

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С АКТИВНОЙ ПРИМЕСЬЮ¹⁾

© 2024 г. Т.С. Шарифуллина^{1,*}, А.А. Черевко^{1,**}, В.В. Остапенко^{1,***}

¹630090 Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 15, Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук, Россия

*e-mail: tatiana_06.08@mail.ru

**e-mail: cherevko@mail.ru

***e-mail: ostigil@mail.ru

Поступила в редакцию 09.04.2024 г.

Переработанный вариант 09.04.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Проведен сравнительный анализ точности схемы CABARET (второго порядка) со схемами WENO5 и A-WENO (пятого порядка по пространству и четвертого порядка по времени) при расчете различных задач Римана для невыпуклой системы законов сохранения модели двухфазной фильтрации с активной примесью. Показано, что при расчете этих задач схема CABARET имеет существенно более высокую точность по сравнению со схемами WENO, особенно в тех областях точного решения, где к ударным волнам примыкают центрированные волны разрежения. Библ. 30. Фиг. 4.

Ключевые слова: уравнения газовой динамики, ударные волны, схемы сквозного счета повышенной точности.

DOI: 10.31857/S0044466924100168, EDN: JYQJOY

1. ВВЕДЕНИЕ

Поскольку в классической работе [1] было показано, что среди двухслойных по времени линейных численных схем нет монотонных схем повышенного порядка аппроксимации, то развитие теории схем сквозного счета для гиперболических систем законов сохранения в значительной степени было направлено на преодоление этого “запрета Годунова”. В результате были разработаны различные классы численных схем [2–7], в которых повышенный порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонность достигались за счет нелинейной коррекции потоков, в силу чего эти схемы являются нелинейными при аппроксимации линейных гиперболических уравнений и систем. Укажем основные классы таких схем, которые будем сокращенно называть NFC (Nonlinear Flux Correction) схемами: MUSCL [8], TVD [9], Central [10], WENO [11], DG [2], CABARET [12]. Основное достоинство этих схем заключается в том, что при аппроксимации скалярного закона сохранения с выпуклым потоком или выпуклой системы законов сохранения такие схемы с высокой точностью локализируют сильные и слабые разрывы точного решения при отсутствии существенных нефизических осцилляций на фронтах ударных волн. В качестве характерного примера выпуклой гиперболической системы можно привести систему уравнений газовой динамики с выпуклым уравнением состояния [3], для которой решения задач Римана состоят из простых волн (ударных волн, контактных разрывов и центрированных волн разрежения), разделенных областями постоянного течения.

При расчете по стандартным NFC-схемам скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком или невыпуклой системы законов сохранения [13] для численных решений этих схем может отсутствовать сходимость к точному разрывному решению аппроксимируемой гиперболической задачи, особенно в областях, где центрированная волна разрежения примыкает к ударной волне (характерным примером невыпуклой гиперболической системы является система уравнений газовой динамики с невыпуклым уравнением состояния). Для эффективного расчета разрывных решений невыпуклых гиперболических уравнений и систем были разработаны [14–20] различные модификации стандартных NFC-схем, позволяющие с достаточно высокой точностью локализовать сильные и слабые разрывы точного решения. В частности, в [20] была построена монотонная модификация

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 22-11-00060), <https://rscf.ru/project/22-11-00060/> (разд. 1 и 2) и (код проекта 22-11-00264), <https://rscf.ru/project/22-11-00264/> (разд. 3 и 4).

схемы CABARET, аппроксимирующая скалярный закон сохранения с невыпуклым потоком. При расчете разрывных решений уравнений Баклея–Левретта эта модификация схемы CABARET показала [21] существенно более высокую точность по сравнению со схемами WENO3 и WENO5 из [22], в которых для аппроксимации по времени используется TVD метод Рунге-Кутты четвертого порядка, предложенный в [23].

В настоящей работе модифицированный алгоритм схемы CABARET второго порядка применяется при расчете задач Римана для невыпуклой системы законов сохранения модели двухфазной фильтрации с активной примесью [24]. Показано, что при расчете этих задач схема CABARET имеет существенно более высокую точность по сравнению со схемами WENO5 [22] и A-WENO [25] пятого порядка по пространству и четвертого порядка по времени [23], особенно в тех областях точного решения, где к ударным волнам примыкают централизованные волны разрежения.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С АКТИВНОЙ ПРИМЕСЬЮ

Рассмотрим модель приближенно описывающую одномерную нестационарную фильтрацию двух вязких несмешивающихся жидкостей, когда фильтрация фаз происходит при наличии в потоке активной примеси, которая может сорбироваться в скелете пористой среды и влиять на гидродинамические характеристики течения. Будем считать, что примесь отсутствует в вытесняемой фазе, а концентрация примеси в вытесняющей фазе влияет на ее фазовую проницаемость. Концентрацию примеси будем считать малой, не изменяющей объема и плотности фазы. Тогда дивергентная форма записи системы уравнений двухфазной фильтрации с активной примесью в одномерном случае имеет вид [24]

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2.1)$$

где

$$u = \begin{pmatrix} s \\ (s + \beta)c \end{pmatrix}, \quad f(u) = \begin{pmatrix} \alpha F \\ \alpha c F \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$F = F(s, c) = \frac{f_1(s, c)}{\mu_1} \left(\frac{f_1(s, c)}{\mu_1} + \frac{f_2(s)}{\mu_2} \right)^{-1}, \quad (2.3)$$

