

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА С ФРЕНЕЛЕВСКИМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ¹⁾

© 2024 г. А.Ю. Чеботарев^{1,*}

¹690041 Владивосток, ул. Радио, 7, ИПМ ДВО РАН, Россия

*e-mail: cheb@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 21.02.2024 г.

Переработанный вариант 19.04.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Рассматривается нестационарная обратная задача для нелинейной параболично-эллиптической системы, моделирующей сложный теплообмен с френелевскими условиями сопряжения на поверхностях разрыва коэффициента преломления. Доказана нелокальная по времени однозначная разрешимость обратной задачи. Библ. 22.

Ключевые слова: квазистационарные уравнения радиационного теплообмена, френелевские условия сопряжения, обратная задача, нелокальная разрешимость.

DOI: 10.31857/S0044466924100088, EDN: KACZVB

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ краевых и обратных задач для диффузионных уравнений сложного теплообмена важен для приложений в технике и медицине [1–4]. Как показано в [5, 6], существенный вклад в распределение температурных полей в многокомпонентных средах с различными коэффициентами преломления вносят эффекты отражения и преломления на поверхностях разрыва коэффициента преломления. В [5–7] представлены условия сопряжения, моделирующие указанные эффекты в рамках диффузионной модели, использующей P_1 -приближение для уравнения переноса теплового излучения. Настоящая работа посвящена анализу обратной задачи для квазистационарной диффузионной модели сложного теплообмена в многокомпонентной среде. Задача заключается в отыскании неизвестной интенсивности тепловых источников, моделируемых некоторым функционалом, а также соответствующих полей температуры и теплового излучения, по заданным значениям функционала на решении начально-краевой задачи.

Нелинейные краевые и обратные задачи, моделирующие сложный теплообмен в рамках P_1 -приближения без учета эффектов отражения и преломления на границах подобластей с различными коэффициентами преломления, изучены достаточно подробно [1, 8–10]. Стационарная обратная задача для модели с френелевскими условиями сопряжения рассмотрена в [11]. В [6, 12] проведен анализ квазистационарных начально-краевых задач для уравнений сложного теплообмена в многокомпонентной области. Следует также отметить работы [13–18], посвященные анализу моделей сложного теплообмена, включающих интегродифференциальное уравнение переноса излучения. Исследование различных обратных задач для математических моделей тепломассопереноса представлено в [19–21].

Нестационарный сложный теплообмен будем рассматривать в ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, содержащей конечное число липшицевых подобластей Ω_j , $j = 1, \dots, p$, замыкания которых не пересекаются и принадлежат Ω . $\Omega_0 = \Omega \setminus (\bigcup_{j=1}^p \bar{\Omega}_j)$ — внешняя подобласть, $\Gamma = \partial\Omega \subset \Gamma_0 = \partial\Omega_0$, $\Gamma_j = \partial\Omega_j \subset \Gamma_0$, $j = 1, \dots, p$.

Процесс теплообмена моделируется (в рамках P_1 -приближения для уравнения переноса излучения) в каждой из областей Ω_j , $j = 0, \dots, p$, при $t \in (0, T)$ следующими уравнениями:

$$r \frac{\partial \theta}{\partial t} - a \Delta \theta + b(\theta^3 |\theta| - \varphi) = q(t)f, \quad -\alpha \Delta \varphi + \beta(\varphi - \theta^3 |\theta|) = 0. \quad (1)$$

¹⁾ Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№075-00459-24-00)

Здесь θ — нормализованная температура и φ — нормализованная интенсивность теплового излучения, усредненная по всем направлениям. Положительные кусочно-постоянные параметры r , a , b , α и β , описывающие свойства среды, определены в [5]. Функция f описывает пространственное распределение тепловых источников, а функция времени q их интенсивность. На границе $\Gamma = \partial\Omega$ ставятся краевые условия третьего рода

$$a\partial_n\theta + c(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + \gamma(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0, \quad (2)$$

где θ_b — заданная граничная температура, c — коэффициент теплопередачи, $0 < \gamma \leq 1/2$ — параметр, зависящий от коэффициента излучения поверхности. На внутренних границах $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, $j = 1, \dots, p$, заданы условия сопряжения для температуры $\theta_j = \theta|_{\Omega_j}$ и интенсивности излучения $\varphi_j = \varphi|_{\Omega_j}$, полученные в [5]

$$\theta_0 = \theta_j, \quad a_0\partial_n\theta_0 = a_j\partial_n\theta_j, \quad (3)$$

$$n_0^2\alpha_0\partial_n\varphi_0 = n_j^2\alpha_j\partial_n\varphi_j, \quad h_j(\varphi_j - \varphi_0) = \alpha_0\partial_n\varphi_0. \quad (4)$$

Здесь $a_j, \alpha_j, n_j = a, \alpha, n|_{\Omega_j}$, $h_j > 0$ — параметры, зависящие от коэффициентов отражения на внутренних границах. Через ∂_n в краевых условиях и условиях сопряжения обозначаем производные в направлении внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе $\partial\Omega$ или $\partial\Omega_j$.

