

ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И РАЗРУШЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ¹⁾

© 2024 г. Е. А. Овсянников^{1,2,3,*}

¹119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

²115409 Москва, Каширское ш., 31, НИЯУ “МИФИ”, Россия

³117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН им. Патриса Лумумбы, Россия

*e-mail: evg.bud@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.01.2024 г.

Переработанный вариант 28.06.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения соболевского типа из теории ионно-звуковых волн в плазме. Данная задача сводится к эквивалентному абстрактному интегральному уравнению. Методом сжимающих отображений доказывается локальная разрешимость данного уравнения. Далее используется “бутстрэп”-метод повышения гладкости решения. Наконец, используя метод пробных функций, при некотором достаточном условии получается результат о разрушении решения за конечное время и находится верхняя оценка на время существования решения. Библ. 10.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, локальная разрешимость, пробная функция, разрушение, оценка времени существования решения.

DOI: 10.31857/S0044466924100119, **EDN:** JZNBUS

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является логическим продолжением работ [1]–[6] по исследованию нелинейных уравнений ионно-звуковых волн в плазме, которые носят название уравнений соболевского типа. Стоит особенно отметить работу [4], где было рассмотрено уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \sum_{j=1}^3 \omega_j^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

а также работу [6], где для данного уравнения была доказана локальная разрешимость и разрушение классического решения $u(x, t) \in \mathbb{C}_b^{2+2}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$ задачи Коши с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x). \quad (1.2)$$

Как отмечалось в работе [4], в уравнении (1.1) мы имеем дело с уравнением из теории ионно-звуковых волн в плазме, если $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 > 0$, и с уравнением из теории дрейфовых волн в плазме, если $\omega_1 = \omega_2 = 0$ и $\omega_3 > 0$. Неизвестная функция $u(x, t)$ пропорциональна потенциалу $\phi(x, t)$ электрического поля в плазме. В настоящей статье мы рассмотрим только случай ионно-звуковых волн, поэтому уравнение (1.1) переписывается в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta u(x, t) - u(x, t)) + \omega^2 \Delta u(x, t) = \frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

где $\omega = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 > 0$, и под ω подразумевается плазменная частота электронов.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” и РНФ (грант №23-11-00056).

Пусть $\Omega := \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < b^2, 0 < a < b\}$ — сферический слой в заданной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$. В отличие от работы [6], мы рассмотрим начально-краевую задачу на множестве $\overline{\Omega} \times [0, T]$ для уравнения (1.3) с начальными условиями (1.2) и однородным условием Неймана на границе $\partial\Omega$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.4)$$

где n — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Однако в настоящей работе мы существенно упростим уравнение (1.3) и граничное условие (1.4), упростив при этом саму физическую модель. Отметим, что в монографии [7] была предложена модель сферически-симметричных ионно-звуковых волн, т.е. когда неизвестная функция $u(x, t)$ зависит лишь от времени t и расстояния $r = r_{Ox}$ от начала декартовой системы координат (точки O) до точки $x = (x_1, x_2, x_3)$. Для этой модели удобнее ввести сферическую систему координат (r, θ, φ) с центром в точке O . Тогда $u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t) = u(r, \theta, \varphi, t) = u(r, t)$, а также $\Delta u(r, t) = \Delta_r u(r, t)$, где

$$\Delta_r u(r, t) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right),$$

т.е. оператор Δ_r является радиальной частью оператора Лапласа.

С учетом упрощения физической модели начально-краевая задача в сферическом слое с условиями Неймана на границе имеет следующий вид (“1+1”-мерная задача):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\Delta_r u(r, t) - u(r, t)) + \omega^2 \Delta_r u(r, t) &= \frac{\partial^2 u^2(r, t)}{\partial t^2}, \quad (r, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ u(r, 0) &= u_0(r), \quad u_t(r, 0) = u_1(r), \quad r \in [a, b], \\ u_r(a, t) &= u_r(b, t) = 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $0 < a < b$, а оценка для конечного времени $0 < T < +\infty$ будет определена ниже.

Отметим, что классическое решение задачи (1.5) мы будем искать в классе $u(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$, поэтому необходимо потребовать согласование начального и граничного условий:

$$u_{0r}(a) = u_{0r}(b) = u_{1r}(a) = u_{1r}(b) = 0.$$

Также отметим, что физический смысл однородных условий Неймана на границе состоит в том, что напряженность электрического поля равна нулю на границе сферического слоя.

С опорой на методики исследований, предложенные, в основном, в работах [1] и [8], методом сжимающих отображений мы докажем локальную разрешимость задачи (1.5), а методом пробных функций при некотором достаточном условии докажем разрушение за конечное время классического решения этой задачи и найдем верхнюю оценку на время существования решения.

2. СИСТЕМА ОБОЗНАЧЕНИЙ

Пусть $a, b, T \in (0, +\infty)$, причем $a < b$.

Под функциональным пространством $\mathbb{C}(D)$ будем понимать стандартное линейное пространство непрерывных функций действительной переменной на множестве $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$.

Символом $\mathbb{C}^{(n)}[a, b]$, где $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначаем линейное пространство непрерывно дифференцируемых по $r \in [a, b]$ функций $f(r)$ до n -го порядка включительно (при $n = 0$ $\mathbb{C}^{(0)}[a, b] = \mathbb{C}[a, b]$), причем производные в граничных точках $r = a$ и $r = b$ понимаются в смысле односторонних. В работе мы используем стандартную норму

$$\|f(r)\|_{\mathbb{C}^{(n)}[a, b]} := \sum_{k=0}^n \sup_{r \in [a, b]} \left| \frac{d^k f(r)}{dr^k} \right|.$$

Под функциональным пространством $\mathbb{C}^{(m)}([0, T]; \mathbb{C}^{(n)}[a, b])$ мы понимаем класс функций $f(r, t)$, $(r, t) \in [a, b] \times [0, T]$, $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, у которых сама функция $f(r, t)$ вместе со своими частными производными с произвольным порядком следования частных производных по r и по t порядка не выше m по переменной $t \in [0, T]$ и не выше n по переменной $r \in [a, b]$ принадлежат пространству $\mathbb{C}([a, b] \times [0, T])$. Отметим, что частные производные в граничных точках множества $[a, b] \times [0, T]$ понимаются как соответствующие односторонние производные. При этом имеет место коммутативность всех указанных смешанных частных производных по $r \in [a, b]$

