ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 10, с. 1931–1948

УДК 517.988

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ТИПА М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ПАМЯТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ[1)]

М. Ю. Кокурин[1,*]

[1] 424001 Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1, Марийский государственный университет, Россия
*e-mail: kokurinm@yandex.ru

Поступила в редакцию 05.03.2024 г.
Переработанный вариант 05.03.2024 г.
Принята к публикации 01.07.2024 г.

Рассматривается нелинейная коэффициентная обратная задача, связанная с частичной реконструкцией матрицы памяти вязкоупругой среды по результатам зондирования среды семейством волновых полей, возбуждаемых точечными источниками. Исследуется пространственно непереопределенная постановка, в которой многообразия точечных источников и детекторов не совпадают и имеют суммарную размерность, равную трем. Устанавливаются требования к этим многообразиям, обеспечивающие однозначную разрешимость изучаемой обратной задачи. Результат достигается за счет редукции этой задачи к цепочке связанных систем линейных интегральных уравнений типа М.М. Лаврентьева. Библ. 33.

Ключевые слова: уравнения упругости, вязкоупругая среда, коэффициентная обратная задача, ядро пямяти, линейное интегральное уравнение, бигармоническое уравнение, единственность.

DOI: 10.31857/S0044466924100125, **EDN**: JZLWVL

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения М.М. Лаврентьева восходят к работам [1], [2], в которых был предложен подход к исследованию нелинейных коэффициентных обратных задач для широкого класса уравнений в частных производных, позволяющий редуцировать такие задачи к линейным интегральным уравнениям. Наиболее полно этот подход развит в применении к коэффициентным задачам для гиперболических уравнений, рассматриваемых в частотной, либо во временной области (см. [3]– [8]). Типичная постановка обратной задачи в частотной области состоит в том, что один или несколько коэффициентов уравнения, имеющих носитель в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ со связным дополнением, разыскиваются по данным измерения комплексной амплитуды $u(x) = u(x; z, \omega)$ поля установившихся колебаний $U(x, t) = u(x)e^{-i\omega t}$, $x \in X$, инициированного семейством гармонических по времени источников $F(x, z, t) = \delta(x - z)e^{-i\omega t}$, $z \in Z$. Здесь X есть многообразие, содержащее детекторы поля, рассеянного неоднородностью D, Z — множество точечных источников, $(X \cup Z) \cap \overline{D} = \emptyset$. Специальным образом организованный предельный переход при $\omega \to 0$ в интегральном уравнении для $u(x)$ позволяет получить для искомого коэффициента линейное интегральное уравнение, называемое уравнением М.М. Лаврентьева. При работе с исходным волновым уравнением во временной области аналогичный результат получается после применения к этому уравнению преобразования Фурье–Лапласа по времени. В задаче реконструкции коэффициента $c(x)$ в гиперболическом уравнении

$$\frac{1}{c^2(x)}U_{tt}(x,t) = \Delta U(x,t) - \delta(x-z)g(t),\ x \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

описанный подход приводит к линейному интегральному уравнению

$$\int\limits_D \frac{\xi(y)dy}{|x-y||z-y|} = G(x,z),\ x \in X, z \in Z. \tag{1.2}$$

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 24–21–00031).

Здесь функция $G(x,z)$ определяется по наблюдениям рассеянного поля на X в частотной, либо во временной области,

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2},\ x \in D,$$

и предполагается, что искомый коэффициент $c(x) \equiv c_0 > 0$ вне D, $c \in C(\mathbb{R}^3)$. В приложениях функция $c(x)$ есть скорость распространения сигнала в скалярной волновой среде. Редукция исходной нелинейной обратной задачи к линейным уравнениям вида (1.2) позволяет, во-первых, устанавливать теоремы единственности для этих задач при различных требованиях к выбору множеств источников и детекторов и, во-вторых, конструировать численные алгоритмы, основанные на хорошо развитой технике регуляризации линейных интегральных уравнений (см. [8], [9]). Другие возможные подходы к конструированию эффективных алгоритмов для решения уравнения М.М. Лаврентьева представлены в [7], [10], [11]. Единственность решения в обратной задаче реконструкции коэффициента $c(x)$ в (1.1) имеет место в том случае, когда соответствующее (1.2) однородное уравнение имеет лишь нулевое решение. Естественным требованием к выбору многообразий X, Z является пространственная непереопределенность обратной задачи, означающая, что суммарная размерность X и Z равна размерности носителя D реконструируемой функции $c(x)$, т.е. трем. Первоначально в [3], [4] единственность решения интегрального уравнения (1.2) была обоснована в переопределенных постановках, в которых $\dim(X) = \dim(Z) = 2$. В последнее время получены теоремы единственности для уравнения М.М. Лаврентьева (1.2) в непереопределенной постановке, когда одно из многообразий X, Z является отрезком прямой, а другое, например, – областью на плоскости или на аналитической поверхности, не пересекающей $\overline{D}$ (см. [12]– [14]). Характерным результатом в этом направлении является следующая теорема.

Теорема 1 (см. [12]). *Пусть X содержит область на плоскости Π, Z содержит открытый интервал на прямой $\mathcal{L}$ и $(\Pi \cup \mathcal{L}) \cap \overline{D} = \emptyset$. Тогда соответствующее* (1.2) *однородное уравнение имеет в классе $L_2(D)$ лишь нулевое решение.*

Все сказанное относится главным образом к обратным задачам для гиперболических уравнений, описывающих скалярные волновые поля. Такими уравнениями моделируются процессы в акустике, они возникают также в одномерных задачах, связанных с электромагнитными и упругими колебаниями неоднородных сред.

В настоящей работе объектом изучения является система

$$\omega^2 u(x) + (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div} u(x) + \mu \Delta u(x) + \omega q(x,\omega) u(x) = -a\delta(x-z), \tag{1.3}$$
$$x \in \mathbb{R}^3,\ \omega > 0,$$

описывающая, в частности, установившиеся гармонические колебания трехмерной вязкоупругой среды. Вектор $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, характеризующий перемещения точек среды, зависит также от местоположения $z \in Z$ точечного источника зондирующей упругой волны и от ее частоты ω. В необходимых случаях зависимость u от z, ω будет специально отмечаться. Мы используем обозначение $\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$, дифференциальные операторы ∇, Δ, div берутся по переменной $x \in \mathbb{R}^3$, что во избежание разночтений ниже также иногда отмечается. Правая часть в (1.3) описывает силу в направлении единичного вектора $a \in \mathbb{R}^3$, приложенную в точке $x = z$. Предполагается, что коэффициенты Ламэ $\lambda, \mu > 0$ постоянны. Диагональная матричная функция

$$q(x,\omega) = \mathrm{diag}(q_1(x,\omega), q_2(x,\omega), q_3(x,\omega))$$

имеет компоненты, непрерывные в $\mathbb{R}^4 = \{(x,\omega)\}$. Кроме того,

$$q(x,\omega) = 0,\ x \in \mathbb{R}^3 \backslash D.$$

Как и выше, D есть ограниченная область со связным дополнением $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}$.

Исходной по отношению к (1.3) служит задача динамики вязкоупругой среды во временной постановке (см. [15]– [19])

$$\begin{gathered} U_{tt}(x,t) - (\lambda+\mu)\nabla \mathrm{div} U(x,t) - \mu\Delta U(x,t) + \sigma(x) U_t(x,t) + \\ + \int\limits_{-\infty}^{t} h(x,t-\tau) U_{tt}(x,\tau)\, d\tau = a\delta(x-z) g(t);\ x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $U(x,t) = (U_1(x,t), U_2(x,t), U_3(x,t))$ — вектор перемещений точки x; $\sigma(x)$, $h(x,t)$ — диагональные матрицы,

$$\sigma(x) = \mathrm{diag}(\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x)),\ h(x,t) = \mathrm{diag}(h_1(x,t), h_2(x,t), h_3(x,t)).$$

Матрица $\sigma(x)$ характеризует внутреннее поглощение энергии в среде, матричное ядро $h(x,t)$ описывает наследственные свойства среды. Физический смысл имеют лишь ядра памяти h с неотрицательными компонентами, удовлетворяющие условию $h(x,t) = 0, t < 0$, это условие далее считаем выполненным.

На практике используются две схемы перехода от (1.4) к уравнению (1.3).

1) Можно положить

$$g(t) = e^{-i\omega t},\ U(x,t) = u(x)e^{-i\omega t},\ \omega > 0,$$

в результате для комплексной амплитуды $u(x)$ получаем уравнение (1.3) с матричной функцией

$$q(x,\omega) = i\sigma(x) + \omega\widetilde{h}(x,\omega). \tag{1.5}$$

Здесь и далее через $\widetilde{H}(\omega)$ обозначаем преобразование Фурье скалярной, векторной или матричной функции $H = H(t)$,

$$\widetilde{H}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} H(t)dt.$$

В этом случае уравнение (1.3) описывает установившиеся гармонические колебания вязкоупругой среды под действием периодической силы, приложенной в точке $x = z$.