Ставятся также начальные условия для температуры,

$$\theta|_{t=0} = \theta_0. \quad (5)$$

Замечание 1. Условия (4) выводятся из френелевских условий сопряжения на Γ_j для интенсивности излучения I , не усредненной по направлениям, при использовании P_1 -приближения для I и интегрировании указанных условий по направлениям входящих лучей для каждой подобласти. Здесь следует отметить, что при приближении к границе области или к границе неоднородности нормальная производная усредненного решения уравнения переноса излучения имеет особенность, которая фактически не учитывается при выводе краевого условия для φ и условий сопряжения. Таким образом, в рассматриваемой модели не учитывается, что вблизи границы решение уравнения переноса имеет пограничный слой. Тем не менее, как показывают примеры численного моделирования [22], разница температурных полей для диффузионной и полной модели сложного теплообмена не является столь значительной.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 приводится формализация начально-краевой задачи (1)–(5), дается постановка обратной задачи и ее преобразование. Разрешимость обратной задачи доказана в разд. 3. Теорема единственности решения обратной задачи представлена в разд. 4, а в разд. 5 представлено доказательство вспомогательных результатов.

Основной результат работы состоит в доказательстве нелокальной по времени разрешимости обратной задачи.

2. СЛАБАЯ ФОРМУЛИРОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Через L^s , $1 \leq s \leq \infty$, будем обозначать пространства Лебега s -интегрируемых функций и, соответственно, через $H^s = W_2^s$ — пространства Соболева; $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$,

$$W = \{w \in H, w_j = w|_{\Omega_j} \in H^1(\Omega_j), j = 0, \dots, p\}.$$

Пространство H будем отождествлять с сопряженным пространством H' , $V \subset W \subset H = H' \subset W' \subset V'$. Через (f, v) обозначаем значение функционала $f \in V'$ на элементе $v \in V$ и скалярное произведение в H , если $f, v \in H$;

$$\|v\|^2 = (v, v); (v, w)_j = (v, w)_{L^2(\Omega_j)}, \|v\|_j^2 = (v, v)_j; (v, w)_W = \sum_{j=0}^p (v, w)_{H^1(\Omega_j)}.$$

Через $L^p(0, T; X)$ (соотв. $C([0, T], X)$) обозначаем пространство строго измеримых функций класса L^p (соотв. непрерывных), определенных на $[0, T]$, со значениями в банаховом пространстве X ; $D'(0, T)$ — пространство распределений на $(0, T)$.

Пусть данные начально-краевой задачи удовлетворяют следующим условиям:

- (i) $c, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$, $c \geq c_0 > 0$, $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, $c_0, \gamma_0 = \text{const}$;
- (ii) $\{a, b, r, \alpha, \beta, n\}_{\Omega_j} = \{a_j, b_j, r_j, \alpha_j, \beta_j, n_j\} > 0$, $b = \sigma\beta n^2$, $\sigma = \text{const} > 0$;
- (iii) $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Gamma \times (0, T))$; $f \in V'$, $q \in H^{-1}(0, T)$.

Введем операторы $A_1: V \rightarrow V'$, $A_2: W \rightarrow W'$ и функции $f_b \in L^2(0, T; V')$, $g_b \in L^2(0, T; W')$, используя равенства, справедливые для $\theta, \eta \in V$, $\varphi, w \in W$:

$$\begin{aligned}(A_1 \theta, \eta) &= (a \nabla \theta, \nabla \eta) + \int_{\Gamma} c \theta \eta d\Gamma, \\ \frac{1}{\sigma} (A_2 \varphi, w) &= \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 (\nabla \varphi, \nabla w)_j + n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \varphi w d\Gamma + n_0^2 \sum_{j=1}^p h_j \int_{\Gamma_j} (\varphi_0 - \varphi_j)(w_0 - w_j) d\Gamma, \\ (f_b, \eta) &= \int_{\Gamma} c \theta_b \eta d\Gamma, \quad (g_b, w) = \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \theta_b^4 w d\Gamma.\end{aligned}$$

Здесь $\{\varphi_j, w_j\} = \{\varphi, w\}|_{\Omega_j}$.

Скалярное произведение и норму в пространстве V , эквивалентную стандартной, определим, используя оператор A_1 , $(u, v)_V = (A_1 u, v)$, $\|v\|_V^2 = (A_1 v, v)$. Для возрастающей степенной функции используем обозначение $[\lambda]^l = |\lambda|^l \text{sign } \lambda$, $l > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Определение. Пара $\theta \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T], H) \cap L^5(Q)$, $\varphi \in L^{5/4}(0, T; W)$ называется слабым решением задачи (1)–(5), если для всех $v \in V$

$$(r\theta' + A_1 \theta + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b - q(t)f, v) = 0 \text{ в } D'(0, T), \quad A_2 \varphi + b(\varphi - [\theta]^4) = g_b \quad t \in (0, T) \quad (6)$$

и при этом $\theta(0) = \theta_0$. Здесь и далее $Q = \Omega \times (0, T)$.

