

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ
ПРИ СБЛИЖЕНИИ КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ МАСС¹⁾© 2024 г. С. А. Назаров^{1,*}¹199178 Санкт-Петербург, Большой пр-т, 61, Институт проблем машиноведения РАН, Россия

*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 11.05.2024 г.

Переработанный вариант 11.05.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Исследуется спектральная задача Дирихле в трехмерной области с несколькими идентичными концентрированными тяжелыми массами (большие возмущения плотности на мелких множествах). Строится асимптотика собственных значений и функций в зависимости от двух параметров: малого, характеризующего размер и плотность включений, и времениподобного, описывающего процесс их приближения к началу координат (или к точке на границе области). Основное новшество — построение двухмасштабных асимптотических разложений и вывод равномерных оценок асимптотических остатков. Библ. 34. Фиг. 2.

Ключевые слова: спектральная задача Дирихле, концентрированные массы, времениподобный параметр, асимптотика собственных значений и функций, равномерные оценки.

DOI: 10.31857/S0044466924100105, EDN: JZQVRV

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω , ω — области в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$, с гладкими (класса C^∞ для простоты; см. разд. 8) границами $\partial\Omega$, $\partial\omega$ и компактными замыканиями $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. Область Ω звездная относительно начала $\mathcal{O}$ декартовой системы координат $x = (x_1, \dots, x_3)$, а $\mathcal{L}^1, \dots, \mathcal{L}^J$ — исходящие из него лучи, на которых выделим точки $P^1(t), \dots, P^J(t)$; их множество обозначим через $\mathcal{P}(t)$. При этом $J \geq 2$, длины $|P^j(t)|$ равны $v_j t$, а t — времениподобный параметр, описывающий “движение” мелких включений с “центрами” в точках $P^j(t)$, и $v_1, \dots, v_J > 0$ — их “скорости” (см. фиг. 1). Пусть еще $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малый параметр, $\varepsilon_0 > 0$, и

$$\omega_j^\varepsilon(t) = \{x : \xi^j := \varepsilon^{-1}(x - P^j(t)) \in \omega_j\}, \quad j = 1, \dots, J, \quad (1)$$

где $t \in [\varepsilon\tau_\omega, t_\Omega]$, а числа $\tau_\omega > 0$ и $t_\Omega > 0$ таковы, что в случае $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ верны формулы

$$\overline{\omega_j^\varepsilon(t)} \subset \Omega \text{ при } t \leq t_\Omega, \quad \overline{\omega_j^\varepsilon(t)} \cap \overline{\omega_k^\varepsilon(t)} = \emptyset \text{ при } t \geq \varepsilon\tau_\omega \text{ и } j \neq k, \quad j, k = 1, \dots, J. \quad (2)$$

Величину $\varepsilon_0 > 0$ при необходимости уменьшаем, сохраняя за ней обозначение. Наконец, X — характеристическая функция области ω , т.е. $X(\xi) = 1$ при $\xi \in \omega$, но $X(\xi) = 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \omega$, а X_t^ε — характеристическая функция множества $\omega^\varepsilon(t) = \omega_1^\varepsilon(t) \cup \dots \cup \omega_J^\varepsilon(t)$.

Рассмотрим спектральную задачу Дирихле для оператора Лапласа

$$-\Delta_x u_t^\varepsilon(x) = \lambda_t^\varepsilon(\rho + \varepsilon^{-3} X_t^\varepsilon) u_t^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

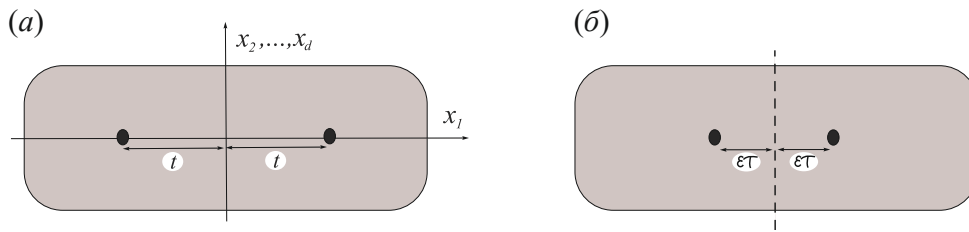
$$u_t^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

и ее вариационную формулировку как интегральное тождество (см. [1])

$$(\nabla_x u_t^\varepsilon, \nabla_x \psi)_\Omega = \lambda_t^\varepsilon((\rho + \varepsilon^{-3} X_t^\varepsilon) u_t^\varepsilon, \psi)_\Omega \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (4)$$

Здесь $\nabla = \text{grad}$, $(\cdot, \cdot)_\Omega$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, $\rho > 0$ — фиксированная величина, λ_t^ε — спектральный параметр, а собственная функция u_t^ε ищется в пространстве Соболева

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (код проекта 124041500009-8).



Фиг. 1. Плоское изображение тела с включениями • в случае $J = 2$ и $v_j = 1$ при большом (а) и малом (б) расстоянии между ними. Штриховая линия — возможная ось зеркальной симметрии.

$H_0^1(\Omega)$ функций, аннулирующихся на границе $\partial\Omega$. Сформулированные задачи обладают дискретными спектрами

$$0 < \lambda_{t,1}^\varepsilon < \lambda_{t,2}^\varepsilon \leq \lambda_{t,3}^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_{t,n}^\varepsilon \leq \dots \rightarrow +\infty. \quad (5)$$

Обозначив через $\delta_{p,q}$ символ Кронекера, соответствующие собственные функции $u_{t,1}^\varepsilon, u_{t,2}^\varepsilon, \dots, u_{t,n}^\varepsilon, \dots \in H_0^1(\Omega)$ подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{t,p}^\varepsilon, u_{t,q}^\varepsilon)_\omega = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}.$$

Сингулярно возмущенная задача (3) относится к инициированному классической работой [2] (см. также более ранние исследования [3], [4] задач в близких постановках) классу задач о “концентрированных массах”: мелкие, но тяжелые “дробинки” $\omega_j^\varepsilon(t)$ проникли в массив Ω , имеющий незначительную плотность $\rho > 0$. При этом малые величины t характеризуют хорошую кучность выстрела, а большие — сильную его разреженность, т.е. разброс дробы.

Несмотря на то, что в статье [2] исследовалась трехмерное одиночное включение ω_1^ε , масса $\varepsilon^{-3}|\omega^\varepsilon| = |\omega|$ которого сравнима по порядку с массой $\rho|\Omega^\varepsilon \setminus \omega^\varepsilon|$ окружающего материала, разработанный в [2] подход позволяет сделать предварительные выводы о строении спектра (5). Именно, в случае $t \in (t_\Omega^0, t_\Omega]$ при фиксированном $t_\Omega^0 > 0$, каждом $k \in \mathbb{N}$ и малом $\varepsilon > 0$ нормированные собственные значения $\varepsilon^{-1}\lambda_{t,1+(k-1)J}^\varepsilon, \dots, \varepsilon^{-1}\lambda_{t,kJ}^\varepsilon$ задачи (3) попадают в узкую окрестность члена Λ_k последовательности

$$0 < \Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \Lambda_3 \leq \dots \leq \Lambda_n \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (6)$$

собственных значений уравнения в пространстве с одним включением ω единичного размера

$$-\Delta_\xi U(\xi) = \Lambda X(\xi)U(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (7)$$

Вместе с тем, в случае $t = \varepsilon\tau$ при $\tau \in [\tau_\omega, \tau_\omega^0]$, а также фиксированном $\tau_\omega^0 > \tau_\omega$ и малом $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства $|\varepsilon^{-1}\lambda_{\tau,p}^\varepsilon - M_{\tau,p}| \leq c_{\tau,p}\varepsilon^\theta$, $\theta > 0$, в которых фигурируют собственные числа

$$0 < M_{\tau,1} < M_{\tau,2} \leq M_{\tau,3} \leq \dots \leq M_{\tau,n} \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (8)$$

следующего уравнения с группой $\omega^1(\tau) = \omega_1^1(\tau) \cup \dots \cup \omega_J^1(\tau)$ взаимодействующих включений:

$$-\Delta_\xi V_\tau(\xi) = M_\tau X_\tau^1(\xi)V_\tau(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (9)$$

Носители правых частей уравнений (7) и (9) содержатся соответственно на множествах $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega^1(\tau)}$, т.е. согласно определению (2) во второй ситуации включения $\omega_1^\varepsilon(\varepsilon\tau), \dots, \omega_J^\varepsilon(\varepsilon\tau)$ с диаметрами $O(\varepsilon)$ располагаются на расстоянии $O(\varepsilon)$ одно от другого, и поэтому их приходится интерпретировать как единую концентрированную массу $\omega^\varepsilon(\varepsilon\tau)$ — конгломерат. Ясно, что спектры (6) и (8) предельных уравнений (7) и (9) не совпадают (см. лемму 1 в разд. 2).

Задачи о тяжелых¹ концентрированных массах в разнообразных постановках изучались с помощью различных методов. Упомянем некоторые группы задач — списки конечно же неполные. Помимо краевых задач Дирихле и Неймана для тела в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, с одной или несколькими массами, удаленными одна от другой на значительное расстояние (см. [5]–[12]), рассматривались и сближенные на расстояние $O(\varepsilon)$ тяжелые массы диаметром ε , периодически распределенные около его $(d-1)$ -мерной границы (см. [13]–[17]) или вдоль подмногообразия размерностью $d' < d-1$ (см. [18], а также [19]–[21] в случае полостей). Зависимость собственных

¹т.е. при $m \geq 0$. Легкие массы ($m < 0$) требуют применения иных методов и здесь не обсуждаются.

пар $\{\lambda_{t,n}^\varepsilon; u_{t,n}^\varepsilon\}$ от времениподобного параметра t требует применение новых приемов асимптотического анализа. Предшествующие результаты, как уже упоминалось, предоставляют различные предельные задачи при больших и малых значениях t . Поэтому на первый план выходит вопрос: как одна асимптотическая формула для $\lambda_{t,n}^\varepsilon$ трансформируется в другую, т.е. как собственные значения (8) уравнения (9) превращаются в собственные значения (6) уравнения (7) при $\tau = \varepsilon^{-1}t \rightarrow +\infty$. Ответы на этот и сопутствующие вопросы даны в разд. 3–5. Однако значительно большую трудность представляет обоснование двухмасштабных асимптотических формул из-за необходимости отслеживать в оценках зависимость мажорант от времениподобных параметров — “медленного” t или “быстрого” τ . В разд. 6 с помощью классической леммы 4 о “почти собственных” значениях и векторах установлено, что в малой окрестности каждого из найденных формально асимптотических приближений имеется какой-то член последовательности (5), однако обычные подходы к точному определению его номера годятся только для $t \in [t_0, t_\Omega]$ или $\tau \in [\tau_\omega, \tau_0]$ при положительных t_0 и τ_0 . Для того чтобы распространить эти результаты на промежуточные значения времениподобного параметра $t \in (\varepsilon\tau_0, t_0)$, в разд. 7 доказывается вспомогательная теорема 2 об однозначной разрешимости (неоднородной) задачи (3) с параметрами $\lambda^\varepsilon = \varepsilon^m \Lambda$ и $t \in [\varepsilon\tau_\Lambda, t_\Omega]$, где Λ — точка вне спектра уравнения (7), и τ_Λ — некоторая величина, зависящая от Λ и других данных задачи. Этот факт позволяет посредством простых рассуждений закончить оправдание асимптотических формул, получив, в частности, равномерные относительно $t \in [\varepsilon\tau_\omega, t_\Omega]$ оценки остатков. В заключительном разд. 8 перечислены доступные обобщения полученных результатов и сформулированы открытые вопросы.

2. ПРЕДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сообщим несколько известных фактов, их можно найти в первоисточнике [2] и, например, в статьях [22], [10]; кроме того, они вытекают из результатов [23, гл. 6] и [24, § 2] для общих эллиптических систем. Интегральное тождество

$$(\nabla_\xi U, \nabla_\xi \Psi)_{\mathbb{R}^d} = \Lambda(U, \Psi)_\omega \quad \forall \Psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3), \quad (10)$$

обслуживающее уравнение (7), ставится на пространстве $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$, полученном пополнением линейного множества $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по “энергетической” норме

$$(\|\nabla_\xi \Psi; L^2(\mathbb{R}^3)\|^2 + \|\Psi; L^2(\omega)\|^2)^{1/2}.$$

Пространство $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ совпадает алгебраически и топологически с пространством Кондратьева $\mathcal{V}_1^1(\mathbb{R}^3)$ (см. [25], а также [23, гл. 6]) в силу одномерного неравенства Харди с показателем $\theta = 1$:

$$\int_h^{+\infty} \left| \frac{dW}{d\rho}(\rho) \right|^2 \rho^{0+1} d\rho \geq \frac{\theta^2}{4} \int_h^{+\infty} |W(\rho)|^2 \rho^{0-1} d\rho \quad \text{при } W \in C_c^\infty[d, +\infty), \quad d \geq 0, \quad \theta > 0. \quad (11)$$

При этом $\mathcal{V}_\beta^\ell(\mathbb{R}^3)$ — пополнение линеала $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ по весовой норме

$$\|\Psi; \mathcal{V}_\beta^\ell(\mathbb{R}^3)\| = \left(\sum_{k=0}^{\ell} \|(1+\rho)^{\beta+k-\ell} \nabla_\xi^k \Psi; L^2(\mathbb{R}^3)\|^2 \right)^{1/2}. \quad (12)$$

Здесь $\ell \in \mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\beta \in \mathbb{R}$ — показатели гладкости и веса. Пространство $\mathcal{V}_\beta^\ell(\mathbb{R}^3)$ состоит из функций $\Psi \in H_{\text{loc}}^\ell(\mathbb{R}^3)$ с конечной нормой (12).