2) Положим $g(t) = \delta(t)$ и добавим к (1.4) начальное условие $U|_{t<0} \equiv 0$. Пусть решение $U(x,t)$ полученной задачи Коши и его производные по времени до второго порядка включительно убывают вне источников, так что к этим функциям возможно применение преобразования Фурье по времени, и это преобразование определено, по крайней мере, при $\omega > 0$. Выполняя такое преобразование и полагая $u(x;\omega) = \widetilde{U}(x,\omega)$, приходим к уравнению (1.3) с функцией q как в (1.5). В этом случае (1.3) описывает эффект мгновенного при $t = 0$ приложения возбуждающей силы в точке $x = z$. Сделанное предположение относительно области определения преобразования Фурье гарантирует возможность предельного перехода при $\omega \to 0$, лежащего в основе конструкции М.М. Лаврентьева.

Система (1.3) рассматривается вместе с условиями излучения на бесконечности (см. [20, гл. III, §2]):

$$\lim_{|x|\to\infty} u^{(p)}(x) = 0,\ \lim_{|x|\to\infty} |x|\Big(\frac{\partial u^{(p)}(x)}{\partial |x|} - ik_1 u^{(p)}(x)\Big) = 0, \tag{1.6}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u^{(s)}(x) = 0,\ \lim_{|x|\to\infty} |x|\Big(\frac{\partial u^{(s)}(x)}{\partial |x|} - ik_2 u^{(s)}(x)\Big) = 0. \tag{1.7}$$

Здесь $u^{(p)} = \nabla\Psi^{(p)}$ и $u^{(s)} = \operatorname{rot}\Psi^{(s)}$ — однозначно определяемые потенциальная и соленоидальная компоненты векторного поля $u = u^{(p)} + u^{(s)}$, $\Psi^{(p)}$ и $\Psi^{(s)}$ — их скалярный и векторный потенциал соответственно. Через

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1},\ k_2 = \frac{\omega}{c_2};\ c_1 = \sqrt{\lambda + 2\mu},\ c_2 = \sqrt{\mu}$$

обозначаются волновые числа и скорости распространения продольных и поперечных волн в однородной упругой среде, для которой $q(x,t) \equiv 0$. В этом контексте прямая задача для уравнения (1.3) заключается в нахождении для заданной матричной функции $q(x,\omega)$ решения (1.3), удовлетворяющего условиям (1.6), (1.7), с фиксированным $\omega > 0$. Константы λ, μ всюду считаем заданными. Отмеченная выше возможность единообразного охвата в рамках уравнения (1.3) содержательно различных схем возбуждения колебаний мотивирует постановку обратной задачи зондирования в частотной формулировке. В настоящей работе мы будем исследовать следующую обратную задачу для уравнения (1.3).

Обратная задача (ОЗ). *Считая известными значения решений* $u = u(x;z,\omega)$ *задачи* (1.3), (1.6), (1.7) *для всех* $x \in X$, $z \in Z$, $\omega \in (0,\overline{\omega}]$, $\overline{\omega} > 0$, *определить матричную функцию* $q(x,\omega)$ *для* $x \in D$, $\omega \in (0,\overline{\omega}]$.

Здесь и далее X, Z — множества локализации точечных детекторов и источников зондирующих упругих волн, $(X \cup Z) \cap \overline{D} = \emptyset$. Нас в первую очередь интересует возможность такого выбора X, Z, при котором ОЗ имела бы единственное решение и была бы непереопределенной в пространственном смысле, так что $\dim(X) + \dim(Z) = 3$.

Замечание 1. Предположим, что для ядра памяти h в уравнении (1.4) с константами $C > 0$, $\varkappa \in (0,1)$ выполняется условие

$$\|\widetilde{h}(x,\omega)\| \leqslant \frac{C}{\omega^{\varkappa}},\ \omega \in (0,\overline{\omega}]. \tag{1.8}$$

Тогда в силу (1.5) решение ОЗ доставляет матрицу $\sigma(x) = -i\lim\limits_{\omega\to 0} q(x,\omega)$ и преобразование Фурье

$$\widetilde{h}(x,\omega) = \omega^{-1}(q(x,\omega) - i\sigma(x))$$

для $x \in D$, $\omega \in (0, \overline{\omega}]$. При соответствующих условиях относительно h эти данные позволяют реконструировать и исходное ядро памяти $h(x,t)$, $x \in D$, $t > 0$. Таким условием является, например, аналитичность матричной функции $\widetilde{h}(x,\omega)$ на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ и в комплексной окрестности точки $\omega = 0$, возможно, с разрезом, проведенным из этой точки в бесконечность. В этом случае задание $\widetilde{h}(x,\omega)$ при $\omega \in (0, \overline{\omega}]$ однозначно определяет $\widetilde{h}(x,\omega)$ для всех $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, после чего $h(x,t)$ восстанавливается с помощью обратного преобразования Фурье. В качестве примеров укажем ядра, участвующие в равенствах (2.2), (2.3) ниже. Согласно этим равенствам, условие (1.8) для указанных ядер также выполняется.

Средством исследования поставленной задачи нам послужат уравнения и системы типа М.М. Лаврентьева, получаемые низкочастотным предельным переходом из системы интегральных уравнений, эквивалентных (1.3), (1.6), (1.7). В применении к обратным задачам трехмерной упругости эта техника ранее практически не использовалась. Отметим лишь работу [19], посвященную задаче реконструкции аналитической относительно ω матричной функции $q(x,\omega)$ в (1.3) по данным обратного рассеяния, т.е. в случае $X = Z$ и $x = z$, где X — область в $\mathbb{R}^3$. Очевидно, здесь мы имеем непереопределенную в указанном выше смысле ОЗ. Как установлено в [19], такая постановка приводит к однозначно разрешимой обратной задаче. Новизна нашей постановки заключается в том, что в интересующем нас случае множества источников и детекторов могут не совпадать. Интерес к такой организации зондирования объясняется широко применяемыми на практике схемами томографического исследования неоднородностей, допускающими зондирование этих неоднородностей "на просвет". Кроме того, мы принимаем к рассмотрению и широкий класс неаналитических по ω функций $q(x,\omega)$, имеющих распространение на практике. В настоящее время имеется также значительный массив результатов по единственности решений коэффициентных обратных задач для систем уравнений упругости во временной постановке (см. [21], [22] и указанные там ссылки). Особенностью этих результатов является пространственная переопределенность рассматриваемых обратных задач (см., например, [22]). Пространственно непереопределенные формулировки задачи восстановления памяти для ядер специальных типов изучаются в [23].

План дальнейшего изложения следующий. Разд. 2 посвящен конкретизации постановки обратной задачи. Разд. 3, также носящий технический характер, посвящен обоснованию редукции обратной задачи к цепочке связанных систем линейных интегральных уравнений типа М.М. Лаврентьева. В разд. 4 при одном дополнительном условии устанавливается однозначная разрешимость полученных систем и тем самым дается частичное решение проблемы единственности в рассматриваемой обратной задаче. Попутно устанавливается однозначная разрешимость некоторого класса уравнений типа М.М. Лаврентьева, аналогичных (1.2).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Вначале уточним условия, налагаемые на компоненты матричной функции q в (1.3). Наши требования к функции $q(x,\omega)$ в силу (1.5) определяются видом типичных ядер памяти $h(x,t)$ в (1.4). Наряду с естественными условиями $h_j(x,t) \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ и $h_j(x,t) = 0$, $t < 0$, прикладные соображения диктуют требование $\lim\limits_{t\to\infty} h_j(x,t) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant 3$ (см. [24, §2]). Термодинамический анализ процесса деформирования доставляет и некоторые дополнительные ограничения на ядро (см. [24, §18]). Характерными примерами являются ядра Абеля $h(x,t) = h(x)t_+^{\alpha-1}$, $\alpha \in (0,1)$, и их конечные суммы

$$h(x,t) = \sum_{k=1}^{N} h^{(k)}(x)t_+^{\alpha_k-1},\ \alpha_k \in (0,1), 1 \leqslant k \leqslant N, t_+ = \max\{0,t\}, \tag{2.1}$$

имеющие неинтегрируемую особенность в бесконечности, а также экспоненциально убывающие модификации $h(x,t)e^{-\delta_0 t}$, $\delta_0 > 0$, таких ядер (см. [15]– [17], [25]). Интегрируемым поведением в бесконечности обладают и многие другие классы ядер: ядра Максвелла–Дебая (см. [24, §4], [25])

$$h(x,t) = \mathcal{H}(t)\sum_{k=1}^{N} h^{(k)}(x)e^{-\delta_k t},\ \delta_k > 0, 1 \leqslant k \leqslant N;\ \mathcal{H}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0, \end{cases}$$

ядра Ю.Н. Работнова и другие конструкции на основе функций Миттаг–Леффлера (см. [24, §4], [25], [26]). Для функций (2.1) имеем

$$\widetilde{h}(x,\omega) = \sum_{k=1}^{N} h^{(k)}(x)e^{i\alpha_k\pi/2}\Gamma(\alpha_k)\omega^{-\alpha_k}. \tag{2.2}$$

Через $\Gamma(\cdot)$ обозначается Γ-функция Эйлера. В случае экспоненциально убывающего при $t \to +\infty$ ядра h его преобразование Фурье $\widetilde{h}(x,\omega)$ является аналитическим по $\omega \in \mathbb{R}$. В частности,

$$\widetilde{h}(x,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} h^{(k)}(x)\omega^k,\ \ \omega \in \mathbb{C}, |\omega| < \omega_0, \tag{2.3}$$

с достаточно малым $\omega_0 > 0$. Из (2.2), (2.3) следует, что соответствующие ядра h удовлетворяют условиям Замечания 1. Имея в виду (1.5) и представления (2.2), (2.3), введем следующее условие на матрицу q в (1.3).