Слабая формулировка задачи (1)–(4) получается стандартным образом путем умножения уравнений (1) на тестовые функции $\eta \in V$ и $\sigma n^2 \psi \in W$ соответственно, интегрирования по частям по областям Ω_j , сложения полученных равенств и применения краевых условий (2) и условий сопряжения (3), (4).

Замечание 2. В статье [12] доказано, что при выполнении условий (i)–(iii), если при этом $q \in L^2(0, T)$, существует единственное решение $\{\theta, \varphi\}$ задачи (6) такое, что $\theta \in L^2(0, T; V) \cap L^5(0, T; L^5(\Omega))$, $r\theta' \in L^2(0, T; V') + L^{5/4}(Q)$, $\varphi \in L^{5/4}(0, T; W)$.

Постановка и преобразование обратной задачи

Задача (IP). Найти $q \in H^{-1}(0, T)$, $\theta \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T], H) \cap L^5(Q)$, $\varphi \in L^{5/4}(0, T; W)$, удовлетворяющие (6) и дополнительному условию

$$(f, \theta(t)) = s(t), \quad t \in (0, T). \quad (7)$$

Здесь $s \in H^1(0, T)$ — заданная функция.

Замечание 3. Типичным примером обратной задачи, возникающей, например, при моделировании процессов лазерной абляции [2], является задача, в которой требуется определить какую интенсивность в зависимости от времени должен иметь тепловой источник, локализованный, например, в Ω_1 , чтобы обеспечить в области Ω_1 заданную среднюю температуру. В этом случае $f(x) = 1$, если $x \in \Omega_1$ и $f(x) = 0$, если $x \in \Omega \setminus \Omega_1$, а условие переопределения имеет вид $\int_{\Omega_1} \theta dx = s(t)$, $t \in (0, T)$. Учитывая, что в постановке задачи (IP) $f \in V'$, могут быть рассмотрены обратные задачи с неизвестными интенсивностями поверхностных тепловых источников, обеспечивающих требуемую среднюю температуру на рассматриваемой поверхности.

Преобразуем постановку задачи (IP), исключив функции φ, q . Заметим сразу, что билинейная форма $\{\varphi, \psi\} \rightarrow (A_2 \varphi + b\varphi, \psi)$ непрерывна, симметрична и положительно определена в пространстве W . Из леммы Лакса-Мильграма следует, что для каждого $\eta \in W'$ существует единственное решение $\varphi \in W$ уравнения $A_2 \varphi + b\varphi = \eta$ и оператор $(A_2 + bI)^{-1}: W' \rightarrow W$ непрерывен. Поэтому из второго уравнения в (6) следует, что $\varphi = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + b[\theta]^4)$, первое уравнение можно записать в виде

$$(r\theta' + A_1 \theta + B(b[\theta]^4) - g - q(t)f, v) = 0 \text{ в } D'(0, T). \quad (8)$$

Здесь $B = A_2(A_2 + bI)^{-1}: W' \rightarrow W'$, $g = f_b + b(A_2 + bI)^{-1}g_b \in L^2(0, T; V')$.

Для исключения интенсивности источников q рассмотрим пространства $V_0 = \text{Ker } f = \{z \in V : (f, z) = 0\}$ и H_0 — замыкание V_0 по норме H , $V_0 \subset H_0 = H'_0 \subset V'_0$. Пусть $\tilde{f} \in V$, $(f, \tilde{f}) = 1$. Будем искать компоненту θ решения задачи (IP) в виде

$$\theta(t) = \xi(t) + s(t)\tilde{f}, \quad \text{где } \xi \in L^2(0, T; V_0) \cap C([0, T], H_0) \cap L^5(Q).$$

Сформулируем постановку задачи для определения функции ξ .

Задача (P). Найти $\xi \in L^2(0, T; V_0) \cap C([0, T], H_0) \cap L^5(Q)$ такую, что $r\theta' \in L^2(0, T; V'_0) + L^{5/4}(Q)$

$$r\theta' + A_1 \theta + B(b[\theta]^4) - g = 0 \text{ в } V'_0 \text{ п.в. на } (0, T), \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (9)$$

где $\theta(t) = \xi(t) + s(t)\tilde{f}$, $\xi_0 = \theta_0 - s(0)\tilde{f} \in H_0$.

Лемма 1. Пусть выполняются условия (i)–(iii), $\theta_0 - s(0)\tilde{f} \in H_0$. Тройка $\{q, \theta, \varphi\}$ является решением обратной задачи (IP), если и только если

$$\theta(t) = \xi(t) + s(t)\tilde{f}, \quad \varphi = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + b[\theta]^4), \quad q(t) = h'(t),$$

где ξ – решение задачи (P), $h(t) = (r(\theta(t) - \theta_0), \tilde{f}) + \int_0^t (A_1\theta(\tau) + B(b[\theta(\tau)]^4) - g(\tau), \tilde{f})d\tau$.

