ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 10, с. 1977–1993

УДК 517.958

КОНВЕКТИВНОЕ УРАВНЕНИЕ КАНА–ХИЛЛИАРДА–ООНО[1)]

© 2024 г. А.Н. Куликов[1, *], Д.А.Куликов[1]

[1] 150000 Ярославль, ул.Советская, 14, Ярославский гос. ун-т им. Демидова, Россия
*e-mail: anat_kulikov@mail.ru

Поступила в редакцию 11.10.2023 г.
Переработанный вариант 06.05.2024 г.
Принята к публикации 28.06.2024 г.

Рассматривается нелинейное эволюционное уравнение с частными производными, которое получено как естественное с физической точки зрения обобщение широко известного уравнения Кана–Хиллиарда. В обобщенный вариант добавлены слагаемые, отвечающие за учет конвекции и диссипации. Новый вариант уравнения рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана. У такой краевой задачи изучаются локальные бифуркации коразмерности 1 и 2. В обоих случаях проанализированы вопросы о существовании, устойчивости и асимптотическом представлении пространственно неоднородных состояний равновесия, а также инвариантных многообразий, сформированных такими решениями краевой задачи. Для обоснования результатов использованы методы современной теории бесконечномерных динамических систем, включая метод интегральных многообразий, аппарат теории нормальных форм Пуанкаре. Указаны различия между результатами анализа бифуркаций в краевой задаче Неймана. с выводами при анализе периодической краевой задачи, изученной авторами статьи в предшествующих публикациях. Библ. 25. Фиг. 1.

Ключевые слова: конвективное уравнение Кана–Хиллиарда–Ооно, краевая задача, устойчивость, бифуркации, нормальные формы, асимптотические формулы.

DOI: 10.31857/S0044466924100151, **EDN**: JYUFVE

ВВЕДЕНИЕ

В работе предполагается рассмотреть следующее нелинейное уравнение с частными производными:

$$u_t + u_{xxxx} + bu_{xx} + au + c(u^2)_x + d(u^3)_{xx} = 0, \tag{1}$$

где $u = u(t,x), a, b, c, d \in \mathbb{R}$. При этом $a \geqslant 0, c^2 + d^2 \neq 0$. Уравнение (1) можно называть конвективным уравнением Кана–Хиллиарда–Ооно [1, 2]. Если $a = c = 0$, то получаем одну из версий классического уравнения Кана–Хиллиарда. При $a = 0, c \neq 0$ данное уравнение называют конвективным уравнением Кана–Хиллиарда [3–5]. Наконец, если $c = 0$, а постоянная $a > 0$, то в уравнении (1) добавлен диссипативный член и предложенный вариант получил название “уравнение Кана–Хиллиарда–Ооно” [2].

Неизвестная функция $u(t,x)$ допускает различные интерпретации. Так, например, если это уравнение используют в качестве математической модели для описания эволюции разделения фаз в бинарных сплавах (смесях), то $u(t,x)$ представляет концентрацию одной из двух компонент [6] или разность концентраций двух смешиваемых компонент [7]. В работе [8] одну из модификаций уравнения Кана–Хиллиарда используют для описания поведения границы раздела между двумя слоями жидкости (см., также, [9]). Более детальное обсуждение физических аспектов, связанных с уравнением Кана–Хиллиарда можно найти в работах [2–9], а также в статьях, процитированных в них.

Эти замечания частично оправдывают название, предложенное для уравнения (1). Включение в уравнение (1) дополнительного слагаемого $c(u^2)_x$ позволяет получить уравнение Курамото–Сивашинского [10, 11], если положить $a = 0, d = 0$. Подчеркнем, что при $d = 0, a > 0$ получаем уравнение, которое было получено в статье [11] на одном из этапов вывода традиционного варианта уравнения Курамото–Сивашинского.

В большинстве работ уравнение (1) дополняют краевыми условиями, среди которых наиболее часто используются периодические краевые условия или однородные краевые условия Неймана. В задачах, имеющих приложения в физике и химии, однородные краевые условия Неймана называют условиями непроницаемости.

[1)] Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

С учетом нормировки пространственной переменной x можно сразу считать, что эти краевые условия могут быть записаны в следующим образом:

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \tag{2}$$

если речь идет о периодических краевых условиях или

$$u_x|_{x=0,x=\pi} = u_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0, \tag{3}$$

если используются однородные краевые условия Неймана.

Пусть сначала $a > 0$. При этом варианте выбора a обе краевые задачи (КЗ): (1), (2) и (1), (3) имеют в качестве пространственно однородного состояния равновесия только решение $u(t, x) = 0$. Подчеркнем, что при $a = 0$ обе КЗ ((1), (2) и (1), (3)) имеют однопараметрические семейства однородных состояний равновесия $u(t, x) = \alpha \in \mathbb{R}$. Уже только по этой причине вариант с $a = 0$ заслуживает отдельного изучения.

В статье основное внимание будет уделено анализу окрестности решения $u = 0$ КЗ (1), (3), если $a > 0$, а также некоторым аналогичным вопросам, если $a = 0$.

Эту работу можно рассматривать как продолжение исследований локальной динамики решений КЗ для уравнения Кана–Хиллиарда, его обобщений и модификаций (см. [12–14]). В трех указанных статьях рассматривались уравнения типа Кана–Хиллиарда, включая его классический вариант, в случае выбора периодических краевых условий. Подчеркнем, что вариант КЗ (1), (3) имеет определенные отличия от КЗ (1), (2) при анализе локальных бифуркаций в окрестности состояния равновесия $u = 0$, которые достаточно выпукло проявляют себя при $a > 0, c \neq 0$. Более детально это будет обсуждено после анализа КЗ (1), (3). Впрочем, отличия проявляют себя и при $a = c = 0$. Добавим, что вариант однородных краевых условий Неймана достаточно часто рассматривался в работах Р. Темама [15], других авторов (см. библиографию из монографии [15]) в связи с анализом вопроса о существовании и свойствах глобальных аттракторов нелинейных эволюционных уравнений.

Кроме краевых условий Неймана, периодических краевых условий, уравнение (1) может быть рассмотрено вместе с однородными краевыми условиями Дирихле

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, \pi) = 0. \tag{4}$$

В некоторых разделах физики (например, теории упругости) такие условия иногда называют краевыми условиями шарнирного опирания.

КЗ (1), (4) также заслуживает внимания. Изложению результатов анализа локальных бифуркаций в КЗ (1), (4) целесообразно посвятить отдельную публикацию, так как они во многом отличны от выводов, полученных при изучении КЗ (1), (2) и (1), (3).

1. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ КЗ

В данном разделе рассмотрим линеаризованные в нуле КЗ (1), (3) и (1), (4), т.е. две следующие линейные КЗ:

$$u_t = Au,\ u_x|_{x=0,x=\pi} = u_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0 \tag{5}$$

и

$$u_t = Au,\ u|_{x=0,x=\pi} = u_{xx}|_{x=0,x=\pi} = 0. \tag{6}$$

В обоих случаях

$$A = -\partial_{xxxx} - b\partial_{xx} - a.$$

Если же выбрать в качестве области определения $(D(A))$ достаточно гладкие функции, удовлетворяющие однородным краевым условием Неймана, то линейный дифференциальный оператор (ЛДО) A в таком случае имеет счетный набор действительных собственных значений $\lambda_n = -n^4 + bn^2 - a$, отвечающих собственным функциям $\cos nx\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$. При выборе краевых условий Дирихле ЛДО A имеет собственные числа $\lambda_k = -k^4 + bk^2 - a, k = 1, 2, 3, \ldots$, но при таком варианте выбора краевых условий собственными элементами будут функции $\{\sin kx\}$. Подчеркнем, что обе системы функций: $\{1, \cos nx\}$ и $\{\sin kx\}$ формируют полные ортогональные системы в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2(0, \pi)$.

Эти замечания позволяют утверждать, что при любом выборе коэффициентов a и b ЛДО A является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2(0, \pi)$ [16]. Особо отметим, что это свойство ЛДО A, а также свойства нелинейных слагаемых уравнения (1) позволяют заключить, что КЗ (1), (3) и (1), (4) дополненные начальным условием $u(0, x) = f(x)$ формируют смешанные (начально-краевые) задачи, которые локально корректно разрешимы [17].

В случае КЗ (1), (3) в качестве пространства начальных условий (фазового пространства) удобно и естественно выбрать $\mathbb{W}^4_{2,N}[0,\pi]$ – подпространство функционального пространства Соболева $\mathbb{W}^4_2[0,\pi]$ (см., например, [18]). Здесь $f(x) \in \mathbb{W}^4_{2,N}[0,\pi]$, если $f(x) \in \mathbb{W}^4_2[0,\pi]$ и удовлетворяет краевым условиям (3).

При анализе КЗ (1), (4) в качестве фазового пространства уместно выбрать $\mathbb{W}^4_{2,D}[0,\pi]$, где $f(x) \in \mathbb{W}^4_{2,D}[0,\pi]$, если $f(x) \in \mathbb{W}^4_2[0,\pi]$ и функция $f(x)$ удовлетворяет однородным краевым условиям Дирихле (4).

Из приведенных построений вытекает следующее. Пусть рассматривается линейная КЗ (5) и собственные значения ЛДО из правой части таковы, что выполнены неравенства $\lambda_n < 0$, то решения линейной КЗ (5) асимптотически устойчивы. Асимптотически устойчивым будет и нулевое решение КЗ (1), (3). Если же существует такой номер k, для которого $\lambda_k > 0$, то решения линейной КЗ (5) и нулевое решение КЗ (1), (3) будут уже неустойчивыми. Аналогичные замечания справедливы для КЗ (6) и нелинейной КЗ (1), (4).

Особый случай возникает, если $\lambda_n \leqslant 0$ и $\lambda_m = 0$ при некоторых m. Тогда при анализе устойчивости нулевых решений у КЗ (1), (3) и (1), (4) возникают критические случаи.

Обозначим через D_1 множество параметров (b, a), при которых нулевое решение соответствующей КЗ асимптотически устойчиво, через D_2 – множество тех пар (b, a), при выборе которых нулевое решение неустойчиво. Наконец, множество D_3 содержит те пары (b, a), при которых получаем критический случай в задаче об устойчивости нулевого решения нелинейной КЗ.