где $s = s(x, t) \in [0, 1]$ — насыщенность порового пространства вытесняющей фазой, $c = c(x, t)$ — характеризует относительное количество активной примеси в вытесняющей фазе и без ограничения общности может быть взято равным от 0 до 1, $\alpha = V/m$, $\beta = \gamma/m$, V — совместная скорость фильтрации фаз, m — пористость среды, γ — коэффициент в линейном законе сорбции, $f_1(s, c)$ и $f_2(s)$ — относительные проницаемости, а μ_1 и μ_2 — коэффициенты вязкости для вытесняющей и вытесняемой фаз, соответственно. Функция $F(s, c)$ задает долю вытесняющей фазы в суммарном потоке. Первое уравнение системы (2.1), (2.2) описывает течение жидкости, а второе — перенос активной примеси в вытесняющей фазе. Мы будем рассматриваться случай, когда $F_c \leq 0$, при котором доля вытесняющей фазы уменьшается при увеличении концентрации примеси.

Записывая систему (2.1), (2.2) в недивергентной форме

$$\bar{u}_t + A(\bar{u})\bar{u}_x = 0, \quad (2.4)$$

где

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}, \quad A(\bar{u}) = \begin{pmatrix} \alpha F_s & \alpha F_c \\ 0 & \Psi \end{pmatrix}, \quad \Psi = \frac{\alpha F}{s + \beta}, \quad (2.5)$$

получаем, что скорости распространения характеристик в этой системе, определяемые собственными значениями матрицы $A(\bar{u})$, задаются формулами

$$\lambda_1 = \alpha F_s, \quad \lambda_2 = \Psi. \quad (2.6)$$

Инварианты системы (2.1), (2.2), распространяющиеся вдоль этих характеристик, имеют вид

$$w_1 = \Psi, \quad w_2 = c. \quad (2.7)$$

Нам понадобится запись соотношения (2.7) в векторной форме $w = W(\bar{u})$, где $w = (w_1, w_2)$ — вектор инвариантов.

На ударных волнах системы законов сохранения (2.1), (2.2) выполнены условия Гюгонио

$$D[s] = [\alpha F], \quad D[(s + \beta)c] = [\alpha c F], \quad (2.8)$$

в которых $D = x'(t)$ — скорость распространения ударной волны $x = x(t)$, где введено обозначение

$$[f] = f_1 - f_0$$

для скачка функции $f(x, t)$ на фронте ударной волны,

$$f_0 = f(x(t) + 0, t), \quad f_1 = f(x(t) - 0, t).$$

Ударную волну, на которую приходят две характеристики первого семейства, вдоль которых переносятся два значения инварианта w_1 , и одна характеристика второго семейства, вдоль которой переносится инвариант $w_2 = c$, будем называть *ударной волной индекса 1*. На такой ударной волне условия Гюгонио (2.8) имеют решение, в котором

$$[c] = c_1 - c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = c_0. \quad (2.9)$$

Действительно, с учетом (2.9) второе условие (2.8) можно записать в виде

$$Dc_0[s + \beta] = c_0[\alpha F]. \quad (2.10)$$

Если $c_0 = 0$, то равенство (2.10) выполняется автоматически, если $c_0 \neq 0$, то (после сокращения на c_0) равенство (2.10) с учетом того, что $[\beta] = 0$, переходит в первое условие Гюгонио (2.8), из которого следует, что при $[s] \neq 0$ ударная волна распространяется со скоростью

$$D = [\alpha F]/[s] = \alpha(F_1 - F_0)/(s_1 - s_0).$$

Таким образом, на ударной волне индекса 1 сильный разрыв имеет функция $s(x, t)$, а функция $c(x, t)$ является непрерывной. Ударную волну, на которую приходят две характеристики второго семейства, принося два различных значения инварианта $w_2 = c$, и одна характеристика первого семейства, будем называть *ударной волной индекса 2*. На такой ударной волне сильный разрыв имеют обе базисные функции s и c .

Следуя [26, 27], в приводимых далее численных расчетах имеем

$$\mu_1 = 2, \mu_2 = 1; \quad V = m = 1 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = \gamma;$$

$$f_1(s, c) = as^3/(\gamma c + a), \quad f_2(s) = (1 - s)^3, \quad (2.11)$$

где $a = 0.1$ и $\gamma = 0.2$. Из формул (2.11) следует, что функция $F(s, c)$ является невыпуклой относительно переменной s , в силу чего система (2.1), (2.2) представляет собой невыпуклую гиперболическую систему законов сохранения, решения которой допускают центрированные волны, примыкающие к ударным волнам понижения и повышения концентрации.

Из первой формулы (2.2) следует, что векторные функции u и $\bar{u}$ связаны невырожденным преобразованием

$$u = U(\bar{u}) \Rightarrow \bar{u} = U^{-1}(u),$$

где U^{-1} — оператор обратный к оператору U . С учетом этого поставим для системы (2.4), (2.5) задачу Римана со следующими кусочно-постоянными начальными данными для функции $\bar{u}$:

$$\bar{u}(x, 0) = \begin{cases} \bar{u}_1, & x \leq 0, \\ \bar{u}_0, & x > 0. \end{cases}$$

Для данной задачи будем использовать аббревиатуру SRP (Special Riemann Problem). Поскольку с учетом формул (2.3) и (2.11) скорости характеристик (2.6) являются положительными, то задача SRP эквивалентна для системы (2.4), (2.5) следующей начально-краевой задаче:

$$\bar{u}(x, 0) = \bar{u}_0, \quad x > 0; \quad \bar{u}(0, t) = \bar{u}_1, \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