и $t \in [0, T]$. Также отметим, что при $m = 0$ и $n = 0$ $\mathbb{C}^{(0)}([0, T]; \mathbb{C}^{(0)}[a, b]) = \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]) = \mathbb{C}([a, b] \times [0, T])$. Кроме того, в работе мы используем обозначение $\mathbb{B} := \mathbb{C}([a, b] \times [0, T])$, а норму этого пространства обозначаем через $\|\cdot\|$:

$$\|f(r, t)\| = \|f(r, t)\|_{\mathbb{B}} := \sup_{(r, t) \in [a, b] \times [0, T]} |f(r, t)|.$$

В настоящей статье систематически будем использовать банаховы пространства абстрактных функций $\mathbb{C}([0, T]; B)$, $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; B)$, $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; B)$, где B — банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|_B$. Стоит отметить, что подобные обозначения иногда совпадают с обозначениями пространств $\mathbb{C}^{(m)}([0, T]; \mathbb{C}^{(n)}[a, b])$. Нетрудно показать, что эти классы функций совпадают. Вследствие этого мы можем рассматривать функцию двух переменных $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(m)}([0, T]; \mathbb{C}^{(n)}[a, b])$ при $m, n = \{0, 1, 2\}$ то в обычном смысле на множестве $[a, b] \times [0, T]$, то как абстрактную $v(r, t) \equiv v(r)(t) \equiv v(t) \in \mathbb{C}^{(m)}([0, T]; B)$, где $B = \mathbb{C}^{(n)}[a, b]$. Этим эквивалентным представлением мы будем пользоваться на протяжении большей части статьи. Эквивалентность данных представлений здесь и в дальнейшем мы обозначаем операцией $\equiv$.

Линейное пространство функций $f(t) \in \mathbb{C}([0, T]; B)$ определяется следующими свойствами:

$$f(t) : [0, T] \rightarrow B, \quad \|f(t_1) - f(t_2)\|_B \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| \rightarrow +0, \quad t_1, t_2 \in [0, T].$$

Линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; B)$ определяется как такое подпространство линейного пространства $\mathbb{C}([0, T]; B)$, что существует сильная производная

$$\frac{df}{dt}(t) \in \mathbb{C}([0, T]; B), \quad \left\| \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} - \frac{df}{dt}(t) \right\|_B \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad |\Delta t| \rightarrow +0.$$

Линейное пространство $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; B)$ определяется индуктивным образом. Иногда сильные производные первого и второго порядка мы будем обозначать как $f'(t)$ и $f''(t)$ соответственно.

Также в работе мы используем обозначение $\mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])$ для пространства всех линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathbb{C}[0, T]$. Отметим, что данное пространство является банаховой алгеброй с единицей I (единичным оператором). Теперь введем используемое в статье пространство $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T]))$. Пусть $v(t) \in \mathbb{C}[0, T]$. Зафиксируем отображение $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}[0, T]$. Пусть $\widehat{W} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])$. В итоге имеем, что

$$[0, T] \xrightarrow{v} \mathbb{C}[0, T] \xrightarrow{\widehat{W}} \mathbb{C}[0, T].$$

Пространством $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T]))$ будем считать класс таких операторов $\widehat{W} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])$, что при произвольном фиксированном отображении $v : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}[0, T]$ композиция $(\widehat{W} \circ v)(t) = \widehat{W}(v(t))$ дифференцируема по $t \in [0, T]$ по Фреше, причем эта производная Фреше $\frac{d(\widehat{W} \circ v)}{dt}(t)$ является непрерывным оператором при действии из $[0, T]$ в $\mathbb{C}[0, T]$.

3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Рассмотрим задачу (1.5). Сделаем замену $u(r, t) = v(r, t)/r$. Тогда данная задача примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (rv_{rr}(r, t) - rv(r, t)) + \omega^2 rv_{rr}(r, t) &= \frac{\partial^2 v^2(r, t)}{\partial t^2}, \quad (r, t) \in [a, b] \times [0, T], \\ v(r, 0) &= v_0(r), \quad v_t(r, 0) = v_1(r), \quad r \in [a, b], \\ v(a, t) - av_r(a, t) &= 0, \quad v(b, t) - bv_r(b, t) = 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $v_0(r) := ru_0(r)$, $v_1(r) := ru_1(r)$, при этом $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$.

Перепишем уравнение задачи (3.1) в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (rv_{rr} - rv - v^2) + \omega^2 (rv_{rr} - rv - v^2) = -\omega^2 rv - \omega^2 v^2. \quad (3.2)$$

Введем непрерывный оператор $\widehat{L}: \mathbb{C}^{(2)}[a, b] \rightarrow \mathbb{C}[a, b]$,

$$\widehat{L}w := rw_{rr} - rw,$$

который имеет непрерывный обратный оператор $\widehat{G} : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$, где

$$(\widehat{G}h)(r) = \int_a^b G(r, y)h(y) dy,$$

а $G(r, y)$ — функция Грина третьей краевой задачи

$$\begin{aligned} rw_{rr} - rw &= h(r), \quad r \in [a, b], \\ w(a) - aw_r(a) &= 0, \\ w(b) - bw_r(b) &= 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что данная функция Грина имеет следующий вид:

$$G(r, y) = \frac{1}{yM} \begin{cases} (\sinh(r-a) + a \cosh(r-a))(\sinh(y-b) + b \cosh(y-b)), & a \leq r < y \leq b, \\ (\sinh(r-b) + b \cosh(r-b))(\sinh(y-a) + a \cosh(y-a)), & a \leq y < r \leq b, \end{cases}$$

где $M := (1 - ab) \sinh(b-a) - (b-a) \cosh(b-a)$.

Поддействуем оператором $\widehat{G}$ на уравнение (3.2). Тогда получаем, что

$$\frac{d^2}{dt^2} (v - \widehat{G}(v^2)) + \omega^2 (v - \widehat{G}(v^2)) = -\omega^2 \widehat{G}(rv + v^2),$$

где в дальнейшем мы рассматриваем $v \equiv v(r, t) \equiv v(r)(t) \equiv v(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ как абстрактную функцию, а также производную по t считаем в смысле сильной производной в пространстве $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$.