Пусть сначала рассматривается КЗ (1), (3). Рассмотрим ломанную $(P_0, P_1, \ldots, P_m, \ldots)$, состоящую из отрезков прямых, соединяющую вершины P_m со следующими координатами:

$$P_0(-\infty, 0),\ P_1(1, 0), \ldots, P_m(b_m, a_m), \ldots,$$

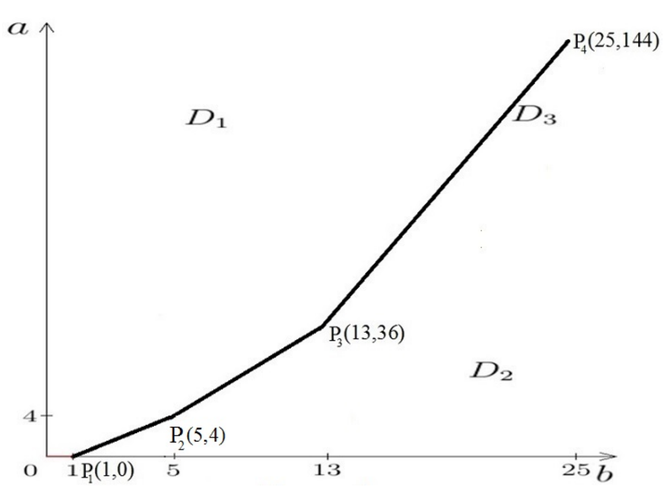
где $b_m = m^2 + (m+1)^2, a_m = m^2(m+1)^2$ (см. фиг. 1). Звенья этой ломанной можно задать следующим образом:

$$0) \text{ если } b \leqslant 1, \text{ то } a = 0;\ 1) \text{ если } b \in [1, 5], \text{ то } a = b - 1; \ldots\ m) \text{ если } b \in [m^2, (m+1)^2], \text{ то } a = bm^2 - m^4.$$

Выше ломанной $P_0, P_1, \ldots, P_m, \ldots$ расположены точки $M(b, a)$, координаты которых обладают следующим свойством: квадратный трехчлен $Q_2(k^2) = -k^4 + bk^2 - a < 0\ (Q_2(k^2) = \lambda_k)$ при всех целых k. Ниже ломанной $P_0, P_1, \ldots, P_m$ лежат точки с координатами (b, a), при выборе которых у квадратного трехчлена $Q_2(k^2)$ есть положительные значения хотя бы при одном m. Наконец, для координат точек, расположенных на ломанной, характерна реализация критического случая, т.е. $Q_2(k^2) \leqslant 0$ и $Q_2(m^2) = 0$ при некоторых m. Доказательство этих замечаний вытекает из анализа квадратного трехчлена $R_2(\eta) = \eta^2 - b\eta + a$, где при $\eta = k^2$ справедливо равенство $R_2(\eta) = -Q_2(k^2)$. В частности, при $b = m^2 + (m+1)^2, a = m^2(m+1)^2$ он имеет корни $m^2, (m+1)^2$. Если же $b = m^2 + (m+\delta)^2, a = m^2(m+\delta)^2$, где $\delta \in (-1, 1), m \in \mathbb{N}$, то квадратный трехчлен $R_2(\eta)$ имеет натуральный корень $\eta_1 = m^2$, а $\eta_2 = (m+\delta)^2$, т.е. второй корень находится ближе к η_1, чем числа $(m-1)^2$ и $(m+1)^2$. При $\delta = 0$ квадратный трехчлен $R_2(\eta)$ имеет двукратный корень $\eta = m^2$.

Если же рассмотреть КЗ (1), (3) при $a = 0, c = 0$, то в таком случае она имеет однопараметрическое семейство пространственно однородных состояний равновесия $u(t, x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$. Добавим, что если обозначить через

$$M_0(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi u(t, x)dx,$$



Фиг. 1.

то справедливо равенство $M_0(u) = \beta$, где $\beta = M_0(f(x)), u(0,x) = f(x)$. Следовательно, в пространстве начальных условий аффинное подпространство функций $f(x)$, для которых $M(f) = \beta$, будет инвариантным подпространством для решений КЗ (1), (3). При $\beta = 0$ оно будет уже линейным, а не аффинным.

Отметим, что при анализе устойчивости нулевого решения КЗ (1), (4) в линейном приближении справедливы аналогичные выводы, но с одним небольшим отличием. Звено P_0P_1 ломанной $P_0, P_1, \ldots, P_m, \ldots$ принадлежит области D_1, а не D_3.

Далее анализ нелинейного дифференциального уравнения (1) предполагает, что оно дополнено краевыми условиями (3).

2. ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 1 В КОНВЕКТИВНОМ УРАВНЕНИИ КАНА–ХИЛЛИАРДА–ООНО

В данном разделе рассмотрим КЗ (1), (3) при

$$a = a_m(\delta)(1 - \alpha_1\varepsilon), b = b_m(\delta)(1 + \alpha_2\varepsilon),$$

где, в свою очередь, $a_m(\delta) = m^2(m+\delta)^2, b_m(\delta) = m^2 + (m+\delta)^2, \delta \in (-1,0) \cup (0,1)$, т.е. при $\varepsilon = 0$ при анализе устойчивости нулевого решения КЗ (1), (3) реализуется критический случай простого нулевого собственного значения спектра устойчивости. Подчеркнем, что вариант $\delta = 0$ следует рассматривать отдельно и такой вариант будет рассмотрен в конце данного раздела. Наконец, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1, m \in \mathbb{N}$.

При отмеченном в начале раздела выборе коэффициентов a и b КЗ (1), (3) можно переписать в следующем виде:

$$u_t = A(\varepsilon)u + F(u), \tag{7}$$

$$u_x|_{x=0,x=\pi} = u_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0. \tag{8}$$

Здесь

$$A(\varepsilon)u = A_0u + \varepsilon A_1u,\ A_0u = -u_{xxxx} - b_m(\delta)u_{xx} - a_m(\delta)u,$$
$$A_1u = -b_m(\delta)\alpha_2u_{xx} + a_m(\delta)\alpha_1u,\ F(u) = -c(u^2)_x - d(u^3)_{xx}.$$

Нетрудно убедиться, что ЛДО $A(\varepsilon)$ в нашем случае имеет простое собственное число $\lambda_m(\varepsilon) = (\alpha_2b_m(\delta)m^2 + \alpha_1a_m(\delta))\varepsilon$, а остальные значения лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re}\lambda_k(\varepsilon) \leqslant -\alpha_0 < 0, k \neq m$. Ясно, что $\lambda_m(0) = 0$ и $\lambda'_m(0) = \gamma_m = \alpha_2b_m(\delta)m^2 + \alpha_1a_m(\delta) \neq 0$, если не выбирать α_2 и α_1 специальным образом.

Из работ [19, 20] вытекает, что КЗ (7), (8) в окрестности нулевого решения имеет одномерное инвариантное многообразие $V_1(\varepsilon)$. Решения КЗ (7), (8), принадлежащие $V_1(\varepsilon)$, могут быть восстановлены после анализа скалярного дифференциального уравнения

$$z_t = \varphi(z,\varepsilon) = \varphi_0(z) + \varepsilon\varphi_1(z,\varepsilon), \tag{9}$$

для вспомогательной переменной $z(t)$, где $\varphi_0(z), \varphi_1(z,\varepsilon)$ достаточно гладкие функции переменных z и ε, если $|z| < \delta_0, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. При этом $\varphi_0(0) = 0, \varphi'_0(0) = 0, \varphi_1(0,\varepsilon) = 0, \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}|_{z=0} = \varepsilon\gamma_m, \gamma_m = \alpha_2b_m(\delta)m^2 + \alpha_1a_m(\delta) \neq 0$.

Следовательно, основную нагрузку несет слагаемое $\varphi_0(z)$ или иначе вспомогательное дифференциальное уравнение

$$z_t = \varphi_0(z). \tag{10}$$

Уравнение (10) это уравнение на одномерном инвариантном многообразии $V_1(0)$ КЗ (7), (8), рассматриваемой при $\varepsilon = 0$.

Для определения правой части уравнения (10) используем алгоритм, который ведет свое начало от работ А.М. Ляпунова, Н.Н. Боголюбова, Н.М. Крылова. Согласно этому методу построения уравнения (10) (и впоследствии (9)) решения КЗ (7), (8) при $\varepsilon = 0$, принадлежащие $V_1(\varepsilon)$, следует искать в виде суммы

$$u(t,x) = zv_m(x) + z^2w_m(x) + z^3y_m(x) + o(z^3), \tag{11}$$

где $z = z(t), v_m(x) = \cos mx$, функции $w_m(x), y_m(x)$ подлежат определению как соответствующие решения вспомогательных линейных неоднородных КЗ, $z(t)$ – решения обыкновенного дифференциального уравнения (10). При этом

$$\varphi_0(z) = l_2z^2 + l_3z^3 + o(z^3).$$

Постоянные l_2, l_3 могут быть определены в процессе реализации алгоритма построения правой части уравнения (10) и членов суммы (11).

Замечание 1. В теории динамических систем уравнения (9), (10) принято называть нормальными формами (НФ). Добавим, что согласно методу инвариантных (интегральных) многообразий функции $w_m(x), y_m(x)$ должны удовлетворять равенствам

$$M_m(w_m(x)) = M_m(y_m(x)) = 0,$$

где

$$m \in \mathbb{N}, M_m(\varphi(x)) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \varphi(x)\cos mx dx.$$

При реализации алгоритма построения инвариантного многообразия $V_1(0)$ и правой части НФ (10) следует различать два случая.

Случай 1: $m = 2k - 1$;

Случай 2: $m = 2k,\ k \in \mathbb{N}$.

Замечание 2. Рассмотрим неоднородную КЗ

$$A_0 p(x) = f(x),\ p_x(x)|_{x=0,x=\pi} = p_{xxx}(x)|_{x=0,x=\pi} = 0.$$

Она имеет решение, если $M_m(f(x)) = 0$, а условие $M_m(p(x)) = 0$ выделяет единственное решение последней КЗ (см., например, [21]).