В общем случае, решение задачи Римана для гиперболической системы законов сохранения второго порядка (состоящей из двух скалярных дивергентных уравнений), допускает автомодельные центрированные волны разрежения индексов 1 и 2. В центрированной волне индекса 2 постоянным является инвариант w_1 , а инвариант w_2 определяется из уравнения

$$\lambda_2(w_1, w_2) = x/t. \quad (2.13)$$

Однако, из формул (2.6) и (2.7) следует, что $\lambda_2 = w_1$, в силу чего уравнение (2.13) вырождается и принимает вид

$$x/t = w_1 = \text{const.}$$

Это означает, что задача SRP не допускает автомодельных центрированных волн разрежения индекса 2. Таким образом, точные решения задачи SRP могут содержать ударные волны индексов 1 и 2, а также центрированные волны разрежения индекса 1 (для этих волн будем использовать сокращенные обозначения S_1 , S_2 и R_1). С учетом того, что $w_2 = c$ и $[c] = 0$ на ударных волнах S_1 , концентрация $c(x, t)$ в решениях задач SRP представляет собой кусочно-постоянную функцию, имеющую сильный разрыв на ударной волне S_2 , по обе стороны от которого она принимает постоянные значения.

3. РАССМАТРИВАЕМЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ СХЕМЫ

Численное решение по схемам CABARET, WENO5 и A-WENO задачи SRP будем строить на прямоугольной сетке

$$S = \{(x_j, t_n) : x_j = jh, 0 \leq j \leq M; t_{n+1} = t_n + \tau_n, t_0 = 0\}, \quad (3.1)$$

заданной на пространственном интервале $[0, X]$, где $X = hM$, h — шаг сетки по пространству, τ_n — шаг сетки по времени, определяемый из условия устойчивости Куранта

$$\tau_n = \frac{zh}{\max_{i=1,2} \max_{0 \leq j \leq M} |\lambda_i(\bar{v}_j^n)|}, \quad z \in (0, 1), \quad (3.2)$$

$\bar{v}_j^n = \bar{v}(x_j, t_n)$ — численное решение, соответствующее вектор функции $\bar{u}$, z — коэффициент запаса. Начальные и граничные условия для численного решения будем задавать путем точной аппроксимации условий (2.12) по формулам

$$\bar{v}_j^0 = \bar{u}_0, \quad v_j^0 = U(\bar{u}_0), \quad 1 \leq j \leq M; \quad \bar{v}_0^n = \bar{u}_1, \quad v_0^n = U(\bar{u}_1), \quad n \geq 0, \quad (3.3)$$

где $v_j^n = v(x_j, t_n)$ — численное решение, соответствующее векторному решению u .

Приведем описание рассматриваемых схем.

3.1. WENO схемы

WENO-схемы [11, 22] были построены в результате модификации ENO-схем [28], которые, в свою очередь, были получены путем модификации TVD-схемы [9] с целью сохранения повышенной точности при аппроксимации локальных экстремумов в гладких частях рассчитываемых решений. При этом, в отличие от TVD-схемы, построенной в результате монотонизации схемы Лакса-Вендрофа [29], ENO и WENO-схемы удовлетворяют TVD свойству лишь приближенно. Ключевая идея ENO-схем, связанная с выбором наиболее гладкого шаблона из нескольких кандидатов при аппроксимации потоков, в WENO-схемах видоизменяется следующим образом: используется выпуклая комбинация всех подходящих шаблонов, каждому из которых присваивается весовой коэффициент, определяющий его вклад в окончательную аппроксимацию численного потока.

В отличие от других классов NFC-схем, в которых для монотонизации разностного решения используются различные типы минимаксной коррекции потоков, что приводит к существенному снижению их гладкости, в WENO-схемах такая коррекция достигается за счет введения весовых коэффициентов, что позволяет сохранить повышенную гладкость функций численных потоков. В настоящее время WENO-схемы, особенно их современные модификации [7], широко применяются для численного моделирования различных прикладных задач газо- и гидродинамики. В настоящей работе мы тестируем схемы WENO5 [22] и A-WENO [25] пятого порядка по пространству, в которых для аппроксимации по времени используется TVD метод Рунге-Кутты четвертого порядка [23]. Для малого эвристического параметра, входящего в эти схемы, по аналогии с [30], используется значение $\varepsilon = 10^{-12}$.

3.2. Алгоритм схемы CABARET

В схеме CABARET [6, 12] наряду с переменными v_j^n , которые называются *потокowymi*, используются консервативные переменные $v_{j+1/2}^n = v(x_{j+1/2}, t_n)$, заданные в полуцелых пространственных узлах $x_{j+1/2} = x_j + h/2$ сетки (3.1). Предположим, что на n -м временном слое численное решение v_j^n , $v_{j+1/2}^n$ известно; при $n = 0$ это точная аппроксимация начальных данных задачи (2.12), задаваемая формулами (3.3) в целых узлах x_j сетки (3.1) и аналогичными формулами

$$v_{j+1/2}^0 = \bar{u}_0, \quad v_{j+1/2}^0 = U(\bar{u}_0), \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

в полуцелых узлах $x_{j+1/2}$ этой сетки. Тогда решение на $(n+1)$ -м временном слое строится в несколько этапов.