Доказательство. Пусть $\{q, \theta, \varphi\}$ – решение задачи (IP). Тогда, полагая $\xi(t) = \theta(t) - s(t)\tilde{f}$, заключаем, что $\xi \in L^2(0, T; V_0) \cap C([0, T], H_0) \cap L^5(Q)$. Из равенства (8) следует

$$(r\theta' + A_1\theta + B(b[\theta]^4) - g, v) = 0 \text{ в } D'(0, T) \quad \forall v \in V_0.$$

Заметим, что $A_1\theta + B(b[\theta]^4) - g = A_1\theta + b([\theta]^4 - \varphi) - f_b$ и при этом $A_1\theta - f_b \in L^2(0, T; V') \subset L^2(0, T; V'_0)$, $b[\theta]^4 \in L^{5/4}(Q)$, $\varphi \in L^{5/4}(0, T; W) \subset L^{5/4}(Q)$. Поэтому $r\theta' \in L^2(0, T; V'_0) + L^{5/4}(Q)$ и справедливы равенства (9).

Обратно, если ξ – решение задачи (P), то для $\theta(t) = \xi(t) + s(t)\tilde{f}$ справедливы равенства $(f, \theta(t)) = s(t)$, $t \in (0, T)$, $\theta(0) = \theta_0$. Кроме того, из условия $\theta \in L^5(Q)$ получаем $\varphi = (A_2 + bI)^{-1}(g_b + b[\theta]^4) \in L^{5/4}(0, T; W)$. Поскольку $v - (f, v)\tilde{f} \in V_0$ для всех $v \in V$, из (9) следует, что

$$(r\theta' + A_1\theta + B(b[\theta]^4) - g, v - (f, v)\tilde{f}) = 0. \quad (10)$$

Для того чтобы ввести интенсивность тепловых источников, положим

$$\tilde{\theta}(t) = \int_0^t \theta(\tau)d\tau, \quad F(t) = \int_0^t (B(b[\theta(\tau)]^4) - g(\tau))d\tau.$$

Интегрируя (10), получим

$$(r(\theta(t) - \theta_0) + A_1\tilde{\theta}(t) + F(t), v - (f, v)\tilde{f}) = 0 \quad \forall v \in V.$$

Последнее равенство можно переписать в виде

$$(r(\theta(t) - \theta_0) + A_1\tilde{\theta}(t) + F(t) - h(t)f, v) = 0 \quad \forall v \in V, \quad (11)$$

где $h(t) = (r(\theta(t) - \theta_0), \tilde{f}) + \int_0^t (A_1\theta(\tau) + B(b[\theta(\tau)]^4) - g(\tau), \tilde{f})d\tau \in C[0, T]$. Дифференцируя (11) по t в смысле распределений на $(0, T)$, получим первое уравнение в (6), где $q(t) = h'(t) \in H^{-1}(0, T)$.

3. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (P)

Для доказательства разрешимости задачи будем использовать следующие вспомогательные оценки, обоснование которых приводится в конце работы.

Лемма 2 (см. [7]). Пусть $\zeta \in W$,

$$E(\zeta) = \frac{16\sigma}{25} \sum_{j=0}^p \alpha_j n_j^2 \|\nabla \zeta\|_j^2 + \sigma n_0^2 \int_{\Gamma} \gamma \zeta^2 d\Gamma + \sigma n_0^2 \sum_{j=1}^p h_j \int_{\Gamma_j} ([\zeta_0]^{8/5} - [\zeta_j]^{8/5})([\zeta_0]^{2/5} - [\zeta_j]^{2/5}) d\Gamma.$$

Тогда существует постоянная $K > 0$ такая, что

$$K\|\zeta\|^2 \leq E(\zeta) \quad \forall \zeta \in W.$$

Лемма 3. Пусть $u \in L^5(\Omega)$, $\eta \in W$, $A_2\eta + b\eta = bu$. Тогда

$$\|\eta\|_{L^5(\Omega)} \leq \frac{\max b}{K + \max b} \|u\|_{L^5(\Omega)}. \quad (12)$$

Здесь и далее используется весовая норма в $L^5(\Omega)$, $\|z\|_{L^5(\Omega)} = (\int_{\Omega} b|z|^5 dx)^{1/5}$.

Лемма 4. Пусть $B : W' \mapsto W'$, $B = A_2(A_2 + bI)^{-1}$. Тогда для произвольных $u, v \in L^5(\Omega)$ справедливы неравенства

$$(B(b[u]^4), u) \geq K_1 \|u\|_{L^5(\Omega)}^5, \quad (B(b[u]^4), v) \leq K_2 \|u\|_{L^5(\Omega)}^4 \|v\|_{L^5(\Omega)}. \quad (13)$$

Здесь $K_1 = \frac{K}{K + \max b}$, $K_2 = \frac{K + 2 \max b}{K + \max b}$.