Подставим сумму (11) с учетом уравнения (10) в КЗ (7), (8), рассматриваемую при $\varepsilon = 0$. После выделения слагаемых при одинаковых степенях z получим следующие неоднородные КЗ для определения функций $w_m(x), y_m(x)$:

$$-A_0 w_m = -l_2 v_m(x) - c(v_m^2(x))_x, \tag{12}$$

$$w_{m_x}|_{x=0,x=\pi} = w_{m_{xxx}}|_{x=0,x=\pi} = 0,\ M_m(w_m) = 0, \tag{13}$$

$$-A_0 y_m = -l_3 v_m(x) - 2l_2 w_m(x) - 2c(v_m(x)w_m(x))_x - d(v_m^3)_{xx}, \tag{14}$$

$$y_{m_x}|_{x=0,x=\pi} = y_{m_{xxx}}|_{x=0,x=\pi} = 0,\ \ M_m(y_m) = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим КЗ (12), (13). При нечетном m $(m = 2k-1)$ она разрешима, если $l_2 = 8c/(3\pi)$ и $l_2 \neq 0$ при $c \neq 0$. Случай $c = 0$ будет рассмотрен отдельно. Что касается четного m, то в этом случае КЗ (12), (13) имеет решение, если $l_2 = 0$.

Итак, при нечетном m получаем, что

$$\varphi_0(x) = \frac{8c}{3\pi}z^2 + O(z^3).$$

При $c \neq 0$, как хорошо известно (см., например, [22, 23]), этого достаточно для анализа локальных бифуркаций.

Иная ситуация складывается при $m = 2k$, если $c \neq 0$, а также при $m = 2k - 1$, если $c = 0$. В таком случае необходимо определить величину l_3.

Рассмотрим сначала вариант, когда $m = 2k$. В таком случае ($c \neq 0$) после стандартных, но достаточно громоздких вычислений можно показать, что

$$w_{2k}(x) = cQ_0\big(Q_1\cos(2k+\delta)x - Q_2\sin(2k+\delta)x + Q_3\sin 2kx + Q_4\sin 4kx\big),$$

где, в свою очередь,

$$Q_0 = \frac{4k}{(4k+\delta)\delta(12k^2 - 4k\delta - \delta^2)},\ \ Q_1 = \frac{2k(1-\cos\pi\delta)}{(2k+\delta)\sin\pi\delta},$$
$$Q_2 = \frac{2k}{2k+\delta},\ \ Q_3 = \frac{12k^2 - 4k\delta - \delta^2}{12k^2},\ \ Q_4 = \frac{(4k+\delta)\delta}{24k^2}.$$

Из условий разрешимости КЗ (14), (15) после вычисления соответствующих интегралов вытекает, что

$$l_3 = l_{31} + l_{32},\ \ l_{31} = 3k^2 d,$$
$$l_{32} = -\frac{4c^2 Q_0}{\pi}\Big[\Big(\frac{4k^2}{(6k+\delta)(2k-\delta)} - 1\Big)(Q_1(1-\cos\pi\delta) + Q_2\sin\pi\delta) + \frac{\pi Q_4 k}{2}\Big].$$

Естественно, что в общем случае $l_3 \neq 0$.

Как отмечалось ранее, случай, когда $c = 0$ заслуживает отдельного изучения. При таком варианте выбора c КЗ (12), (13) разрешима, если $l_2 = 0$. При этом КЗ (12), (13) имеет в качестве подходящего решения $w_m = 0$.

Такой вывод справедлив при любом m : четном и нечетном. Наконец, анализ неоднородной КЗ (14), (15) позволяет заключить, что $l_3 = 3dm^2/4$. Ляпуновская величина $l_3 \neq 0$, если $d \neq 0$.

Перейдем теперь к анализу НФ (9). Это дифференциальное уравнение следует изучить в трех случаях:

$$1)\, m = 2k-1;\;\; 2)\, m = 2k;\;\; 3)\, c = 0;\; m \in \mathbb{N}.$$

В первом случае получаем, что уравнение (9) приобретает следующий вид:

$$z_t = \varepsilon\gamma_{2k-1}z + l_2 z^2 + \varphi_2(z,\varepsilon)\ (l_2 \neq 0), \tag{16}$$

где $\varphi_2(z,\varepsilon)$ — достаточно гладкая функция, для которой справедливо следующее неравенство:

$$|\varphi_2(z,\varepsilon)| \leqslant K(|z|^3 + \varepsilon^2|z| + \varepsilon|z|^2).$$

Наконец, $\gamma_{2k-1} = \alpha_2 b_{2k-1}(\delta)(2k-1)^2 + \alpha_1 a_{2k-1}(\delta), k \in \mathbb{N}$.

Во втором и третьем случаях НФ (9) может быть записана в следующем виде:

$$z_t = \varepsilon\gamma_m z + l_3 z^3 + \varphi_3(z,\varepsilon), \tag{17}$$

где $\varphi_3(z,\varepsilon)$ — достаточно гладкая функция, для которой справедливо следующее неравенство:

$$|\varphi_3(z,\varepsilon)| \leqslant K(|z|^4 + \varepsilon^2|z| + \varepsilon|z|^2).$$

При этом, если реализуется второй случай, то $\gamma_m = \gamma_{2k}$, а $l_3 = l_{31}(2k) + l_{32}(2k)$.

В третьем случае $l_3 = l_{31}(m) = 3dm^2/4, m \in \mathbb{N}$. Объединяя второй и третий случаи, будем писать γ_m и l_3.

Используя результаты методов теории возмущений, можно доказать два утверждения.

Лемма 1. *Пусть $\gamma_{2k-1}, l_2 \neq 0$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ ($\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m)$) дифференциальное уравнение* (16) *имеет ненулевое состояние равновесия*

$$S_2:\ z = -\varepsilon\frac{\gamma_{2k-1}}{l_2} + o(\varepsilon).$$

Состояние равновесия S_2 асимптотически устойчиво, если $\gamma_{2k-1} > 0$ и неустойчиво при $\gamma_{2k-1} < 0$. Нулевое состояние равновесия S_1 асимптотически устойчиво, если $\gamma_{2k-1} < 0$ и неустойчиво при $\gamma_{2k-1} > 0$.

Анализ устойчивости использует в рассмотренном случае теорему об устойчивости по первому (линейному) приближению.

Замечание 3. Пусть $\gamma_{2k-1} = 0$ или $\varepsilon = 0$, тогда при $l_2 \neq 0$ НФ (16) не имеет ненулевых состояний равновесия. При этом нулевое состояние равновесия неустойчиво. Последний вывод вытекает из известной теоремы Четаева (см., например, [24]).

Перейдем теперь к анализу НФ (17).

Лемма 2. *Пусть $l_3, \gamma_m \neq 0\, (m = 2k, c \neq 0$ или $m \in \mathbb{N}$, но $c = 0)$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0\, (\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m))$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ дифференциальное уравнение* (17) *имеет два ненулевых состояния равновесия*

$$S_\pm:\ z_\pm = \pm\sqrt{-\frac{\varepsilon\gamma_m}{l_3}} + o(\varepsilon^{1/2}),$$

если справедливо неравенство $\gamma_m l_3 < 0$.

Каждое из этих двух состояний равновесия асимптотически устойчиво, если $\gamma_m > 0\, (l_3 < 0)$ и неустойчиво, если $\gamma_m < 0\, (l_3 > 0)$. Нулевое состояние равновесия S_1 НФ (17) *асимптотически устойчиво при $\gamma_m < 0$ и оно неустойчиво, если $\gamma_m > 0$.*

Замечание 4. Если $\gamma_m = 0$ или $\varepsilon = 0$, а $l_3 \neq 0$, то НФ (17) не имеет ненулевых состояний равновесия. При этом нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво, если $l_3 < 0$ и оно неустойчиво, если $l_3 > 0$. Отметим, что коэффициент l_3 достаточно часто называют ляпуновской величиной, так как именно знак этого коэффициента в критическом случае определяет устойчивость тривиального состояния равновесия.

Доказательство замечания 4 основано на использовании функции Ляпунова (функции Четаева) $V(z) = z^2$ (см. [24]).

Из результатов работ [19, 20, 25] (см. также [12–14]) и лемм 1, 2 вытекает справедливость следующих двух утверждений, соответствующих леммам 1 и 2.

Теорема 1. *Пусть $m = 2k-1, k = 1,2,3,\ldots$, т.е. m – нечетно. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0\, (\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m))$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ состоянию равновесия S_2 НФ* (16) *соответствует пространственно неоднородное состояние равновесия КЗ* (1), (3)

$$S_2(\varepsilon):\ u(t,x,\varepsilon) = u(x,\varepsilon) = -\varepsilon\frac{\gamma_{2k-1}}{l_2}\cos(2k-1)x + o(\varepsilon).$$

При этом состояние равновесия $S_2(\varepsilon)$ наследует устойчивость состояния равновесия S_2 НФ (16). *Нулевое состояние равновесия КЗ* (1), (3) *наследует устойчивость нулевого состояния равновесия S_1 НФ* (16).

Теорема 2. *Пусть $c \neq 0, m = 2k, k = 1, 2, 3, \ldots$ или $c = 0$, а $n \in \mathbb{N}$. Тогда можно указать $\varepsilon_0 > 0$ ($\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m)$) такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ состояниям равновесия $S_\pm$ НФ* (17) *соответствуют два следующих состояния равновесия КЗ* (1), (3)

$$S_\pm(\varepsilon): \ u(t,x,\varepsilon) = u_\pm(x,\varepsilon) = \pm\sqrt{-\frac{\varepsilon\gamma_m}{l_3}}\cos mx - \frac{\varepsilon\gamma_m}{l_3}w_m(x) + o(\varepsilon),$$

где функция $w_m(x)$ была указана ранее в процессе построения уравнения интегрального многообразия, т.е. в процессе определения коэффициентов суммы (11).

Состояния равновесия $S_\pm(\varepsilon)$ асимптотически устойчивы (неустойчивы), если асимптотически устойчивы (неустойчивы) состояния равновесия $S_\pm$ НФ (17).

Нулевое состояние равновесия КЗ (1), (3) *в данном случае наследует устойчивость нулевого решения НФ* (17).