На первом этапе по разностным уравнениям имеем

$$\frac{v_{j+1/2}^{n+1/2} - v_{j+1/2}^n}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{h} = 0, \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

где $f_j^n = f(v_j^n)$, вычисляются значения консервативных переменных $v_{j+1/2}^{n+1/2}$ на полуцелом временном слое $t_{n+1/2} = t_n + \tau_n/2$. На втором этапе по формулам

$$\bar{v}_j^n = U^{-1}(v_j^n), \quad 0 \leq j \leq M, \quad \bar{v}_{j+1/2}^{n+1/2} = U^{-1}(v_{j+1/2}^{n+1/2}), \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

находятся сеточные значения вектор функции $\bar{u}$, а затем по формулам

$$\omega_j^n = W(v_j^n), \quad 0 \leq j \leq M, \quad \omega_{j+1/2}^{n+1/2} = W(v_{j+1/2}^{n+1/2}), \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

находятся сеточные значения вектора инвариантов w на временных слоях n и $n+1/2$.

Поскольку в рассматриваемой задаче скорости характеристик (2.6) положительны, то на третьем этапе по экстраполяционной формуле

$$\hat{\omega}_{j+1}^{n+1} = 2\omega_{j+1/2}^{n+1/2} - \omega_j^n, \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

определяются предварительные значения $\hat{\omega}_{j+1}^{n+1}$ сеточного вектора инвариантов на $(n+1)$ -м временном слое. На четвертом этапе при помощи функции двухстороннего ограничения

$$F(u, m, M) = \begin{cases} m, & u \leq m, \\ u, & m \leq u \leq M, \\ M, & u \geq M, \end{cases}$$

компоненты $(\hat{\omega}_i)_j^{n+1}$ вектора $\hat{\omega}_j^{n+1}$ корректируются по следующим формулам (при записи которых индекс i для краткости опускается)

$$\omega_j^{n+1} = F(\hat{\omega}_j^{n+1}, m_j^n, M_j^n), \quad 1 \leq j \leq M,$$

где

$$m_j^n = \min(\omega_{j-1}^n, \omega_{j-1/2}^n, \omega_j^n), \quad M_j^n = \max(\omega_{j-1}^n, \omega_{j-1/2}^n, \omega_j^n).$$

В результате получаются окончательные значения сеточного вектора инвариантов

$$\omega_j^{n+1} = ((\omega_1)_j^{n+1}, (\omega_2)_j^{n+1}), \quad 1 \leq j \leq M.$$

На пятом этапе в каждом узле (x_j, t_{n+1}) из векторного уравнения

$$W(\bar{v}_j^{n+1}) = \omega_j^{n+1}, \quad 1 \leq j \leq M, \quad (3.4)$$

находится значение сеточной вектор функции $\bar{v}_j^{n+1}$. В силу невыпуклости функции $F(s, c)$ относительно переменной s решение уравнения (3.4) может определяться неоднозначно, поскольку графики функций (2.7) могут пересекаться в одной или двух точках (фиг. 1). Если эти графики пересекаются в двух точках, то выбирается то решение $\bar{v}_j^{n+1}$ системы (2.7), которое наиболее близко к известному вектору $\bar{v}_{j+1/2}^{n+1/2}$, т.е. для которого величина $|\bar{v}_j^{n+1} - \bar{v}_{j+1/2}^{n+1/2}|$ является минимальной. Если графики функций (2.7) пересекаются в одной точке, то это означает, что график функции $w_2 = c$, представляющий собой на плоскости переменных (s, c) горизонтальную прямую линию (фиг. 1), проходит через максимум функции $w_1 = \Psi$. В этом случае компоненты $((\bar{v}_1)_j^{n+1}, (\bar{v}_2)_j^{n+1})$ вектора $\bar{v}_j^{n+1}$ находятся из системы уравнений

$$(\omega_1)_j^{n+1} = F'_s((\bar{v}_1)_j^{n+1}, (\bar{v}_2)_j^{n+1}), \quad (\omega_2)_j^{n+1} = (\bar{v}_2)_j^{n+1}, \quad (3.5)$$

получаемой из условия экстремума функции $w_1 = \Psi$. После вычисления функции $\bar{v}_j^{n+1}$ по формуле

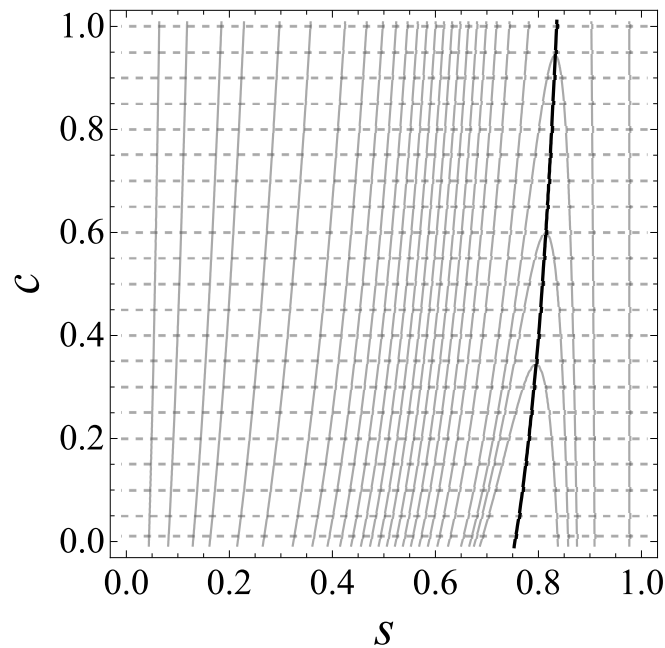
$$v_j^{n+1} = U(\bar{v}_j^{n+1}), \quad 1 \leq j \leq M,$$

определяются численные значения вектора базисных переменных u в узлах (x_j, t_{n+1}) сетки (3.1).

