границе, оно является дополнительным граничным условием, необязательно входящим в математическую формулировку исходной задачи. Пусть таковой является задача численного дифференцирования в виде приближенного определения производной в узлах сетки $x_j = jh$, $j = 0, 1, \dots$, по значениям в этих узлах сеточной функции. Тогда значение на границе v_0 , аппроксимирующее производную с тем же порядком, что и внутри области, может быть найдено согласно методики, описанной в [4], [2]. Она состоит в использовании мультиоператоров экстраполяции желаемого порядка значений v_j во внутренних узлах на границу $x = x_0$. Такие мультиоператоры описаны в [2]. Они используют свои базисные операторы и свои параметры.

При случае численных решений краевых задач нет необходимости использовать этот подход. Практически достаточно использовать специфику этих задач. Например, в случае периодических задач проблема задания стартовых значений для бегущего счета отпадает (условия периодичности использовались в тесте 2). В случае удаленных границ эти значения, играющие роль производных на границе, могут задаваться либо из асимптотики точных решений, либо просто полагаться равными нулю (последнее условие использовалось в тесте 1). В других случаях может оказаться приемлемой обычная экстраполяция вместо описанной выше. Во всех случаях влияние начальных значений на решения во внутренних узлах убывает с увеличением расстояния от границы со скоростью убывания членов геометрической прогрессии. Более подробно вопросы граничных условий обсуждаются в [2].

2. О ПРИМЕНЕНИИ МУЛЬТИОПЕРАТОРОВ В СЛУЧАЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ

Описанные выше мультиоператоры являются линейными разностными операторами с постоянными коэффициентами. Это позволяет представить их действие в узле сетки x_j в виде разности “потоков” через границы ячейки $[x_j - h/2, x_j + h/2]$. Например, действие оператора $l(c_i)u_j$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} l(c_i)u_j &= (q_{j+1/2} - q_{j-1/2})/h, \\ q_{j+1/2} &= (R_l(c_i)^{-1}u_j + R_r(c_i)^{-1}u_{j+1})/2, \\ q_{j-1/2} &= (R_l(c_i)^{-1}u_{j-1} + R_r(c_i)^{-1}u_j)/2. \end{aligned} \quad (10)$$

Суммирование по всем ячейкам приводит к взаимному уничтожению потоков через их внутренние грани. Суммирование по i с коэффициентами c_i потоков $q_{j\pm 1/2}$ приводит к аналогичному представлению действия мультиоператора L_M . Это свойство позволяет использовать мультиоператорные схемы для аппроксимаций уравнений, записанных в виде законов сохранения. Соответственно, возникает возможность проведения расчетов в случае разрывных решений.

В этом случае основной смысл применения схем повышенных порядков состоит в получении решений, которые при одних и тех же сетках по сравнению с монотонными схемами первого порядка, во-первых, допускают значительно меньшее “размазывание” разрывов, и, во-вторых, обеспечивают большую точность решений в областях их гладкости на удалении от разрывов. Основной проблемой при этом является необходимость предотвращения немонотонности численных решений, следующей из классической теоремы С.К. Годунова.

При применении мультиоператорных схем рассматриваемого класса уменьшение до приемлемых уровней амплитуд возникающих паразитических осцилляций численных решений по крайней мере в случае разрывов сравнительно небольшой интенсивности может быть достигнуто в результате действия оператора диссипации D_M . При этом может оказаться полезным управление спектральными свойствами этого оператора, создающее возможность учета специфики решений конкретной задачи. Ограниченный опыт применения мульт-

тиоператорных схем меньших порядков при решении модельных задач показывает, что численные решения могут либо мало, либо заметно чувствительны к выбору типов диссипации из фиг. 2. При решении уравнений Навье—Стокса с использованием мультиоператоров 9-го порядка с одним из этих типов в случае чисел Маха, не превосходящих два, заметных проявлений немонотонности схемы обнаружено не было [3].