Замечание 5. Пусть $\delta = 0$. Следовательно, в КЗ (7), (8) изменится только коэффициенты ЛДО $A(\varepsilon)$. Теперь

$$A(\varepsilon)u = A_0u + \varepsilon A_1u, \ A_0u = -u_{xxxx} - b_mu_{xx} - a_mu,$$
$$A_1u = -b_m\alpha_2u_{xx} + a_m\alpha_1u, \ b_m = 2m^2, \ a_m = m^4.$$

Несмотря на это обстоятельство в новой редакции для КЗ (7), (8) реализуется случай близкий к критическому простого нулевого собственного значения. Как и при $\delta \neq 0$ в рассматриваемой в данном замечании ситуации следует различать три случая:

$$1)\, m = 2k - 1; \ 2)\, m = 2k; \ 3)\, c = 0 \text{ и } m \in \mathbb{N}.$$

Сразу отметим, что надкритичности γ_m вычисляются одинаково при всех вариантах выбора m и c. Ясно что в данном случае

$$\gamma_m = \alpha_2b_m(0)m^2 + \alpha_1a_m(0) = 2\alpha_2m^4 + \alpha_1m^4.$$

При анализе задачи в нелинейной постановке, т.е. при сведении бифуркационной задачи к анализу НФ в случаях 1) и 3) нет ничего нового по сравнению с аналогичными построениями при $\delta \neq 0$. При $m = 2k - 1$ получаем НФ (16), в которой $\gamma_{2k-1} = (2\alpha_2 + \alpha_1)(2k-1)^4$, а для l_2 получаем уже приведенное ранее выражение. Аналогичное замечание справедливо и при $c = 0$.

Пусть теперь $m = 2k$ и $c \neq 0$. Тогда можно отметить некоторые изменения при определении коэффициентов l_3 НФ (17). Изменится слагаемое в сумме (11)

$$w_2(x) = \eta(3\pi k\cos 2kx + \sin 2kx - 6kx\cos 2kx + \sin 4kx),$$

а $\eta = c/(72k^3)$. Наконец, ляпуновская величина из НФ (17) будет иметь следующий вид:

$$l_3 = l_{31} + l_{32} = 3k^2d + \frac{7c^2}{36k^2}.$$

Все эти пояснения показывают, что при $\delta = 0$ теорема 2 остается также справедливой в целом, и изменения касаются лишь асимптотической формулы для пространственно неоднородных решений, в которых второе слагаемое, естественно, приобретает иной вид.

3. БИФУРКАЦИОННАЯ ЗАДАЧА КОРАЗМЕРНОСТИ 2

Рассмотрим теперь КЗ (1), (3), если

$$b(\varepsilon) = b_m(1)(1 + \alpha_2\varepsilon), \ a(\varepsilon) = a_m(1)(1 - \alpha_1\varepsilon),$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, a_m(1) = m^2(m+1)^2, b_m(1) = m^2 + (m+1)^2, m = 1, 2, 3, \ldots, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. При таком выборе коэффициентов в уравнении (1) для КЗ (1), (3) реализуется случай, близкий к критическому, двукратного нулевого значения у ЛДО $A_0 = A(0)$. Напомним, что в таком случае у ЛДО A_0 есть двукратное нулевое собственное число, которому отвечают два собственных элемента $\cos mx, \cos(m+1)x$. В свою очередь, у ЛДО $A(\varepsilon) = -\partial^4 - b(\varepsilon)\partial^2 - a(\varepsilon)$ есть собственные значения $\lambda_m(\varepsilon)$ и $\lambda_{m+1}(\varepsilon)$, где

$$\lambda_m(\varepsilon) = \gamma_m\varepsilon, \ \lambda_{m+1}(\varepsilon) = \gamma_{m+1}\varepsilon,$$
$$\gamma_m = m^2(m^2 + (m+1)^2)\alpha_2 + m^2(m+1)^2\alpha_1, \ \gamma_{m+1} = (m+1)^2(m^2 + (m+1)^2)\alpha_2 + m^2(m+1)^2\alpha_1,$$

отвечающие соответственно собственным функциям $\cos mx, \cos(m+1)x$. Остальные собственные значения ЛДО $A(\varepsilon)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda_k \leqslant -\alpha_0 < 0\,(k \neq m, m+1)$, если, конечно, величина ε достаточно мала.

Итак, в этом разделе будем изучать КЗ

$$u_t = A(\varepsilon)u - c(u^2)_x - d(u^3)_{xx}, \tag{18}$$

$$u_x|_{x=0,x=\pi} = u_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0. \tag{19}$$

При данном выборе параметров задачи (коэффициентов ЛДО $A(\varepsilon)$) КЗ (18), (19) в окрестности нулевого состояния равновесия имеет локально инвариантное многообразие $V_2(\varepsilon)$, размерность которого равна двум. При этом решения КЗ (18), (19), принадлежащие $V_2(\varepsilon)$ и достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия, можно искать в следующем виде (см. [14]):

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon(z_1\cos mx + z_2\cos(m+1)x) + \varepsilon^2 w(x,z_1,z_2) + O(\varepsilon^3), \tag{20}$$

где $z_1 = z_1(s), z_2 = z_2(s), s = \varepsilon t$ – медленное время, $w(x,z_1,z_2)$ – гладкая функция переменных x, z_1, z_2, если $x \in [0,\pi], z_1^2 + z_2^2 < \mu^2$, где μ – некоторое положительное число. Функция $w(x,z_1,z_2)$ удовлетворяет при всех рассматриваемых z_1, z_2 однородным краевым условиям Неймана (3), а также справедливы тождества

$$M_m(w) = M_{m+1}(w) = 0,$$

где

$$M_m(w) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi w(x,z_1,z_2)\cos mx dx, \quad M_{m+1}(w) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi w(x,z_1,z_2)\cos(m+1)x dx.$$

Замечание 6. Рассмотрим КЗ

$$A_0\varphi(x) = \psi(x),\ \varphi_x|_{x=0,x=\pi} = \varphi_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0.$$

Как известно, она разрешима [21], если выполнены равенства

$$M_m(\psi) = M_{m+1}(\psi) = 0,$$

а равенство $M_m(\varphi) = M_{m+1}(\varphi) = 0$ выделяет одно решение последней КЗ.

Сумма (20) содержит две вспомогательные переменные $z_1(s), z_2(s)$, которые находим как решения системы дифференциальных уравнений (НФ)

$$z_1' = \varphi_1(z_1,z_2,\varepsilon),\ z_2' = \varphi_2(z_1,z_2,\varepsilon). \tag{21}$$

В ситуации общего положения для анализа бифуркаций вполне достаточно изучения укороченного варианта системы (21), т.е.

$$z_1' = \psi_1(z_1,z_2),\ z_2' = \psi_2(z_1,z_2), \tag{22}$$

где $\psi_j(z_1,z_2) = \varphi_j(z_1,z_2,0), j = 1,2$, а z_1', z_2' – производные функций $z_1(s), z_2(s)$ по s.

Найдем функции $\psi_1(z_1,z_2), \psi_2(z_1,z_2)$ из правых частей системы (22). Для этого сумму (20) подставим в КЗ (18), (19) и выделим слагаемые при ε^2. В результате получим линейную неоднородную КЗ для определения $w(x,z_1,z_2)$, которую можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}-A_0w = -(z_1'\cos mx + z_2'\cos(m+1)x) + A_1(z_1\cos mx + z_2\cos(m+1)x) - \\ -c\big((z_1\cos mx + z_2\cos(m+1)x)^2\big)_x,\end{gathered} \tag{23}$$

$$w_x|_{x=0,x=\pi} = w_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0,\ M_m(w) = M_{m+1}(w) = 0. \tag{24}$$

Напомним, что $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1$, где $A_0 = -\partial^4 - b_m(1)\partial^2 - a_m(1), A_1 = -b_m(1)\alpha_2\partial^2 + a_m(1)\alpha_1$.

Условия разрешимости КЗ (23), (24) позволяют определить вид функций $\psi_1(z_1,z_2), \psi_2(z_1,z_2)$. После вычисления соответствующих интегралов в случае четного m $(m = 2k)$ получим следующую систему:

$$z_1' = \gamma_{2k}z_1 + \alpha_{2k}z_1z_2,\ z_2' = \gamma_{2k+1}z_2 + \beta_{2k}z_1^2 + \delta_{2k}z_2^2, \tag{25}$$

где

$$\gamma_{2k} = 4k^2\big(\alpha_2(4k^2 + (2k+1)^2) + \alpha_1(2k+1)^2\big),\ \gamma_{2k+1} = (2k+1)^2\big(\alpha_2(4k^2 + (2k+1)^2) + \alpha_1 4k^2\big), \tag{26}$$

$$\alpha_{2k}=\frac{8c(16k^3-6k-1)}{\pi(6k+1)(4k^2-1)},\ \beta_{2k}=\frac{32ck^2}{\pi(6k+1)(2k-1)},\ \delta_{2k}=\frac{8c}{3\pi}.$$

Подчеркнем, что $\alpha_{2k},\beta_{2k},\delta_{2k}>0$.

Если же $m=2k-1$, то получаем систему дифференциальных уравнений

$$z_1'=\nu_{2k-1}z_1+\beta_{2k-1}z_1^2+\delta_{2k-1}z_2^2,\ z_2'=\nu_{2k}z_2+\alpha_{2k-1}z_1z_2, \tag{27}$$

где

$$\nu_{2k-1}=(2k-1)^2\big(\alpha_2((2k-1)^2+4k^2)+\alpha_1 4k^2\big),\ \nu_{2k}=4k^2\big(\alpha_2((2k-1)^2+4k^2)+\alpha_1(2k-1)^2\big), \tag{28}$$

$$\beta_{2k-1}=\frac{8c}{3\pi},\ \delta_{2k-1}=\frac{32ck^2}{\pi(6k-1)(2k+1)},\ \alpha_{2k-1}=\frac{8c(16k^3-6k+1)}{\pi(6k-1)(4k^2-1)}.$$

В данном случае также справедливы неравенства $\beta_{2k-1}>0,\delta_{2k-1}>0,\alpha_{2k-1}>0$.