Введем радиус R_ω , для которого $\bar{\omega} \subset \mathbb{B}_{R_\omega}$, и такую срезку $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, что

$$\chi(\xi) = 1 \quad \text{при } \xi \in \mathbb{B}_{R_\omega} = \{\xi : \rho = |\xi| < R_\omega\} \quad \text{и} \quad \chi(\xi) = 0 \quad \text{при } \xi \notin \mathbb{B}_{2R_\omega}. \quad (13)$$

Собственные функции $U_1, U_2, \dots, U_n, \dots \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ задачи (10), бесконечно дифференцируемые в областях $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\omega}$ и ω по-отдельности, можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(U_p, U_q)_\omega = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Для них справедливы представления

$$U_p(\xi) = (1 - \chi(\xi))K_p\Phi(\xi) + \tilde{U}_p(\xi), \quad (15)$$

где $\Phi(\xi) = (4\pi|\xi|)^{-1}$ — фундаментальное решение оператора Лапласа в пространстве $\mathbb{R}^3$, а для остатка $\tilde{U}_p$ выполнены оценки

$$|\nabla_\xi^l \tilde{U}_p(\xi)| \leq c_{p,l} \rho^{-2-l} \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}_R, \quad l \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad (16)$$

причем $\nabla_{\xi}^l U$ — совокупность производных функции U порядка l . Коэффициенты K_p находятся по формулам (см. далее выкладку (39))

$$K_p = \Lambda_p \int_{\omega} U_p(\xi) d\xi. \quad (17)$$

Первую собственную функцию U_1 можно выбрать положительной всюду в $\mathbb{R}^3$, и поэтому справедливо неравенство $K_1 > 0$. При $p > 1$ собственные значения могут быть кратными, например, в случае зеркальной симметрии области ω . Если Λ_p есть κ_p -кратное собственное значение,

$$\Lambda_{p-1} < \Lambda_p = \dots = \Lambda_{p+\kappa_p-1} < \Lambda_{p+\kappa_p}, \quad (18)$$

то собственные функции $U_p, \dots, U_{p+\kappa_p-1}$ всегда удастся зафиксировать так, чтобы выполнялись равенства $K_{p+1} = \dots = K_{p+\kappa_p-1} = 0$. Коэффициент K_p тоже может обратиться в нуль. Например, для шара ω имеем $p = 2, \kappa_2 = 3$ в соотношении (18) и ввиду нечетности собственных функций относительно какой-то координаты все коэффициенты $K_2, \dots, K_{d+1}$ равны нулю.

Аналогичные результаты (см. конец разд. 4) справедливы и для собственных функций $V_{\tau,1}, V_{\tau,2}, \dots, V_{\tau,n}, \dots \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ задачи (9), удовлетворяющих интегральному тождеству

$$(\nabla_{\xi} V_{\tau}, \nabla_{\xi} \Psi)_{\mathbb{R}^d} = M_{\tau}(V_{\tau}, \Psi)_{\omega^1(\tau)} \quad \forall \Psi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3), \quad (19)$$

а также условиям ортогональности и нормировки

$$(V_{\tau,p}, V_{\tau,q})_{\omega^1(\tau)} = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}. \quad (20)$$

Лемма 1. При всех $\tau \geq \tau_{\omega}$ имеет место неравенство $M_{\tau,1} < \Lambda_1$.

Доказательство. В силу минимального принципа справедливо соотношение

$$M_{\tau,1} = \min_{V_{\tau} \in \mathcal{V}} \frac{\|\nabla_{\xi} V_{\tau}; L^2(\mathbb{R}^3)\|^2}{\|V_{\tau}; L^2(\omega^1(\tau))\|^2} < \min_{W \in \mathcal{V}} \frac{\|\nabla_{\xi} W; L^2(\mathbb{R}^3)\|^2}{\|W; L^2(\omega)\|^2} = \Lambda_1$$

(см., например, [26, теорема 10.2.1]). При этом знаменатель дроби Рэлея уменьшен путем замены $\omega^1(\tau) \mapsto \omega_1^1(\tau) \subsetneq \omega^1(\tau)$, а строгое неравенство обусловлено тем, что собственная функция $V_{\tau,1} \in \mathcal{E}$ не обращается в нуль тождественно ни на одном из множеств $\omega_1^1(\tau), \dots, \omega_J^1(\tau)$.

3. АСИМПТОТИКА ПРИ БОЛЬШИХ t

Повтор с незначительными изменениями рассуждений из статьи [2] доказывает следующие сходимости при $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\varepsilon^{-1} \lambda_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon} \rightarrow \Lambda_p, \quad k = 1, \dots, J, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Предел (21) не зависит от параметра $t \geq t_0 > 0$, и такой результат не способствует достижению поставленной в работе цели. Простейший вариант асимптотического анализа возмущений кратных собственных значений (см., например, книгу [27, гл. 10 и 11]) предлагает такой анзац:

$$\lambda_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon} = \varepsilon \Lambda_p + \varepsilon^2 \Lambda_{t,k}^{p'} + \dots, \quad k = 1, \dots, J, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (22)$$

Здесь $\Lambda_{t,1}^{p'}, \dots, \Lambda_{t,J}^{p'}$ — величины, подлежащие определению, а многоточие замещает младшие асимптотические члены, не существенные в предпринимаемом формальном анализе.

Для построения двучленной асимптотики собственных функций задачи (3) применим метод сращиваемых разложений (см. книги [28, 29], [27, гл. 2] и др.): помимо внутренних разложений

$$u_{t,\varepsilon((k+(p-1)J)}^{\varepsilon}(x) = b_j^{pk}(t) U_p(\xi^j) + \varepsilon U_{t,j}^{pk'}(\xi^j) + \dots, \quad j = 1, \dots, J, \quad (23)$$

приемлемых в малых окрестностях включений (1), вводим внешнее разложение

$$u_{t,((k+(p-1)J)}^{\varepsilon}(x) = \varepsilon \sum_{j=1}^J a_j^{pk}(t) G(x, P^j(t)) + \dots, \quad (24)$$

пригодное на удалении от включений и содержащее функцию Грина $G(x, x')$ задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω . Для функции $x \mapsto G_t^j(x) = G(x, P^j(t))$ выполнены соотношения

$$G_t^j(x) = \chi_t^j(x) \Phi(x - P^j(t)) + G_t^{j0}(x), \quad G_t^{j0}(x)_t(x) = \sum_{l=1}^J \chi_t^l(x) \mathbf{G}_l^j(t) + \widehat{G}_t^j(x), \quad j = 1, \dots, J, \quad (25)$$

$$r_l(t) |\widehat{G}_t^j(x)| + |\nabla_x \widehat{G}_t^j(x)| \leq c_\Omega^j t^{-1}, \quad r_l(t) := |x - P^l(t)| \leq t R_P / 2, \quad (26)$$

где $R_P = \min\{|P^j(t_\Omega) - P^k(t_\Omega)| : j \neq k\}$ и $\chi_t^j(x) = \chi^j(t_\Omega t^{-1}(x - P^j(t)))$, а функция $\chi^j \in C_c^\infty(\Omega)$ равна единице в окрестности точки $P^j(t_\Omega)$ (см. ограничения (2)) и $\chi^j \chi^k = 0$ при $k \neq j$. Появление множителя t^{-1} в оценке (26) объясняется сближением точек из множества $\mathcal{P}(t)$ при уменьшении параметра t (см. статью [30] и см. далее разд. 4 и 5).

Лемма 2. Составленная из коэффициентов в формулах (25) матрица $\mathbf{G}(t) = (\mathbf{G}_l^j(t))_{j,l=1}^J$ размером $J \times J$ представима в виде $\mathbf{G}(t) = (4\pi t)^{-1} \mathbf{Y} - \mathbf{R}(t)$, где $\mathbf{R}(t)$ — симметричная и положительно определенная при $t \in (0, t_\Omega]$, но вырождающаяся при $t \rightarrow +0$ матрица, гладко зависящая от параметра $t \in [0, t_\Omega]$, а $\mathbf{Y}$ — числовая матрица с элементами $\mathbf{Y}_{kk} = 0$ и $\mathbf{Y}_{kl} = |P^k - P^l|^{2-d}$ при $k, l = 1, \dots, J$ и $l \neq k$.

Доказательство. Разность $G_t^{j0}(x) = G_t^j(x) - \Phi(x - P^j(t))$ — решение задачи

$$-\Delta_x G_t^{j0}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad G_t^{j0}(x) = -C_d |x - P^j(t)|^{2-d}, \quad x \in \partial\Omega.$$

Следовательно, (отрицательная) функция $G_t^{j0} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ гладко зависит от параметра $t \in [0, t_\Omega]$, так как точка $P^j(t)$ лежит внутри Ω . Применим формулу Грина в области $\Omega \setminus \mathbb{B}_R(P^k(t))$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} G_t^{j0}(x) \partial_n G_t^k(x) ds_x - \lim_{R \rightarrow +0} \int_{\partial\mathbb{B}_R(P^k(t))} \left(G_t^{j0}(x) \frac{\partial G_t^k}{\partial r_j}(x) - G_t^k(x) \frac{\partial G_t^{j0}}{\partial r_j}(x) \right) ds_x = \\ &= \int_{\partial\Omega} G_t^{j0}(x) \partial_n G_t^{j0}(x) ds_x - \int_{\partial\Omega} \Phi(x - P^j(t)) \partial_n \Phi(x - P^k(t)) ds_x + G_t^{j0}(P^k(t)) = \\ &= (\nabla_x G_t^{j0}, \nabla_x G_t^{j0})_\Omega + (\nabla_x \Phi(\cdot - P^j(t)), \nabla_x \Phi(\cdot - P^k(t)))_{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega} - \mathbf{R}_{kl}(t). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbb{B}_R(P^k(t))$ — шар $\{x : r_k(t) := |x - P^k(t)| < R\}$, а ∂_n — производная вдоль внешней нормали, в частности, $\partial_n = -\partial_{r_j}$ на сфере $\partial\mathbb{B}_R(P^j(t))$. Кроме того, $\mathbf{R}_{kl}(t) = -G_t^{j0}(P^k(t))$. Итак, $\mathbf{R}(t)$ — сумма двух матриц Грама, построенных с помощью скалярных произведений в $L^2(\Omega)$ и $L^2(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$ по двум наборам линейно независимых в случае $t > 0$ функций. Первое слагаемое $(4\pi t)^{-1} \mathbf{Y} t^{2-d}$ учитывает вид фундаментального решения $\Phi(x) = (4\pi|x|)^{-1}$.

Замечание 1. 1) По теореме Виета для корней многочлена $y \mapsto \det(\mathbf{Y} - y\mathbf{I})$, где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размером $J \times J$, в силу строения матрицы $\mathbf{Y}$ выполнено равенство $y_1 + \dots + y_J = 0$, т.е. имеются положительные и отрицательные корни, так как все они не могут стать нулем из-за отрицательного коэффициента при y^{J-2}

$$-|P^1 - P^2|^{-1} - |P^2 - P^3|^{-1} - \dots - |P^{J-1} - P^J|^{-1} - |P^J - P^1|^{-1}.$$

Таким образом, матрица $\mathbf{Y}$ и матрица $\mathbf{G}(t)$ при малом $t > 0$ не являются знакоопределенными, но все-таки $\mathbf{G}(t)$ может стать отрицательно определенной, если t велико.

2) При $J = 2$ (фиг. 1) два ($\pm$) собственных значения матрицы $\mathbf{Y}$ имеют вид $\pm |P^1 - P^2|^{-1}$.