Определим галеркинские приближения ξ_k решения задачи (P) и выведем необходимые для доказательства разрешимости априорные оценки. В пространстве V_0 рассмотрим ортонормированный в H базис $w_1, w_2, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned}\xi_k(t) &\in V_k = \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_k\}, \quad t \in (0, T). \\ (r\theta'_k + A_1\theta_k + B(b[\theta_k]^4) - g, v) &= 0 \quad \forall v \in V_k, \\ \xi_k(0) &= \xi_{0k}.\end{aligned}\tag{14}$$

Здесь $\theta_k(t) = \xi_k(t) + s(t)\tilde{f}$, ξ_{0k} — ортогональная проекция в H функции ξ_0 на подпространство V_k .

Задача Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (14) разрешима на малом временном интервале $(0, T_k)$. Оценки, полученные ниже, позволяют продолжить решение на $(0, T)$.

Априорные оценки галеркинских приближений

Положим $v = \xi_k$ в (14) и учтем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}(r\theta'_k, \xi_k) &= (r\xi'_k, \xi_k) + s'(t)(r\tilde{f}, \xi_k) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\xi_k, \xi_k) + s'(t)(r\tilde{f}, \xi_k), \\ (A_1\theta_k, \xi_k) &= \|\xi_k\|_V^2 + s(t)(A_1\tilde{f}, \xi_k), \\ (B(b[\theta_k]^4), \xi_k) &= (B(b[\theta_k]^4), \theta_k) - s(t)(B(b[\theta_k]^4), \tilde{f}).\end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\xi_k, \xi_k) + \|\xi_k\|_V^2 + (B(b[\theta_k]^4), \theta_k) = s(t)(B(b[\theta_k]^4), \tilde{f}) + (p, \xi_k).$$

Здесь $p(t) = g(t) - s(t)A_1\tilde{f} - s'(t)r\tilde{f} \in L^2(0, T; V')$.

Применяя оценки (13), получаем неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\xi_k, \xi_k) + \|\xi_k\|_V^2 + K_1\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 \leq K_2\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^4 \|s(t)\tilde{f}\|_{L^5(\Omega)} + (p, \xi_k).\tag{15}$$

Оценим правую часть (15), используя неравенства

$$\begin{aligned}(p, \xi_k) &\leq \frac{1}{2}\|p\|_{V'}^2 + \frac{1}{2}\|\xi_k\|_V^2, \\ \|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^4 \|s(t)\tilde{f}\|_{L^5(\Omega)} &\leq \frac{1}{5} \left(4\varepsilon^{5/4} \|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 + \varepsilon^{-5} \|s(t)\tilde{f}\|_{L^5(\Omega)}^5 \right).\end{aligned}$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ из (15) следует оценка

$$\frac{d}{dt} (r\xi_k, \xi_k) + \|\xi_k\|_V^2 + K_1\|\theta_k\|_{L^5(\Omega)}^5 \leq C\|s(t)\tilde{f}\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|p\|_{V'}^2.\tag{16}$$

Здесь и далее через $C > 0$ обозначаем постоянные, не зависящие от k .

Проинтегрировав по времени неравенство (16), получаем оценки

$$\|\xi_k(t)\| \leq C, \quad \int_0^t \|\xi_k(\tau)\|_V^2 d\tau \leq C, \quad \int_0^t \|\theta_k(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 d\tau \leq C.\tag{17}$$

Аналогичные оценки в $L^\infty(0, T; H)$ и в $L^2(0, T; V)$ справедливы и для θ_k . Выведем равностепенную непрерывность последовательности θ_k в $L^2(0, T; H)$. Рассмотрим (14) в момент времени τ , положим $v = \theta_k(\tau) - \theta_k(t) \in V_k$ и проинтегрируем по τ от t до $t+h$, затем по t от 0 до $T-h$. Тогда

$$\frac{1}{2} \int_0^{T-h} (r(\theta_k(t+h) - \theta_k(t), \theta_k(t+h) - \theta_k(t))) dt = \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} p_k(t, \tau) d\tau dt,\tag{18}$$

где

$$p_k(t, \tau) = (A_1\theta_k(\tau) + B(b[\theta_k(\tau)]^4) - g(\tau), \theta_k(t) - \theta_k(\tau)).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (A_1 \theta_k(\tau), \theta_k(t) - \theta_k(\tau)) &\leq \frac{1}{2} \|\theta_k(\tau)\|_V^2 + \frac{1}{2} \|\theta_k(t)\|_V^2, \\ (B(b[\theta_k(\tau)]^4), \theta_k(t) - \theta_k(\tau)) &\leq K_2 \|\theta_k(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^4 \|\theta_k(t) - \theta_k(\tau)\|_{L^5(\Omega)} \leq \\ &\leq K_2 \left(\frac{9}{5} \|\theta_k(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 + \frac{1}{5} \|\theta_k(t)\|_{L^5(\Omega)}^5 \right). \end{aligned}$$

Полученные неравенства позволяют оценить правую часть (18), используя также неравенства (17), причем для оценки интегралов от функций, зависящих от τ , достаточно поменять порядок интегрирования. В результате получаем оценку равномерной непрерывности

$$\int_0^{T-h} \|\theta_k(t+h) - \theta_k(t)\|^2 dt \leq C_1 h, \quad (19)$$

где $C_1 > 0$ не зависит от k, h .