Введя обозначение $z = z(t) := v - \widehat{G}(v^2)$, получаем следующую абстрактную задачу Коши:

$$\begin{aligned} z'' + \omega^2 z &= -\omega^2 \widehat{G}(rv + v^2), \\ z(0) &= \underbrace{v_0 - \widehat{G}(v_0^2)}_{=: z_0}, \\ z'(0) &= \underbrace{v_1 - 2\widehat{G}(v_0 v_1)}_{=: z_1}. \end{aligned}$$

С помощью функции Коши данной задачи приходим к тому, что эта задача эквивалентна следующему абстрактному интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 \cos \omega t + \frac{z_1}{\omega} \sin \omega t - \omega \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \widehat{G}(rv(s) + v^2(s)) ds = \\ &= z_0 \cos \omega t + \frac{z_1}{\omega} \sin \omega t - \omega \int_0^t ds \sin(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy. \end{aligned}$$

С учетом введенного ранее обозначения перепишем это уравнение в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} v - \widehat{G}(v^2) &= C_1(r) \cos \omega t + C_2(r) \sin \omega t - \\ &- \omega \int_0^t ds \sin(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$C_1(r) := z_0 = v_0 - \widehat{G}(v_0^2), \quad C_2(r) := \frac{z_1}{\omega} = \frac{v_1 - 2\widehat{G}(v_0 v_1)}{\omega}.$$

Далее учтем, что операторы $\widehat{G}$ и d/dt коммутируют между собой, поэтому

$$\frac{d}{dt} \widehat{G}(v^2) = \widehat{G} \left(\frac{d(v^2)}{dt} \right) = \widehat{G} \left(2v \frac{dv}{dt} \right) = \widehat{K}(v) * \frac{dv}{dt}, \quad (3.4)$$

где оператор $\widehat{K}(v)* \equiv \widehat{K}(v(t))*$ имеет вид:

$$\widehat{K}(v) * w := 2 \int_a^b G(r, y) v(y, t) w(y, t) dy. \quad (3.5)$$

Дифференцируя абстрактное уравнение (3.3) по времени, с учетом (3.4) получаем следующее интегродифференциальное уравнение (здесь I — единичный оператор):

$$\begin{aligned} (I - \widehat{K}(v) *) \frac{dv}{dt} &= f(r, t) - \omega^2 \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy, \\ v(r)(0) &= v_0(r), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$f(r, t) := -C_1(r) \omega \sin \omega t + C_2(r) \omega \cos \omega t. \quad (3.7)$$

4. ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Будем использовать метод исследования, предложенный в работе [8], с небольшими модификациями. Напомним, что ранее мы ввели банахово пространство

$$\mathbb{B} = \mathbb{C}([a, b] \times [0, T]).$$

Выше было упомянуто, что его норму обозначаем через $\|\cdot\|$. Далее выберем замкнутое, выпуклое и ограниченное подмножество данного банахова пространства:

$$B_{n\varepsilon} := \{v(r, t) \in \mathbb{B} : \|v\| \leq n\varepsilon\} \quad \text{при некотором фиксированном } n \in \mathbb{N},$$

и предположим, что $\|v_0\| \leq \varepsilon$ и $\|v_1\| \leq \varepsilon$.

Решение абстрактного интегродифференциального уравнения (3.6) рассматриваем в классе $v(r, t) \equiv v(r)(t) \equiv v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$, в том числе, производную по t считаем в смысле данного пространства.¹ Отметим, что $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]) \subset \mathbb{B}$.

Получим достаточные условия существования обратного оператора $(I - \widehat{K}(v)*)^{-1}$. Сделаем для оценки нормы оператора $\widehat{K}(v)* : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ с учетом выражения (3.5):

$$\begin{aligned} \|\widehat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} &= \sup_{\|w\| \leq 1} \|\widehat{K}(v) * w\| = \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| 2 \int_a^b G(r, y) v(y, t) w(y, t) dy \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left(2\|v\| \underbrace{\|w\|}_{\leq 1} \left\| \int_a^b G(r, y) dy \right\| \right) \leq 2c_1 R \|v\|, \end{aligned}$$

где

$$R := b - a \quad \text{и} \quad c_1 := \sup_{r, y \in [a, b]} |G(r, y)| = \max_{r, y \in [a, b]} |G(r, y)|$$

с учетом непрерывности функции Грина по переменным $(r, y) \in [a, b] \times [a, b]$, что следует из общих свойств функции Грина. Если же при этом $v \in B_{n\varepsilon}$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$\|\widehat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|v\| \leq 2c_1 R n\varepsilon \leq \frac{1}{2},$$

а это означает, что обратный оператор $(I - \widehat{K}(v)*)^{-1} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ существует и представляется в виде сходящегося ряда Неймана:

$$(I - \widehat{K}(v)*)^{-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v) *]^m. \quad (4.1)$$

¹ *Замечание.* Нетрудно показать, что если абстрактная функция $v(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$, то тогда она может всегда рассматриваться принадлежащей пространству $v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$, и значения сильных производных первого порядка одинаковы с точки зрения пространств $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ и $\mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$.

Введем оператор μ :

$$\mu(v) \equiv \mu(v(t)) \equiv \mu(v)(r, t) := f(r, t) - \omega^2 \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy. \quad (4.2)$$

Тогда с учетом существования обратного оператора $(I - \hat{K}(v)*)^{-1}$ и введенного обозначения интегродифференциальное уравнение (3.6) эквивалентно уравнению

$$\frac{dv}{dt} = (I - \hat{K}(v)*)^{-1} [\mu(v)]. \quad (4.3)$$

Теперь введем оператор $\hat{F}(v) := I - \hat{K}(v)*$. Тогда уравнение (4.3) перепишется в более простом виде

$$\frac{dv}{dt} = \hat{F}^{-1}(v) [\mu(v)]. \quad (4.4)$$

В силу (4.1) имеет место оценка

$$\|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \|[\hat{K}(\tilde{v}_1*)]^m - [\hat{K}(\tilde{v}_2*)]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}. \quad (4.5)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. Для всех $v, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\epsilon}$, $m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие оценки:

$$\|\hat{K}(\tilde{v}_1) * - \hat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \quad (4.6)$$

$$\|[\hat{K}(v) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}^m, \quad (4.7)$$

$$\|[\hat{K}(\tilde{v}_1) *]^m - [\hat{K}(\tilde{v}_2) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq m(2c_1 R n \epsilon)^{m-1} \|\hat{K}(\tilde{v}_1) * - \hat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}. \quad (4.8)$$