Рассмотрим простое собственное значение Λ_p при условии $K_p \neq 0$. Найдем поправочные члены $\Lambda_k^{p'}(t)$ и $U_{t(j)}^{p'k'}$, а также коэффициенты $b_j^{pk}(t)$ и $a_j^{pk}(t)$, образующие столбцы $b^{pk}(t)$ и $a^{pk}(t)$ высотой J . С этой целью произведем сращивание разложений (23) и (24) на уровне ε^{d-2} . Благодаря связи $r_j = \varepsilon r_j$ радиальных переменных сравнение сингулярных составляющих в разложениях (23), (15) и (24), (25) приводит к равенствам $a_j^p(t) = K_p b_j^p(t)$, $j = 1, \dots, J$. При сращивании постоянных слагаемых в разложениях (24), (25) функция $U_{t,j}^{p'k'}$ приобретает такое поведение:

$$U_{t,j}^{p'k'}(\xi^j) = K_p \sum_{l=1}^J b_l^{pk}(t) \mathbf{G}_j^l(t) + O(\rho_j^{-1}), \quad |\xi^j| = \rho_j \rightarrow +\infty. \quad (27)$$

Теперь подставим анзацы (22) и (23) в задачу (3), положим $\varepsilon = 0$ после растяжения координат и уведем тем самым границу $\partial\Omega$ на бесконечность. В результате приходим к уравнению

$$-\Delta_{\xi^j} U_{t,j}^{pk'}(\xi^j) - X(\xi^j) \Lambda_p U_{t,j}^{pk'}(\xi^j) = X(\xi^j) \Lambda_{t,k}^{p'} b_j^{pk}(t) U_p(\xi^j), \quad \xi^j \in \mathbb{R}^3. \quad (28)$$

Умножим его на U_p и проинтегрируем по частям в шаре $\mathbb{B}_R = \{\xi^j : \rho_j < R\}$. Предельный переход при $R \rightarrow +\infty$ и представления (15), (27) дают соотношение

$$\begin{aligned} \Lambda_{t,k}^{p'} b_j^{pk}(t) &= \Lambda_{t,k}^{p'} b_j^{pk}(t) \int_{\omega} |U_p(\xi^j)|^2 d\xi^j = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}_R} U_p(\xi^j) (\Delta_{\xi^j} U_{t,j}^{pk'}(\xi^j) + X(\xi^j) \Lambda_p U_{t,j}^{pk'}(\xi^j)) d\xi^j = \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial\mathbb{B}_R} \left(U_{t,j}^{pk'}(\xi^j) \frac{\partial U_p}{\partial \rho_j}(\xi^j) - U_p(\xi^j) \frac{\partial U_{t,j}^{pk'}}{\partial \rho_j}(\xi^j) \right) ds_{\xi^j} = K_p^2 \sum_{l=1}^J b_l^{pk}(t) \mathbf{G}_j^l(t), \quad j = 1, \dots, J. \end{aligned} \quad (29)$$

Рассматривая равенства (29) (без средних их частей) как систему линейных алгебраических уравнений для столбца $b^p(t)$, выводим формулы

$$\Lambda_{t,k}^{p'} = K_p^2 \mathbf{g}_k(t), \quad k = 1, \dots, J, \quad (30)$$

в которых $\mathbf{g}_1(t) \leq \dots \leq \mathbf{g}_J(t)$ — собственные значения матрицы $\mathbf{G}(t)$ из леммы 2. При этом в силу той же леммы и формул (27), (28) верны используемые в п. 6 оценки

$$|\Lambda_{t,k}^{p'}| + \|U_{t,j}^{pk'}; L^2(\omega)\| \leq c_{pk} t^{-1}. \quad (31)$$

Соответствующие собственные векторы $b^{p1}(t), \dots, b^{pJ}(t) \in \mathbb{R}^J$, подчиненные условиям

$$b^{pj}(t) \cdot b^{pk}(t) = \delta_{j,k}, \quad j, k = 1, \dots, J, \quad (32)$$

вместе с упоминавшимися связями $a_j^p(t) = K_p b_j^p(t)$ конкретизируют выделенные члены анзацев (23) и (24). При выполнении равенств (29) задача (28), (27) имеет решение в виде

$$U_{t(j)}^{pk'}(\xi^j) = -K_p (b_1^{pk}(t) \mathbf{G}_j^1(t) + \dots + b_J^{pk}(t) \mathbf{G}_j^J(t)) + \tilde{U}_{t,j}^{pk'}(\xi^j). \quad (33)$$

Остаток $\tilde{U}_{t(j)}^{pk'} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$, допускающий разложение вида (15), определен с точностью до слагаемого $c_j^{pk'}(t) U_p$, т.е. в силу формулы $K_p \neq 0$ ему можно придать скорость затухания $O(\rho_j^{-2})$.

Подчеркнем, что знаки собственных значений матрицы $\mathbf{G}(t)$ из леммы 2, а вместе с ними и знаки поправочных членов в анзацах (22) в общем случае остаются неизвестными. В силу замечания 1 при $J = 2$ и $p = 1$ имеем $\Lambda_{t,1}^{1'} < 0$ и $\Lambda_{t,2}^{1'} > 0$, по крайней мере, при малом $t > 0$, что согласуется с утверждением леммы 1 и нашло отражение на фиг. 2.

В ситуации $K_p = 0$ и $\varkappa_p = 1$ указанные формулы не дают полезной информации об отдельных членах анзацев (22) и (23), (24) для собственных пар $\{\lambda_{t,q}^\varepsilon; u_{t,q}^\varepsilon\}$ задачи (3) при $q = p(J-1)+1, \dots, pJ$, и асимптотическую процедуру следует продолжить согласно алгоритмам из работы [31], изложенной в гл. 4 книги [27] (см. также упрощенный материал в гл. 2 и 9). Как пояснено в разд. 2, для кратного собственного значения Λ_p из списка (18) разве лишь один из коэффициентов $K_p, \dots, K_{p+\varkappa_p-1}$ может случиться ненулевым. Поэтому при $K_p \neq 0$ приведенные вычисления предоставляют содержательные формулы разве лишь для J собственных значений и их положение в списке $\lambda_{t,p(J-1)+1}^\varepsilon, \dots, \lambda_{t,(p+\varkappa_p-1)J}^\varepsilon$ зависит от знаков величин $\mathbf{g}_1(t), \dots, \mathbf{g}_J(t)$.

Имея хороший пример для $p = 1$ (см. разд. 5), не будем загромождать статью сложными конструкциями, не предоставляющими отчетливую информацию о поведении собственных значений (5).

4. АСИМПТОТИКА ПРИ МАЛОМ t

Далее понадобится только простая (без поправочного члена) и потому очевидная асимптотическая формула для собственных значений (5)

$$\lambda_{t,n}^\varepsilon = \varepsilon^m M_{\varepsilon^{-1}t,n} + \dots, \quad (34)$$

в которой фигурируют собственные значения (8) задачи (9) о группе включений. Основным становится вопрос о зависимости собственных пар $\{M_{\tau,n}; V_{\tau,n}\}$ от “быстрой” переменной $\tau = \varepsilon^{-1}t$. Выясним эту зависимость для больших τ . Поскольку при этом множества $\omega_1^1(\tau), \dots, \omega_J^1(\tau)$ становятся удаленными одно от другого, для собственных значений примем похожий на (22) анзац

$$M_{\tau,k+(p-1)J} = \Lambda_p + \tau^{-1} M_k^{p'} + \widetilde{M}_{\tau,k+(p-1)J}, \quad k = 1, \dots, J, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (35)$$

где Λ_p — член последовательности (6), а величины $M_k^{p'}$ и $\widetilde{M}_{\tau, k+(p-1)J}$ подлежат вычислению и оцениванию. Сначала предположим, что Λ_p — простое собственное значение, применим метод составных разложений (см. [27, 32] и др.) и представим собственные функции в виде

$$V_{\tau, k+(p-1)J}(\xi) = \sum_{j=1}^J (h_j^{p,k} U_p(\xi - \tau P^j) + \tau^{-1} U_{k,j}^{p'}(\xi - \tau P^j)) + \widetilde{V}_{\tau, k+(p-1)J}(\xi). \quad (36)$$

Столбец коэффициентов $h^{p,k} = (h_1^{p,k}, \dots, h_J^{p,k}) \in \mathbb{R}^J$ найдем из условий разрешимости уравнений

$$-\Delta_{\xi,j} U_{k,j}^{p'}(\xi^j) - X(\xi^j) \Lambda_p U_{k,j}^{p'}(\xi^j) = M_k^{p'} h_j^{p,k} U_p(\xi^j) + F_{k,j}^{p'}(\xi^j), \quad \xi^j \in \mathbb{R}^3, \quad (37)$$

для поправочных членов $U_{k,l}^{p'}$ и $M_k^{p'}$, а его правая часть

$$F_{k,j}^{p'}(\xi^j) = X(\xi^j) \Lambda_p \frac{K_p}{4\pi} \sum_{l=1, \dots, J, l \neq j} h_l^{p,k} |P^j - P^l|^{-1}, \quad \xi^j \in \mathbb{R}^3,$$

получена посредством подстановки анзацев (35) и (36) в формулу (9), применения разложения (36) и сбора множителей при τ^{2-d} при учете соотношения

$$\Phi(\xi^l) = (4\pi)^{-1} |\xi^k + \tau(P^k - P^l)|^{-1} = (4\pi)^{-1} \tau^{-1} |P^k - P^l|^{2-d} (1 + O(\tau^{-1})).$$

В силу нормировки (14) при $q = p$ и определения матрицы $\mathbf{Y}$ в лемме 2 условия разрешимости совокупности ($k = 1, \dots, J$) задач (37) принимают вид системы J алгебраических уравнений

$$M_j^{p'} h^{p,j} = -(4\pi)^{-1} K_p^2 \mathbf{Y} h^{p,j}. \quad (38)$$

Появление в равенстве (38) матрицы $\mathbf{Y}$ размером $J \times J$ обусловлено следующей выкладкой, которая использует формулу Грина в шаре большого радиуса, представление (15), вид фундаментального решения и площадь $4\pi R^2$ сферы $\partial \mathbb{B}_R$:

$$\Lambda_p \int_{\omega} U_p(\xi) d\xi = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{B}_R} \Delta_{\xi} U_p(\xi) d\xi = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial \mathbb{B}_R} \frac{\partial U_p}{\partial \rho}(\xi) ds_{\xi} = -K_p \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\partial \mathbb{B}_R} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}(\xi) ds_{\xi} = K_p. \quad (39)$$

Итак, $M_j^{p'}$ и $h^{p,j}$ — собственные значения $-(4\pi)^{-1} K_p^2 y_j$ и собственные векторы матрицы $-(4\pi)^{-1} K_p^2 \mathbf{Y}$ (со знаком минус). При этом задачи (37) стали разрешимыми, т.е. все отдельные слагаемые асимптотических анзацев (35) и (36) определены. Оценки асимптотических остатков

$$|\widetilde{M}_{\tau, k+(p-1)J}| \leq c_k^p \tau^{-2}, \quad k = 1, \dots, J, \quad (40)$$

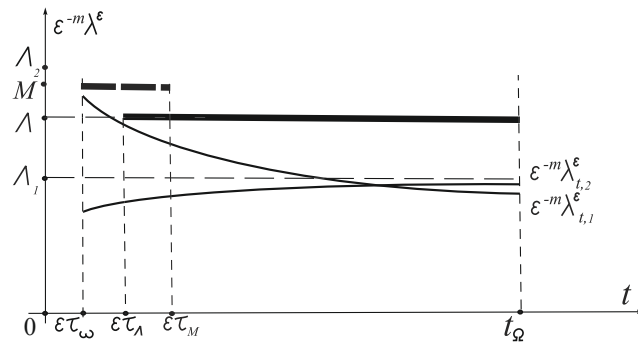
выводятся при помощи метода [27, гл. 5, § 3] или понятной модификации выкладок из разд. 6. Столь же доступные оценки остатков $\widetilde{V}_{\tau, k+(p-1)J}$ в разложениях (36) далее не понадобятся.

Как и в разд. 4, в случае кратного собственного значения Λ_p из формулы (18) при $\kappa_p > 1$ большинство (если $K_p = \dots = K_{p+\kappa_p-1} = 0$, то — все) первых поправочных членов в анзаце (35) для собственных значений $M_{\tau, (p-1)J+1}, \dots, M_{\tau, (p+\kappa_p-1)J}$ обращаются в нуль. По договоренности построением младших асимптотических членов с помощью известных процедур из монографии [27, гл. 2, 5, 9], описывающих распадение такого собственного значения Λ_p при $\tau \rightarrow +\infty$ согласно представлениям $M_{\tau, q} = \Lambda_p + \tau^{1-d} M_q^{p''} + \dots$, в настоящей работе не занимаемся.

Собственные функции $V_{\tau, n}$ раскладываются вне шара $\mathbb{B}_{\tau R_{\omega}}$ в сходящийся ряд Фурье с членами $K_{\tau, n}^Q Q(-\nabla_{\xi}) \Phi(\xi)$, где Q — однородные гармонические полиномы степени $q_Q \in \mathbb{N}_0$. Для коэффициентов $K_{\tau, n}^Q$ верны интегральные представления (см. статью [24, § 2] и формулу (17))

$$K_{\tau, n}^Q = \mathbf{q}_Q^{-1} M_{\tau, n} \int_{\omega^1(\tau)} Q(\xi) V_{\tau, n} d\xi, \quad \text{где } \mathbf{q}_Q = Q(\nabla_{\xi}) Q(\xi)|_{\xi=0} > 0. \quad (41)$$

Согласно [33, гл. 7] величины $M_{\tau, n}$ непрерывно зависят от параметра τ и в силу соотношений (35), (40) они остаются ограниченными при $\tau \rightarrow +\infty$. Собственные функции $V_{\tau, n}$ нормированы в пространстве $L^2(\omega^1(\tau))$ и



Фиг. 2. Графики двух первых нормированных собственных чисел $\epsilon^{-1}\lambda_{t,1}^\epsilon$ и $\epsilon^{-1}\lambda_{t,2}^\epsilon$. Для точек $\{\Lambda, t\}$ на жирных линиях задача (3) однозначно разрешима (см. теорему 2 и замечание 2, 3).