Условие 1. Имеет место равенство

$$q(x,\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{(k)}(x)\omega^{\beta_k},\ \ |\omega| < \omega_0, \tag{2.4}$$

$$\beta_0 = 0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots;\ \ \beta_{k+1} - \beta_k \leqslant 1, k = 0, 1, \ldots, \tag{2.5}$$

где $q^{(k)}(x)$ — диагональные матрицы с непрерывными в $\mathbb{R}^3$ компонентами, $q^{(k)}(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^3\backslash D$, $k = 1, 2, \ldots$, и ряд сходится равномерно.

В частном случае $\beta_k = k$, $k = 0, 1, \ldots$, равенство (2.4) означает аналитичность $q(x,\omega)$ по ω в окрестности точки $\omega = 0$, именно этот класс матричных функций q рассматривается в [19]. В то же время условие 1 охватывает и получаемые из (2.2) функции вида

$$q(x,\omega) = i\sigma(x) + \sum_{k=1}^{N} h^{(k)}(x)e^{i\alpha_k\pi/2}\Gamma(\alpha_k)\omega^{1-\alpha_k},$$

не являющиеся аналитическими в $\omega = 0$ в силу условия $\alpha_k \in (0,1)$, $1 \leqslant k \leqslant N$.

Уравнение (1.3) с условиями излучения (1.6), (1.7) стандартным образом сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений. Обозначим

$$\Delta^* u = (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div} u + \mu\Delta u,\ \ u = (u_1, u_2, u_3)$$

и запишем фундаментальное решение

$$\Phi^{(r)}(x,y;\omega) = \frac{e^{ik_r|x-y|}}{4\pi|x-y|},\ \ k_r = \frac{\omega}{c_r}$$

уравнения Гельмгольца

$$-(\Delta_x + k_r^2)u(x) = \delta(x-y)$$

с условием излучения Зоммерфельда

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0,\ \ \lim_{|x|\to\infty} |x|\Big(\frac{\partial u(x)}{\partial |x|} - ik_r u(x)\Big) = 0,\ \ r = 1, 2.$$

Тогда матричная функция $\Gamma(x,y;\omega) = (\Gamma_{kj}(x,y;\omega))_{k,j=1}^3$,

$$\Gamma_{kj}(x,y;\omega) == \frac{1}{c_2^2}\delta_{kj}\Phi^{(2)}(x,y;\omega) - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}(\Phi^{(1)}(x,y;\omega) - \Phi^{(2)}(x,y;\omega)), \tag{2.6}$$

$$1 \leqslant k, j \leqslant 3,$$

где δ_{kj} — символ Кронекера, является решением системы

$$-(\Delta^* + \omega^2)\Gamma(x,y;\omega) = \delta(x-y)E,\ \ E = (\delta_{kj})_{k,j=1}^3.$$

При этом строки матрицы $\Gamma(x,y;\omega)$ при каждом y удовлетворяют условиям излучения (1.6), (1.7) (см. [20, гл. II, §1; гл. III, §2]). Записанная система понимается как три построчных соотношения между матрицами в левой и правой частях. Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))$ — произвольная обычная локально интегрируемая или обобщенная вектор-функция с компактным носителем. Тогда решение системы

$$-(\Delta^* + \omega^2)u = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}^3, \tag{2.7}$$

удовлетворяющее условиям (1.6), (1.7), имеет вид

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x, y; \omega) f(y) dy. \tag{2.8}$$

Перепишем уравнение (1.3) в виде

$$-(\Delta^* + \omega^2)u = \omega q(x, \omega)u + a\delta(x - z), \ x \in \mathbb{R}^3.$$

С учетом (2.7), (2.8) для решения $u(x) = u(x, z; \omega)$ уравнения (1.3) получаем представление

$$u(x, z; \omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Gamma(x, y; \omega)(\omega q(y, \omega)u(y, z; \omega) + a\delta(y - z))dy, \ x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.9}$$

Обозначим через

$$u^{(i)}(x, z; \omega) = \Gamma(x, z; \omega)a \tag{2.10}$$

волновое поле источника в однородной ($q \equiv 0$) среде и представим полное поле u в виде $u(x, z; \omega) = u^{(s)}(x, z; \omega) + u^{(i)}(x, z; \omega)$, где $u^{(s)}$ есть рассеянное неоднородностью поле. Тогда уравнение (2.9) запишется следующим образом:

$$u^{(s)}(x, z; \omega) = \omega \int\limits_{D} \Gamma(x, y; \omega)q(y, \omega)(u^{(i)}(y, z; \omega) + u^{(s)}(y, z; \omega))dy, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.11}$$

Имея в виду разложение (2.4), ниже обратимся к следующей обратной задаче, эквивалентной ОЗ.

Обратная задача 1 (ОЗ1). Считая, что значения рассеянного поля $u^{(s)} = u^{(s)}(x, z; \omega)$, удовлетворяющего уравнению (2.11), известны для всех $x \in X$, $z \in Z$, $\omega \in (0, \overline{\omega}]$, $\overline{\omega} > 0$, матричная функция $q(x, \omega)$ удовлетворяет условию 1 с заданными показателями β_k, $k = 0, 1, \ldots$, определить матричные функции $q^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, для $x \in D$.

При анализе ОЗ1 будем использовать системы линейных интегральных уравнений, подобных (1.2).

3. СИСТЕМЫ ТИПА М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА

В этом разделе опишем построение цепочки уравнений типа М.М. Лаврентьева для решения ОЗ1. Обратимся к уравнению (2.11) и получим линейные интегральные уравнения относительно матриц $q^{(k)}$ в разложении (2.4).

Вначале заметим, что для любой непрерывной по y матричной функции $q(y, \omega)$ линейный интегральный оператор с ядром $\Gamma(x, y; \omega)q(y, \omega)$ в (2.11) непрерывен из $[C(\overline{D})]^3$ в $[C(\overline{D})]^3$. Это следует из теорем 2.2, 2.5 [20, гл. IV]. Кроме того, $u^{(i)}(\cdot, z; \omega) \in [C(\overline{D})]^3$ ввиду (2.6), (2.10) и условия $Z \cap \overline{D} = \emptyset$. Поэтому при $\omega \in \mathbb{R}$ с достаточно малым $|\omega|$ уравнение (2.11), записанное для $x \in D$, имеет единственное решение $u^{(s)}(\cdot, z; \omega) \in [C(\overline{D})]^3$, причем

$$|u^{(s)}(x, z; \omega)| = O(\omega), \ x \in D, z \in Z, \omega \in (0, \omega_0] \tag{3.1}$$

для достаточно малого $\omega_0 > 0$. Из (2.11) тогда следует, что компоненты вектор-функции $u^{(s)}(\cdot, z; \omega)$ принадлежат классу C^∞ вне $\overline{D}$.

Нам понадобятся обозначения

$$\Gamma_0(x, y) = \lim_{\omega \to 0} \Gamma(x, y; \omega), \ u_0^{(i)}(x, z) = \lim_{\omega \to 0} u^{(i)}(x, z; \omega) = \Gamma_0(x, z)a;$$
$$\alpha = \frac{1}{8\pi c_1^2}, \ \beta = \frac{1}{8\pi c_2^2}, \ \gamma = \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}. \tag{3.2}$$

Непосредственное вычисление на основе (2.6) дает

$$(\Gamma_0)_{kj}(x, y) = (\beta + \alpha)\frac{\delta_{kj}}{|x - y|} + (\beta - \alpha)\frac{(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{|x - y|^3}, \ 1 \leqslant k, j \leqslant 3 \tag{3.3}$$

(см. подробнее в [19]).