Доказательство. Шаг 1. Докажем оценку (4.6). В самом деле, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|\hat{K}(\tilde{v}_1) * - \hat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} &= \sup_{\|w\| \leq 1} \|\hat{K}(\tilde{v}_1) * w - \hat{K}(\tilde{v}_2) * w\| = \\ &= \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| 2 \int_a^b G(r, y) (\tilde{v}_1(y, t) - \tilde{v}_2(y, t)) w(y, t) dy \right\| \leq \\ &\leq \sup_{\|w\| \leq 1} \left\| 2 \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \underbrace{\|w\|}_{\leq 1} \int_a^b G(r, y) dy \right\| \leq 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (4.6) доказана.

Следствие 1. Переобозначив $\tilde{v}_1$ на v , при $\tilde{v}_2 = 0$ имеет место оценка

$$\|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|v\| \leq 2c_1 R n \epsilon. \quad (4.9)$$

Шаг 2. Докажем оценку (4.7) методом математической индукции. В самом деле, данная оценка очевидна при $m = 1$ (база индукции). Предположим, что эта оценка выполняется для какого-либо произвольного $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что она выполнена и при $m + 1$.

С учетом предположения индукции имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \|[\hat{K}(v) *]^{m+1}\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} &= \sup_{\|w\| \leq 1} \|[\hat{K}(v) *]^{m+1}(w)\| = \sup_{\|w\| \leq 1} \|[\hat{K}(v) *]^m (\hat{K}(v) * w)\| \leq \\ &\leq \|[\hat{K}(v) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \underbrace{\sup_{\|w\| \leq 1} \|\hat{K}(v) * w\|}_{= \|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}} = \|[\hat{K}(v) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \\ &\leq \|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}^m \cdot \|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \|\hat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}^{m+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (4.7) доказана.

Следствие 2. С учетом (4.9) имеет место следующая оценка:

$$\|[\widehat{K}(v)]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \|\widehat{K}(v) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}^m \leq (2c_1 R n \varepsilon)^m. \quad (4.10)$$

Шаг 3. Докажем оценку (4.8) также методом математической индукции. Заметим, что данная оценка очевидна при $m = 1$ (база индукции). Предположим, что эта оценка выполняется для какого-либо произвольного $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что она выполнена и при $m + 1$.

С учетом предположения индукции, а также оценки (4.10) имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} & \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^{m+1} - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^{m+1}\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \sup_{\|w\| \leq 1} \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^{m+1}w - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^{m+1}w\| = \\ & = \sup_{\|w\| \leq 1} \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_2) * w)\| = \\ & = \sup_{\|w\| \leq 1} \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) + [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) - \\ & - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m(\widehat{K}(\tilde{v}_2) * w)\| = \\ & = \sup_{\|w\| \leq 1} \|([\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^m - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m)(\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w) + [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m([\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2)]w)\| \leq \\ & \leq \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1)]^m - [\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \underbrace{\sup_{\|w\| \leq 1} \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * w\|}_{= \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R n \varepsilon} + \\ & + \underbrace{\|[\widehat{K}(\tilde{v}_2)]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}}_{\leq (2c_1 R n \varepsilon)^m} \cdot \underbrace{\sup_{\|w\| \leq 1} \|[\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2)]w\|}_{= \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}} \leq \\ & \leq m(2c_1 R n \varepsilon)^{m-1} \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot 2c_1 R n \varepsilon + \\ & + (2c_1 R n \varepsilon)^m \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = (m+1)(2c_1 R n \varepsilon)^m \|\widehat{K}(\tilde{v}_1) * \widehat{K}(\tilde{v}_2) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (4.8) доказана.

Лемма полностью доказана.

В итоге в силу оценки (4.5), а также оценок (4.6) и (4.8) леммы 4.1 имеет место оценка

$$\|\widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} m(2c_1 R n \varepsilon)^{m-1} \cdot 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|.$$

Поскольку при достаточно малом $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $2c_1 R n \varepsilon \leq 1/2$, то

$$\|\widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \widehat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq 2c_1 R \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \underbrace{\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{2^{m-1}}}_{=4} = c_2 \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \quad (4.11)$$

где $c_2 := 8c_1 R$, а для числового ряда $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{m}{2^{m-1}}$ нетрудно показывается, что он сходится (например, по признаку Д'Аламбера). Сумма данного ряда (она равна 4) нетрудно находится с помощью почленного дифференцирования степенного ряда $\sum_{m=1}^{+\infty} x^m$ в точке $x = 1/2$, принадлежащей интервалу сходимости $(-1; 1)$ данного ряда.

Введем следующий оператор A :

$$A(v) \equiv A(v)(t) \equiv A(v)(r, t) := \widehat{F}^{-1}(v)[\mu(v)] \equiv \widehat{F}^{-1}(v)[\mu(v)(r, t)].$$

Тогда интегродифференциальное уравнение (3.6) с учетом (4.4) и введенного обозначения переписывается в виде

$$\frac{dv}{dt} = A(v), \quad (4.12)$$

$$v(0) = v_0.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.2. Для всех $v, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\varepsilon}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ таком, что $2c_1 R n \varepsilon \leq 1/2$, а также при малых начальных данных $\|v_0\| \leq \varepsilon$ и $\|v_1\| \leq \varepsilon$ справедливы оценки

$$\|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| \leq c_3(\varepsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \quad (4.13)$$

$$\|A(v)\| \leq c_4(\varepsilon, T), \quad (4.14)$$

где

$$\begin{aligned} c_3(\varepsilon, T) &= c_2 \left(c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R\omega^2 T n \varepsilon(b + n\varepsilon) \right) + 2c_1 R\omega^2 T(b + 2n\varepsilon), \\ c_4(\varepsilon, T) &= 2 \left(c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R\omega^2 T n \varepsilon(b + n\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Шаг 1. Для доказательства оценки (4.13) учтем, что