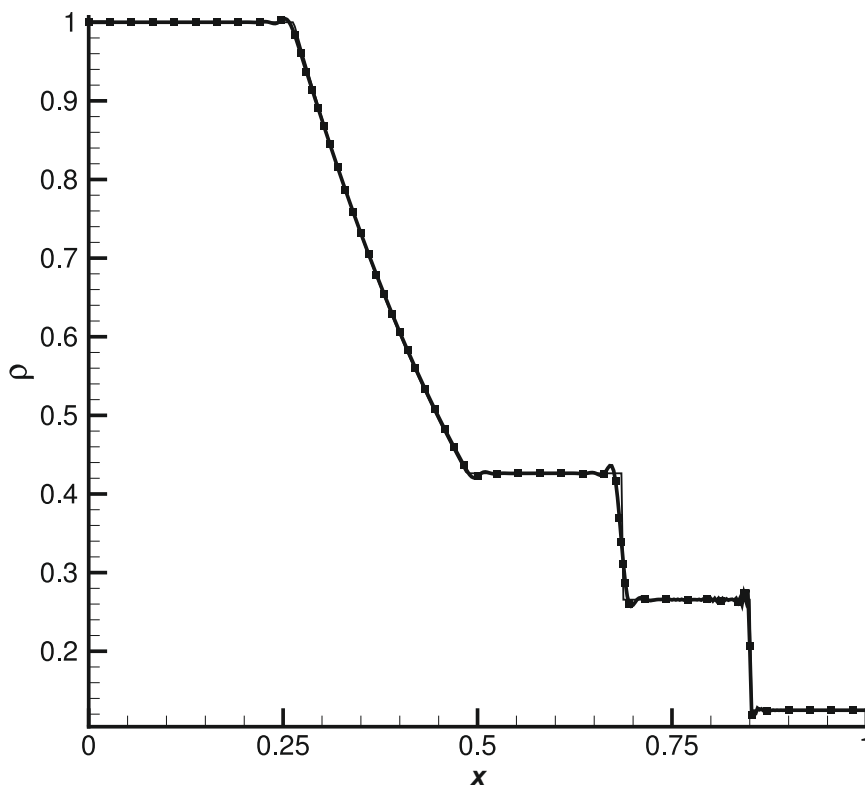
Проблема применения в широком диапазоне чисел Маха мультиоператорных аппроксимаций (в частности, рассмотренных выше), требует отдельного изучения. В данной статье ограничимся лишь несколькими примерами из этой области.

В качестве одного из них рассмотрим известную тестовую задачу о распаде разрыва (задачу Римана) [11], имеющую точное решение. Граничные условия для уравнения Эйлера в этом случае имеют вид

$$\rho = 1, u = 0, p = 1 \quad x < 0.5, \quad \rho = 0.125, u = 0, p = 0.1, \quad x > 0.5, \quad (11)$$

где ρ, u, p , соответственно, плотность, скорость и давление. Время, в которое предлагается получить решение, равно 0.2. Согласно точному решению, от центра области в направлении оси x распространяются ударная волна и с меньшей скоростью контактный разрыв.

Расчеты проводились для нескольких вариантов пар $\bar{c}_{\min}, \bar{c}_{\max}$, в том числе для диссипаций 1, 2, 3. Оказалось, что в случае диссипации 3 на решения, близкие к точным, накладываются коротковолновые колебания с длинами волн $\lambda > 2h$, т.е. более длинными, чем те, на которые эффективно действует мультиоператор. Их не удалось устранить увеличением постоянной C . Решения для диссипации 2 и другими диссипациями с похожими спектральными свойствами в графическом представлении оказались визуально мало различимыми. На фиг. 4 для диссипации 2 представлено распределение плотности в виде кривой с маркерами, а также точное решение в виде тонкой линии. Численное решение было получено на достаточно грубой сетке (число узлов $N = 200$). Видно, что небольшие отклонения от точного решения наблюдаются лишь в малых окрестностях разрывов. Заметим, что во всех расчетных вариантах возникающие в этих окрестностях паразитические колебания быстро затухают при удалении от разрывов. Это соответствует тому, что при выполнении вычислений (4) влияние значения искомой функции в каком-либо узле сетки x_i на вычисляемые значения в последующих узлах $x_j, j > i$, убывает как $O(a^{j-i})$, $a = c_k/(1 + c_k) < 1$, где $c_k > -1/2$ — любое из выбранных значений параметра c .