объем группы включений $|\omega^1(\tau)| = J|\omega|$ остается неизменным. Следовательно, модули коэффициентов (41) не превосходят $Cq_Q^{-1/2}\tau^q$, и поэтому справедливы оценки

$$|V_{\tau,n}(\xi)| \leq c_n \left(\frac{\tau}{|\xi|} \right) |\xi|^{-1}, \quad |\nabla_\xi V_{\tau,n}(\xi)| \leq c_n \left(\frac{\tau}{|\xi|} \right) |\xi|^{-2} \quad \text{при } \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{B}_{\tau R_\omega}, \quad (42)$$

причем $[0, +\infty) \ni z \mapsto c_n(z)$ — непрерывные ограниченные функции. Оценки (42) также можно получить посредством замены координат $\xi \mapsto \tau^{-1}\xi$ и исследования уравнения вида (5) с исчезающими при $\tau \rightarrow +\infty$ включениями (см. [27, гл. 5, § 3 и гл. 9] и [23, гл. 6, § 5]).

5. ОБ ЭВОЛЮЦИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

На основе построенных асимптотик проследим, что происходит с первыми J собственными значениями из последовательности (5).

Поскольку для собственной функции U_1 выполнено неравенство $K_1 > 0$, верны асимптотические формулы (22) с ненулевыми поправками (30), причем для $t \geq t_1 > 0$ и малого параметра $\epsilon \in (0, \epsilon_1]$ в $c_1\epsilon$ -окрестность точки Λ_1 попадают нормированные собственные значения $\epsilon^{-1}\lambda_{t,1}^\epsilon, \dots, \epsilon^{-1}\lambda_{t,J}^\epsilon$ задачи (3) и только они; здесь ϵ_1, t_1 и c_1 — положительные числа. Согласно замечанию 1 и лемме 2 при малых t эти значения располагаются как выше, так и ниже точки Λ_1 , но при больших t — только ниже, по причинам главенствующих ролей соответственно первого и второго слагаемых из представления матрицы $\mathbf{G}(t)$ в лемме 2 (см. фиг. 2, где $J = 2$).

При сближении включений, вызванном уменьшением параметра t , величины $\epsilon^{-1}\lambda_{t,1}^\epsilon$ все более удаляются от точки Λ_1 , но при совсем малых значениях $t \in [\epsilon\tau_\omega, \epsilon\tau_1]$, где $\tau_1 > \tau_\omega$, приходится пользоваться асимптотической формулой (34), содержащей члены $M_{\tau,1}, \dots, M_{\tau,J}$ последовательности (8). Иными словами, группа сближенных включений интерпретируется как единая концентрированная масса. При конечных значениях “быстрой” времениподобной переменной $\tau = \epsilon^{-1}t$ поведение величин $\lambda_{\epsilon\tau,1}^\epsilon, \dots, \lambda_{\epsilon\tau,J}^\epsilon$ можно определить только в результате численного анализа спектра уравнения (8), однако при увеличении параметра τ начинает действовать представление (34), в котором $p = 1$, а $M_{\tau,1}^{1'}, \dots, M_{\tau,J}^{1'}$ — собственные значения матрицы $-(4\pi)^{-1}K_1^2\mathbf{Y}$ (со знаком минус). Теперь настал черед еще раз принять во внимание формулы (22) при $p = 1$, где в качестве младших членов $\Lambda_{t,j}^{1'}, j = 1, \dots, J$, выступают произведения (30) квадрата коэффициента $K_1 > 0$ и собственных значений $\mathbf{g}_j(t)$ матрицы $\mathbf{G}(t)$. В силу леммы 2 справедливы представления

$$\epsilon\Lambda_{t,k}^{1'} = \epsilon K_1^2 \mathbf{g}_k(t) = \epsilon((4\pi)^{-1}K_1^2 y_k t^{-1} + O(1)) = K_1^2 (4\pi)^{-1} y_k \tau^{-1} + O(\epsilon^{-1}) = \tau^{-1} M_k^{1'} + O(\epsilon).$$

Благодаря этой связи, асимптотические формулы (22) и (34) плавно переходят одна в другую, обеспечивая тем самым “сшивание” асимптотических представлений собственных значений $\lambda_{t,k}^\epsilon$ в разных зонах изменения времениподобного параметра.

Если Λ_p — простое собственное значение при $p > 1$ и $K_p \neq 0$, то описанная “стыковка” асимптотических формул (22) и (34) сохраняется полностью, однако в случае $K_p = 0$ поправочные члены аннулируются, совпадение асимптотик становится более явным, но для получения информации об отклонении собственных значений $\lambda_{(J-1)p+1}^\epsilon, \dots, \lambda_{Jp}^\epsilon$ от точки $\epsilon\Lambda_p$ нужны отсутствующие младшие члены асимптотики. То же касается и кратных собственных значений (18) уравнения (7), для которых при $K_p \neq 0$ разве лишь J элементов списка $\lambda_{(J-1)p+1}^\epsilon, \dots, \lambda_{J(p+\kappa_p)}^\epsilon$ подчиняются описанному закону.

Наконец, на малом сегменте $[\varepsilon\tau_\omega, \varepsilon\tau_p] \ni t$ собственные значения (5) описываются асимптотикой (34), мало-содержательной из-за недостатка информации о зависимости спектра (8) предельного уравнения (9) от быстрого времениподобного параметра τ .

6. НАЧАЛО ОБОСНОВАНИЯ АСИМПТОТИКИ

Введем скалярное произведение

$$\langle u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, t} = (\nabla_x u_t^\varepsilon, \nabla_x \psi_t^\varepsilon)_\Omega + \varepsilon^{-2} (u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon(t)} + \varepsilon \rho(u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon)_\Omega \quad (43)$$

в пространстве Соболева $\mathcal{H}^\varepsilon(t) = H_0^1(\Omega)$ и определим положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряженный оператор $\mathcal{K}_t^\varepsilon$ при помощи тождества

$$\langle \mathcal{K}_t^\varepsilon u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \varepsilon^{-3} (u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon(t)} + \rho(u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon)_\Omega \quad \forall u_t^\varepsilon, \psi_t^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon(t). \quad (44)$$

Согласно теоремам 10.1.5 и 10.2.2 из книги [26] и благодаря компактности вложения $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ существенный спектр оператора $\mathcal{K}_t^\varepsilon$ состоит из единственной точки $\kappa = 0$, а дискретный спектр образует бесконечно малую монотонную положительную последовательность

$$\kappa_{t,1}^\varepsilon \geq \kappa_{t,2}^\varepsilon \geq \dots \geq \kappa_{t,n}^\varepsilon \geq \dots \rightarrow +0. \quad (45)$$

В силу определений (43) и (44) интегральное тождество (4) эквивалентно абстрактному уравнению $\mathcal{K}_t^\varepsilon u_t^\varepsilon = \kappa_t^\varepsilon u_t^\varepsilon$ в пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon(t)$ с новым спектральным параметром

$$\kappa_t^\varepsilon = (\varepsilon + \lambda_t^\varepsilon)^{-1} = \varepsilon^{-1} (1 + \varepsilon^{-1} \lambda_t^\varepsilon)^{-1}. \quad (46)$$

Формула (46) переделывает последовательность (45) в неограниченную монотонную последовательность (5) собственных значений исходной вариационной задачи (4).

Следуя книге [27, гл. 2 и 4], в пространстве Соболева $H^\ell(\Omega)$ введем весовую норму

$$\|u_t^\varepsilon; \mathbf{V}_\beta^{\ell, \varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| = \left(\sum_{k=0}^{\ell} \|(\varepsilon + \mathbf{r}(t))^{\beta-\ell+k} \nabla_x^k u_t^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \right)^{1/2}, \quad (47)$$

где $\ell \in \mathbb{N}_0$ и $\beta \in \mathbb{R}$ — показатели гладкости и веса, а $\mathbf{r}(t) = \min\{r_1(t), \dots, r_J(t)\}$ и $r_j(t) = |x - P^j(t)|$. При $\varepsilon = 0$ пространство $\mathbf{V}_\beta^{\ell, 0}(\Omega; \mathcal{P}^\varepsilon(t))$ становится пространством Кондратьева (см. [25], а также [23, гл. 4]), однако в случае $\varepsilon > 0$ норма (47) эквивалентна обычной соболевской норме, хотя константы эквивалентности могут неограниченно возрастать при $\varepsilon \rightarrow +0$. Убедимся в том, что для $\ell = 1$ и $\beta = 0$ упомянутые константы все-таки от малого параметра не зависят.

Лемма 3. *Пространство $\mathcal{H}^\varepsilon(t)$ топологически и алгебраически совпадает с пространством $\mathbf{V}_0^{1, \varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))$ равномерно относительно параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_t]$ при некотором $\varepsilon_t > 0$.*

Доказательство. Правая оценка в соотношении эквивалентности

$$C_t^\varepsilon(\Omega) \|u_t^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\| \geq \|u_t^\varepsilon; \mathbf{V}_0^{1, \varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \geq c_t^\varepsilon(\Omega) \|u_t^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\| \quad \text{при } c_t^\varepsilon(\Omega) > 0$$

очевидна, так как $\mathbf{r}_\varepsilon(t) \geq \varepsilon$ на ω_j^ε . Левая оценка обеспечена неравенствами Пуанкаре—Фридрихса в области Ω и на шаре $\mathbb{B}_{\varepsilon R}^j$, а также одномерным неравенством Харди (11) с параметром $\theta = 1$, проинтегрированным по угловым переменным.

Далее понадобится лемма о “почти собственных” значениях и векторах (см. первоисточник [32]), обеспеченная спектральным разложением резольвенты (см., например, [26, гл. 6]).

Лемма 4. *Пусть $\mathbf{u}_t^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon(t)$ и $\mathbf{k}_t^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ таковы, что*

$$\|\mathbf{u}_t^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\| = 1, \quad \|\mathcal{K}_t^\varepsilon \mathbf{u}_t^\varepsilon - \mathbf{k}_t^\varepsilon \mathbf{u}_t^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\| =: \delta_t^\varepsilon \in [0, \mathbf{k}_t^\varepsilon). \quad (48)$$

Тогда у оператора $\mathcal{K}_t^\varepsilon$ есть собственное число $\kappa_{n_t^\varepsilon}^\varepsilon$, подчиненное неравенству $|\mathbf{k}_t^\varepsilon - \kappa_{n_t^\varepsilon}^\varepsilon| \leq \delta_t^\varepsilon$. Более того, при любом $\delta_t^{\varepsilon\#} \in (\delta_t^\varepsilon, \mathbf{k}_t^\varepsilon)$ найдутся коэффициенты $\mathbf{c}_{t, \mathbf{N}_t^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathbf{c}_{t, \mathbf{N}_t^\varepsilon + \mathbf{X}_t^\varepsilon - 1}^\varepsilon$, для которых

$$\left\| \mathbf{u}_t^\varepsilon - \sum_{l=\mathbf{N}_t^\varepsilon}^{\mathbf{N}_t^\varepsilon + \mathbf{X}_t^\varepsilon - 1} \mathbf{c}_{t, l}^\varepsilon \mathcal{U}_{t, l}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t) \right\| \leq 2 \frac{\delta_t^\varepsilon}{\delta_t^{\varepsilon\#}}, \quad \sum_{l=\mathbf{N}_t^\varepsilon}^{\mathbf{N}_t^\varepsilon + \mathbf{X}_t^\varepsilon - 1} |\mathbf{c}_{t, l}^\varepsilon|^2 = 1. \quad (49)$$

Здесь $\kappa_{t, N_t^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \kappa_{t, N_t^\varepsilon + X_t^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ — набор всех собственных значений оператора $\mathcal{K}_t^\varepsilon$ на (замкнутом) сегменте $[\kappa_t^\varepsilon - \delta_t^{\varepsilon\#}, \kappa_t^\varepsilon + \delta_t^{\varepsilon\#}]$, а соответствующие собственные векторы $\mathcal{U}_{t, N_t^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{U}_{t, N_t^\varepsilon + X_t^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки $\langle \mathcal{U}_{t, l}^\varepsilon, \mathcal{U}_{t, k}^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \delta_{l, k}$.

Начнем с технически более простого случая малого $t = \varepsilon t$: включения соединены в конгломерат $\omega^\varepsilon(t)$. В качестве “почти собственной” пары оператора $\mathcal{K}_t^\varepsilon$ возьмем выражения

$$\mathbf{k}_{t, n}^\varepsilon = \varepsilon^{-1}(1 + M_{\tau, n})^{-1} \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_{t, n}^\varepsilon = \|\mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon; \mathcal{H}_t^\varepsilon\|^{-1} \mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon, \quad (50)$$

где $\{M_{\tau, n}; V_{\tau, n}\}$ — собственная пара уравнения (9), $\mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon(x) = \chi(x) V_{\tau, n}(\varepsilon^{-1}x)$, а $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ — срезающая функция, равная единице в шаре $\mathbb{B}_{R_\Omega}$, причем $\mathbb{B}_{2R_\Omega} \subset \Omega$.