Оценки (17), (19) позволяют утверждать, переходя при необходимости к подпоследовательностям, что существуют функции $\xi, \theta = \xi + s(t)\tilde{f}$ такие, что

$$\xi_k \rightarrow \xi \text{ слабо в } L^2(0, T; V_0), \theta_k \rightarrow \theta \text{ слабо в } L^2(0, T; V), L^5(Q), \text{ сильно в } L^2(0, T; H), \text{ сильно в } L^4(Q).$$

Сходимость $\theta_k \rightarrow \theta$ в $L^4(Q)$ следует из неравенства

$$\|\theta_k - \theta\|_{L^4(Q)}^4 \leq \|\theta_k - \theta\|_{L^2(Q)}^{2/3} \|\theta_k - \theta\|_{L^5(Q)}^{10/3}.$$

Заметим также, что последовательность $B(b([\theta_k]^4)) = b([\theta_k]^4 - \psi_k)$, где $A_2 \psi_k + b\psi_k = b[\theta_k]^4$, ограничена в $L^{5/4}(0, T; W)$ и поэтому $B(b([\theta_k]^4)) \rightarrow \chi$ слабо в $L^{5/4}(0, T; W)$. Поскольку $\theta_k \rightarrow \theta$ в $L^4(Q)$, заключаем, что $\chi = B(b([\theta]^4))$.

Полученных результатов о сходимости достаточно для предельного перехода при $k \rightarrow \infty$ в системе (14) и доказательства того, что предельные функции таковы, что $\xi \in L^2(0, T; V_0) \cap L^5(Q)$, $r\xi' \in L^2(0, T; V_0') + L^{5/4}(Q)$ и выполняются равенства (9). При этом $\xi \in C([0, T]; H)$ (см. [12]).

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i)–(iii), $\theta_0 - s(0)\tilde{f} \in H_0$. Тогда существует решение задачи (P).

4. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Покажем, что задача (P) не может иметь двух различных решений. Тогда, на основании леммы 1 и теоремы 1, получим однозначную разрешимость задачи (IP).

Пусть $\xi_{1,2}$ — два решения задачи (P), $\theta_{1,2} = \xi_{1,2} + s(t)\tilde{f}$, $\theta = \xi_1 - \xi_2 = \theta_1 - \theta_2 \in L^2(0, T; V_0)$. Тогда из (9) следует равенство

$$(r\theta' + A_1\theta + B(b([\theta_1]^4 - [\theta_1]^4)), \theta) = (r\theta' + A_1\theta + (b([\theta_1]^4 - [\theta_1]^4), \theta) - (b\zeta, \theta) = 0.$$

Здесь $\zeta = (A_2 + bI)^{-1}(b([\theta_1]^4 - [\theta_1]^4))$.

Учитывая неравенства

$$([\theta_1]^4 - [\theta_2]^4)(\theta_1 - \theta_2) \geq 0, \quad |[\theta_1]^4 - [\theta_2]^4| \leq 2(|\theta_1|^3 + |\theta_2|^3)|\theta|,$$

получаем оценки

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\theta, \theta) + \|\theta\|_V^2 \leq (b\zeta, \theta) \leq \max b \|\zeta\|_{L^6(\Omega)} \|\theta\|_{L^{6/5}(\Omega)} \leq \max b |\Omega|^{1/3} \|\zeta\|_{L^6(\Omega)} \|\theta\|, \quad (20)$$

при этом

$$(A_2\zeta, \zeta) + (b\zeta, \zeta) = (b([\theta_1]^4 - [\theta_1]^4), \zeta) \leq 2 \max b \int_{\Omega} (|\theta_1|^3 + |\theta_2|^3) |\theta| |\zeta| dx. \quad (21)$$

Левую часть (21) оценим снизу, используя непрерывность вложения $W \subset L^6(\Omega)$ и поэтому $K_3 \|\varphi\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq (A_2 \zeta, \zeta) + (b\zeta, \zeta)$, а правую сверху, используя неравенство Гёльдера. Тогда

$$K_3 \|\zeta\|_{L^6(\Omega)}^2 \leq 2 \max b \|\zeta\|_{L^6(\Omega)} \left(\left(\int_{\Omega} |\theta_1|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} + \left(\int_{\Omega} |\theta_2|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} \right).$$

Заметим, что

$$\left(\int_{\Omega} |\theta_{1,2}|^{18/5} |\theta|^{6/5} dx \right)^{5/6} \leq \|\theta_{1,2}\|_{L^5(\Omega)}^3 \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{1/5}.$$

Следовательно,

$$K_3 \|\zeta\|_{L^6(\Omega)} \leq 2 \max b \left(\|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{1/5}.$$