Фиг. 4. Задача о распаде разрыва: распределение плотности; кривая с маркерами и тонкая линия соответствуют численному и точному решениям.

Для оценки малых отличий численных решений от точных при удалении от разрывов рассмотрим решения в трех интервалах расчетной области. Они образованы следующим образом.левой границей первого и правой границей второго интервала являются границы расчетной области. Третий интервал расположен между разрывами производных, где гладкое решение определяется веером характеристик. Границы интервалов, близкие к точкам разрыва, расположены на удалении 0.1 от них.

В табл. 2 представлены среднеквадратичные отклонения численных решений от точных на этих интервалах для диссипации 1 и 2.

Из табл. 2 следует, что локальные скорости уменьшения малых погрешностей численных решений при удвоении числа узлов сетки заметно выше первого порядка вне области возмущений, создаваемой распадом разрыва. На интервалах 1 и 2 убывания погрешностей характеризуются многими порядками. Хотя на этих интервалах точное решение является тривиальным, тем не менее малость погрешностей и их быстрое убывание дает некоторую оценку точности численных решений. На интервале 3 погрешности убывают значительно медленнее (с локальными порядками между 3 и 4), но при этом остаются достаточно малыми. При сравнении двух диссипаций вторая кажется более выгодной, что указывает на возможность тонкой настройки мультиоператора диссипации. Однако такая настройка в данном случае влияет на точность решений в пределах очень малых величин и может рассматриваться как избыточная.

Ограниченные численные эксперименты показали, что применение линейного диссипативного мультиоператора позволяет получать численные решения с отсутствующими или несущественными проявлениями немонотонности в диапазоне умеренных интенсивностей разрывов. Например, в случае уравнений газовой динамики так происходило при числах Маха, не превышающих два [3]. Однако возможны ситуации, когда диссипативные свойства линейного оператора недостаточны для эффективной монотонизации решений. При этом возникновение значительных паразитических осцилляций в случае уравнений Эйлера или Навье–Стокса может приводить к потере устойчивости мультиоператорных схем. В частности, это может происходить при наличии сильных и экстремально сильных разрывов или очень больших градиентов точных решений.

2.1. Нелинейная монотонизация решений

В случае схем повышенного порядка аппроксимации существует множество подходов к устранению паразитических осцилляций численных решений, вызванных присущим таким схемам свойством немонотонности. Они основаны на той или иной коррекции получаемых в процессе счета сеточных функций или потоков через грани ячеек, образованных сетками. Поскольку реализации мультиоператорных и стандартных схем отличаются лишь алгоритмами вычислений сеточных функций и потоков, можно предположить, что при применении мультиоператоров также может быть использован наработанный опыт монотонизации. Возможно, что при этом не существует универсального подхода. На это указывает сравнение решений для нескольких популярных схем с разными монотонизаторами при их использовании в случае достаточно большого количества модельных задач с сильными разрывами [12]. Оказалось, что победителями этого соревнования для каждой задачи были разные схемы. Можно предположить, что зависимость эффективности монотонизаторов от конкретной задачи существует также в случае мультиоператорных схем. Этот вопрос требует специальных исследований и выходит за рамки данной статьи.

Единственным вариантом монотонизации численных решений в случае мультиоператорных схем было использование коррекции потоков, предложенное в ранних исследованиях [14], [13]. Причиной такого выбора, помимо простоты реализации, была абстрактная форма коррекции, при которой для ограничения потоков абстрактной схемы высокого порядка на каждом шаге по времени используются решения абстрактной монотон-

Таблица 2. Среднеквадратичные отклонения численного решения от точного на трех интервалах при удвоении числа узлов сетки N .