В первую очередь вычислим скалярное произведение $\langle \mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon, \mathbf{v}_{\tau, q}^\varepsilon \rangle_{t, \varepsilon}$. Имеем

$$\left| \int_\Omega \left| \nabla_x \left(\chi(x) V_{\tau, n} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right) \right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^3} |V_{\tau, n}(\xi)|^2 d\xi \right| \leq c c_n \left(\frac{\varepsilon \tau}{R_\Omega} \right) \varepsilon^3 \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{R_\Omega/\varepsilon}^\infty \rho^{-2} d\rho + \int_{R_\Omega/\varepsilon}^{2R_\Omega/\varepsilon} d\rho \right) \leq C \varepsilon^2, \quad (51)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\omega^\varepsilon(\varepsilon \tau)} |\mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon(x)|^2 dx = \varepsilon, \quad \varepsilon \int_\Omega |\mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon(x)|^2 dx \leq c_n \varepsilon \int_0^{2R_\Omega} \left(1 + \frac{\rho}{\varepsilon} \right)^{-2} \rho^2 d\rho \leq C_n \varepsilon^2.$$

Применение оценок (42) в первой строке требует ограничение $\varepsilon \tau = t \leq t'_{\Omega, \omega} =: R_\Omega$, которое влечет за собой и третье неравенство в списке (51); при этом показатели степеней радиальной переменной $\rho = |\xi|$ произошли от упомянутых оценок. Второе равенство — следствие нормировки (20). Итак, в силу тождества (19) при $\Psi = V_{\tau, n}$ получаем, что

$$|\langle \mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon, \mathbf{v}_{\tau, q}^\varepsilon \rangle_{t, \varepsilon} - \delta_{n, q} \varepsilon (M_{\tau, n} + 1)| \leq c_{n, q} \varepsilon^2. \quad (52)$$

Оценим величину $\delta_{t, n}^\varepsilon$, найденную по формуле (48) для пары (50). Имеем

$$\begin{aligned} \delta_{t, n}^\varepsilon &= \sup |\langle \mathcal{K}_t^\varepsilon \mathbf{u}_{t, n}^\varepsilon - \mathbf{k}_{t, n}^\varepsilon \mathbf{u}_{t, n}^\varepsilon, \Psi_t^\varepsilon \rangle_{t, \varepsilon}| = \\ &= \mathbf{k}_{t, n}^\varepsilon \|\mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\|^{-1} \sup |(\nabla_x \mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon, \nabla_x \Psi_t^\varepsilon)_\Omega - M_{\tau, n}((\rho \varepsilon + \varepsilon^{-2} X_t^\varepsilon) \mathbf{v}_{\tau, n}^\varepsilon, \Psi_t^\varepsilon)_\Omega|. \end{aligned} \quad (53)$$

Супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon(t)$ и $\|\Psi_t^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\| \leq 1$, т.е. $\|\Psi_t^\varepsilon; \mathbf{V}_0^{1, \varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c$. Обработаем выражение $I_{\tau, n}^\varepsilon(\Psi_t^\varepsilon)$ между последними знаками модуля в (53). В первом скалярном произведении перенесем срезку χ от $V_{\tau, n}$ к Ψ_t^ε и оценим возникающие коммутаторы $[\nabla_x, \chi]$, локализованные на кольце $\mathbb{A}_{R_\Omega} = \mathbb{B}_{2R_\Omega} \setminus \mathbb{B}_{R_\Omega}$, аналогично выкладке (51):

$$|(V_{\tau, n} \nabla_x \chi, \nabla_x \Psi_t^\varepsilon)_\Omega| + |(\nabla_x V_{\tau, n}, \Psi_t^\varepsilon \nabla_x \chi)_\Omega| \leq c \left(\int_{R_\Omega}^{2R_\Omega} \left(\left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^{-2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^{-4} \right) r^2 dr \right)^{1/2} \|\Psi_t^\varepsilon; H^1(\mathbb{A}_{R_\Omega})\| \leq C \varepsilon.$$

Кроме того,

$$M_{\tau, n} \rho \varepsilon^m |(V_{\tau, n}, \chi \Psi_t^\varepsilon)_\Omega| \leq c \varepsilon \left(\int_0^{2R_\Omega} \left(1 + \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-2} r^2 dr \right)^{1/2} \|\Psi_t^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \leq C \varepsilon^2.$$

Оставшиеся в выражении $I_{\tau, n}^\varepsilon(\Psi_t^\varepsilon)$ члены образуют разность

$$(\nabla_x V_{\tau, n}, \nabla_x (\chi \Psi_t^\varepsilon))_{\mathbb{R}^d} - \varepsilon^{-2} M_{\tau, n} (V_{\tau, n}, \chi \Psi_t^\varepsilon)_{\omega^\varepsilon(\varepsilon \tau)},$$

которая после растяжения координат исчезает в силу интегрального тождества (19) для пары $\{M_{\tau, n}; V_{\tau, n}\}$ с финитной пробной функцией $(\xi \mapsto \chi(\varepsilon \xi) \Psi_t^\varepsilon(\varepsilon \xi))$.

Итак, в силу полученных оценок и формул (50), (52) находим, что

$$\delta_{t, n}^\varepsilon \leq c_n \varepsilon^{-1/2}. \quad (54)$$

Теперь лемма 4 и соотношение (46) предоставляют собственное значение $\kappa_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon$ оператора $\mathcal{K}_t^\varepsilon$ и собственное значение $\lambda_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon$ задачи (3), для которых верны неравенства

$$|\kappa_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon - \mathbf{t}_{t, n}^\varepsilon| \leq c_n \varepsilon^{-1/2} \Rightarrow |\varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon - M_{\tau, n}| \leq c_n \varepsilon^{1/2} (1 + M_{\tau, n}) (1 + \varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon). \quad (55)$$

Отсюда сначала выводим, что $1 + \varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon \leq 2(1 + M_{\tau, n}^\varepsilon)$ в случае $c_n \varepsilon^{1/2} (1 + M_{\tau, n}^\varepsilon) \leq 1/2$, а затем для $C_n = 2c_n(1 + M_{\tau, n}^\varepsilon)^2$ и подходящего $\varepsilon_n > 0$ — оценку

$$|\varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(n)}^\varepsilon - M_{\tau, n}^\varepsilon| \leq C_n \varepsilon^{1/2} \quad \text{при} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_n). \quad (56)$$

Индекс $N_t^\varepsilon(n)$ остался неизвестным. Сходимость $\varepsilon^{-1} \lambda_{\varepsilon\tau, n}^\varepsilon \rightarrow M_{\tau, n}$ (ср. формулу (21)), установленная в работе [2] при фиксированном параметре τ и, в частности, обеспечивающая равенство $N_t^\varepsilon(n) = n$ в формуле (56), по непрерывности переносится на $\tau \in [\tau_\omega, \tau_0]$ при любом фиксированном $\tau_0 > \tau_\omega$, однако значения $\tau \in [\tau_0, \varepsilon^{-1} R'_\Omega]$ нуждаются в отдельном исследовании, которое закончим в разд. 7. Сначала проверим, что отображение $n \mapsto N_{\varepsilon t}^\varepsilon(n)$ можно сделать инъекцией. Пусть $M_{\tau, p}$ — собственное значение с кратностью $\varkappa_{\tau, p}$ (аналогично формуле (18)). Воспользуемся второй частью леммы 4 при $t = \varepsilon\tau$, где в качестве δ_n^ε возьмем не зависящую от t максимальную из мажорант (54) при $n = p, \dots, p + \varkappa_{\tau, p} - 1$ и положим $\delta_n^{\varepsilon\#} = \theta^{-1} \delta_n^\varepsilon$ при некотором $\theta \in (0, 1)$. Обозначим через $\mathbf{c}_{(t, n)}^\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}_t^\varepsilon}$ и $\mathcal{S}_{(t, n)}^\varepsilon$ столбцы коэффициентов и линейные комбинации, фигурирующие в соотношениях (49). Ввиду условий ортогональности и нормировки собственных векторов $\mathcal{U}_{t, k}^\varepsilon$ оператора $\mathcal{K}_t^\varepsilon$ (см. лемму 4) находим, что

$$\begin{aligned} |\mathbf{c}_{(t, n)}^\varepsilon \cdot \mathbf{c}_{(t, q)}^\varepsilon - \delta_{n, q}| &= |\langle \mathcal{S}_{(t, n)}^\varepsilon, \mathcal{S}_{(t, q)}^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, t} - \delta_{n, q}| \leq |\langle \mathcal{S}_{(t, n)}^\varepsilon - \mathbf{u}_{(t, n)}^\varepsilon, \mathcal{S}_{(t, q)}^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, t}| + \\ &+ |\langle \mathbf{u}_{(t, n)}^\varepsilon, \mathcal{S}_{(t, q)}^\varepsilon - \mathbf{u}_{(t, q)}^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, t}| + |\langle \mathbf{u}_{(t, n)}^\varepsilon, \mathbf{u}_{(t, q)}^\varepsilon \rangle_{\varepsilon, t} - \delta_{n, q}| \leq 2\theta + 2\theta + C_{n, q} \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Здесь помимо первой оценки (49) дважды применено неравенство (52): первый раз при $n = q$ для выяснения асимптотики нормы $\|\mathbf{v}_{(t, n)}^\varepsilon; \mathcal{H}_t^\varepsilon\|$, а второй — для выбранных n и q . Итак, при малых θ и ε столбцы $\mathbf{c}_{(t, p)}^\varepsilon, \dots, \mathbf{c}_{(t, p + \varkappa_{\tau, p} - 1)}^\varepsilon$ “почти ортонормированы” в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\mathbf{X}_t^\varepsilon}$, что возможно лишь в случае $\mathbf{X}_t^\varepsilon \geq \varkappa_{\tau, p}$, а значит, при подходящих $\theta \in (0, 1)$, $\varepsilon_n > 0$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$ в $(\theta^{-1} \delta_n^\varepsilon)$ -окрестности точки $\mathbf{k}_{t, n}^\varepsilon$ расположено не менее $\varkappa_{\tau, p}$ собственных значений оператора $\mathcal{K}_t^\varepsilon$. Итак, выкладка (55), (56) устанавливает существование таких $C_p > 0$ и $\varepsilon_p > 0$, что

$$|\varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(p) + q}^\varepsilon - M_{\tau, p + q}^\varepsilon| \leq C_p \varepsilon^{1/2} \quad \text{при} \quad q = 0, \dots, \varkappa_{\tau, p} - 1 \quad \text{и} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_p), \quad t \in [\varepsilon\tau_\omega, \varepsilon\tau'_\omega]. \quad (57)$$

Соотношение (57) не обслуживает большие значения t и, более того, не включает непосредственно поправку $\varepsilon^2 \Lambda_{t, k}^{p'}$ из анзаца (22). Поэтому приходится повторить вычисления для больших значений времениподобного параметра t . В ситуации (18) согласно формулам (46) и (22) в качестве “почти собственных” пар оператора $\mathcal{K}_t^\varepsilon$ возьмем выражения

$$\mathbf{k}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} (\Lambda_p + \varepsilon \Lambda_{t, k}^{p'})^{-1} \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon = \|\mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon; \mathcal{H}_t^\varepsilon\|^{-1} \mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon, \quad (58)$$

где $k = 1, \dots, J$ и в соответствии с разложениями (23) и (24)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon(x) &= \sum_{j=1}^J \chi_t^j(x) (b_j^{pk}(t) U_p(\varepsilon^{-1}(x - P^j(t))) + \varepsilon U_{t, j}^{pk'}(\varepsilon^{-1}(x - P^j(t)))) + \\ &+ \mathcal{X}_t^\varepsilon(x) \varepsilon K_p \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) G_t^j(x) - \mathcal{X}_t^\varepsilon(x) \varepsilon K_p \sum_{j=1}^J \chi_t^j(x) (b_j^{pk}(t) \Phi(x - P^j(t)) + \sum_{l=1}^J b_l^{pk}(t) \mathbf{G}_j^l(t)). \end{aligned} \quad (59)$$

Приведем пояснения к конструкции (59), включающей срезки с перехлестывающимися носителями (см. [31] и [27, гл. 4]), а именно, сглаживающую особенности функции Грина срезку

$$\mathcal{X}_t^\varepsilon(x) = 1 - \chi_t^1(P^1(t) + \varepsilon^{-1}(x - P^1(t))) - \dots - \chi_t^J(P^J(t) + \varepsilon^{-1}(x - P^J(t)))$$

и срезки χ_t^j из формулы (25), обеспечивающие локализацию пограничных слоев. Кроме того,

$$|\nabla_x^p \mathcal{X}_t^\varepsilon(x)| \leq c_0 \varepsilon^{-p} (t_\Omega^{-1} t)^p \quad \text{и} \quad |\nabla_x^p \chi_t^j(x)| \leq c_j (t_\Omega^{-1} t)^p \quad \text{при} \quad p = 1, 2. \quad (60)$$