Вывод цепочки интегральных уравнений для матриц $q^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, проведем в несколько шагов. В построении будут участвовать также последовательности вспомогательных функций $\{v_k(x, z; \omega)\}$ с $x \in D$, $z \in Z$ и $\{F_k(x, z)\}$ с $x \in X$, $z \in Z$.

Шаг 0. Полагаем

$$v_0(x, z; \omega) \equiv 0, \ x \in D, z \in Z,$$

тогда согласно (2.5), (3.1)

$$|u^{(s)}(x, z; \omega) - v_0(x, z; \omega)| = O(\omega) = O(\omega^{1+\beta_0}), \\ x \in D, z \in Z, \omega \in (0, \omega_0]. \tag{3.4}$$

Деля обе части (2.11) на ω и переходя к пределу при $\omega \to 0$, с учетом (2.4), (3.4) получаем

$$\int\limits_D \Gamma_0(x, y) q^{(0)}(y) u_0^{(i)}(y, z) dy = F_0(x, z), \ x \in X, z \in Z, \tag{3.5}$$

где

$$F_0(x, z) = \lim_{\omega \to 0} \omega^{-1} u^{(s)}(x, z; \omega), \ x \in X, z \in Z. \tag{3.6}$$

Ясно, что значения $F_0(x, z)$ полностью определяются данными ОЗ1. В завершение шага 0 положим

$$v_1(x, z; \omega) = \omega \int\limits_D \Gamma(x, y; \omega) q^{(0)}(y)(u^{(i)}(y, z; \omega) + v_0(y, z; \omega)) dy, \ x \in D. \tag{3.7}$$

Функция $v_1(x, z; \omega)$ однозначно определяется заданием матрицы $q^{(0)}(y)$, которая, в свою очередь, может быть определена из уравнения (3.5). Из (2.11), (3.7) следует, что при $x \in D$, $z \in Z$ справедливо равенство

$$u^{(s)}(x, z; \omega) - v_1(x, z; \omega) =$$

$$= \omega \int\limits_D \Gamma(x, y; \omega) q(y, \omega)(u^{(i)}(y, z; \omega) + u^{(s)}(y, z; \omega)) dy -$$

$$-\omega \int\limits_D \Gamma(x, y; \omega) q^{(0)}(y)(u^{(i)}(y, z; \omega) + v_0(y, z; \omega)) dy =$$

$$= \omega \int\limits_D \Gamma(x, y; \omega)[(q(y, \omega) - q^{(0)}(y))(u^{(i)}(y, z; \omega) + u^{(s)}(y, z; \omega)) +$$

$$+ q^{(0)}(y)(u^{(s)}(y, z; \omega) - v_0(y, z; \omega))] dy.$$

Отсюда в силу (2.4), (2.5), (3.4) получаем

$$|u^{(s)}(x, z; \omega) - v_1(x, z; \omega)| = O(\omega^{1+\beta_1}), \ x \in D, z \in Z, \omega \in (0, \omega_0]. \tag{3.8}$$

Шаг 1. Используя (2.4), (2.11), (3.8), запишем равенство

$$u^{(s)}(x, z; \omega) = \omega \int\limits_D \Gamma(x, y; \omega)(q^{(0)}(y) + q^{(1)}(y)\omega^{\beta_1} + O(\omega^{\beta_2})) \times \\ \times (u^{(i)}(y, z; \omega) + v_1(y, z; \omega) + O(\omega^{1+\beta_1})) dy. \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.9) следует

$$\int\limits_D \Gamma_0(x, y) q^{(1)}(y) u_0^{(i)}(y, z) dy = F_1(x, z), \ x \in X, z \in Z;$$

$$F_1(x, z) = \lim_{\omega \to 0} \omega^{-(1+\beta_1)} \Big[u^{(s)}(x, z; \omega) -$$

$$-\omega \int\limits_D \Gamma(x, y; \omega) q^{(0)}(y)(u^{(i)}(y, z; \omega) + v_1(y, z; \omega)) dy \Big], \ x \in X, z \in Z.$$

Здесь значения $F_1(x, z)$ полностью определяются данными ОЗ1 и матричной функцией $q^{(0)}(y)$. Для $x \in D$ положим

$$v_2(x, z; \omega) = \omega \int\limits_D \Gamma(x, y; \omega)(q^{(0)}(y) + q^{(1)}(y)\omega^{\beta_1})(u^{(i)}(y, z; \omega) + v_1(y, z; \omega)) dy.$$

Тогда

$$u^{(s)}(x,z;\omega)-v_2(x,z;\omega)=$$

$$=\omega\int\limits_D\Gamma(x,y;\omega)[q(y,\omega)(u^{(i)}(y,z;\omega)+u^{(s)}(y,z;\omega))-$$

$$-(q^{(0)}(y)+q^{(1)}(y)\omega^{\beta_1})(u^{(i)}(y,z;\omega)+v_1(y,z;\omega))]dy=$$

$$=\omega\int\limits_D\Gamma(x,y;\omega)[(q(y,\omega)-q^{(0)}(y)-q^{(1)}(y)\omega^{\beta_1})(u^{(i)}(y,z;\omega)+u^{(s)}(y,z;\omega))+$$

$$+(q^{(0)}(y)+q^{(1)}(y)\omega^{\beta_1})(u^{(s)}(y,z;\omega)-v_1(y,z;\omega))]dy.$$

Поэтому на основании (2.4), (2.5), (3.8) выполняется

$$|u^{(s)}(x,z;\omega)-v_2(x,z;\omega)|=O(\omega^{1+\beta_2}),\;\; x\in D, z\in Z, \omega\in(0,\omega_0].$$

Продолжая аналогично, перед шагом m имеем функцию

$$v_m(x,z;\omega)=\omega\int\limits_D\Gamma(x,y;\omega)\Big(\sum_{k=0}^{m-1}q^{(k)}(y)\omega^{\beta_k}\Big)(u^{(i)}(y,z;\omega)+v_{m-1}(y,z;\omega))dy,$$

такую что

$$|u^{(s)}(x,z;\omega)-v_m(x,z;\omega)|=O(\omega^{1+\beta_m}),\;\; x\in D, z\in Z, \omega\in(0,\omega_0]. \tag{3.10}$$

Шаг m. Используя (2.4), (2.11), (3.10), запишем равенство

$$u^{(s)}(x,z;\omega)=\omega\int\limits_D\Gamma(x,y;\omega)\Big(\sum_{k=0}^{m-1}q^{(k)}(y)\omega^{\beta_k}+q^{(m)}(y)\omega^{\beta_m}+O(\omega^{\beta_{m+1}})\Big)\times \tag{3.11}$$

$$\times(u^{(i)}(y,z;\omega)+v_m(y,z;\omega)+O(\omega^{1+\beta_m}))dy.$$

Из (3.11) получаем

$$\int\limits_D\Gamma_0(x,y)q^{(m)}(y)u_0^{(i)}(y,z)dy=F_m(x,z),\;\; x\in X, z\in Z; \tag{3.12}$$

$$F_m(x,z)=\lim_{\omega\to 0}\omega^{-(1+\beta_m)}\Big[u^{(s)}(x,z;\omega)-$$

$$-\omega\int\limits_D\Gamma(x,y;\omega)\Big(\sum_{k=0}^{m-1}q^{k}(y)\omega^{\beta_k}\Big)(u^{(i)}(y,z;\omega)+v_m(y,z;\omega))dy\Big],$$

$$x\in X, z\in Z.$$

Для перехода к следующему шагу при $x\in D$ определяем функцию

$$v_{m+1}(x,z;\omega)=\omega\int\limits_D\Gamma(x,y;\omega)\Big(\sum_{k=0}^{m}q^{(k)}(y)\omega^{\beta_k}\Big)(u^{(i)}(y,z;\omega)+v_m(y,z;\omega))dy,$$

для которой, как и выше, устанавливается оценка

$$|u^{(s)}(x,z;\omega)-v_{m+1}(x,z;\omega)|=O(\omega^{1+\beta_{m+1}}),\quad x\in D, z\in Z, \omega\in(0,\omega_0].$$

Подведем итог проведенным рассуждениям.

Теорема 2. *Матричные функции $q^{(k)}(x)$, $k=0,1,\ldots$, в разложении (2.4) удовлетворяют цепочке систем линейных интегральных уравнений (3.12) с $m=0,1,\ldots$. При $m=0$ правая часть в уравнении (3.12) определяется данными ОЗ1, а при $m\geqslant 1$ — данными ОЗ1 и матричными функциями $q^{(k)}(x)$, $0\leqslant k\leqslant m-1$.*

Системы (3.12) с учетом способа их вывода естественно назвать системами типа М.М. Лаврентьева. Из теоремы 2 следует, что если каждое уравнение (3.12) имеет не более одного решения, то все матричные функции $q^{(k)}(x)$ последовательно определяются из этих уравнений, что и дает решение ОЗ1. Важно, что уравнения (3.12) отличаются лишь своими правыми частями. Поэтому вопрос о единственности их решений сводится к установлению того, что однородная система интегральных уравнений

$$\int\limits_D \Gamma_0(x,y)q(y)u_0^{(i)}(y,z)dy = 0,\ x\in X, z\in Z, \tag{3.13}$$

имеет в классе диагональных матриц $q(y)$ с непрерывными элементами лишь тривиальное решение $q\equiv 0$. В следующем разделе обратимся к анализу системы (3.13).

4. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В дальнейшем для определенности примем $a=(1,0,0)$.

Согласно (3.2) и (3.3), в этом случае

$$u_0^{(i)}(y,z) = (\eta_1(y,z), \eta_2(y,z), \eta_3(y,z)),\ y\in D, z\in Z, \tag{4.1}$$

где

$$\begin{gathered}
\eta_1(y,z) = (\beta-\alpha)\Big(\frac{\gamma}{|y-z|} + \frac{(y_1-z_1)^2}{|y-z|^3}\Big),\\
\eta_2(y,z) = (\beta-\alpha)\frac{(y_2-z_2)(y_1-z_1)}{|y-z|^3},\\
\eta_3(y,z) = (\beta-\alpha)\frac{(y_3-z_3)(y_1-z_1)}{|y-z|^3}.
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Обозначим

$$g_k(y,z) = \eta_k(y,z)q_k(y),\ 1\leqslant k\leqslant 3. \tag{4.3}$$

Используя (4.1)–(4.3), представим систему (3.13) в виде

$$\begin{gathered}
\int\limits_D \Big[\Big(\frac{\gamma}{|x-y|} + \frac{(x_1-y_1)^2}{|x-y|^3}\Big)g_1 + \frac{(x_1-y_1)(x_2-y_2)}{|x-y|^3}g_2 + \frac{(x_1-y_1)(x_3-y_3)}{|x-y|^3}g_3\Big]dy = 0,\\
\int\limits_D \Big[\frac{(x_2-y_2)(x_1-y_1)}{|x-y|^3}g_1 + \Big(\frac{\gamma}{|x-y|} + \frac{(x_2-y_2)^2}{|x-y|^3}\Big)g_2 + \frac{(x_2-y_2)(x_3-y_3)}{|x-y|^3}g_3\Big]dy = 0,\\
\int\limits_D \Big[\frac{(x_3-y_3)(x_1-y_1)}{|x-y|^3}g_1 + \frac{(x_3-y_3)(x_2-y_2)}{|x-y|^3}g_2 + \Big(\frac{\gamma}{|x-y|} + \frac{(x_3-y_3)^2}{|x-y|^3}\Big)g_3\Big]dy = 0;\\
x\in X,\ z\in Z.
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Необходимо установить, что следствием (4.2)–(4.4) является равенство $q_1(y)=q_2(y)=q_3(y)=0$, $y\in D$. Ниже будет дано частичное решение этой задачи. Прежде всего уточним конструкцию множеств детекторов и источников X и Z.

Условие 2. 1) Множество $X=S_1\cup S_2$, где S_1 — сфера, S_2 — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, $S_2\backslash S_1$ плотно в S_2, и замкнутые области, ограниченные поверхностями S_1, S_2, не пересекаются с $\overline{D}$.

2) Множество Z есть открытый интервал на прямой

$$\mathcal{L} = \{x\in\mathbb{R}^3 : x_2 = x_3 = 0\}$$

и при этом $\mathcal{L}\cap\overline{D}=\emptyset$.

Такой выбор X, Z приводит к пространственно непереопределенным постановкам ОЗ, ОЗ1, поскольку $\dim(X)+\dim(Z)=3$.

Лемма 1. *Пусть выполняется условие* 2 *и* (4.4). *Тогда равенства* (4.4) *имеют место для всех точек* $x\in\mathbb{R}^3\backslash\overline{D}$ *и* $z\in\mathcal{L}$.

Доказательство. Обозначим через $V_k(x,z)$ функцию, определенную при $x\in\mathbb{R}^3\backslash\overline{D}$, $z\in\mathcal{L}$ выражением в левой части k-го равенства в (4.4) с учетом обозначений (4.2), (4.3), $1\leqslant k\leqslant 3$. Нетрудно видеть, что эти функции вещественно аналитичны по x и по z вне $\overline{D}$. В частности, аналитичны сужения функций $V_k(x,\cdot)$ на прямую $\mathcal{L}$.

Поскольку при каждом $x \in X$ эти сужения обращаются в нуль на открытом подмножестве в $\mathcal{L}$, мы получаем $V_k(x,z) = 0$ для всех $x \in X$, $z \in \mathcal{L}$, $1 \leqslant k \leqslant 3$ (см. [27, гл. I,§1]). Остается показать, что эти равенства имеют место не только для точек $x \in X$, но и для любых $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}$.

Определим функции

$$\varphi_{kj}(x) = \frac{(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{|x-y|^3},\ x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{D}, y \in D, 1 \leqslant k, j \leqslant 3.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big) = -\frac{x_j - y_j}{|x-y|^3},\ 1 \leqslant j \leqslant 3, \tag{4.5}$$

мы имеем

$$\varphi_{kj}(x,y) = -(x_k - y_k)\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big).$$

Вычисляя $\Delta_x \varphi_{kj}(x,y)$, с использованием формулы

$$\Delta(uv) = u\Delta v + 2(\nabla u, \nabla v) + v\Delta u$$

и тождества

$$\Delta_x\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big) = 0,\ x \neq y, \tag{4.6}$$

получаем

$$\Delta_x \varphi_{kj}(x,y) = -2\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\Big(\frac{1}{|x-y|}\Big). \tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) следует

$$\Delta_x^2 \varphi_{kj}(x,y) = 0,\ x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{D}, y \in D, 1 \leqslant k, j \leqslant 3. \tag{4.8}$$

Слагаемые под знаками интегралов в (4.4) зависят от x посредством множителей $\gamma|x-y|^{-1}$, либо $\varphi_{kj}(x,y)$, $1 \leqslant k, j \leqslant 3$. Поэтому из (4.6), (4.8) следует

$$\Delta_x^2 V_k(x,z) = 0,\ x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{D}.$$

Тем самым $V_k(\cdot, z)$, $1 \leqslant k \leqslant 3$, — бигармонические вне $\overline{D}$ функции, обращающиеся в нуль на X. Часть 1) условия 2 и теорема единственности для полигармонических функций (см. [28], [29]) дают

$$V_k(x,z) = 0,\ x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{D}, z \in \mathcal{L}, 1 \leqslant k \leqslant 3.$$

Лемма доказана.

Заметим далее, что

$$\frac{(x_j - y_j)^2}{|x-y|^3} = \frac{1}{|x-y|} - \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{x_j - y_j}{|x-y|}\Big),\ 1 \leqslant j \leqslant 3. \tag{4.9}$$

С использованием (4.9) перепишем первое из уравнений (4.4) в виде

$$\int\limits_D \Big[\Big(\frac{\gamma+1}{|x-y|} - \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{x_1 - y_1}{|x-y|}\Big)\Big)g_1 - \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{x_2 - y_2}{|x-y|}\Big)g_2 - \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{x_3 - y_3}{|x-y|}\Big)g_3\Big]dy = 0.$$

Следовательно,

$$(\gamma+1)\int\limits_D \frac{g_1 dy}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_D \Big(\frac{x_1 - y_1}{|x-y|}g_1 + \frac{x_2 - y_2}{|x-y|}g_2 + \frac{x_3 - y_3}{|x-y|}g_3\Big)dy. \tag{4.10}$$

Аналогично второе и третье уравнения в (4.4) дают

$$(\gamma+1)\int\limits_D \frac{g_2 dy}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_D \Big(\frac{x_1 - y_1}{|x-y|}g_1 + \frac{x_2 - y_2}{|x-y|}g_2 + \frac{x_3 - y_3}{|x-y|}g_3\Big)dy, \tag{4.11}$$

$$(\gamma+1)\int\limits_D \frac{g_3 dy}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial x_3}\int\limits_D \Big(\frac{x_1 - y_1}{|x-y|}g_1 + \frac{x_2 - y_2}{|x-y|}g_2 + \frac{x_3 - y_3}{|x-y|}g_3\Big)dy. \tag{4.12}$$

Равенства (4.10)–(4.12) имеют место для всех точек $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}$. Мы видим, что

$$\Big(\int\limits_D \frac{g_1 dy}{|x-y|}, \int\limits_D \frac{g_2 dy}{|x-y|}, \int\limits_D \frac{g_3 dy}{|x-y|}\Big) = \nabla_x W(x),$$

где

$$W(x) = \frac{1}{\gamma+1}\int\limits_D \Big(\frac{x_1-y_1}{|x-y|}g_1 + \frac{x_2-y_2}{|x-y|}g_2 + \frac{x_3-y_3}{|x-y|}g_3\Big)dy,\ \ x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}.$$

Следовательно, при $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}$, $z \in \mathcal{L}$ справедливы равенства

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_D \frac{g_1 dy}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_D \frac{g_2 dy}{|x-y|}, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\int\limits_D \frac{g_1 dy}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial x_1}\int\limits_D \frac{g_3 dy}{|x-y|}, \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\int\limits_D \frac{g_2 dy}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial x_2}\int\limits_D \frac{g_3 dy}{|x-y|}. \tag{4.15}$$

Используем (4.13)–(4.15) для получения следующего промежуточного результата.