N	Интервал 1	Интервал 2	Интервал 3
200, диссип. 1	1.0e–5	2.6e–6	1.6e–4
400, диссип. 1	1.1e–6	1.8e–8	5.5e–5
800, диссип. 1	1.6e–8	1.0e–10	1.5e–5
200, диссип. 2	2.4e–6	4.5e–7	1.6e–4
400, диссип. 2	4.9e–9	2.5e–9	5.8e–5
800, диссип. 2	1.6e–14	6.3e–13	2.15e–5

ной схемы. Хотя такая форма допускает различные варианты “партнеров” в виде уже монотонизированных схем порядка выше первого, опыт их выбора в случае мультиоператорных аппроксимаций ограничен схемой первого порядка Лакса-Фридрихса (детали приведены в [2]). Методические расчеты в случае мультиоператорных схем меньших порядков показали, что использование ограничителей потоков в случае даже достаточно сильных разрывов позволяли получать решения задач Римана близких к точным без заметных искажений в виде пилообразных осцилляций [2]).

Рассмотрим возможность применения указанной выше коррекции потоков в случае рассматриваемой схемы 24-го порядка без какого-либо анализа ее эффективности. Приведем результаты вычислений для задачи об ударной волне, распространяющейся в покоящейся неоднородной среде. Эта задача, сформулированная в [15] (задача Шу-Ошера), рассматривалась ее авторами как имитация распространения ударных волн в фоновом турбулентном потоке. Ее версия [16] задавалась начальными данными для уравнений Эйлера вида

$$\begin{aligned} -1 &\leq x \leq 1, \\ \rho &= 3.857143, u = 2.629369, p = 10.33333, x < -0.8, \\ \rho &= 1 + 0.2 \sin 5x, u = 0, p = 1, x \geq -0.8. \end{aligned}$$

Поскольку точное решение этой задачи отсутствует, в качестве реферсного решения в [16] рассматривалось численное решение, полученное на основе использованной в расчетах схемы повышенного порядка (схемы WENO) при большом числе узлов сетки.

Рассмотрим прежде всего численные решения этой задачи при применении схемы первого порядка Лакса-Фридрихса. Они не содержат артефактов и могут характеризовать структуру решений при уменьшении шагов сетки.

Вычисленные на основе этой схемы распределения плотности для последовательности сеток в момент времени $t = 0.47$, указанный в [16], представлены на фиг. 5.

Кривые на фиг. 5 описывают решения за волной при числах узлов $N = 1600, 3200, 12800$. Согласно этим решениям, за фронтом волны на некотором интервале присутствуют визуально гладкие колебания плотности с резко выраженными экстремумами. Основные различия между решениями наблюдаются в окрестности этих экстремумов, где максимальные значения плотности возрастают, а минимальные убывают при возрастании числа узлов сетки. Здесь сходимость оказывается достаточно медленной и даже увеличение числа узлов от 12800 до 25600, как показывают расчеты, не приводит к совпадению экстремальных значений на графиках.

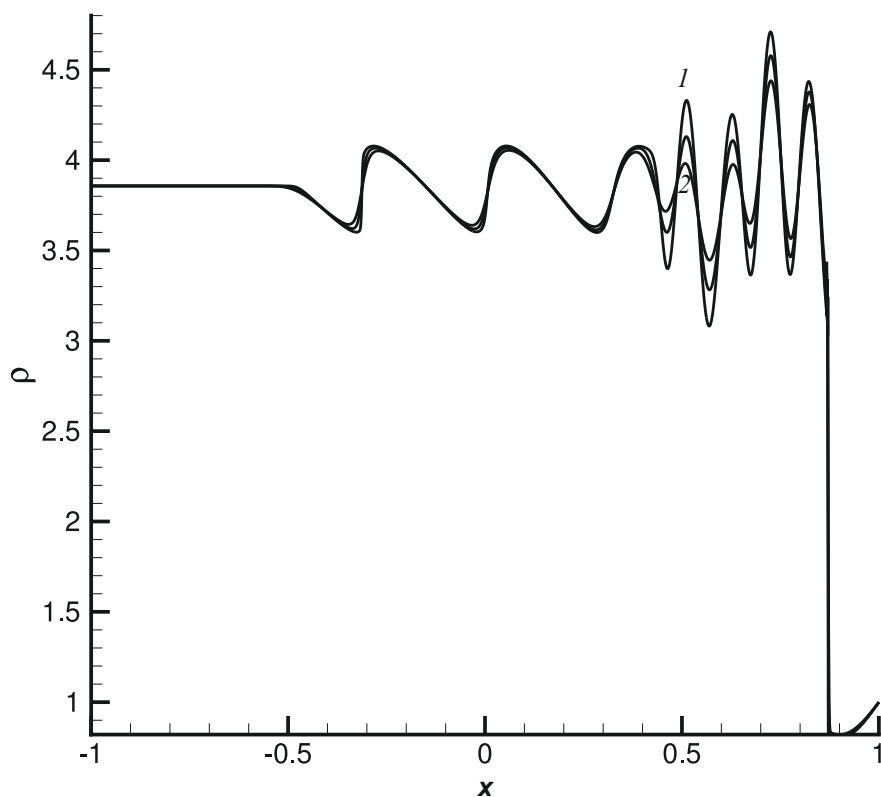
На фиг. 6 представлены распределения плотности, полученные на сетках с числами узлов $N = 400, 800, 1600$ в случае схемы 24-го порядка с коррекцией потоков [13]. Увеличение числа узлов до $N = 3200$ не изменило график решения при $N = 1600$.