На заключительном шестом этапе из разностных уравнений

$$\frac{v_{j+1/2}^{n+1} - v_{j+1/2}^{n+1/2}}{\tau_n/2} + \frac{f_{j+1}^{n+1} - f_j^{n+1}}{h} = 0, \quad 0 \leq j \leq M-1,$$

где $f_j^{n+1} = f(v_j^{n+1})$, находится вектор консервативных переменных $v_{j+1/2}^{n+1}$ в полуцелых пространственных узлах $(n+1)$ -го временного слоя.



Фиг. 1. Линии уровня инвариантов w_1 (сплошные линии) и w_2 (пунктирные линии) на плоскости базисных переменных (s, c) . Жирная сплошная линия проходит через максимумы функций $\Psi(s, c) = w_1$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

На фиг. 2–4 приведены результаты расчетов задачи SRP по схемам CABARET, WENO5 и A-WENO на численной сетке (3.1), где шаг по пространству $h = 0.1$ и в условии устойчивости (3.2) коэффициент запаса $z = 0.4$.

На фиг. 2 показаны расчеты задачи SRP1 с начальными данными

$$s(x, 0) = \begin{cases} 0.9, & x \leq 0, \\ 0.2, & x > 0, \end{cases} \quad c(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

на фиг. 3 – задачи SRP2 с начальными данными

$$s(x, 0) = \begin{cases} 0.45, & x \leq 0, \\ 0.9, & x > 0, \end{cases} \quad c(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

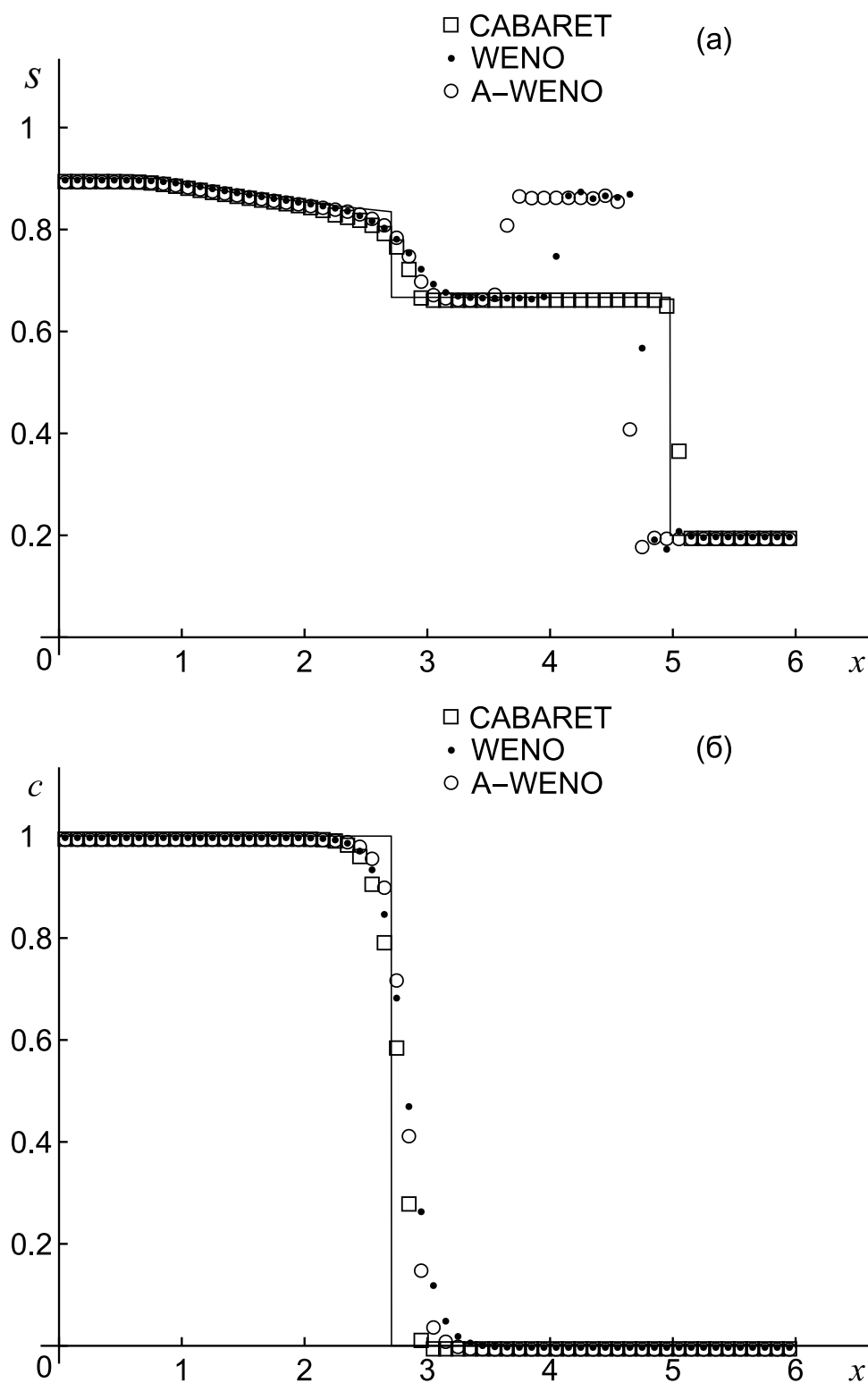
и на фиг. 4 – задачи SRP3 с начальными данными

$$s(x, 0) = \begin{cases} 0.9, & x \leq 0, \\ 0.78, & x > 0, \end{cases} \quad c(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