Теорема 3. *Пусть выполняются условие* 2 *и равенства* (4.4).

1) *Предположим, что* $q_3 \equiv 0$ $(q_2 \equiv 0)$*, тогда* $q_2 \equiv 0$ $(q_3 \equiv 0)$.

2) *Пусть* $q_1 \equiv 0$. *Тогда* $q_2 = q_3 \equiv 0$.

Доказательство. 1) Пусть $q_3 \equiv 0$. Покажем, что тогда $q_2 \equiv 0$. Из (4.2), (4.3), (4.15) следует, что при $x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}$, $z \in \mathcal{L}$ выполняется

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\int\limits_D \frac{(y_2-z_2)(y_1-z_1)q_2(y)dy}{|x-y||y-z|^3} = 0. \tag{4.16}$$

Следовательно, функция под знаком производной в (4.16) не зависит от x_3 вне D. Поскольку подынтегральное выражение в (4.16) стремится к нулю при $x_3 \to \infty$, мы с учетом определения $\mathcal{L}$ получаем

$$\int\limits_D \frac{(y_1-z_1)y_2 q_2(y)dy}{|x-y||y-z|^3} = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}, z \in \mathcal{L}.$$

Согласно (4.5), при указанных x, z выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\int\limits_D \frac{y_2 q_2(y)dy}{|x-y||y-z|} = 0. \tag{4.17}$$

Таким образом, функция $V(z)$, стоящая под знаком производной в (4.17), постоянна на прямой $\mathcal{L}$. В то же время для этой функции мы, очевидно, имеем

$$\lim_{z \in \mathcal{L}, z \to \infty} V(z) = \lim_{z_1 \to \infty} V(z_1, 0, 0) = 0.$$

Следовательно, $V \equiv 0$ на $\mathcal{L}$ и потому

$$\int\limits_D \frac{y_2 q_2(y)dy}{|x-y||y-z|} = 0.$$

Ссылка на теорему 1 завершает доказательство утверждения. Вторая часть п. 1) доказывается аналогично с заменой q_2 на q_3. Доказательство п. 2) проводится по той же схеме с заменой в начале рассуждений равенства (4.15) на (4.13) и (4.14). Теорема доказана.

Пусть теперь априори известно, что $q_2 \equiv 0$, либо $q_3 \equiv 0$. Тогда, используя (4.2), (4.3), а также (4.13) или (4.14), для функции q_1, как и выше, получаем уравнение

$$\int\limits_D \Big(\frac{\gamma}{|y-z|} + \frac{(z_1-y_1)^2}{|y-z|^3}\Big)\frac{q_1(y)dy}{|x-y|} = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^3 \backslash \overline{D}, z \in \mathcal{L}. \tag{4.18}$$

Уравнение типа М.М. Лаврентьева (4.18) напоминает исходное уравнение (1.2) и исследуется по схеме, развитой ранее в [12]. В следующей теореме мы несколько обобщим указанную схему с целью включения в нее наряду с (4.18) и некоторых других аналогичных уравнений.

Обозначим $y' = (y_2, y_3) \in \mathbb{R}^2$. Пусть непрерывная функция $\Lambda = \Lambda(y_1, |y'|)$ определена при $y \neq 0$ и $\lim\limits_{y\to\infty} \Lambda(y) = 0$. Рассмотрим однородное интегральное уравнение

$$\int\limits_D \Lambda(z_1 - y_1, |y'|)\frac{\eta(y)dy}{|x-y|} = 0,\ x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{D}, z \in \mathcal{L}, \tag{4.19}$$

относительно функции $\eta \in L_2(D)$.

Теорема 4. *Предположим, что преобразование Фурье* $\widetilde{\Lambda}(\mu, |y'|)$ *функции* $\Lambda(y_1, |y'|)$ *по переменной* y_1 *имеет вид*

$$\widetilde{\Lambda}(\mu, |y'|) = M(\mu|y'|),$$

функция $M(\zeta)$ *аналитична в* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Тогда единственным решением уравнения* (4.19) *является функция* $\eta = 0$ *почти всюду в* D.

В теореме 4 функция M может быть многозначной, в этом случае рассматривается ее однозначная ветвь в $\mathbb{C}$ с подходящим разрезом из $\zeta = 0$ в $\zeta = \infty$, получаемая аналитическим продолжением M с положительной вещественной полуоси $\mathbb{R}_+$. Нам будет удобно считать этот разрез идущим вдоль положительной мнимой полуоси $i\mathbb{R}_+$.

Следствие 1. Единственным непрерывным решением уравнения (4.18) является функция $q_1 \equiv 0$.

Для доказательства следствия 1 заметим, что в (4.18)

$$\Lambda(z_1 - y_1, |y'|) = \frac{\gamma + 1}{((z_1-y_1)^2 + |y'|^2)^{1/2}} - \frac{|y'|^2}{((z_1-y_1)^2 + |y'|^2)^{3/2}}.$$

Вычисляя преобразование Фурье функции

$$\Lambda(y_1, |y'|) = \frac{\gamma+1}{(y_1^2 + |y'|^2)^{1/2}} - \frac{|y'|^2}{(y_1^2 + |y'|^2)^{3/2}}$$

по переменной y_1 (см. [30, с. 167]), получаем

$$\widetilde{\Lambda}(\mu, |y'|) = M_0(\mu|y'|),\ M_0(\zeta) = 2(\gamma+1)K_0(\zeta) - 2\zeta K_1(\zeta).$$

Здесь $K_0(\zeta)$, $K_1(\zeta)$ — модифицированные функции Бесселя, аналитические в $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ и имеющие $\zeta = 0$ точкой ветвления логарифмического типа. Их однозначные ветви фиксируются значениями при вещественных $\zeta > 0$ и разрезом комплексной плоскости вдоль полуоси $i\mathbb{R}_+$.

Замечание 2. Вычисляя обратное преобразование Фурье от $M(\mu|y'|)$, нетрудно показать, что функция Λ в теореме 4 необходимо имеет вид

$$\widetilde{\Lambda}(y_1, |y'|) = \frac{1}{|y'|}\Psi\Big(\frac{y_1}{|y'|}\Big),\ \Psi(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau t}M(\tau)d\tau.$$

Для Λ из уравнения (4.18) мы имеем $\Psi(t) = (\gamma+1)(t^2+1)^{-1/2} - (t^2+1)^{-3/2}$.

Доказательство Теоремы 4. Доказательство следует схеме рассуждений из [12]. Поскольку семейство $\{|x - y|^{-1}\}_{x\in\mathbb{R}^3\backslash\overline{D}}$ плотно в смысле $L_2(D)$ в классе всех функций, гармонических в D, достаточно убедится, что если равенство

$$\int\limits_D \Lambda(z_1 - y_1, |y'|)h(y)\eta(y)dy = 0 \tag{4.20}$$

с $\eta \in L_2(D)$ выполняется для всех $z_1 \in \mathbb{R}$ и для всех функций $h \in C^2(D)$, таких что $\Delta h(y) = 0$, $y \in D$, то $\eta = 0$ п.в. в D. Положим в (4.20)

$$h(y) = e^{-i(\lambda', y') + |\lambda'|y_1},\ \lambda' \in \mathbb{R}^2,$$

тогда будем иметь

$$\int\limits_D \Lambda(z_1 - y_1, |y'|)e^{-i(\lambda', y') + |\lambda'|y_1}\eta(y)dy = 0,\ z_1 \in \mathbb{R},\ \lambda' \in \mathbb{R}^2. \tag{4.21}$$

Применяя к (4.21) преобразование Фурье по переменной z_1, с учетом равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu z_1}\Lambda(z_1-y_1,|y'|)dz_1 = e^{-i\mu y_1}M(\mu|y'|),\ \ \mu\neq 0,$$

получаем

$$\int_D \eta(y_1,y')e^{-i(\lambda',y')+(|\lambda'|-i\mu)y_1}M(\mu|y'|)dy_1dy' = 0,\quad \lambda'\in\mathbb{R}^2,\ \mu\in\mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{4.22}$$

При каждом $\lambda' \in \mathbb{R}^2$ функция в левой части (4.22) аналитична по $\mu \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Поэтому равенство (4.22) по аналитичности продолжается на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль луча $i\mathbb{R}_+$. Полагая $\mu = p-|\lambda'|i$, $p\neq 0$ в (4.22), получаем

$$\int_D \eta(y_1,y')e^{-ipy_1}e^{-i(\lambda',y')}M((p-|\lambda'|i)|y'|)dy_1dy' = 0,\quad \lambda'\in\mathbb{R}^2,\quad p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{4.23}$$

Нетрудно видеть, что $\zeta = (p-|\lambda'|i)|y'| \in \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_+$ при всех $p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\lambda', y'\in\mathbb{R}^2$.