Отметим, что равенства (26), а также равенства (28) можно интерпретировать как системы линейных алгебраических уравнений для определения α_1,α_2, считая пары $(\gamma_{2k},\gamma_{2k+1})$ и (ν_{2k-1},ν_{2k}) заданными параметрами. Обе системы однозначно разрешимы. Следовательно, пары $(\gamma_{2k},\gamma_{2k+1})$ и (ν_{2k-1},ν_{2k}) можно и удобно считать независимыми параметрами при анализе соответствующих НФ (25) и (27).

Системы дифференциальных уравнений (25), (27) (НФ (25), (27)) рассмотрим отдельно. При этом анализ НФ содержателен, если $c\neq 0$.

Лемма 3. *НФ* (25) *имеет следующие состояния равновесия:*

$$S_0:\ z_1=z_2=0;\ S_1:\ z_1=0,\ z_2=-\frac{\gamma_{2k+1}}{\delta_{2k}};$$
$$S_{2\pm}:\ z_{1\pm}=\pm\sqrt{\frac{\gamma_{2k}(\gamma_{2k+1}\alpha_{2k}-\delta_{2k}\gamma_{2k})}{\alpha_{2k}^2\beta_{2k}}},\ z_{2\pm}=-\frac{\gamma_{2k}}{\alpha_{2k}}\ (z_{2+}=z_{2-}).$$

Состояния равновесия $S_{2\pm}$ существуют и будут иметь обе ненулевые компоненты, если подкоренное выражение положительно. В рассмотренной ситуации оба эти состояния равновесия неустойчивы (седловые) при любом выборе параметров.

Состояние равновесия S_1 асимптотически устойчиво, если справедливы два следующих неравенства:

$$\Delta_1=\frac{\gamma_{2k}\delta_{2k}-\alpha_{2k}\gamma_{2k-1}}{\delta_{2k}}<0,\ \Delta_2=-\gamma_{2k+1}<0$$

и оно неустойчиво, если хотя бы одна из величин Δ_1,Δ_2 положительна.

Наконец, состояние равновесия S_0 асимптотически устойчиво, если γ_{2k} и γ_{2k+1} отрицательны и оно неустойчиво, если хотя бы одна из этих величин положительна.

Условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) получены на основе использования теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Отметим, что варианты, когда $\Delta_1,\Delta_2\leqslant 0$ и хотя бы одна из этих величин равна нулю, приводит к критическому случаю в задаче об устойчивости состояния равновесия S_1. При этом требуется учет слагаемых более высокого порядка малости в НФ (25). Аналогичные замечания относятся и к результатам анализа состояния равновесия S_0, т.е. при $\gamma_{2k},\gamma_{2k+1}\leqslant 0$ и равенстве нулю хотя бы одной из указанных постоянных также реализуется критический случай в задаче об устойчивости в смысле теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости в линейном приближении.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *НФ* (27) *имеет следующие состояния равновесия:*

$$S_0:\ z_1=z_2=0;\ S_1:\ z_1=-\frac{\nu_{2k-1}}{\beta_{2k-1}},\ z_2=0;$$
$$S_{2\pm}:\ z_1=-\frac{\nu_{2k}}{\alpha_{2k-1}},\ z_{2\pm}=\pm\sqrt{\frac{\nu_{2k}(\nu_{2k-1}\alpha_{2k-1}-\beta_{2k-1}\nu_{2k})}{\alpha_{2k-1}^2\delta_{2k-1}}}.$$

Состояния равновесия $S_{2\pm}$ существуют, если подкоренное выражение положительно. Данные состояния равновесия, как и аналогичном случае при анализе НФ (25), *седловые.*

Состояние равновесия S_1 асимптотически устойчиво, если

$$\Delta_1=-\gamma_{2k-1}<0 \text{ и } \Delta_2=\frac{\nu_{2k}\beta_{2k-1}-\alpha_{2k-1}\nu_{2k-1}}{\beta_{2k-1}}<0.$$

Если же хотя бы одна из этих величин положительна, то S_1 неустойчиво.

Наконец, S_0 асимптотически устойчиво, если $\nu_{2k-1}, \nu_{2k} < 0$ и оно неустойчиво, если хотя бы одна из этих величин положительна.

Из результатов работ [19, 20, 25] вытекает справедливость двух следующих утверждений.

Теорема 3. *Существует такая положительная постоянная ε_1 ($\varepsilon_1 = \varepsilon_1(m)$), что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ ненулевым состояниям равновесия $S_1, S_{2\pm}$ НФ* (25) *соответствуют следующие пространственно неоднородные состояния равновесия КЗ* (1), (3), *в которой $a = a_m(1)(1-\alpha_1\varepsilon), b = b_m(1)(1+\alpha_2\varepsilon), m = 2k, k \in \mathbb{N}$. Так состоянию равновесия S_1 соответствует пространственно неоднородное состояние равновесия*

$$S_1(\varepsilon):\ u = u(x,\varepsilon) = \varepsilon\Big(-\frac{\gamma_{2k+1}}{\delta_{2k}}\cos(2k+1)x\Big) + O(\varepsilon^2).$$

Данное состояние равновесия асимптотически устойчиво (неустойчиво), если этим свойством обладает состояние равновесия S_1 НФ (25).

Состояниям равновесия $S_{2\pm}$ НФ (25) *соответствуют два неустойчивых пространственно неоднородных состояния равновесия $S_{2\pm}(\varepsilon)$ КЗ* (1), (3). *Для них справедливы асимптотические формулы*

$$S_{2\pm}(\varepsilon): u = u_\pm(x,\varepsilon) = \varepsilon\Big(\pm\eta_1\cos 2kx + \eta_2\cos(2k+1)x\Big) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\gamma_{2k}(\gamma_{2k+1}\alpha_{2k} - \delta_{2k}\gamma_{2k})}{\alpha_{2k}^2\beta_{2k}}}, \quad \eta_2 = -\frac{\gamma_{2k}}{\alpha_{2k}}.$$

Перейдем теперь к варианту, если $m = 2k-1$, т.е. НФ (27).

Теорема 4. *Существует такая положительная постоянная ε_2 ($\varepsilon_2 = \varepsilon_2(m)$), что каждому ненулевому состоянию равновесия НФ* (27) *соответствует пространственно неоднородное состояние равновесия КЗ* (1), (3)*: $S_1 \to S_1(\varepsilon), S_{2\pm} \to S_{2\pm}(\varepsilon)$. Для таких состояний равновесия справедливы асимптотические формулы*

$$S_1(\varepsilon):\ u = u(x,\varepsilon) = \varepsilon\Big(-\frac{\nu_{2k-1}}{\beta_{2k-1}}\cos(2k-1)x\Big) + O(\varepsilon^2).$$

Состояния равновесия $S_1(\varepsilon)$ наследуют устойчивость состояния равновесия S_1 НФ (27).

Наконец, состояниям равновесия $S_{2\pm}$ НФ (27) *соответствуют два пространственно неоднородных неустойчивых (седловых) состояния равновесия КЗ* (1), (3), *для которых справедливы асимптотические формулы*

$$S_{2\pm}(\varepsilon): u_\pm = u_\pm(x,\varepsilon) = \varepsilon(\eta_3\cos(2k-1)x \pm \eta_4\cos 2kx) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\eta_3 = -\frac{\nu_{2k}}{\alpha_{2k-1}},\ \eta_4 = \sqrt{\frac{\nu_{2k}(\nu_{2k-1}\alpha_{2k-1} - \beta_{2k-1}\nu_{2k})}{\delta_{2k-1}\alpha_{2k-1}^2}}.$$

В данном разделе был рассмотрен вариант задачи, когда $c \neq 0$, т.е. учтена конвекция. Если же $c = 0$, то характер задачи изменяется и такой ее вариант будет изучаться в следующем разделе.

4. БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 2 В УРАВНЕНИИ КАНА–ХИЛЛИАРДА–ООНО

Здесь будем изучать КЗ (18), (19) при $c = 0$. В таком случае уравнение (18), как уже отмечалось ранее, и получило название уравнение Кана–Хиллиарда–Ооно. Сразу отметим, что в этом разделе бифуркационная задача достаточно существенно отличается от той, которая была изучена ранее в п. 3 (при $c \neq 0$). Впрочем многие моменты анализа совпадают с построениями из предыдущего раздела. Здесь постараемся изложить относительно детально лишь те фрагменты, которые существенно отличаются от построений разд. 3.

Решения на инвариантном многообразии $V_2(\varepsilon)$ будем искать в виде суммы

$$u(t,x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}u_1(x,z_1,z_2) + \varepsilon u_2(x,z_1,z_2) + \varepsilon^{3/2}u_3(x,z_1,z_2) + O(\varepsilon^2), \tag{29}$$

где $u_1(x,z_1,z_2) = z_1(s)\cos mx + z_2(s)\cos(m+1)x$, функции $u_2(x,z_1,z_2), u_3(x,z_1,z_2)$ достаточно гладко зависят от $x \in [0,\pi]$ и от z_1, z_2, если пара (z_1,z_2) принадлежит малой окрестности точки $(0,0)$ пространства $\mathbb{R}^2$. Кроме того, они удовлетворяют краевым условиям (3), а также выполнены тождества

$$M_m(u_2) = M_m(u_3) = 0.$$

Функции $z_1(s), z_2(s)$ зависят от s, где $s = \varepsilon t$.

В результате подстановки суммы (29) в нелинейную КЗ (18), (19) для функций u_2, u_3 сформируются две линейные КЗ. Для u_2 получаем однородную КЗ

$$u_{2t} - A_0 u_2 = 0 \tag{30}$$

$$u_{2x}|_{x=0,x=\pi} = u_{2xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0,\ \ M_m(u_2) = M_{m+1}(u_2) = 0. \tag{31}$$

Наконец, для u_3 получаем неоднородную КЗ

$$u_{3t} - A_0 u_3 = -z_1'(s)\cos mx - z_2'(s)\cos(m+1)x - d(u_1^3)_{xx} + A_1 u_1, \tag{32}$$

$$u_{3x}|_{x=0,x=\pi} = u_{3xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0,\ \ M_m(u_3) = M_{m+1}(u_3) = 0. \tag{33}$$

Операторы A_0, A_1 были определены ранее.