На фиг. 7 приведены в увеличенном виде колебания плотности перед скачком в решении задачи Шу-Ошера [15], отличающейся от задачи Шу увеличенными размерами области и временем $t = 1.8$. Видно, что решения для чисел узлов сетки $N = 1600$ и $N = 800$ лишь незначительно отличаются в окрестностях острых экстремумов. Можно предположить, что основная коррекция решений с помощью схемы первого порядка происходит именно в этих окрестностях. Это дает основание для предположения о том, что более быстрой сходимости можно ожидать либо в случае более точной корректирующей схемы, либо при использовании более совершенных монотонизаторов. Поиск таких путей может быть предметом отдельных исследований.

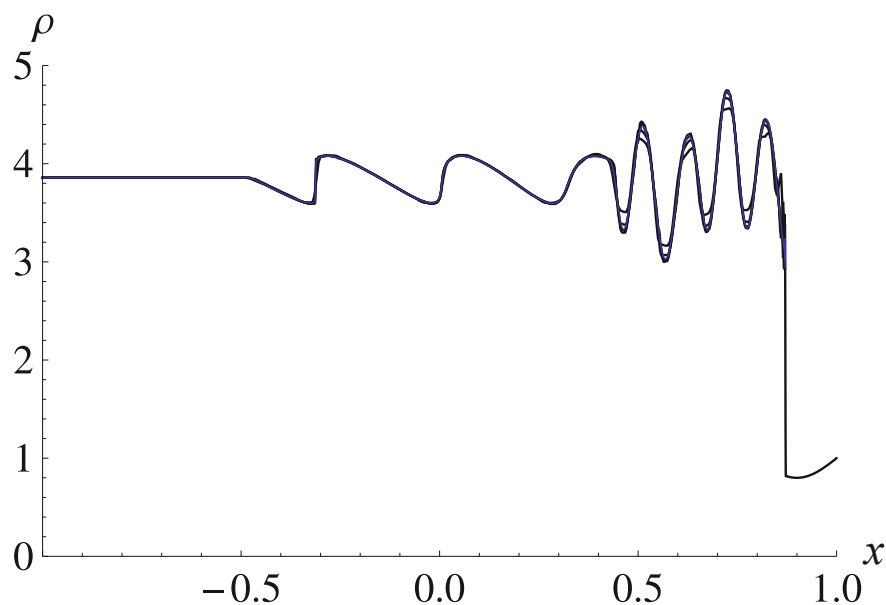
3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках исследования мультиоператорных аппроксимаций и схем, использующих экономично обрабатываемые двухточечные операторы, рассмотрены аппроксимации 24-го порядка первых производных в задачах с конвективными членами. Основное внимание уделено их спектральным свойствам. Было показано, что в результате оптимизации выбора параметров мультиоператоров можно достичь очень малых отличий аппроксимаций производных и точного дифференцирования в широком диапазоне волновых чисел гармоник, поддерживаемых сетками. Таким образом, помимо очень высокой точности в длиноволновом диапазоне, мультиоператорная схема обладает способностью правильно описывать мелкие детали точных решений исходных уравнений при разумных числах узлов сеток. Для иллюстрации этих свойств приведены примеры решения модельных задач.