$$\begin{aligned} \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| &= \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1)[\mu(\tilde{v}_1)] - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_2)]\| = \\ &= \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1)[\mu(\tilde{v}_1)] - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_1)] + \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_1)] - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_2)]\| = \\ &= \|(\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2))[\mu(\tilde{v}_1)] + \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)[\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)]\| \leq \\ &\leq \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_1) - \hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\mu(\tilde{v}_1)\| + \|\hat{F}^{-1}(\tilde{v}_2)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\| \leq \\ &\leq c_2 \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \cdot \|\mu(\tilde{v}_1)\| + 2\|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\|, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где мы учли оценку (4.11), а также то, что с учетом неравенства (4.10) имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|\hat{F}^{-1}(v)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} &= \|(I - \hat{K}(v) *)^{-1}\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} = \left\| \sum_{m=0}^{+\infty} [\hat{K}(v) *]^m \right\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{+\infty} \|\hat{K}(v) *]^m\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} \|\hat{K}(v) * \|^m_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} (2c_1 R n \varepsilon)^m \leq \\ &\leq \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m = 2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Шаг 2. Сделаем оценку для $\|\mu(v)\|$. С учетом (4.2) имеем

$$\|\mu(v)\| \leq \|f(r, t)\| + \omega^2 \left\| \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy \right\|. \quad (4.17)$$

Учитывая (3.7), выражение для $f(r, t)$ перепишем в виде

$$\begin{aligned} f(r, t) &= (\hat{G}(v_0^2) - v_0)\omega \sin \omega t + (v_1 - 2\hat{G}(v_0 v_1)) \cos \omega t = \\ &= \omega \left(\int_a^b G(r, y) v_0^2(y) dy - v_0(r) \right) \sin \omega t + \\ &+ \left(v_1(r) - 2 \int_a^b G(r, y) v_0(y) v_1(y) dy \right) \cos \omega t, \end{aligned}$$

откуда сразу следует, что

$$\begin{aligned} \|f(r, t)\| &\leq \omega \left(\left\| \sin \omega t \cdot \int_a^b G(r, y) v_0^2(y) dy \right\| + \|v_0(r) \sin \omega t\| \right) + \\ &+ \|v_1(r) \cos \omega t\| + 2 \left\| \cos \omega t \cdot \int_a^b G(r, y) v_0(y) v_1(y) dy \right\| \leq \\ &\leq \omega(c_1 R \varepsilon^2 + \varepsilon) + \varepsilon + 2c_1 R \varepsilon^2 = c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \omega^2 \left\| \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (yv(y, s) + v^2(y, s)) dy \right\| &\leq \\ &\leq \omega^2 c_1 (b n \varepsilon + (n \varepsilon)^2) R T = c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Тогда с учетом неравенств (4.18), (4.19) получаем, что оценка (4.17) перепишется в следующем виде:

$$\|\mu(v)\| \leq c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon). \quad (4.20)$$

Шаг 3. Теперь оценим $\|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\|$.

С учетом (4.2) имеем

$$\begin{aligned} \|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\| &\leq \omega^2 \left\| \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) [y(\tilde{v}_1(y, s) - \tilde{v}_2(y, s)) + \right. \\ &\left. + \tilde{v}_1^2(y, s) - \tilde{v}_2^2(y, s)] dy \right\| \leq \omega^2 T c_1 R (b \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| + \|\tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2\|). \end{aligned}$$

Далее учтем, что

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}_1^2 - \tilde{v}_2^2\| &\leq \|(\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2)(\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2)\| \leq \|\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2\| \cdot \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \leq \\ &\leq \underbrace{(\|\tilde{v}_1\| + \|\tilde{v}_2\|)}_{\leq 2n\varepsilon} \cdot \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \leq 2n\varepsilon \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \end{aligned}$$

откуда сразу получаем оценку

$$\|\mu(\tilde{v}_1) - \mu(\tilde{v}_2)\| \leq \omega^2 T c_1 R (b \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| + 2n\varepsilon \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|) = c_1 R \omega^2 T (b + 2n\varepsilon) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|. \quad (4.21)$$

Шаг 4. Учитывая оценки (4.15), (4.20), (4.21), а также переобозначая v на $\tilde{v}_1$ в (4.20), получаем итоговую оценку

$$\begin{aligned} \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| &\leq c_2 \left(c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon) \right) \cdot \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| + \\ &+ 2c_1 R \omega^2 T (b + 2n\varepsilon) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| = \\ &= \left[c_2 \left(c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon) \right) + \right. \\ &\left. + 2c_1 R \omega^2 T (b + 2n\varepsilon) \right] \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| = c_3(\varepsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (4.13) доказана.

Следствие 3. Оператор A непрерывен при действии из $B_{n\varepsilon}$ в $B_{n\varepsilon}$, поскольку для любых $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\varepsilon}$ выполнена импликация

$$\|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \rightarrow +0 \implies \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| \leq c_3(\varepsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\| \rightarrow +0.$$

Шаг 5. Оценим $\|A(v)\|$:

$$\begin{aligned} \|A(v)\| &= \|\hat{F}^{-1}(v)[\mu(v)]\| \leq \|\hat{F}^{-1}(v)\|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \cdot \|\mu(v)\| \leq \\ &\leq 2 \left(c_1 R(\omega + 2)\varepsilon^2 + (\omega + 1)\varepsilon + c_1 R \omega^2 T n \varepsilon (b + n \varepsilon) \right) = c_4(\varepsilon, T), \end{aligned}$$

где мы воспользовались оценками (4.16) и (4.20).
Таким образом, оценка (4.14) доказана.

Лемма доказана полностью.

Введем оператор H :

$$H[v] \equiv H[v](t) \equiv H[v](r, t) := v_0(r) + \int_0^t A(v)(r, s) ds.$$

Перепишем задачу (4.12) в следующем эквивалентном виде:

$$v(r, t) = H[v](r, t).$$

В обозначениях абстрактных функций и, соответственно, абстрактного интегрального уравнения Вольтерра II рода данная задача примет вид

$$v(t) = v_0 + \underbrace{\int_0^t A(v)(s) ds}_{=H[v]=H[v](t)}. \quad (4.22)$$

Докажем однозначную локальную разрешимость данного уравнения методом сжимающих отображений, выбрав соответствующие значения $\varepsilon > 0$, $T > 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что в силу общих свойств метрических пространств ранее указанное множество $B_{n\varepsilon}$ само является полным метрическим пространством относительно расстояния, порожденного нормой пространства $\mathbb{B}$ (см., например, работу [9]). Поэтому нам потребуется, чтобы оператор H :

- 1) действовал из $B_{n\varepsilon}$ в $B_{n\varepsilon}$,
- 2) являлся сжимающим на $B_{n\varepsilon}$.