Используя полученное неравенство для ζ в правой части (20), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (r\theta, \theta) + \|\theta\|_V^2 \leq K_4 \left(\|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{6/5}. \quad (22)$$

Здесь $K_4 = 2(\max b)^2 |\Omega|^{1/3} / K_3$. Из неравенства Юнга с параметром $\varepsilon > 0$ выводим оценку

$$\left(\|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^3 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^3 \right) \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^{4/5} \|\theta\|^{6/5} \leq \frac{4\varepsilon^{5/2}}{5} \|\theta\|_{L^6(\Omega)}^2 + \frac{3\varepsilon^{-5/3}}{5} \left(\|\theta_1\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2\|_{L^5(\Omega)}^5 \right) \|\theta\|^2.$$

Учитывая непрерывность вложения $V \subset L^6(\Omega)$, получаем из (22) при малом ε

$$\min r \|\theta(t)\|^2 \leq K_5 \int_0^t \left(\|\theta_1(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 \right) \|\theta(\tau)\|^2 d\tau,$$

где $K_5 > 0$ зависит только от K_4, ε . Функция $\tau \rightarrow \left(\|\theta_1(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 + \|\theta_2(\tau)\|_{L^5(\Omega)}^5 \right)$ интегрируема на $(0, T)$ и поэтому из неравенства Гронуолла следует $\theta = 0$, что означает единственность решения.

Теорема 2. Пусть выполняются условия (i)–(iii), $\theta_0 - s(0)\tilde{f} \in H_0$. Тогда существует единственное решение обратной задачи (IP).

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Лемма 5. Для вывода оценки (12) определим срезку функции η , полагая для $m \in \mathbb{N}$

$$\eta_m = \begin{cases} \eta, & \text{если } |\eta| < m, \\ m \operatorname{sign} \eta, & \text{если } |\eta| \geq m. \end{cases}$$

Умножим скалярно уравнение $A_2 \eta + b\eta = bu$ на $[\eta_m]^4 \in W$. Тогда

$$(A_2 \eta, [\eta_m]^4) + (b\eta, [\eta_m]^4) = (bu, [\eta_m]^4). \quad (23)$$

Пусть $\psi_m = [\eta_m]^{5/2}$. Выражение $(A_2 \eta, [\eta_m]^4)$ оценивается снизу квадратичной формой $E(\psi_m)$, определенной в лемме 2, и в силу этой леммы

$$K \|\psi_m\|^2 \leq E(\psi_m) \leq (A_2 \eta, [\eta_m]^4).$$

Кроме того, справедливы неравенства

$$(b\psi_m, \psi_m) \leq (b\eta, [\eta_m]^4), \quad (bu, [\eta_m]^4) \leq \|u\|_{L^5(\Omega)} \|\eta\|_{L^5(\Omega)}^4.$$

Поэтому из равенства (23) следует оценка

$$K \|\psi_m\|^2 + (b\psi_m, \psi_m) \leq \|u\|_{L^5(\Omega)} \|\eta\|_{L^5(\Omega)}^4.$$

Это означает, что последовательность ψ_m ограничена в пространстве H , а тогда и в W . Следовательно, при $m \rightarrow +\infty$ имеет место сходимость $\psi_m \rightarrow \psi = [\eta]^{5/2}$ в H . Из последнего неравенства выводим в пределе:

$$K\|\psi\|^2 + (b\psi, \psi) \leq \|u\|_{L^5(\Omega)} \|\eta\|_{L^5(\Omega)}^4.$$

Заметив, что $\max b \|\psi\|^2 \geq \|\eta\|_{L^5(\Omega)}^5$, $(b\psi, \psi) = \|\eta\|_{L^5(\Omega)}^5$, получаем неравенство