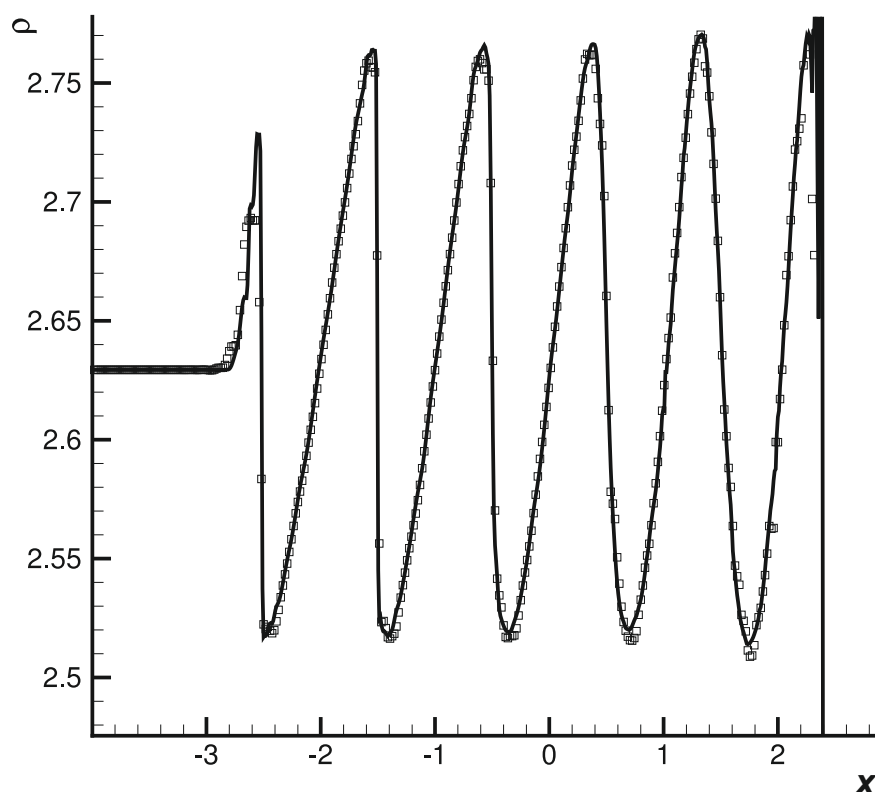
При рассмотрении возможности использования мультиоператорной схемы в случае разрывных решений, основанной на ее консервативности, были представлены результаты вычислений для задачи о распаде разрыва. Был также приведен пример применения нелинейной коррекции схемы, предназначенной для расчетов в случае сильных разрывов. Однако вопросы эффективности мультиоператорных схем и их нелинейных вариантов для задач газовой динамики при больших числах Маха в настоящее время не изучены и требуют специальных исследований.



Фиг. 5. Решения задачи Шу [16] с применением схемы первого порядка: распределения плотности при удвоении числа узлов сетки; кривые 1, 2 с максимальными и минимальными пиками значениями и промежуточная кривая соответствуют числам узлов 1280, 1600 и 3200.



Фиг. 6. Решение задачи Шу [16] с применением схемы 24-го порядка с коррекцией потоков через грани ячеек: распределения плотности при удвоении числа узлов сетки, $t = 0.47$; кривые с максимальными и минимальными пиками значениями и промежуточная кривая соответствуют числам узлов 1600, 400 и 800.



Фиг. 7. Решение задачи Шу-Ошера [15] с применением схемы 24-го порядка с коррекцией потоков через грани ячеек, $t = 1.8$: распределения плотности перед скачком при удвоении числа узлов сетки; сплошная линия и маркеры соответствуют числам узлов сетки 1600 и 800.