Сразу отметим, что КЗ (30), (31) имеет решение $u_2 = 0$. Из условий разрешимости (см. замечание 6) вытекает, что в КЗ (32), (33) функции $z_1(s), z_2(s)$ следует искать из следующей системы дифференциальных уравнений (укороченной НФ)

$$z_1' = m^2\Big(\mu_m z_1 + \frac{3}{4}dz_1(z_1^2 + 2z_2^2)\Big),\ \ z_2' = (m+1)^2\Big(\mu_{m+1}z_2 + \frac{3}{4}dz_2(2z_1^2 + z_2^2)\Big), \tag{34}$$

где $\mu_m = (m^2 + (m+1)^2)\alpha_2 + (m+1)^2\alpha_1$, $\mu_{m+1} = (m^2 + (m+1)^2)\alpha_2 + m^2\alpha_1$.

Положим

$$z_1 = \Big(2\sqrt{\frac{1}{3|d|}}\Big)y_1,\ \ z_2 = \Big(2\sqrt{\frac{1}{3|d|}}\Big)y_2.$$

В результате последней нормировки получаем два варианта системы (34)

$$y_1' = m^2(\mu_m y_1 - (y_1^2 + 2y_2^2)y_1),\ \ y_2' = (m+1)^2(\mu_{m+1}y_2 - (2y_1^2 + y_2^2)y_2), \tag{35}$$

если $d < 0$ и

$$y_1' = m^2(\mu_m y_1 + (y_1^2 + 2y_2^2)y_1),\ \ y_2' = (m+1)^2(\mu_{m+1}y_2 + (2y_1^2 + y_2^2)y_2), \tag{36}$$

если $d > 0$.

Вариант $d \neq 0$ исключен. По очереди проанализируем системы (35), (36). После стандартных построений получаем, что справедливы утверждения.

Лемма 5. *Система дифференциальных уравнений* (35) *имеет нулевое состояние равновесия:*

$$S_0:\ y_1 = y_2 = 0,$$

а также может иметь следующие ненулевые состояния равновесия:

$$S_{1\pm}:\ y_1 = \pm\sqrt{\mu_m},\ y_2 = 0;\ \ S_{2\pm}:\ y_1 = 0,\ y_2 = \pm\sqrt{\mu_{m+1}};$$
$$S_{3,j}:\ y_1 = \pm\sqrt{\eta_1},\ y_2 = \pm\sqrt{\eta_2}\ \ (j = 1,2,3,4),$$

где $\eta_1 = (2\mu_{m+1} - \mu_m)/3, \eta_2 = (2\mu_m - \mu_{m+1})/3$.

Состояния равновесия $S_{1\pm}$ существуют, если $\mu_m > 0$ и они асимптотически устойчивы, если выполнено неравенство $\mu_{m+1} - 2\mu_m < 0$.

Состояния равновесия $S_{2\pm}$ существуют, если $\mu_{m+1} > 0$ и они асимптотически устойчивы, если $\mu_m - 2\mu_{m+1} < 0$.

Наконец, четыре состояния равновесия $S_{3,j}$ существуют, если $2\mu_{m+1} - \mu_m, 2\mu_m - \mu_{m+1}$ положительны и они всегда неустойчивы.

Нулевое состояние равновесия S_0 асимптотически устойчиво, если выполнены следующие два неравенства $\mu_m < 0$, $\mu_{m+1} < 0$.

Вопрос о существовании состояний равновесия сводится к анализу системы

$$y_1(\mu_m - (y_1^2 + 2y_2^2)) = 0,\ \ y_2(\mu_{m+1} - (y_1^2 + 2y_2^2)) = 0.$$

Перейдем к результатам анализа второй версии НФ (34), т.е. системы (36).

Лемма 6. *Система дифференциальных уравнений* (36) *имеет следующие состояния равновесия:*

$$S_0: y_1 = y_2 = 0;\ \ S_{1\pm}:\ y_1 = \pm\sqrt{-\mu_m}, y_2 = 0,\ \ \textit{если}\ \ \mu_m < 0;$$
$$S_{2\pm}: y_1 = 0,\ y_2 = \pm\sqrt{-\mu_{m+1}},\ \ \textit{если}\ \ \mu_{m+1} < 0;$$
$$S_{3,j}:\ \ y_1 = \pm\sqrt{\xi_1},\ y_2 = \pm\sqrt{\xi_2},\ \ \textit{где}\ \ \xi_1 = \frac{\mu_m - 2\mu_{m+1}}{3},\ \xi_2 = \frac{\mu_{m+1} - 2\mu_m}{3},\ j = 1,2,3,4,$$

если выполнены неравенства $\mu_m - 2\mu_{m+1} > 0, \mu_{m+1} - 2\mu_m > 0.$

Все ненулевые состояния равновесия неустойчивы, а состояние равновесия S_0 *асимптотически устойчиво при* $\mu_m < 0, \mu_{m+1} < 0$ *и неустойчиво, если хотя бы выполнено одно из двух неравенств* $\mu_m > 0, \mu_{m+1} > 0.$

Как и при анализе системы дифференциальных уравнений (35) координаты состояний равновесия системы (36) находим как решения соответствующей системы алгебраических уравнений

$$y_1(\mu_m + y_1^2 + 2y_2^2) = 0,\ y_2(\mu_{m+1} + 2y_1^2 + y_2^2) = 0.$$

Анализ устойчивости состояний равновесия в обоих леммах использует теорему А.М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Подчеркнем, что состояния равновесия $S_{1\pm}, S_{2\pm}$ НФ (35) существуют, если $\mu_m, \mu_{m+1} > 0$. При этом, если они оба асимптотически устойчивы, то четыре состояния равновесия $S_{3,j}$ существуют. Если же $S_{3,j}$ не существуют, то, по-крайней мере, одна из двух пар состояний равновесия $S_{1\pm}, S_{2\pm}$ неустойчива.

Справедливы два следующих утверждения.

Теорема 5. *Существует такая положительная постоянная* ε_3 $(\varepsilon_3 = \varepsilon_3(m))$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ *и выбранных* a *и* b $(a = a_m(1)(1 - \alpha_1\varepsilon), b = b_m(1)(1 + \alpha_2\varepsilon))$, *а также* $d < 0$ *КЗ* (1), (3) *имеет ненулевые состояния равновесия* $S_{1\pm}(\varepsilon), S_{2\pm}(\varepsilon), S_{3,j}(\varepsilon), j = 1, 2, 3, 4,$ *соответствующие состояниям равновесия* $S_{1\pm}, S_{2\pm}, S_{3,j}, j = 1, 2, 3, 4$ *НФ* (35) *с наследованием устойчивости. Для них справедливы асимптотические формулы*

$$S_{1\pm}(\varepsilon) : u(t, x, \varepsilon) = u_\pm(x, \varepsilon) = \pm 2\varepsilon^{1/2}\sqrt{\frac{\mu_m}{3|d|}}\cos mx + O(\varepsilon^{3/2});$$
$$S_{2\pm}(\varepsilon) : u(t, x, \varepsilon) = u_\pm(x, \varepsilon) = \pm 2\varepsilon^{1/2}\sqrt{\frac{\mu_{m+1}}{3|d|}}\cos(m+1)x + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Наконец,

$$S_{3,j}(\varepsilon) :\ u(t, x, \varepsilon) = 2\varepsilon^{1/2}\Big(\pm\sqrt{\frac{\eta_1}{3|d|}}\cos mx \pm \sqrt{\frac{\eta_2}{3|d|}}\cos(m+1)x\Big) + O(\varepsilon^{3/2}),\ j = 1, 2, 3, 4.$$

В последней формуле возможно любое сочетание знаков. Подчеркнем, что все состояния равновесия $S_{3,j}(\varepsilon)$ *неустойчивы* ($S_{3,j}$ *из леммы 5 неустойчивы).*

Перейдем к утверждению основанному на использовании НФ (36).

Теорема 6. *Существует постоянная* $\varepsilon_4 > 0$ $(\varepsilon_4 = \varepsilon_4(m))$ *такая, что каждому ненулевому состоянию равновесия НФ* (36) $S_{1\pm}, S_{2\pm}, S_{3,j} (j = 1, 2, 3, 4)$ *соответствуют пространственно неоднородные неустойчивые состояния равновесия КЗ* (1), (3), *если* a, b *выбраны как указано в теореме 5, но* $d > 0$.

Все эти неоднородные состояния равновесия неустойчивы и для них справедливы асимптотические формулы, аналогичные формулам из теоремы 5.

5. ЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАНТА УРАВНЕНИЯ КАНА–ХИЛЛИАРДА

В этом разделе рассмотрим КЗ (1), (3) в случае, если $a = c = 0$. Итак, рассмотрим КЗ

$$u_t = -u_{xxxx} - bu_{xx} - d(u^3)_{xx}, \tag{37}$$

$$u_x|_{x=0,x=\pi} = u_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0. \tag{38}$$

Сразу отметим, что для КЗ (37), (38) справедливы утверждения.

Лемма 7. *КЗ* (37), (38) *имеет однопараметрическое семейство состояний равновесия*

$$u(t, x) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Лемма 8. *Пусть* $M(\varphi) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \varphi(t, x)dx$, *а* $u(t, x)$ – *решение КЗ* (37), (38). *Тогда*

$$M(u(t, x)) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Последнее равенство выделяет множество решений КЗ, которые формируют аффинное подпространство фазового пространства КЗ (37), (38). *Если* $\alpha = 0$, *то оно будет линейным одномерным подпространством фазового пространства.*

Напомним, что у КЗ (37), (38) в качестве фазового пространства можно выбрать функциональное пространство $\mathbb{W}^4_{2,N}[0,\pi]$ (см. введение).

В силу последних замечаний можно положить

$$u(t,x) = \alpha + v(t,x),\ M(u) = \alpha,\ M(v) = 0 \tag{39}$$

и, следовательно, замена (39) позволяет для $v(t,x) = v(t,x,\alpha)$ получить уже следующую вспомогательную КЗ:

$$v_t = Av - 3d\alpha(v^2)_{xx} - d(v^3)_{xx}, \tag{40}$$

$$v_x|_{x=0,x=\pi} = v_{xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0,\ M(v) = 0, \tag{41}$$

где теперь ЛДО A определен равенством

$$Av = A_\alpha v = -v_{xxxx} - b_\alpha v_{xx},\ b_\alpha = b + 3\alpha^2 d.$$

Нетрудно убедиться, что ЛДО A_α имеет счетный набор собственных значений $\lambda_n = \lambda_n(\alpha) = -n^4 + b_\alpha n^2$, соответствующий собственным функциям $\cos nx, n = 1,2,3,\ldots$. В силу полноты семейства функций $\{\cos nx\}$ в подпространстве $\mathbb{L}_{2,0}(0,\pi)$ пространства $\mathbb{L}_2(0,\pi)$ иных собственных значений у ЛДО A_α нет ($f(x) \in \mathbb{L}_{2,0}[0,\pi]$, если $f(x) \in \mathbb{L}_2(0,\pi)$ и $M(f) = 0$).