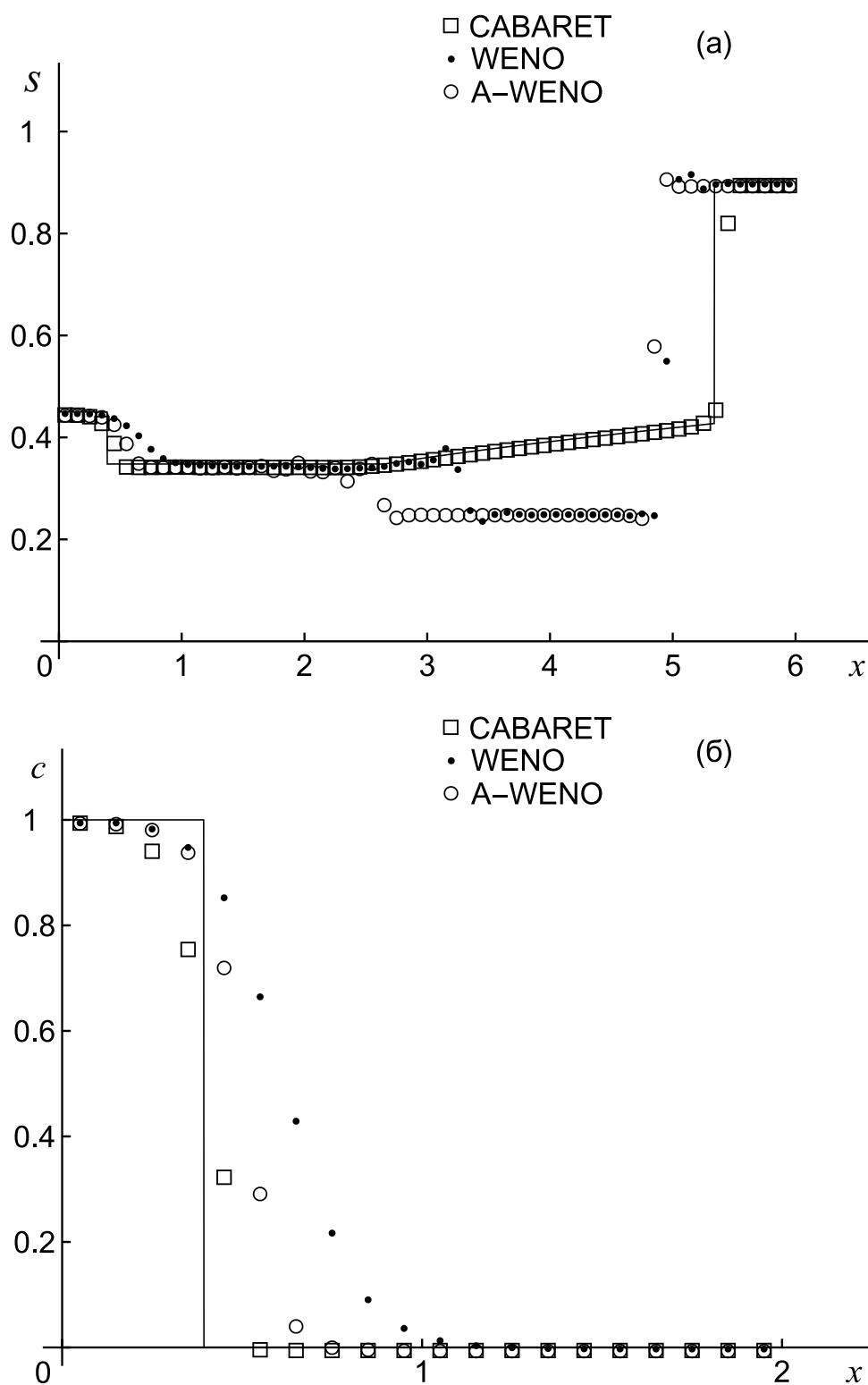
Отметим, что такие начальные данные соответствуют тестовым примерам для конкретных прикладных задач [26, 27]. При этом для схем WENO использовалось приближенное начальное условие $c(x, 0) = 10^{-8}$, $x > 0$, поскольку при условии $c(x, 0) = 0$, $x > 0$, решение, получаемое по таким схемам, становится неустойчивым.

При решении всех трех рассматриваемых задач формируются ударные волны S_1 и S_2 , а также центрированная волна разрежения R_1 , примыкающая к одной из ударных волн; причем волна S_1 всегда распространяется с большей скоростью, чем волна S_2 . В решениях задач SRP1 (фиг. 2а) и SRP3 (фиг. 4а) волна разрежения R_1 примыкает к ударной волне S_2 и функция $s(x, t)$ в волне R_1 монотонно убывает. При решении задачи SRP2 (фиг. 3а) волна разрежения R_1 примыкает к ударной волне S_1 и функция $s(x, t)$ в волне R_1 монотонно возрастает. Следует заметить, что для других начальных данных существуют решения, в которых волна разрежения R_1 примыкает к обоим скачкам S_1 и S_2 , а также решения, которые содержат скачки S_1 и S_2 без волн разрежения. Поведение численных решений для этих случаев качественно совпадает с приведенными в работе примерами.