$$\|\eta\|_{L^5(\Omega)} \leq \frac{\max b}{K + \max b} \|u\|_{L^5(\Omega)}.$$

Лемма 6. Справедливость оценок (13) следует из леммы 3, если учесть, что

$$\begin{aligned} (B(b[u]^4), u) &= (b[u]^4, u) - (b(A_2 + bI)^{-1}(b[u]^4), u) = \|u\|_{L^5(\Omega)} - (b[u]^4, (A_2 + bI)^{-1}(bu)) \geq \\ &\geq \|u\|_{L^5(\Omega)}^5 - \|u\|_{L^5(\Omega)}^4 \|(A_2 + bI)^{-1}(bu)\|_{L^5(\Omega)} \geq \left(1 - \frac{\max b}{K + \max b}\right) \|u\|_{L^5(\Omega)}^5. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} (B(b[u]^4), v) &= (b[u]^4, v) - (b(A_2 + bI)^{-1}(b[u]^4), v) \leq \\ &\leq \|u\|_{L^5(\Omega)}^4 \|v\|_{L^5(\Omega)} - (b[u]^4, (A_2 + bI)^{-1}(bv)) \leq \left(1 + \frac{\max b}{K + \max b}\right) \|u\|_{L^5(\Omega)}^4 \|v\|_{L^5(\Omega)}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pinnau R. Analysis of optimal boundary control for radiative heat transfer modeled by SP_1 -system // Commun. Math. Sci. 2007. V. 5. № 4. P. 951–969.
2. Ковтаныук А.Е., Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю. Использование диффузионного приближения для моделирования радиационных и тепловых процессов в кожном покрове // Оптика и спектроскопия. 2017. Т. 123. N 2. С. 194–199.
3. Kovtanyuk A., Chebotarev A., Astrakhanitseva A. Inverse extremum problem for a model of endovenous laser ablation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2021. V. 29 (3). P. 467–476.
4. Чеботарев А.Ю., Пак Н.М., Ковтаныук А.Е. Анализ и численное моделирование начально-краевой задачи для квазилинейных уравнений сложного теплообмена // Сиб. журнал индустриальной матем. 2023. Т. 26. № 4. С. 180–193.
5. Chebotarev, A.Y., Grenkin, G.V., Kovtanyuk, A.E., Botkin, N.D., Hoffmann, K.-H. Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 57 (2018). 290–298.
6. Chebotarev A.Y., Kovtanyuk A.E. Quasi-static diffusion model of complex heat transfer with reflection and refraction conditions // J. Math. Anal. Appl. 2022. V. 507. 125745.
7. Чеботарев А.Ю. Неоднородная краевая задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 12. С. 1660–1665.
8. Kovtanyuk A.E., Chebotarev A.Yu., Botkin N.D., Hoffmann K.-H. Unique solvability of a steady-state complex heat transfer model // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2015. V. 20. № 3. P. 776–784.
9. Chebotarev A.Yu., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D. Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2019. V. 75. P. 262–269.
10. Chebotarev A.Yu., Pinnau R. An inverse problem for a quasi-static approximate model of radiative heat transfer // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 472. № 1. P. 314–327.
11. Чеботарев А.Ю. Обратная задача для уравнений сложного теплообмена с френелевскими условиями сопряжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. С. 303–311.
12. Чеботарев А.Ю. Неоднородная задача для квазистационарных уравнений сложного теплообмена с условиями отражения и преломления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 3. С. 118–126.

13. *Амосов А.А.* Стационарная задача сложного теплообмена в системе полупрозрачных тел с краевыми условиями диффузного отражения и преломления излучения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 3. С. 510–535.
14. *Amosov A.A.* Nonstationary problem of complex heat transfer in a system of semitransparent bodies with boundary-value conditions of diffuse reflection and refraction of radiation // J. Math. Sci. 2018. V. 233. № 6. P. 777–806.
15. *Amosov A.A., Krymov N.E.* On a Nonstandard Boundary Value Problem Arising in Homogenization of Complex Heat Transfer Problems // J. of Math. Sc. 2020. V. 244. P. 357–377.
16. *Amosov A.* Unique solvability of a stationary radiative-conductive heat transfer problem in a system consisting of an absolutely black body and several semitransparent bodies // Math. Methods in the Applied Sciences. 2021. V. 44. № 13. P. 10703–10733.
17. *A. Amosov.* Nonstationary Radiative-Conductive Heat Transfer Problem in a Semitransparent Body with Absolutely Black Inclusions // Mathematics 2021. 9(13). 1471.
18. *Amosov A.* Nonstationary radiative-conductive heat transfer problem in an absolutely black body with semitransparent inclusions // Math. Methods in the Applied Sciences. 2023. V. 46. № 4. P. 4237–4262.
19. *Пятков С.Г., Ротко В.В.* Обратные задачи для некоторых квазилинейных параболических систем с точечными условиями переопределения // Матем. тр., 22:1 (2019), 178–204.
20. *Белоголов В.А., Пятков С.Г.* О некоторых классах обратных задач определения коэффициента теплообмена в слоистых средах // Сиб. матем. журнал. 2022. Т.63. № 2. С. 252–271.
21. *Пятков С.Г., Баранчук В. А.* Определение коэффициента теплопередачи в математических моделях тепло-массопереноса // Матем. заметки. 2023. Т. 113. Выпуск 1. С. 90–108.
22. *Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Numerical simulations of a coupled radiative-conductive heat transfer model using a modified Monte Carlo method // Internat. Journal of Heat and Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 649–654.

THE INVERSE PROBLEM FOR QUASI-STATIONARY EQUATIONS OF COMPLEX HEAT TRANSFER WITH FRESNEL CONJUGATION CONDITIONS

A.Y. Chebotarev*

690041 Vladivostok, Radio Str., 7, IAM FEB RAS, Russia

*e-mail: cheb@iam.dvo.ru

Received: 21.02.2024

Revised: 19.04.2024

Accepted: 28.06.2024

Abstract. A nonstationary inverse problem is considered for a nonlinear parabolic elliptic system modeling complex heat transfer with Fresnel conjugation conditions on the surfaces of the refractive index discontinuity. The time-non-local unambiguous solvability of the inverse problem is proved.

Keywords: quasi-stationary equations of radiative heat transfer, Fresnel conjugation conditions, inverse problem, nonlocal solvability.