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом варианте постановки задачи ЛДО A_α имеет собственные числа $\lambda_n(\alpha) = -n^4 + b_\alpha n^2, n = 1,2$. Зафиксируем α и в такой ситуации рассмотрим КЗ (40), (41). При $b_\alpha < 1$ у нее нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво. Если же $b_\alpha > 1$, то оно неустойчиво. При $b_\alpha = 1$ реализуется критический случай нулевого собственного значения, которому отвечает собственная функция $\cos x$.

Пусть теперь $b_\alpha(\varepsilon) = 1 + \nu\varepsilon$, где $\nu = \pm 1$ или $\nu = 0, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1$. Тогда у КЗ (40), (41) при так выбранном b_α реализуется случай близкий к критическому простого нулевого собственного значения: у ЛДО

$$A_\alpha(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1,\ A_0 = -\partial^4 - \partial^2,\ A_1 = -\nu\partial^2$$

в нашем случае есть собственное число $\lambda_1(\varepsilon) = \nu\varepsilon$, а остальные его собственные значения лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda_k \leqslant -\alpha_0 < 0$ (где в качестве α_0 можно взять, например, -11).

КЗ (40), (41) имеет одномерное локально инвариантное многообразие $V_1(\varepsilon)$ и вопрос о поведении решений этой КЗ может быть сведен к анализу НФ

$$z' = \varphi(z,\varepsilon), \tag{42}$$

или ее укороченному варианту НФ (42), т.е. к дифференциальному уравнению вида

$$z' = \psi(z),\ \psi(z) = \varphi(z,0), \tag{43}$$

где $z = z(s), s = \varepsilon t, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0), \varphi(z,\varepsilon), \psi(z)$ – достаточно гладкие функции.

При этом решения, принадлежащие локально-инвариантному многообразию $V_1(\varepsilon)$, можно искать как и в работах [13, 14, 22] в следующем виде:

$$v(t,x,\varepsilon) = v(x,z,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}v_1(x,z) + \varepsilon v_2(x,z) + \varepsilon^{3/2}v_2(x,z) + O(\varepsilon^2). \tag{44}$$

Здесь $v_1(x,z) = z(s)\cos x$, а функции $v_2(x,z), v_3(x,z)$ подлежат определению как решения вспомогательных линейных неоднородных КЗ, которые получаем после подстановки суммы (44) в КЗ (40), (41) и выделения слагаемых при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$. При ε и $\varepsilon^{3/2}$ получаем неоднородные КЗ (см. разд. 2).

Прежде чем выписать эти КЗ найдем те α, которые обеспечивают выполнение равенства $b_\alpha = b + 3\alpha^2 d = 1 + \nu\varepsilon$.

Если $b \neq 1$, то

$$\alpha_\pm(\varepsilon) = \alpha_0(1 + \beta_1\varepsilon + o(\varepsilon)),\ \alpha_0 = \pm\sqrt{\frac{1-b}{3d}},\ \beta_1 = \frac{\nu}{2(1-b)}.$$

Если же $b = 1$, то $\alpha_\pm(\varepsilon) = \pm\sqrt{\dfrac{\nu\varepsilon}{3d}}$. Впрочем, этот вариант выбора коэффициента b далее изучать не будем. При реализации алгоритма построения НФ необходимо функции $\alpha_\pm$ также разложить по степеням ε. При получении укороченного варианта НФ (43) следует положить $\varepsilon = 0$, т.е. $\alpha = \alpha_0$. В нашем случае $\alpha_0 = \pm\sqrt{(1-b)/(3d)}$, где $(1-b)/d > 0$.

Итак, для определения $v_2(x,z)$ получим неоднородную КЗ:

$$-A_0 v_2 = -3d\alpha_0(v_1^2)_{xx},$$

$$v_{2x}|_{x=0,x=\pi} = v_{2xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0,\ M(v_2) = 0.$$

Учитывая, что $v_1(x,z) = z(s)\cos x$, нетрудно найти $v_2(x,z) = \eta_2 z^2 \cos 2x$, где $\eta_2 = d\alpha_0/2$.

На третьем шаге получим, что функцию $v_3(x,z)$ следует находить как решение следующей линейной неоднородной КЗ:

$$-A_0 v_3 = -z' \cos x - d(v_1^3)_{xx} - 6d\alpha_0(v_1 v_2)_{xx} + A_1 v_1, \tag{45}$$

$$v_{3x}|_{x=0,x=\pi} = v_{3xxx}|_{x=0,x=\pi} = 0,\ M(v_3) = 0. \tag{46}$$

Из условий разрешимости КЗ (45), (46) вытекает, что правая часть НФ функция

$$\psi(z) = \nu z + l z^3,\ \ l = \frac{3}{4}d + \frac{3}{2}\alpha_0^2 d^2 = \frac{1}{4}(5-2b)d.$$

Следовательно, в рассматриваемом в этом разделе варианте постановки задачи справедливо утверждение.

Лемма 9. *НФ* (43) *имеет* 2 *ненулевых состояния равновесия*

$$z_\pm = \pm\sqrt{-\frac{\nu}{l}},$$

которые существуют, если $\nu/l < 0$, *т.е. при* $l < 0$ *необходимо выбрать* $\nu = 1$ *и* $\nu = -1$, *если оказалось, что* $l > 0$.

Если $l < 0$, *то оба состояния равновесия* $z_\pm$ *асимптотически устойчивы, а при* $l > 0$ *они неустойчивы. Наконец, нулевое решение асимптотически устойчиво, если* $\nu < 0$ *и неустойчиво при* $\nu > 0$.

При $\nu = 0$ *нулевое решение НФ* (43) *асимптотически устойчиво при* $l < 0$ *и оно неустойчиво, если* $l > 0$.

Как и ранее, в предыдущих разделах, из этих построений вытекает, что справедливо утверждение.

Теорема 7. *Существует положительная постоянная* ε_0 *такая, что при всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *каждому состоянию равновесия* $z_\pm$ *НФ* (43) *соответствуют пространственно неоднородные состояния равновесия* $S_\pm(\alpha,\varepsilon)$ *КЗ* (40), (41). *Они наследуют устойчивость состояний равновесия* $z_\pm$ *и для них справедливы асимптотические формулы*

$$v = v_\pm(x,\varepsilon,\alpha_\pm) = \varepsilon^{1/2} z_\pm \cos x + \varepsilon\eta_2 z_\pm^2 \cos 2x + O(\varepsilon^{3/2}).$$

Возвратимся теперь к КЗ (37), (38). Пусть $\alpha_\pm(\varepsilon) = \alpha_0(1 + \beta_1\varepsilon + o(\varepsilon))$, где α_0, β_1 были указаны ранее. Тогда справедливо утверждение которое является следствием теоремы 7.

Теорема 8. *Пусть* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, *тогда каждому решению* $v_\pm(x,\varepsilon,\alpha_\pm)$ *соответствует состояние равновесия КЗ* (37), (38)

$$u = u_\pm(x,\varepsilon,\alpha(\varepsilon)) = \alpha_\pm(\varepsilon) + v_\pm(x,\varepsilon,\alpha_\pm).$$

Каждое из этих решений устойчиво, если асимптотически устойчиво решение $v_\pm(x,\varepsilon,\alpha_\pm)$ *вспомогательной КЗ* (40), (41) *и решения* $u_\pm(x,\varepsilon,\alpha(\varepsilon))$ *неустойчивы, если неустойчивы решения* $v_\pm(x,\varepsilon,\alpha_\pm)$, *где* $\alpha_\pm = \alpha_\pm(0)$.

Подчеркнем, что двупараметрическое семейство решений $u_+(x,\varepsilon,\alpha(\varepsilon))$ и $u_-(x,\varepsilon,\alpha(\varepsilon))$ содержат состояния равновесия КЗ (37), (38). Они не могут быть асимптотически устойчивыми, так как в окрестности каждого из них находится состояние равновесия, в котором $\varepsilon_\Delta = \varepsilon + \Delta\ (\Delta << 1)$.

При анализе КЗ (37), (38), а также вспомогательной КЗ (40), (41) определяющую роль играет НФ (43). В свою очередь, анализ НФ (43) существенным образом зависит от коэффициента l, который часто называют ляпуновской величиной. В нашем случае $l = (5-2b)d/4$. Вместе с тем состояния равновесия возникают в окрестности однородных состояний равновесия КЗ (37), (38). Такие состояния равновесия существуют, если $(1-b)/(3d) > 0, d \neq 0$. Последнее неравенство позволяет проанализировать вопрос о неоднородных состояниях равновесия КЗ (37), (38) более детально.

Пусть $d > 0$. Тогда с необходимостью $1 - b > 0$, т.е. $b < 1$. Следовательно, $l > 0$ и НФ (43) имеет состояния равновесия, если $\nu < 0\,(\nu = -1)$, т.е. у КЗ (37), (38) реализуется докритический вариант бифуркаций неоднородных состояний равновесия, которые неустойчивы.

Если же $d < 0$, то $b > 1$ и в этом случае у КЗ (37), (38) могут быть реализованы как докритические, так и послекритические бифуркации неоднородных состояний равновесия. При $d < 0$ неоднородные состояния равновесия существуют, когда $b > 1$. Пусть $b \in (1, 5/2)$. Тогда $l < 0$ и существуют устойчивые неоднородные состояния равновесия. Если же $b \in (5/2, \infty)$, то $l > 0$ и эти состояния равновесия неустойчивы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были изложены результаты анализа одной из возможных версий уравнения Кана–Хиллиарда–Ооно. Это уравнение изучалось вместе с однородными краевыми условиями Неймана [13]. Это же уравнение в работе [13] было рассмотрено вместе с периодическими краевыми условиями (2). Результаты анализа КЗ (1), (3) и (1), (2) внешне достаточно похожи, но, тем не менее есть, по-крайней мере, два существенных отличия.