Шаг 1. Для доказательства п. 1) сделаем оценку для $\|H[v]\|$:

$$\begin{aligned} \|H[v]\| &= \left\| v_0 + \int_0^t A(v)(s) ds \right\| \leq \\ &\leq \|v_0\| + T\|A(v)\| \leq \varepsilon + Tc_4(\varepsilon, T), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где мы воспользовались оценкой (4.14) леммы 4.2, а также условием $\|v_0\| \leq \varepsilon$.

Потребуем выполнения неравенства $\varepsilon + Tc_4(\varepsilon, T) \leq n\varepsilon$. Тогда из (4.23) автоматически следует, что $\|H[v]\| \leq n\varepsilon$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} Tc_4(\varepsilon, T) &\leq (n-1)\varepsilon \iff \\ \iff 2T(c_1R(\omega+2)\varepsilon^2 + (\omega+1)\varepsilon + c_1R\omega^2Tn\varepsilon(b+n\varepsilon)) &\leq (n-1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку

$$2T(\omega+1)\varepsilon < 2T(c_1R(\omega+2)\varepsilon^2 + (\omega+1)\varepsilon + c_1R\omega^2Tn\varepsilon(b+n\varepsilon)) \leq (n-1)\varepsilon,$$

то

$$2T(\omega+1)\varepsilon < (n-1)\varepsilon \iff n > 2T(\omega+1) + 1.$$

Тогда при фиксированном $T > 0$ и фиксированном $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющим неравенству $n > 2T(\omega+1) + 1$, а также при малом $\varepsilon > 0$ таком, что

$$2c_1Rn\varepsilon \leq \frac{1}{2}, \quad Tc_4(\varepsilon, T) \leq (n-1)\varepsilon,$$

оператор H действует из $B_{n\varepsilon}$ в $B_{n\varepsilon}$.

Шаг 2. Для доказательства п. 2) воспользуемся тем, что для любых $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in B_{n\epsilon}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|H[\tilde{v}_1] - H[\tilde{v}_2]\| &\leq \left\| \int_0^t \left(A(\tilde{v}_1)(s) - A(\tilde{v}_2)(s) \right) ds \right\| \leq \\ &\leq T \|A(\tilde{v}_1) - A(\tilde{v}_2)\| \leq T c_3(\epsilon, T) \|\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2\|, \end{aligned}$$

где мы воспользовались оценкой (4.13) леммы 4.2.

Потребуем выполнение неравенства $T c_3(\epsilon, T) \leq 1/2$ при достаточно малых фиксированных $\epsilon > 0$ и $T > 0$ и фиксированном $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющем неравенству $n > 2T(\omega + 1) + 1$. Тогда оператор H будет сжимающим на $B_{n\epsilon}$.

В итоге мы доказали следующую лемму.

Лемма 4.3. Пусть $\epsilon > 0$ и $T > 0$ — произвольные достаточно малые, и $n \in \mathbb{N}$ — произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $n > 2T(\omega + 1) + 1$, причем малость ϵ и T определяется одновременным выполнением следующих условий:

$$2c_1 R n \epsilon \leq \frac{1}{2}, \quad T c_3(\epsilon, T) \leq \frac{1}{2}, \quad T c_4(\epsilon, T) \leq (n - 1)\epsilon.$$

Тогда оператор H действует из $B_{n\epsilon}$ в $B_{n\epsilon}$ и является сжимающим на $B_{n\epsilon}$.

Отсюда в силу теоремы о сжимающих отображениях и того, что $\|v_0(r)\| = \|v_0(r)\|_{\mathbb{C}[a,b]}$ и $\|v_1(r)\| = \|v_1(r)\|_{\mathbb{C}[a,b]}$, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Для достаточно малых $T > 0$ и $\epsilon > 0$ при начальных данных $v_0(r), v_1(r) \in \mathbb{C}[a, b]$ таких, что

$$\|v_0(r)\|_{\mathbb{C}[a,b]} \leq \epsilon, \quad \|v_1(r)\|_{\mathbb{C}[a,b]} \leq \epsilon$$

существует и единственно решение интегрального уравнения (4.22) в классе функций $v(t) \equiv v(r)(t) \equiv v(r, t) \in \mathbb{B} = \mathbb{C}([a, b] \times [0, T]) = \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$.

Аналогично работам [1] и [8], используем метод повышения гладкости (“бутстрэп”-метод) решения абстрактного интегрального уравнения (4.22). Учитывая то, что в правой части уравнения под интегралом стоит непрерывная по времени функция (в силу непрерывности оператора A согласно следствию 3), интеграл непрерывно дифференцируем по t . Поскольку в левой части стоит функция $v(t) \equiv v(r, t)$, то $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$, причем

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= A(v) = \hat{F}^{-1}(v) [\mu(v)] = \\ &= \left(I - \hat{K}(v(t)) * \right)^{-1} [\mu(v(t))] = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} [\hat{K}(v(t)) *]^m \right) \mu(v(t)), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mu(v) \equiv \mu(v(t)) \equiv \mu(v)(r, t) &= \left[\omega \left(\int_a^b G(r, y) v_0^2(y) dy - v_0(r) \right) \sin \omega t + \right. \\ &+ \left(v_1(r) - 2 \int_a^b G(r, y) v_0(y) v_1(y) dy \right) \cos \omega t - \\ &\left. - \omega^2 \int_0^t ds \cos(\omega(t-s)) \int_a^b G(r, y) (y v(y, s) + v^2(y, s)) dy \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Как итог, мы имеем абстрактное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} [\hat{K}(v(t)) *]^m \right) \mu(v(t)) \quad (4.25)$$

относительно функции $v(t) \equiv v(r, t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$ с начальным условием $v(0) = v_0 \equiv v(r)(0) = v_0(r) \in \mathbb{C}[a, b]$. Учитывая явный вид (4.24) для $\mu(v(t))$, получаем, что

$$\mu(v(t)) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]). \quad (4.26)$$

Кроме того, оператор $\widehat{K}(v(t))*$, вообще говоря, при фиксированном $v(t)$ и фиксированном $r \in [a, b]$ можно рассматривать как элемент банаховой алгебры $\mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])$ линейных непрерывных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathbb{C}[0, T]$ (данный оператор непрерывен, поскольку он линейный при фиксированном $v(t)$ и ранее была доказана его ограниченность).