Важное наблюдение для последующих оценок величин $\delta_{t, p}^\varepsilon$ из формулы (48): слагаемые, подвергшиеся сращиванию в разд. 3, учтены в правой части равенства (59) дважды — и в первом и во втором членах, но такое дублирование устранено вычитаемым, составленным из названных слагаемых. Как и в формуле (53), вычисляем супремум по единичному шару в $\mathcal{H}^\varepsilon(t)$:

$$\begin{aligned} \delta_{t, p}^{\varepsilon, k} &= \sup |\langle \mathcal{K}_t^\varepsilon \mathbf{u}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon - \mathbf{k}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon, \mathbf{u}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon, \Psi_t^\varepsilon \rangle_{t, \varepsilon}| = \mathbf{k}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon \|\mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon(t)\|^{-1} \times \\ &\times \sup |\langle \nabla_x \mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon, \nabla_x \Psi_t^\varepsilon \rangle_\Omega - (\Lambda_p + \varepsilon \Lambda_{t, k}^{p'})((\rho\varepsilon + \varepsilon^{-2} X_t) \mathbf{v}_{t, k + (p-1)J}^\varepsilon, \Psi_t^\varepsilon) \rangle|. \end{aligned} \quad (61)$$

Сначала обрабатываем скалярные произведения $\mathbf{I}_{k,l}^{\varepsilon,\tau} := \langle \mathbf{v}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon}, \mathbf{v}_{t,l+(p-1)J}^{\varepsilon} \rangle_{\varepsilon,t}$, представив при учете разложений (25) функцию (59) в виде

$$\mathbf{v}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon} = \sum_{j=1}^J \chi_t^j b_j^{pk}(t) U_p + \tilde{\mathbf{v}}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon}, \quad \text{где} \quad \tilde{\mathbf{v}}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon} = \varepsilon \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) (\chi_t^j \tilde{U}_{t,j}^{pk'} + \chi_t^{\varepsilon} K_p \hat{G}_t^j).$$

Согласно формулам (15), (32) и (25) имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{I}_{k,l}^{\varepsilon,\tau} - \varepsilon \delta_{k,l} I_p| &\leq c_{k,l} \left(\varepsilon^{1/2} I_p^{1/2} (s_{k,l,\chi}^{\varepsilon,\tau} + s_{k,l,m}^{\varepsilon,\tau} + \tilde{s}_{k,l}^{\varepsilon,\tau})^{1/2} + s_{k,l,\chi}^{\varepsilon,\tau} + s_{k,l,m}^{\varepsilon,\tau} + \tilde{s}_{k,l}^{\varepsilon,\tau} \right), \\ \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) b_j^{pl}(t) (\|\nabla_x U_p; L^2(\mathbb{R}^d)\|^2 + \varepsilon^{-2} \|U_p; L^2(\omega_j^{\varepsilon})\|^2) &= \varepsilon \delta_{k,l} I_p, \quad I_p = \Lambda_p + 1, \\ s_{k,l,\chi}^{\varepsilon,t} &= \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) b_j^{pl}(t) \|\nabla_x ((1 - \chi_t^j) U_p); L^2(\Omega)\|^2 \leq \\ &\leq c_{k,l} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} \int_{R_0 t}^{\infty} \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^{-4} r^2 dr + \frac{1}{t^2} \int_{R_0 t}^{2R_0 t} \left(\frac{r}{\varepsilon} \right)^{-2} r^2 dr \right) \leq C_{k,l} \frac{\varepsilon^2}{t}, \\ s_{k,l,m}^{\varepsilon,t} &= \varepsilon \rho \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) b_j^{pl}(t) \|\chi_t^j U_p; L^2(\Omega)\|^2 \leq c_{k,l} \varepsilon \int_0^{R_0 t} \left(1 + \frac{r}{\varepsilon} \right)^{-2} r^2 dr \leq C_{k,l} \varepsilon^3, \\ \tilde{s}_{k,l}^{\varepsilon,t} &\leq \|\tilde{\mathbf{v}}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon}; \mathcal{H}_t^{\varepsilon}\| \|\tilde{\mathbf{v}}_{t,l+(p-1)J}^{\varepsilon}; \mathcal{H}_t^{\varepsilon}\|, \\ \|\tilde{\mathbf{v}}_{t,q+(p-1)J}^{\varepsilon}; \mathcal{H}_t^{\varepsilon}(t)\|^2 &\leq c_q \varepsilon^2 (\varepsilon^2 + \varepsilon^5 (\varepsilon + t)^{-3} + t^{-1} + \varepsilon^4 + \varepsilon t^{-1}) \leq C_q \varepsilon^2 (1 + t^{-1} \varepsilon) \leq C_q (1 + \tau_{\omega}^{-1} \varepsilon)^2. \end{aligned} \quad (62)$$

Приведем пояснения. В первой строке использовано простое алгебраическое неравенство, а во второй — соотношения (32) для столбцов $b^{q,p}$ и (10), (14) для пар $\{\Lambda_p; U_p\}$ после растяжения координат $x \mapsto \xi^j$. Остальные выкладки учитывают скорости затухания $O(|\xi|^{-1})$ и $O(|\xi|^{-2})$ остатков в разложениях (15) и (33) (см. оценки (16) и конец разд. 3), а также соотношения (25), (26) для сглаженных функций Грина $\hat{G}_t^j$. Оценки интегралов в последней строке такие же, как и в средней части списка (62). Подводя итог, находим, что

$$|\langle \mathbf{v}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon}, \mathbf{v}_{t,l+(p-1)J}^{\varepsilon} \rangle_{\varepsilon,t} - \varepsilon (1 + \Lambda_p) \delta_{k,l}| \leq c_{k,l} t^{-1/2} \varepsilon^{3/2}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\|\mathbf{v}_{t,k+(p-1)J}^{\varepsilon}; \mathcal{H}_t^{\varepsilon}\| \geq \frac{1}{2} \varepsilon^{1/2} (1 + \Lambda_p)^{1/2} \quad \text{при} \quad t \in [t_{\alpha} \varepsilon^{\alpha}, t_{\Omega}], \quad \alpha \in (0, 1), \quad t_{\alpha} > 0. \quad (63)$$

Итак, в силу (58) и (63) множитель при $\sup |I_{t,p}^{\varepsilon,k}|$ в правой части равенства (61) не превосходит $c_p \varepsilon^{-3/2}$. Само выражение $I_{t,p}^{\varepsilon,k}$ представим как сумму $I_{t,p}^{\varepsilon,U} + I_{t,p}^{\varepsilon,kG} + I_{t,p}^{\varepsilon,k\chi} + I_{t,p}^{\varepsilon,k\chi} + \varepsilon^m \rho I_{t,p}^{\varepsilon,k\Lambda}$, указав и оценив далее каждое из слагаемых. При учете неравенства (31) имеем

$$\begin{aligned} I_{t,p}^{\varepsilon,U} &= \sum_{j=1}^J (\nabla_x (b_j^{pk}(t) U_p + \varepsilon U_{t,j}^{pk'}), \nabla_x (\chi_t^j \Psi_t^{\varepsilon}))_{\Omega} - \varepsilon^{-2} (\Lambda_p + \varepsilon \Lambda_{t,k}^{p'}) (b_j^{pk}(t) U_p + \varepsilon U_{t,j}^{pk'}, \Psi_t^{\varepsilon})_{\omega_j^{\varepsilon}} = \\ &= \Lambda_{t,k}^{p'} \sum_{j=1}^J (U_{t,j}^{pk'}, \Psi_t^{\varepsilon})_{\omega_j^{\varepsilon}} \quad \Rightarrow \quad |I_{t,p}^{\varepsilon,U}| \leq c_p \varepsilon^{3/2} \varepsilon \|\Psi_t^{\varepsilon}; \mathcal{H}_t^{\varepsilon}\| \leq C_p \frac{\varepsilon^{5/2}}{t^2} \leq C_p \tau_{\omega}^{-1/2} \frac{\varepsilon^2}{t^{3/2}}. \end{aligned}$$

Здесь приняты во внимание интегральные тождества, обслуживающие уравнения (7) для U_p и (28) для $U_{t,j}^{pk'}$ с финитной пробной функцией $\chi_t^j \Psi_t^{\varepsilon} \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Множитель χ_t^j появился на второй позиции в скалярных произведениях из $I_{t,p}^{\varepsilon,U}$ в результате коммутирования с оператор-градиентом, а значит, обозначив

$$\mathbf{U}_{t,j}^{pk\varepsilon} = b_j^{kp}(t) (U_p - K_p \Phi) + \varepsilon (U_{t,j}^{pk'} - b_1^{kp}(t) \mathbf{G}_j^1(t) - \dots - b_J^{kp}(t) \mathbf{G}_j^J(t)),$$

при учете скоростей затухания остатков в разложениях (15) и (27), а также расположения и размера носителей производных срезов χ_t^j и последнего слагаемого в (59) обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} |I_{t,p}^{\varepsilon\chi}| &= \left| \sum_{j=1}^J (\mathbf{U}_{t,j}^{pk\varepsilon} \nabla_x \chi_t^j, \nabla_x \Psi_t^\varepsilon)_\Omega - (\nabla_x \mathbf{U}_{t,j}^{pk\varepsilon}, \Psi_t^\varepsilon \nabla_x \chi_t^j)_\Omega \right| \leq \\ &\leq \frac{c_p}{t} |\text{supp}|\nabla_x \chi_t^j||^{1/2} \left(\frac{\varepsilon^2}{t^2} + \varepsilon \frac{\varepsilon}{t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\varepsilon^3}{t^3} + \varepsilon \frac{\varepsilon}{t} \right) \|\Psi_t^\varepsilon; H^1(\Omega)\| \leq C_p \frac{\varepsilon^2}{t^{3/2}}. \end{aligned}$$

Для слагаемых, содержащих функции Грина, выполнены соотношения

$$I_{t,p}^{\varepsilon G} = \varepsilon K_p \sum_{j=1}^J b_j^{pk}(t) (\nabla_x G_t^j, \nabla_x (\mathcal{X}_t^\varepsilon \Psi_t^\varepsilon))_\Omega = 0,$$

$$\begin{aligned} |I_{t,p}^{\varepsilon\mathcal{X}}| &= \varepsilon |K_p| \left| \sum_{j=1}^J \sum_{l=1}^J \left(b_j^{pk}(t) (\tilde{G}_t^{jl} \nabla_x \chi_t^l, \nabla_x \Psi_t^\varepsilon)_\Omega - b_j^{pk}(t) (\nabla_x \tilde{G}_t^{jl}, \Psi_t^\varepsilon \nabla_x \chi_t^l)_\Omega \right) \right| \leq \\ &\leq c_p \frac{\varepsilon}{t} |\text{supp}|\nabla_x \chi_t^j||^{1/2} \left(\frac{\varepsilon}{t^2} \|\nabla_x \Psi_t^\varepsilon; L^2(\text{supp}|\nabla_x \chi_t^j|)\| + \frac{1}{t^2} \|\Psi_t^\varepsilon; L^2(\text{supp}|\nabla_x \chi_t^j|)\| \right) \leq C_p \frac{\varepsilon^2}{t^{3/2}}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве применены поточечные оценки (26).

Собрав приведенные соотношения для составляющих выражения (61), обнаруживаем, что

$$\delta_{\tau,p}^{\varepsilon k} \leq c_p \varepsilon^{1/2} t^{-3/2}.$$

Теперь повторим с понятными изменениями выкладки и рассуждения, опирающиеся на лемму 4, и для каждого $p \in \mathbb{N}$ и собственного числа Λ_p из формулы (18) найдем собственные числа задачи (3), для которых выполнены следующие неравенства с некоторыми положительными C_p и ε_p :

$$|\varepsilon^{-1} \lambda_{t, N_t^\varepsilon(p)+k}^\varepsilon - \Lambda_p - \varepsilon \Lambda_{t,k}^{p'}| \leq C_p t^{-3/2} \varepsilon^{3/2} \text{ при } k = 0, \dots, \varkappa_p - 1 \text{ и } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p), t \in [\varepsilon \tau_\omega, t_\Omega]. \quad (64)$$

Формула (64) перестает быть информативной при $t \leq t'_\Omega \varepsilon$, так как мажоранта в ней совпадает по порядку с поправочным членом $\varepsilon \Lambda_{t,k}^{p'} = O(t^{-1} \varepsilon)$. Это наблюдение согласуется с тем фактом, что при малых значениях времениподобного параметра t включения (4) объединяются в конгломерат $\omega^\varepsilon(t)$ и асимптотику собственных значений (5) приходится находить из уравнения (9) и оправдывать оценкой (57). Вместе с тем зоны действия асимптотических формул (64) и (57) пересекаются и при $t = O(\sqrt{\varepsilon})$ приводят к одинаковому результату (ср. пояснения в разд. 5). Сформулируем результат, проверку которого закончим в разд. 7, где будут найдены номера действовавших собственных значений $\lambda_{t, N_t^\varepsilon(p)}^\varepsilon$ из последовательности (5).

Теорема 1. При любом $\alpha \in (0, 1)$ для каждого $p \in \mathbb{N}$ найдутся положительные величины $t_{p,\omega}^\alpha$, $t_{p,\Omega}^\alpha$ и $C_p = C_p(\alpha)$, $\varepsilon_p = \varepsilon_p(\alpha)$, при которых выполнены следующие утверждения.