Важной чертой мультиоператорных схем рассмотренного класса является возможность достижения высокой параллельной эффективности в случае суперкомпьютерных вычислений. Она следует из того, что основную роль в вычислениях играют арифметические операции, связанные с обращением двухдиагональных матриц согласно процедуре бегущего счета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tolstykh A.I.* Multioperator high-order compact upwind methods for CFD parallel calculations, in: D.R. Emerson et al. (Eds.), *Parallel Computational Fluid Dynamics*, Amsterdam: Elsevier. 1998. P. 383–390.
2. *Толстых А.И.* Компактные и мультиоператорные аппроксимации высокой точности для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2015.
3. *Tolstykh A.I., Shirobokov D.A.* Fast calculations of screech using highly accurate multioperators-based schemes // *J. Appl. Acoustics*. 2013. V. 74. P. 102–109.
4. *Tolstykh A. I.* Development of arbitrary-order multioperators-based schemes for parallel calculations. 2. Families of compact approximations with two-diagonal inversions and related multioperators // *J. Comput. Phys.* 2008. V. 227. P. 2922–2940.
5. *Толстых А.И.* О семействах высокоточных мультиоператорных аппроксимаций производных, использующих двухточечные операторы // *Докл. АН*. 2017. Т. 473. № 12, С. 138–141.
6. *Tolstykh A.I., Shirobokov D.A.* Using 16-th Order Multioperators-Based Scheme for Supercomputer Simulation of the Initial Stage of Laminar-Turbulent Transitions // *Communications in Computer and Information Science*, Springer. 2021, 1510 CCIS. P. 270–282.
7. *Lipavskii I. Konshin.* Parallel Implementation of Multioperators-Based Scheme of the 16-th Order for Three-Dimensional Calculation of the Jet Flows. In: *Proc. of International Conference “Russian Supercomputing Days 2022”*, September 26–27, 2022, Moscow: MSU Publishing House. P. 1–13.

8. *Tolstykh A.I., Shirobokov D.A.* Observing production and growth of Tollmien-Schlichting waves in subsonic flat plate boundary layer via excitors-free high fidelity numerical simulation // *J. of Turbulence*. 2020. V. 21. № 11. P. 632–649.
9. *Tam C.K.W.* Problem 1-aliasing, In: *Fourth Computational Aeroacoustics (CAA) Workshop on benchmark problems*, 2004, NASA/CP-2004-2159.
10. *Adams N.A., Shariff K.* A high resolution Compact-ENO schemes for shock-turbulence interaction problems // *J. Comput. Phys.* 1996. V. 127. P. 27–51.
11. *Sod G.A.* A survey of several finite difference schemes for hyperbolic conservation laws // *J. Comput. Phys.* 1978. V. 27. P. 1–31.
12. *Liska R., Wendroff B.* Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // *SIAM J. Sci. Comput.* 2003. V. 26. P. 995–1017.
13. *Zalesac S.T.* Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids // *J. Comput. Phys.* 1979. V. 31. P. 335–362.
14. *Boris J.P., Book D.L.* Flux-Corrected Transport. I. SHASTA, a fluid transport algorithm that works // *J. Comput. Phys.* 1973, V. 11. P. 38–69.
15. *Shu C.W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes II // *J. Comput. Phys.* 1989, V. 83. P. 32–78.
16. *Balsara D.S., Shu C.-W.* Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy // *J. Comput. Phys.* 2020. V. 160 P. 405–452.

ON 24TH-ORDER MULTI-OPERATOR APPROXIMATIONS IN SCHEMES FOR EQUATIONS WITH CONVECTIVE TERMS

A. I. Tolstykh*

119333 Moscow, Vavilov Str., 44, Federal Research Center Computer Science and Control, RAS, Russia

**e-mail: tol@ccas.ru*

Received 19.01.2024

Revised 04.04.2024

Accepted 31.05.2024

Abstract. As part of the study of multi-operator approximations and schemes using economically reversible two-point operators, approximations of the 24th order of the first derivatives in problems with convective terms are considered. The main attention is paid to the spectral properties characterizing their high accuracy and resolution. To illustrate these properties, examples of solving model problems are given. The possibilities of using such multi-operator schemes in the case of discontinuous solutions are considered.

Keywords: multioperators, 24th order approximation, Euler equations, problems with discontinuous solutions.