Поскольку согласно результатам работы [10] степенной операторный ряд $\sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v(t)) *]^m$ в банаховой алгебре $\mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])$ непрерывно дифференцируем по $t \in [0, T]$ по Фреше внутри шара сходимости ($\|\widehat{K}(v(t)) * \|_{\mathbb{C}[0, T] \rightarrow \mathbb{C}[0, T]} \leq \|\widehat{K}(v(t)) * \|_{\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}} \leq \frac{1}{2} < 1$ согласно доказанному ранее), то

$$\sum_{m=0}^{+\infty} [\widehat{K}(v(t)) *]^m = (I - \widehat{K}(v(t)) *)^{-1} \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{C}[0, T], \mathbb{C}[0, T])). \quad (4.27)$$

Согласно результатам (4.26) и (4.27), с учетом вида абстрактного уравнения (4.25) получаем, что

$$\frac{d}{dt}v(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$$

и, стало быть, $v(t) \equiv v(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$.

Согласно ранее проведенным выкладкам, абстрактное уравнение (4.25), вообще говоря, эквивалентно уравнению (3.3), которое, в свою очередь, можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(r, t) = & \widehat{G}(v^2(r, t)) + \left(v_0(r) - \widehat{G}(v_0^2(r)) \right) \cos \omega t + \\ & + \frac{1}{\omega} \left(v_1(r) - 2\widehat{G}(v_0(r)v_1(r)) \right) \sin \omega t - \omega \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \widehat{G}(rv(r, s) + v^2(r, s)) ds. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Поскольку $v_0(r), v_1(r) \in \mathbb{C}[a, b]$ и $\mathbb{C}^{(2)}[a, b] \subset \mathbb{C}[a, b]$, то предположим, что $v_0(r), v_1(r) \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$. Введем оператор вложения $\widehat{J} : \mathbb{C}^{(2)}[a, b] \rightarrow \mathbb{C}[a, b]$. Учитывая то, что $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b])$ и $v_0(r), v_1(r) \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$, указанные ниже функции принадлежат следующим классам:

$$\begin{aligned} v^2(r, t) & \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]), \\ v_0^2(r) & \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b], \quad v_0(r) \cdot v_1(r) \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b], \\ rv(r, t) & \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]), \\ rv(r, t) + v^2(r, t) & \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}[a, b]). \end{aligned} \quad (4.29)$$

С учетом (4.29) и оператора вложения $\widehat{J}$ перепишем уравнение (4.28) в следующем виде:

$$\begin{aligned} v(r, t) = & \widehat{G}(v^2(r, t)) + \left(v_0(r) - \widehat{G}\widehat{J}[v_0^2(r)] \right) \cos \omega t + \\ & + \frac{1}{\omega} \left(v_1(r) - 2\widehat{G}\widehat{J}[v_0(r)v_1(r)] \right) \sin \omega t - \omega \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \widehat{G}(rv(r, s) + v^2(r, s)) ds. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Как мы уже ранее отмечали, согласно свойствам функции Грина, $\widehat{G} : \mathbb{C}[a, b] \rightarrow \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$, причем $\widehat{G}$ — непрерывный оператор. Поэтому согласно (4.29) и виду уравнения (4.30) приходим к тому, что правая часть уравнения принадлежит классу $\mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$. Значит, и левая часть должна принадлежать данному классу, т.е. $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$.

Поскольку с учетом проделанных ранее выкладок задачи (3.1), (3.3), (4.25), (4.28) и (4.30) эквивалентны, то задача (3.1) локально разрешима в классе $v(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ при некотором $T > 0$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$, причем начальные условия $v_0(r), v_1(r) \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$ такие, что $\|v_0(r)\|_{\mathbb{C}[a, b]} \leq \varepsilon$ и $\|v_1(r)\|_{\mathbb{C}[a, b]} \leq \varepsilon$.

Так как

$$u(r, t) = \frac{v(r, t)}{r} \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b]), \quad (4.31)$$

в силу того что $0 < a < b$, и задачи (1.5), (3.1) эквивалентны, то имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть фиксированы параметры задачи: $\omega > 0$, $0 < a < b$. Тогда найдется такое $T > 0$ и достаточно малое $\varepsilon > 0$, что при начальных функциях $u_0(r)$, $u_1(r) \in \mathbb{C}^{(2)}[a, b]$

$$\|ru_0(r)\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon, \quad \|ru_1(r)\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon,$$

удовлетворяющих граничным условиям

$$u_{0r}(a) = u_{0r}(b) = u_{1r}(a) = u_{1r}(b) = 0,$$

существует единственное решение задачи (1.5) в классе $u(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$.

5. РАЗРУШЕНИЕ И ОЦЕНКА ДЛЯ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Аналогично тому, как это было сделано в работах [1] и [2], применим метод пробных функций для нахождения верхней оценки на время существования классического решения задачи (1.5). Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 и $u(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$ — единственное решение задачи (1.5). Тогда при выполнении достаточного условия

$$\int_a^b r^2 u_1(r) \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) dr < 0$$

время T существования классического решения задачи (1.5) конечно и имеет место следующая оценка сверху:

$$T \leq - \frac{\int_a^b r^2 \left(u_0(r) + 1/2 \right)^2 dr}{2 \int_a^b r^2 u_1(r) \left(u_0(r) + 1/2 \right) dr}.$$