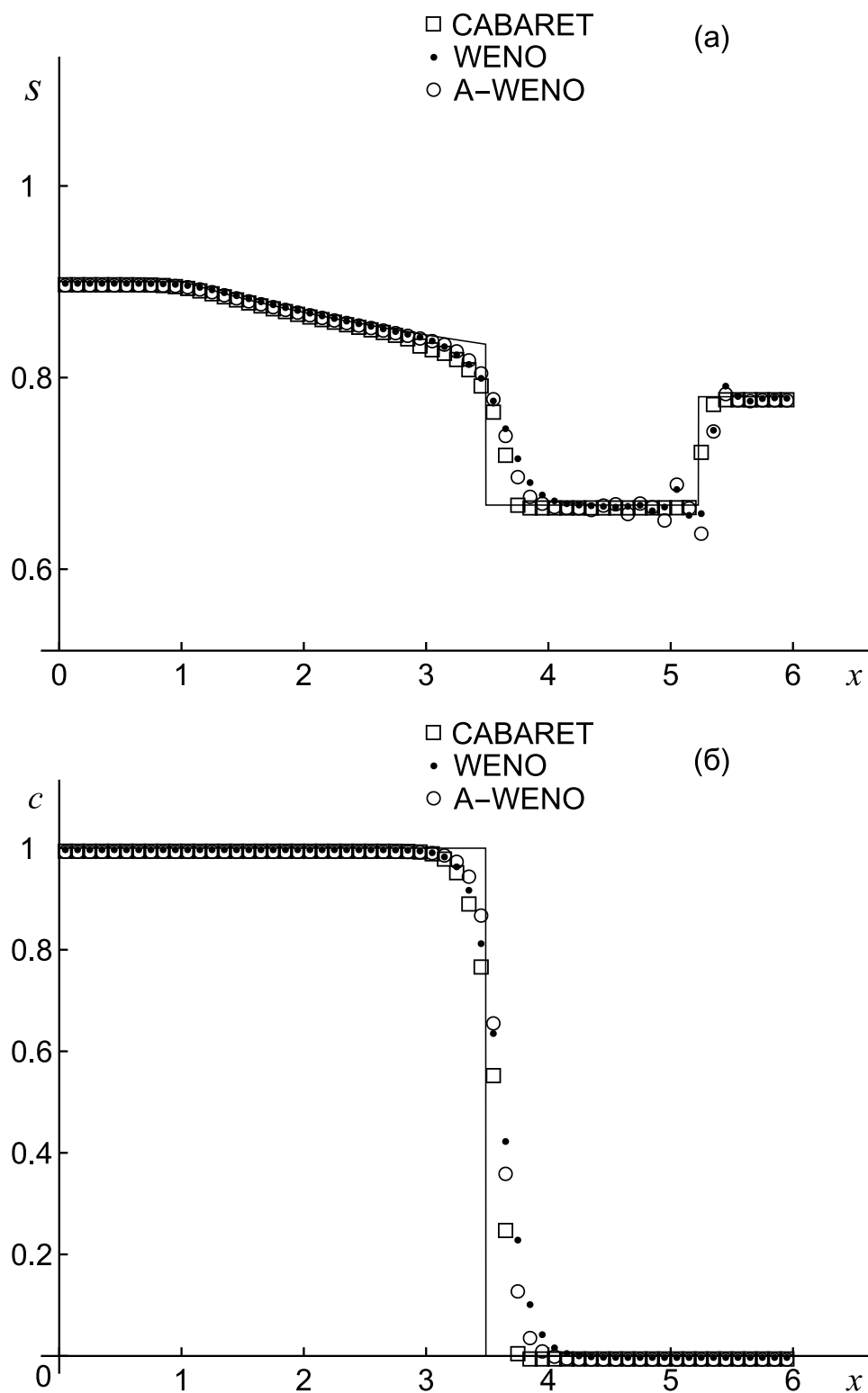
Из фиг. 2б, 3б и 4б следует, что при решении задач SRP1, SRP2 и SRP3 все три схемы с достаточно высокой точностью локализуют сильный разрыв функции $c(x, t)$ на фронте ударной волны S_2 . Однако при расчете функции $s(x, t)$ точность схем CABARET и WENO существенно различается (фиг. 2а, 3а и 4а).



Фиг. 2. Сравнение в момент времени $t = 2.93$ точного (сплошная линия) и численных решений задачи SRP1 по схемам CABARET (квадратики), WENO5 (точки) и A-WENO (кружки).



Фиг. 3. Сравнение в момент времени $t = 3.06$ точного (сплошная линия) и численных решений задачи SRP2 по схемам CABARET (квадратики), WENO5 (точки) и A-WENO (кружки).



Фиг. 4. Сравнение в момент времени $t = 3.78$ точного (сплошная линия) и численных решений задачи SRP3 по схемам CABARET (квадратики), WENO5 (точки) и A-WENO (кружки).

Если численные решения всех трех задач SRP, получаемые по схеме CABARET, сходятся к точному решению для функции $s(x, t)$ и хорошо локализуют сильные и слабые разрывы этого решения, то в численных решениях задач SRP1 (фиг. 2а) и SRP2 (фиг. 3а), получаемым по WENO-схемам, отсутствует сходимость к точным значениям функции $s(x, t)$ в области постоянного течения за фронтом ударной волны S_1 . Численные решения задачи SRP3 (фиг. 4а), получаемым по WENO-схемам, сходятся к точному решению для функции $s(x, t)$, однако, в отличие от схемы CABARET, имеют заметные нефизические осцилляции в окрестности ударной волны S_1 .