Обозначим $Y_{0,1}(\theta)=1$, $Y_{k,1}(\theta)=\cos k\theta$, $Y_{k,2}(\theta)=\sin k\theta$, $k=1,2,\ldots;\ \theta\in[0,2\pi)$. Зафиксируем финитную на $\mathbb{R}_+$ функцию $\chi=\chi(r)$, $r\geqslant 0$, и функцию $Y_{k,l}$ для произвольных $k\geqslant 0$ и $l\in\{1,2\}$. Умножим обе части равенства (4.23) на $\chi(|\lambda'|)Y_{k,l}(\theta)$, где $\theta=\theta(\lambda')$, $\lambda'/|\lambda'| = (\cos\theta,\sin\theta)$, и проинтегрируем результат по $\mathbb{R}^2=\{\lambda'\}$, считая функцию η продолженной нулем вне D. Мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\eta(y_1,y')e^{-ipy_1}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i(\lambda',y')}M((p-|\lambda'|i)|y'|)\chi(|\lambda'|)Y_{k,l}(\theta)d\lambda'\Big)dy'dy_1 = 0. \tag{4.24}$$

Согласно теореме 3.10 в [31, гл. IV],

$$\int_{\mathbb{R}^2}e^{-i(\lambda',y')}M((p-|\lambda'|i)|y'|)\chi(|\lambda'|)Y_{k,l}(\theta)d\lambda' = 2\pi(-i)^kY_{k,l}(\varphi)\int_0^{\infty}J_k(r\rho)M((p-ir)\rho)\chi(r)rdr, \tag{4.25}$$

где $\varphi=\varphi(y')$, $y'/|y'| = (\cos\varphi,\sin\varphi)$, $\rho=|y'|$, J_k есть функция Бесселя порядка k. Выбирая в (4.24) в качестве χ элемент последовательности финитных функций $\{\chi_n(r)\}$, сходящейся к $\delta(r-t)$, $t>0$, и переходя к пределу при $n\to\infty$, из (4.24), (4.25) получаем

$$\begin{gathered}\int_0^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_0^{2\pi}\eta(y_1,y'(\rho,\varphi))Y_{k,l}(\varphi)d\varphi\Big)e^{-ipy_1}dy_1\Big)J_k(t\rho)M((p-it)\rho)d\rho = 0,\\ t\geqslant 0,\ \ p\in\mathbb{R}\backslash\{0\}, k\geqslant 0, l\in\{1,2\}.\end{gathered} \tag{4.26}$$

Здесь $y'(\rho,\varphi) = (\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$.

Обозначим

$$G_{k,l}(\rho,y_1) = \int_0^{2\pi}\eta(y_1,y'(\rho,\varphi))Y_{k,l}(\varphi)d\varphi,\ \ f_{p,k,l}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty}G_{k,l}(\rho,y_1)e^{-ipy_1}dy_1.$$

Из (4.26) следует равенство

$$\int_0^{\infty}J_k(t\rho)M((p-it)\rho)f_{p,k,l}(\rho)d\rho = 0,\quad t\geqslant 0,\quad p\in\mathbb{R}\backslash\{0\},\quad k\geqslant 0, l\in\{1,2\}. \tag{4.27}$$

Имеем

$$f_{p,k,l}(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-ip)^j}{j!}\int_{-\infty}^{\infty}G_{k,l}(\rho,y_1)y_1^jdy_1. \tag{4.28}$$

Для фиксированных номеров k, l возможны два случая.

1) При всех $j = 0, 1, \ldots$ справедливо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^j dy_1 = 0 \tag{4.29}$$

для п.в. $\rho \geqslant 0$. Таким образом, $f_{p,k,l}(\rho) = 0$ п.в. для всех $p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2) Найдется номер $m \geqslant 0$ такой, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^j dy_1 = 0$ для п.в. $\rho \geqslant 0$ и всех $0 \leqslant j < m$, но функция $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^m dy_1$ отлична от нуля на множестве положительной меры.

В случае 1) из (4.29) и теоремы Мюнца (см. [32, с. 54]) следует, что для п.в. $\rho \geqslant 0$, $y_1 \in \mathbb{R}$ выполняется

$$G_{k,l}(\rho, y_1) \equiv \int\limits_0^{2\pi} \eta(y_1, y'(\rho, \varphi)) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi = 0. \tag{4.30}$$

Рассмотрим подробнее случай 2). В этом случае, согласно (4.28), при $p \to 0+$ справедливо

$$f_{p,k,l}(\rho) = \frac{(-ip)^m}{m!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^m dy_1 + O(p^{m+1}). \tag{4.31}$$

Поэтому при малых $p > 0$ имеет место

$$\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = \frac{p^m}{m!} \Big\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, y_1) y_1^m dy_1 \Big\|_{L_2(0,\infty)} + O(p^{m+1}). \tag{4.32}$$

Из (4.32) следует, что если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то при $0 < p \leqslant \varepsilon$ выполняется $\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} > 0$.

Положим

$$f^{(0)}_{p,k,l}(\rho) = \frac{f_{p,k,l}(\rho)}{\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)}}, \ \rho \geqslant 0, \ 0 < p \leqslant \varepsilon.$$

Используя (4.31) и (4.32), получаем

$$f^{(0)}_{p,k,l}(\rho) = \Big(\Big\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, y_1) y_1^m dy_1 \Big\|_{L_2(0,\infty)} + O(p) \Big)^{-1} \Big((-i)^m \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^m dy_1 + O(p) \Big).$$

Таким образом,

$$\lim_{p \to 0} \|f^{(0)}_{p,k,l} - g^{(0)}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 0, \tag{4.33}$$

где

$$g^{(0)}_{k,l}(\rho) = (-i)^m \Big\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, y_1) y_1^m dy_1 \Big\|^{-1}_{L_2(0,\infty)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, y_1) y_1^m dy_1.$$

Ясно, что

$$\|g^{(0)}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 1. \tag{4.34}$$

Согласно (4.27), для выбранных номеров k, l выполняется

$$\int\limits_0^{\infty} J_k(t\rho) M((p - it)\rho) f^{(0)}_{p,k,l}(\rho) d\rho = 0, \ t \geqslant 0, \ p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{4.35}$$

Переходя в (4.35) к пределу при $p \to 0+$, с учетом (4.33) получаем

$$\int\limits_0^{\infty} J_k(t\rho) M(-it\rho) g^{(0)}_{k,l}(\rho) d\rho = 0, \ t > 0. \tag{4.36}$$

Отсюда следует, что $g_{k,l}^{(0)} = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$. Действительно, умножая обе части (4.36) на t^{-s}, $s > 0$, и интегрируя, находим

$$\int_0^\infty g_{k,l}^{(0)}(\rho)\Big(\int_0^\infty t^{-s}J_k(t\rho)M(-it\rho)dt\Big)d\rho = \int_0^\infty \rho^{s-1}g_{k,l}^{(0)}(\rho)d\rho\cdot\int_0^\infty \tau^{-s}J_k(\tau)M(-i\tau)d\tau = 0.$$

Это дает

$$\int_0^\infty \rho^{s-1}g_{k,l}^{(0)}(\rho)d\rho = 0,\ \ s > 0. \tag{4.37}$$

Из (4.37) и теоремы об обращении преобразования Меллина (см. [30, с. 73]) следует $g_{k,l}^{(0)} = 0$ п.в. на $\mathbb{R}$. Полученное равенство противоречит (4.34). Тем самым показано, что случай 2) невозможен ни при каких k, l.

Таким образом, реализуется случай 1), поэтому в силу (4.30) имеем

$$\int_0^{2\pi} \eta(y_1, y'(\rho,\varphi))Y_{k,l}(\varphi)d\varphi = 0$$

для всех $k \geqslant 0$, $l \in \{1,2\}$ и для п.в. $\rho \geqslant 0$, $y_1 \in \mathbb{R}$. Поскольку тригонометрическая система $\{Y_{k,l}(\varphi)\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(0,2\pi)$, отсюда следует, что $\eta(y_1, y'(\rho,\varphi)) = 0$ для п.в. $\rho \geqslant 0$, $y_1 \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Теорема доказана.

Объединяя теорему 3 и следствие 1, получаем следующий основной результат настоящей работы.