Доказательство. Умножим основное уравнение (1.5) на пробную функцию $\varphi(r) = r^2$ и проинтегрируем по множеству $r \in [a, b]$, учитывая, что в получившихся собственных интегралах, зависящих от параметра t , можно менять порядок дифференцирования и интегрирования вследствие принадлежности $u(r, t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; \mathbb{C}^{(2)}[a, b])$:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left(\frac{2u_r(r, t)}{r} + u_{rr}(r, t) - u(r, t) \right) \varphi(r) dr + \omega^2 \int_a^b \left(\frac{2u_r(r, t)}{r} + u_{rr}(r, t) \right) \varphi(r) dr = \\ & = \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b u^2(r, t) \varphi(r) dr \iff \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left(2ru_r(r, t) + r^2 u_{rr}(r, t) - r^2 u(r, t) - r^2 u^2(r, t) \right) dr + \\ & + \omega^2 \int_a^b \left(2ru_r(r, t) + r^2 u_{rr}(r, t) \right) dr = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

С учетом граничных условий задачи (1.5) справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(2ru_r(r, t) + r^2 u_{rr}(r, t) \right) dr = \int_a^b 2ru_r(r, t) dr + \int_a^b r^2 u_{rr}(r, t) dr = \\ & = \underbrace{r^2 u_r(r, t) \Big|_a^b}_{=0} - \int_a^b r^2 u_{rr}(r, t) dr + \int_a^b r^2 u_{rr}(r, t) dr = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

С учетом (5.2) перепишем (5.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} & - \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left(r^2 u^2(r, t) + r^2 u(r, t) \right) dr = 0 \iff \\ & \iff \frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \left(r^2 u^2(r, t) + r^2 u(r, t) \right) dr = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Далее учтем, что

$$r^2 u^2(r, t) + r^2 u(r, t) = r^2 (u^2(r, t) + u(r, t)) = r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{r^2}{4}. \quad (5.4)$$

Поскольку

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_a^b \frac{r^2}{4} dr = 0,$$

то с учетом равенства (5.4) перепишем (5.3) в виде

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_a^b r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr = 0. \quad (5.5)$$

Введем обозначение

$$I(t) := \int_a^b r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr.$$

Тогда с учетом (5.5) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$I''(t) = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$I(t) = \tilde{C}_1 t + \tilde{C}_2. \quad (5.6)$$

Найдем начальные условия $I(0)$, $I'(0)$ с учетом начальных условий задачи (1.5).

Во-первых,

$$I(0) = \int_a^b r^2 \left(u(r, 0) + \frac{1}{2} \right)^2 dr = \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr =: I_0. \quad (5.7)$$

Во-вторых,

$$\begin{aligned} I'(t) &= \frac{d}{dt} \int_a^b r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \left(r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 \right) dr = \\ &= 2 \int_a^b r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right) u_t(r, t) dr, \end{aligned}$$

откуда получаем, что

$$I'(0) = 2 \int_a^b r^2 \left(u(r, 0) + \frac{1}{2} \right) u_t(r, 0) dr = 2 \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr =: I_1. \quad (5.8)$$

С одной стороны, с учетом общего решения (5.6) и начальных условий (5.7), (5.8) находим, что $\tilde{C}_1 = I_1$, $\tilde{C}_2 = I_0$ и

$$I(t) = \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr + 2t \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr.$$

С другой стороны, поскольку

$$I(t) = \int_a^b r^2 \left(u(r, t) + \frac{1}{2} \right)^2 dr \geq 0$$

как интеграл от неотрицательной функции, получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr + 2t \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr &\geq 0 \iff \\ \iff 2t \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr &\geq - \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr, \end{aligned}$$

которое справедливо для любого $t \in [0, T]$. В частности, при $t = T$ имеем

$$2T \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr \geq - \int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right)^2 dr.$$

Разделив данное неравенство на

$$\int_a^b r^2 \left(u_0(r) + \frac{1}{2} \right) u_1(r) dr < 0,$$

получаем, что

$$T \leq - \frac{\int_a^b r^2 (u_0(r) + 1/2)^2 dr}{2 \int_a^b r^2 (u_0(r) + 1/2) u_1(r) dr}.$$

Теорема полностью доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V.* Blow-up for one Sobolev problem: theoretical approach and numerical analysis // *J. Math. Anal. Appl.* 2016. V. 442. № 2. P. 451–468.
2. *Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Овсянников Е.А., Панин А.А.* Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрцитивной нелинейностью // *Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование.* 2017. Т. 10. № 2. С. 107–123.
3. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Взрывная неустойчивость в нелинейных волновых моделях с распределенными параметрами // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2020. Т. 84. № 3. С. 15–70.
4. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. I. Формулы Грина // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2022. Т. 62. № 10. С. 1639–1661.
5. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. II. Теория потенциала // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 63. № 2. С. 282–316.
6. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Локальная разрешимость, разрушение и гёльдеровская регулярность решений некоторых задач Коши для нелинейных уравнений теории волн в плазме. III. Задачи Коши // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 63. № 7. С. 1109–1127.
7. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998. С. 448.
8. *Корпусов М.О.* Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // *Изв. РАН. Сер. матем.* 2015. Т. 79. № 5. С. 103–162.
9. *Панин А.А.* О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // *Матем. заметки.* 2015. Т. 97. № 6. С. 884–903.
10. *Silvestri B.* Fréchet differential of a power series in banach algebras // *Opuscula Mathematica.* 2010. V. 30. № 2. P. 155–177.

LOCAL SOLVABILITY AND BLOW-UP OF CLASSICAL SOLUTION TO SOME INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR EQUATION GOVERNING ION-ACOUSTIC WAVES IN A PLASMA

E. A. Ovsyannikov^{a,b,c,*}

^a 119991 Moscow, Leninskie Gory, 1, Lomonosov Moscow State University, Russia

^b 115409 Moscow, Kashirskoe shosse, 31, NRNU "MEPhI Russia

^c 117198 Moscow, Miklukho-Maklaya str., Patrice Lumumba RUDN, 117198 Moscow, Russia

*e-mail: evg.bud@yandex.ru

Received: 29.01.2024

Revised: 28.06.2024

Accepted: 01.07.2024

Abstract. The initial boundary value problem for the Sobolev type equation of the theory of ion-acoustic waves in plasma is considered. This problem comes to an equivalent abstract integral equation. The local solvability of this equation is proved by the contraction mapping principle. Next, a “bootstrap” method is used to increase the smoothness of the solution. Finally, the test function method with a certain sufficient condition is used to obtain a finite time blow-up result and an upper bound on the blow-up time is found.

Keywords: nonlinear Sobolev type equations, local solvability, test function, blow-up, blow-up time estimation.