Таким образом, при расчете задач SRP1, SRP2 и SRP3 схема CABARET имеет существенные преимущества по сравнению со схемами WENO5 и A-WENO, тем более, что время расчета данных задач по схеме CABARET почти на порядок меньше, чем по WENO-схемам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т. 47. № 3. С. 271–306.
2. Cockburn B., Shu C.W. Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems // J. Sci. Comput. 2001. V. 16. № 3. P. 173–261.
3. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2001.
4. LeVeque R.J. Finite volume methods for hyperbolic problems. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
5. Toro E.F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: A practical introduction. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
6. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. М.: Изд. МГУ, 2013.
7. Shu C.W. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes // Acta Numer. 2020. V. 29. P. 701–762.
8. Van Leer B. Toward the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136.
9. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
10. Nessyahu H., Tadmor E. Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1990. V. 87. N. 2. P. 408–463.
11. Liu X.D., Osher T., Chan T. Weighted essentially non-oscillatory schemes // J. Comput. Phys. 1994. V. 115. N. 1. P. 200–212.
12. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact accurately boundary-adjusting high-resolution technique for fluid dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451.
13. Yang H. Convergence of Godunov type schemes // Appl. Math. Letters. 1996. V. 9. P. 63–67.
14. Bell P., Colella P., Trangenstein J. Higher order Godunov methods for general systems of hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. 1989. V. 82. P. 362–397.
15. Saurel R., Larini M., Loraud J.C. Exact and approximate Riemann solvers for real gases // J. Comput. Phys. 1994. V. 112. P. 126–137.
16. Wang B., Glaz H. Second order Godunov-like schemes for gas dynamics with a nonconvex equation of state // 14th Computational Fluid Dynamics Conference AIAA Report AIAA-99-3256. 1999.
17. Kurganov A., Petrova G., Popov B. Adaptive semidiscrete central-upwind schemes for nonconvex hyperbolic conservation laws // SIAM J. Scient. Comp. 2007. V. 29. P. 2381–2401.
18. Qiu J.M., Shu C.W. Convergence of high order finite volume weighted essentially non-oscillatory scheme and discontinuous Galerkin method for nonconvex conservation laws // SIAM J. Scient. Comp. 2008. V. 31. P. 584–607.

19. *Cai X., Qiu J., Qiu J.* Finite volume HWENO schemes for nonconvex conservation laws // *SIAM J. Scient. Comp.* 2017. V. 75. P. 65–82.
20. *Остапенко В.В., Черевко А.А.* Применение схемы КАБАРЕ для расчета разрывных решений скалярного закона сохранения с невыпуклым потоком // *Докл. АН.* 2017. Т. 476. № 5. С. 518–522.
21. *Gologush T.S., Cherevko A.A., Ostapenko V.V.* Comparison of the WENO and CABARET schemes at calculation of the scalar conservation law with a nonconvex flux // *AIP Conference Proc.* 2020. V. 2293. № 370006. P. 1–4.
22. *Jiang G.S., Shu C.W.* Efficient implementation of weighted ENO schemes // *J. Comput. Phys.* 1996. V. 126. P. 202–228.
23. *S. Gottlieb, D. Ketcheson and C.-W. Shu* Strong stability preserving Runge-Kutta and multistep time discretizations. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2011.
24. *Ентов В.М., Зазовский А.Ф.* Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи. М.: Недра, 1989.
25. *Wang B.S., Don W.S., Kurganov A., Liu Y.* Fifth-order A-WENO schemes based on the adaptive diffusion central-upwind Rankine-Hugoniot fluxes // *Commun. Appl. Math. Comput.* 2023. V. 5. P. 295–314.
26. *Ентов В.М., Хавкин А.Я., Чен-Син Э.* Расчеты процессов вытеснения нефти раствором активной примеси // Труды III всесоюзного семинара: Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. 1977. С. 87–96.
27. *Тимофеева Т.С., Алексеева А.Г.* Неизотермическое вытеснение нефти раствором активной примеси // Матем. заметки СВФУ. 2010. Т. 17. № 2. С. 170–176.
28. *Harten A., Osher S.* Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes // *SIAM J. Numer. Anal.* 1987. V. 24. N. 2 P. 279–309.
29. *Lax P., Wendroff B.* Systems of conservation laws // *Commun. Pure Appl. Math.* 1960. V. 13. P. 217–237.
30. *Chu S., Kovyrkina O.A., Kurganov A., Ostapenko V.V.* Experimental convergence rate study for three shock-capturing schemes and development of highly accurate combined schemes // *Numer. Meth. Part. Diff. Eq.* 2023. V. 5. P. 1–30.

NUMERICAL SIMULATION OF THE TWO-PHASE FILTRATION PROCESS WITH AN ACTIVE IMPURITY

T. S. Sharifullina*, A. A. Cherevko**, V. V. Ostapenko***

*630090 Novosibirsk, Lavrentiev Ave., 15, M. A. Lavrentiev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch
of the Russian Academy of Sciences, Russia*

**e-mail: tatiana_06.08@mail.ru*

***e-mail: cherevko@mail.ru*

****e-mail: ostigil@mail.ru*

Received: 09.04.2024

Revised: 09.04.2024

Accepted: 28.06.2024

Abstract. A comparative analysis of the accuracy of the CABARET (second-order) scheme with the WENO5 and A-WENO (fifth-order in space and fourth-order in time) schemes is carried out when calculating various Riemann problems for a non-convex system of conservation laws of a two-phase filtration model with an active impurity. It is shown that when calculating these problems, the CABARET scheme has significantly higher accuracy compared to the WENO schemes, especially in those areas of precise solution where centered rarefaction waves are adjacent to shock waves.

Keywords: equations of gas dynamics, shock waves, high-precision through calculation schemes.