Теорема 5. *Пусть выполняется условие* 2. *Предположим, что в системе* (3.13) *одна из функций* q_j, $1 \leqslant j \leqslant 3$, *тождественно равна нулю. Тогда остальные две функции также нулевые.*

Если в теореме 5 условие равенства нулю заменить требованием определенной согласованности q_2 и q_3, то имеет место однозначная разрешимость (3.13).

Теорема 6. *Пусть выполняется условие* 2. *Предположим, что*

$$x_2q_2(x) = x_3q_3(x),\ \ x \in D. \tag{4.38}$$

Тогда $q_1 = q_2 = q_3 \equiv 0$ *в* D.

Доказательство. Из (4.13), (4.14), с учетом (4.2), (4.3) для $x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{D}$, $z \in \mathcal{L}$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\int_D \frac{g_1dy}{|x-y|} = (\beta-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_1}\int_D \frac{(y_2-z_2)(y_1-z_1)q_2(y)dy}{|x-y||y-z|^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\int_D \frac{g_1dy}{|x-y|} = (\beta-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_1}\int_D \frac{(y_3-z_3)(y_1-z_1)q_3(y)dy}{|x-y||y-z|^3}.$$

Отсюда и из (4.38) следует, что при указанных x, z выполняется

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\int_D \frac{g_1dy}{|x-y|} = \frac{\partial}{\partial x_3}\int_D \frac{g_1dy}{|x-y|}.$$

Поэтому для функции

$$\Theta(x) = \int_D \frac{g_1dy}{|x-y|} \tag{4.39}$$

имеет место

$$\frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial\Theta(x)}{\partial x_3},\ \ x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{D}.$$

Решая обычным образом последнее уравнение (см. [33, гл. 5,§2]), заключаем, что $\Theta(x) = \Xi(x_1, x_2 + x_3)$. Как видно из (4.39),

$$\lim_{\tau\to\infty}\Theta(x_1,\tau,t-\tau) = \Xi(x_1,t) = 0$$

для любых x_1, t, поэтому $\Xi \equiv 0$ вне $\overline{D}$. Из (4.39), (4.2), (4.3) теперь следует (4.18). Используя следствие 1 и теорему 5, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Теорема 5 утверждает, что если в каждой матрице $q^{(k)}(x)$ в ОЗ1 априори известен хотя бы один элемент $q_j^{(k)}(x)$, где j может зависеть от k, то вся последовательность $q^{(k)}(x)$ однозначно восстанавливается по данным ОЗ1. Элементы этой последовательности определяются из систем (3.12), каждая из которых имеет единственное решение. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* $1, 2$. *Предположим, что в ОЗ известна одна из компонент* $q_j(x, \omega)$ *матрицы* $q(x, \omega)$, $1 \leqslant j \leqslant 3$. *Тогда* $q(x, \omega)$ *однозначно реконструируется по данным ОЗ.*

В применении к уравнению (1.4) это означает, что в условиях замечания 1 все элементы матриц $\sigma(x)$, $h(x, t)$ однозначно реконструируются, если априори известны их элементы $\sigma_k(x)$ и $h_l(x, t)$ для некоторых $1 \leqslant k, l \leqslant 3$. С прикладной точки зрения условия теоремы 7 описывают зондирование анизотропной среды, свойства которой известны вдоль одного из координатных направлений. Утверждается, что данных зондирования в рамках рассматриваемой в работе схемы достаточно для реконструкции этих свойств вдоль двух других направлений координат. Согласно теореме 6, при выполнении условия

$$x_2\sigma_2(x) = x_3\sigma_3(x),\ \ x_2h_2(x, t) = x_3h_3(x, t), x \in D, t \geqslant 0, k \geqslant 1,$$

все элементы матриц $\sigma(x)$, $h(x, t)$ однозначно реконструируются по данным ОЗ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М.М.* Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. № 3. С. 520–521.
2. *Лаврентьев М.М.* Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. № 1. С. 32–35.
3. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
4. *Рамм А.Г.* Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.
5. *Бакушинский А.Б, Козлов А.И., Кокурин М.Ю.* Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 47. № 3. С. 1201–1209.
6. *Кокурин М.Ю., Паймеров С.К.* Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 1. С. 117–128.
7. *Klibanov M.V., Li J., Zhang W.* Linear Lavrent'ev integral equation for the numerical solution of a nonlinear coefficient inverse problem // SIAM J. Appl. Math. 2021. V. 81. № 5. P. 1954–1978.
8. *Козлов А.И., Кокурин М.Ю.* Об интегральных уравнениях типа М.М.Лаврентьева в коэффициентных обратных задачах для волновых уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 9. С. 1492–1507.
9. *Кокурин М.Ю., Ключев В.В.* Условия единственности и численная аппроксимация решения интегрального уравнения М.М. Лаврентьева // Сиб. журн. вычисл. матем. 2022. Т. 25. № 4. С. 435–451.
10. *Бакушинский А.Б., Леонов А.С.* Экономичный численный метод решения коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения в трехмерном пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 561–574.
11. *Бакушинский А.Б., Леонов А.С.* Численное решение трехмерной коэффициентной обратной задачи для волнового уравнения с интегральными данными в цилиндрической области // Сиб. журн. вычисл. матем. 2019. Т. 22. № 4. Р. 381–397.
12. *Кокурин М.Ю.* О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования // Матем. заметки. 2018. Т. 104. № 5. С. 708–716.
13. *Кокурин М.Ю.* Полнота асимметричных произведений решений эллиптического уравнения второго порядка и единственность решения обратной задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 255–264.
14. *Кокурин М.Ю.* Полнота асимметричных произведений гармонических функций и единственность решения уравнения М.М. Лаврентьева в обратных задачах волнового зондирования // Изв. РАН. Сер. Матем. 2022. Т. 86. № 6. С. 101–122.

15. *Локшин А.А.* Волновые уравнения с сингулярно запаздывающим временем // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. № 1. С. 43–46.

16. *Hanyga A., Seredynska M.* Some effects of the memory kernel singularity on wave propagation and inversion in poroelastic media – I. Forward problems // Geophys. J. Inter. 1999. V. 137. P. 319–335.

17. *Ribodetti A., Hanyga A.* Some effects of the memory kernel singularity on wave propagation and inversion in poroelastic media – II. Inversion // Geophys. J. Inter. 2004. V. 158. P. 426–442.

18. *Hanyga A.* Wave propagation in media with singular memory // Math. and Comput. Model. 2001. V. 34. P. 1399–1421.

19. *Бухгейм А.Л., Дятлов Г.В., Кардаков В.Б., Танцерев Е.В.* Единственность в одной обратной задаче для системы уравнений упругости // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45. № 4. С. 747–757.

20. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976.

21. *Яхно В.Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений уппугости. Новосибирск: Наука, 1990.

22. *Романов В.Г.* Об определении коэффициентов в уравнениях вязкоупругости // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55. № 3. С. 617–626.

23. *Durdiev D.K., Totieva Z.D.* Kernel determination problems in hyperbolic integro–differential equations. Singapore: Springer, 2023.

24. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.

25. *Ciambella J., Paolone A., Vidoli S.* Memory decay rates of viscoelastic solids: not too slow, but not too fast either // Rheologica Acta. 2011. V. 50. P. 661–674.

26. *Metzler R., Nonnenmacher T.F.* Fractional relaxation processes and fractional rheological models for the description of a class of viscoelastic materials // Inter. J. Plasticity. 2003. V. 19. P. 941–959.

27. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.

28. *Бицадзе А.В.* О полигармонических функциях // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 3. С. 521–525.

29. *Hayman W.K., Korenblum B.* Representation and uniqueness theorems for polyharmonic functions // J. d'Analyse Mathematique. 1993. V. 60. P. 113–133.

30. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.

31. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

32. *Ахиезер Н.И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.

33. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Лань, 2003.

EQUATIONS AND SYSTEMS OF THE M.M. LAVRENTIEV TYPE IN THE INVERSE PROBLEM OF MEMORY RECONSTRUCTION OF A VISCOELASTIC MEDIUM

M. Yu. Kokurin*

424001 Yoshkar-Ola, Lenin Square, 1, Mari State University, Russia
**e-mail: kokurinm@yandex.ru*

Received: 05.03.2024
Revised: 05.03.2024
Accepted: 01.07.2024

Abstract. A nonlinear coefficient inverse problem is considered related to the partial reconstruction of the memory matrix of a viscoelastic medium based on the results of probing the medium by a family of wave fields excited by point sources. A spatially non-overdetermined formulation is investigated in which the manifolds of point sources and detectors do not coincide and have a total dimension equal to three. The requirements for these manifolds are established to ensure the unique solvability of the studied inverse problem. The result is achieved by reducing this problem to a chain of connected systems of M.M. Lavrentiev type linear integral equations.

Keywords: elasticity equations, viscoelastic medium, coefficient inverse problem, memory kernel, linear integral equation, biharmonic equation, uniqueness.