- 1) При $t \in [\varepsilon^\alpha t_{p,\Omega}^\alpha, t_\Omega]$ собственные числа (5) и (6) задач (3) и (7) связаны формулой (64), в которой $N_t^\varepsilon(p) = p$.
- 2) При $t \in [\varepsilon \tau_\omega, \varepsilon^\alpha t_{p,\omega}^\alpha]$ собственные числа (5) и (8) задач (3) и (9) связаны формулой (57), в которой $N_t^\varepsilon(p) = p$.

Подчернем, что при введенных в теореме 1 ограничениях на параметр t каждая из асимптотических формул становится содержательной, так как мажоранты в них оказываются значительно меньше выделенных асимптотических членов.

7. ЗАВЕРШЕНИЕ ОБОСНОВАНИЯ АСИМПТОТИКИ

Для того чтобы устранить упомянутый изъян в доказательстве теоремы 1, проверим вспомогательное утверждение.

Теорема 2. Пусть точка Λ лежит вне спектра $\{\Lambda_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ задачи (10). Тогда найдутся такие положительные ε_Λ и τ_Λ (фиг. 2), что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\Lambda)$, $t \in [\varepsilon \tau_\Lambda, t_\Omega]$ и любой функции $f_t^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ имеет единственное решение $u_t^\varepsilon \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ следующая задача Дирихле:

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_t^\varepsilon(x) - \varepsilon \Lambda(\rho + \varepsilon^{-3} X_t^\varepsilon(x)) u_t^\varepsilon(x) &= f_t^\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t^\varepsilon(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (65)$$

Доказательство. Применим прием вариации весового индекса из статьи [31] (см. ее изложение в монографии [27, гл. 4]). Ввиду эквивалентности весовых и обычных норм в пространствах Лебега и Соболева считаем, что $f_t^\varepsilon \in \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))$, и ищем решение $u_t^\varepsilon \in \mathbf{V}_1^{2,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))$, т.е. задаче (65) ставим в соответствие отображение

$$\mathbf{A}_\beta^\varepsilon(t, \Lambda) : \mathbf{V}_{1+\beta}^{2,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t)) \cap \mathbf{V}_{\beta,0}^{1,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t)) \rightarrow \mathbf{V}_{1+\beta}^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t)). \quad (66)$$

Нижний индекс 0 после весового β означает выполнение условия Дирихле на границе $\partial\Omega$. Понятно, что норма оператора (66) равномерно ограничена относительно параметра $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$.

Представим правую часть задачи (65) как сумму

$$f_t^\varepsilon(x) = f_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) + f_{t,1}^{h,\varepsilon}(\varepsilon^{-1}(x - P^1(t)) + \dots + f_{t,J}^{h,\varepsilon}(\varepsilon^{-1}(x - P^J(t))),$$

где $h \geq 2$,

$$f_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) = \mathcal{X}^{h,\varepsilon}(x) f_t^\varepsilon(x) \text{ и } f_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j) = \chi(h\varepsilon\xi^j) f_t^\varepsilon(P^j(t) + \varepsilon\xi^j), \quad j = 1, \dots, J,$$

а срезки $\chi_j^h(\xi^j) := \chi(h\xi^j)$ и $\mathcal{X}^{h,\varepsilon}(x)$ заданы формулами (13) и

$$\mathcal{X}^{h,\varepsilon}(x) = 1 - \chi((h\varepsilon)^{-1}(x - P^1(t))) - \dots - \chi((h\varepsilon)^{-1}(x - P^J(t))). \quad (67)$$

Для того чтобы носители функций $x \mapsto \chi_j^h(\varepsilon^{-1}(x - P^j(t)))$ и $x \mapsto \chi_k^h(\varepsilon^{-1}(x - P^k(t)))$ не пересекались при $k \neq j$, и введенные срезки образовали разбиение единицы, пригодное для дальнейшего анализа, приходится принять ограничение $t \geq h\varepsilon\tau_{\mathcal{P}_\omega}$ с некоторым $\tau_{\mathcal{P}_\omega} > \tau_\omega > 0$.

Ясно, что $f_{t,0}^{h,\varepsilon} \in \mathbf{V}_{1-\beta}^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))$ при $\beta \geq 0$, так как $f_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) = 0$, если $r(t) < Rh\varepsilon$. Кроме того,

$$\|f_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1-\beta}^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c_0((1 + Rh)\varepsilon)^{-\beta} \|f_t^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|. \quad (68)$$

Множитель $((1 + Rh)\varepsilon)^{-\beta}$ возник из-за уменьшения весового показателя в левой части. При $\beta \in [0, \beta_0]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ и малых $\beta_0, \varepsilon_0 > 0$ задача Дирихле

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) - \varepsilon \Lambda \rho u_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) &= f_{t,0}^{h,\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega, \\ u_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (69)$$

имеет единственное решение $u_{t,0}^{h,\varepsilon} \in \mathbf{V}_{1-\beta}^{2,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))$ (см. замечание 2, 2)) и верна оценка

$$\|u_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1-\beta}^{2,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq C_0 \|f_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1-\beta}^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \quad (70)$$

с общим для всех указанных β множителем C_0 .

Поскольку $f_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j) = 0$ при $|\xi^j| > 2Rh$, находим, что

$$\|f_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{1+\beta}^0(\mathbb{R}^3)\| \leq c_j(1 + 2Rh)^\beta \|f_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_1^0(\mathbb{R}^3)\| \leq c_j^\Omega(1 + 2Rh)^\beta \varepsilon^{-5/2} \|f_t^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|. \quad (71)$$

Первый множитель $(1 + 2Rh)^\beta$ — результат увеличения весового показателя, а множитель $\varepsilon^{-5/2}$ возник вследствие сжатия координат $\xi^j \mapsto x = P^j(t) + \varepsilon\xi^j$ согласно соотношению $r_j(t)^2 dx = \varepsilon^5 \rho_j^2 d\xi^j$. При $\beta \in [0, \beta_0]$ у уравнения

$$-\Delta_{\xi^j} u_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j) - \Lambda X(\xi^j) u_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j) = \varepsilon^2 f_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j), \quad \xi^j \in \mathbb{R}^3,$$

есть единственное решение $u_{t,j}^\varepsilon \in \mathcal{V}_{1+\beta}^2(\mathbb{R}^3)$ (см. замечание 2, 1)), удовлетворяющее следующей оценке с не зависящим от $\beta \in [0, \beta_0]$ множителем C_j :

$$\|u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{1+\beta}^2(\mathbb{R}^3)\| \leq C_j \varepsilon^2 \|f_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{1+\beta}^0(\mathbb{R}^3)\|. \quad (72)$$

В качестве приближенного решения задачи (65) возьмем сумму

$$(\mathbf{R}_0^\varepsilon(t, \Lambda) f_t^\varepsilon)(x) = u_{t,\approx}^{h,\varepsilon}(x) := \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}(x) u_{t,0}^{h,\varepsilon}(x) + \sum_{j=1}^J \chi_t^j(x) u_{t,j}^{h,\varepsilon}(\varepsilon^{-1}(x - P^j(t))).$$

Здесь $\mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}$ — срезка (67) при $h = 1$, а срезки χ_t^j взяты из (59); для них справедливы равенства $\mathcal{X}_t^{1,\varepsilon} \mathcal{X}^{h,\varepsilon} = \mathcal{X}^{h,\varepsilon}$ и $\chi_t^j \chi_j^h = \chi_j^h$. Следовательно, невязка в задаче (65) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_x u_{t,\approx}^{h,\varepsilon} + \varepsilon \Lambda(\rho + \varepsilon^{-3} X_t^\varepsilon) u_{t,\approx}^{h,\varepsilon} + f_t^\varepsilon =: F_t^{h,\varepsilon} = F_{t,0}^{h,\varepsilon} + \\ + \sum_{j=1}^J (F_{t,j}^{h,\varepsilon} + \Lambda \rho F_{t,j,m}^{h,\varepsilon}) := [\Delta_x, \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}] u_{t,0}^{h,\varepsilon} + \sum_{j=1}^J ([\Delta_x, \chi_t^j] u_{t,j}^{h,\varepsilon} + \varepsilon \Lambda \rho \chi_t^j u_{t,j}^{h,\varepsilon}). \end{aligned} \quad (73)$$

В силу формул (67) и (13) носители коэффициентов коммутатора $[\Delta_x, \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}] = 2\nabla_x \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon} \cdot \nabla_x + \Delta_x \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}$ расположены на объединении ($j = 1, \dots, J$) сферических колец $\{x : R \leq \varepsilon^{-1} r_j \leq 2R\}$, а значит, в силу оценок (68), (70) и (60) выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|F_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_1^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c_{R,\Omega} \varepsilon^\beta \|[\Delta_x, \mathcal{X}_t^{1,\varepsilon}] u_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1-\beta}^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq \\ \leq c'_{R,\Omega} \varepsilon^\beta \|u_{t,0}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1-\beta}^{2,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq C_{R,\Omega} (1 + Rh)^{-\beta} \|f_{t,0}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|. \end{aligned} \quad (74)$$

Носители коэффициентов коммутатора $[\Delta_x, \chi_t^j]$ содержатся в кольце $\mathbb{A}_t^j = \{x : R \leq t_\Omega t^{-1} r_j \leq 2R\}$, и поэтому при помощи оценок (71), (72) и (60) выводим соотношение

$$\begin{aligned} \|F_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_1^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c_j (\varepsilon + Rt_\Omega^{-1} t)^{-\beta} \|[\Delta_x, \chi_t^j] u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1+\beta}^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq \\ \leq c'_j (\varepsilon + Rt_\Omega^{-1} t)^{-\beta} (t_\Omega t^{-1} \|\nabla_x u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1+\beta}^{0,\varepsilon}(\mathbb{A}_t^j)\| + t_\Omega^2 t^{-2} \|u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_{1+\beta}^{0,\varepsilon}(\mathbb{A}_t^j)\|) \leq \\ \leq c''_j (\varepsilon + Rt_\Omega^{-1} t)^{-\beta} \varepsilon^{1+\beta} \varepsilon^{3/2} (\varepsilon^{-1} R^{-1} t_\Omega t^{-1} + R^{-2} t_\Omega^2 t^{-2}) \|u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{1+\beta}^{2,0}(\mathbb{R}^3)\| \leq \\ \leq c'''_j (1 + Rt_\Omega^{-1} \tau)^{-1-\beta} \varepsilon^{-1} (R^{-1} t_\Omega \tau^{-1}) \varepsilon^{3/2} \varepsilon^2 \|f_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{1+\beta}^0(\mathbb{R}^3)\| \leq \\ \leq C_{j,\Omega}^R (1 + 2Rh)^\beta (1 + Rt_\Omega^{-1} \tau)^{-2-\beta} \|f_{t,j}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,0}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|. \end{aligned} \quad (75)$$

Наконец, для последних слагаемых в (73) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\chi_t^j u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_1^0(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c_j \varepsilon \varepsilon^{5/2} \|\xi^j \mapsto \chi_t^j(\xi^j) u_{t,j}^{h,\varepsilon}(\xi^j); \mathcal{V}_1^0(\mathbb{R}^3)\| \leq \\ \leq c_j \varepsilon \varepsilon^{5/2} \varepsilon^{-2} (1 + 2Rt_\Omega^{-1} t)^2 \|u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_{-1}^0(\mathbb{R}^3)\| \leq c'_j \varepsilon^{3/2} (1 + 2Rt_\Omega^{-1} t)^2 \|u_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_1^2(\mathbb{R}^3)\| \leq \\ \leq c''_j \varepsilon^{3/2} (1 + 2Rt_\Omega^{-1} t)^2 \varepsilon^2 \|f_{t,j}^{h,\varepsilon}; \mathcal{V}_1^0(\mathbb{R}^3)\| \leq C_{j,\Omega} \varepsilon (1 + 2Rt_\Omega^{-1} t)^2 \|f_{t,0}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|. \end{aligned} \quad (76)$$

Здесь применены оценки (71) и (72) при $\beta = 0$.

Более простые выкладки с показателем $\beta = 0$ доказывают, что

$$\|\mathbf{R}_{t,f_t}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{2,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| = \|u_{t,\approx}^{h,\varepsilon}; \mathbf{V}_1^{2,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\| \leq c \|f_{t,0}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|.$$

Полученные оценки (74)–(76) и представление (73) показывают, что оператор $\mathbf{A}_0^\varepsilon(t, \Lambda) \mathbf{R}_0^\varepsilon(t, \Lambda) - \mathbf{I}$ можно сделать малым ($\mathbf{I}$ — тождественное отображение в пространстве $\mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))$). В самом деле, сначала выбираем величину h_Λ в ограничении $h \geq h_\Lambda$ настолько большой, что множитель при норме $\|f_{t,0}^\varepsilon; \mathbf{V}_1^{0,\varepsilon}(\Omega; \mathcal{P}(t))\|$ в формуле (74) стал достаточно малым, а затем фиксируем границы изменения параметров $\tau \geq \tau_\Lambda$ и $\varepsilon \leq \varepsilon_\Lambda$, поступая аналогично с такими же множителями в (75) и (76) соответственно. В итоге видим, что оператор $\mathbf{S}_0^\varepsilon(t, \Lambda) = \mathbf{A}_0^\varepsilon(t, \Lambda) \mathbf{R}_0^\varepsilon(t, \Lambda)$ обратим, так как допускает разложение в ряд Неймана, и следовательно, $\mathbf{R}_0^\varepsilon(t, \Lambda)$ — “почти обратный”, а $\mathbf{R}_0^\varepsilon(t, \Lambda) \mathbf{S}_0^\varepsilon(t, \Lambda)^{-1}$ — истинный обратный для отображения (66). Теорема 2 доказана.