Во-первых, при изучении спектра ЛДО A в случае условий Неймана все собственные значения простые, а в случае периодических краевых условий они за исключением одного собственного значения двукратны. Во-вторых, анализ задачи в аналогичной постановке показал, что в случае периодических краевых условий характерны бифуркации t периодических решений. В тоже время, при анализе КЗ (1), (3) речь идет о бифуркациях пространственно неоднородных состояний равновесия. При этом характер бифуркаций в случае коразмерности 1 существенным образом зависит от четности или нечетности ведущей моды.

В данной работе рассматривается уравнение (1), если x принадлежит ограниченному множеству, т.е. $x \in [0, l]$ и после масштабирования (выбора иной системы измерений) можно считать, что $x \in [0, \pi]$. То, что пространственная координата (в нашем случае x) принадлежит ограниченному множеству достаточно естественное условие с физической точки зрения, так как смешивание компонент происходит, в принципе, в ограниченном объеме. Это замечание остается справедливым и в других приложениях для изучаемого уравнения.

Поэтому, естественно, в таком случае требуется для математической корректности дополнить уравнение какими-либо краевыми условиями. В работе выбраны краевые условия, которые в физике и химии принято называть условиями “непроницаемости”. Впрочем, краевые условия могут быть и иными, если они достаточно естественны с прикладной точки зрения. Добавим, что уравнение (1) вместе с краевыми условиями (3) записаны в аналогичном виде, как и в известной монографии [15]. Такой вариант записи, дополненный начальными условиями $u(0, x) = f(x)$, позволяет утверждать, что изучаемая в работе смешанная (начально-краевая) задача корректна (см., например, [15, 17]).

Рассматриваемый вариант КЗ позволяет для анализа поведения решений использовать методы теории динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий. В данной работе это метод инвариантных (интегральных) многообразий и НФ. Построения предполагают использование модифицированного алгоритма построения НФ, который ведет свое начало от известного в математической и теоретической физике метода Крылова-Боголюбова. Отметим также, что в монографии Темама [15] рассмотренное уравнение Кана–Хиллиарда содержит нелинейность более общего вида: многочлен произвольной нечетной степени. В нашем случае он кубический. Отметим, что основной вариант, который рассматривается в [15] предполагает, что $d < 0$. Вместе с тем там же отмечается, что вариант $d > 0$ не может быть исключен полностью и ведет к выявлению эффекта “отрицательной вязкости”.

Отметим, что, как вытекает из результатов данной статьи, при $d < 0$ КЗ (1), (2) может иметь диссипативные структуры (локально устойчивые паттерны). Одним из существенных моментов следует считать то, что для найденных паттернов исследован вопрос об устойчивости, формирующих их решений, т.е. вопрос об их физической реализуемости. Отметим особо, что если $c \neq 0, a \neq 0$, при анализе уже самой простой версии постановки задачи в случае нечетности ведущей моды принципиальная часть ответа не зависит от d и устойчивые паттерны могут появиться при любом знаке этого коэффициента.

По-видимому, уместно отметить, что в статьях [3-5], где рассматривается конвективное уравнение Кана–Хиллиарда ($c \neq 0, a = 0$) оно записано в иной форме, при ином масштабировании. Применительно к задаче из данной работы этот вариант должен выглядеть следующим образом:

$$w_\tau + w_{yyyy} + w_{yy} + c_0(w^2)_y + a_0 w - (w^3)_{yy} = 0. \tag{47}$$

В этих работах при $a_0 = 0$ был рассмотрен вопрос о существовании у уравнения (47) решений в виде бегущих волн, т.е. при $y \in \mathbb{R}$. Такой переход от уравнения (1) к уравнению (47) и обратно (если $b > 0, d < 0$) может быть реализован с помощью замен

$$t = \frac{\tau}{b^2},\ x = \frac{y}{b^{1/2}},\ u = \sqrt{-\frac{b}{d}}w. \tag{48}$$

При этом $a_0 = a/b^2, c_0 = c/b^{1/2}$. В редакции (47) конвективное уравнение Кана–Хиллиарда имеет на два параметра меньше. Но в нашем случае уравнение (47) следует дополнить краевыми условиями

$$w_y|_{y=0,y=l} = w_{yyy}|_{y=0,y=l} = 0,\ l = \pi b^{1/2}. \tag{49}$$

Пусть $a_0 = a_0(\delta)(1 - \alpha_1\varepsilon)$, где $a_0(\delta) = a_m(\delta)/b_m^2(\delta), b = b_m(\delta)(1 + \alpha_2\varepsilon)$, а выбор $a_m(\delta), b_m(\delta)$ указан в начале разд. 2 и пусть $m = 2k - 1$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда справедливо утверждение.

Следствие (из теоремы 1). Существует положительная постоянная $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m)$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ состоянию равновесия S_2 НФ (16) соответствует состояние равновесия $S_{2*}(\varepsilon)$ КЗ (47), (49):

$$S_{2*}(\varepsilon): \, w(t,x,\varepsilon) = w(x,\varepsilon) = \sqrt{-\frac{b}{d}}\Big(- \varepsilon\frac{\gamma_{2k-1}}{l_2}\cos(2k-1)\frac{y}{b^{1/2}} + o(\varepsilon)\Big).$$

При этом состояние равновесия $S_{2*}(\varepsilon)$ наследует устойчивость S_2 – состояния равновесия НФ (16).

Аналогично, используя замены (48), можно по очереди переформулировать все остальные теоремы из данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cahn J.W., Hilliard J. E.* Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1959. V. 28. № 2. P. 258–267.
2. *Miranville A.* The Cahn–Hilliard equation and some of its variants // AIMS Math. 2017. V.2. № 3. P. 479–544.
3. *Golovin A.A., Davis S. H., Nepomnyashchy A.A.* A convective Cahn-Hilliard model for the formation of facets and corners in crystal growth // Physica D. 1998. V. 118. P. 202–230.
4. *Podolny A., Nepomnyashchy A.A., Zaks M.A., Rubinstein B.Y., Golovin A.A.* Dynamics of domain walls governed by the convective Cahn-Hilliard model // Physica D. 2005. V. 201. P. 291–305.
5. *Watson S.J., Otto F., Rubinstein B.Y.* Coarsening dynamics for the convective Cahn-Hilliard equation // Liepzig. Preprint. 2002. № 35. 21 p.
6. *Novick-Cohen A., Shishkov A.* Upper bounds for coarsening for the degenerate Cahn-Hilliard equation // Discrete Contin. Dyn. Syst. B. 2009. V. 25. P. 251-272.
7. *Chao S.M., Chung S.K., Kim K.I.* Conservative nonlinear difference scheme for the Cahn-Hilliard equation - II // Computers and Mathematics with applications. 2000. V. 39. P. 229–243.
8. *Frolovskaya O.A., Admaev O.V., Pukhnachev V.V.* Special case of the Cahn-Hilliard equation // Siberian electronic mathematical reports. 2013. V. 10. P. 324-334.
9. *Теодорович Э.В.* Точное автомодельное решение некоторого уравнения нелинейной диффузии с диссипацией // ПММ. 2014. Т. 78. В. 4. С. 493–500.
10. *Kuramoto Y.* Chemical oscillations, waves and turbulence. Berlin: Springer, 1984.
11. *Sivashinsky G.I.* Weak turbulence in periodic flow // Physica D. 1985. V. 28. № 3. P. 234–255.
12. *Kulikov A. N., Kulikov D. A.* Local bifurcations in the generalized Cahn–Hilliard equation // Springer Proc. Math.Stat. 2020. V. 333. P. 167–179.
13. *Kulikov A.N., Kulikov D.A.* Local Bifurcations of Invariant Manifolds of the Cahn–Hilliard–Oono Equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. V. 44. № 3. P. 996–1010.
14. *Куликов А.Н., Куликов Д.А.* Локальные бифуркации в уравнениях Кана–Хилларда, Курамото–Сивашинского и их обобщениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 670–683.
15. *Temam R.* Infinite–dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New–York: Springer, 1997.
16. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
17. *Соболевский П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 297–350.
18. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: ЛГУ, 1950.
19. *Куликов А.Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // В сб. “Исследования по устойчивости и теории колебаний”. Ярославль. 1976. С. 114–129.
20. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

21. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит, 1969.

22. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

23. *Guckenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New–York: Springer, 1983.

24. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

25. *Куликов А.Н.* Инерциальные инвариантные многообразия нелинейной полугруппы операторов в гильбертовом пространстве // Итоги науки и техники. Серия "Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры". 2020. Т. 186. С. 57–66.

THE CAHN–HILLARD–OONO CONVECTIVE EQUATION

A.N. Kulikov*, D.A. Kulikov

150003 Yaroslavl, Sovetskaya Str., 14, P.G. Demidov Yaroslavl State University, Russia
**e-mail: anat_kulikov@mail.ru*

Received: 11.10.2023
Revised: 06.05.2024
Accepted: 28.06.2024

Abstract. A nonlinear partial differential evolutionary equation is considered, which is obtained as a natural generalization of the well-known Cahn–Hilliard–Oono equation from a physical point of view. The terms responsible for accounting for convection and dissipation have been added to the generalized version. A new version of the equation is considered together with homogeneous Neumann boundary conditions. For such a boundary value problem, local bifurcations of codimension 1 and 2 are studied. In both cases, questions about the existence, stability, and asymptotic representation of spatially inhomogeneous equilibrium states, as well as invariant manifolds formed by such solutions to the boundary value problem, are analyzed. To substantiate the results, the methods of the modern theory of infinite-dimensional dynamical systems, including the method of integral manifolds, the apparatus of the theory of Poincare normal forms, are used. The differences between the results of the analysis of bifurcations in the Neumann boundary value problem are indicated with conclusions in the analysis of the periodic boundary value problem studied by the authors of the article in previous publications.

Keywords: Cahn–Hilliard–Oono convective equation, boundary value problem, stability, bifurcations, normal forms, asymptotic formulas.