Замечание 2. 1) Согласно условию $\Lambda \notin \{\Lambda_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ отображение

$$\mathcal{V}_{1+\beta}^2(\mathbb{R}^3) \ni v^j \mapsto A_{\beta}^j v^j := \Delta_{\xi^j} v^j + \Lambda X v^j \in \mathcal{V}_{1+\beta}^0(\mathbb{R}^3)$$

является изоморфизмом при $\beta = 0$, а теория Кондратьева [25] (см., например, [23, гл. 6, § 4] и [24, § 5]) переносит это свойство на показатели $\beta \in (-1/2, 1/2)$. Крайние значения показателя выбраны так, что $(1 - \chi) \Phi \in \mathcal{V}_{1+\beta}^2(\mathbb{R}^3)$ при $\beta < 1/2$, но $1 \notin \mathcal{V}_{1+\beta}^2(\mathbb{R}^3)$ при $\beta > 1/2$. Случай малого β рассматривается с помощью элементарных средств:

дифференциальное выражение $(1 + \rho_j^2)^{-\beta/2} [\Delta_{\varepsilon^j}, (1 + \rho_j^2)^{\beta/2}]$, включающее коммутатор оператора Лапласа и весового множителя, порождает отображение $\mathcal{V}_1^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathcal{V}_1^0(\mathbb{R}^3)$ с нормой $O(|\beta|)$, т.е. при малом $|\beta|$ оператор A_β^j наследует все свойства от A_0^j .

2) При тех же ограничениях на весовой показатель изоморфность присуща и оператору A_β^0 задачи (69) с областью определения $\mathbf{V}_{1+\beta}^2(\Omega; \mathcal{P}(t)) \cap \mathbf{V}_{\beta,0}^1(\Omega; \mathcal{P}(t))$. Необходимо также принять во внимание, что слагаемое $\varepsilon \Delta u_{t,0}^\varepsilon$ в левой части уравнения (69) порождает бесконечно малое возмущение при $\varepsilon \rightarrow +0$.

3) Если $M \notin \{M_{\tau,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, то, как и в теореме 2, задача (69) с параметрами $t = \varepsilon \tau$ и $\Lambda = M$ при $\tau \in [\tau_\omega, \tau_M]$ и $\tau_M > \tau_\omega$ однозначно разрешима (верхняя полужирная штрихпунктирная линия на фиг. 2).

Теперь завершим проверку теоремы 1. В силу сходимости (21) при $t = t_\Omega$ на сегмент $[0, \varepsilon \Lambda]$ попадают в точности $JN(\Lambda)$ собственных значений (5), где $N(\Lambda)$ — кратность спектра (6) на интервале $(0, \Lambda)$. Собственные значения $\lambda_{t,\varepsilon}^\varepsilon$, непрерывно зависящие от t согласно [33, гл. 6], не могут покинуть этот сегмент при $t \in [\varepsilon t_\Lambda, t_\Omega]$ в силу теоремы 2, т.е. их количество остается неизменным. В то же время формулы (57) и (64), установленные в разд. 6, предоставляют не менее $JN(\Lambda)$ собственных значений на сегменте, а значит, именно указанное количество. Таким образом, получаем, что все собственные значения $\lambda_{t,n}^\varepsilon \in [0, \varepsilon \Lambda]$ исходной задачи (3) обладают найденными асимптотиками. Отметим, что благодаря замечанию 2, 3), приведенные рассуждения годятся и для малых значений времениподобного параметра. Теорема 1 доказана в полном объеме.

8. НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ

1° *Геометрия*. Можно считать, что включения $\omega_1^\varepsilon(t), \dots, \omega_J^\varepsilon(t)$,двигающиеся вдоль лучей $\mathcal{L}^1, \dots, \mathcal{L}^J$, имеют разную форму. На этом пути разумна постановка задачи о распадении одиночной концентрированной массы на несколько фрагментов.

Предположение о C^∞ -гладкости поверхностей $\partial\Omega$ и $\partial\omega$ конечно же избыточно — можно считать, что граница включения ω липшицева, а на границу области Ω , где поставлены условия Дирихле, нужные для корректной постановки спектральной задачи (4) ограничения, ничтожны. Отметим, что замена краевого условия Дирихле условием Неймана

$$\partial_n u_t^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

может коренным образом изменить асимптотические структуры: как показано в [22] (см. также [7, 10] и [34]) концентрированные массы начинают взаимодействовать за счет появления в предельных уравнениях (7) при $j = 1, \dots, J$ интегральных членов, связывающих их в единую спектральную задачу. Автор не знает, как это обстоятельство влияет на сделанные в разд. 5 выводы о зависимостях от времениподобного параметра.

2° *Приближение включения к границе*. Если в ситуации $J = 2$ на фиг. 1 предположить симметрию множеств Ω и $\omega^\varepsilon(t)$ относительно гиперплоскости $\{x : x_1 = 0\}$, то на дополнительно образованной границе $\Gamma = \{x \in \Omega : x_1 = 0\}$ можно поставить искусственное условие Дирихле или Неймана. При этом спектр (5) исходной задачи (3) распадается на две подпоследовательности, т.е. полученные в статье результаты обслуживают задачу о приближении концентрированной массы к границе, а в качестве времениподобного параметра выступает расстояние до границы. Легкодоступны обобщения: гладкая граница может быть изогнутой, а включений и мишеней точек — несколько.

Укажем близкую по тематике публикацию [30], в которой изучалась зависимость функции Грина только при малых расстояниях ее особенности от границы.

3° *Размерность и плотность*. В случае многомерных ($d > 3$) областей $\Omega, \omega \subset \mathbb{R}^d$ и более контрастных ($m > 3$) плотностей ε^{-m} включений итерационные процессы построения и выводы остаются без особых изменений. Например, асимптотическое разложение (22) принимает вид

$$\lambda_{t,k+(p-1)J}^\varepsilon = \varepsilon^{m-2} \left(\Lambda_p + \varepsilon^{d-3} \Lambda_{t,k}^{p'} \right) + \dots$$

Некоторые осложнения возникают при обосновании асимптотик (ср. материал в книге [27, гл. 2]).

Если $d = 2$, т.е. Ω и ω — плоские области, то фундаментальное решение оператора Лапласа $\Phi(x) = -(2\pi)^{-1} \ln |x|$ приобретает логарифмический рост на бесконечности, и как следствие строение асимптотических анзацев для собственных пар задачи (3) претерпевает серьезные изменения (см. результаты работ [6], [34] и др.).

В случае $m = 2$ к предельным задачам (7) или (9) присоединяется еще одна:

$$-\Delta_x v(x) = \mu v(x), \quad x \in \Omega, \quad v(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (77)$$

Это обстоятельство разрушает предложенные в статье асимптотические конструкции.

Если $m < 2$ (легкая масса), то остается только одна предельная задача (77), и годятся асимптотические процедуры из [27, гл. 2 и 9], однако, как и в других двух случаях из этого раздела, зависимости собственных значений от времениподобного параметра не изучались.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. *Sanchez-Palencia E.* Perturbation of eigenvalues in thermoelasticity and vibration of systems with concentrated masses // Trends in applications of pure mathematics to mechanics (Palaiseau, 1983), Lecture Notes in Phys., 195, Berlin: Springer, 1984. P. 346–368.
3. *Крылов А.Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах // Изв. Николаевской морской академии. 1913. Вып. 2. С. 325–348.
4. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем. М.-Л.: Гос. тех. изд-во, 1950.
5. *Олейник О.А.* О собственных колебаниях тел с концентрированными массами // Современные проблемы прикладной математики и математической физики. М.: Наука, 1988. С. 101–128.
6. *Leal C., Sanchez-Hubert J.* Perturbation of the eigenvalues of a membrane with a concentrated mass // Quart. Appl. Math. 1989. V. 47. № 1. P. 93–103.
7. *Назаров С.А.* Об одной задаче Санчес-Паленсия с краевыми условиями Неймана // Изв. ВУЗов. Матем. 1989. № 11. С. 60–66.
8. *Oleinik O.A., Sanchez-Hubert J., Yosifian G.A.* On vibrations of a membrane with concentrated masses // Bull. Sci. Math. 1991. V. 115. № 1. P. 1–27.
9. *Gomez D., Lobo M., Perez E.* On the eigenfunctions associated with the high frequencies in systems with a concentrated mass // J. Math. Pures Appl. 1999. V. 78. № 8. P. 841–865.
10. *Canzos J., Perez E., Vilasanchez M.* Asymptotics for the eigenelements of the Neumann spectral problem with concentrated masses // Indiana Univ. Math. J. 2007. V. 56. № 4. P. 1939–1987.
11. *Sanchez Hubert J., Sanchez Palencia E.* Vibration and coupling of continuous systems. Asymptotic methods. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
12. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1990.
13. *Lobo M., Perez E.* On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary // Math. Model. Meth. Appl. Sci. 1993. V. 3. № 2. P. 249–273.
14. *Campillo M., Dascalu C., Ionescu I.* Instability of a periodic systems of faults // Geophys. J. Int. 2004. V. 159. P. 212–222.
15. *Chechkin G.A., Cioranescu D., Damlamian A., Piatnitski A.L.* On boundary value problem with singular inhomogeneity concentrated on the boundary // J. de Mathematiques Pures et Appliquees. 2012. V. 98. № 2. P. 115–138.
16. *Мельник Т.А., Чечкин Г.А.* Собственные колебания густых каскадных соединений со “сверхтяжелыми” концентрированными массами // Изв. РАН. 2015. Т. 79. № 3. С. 41–86.
17. *Nazarov S.A., Perez M.E.* On multi-scale asymptotic structure of eigenfunctions in a boundary value problem with concentrated masses near the boundary // Revista Matematica Complutense. 2018. V. 31. № 1. P. 1–62.
18. *Назаров С.А.* Асимптотика собственных чисел задачи Неймана при концентрации масс на тонком тороидальном множестве // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2006. Вып. 3. № 15. С. 61–71.
19. *Назаров С.А.* Осреднение краевых задач в области, содержащей тонкую полость с периодически изменяющимся сечением // Тр. Московского матем. общества. 1990. Т. 53. С. 98–129.

20. Олейник О.А., Шапошникова Т.А. Об усреднении бигармонического уравнения в области, перфорированной вдоль многообразий малой размерности // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 830–842.
21. Лобо М., Олейник О.А., Перес М.Е., Шапошникова Т.А. О граничных задачах в областях, перфорированных вдоль многообразий // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. № 4. С. 205–206.
22. Nazarov S.A. Interaction of concentrated masses in a harmonically oscillating spatial body with Neumann boundary conditions // RAIRO Model. Math. Anal. Numer. 1993. V. 27. № 6. P. 777–799.
23. Nazarov S.A., Plamenevsky B.A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994.
24. Назаров С.А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи матем. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
25. Кондратьев В.А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. матем. общества. 1963. Т. 16. С. 219–292.
26. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
27. Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestorten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie-Verlag. 1991. (Английский перевод: Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1 & 2. Basel: Birkhauser Verlag, 2000).
28. Ван Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
29. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
30. Ильин А.М., Сулейманов Б.И. Асимптотика функции Грина для эллиптического уравнения второго порядка около границы области // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 6. С. 1322–1339.
31. Мазья В.Г., Назаров С.А., Пламеневский Б.А. Об асимптотике решений эллиптических краевых задач при нерегулярном возмущении области // Проблемы матем. анализа. Вып. 8. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. С. 72–153.
32. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
33. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
34. Назаров С.А. “Дальнодействие” концентрированных масс в двумерных задачах Неймана и Дирихле // Изв. РАН. Сер. матем. 2023. Т. 87. № 1. С. 65–118.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF EIGENVALUES FOR CONCENTRATED MASSES APPROACHING ONE ANOTHER

S. A. Nazarov*

*199178, 61 Bolshoy Ave., Saint Petersburg,
Institute of Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, Russia,
e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Received: 11.05.2024

Revised: 11.05.2024

Accepted: 01.07.2024

Abstract. A spectral Dirichlet problem in a three-dimensional domain with several identical concentrated heavy masses (large density perturbations on small sets) is studied. Asymptotics of its eigenvalues and eigenfunctions are constructed depending on two parameters: a small one characterizing the size and the density of the inclusions and a timelike parameter describing their approach to the origin (or to a point on the boundary of the domain). The basic novelty is the construction of two-scale asymptotic expansions and the derivation of uniform estimates for asymptotic remainders

Keywords: Dirichlet spectral problem, concentrated masses, time-like parameter, asymptotics of eigenvalues and functions, uniform estimates.