УДК 517.977.52

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ В ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ РАЗНОСТНЫМ И ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

© 2024 г. К.Б. Мансимов[1,2,*], А.В. Керимова[2]

[1]*Az 1148 Баку, ул. З.Халилова, 23, Бакинский Гос.Университет, Азербайджан*
[2]*Az 1141 Баку, ул. Б. Вагабзаде, 68, Институт Систем Министерства Образования и Науки Азербайджана, Азербайджан*
**e-mail: kamilbmansimov@gmail.com*

Поступила в редакцию 09.01.2024 г.
Переработанный вариант 09.01.2024 г.
Принята к публикации 28.06.2024 г.

Рассматривается ступенчатая задача оптимального управления, описываемая совокупностью разностных и интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра и функционалом типа Больца. Ранее подобные задачи исследовались для случая дифференциальных, а также обыкновенных разностных уравнений. При предположении открытости областей управления, применяя модифицированный вариант метода приращений, вычислены первая и вторая вариации функционала качества. С помощью этих вариаций доказан аналог уравнения Эйлера и ряд конструктивно проверяемых необходимых условий оптимальности второго порядка. Библ. 8.

Ключевые слова: разностное уравнение типа Вольтерра, интегродифференциальное уравнение Вольтерра, вариация функционала, необходимое условие оптимальности, аналог уравнения Эйлера.

DOI: 10.31857/S0044466924100072, **EDN**: KADJTN

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–3] и др. изучены некоторые задачи оптимального управления ступенчатыми системами, описываемые на различных отрезках времени различными обыкновенными дифференциальными уравнениями и получен в рассматриваемых задачах ряд необходимых условий оптимальности.

В предлагаемой работе рассматривается одна двухэтапная ступенчатая задача оптимального управления, описываемая совокупностью интегродифференциальных и разностных уравнений типа Вольтерра.

При предположении открытости областей управления получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $T_1 = \{t_0, t_0 + 1, \ldots, t_1 - 1\}$ и $T_2 = [t_1, t_2]$ — заданные соответственно “дискретный” и непрерывный отрезки, $U_1 \subset R^r$ и $U_2 \subset R^q$ — заданные непустые, открытые и ограниченные множества.

Предположим, что дискретно-непрерывный двухэтапный процесс описывается следующими системами разностных и интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$x_1(t+1) = f_1\big(t, x_1(t), u_1(t)\big) + \sum_{\tau=t_0}^{t} g_1\big(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)\big), \quad t \in T_1, \tag{1}$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \tag{2}$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2\big(t, x_2(t), u_2(t)\big) + \int\limits_{t_1}^{t} g_2\big(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)\big) d\tau, \quad t \in T_2, \tag{3}$$

$$x_2(t_1) = G(x_1(t_1)). \tag{4}$$

Здесь $f_1(t, x_1, u_1)$ $\big(g_1(t, \tau, x_1, u_1)\big)$ — заданная n-мерная вектор-функция, дискретная по t (t, τ) и дважды непрерывно дифференцируемая по (x_1, u_1), при всех t (t, τ), $f_2(t, x_2, u_2)$, $g_2(t, \tau, x_2, u_1)$ — заданные n-мерные вектор-функции, непрерывные по совокупности переменных вместе с частными производными по (x_2, u_2) до второго порядка включительно, x_{10} — заданный постоянный n-мерный вектор, $G(x_1)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая n-мерная вектор-функция, $u_1(t)$ $\big(u_2(t)\big)$ $-$ r (q) — мерная дискретная (кусочно - непрерывная, с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор-функция управляющих воздействий, со значениями из U_1 (U_2) , т.е.

$$u_1(t) \in U_1 \subset R^r, \quad t \in T_1, \tag{5}$$

$$u_2(t) \in U_2 \subset R^q, \quad t \in T_2. \tag{6}$$

Пару $(u_1(t), u_2(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем *допустимым управлением*.

Предполагается, что при каждом заданном допустимом управлении $(u_1(t), u_2(t))$ задачи Коши (1), (2) имеет единственное дискретное решение $x_1(t)$, а задача Коши (3), (4) имеет единственное кусочно-гладкое решение (см. например, [4–7]) $x_2(t)$.

На решениях задач Коши (1), (2) и (3), (4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал типа Больца в виде

$$J(u_1, u_2) = \varphi_1(x_1(t_1)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t} F_1\big(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)\big)\right] + \varphi_2(x_2(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t_1}^{t} F_2\big(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)\big) d\tau\right] dt. \tag{7}$$

Здесь $\varphi_i(x_i)$, $i = 1, 2$ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции, $F_1(t, \tau, x_1, u_1)$ — заданная дискретная по (t, τ) и дважды непрерывно дифференцируемая по (x_1, u_1) при всех (t, τ) скалярная функция, а $F_2(t, \tau, x_2, u_2)$ — заданная, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (x_2, u_2) до второго порядка включительно, скалярная функция.

Рассмотрим задачу нахождения минимального значения функционала (7) при ограничениях (1)–(6).

Допустимое управление $(u_1(t), u_2(t))$, доставляющее минимальное значение функционалу (7), при ограничениях (1)–(6), назовем *оптимальным управлением*, а соответствующий процесс $(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t))$ — *оптимальным процессом*.

Целью работы является вывод необходимых условий оптимальности первого и второго порядков в рассматриваемой задаче.

3. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМУЛЫ ПРИРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ФУНКЦИОНАЛА

Пусть $\big(u_1(t), u_2(t), x_1(t), x_2(t)\big)$ и $(\bar{u}_1(t) = u_1(t) + \Delta u_1(t)$, $\bar{u}_2(t) = u_2(t) + \Delta u_2(t)$, $\bar{x}_1(t) = x_1(t) + \Delta x_1(t)$, $\bar{x}_2(t) = x_2(t) + \Delta x_2(t))$ — некоторые допустимые процессы.

Тогда, ясно, что $(\Delta x_1(t), \Delta x_2(t))$ будет решением задачи

$$\Delta x_1(t+1) = f_1\big(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t)\big) - f_1\big(t, x_1(t), u_1(t)\big) + \sum_{\tau=t_0}^{t}\Big[g_1\big(t, \tau, \bar{x}_1(\tau), \bar{u}_1(\tau)\big) - g_1\big(t, \tau, x_1(\tau), u_1(\tau)\big)\Big], \tag{8}$$

$$\Delta x_1(t_0) = 0, \tag{9}$$

$$\Delta \dot{x}_2(t) = f_2\big(t, \bar{x}_2(t), \bar{u}_2(t)\big) - f_2\big(t, x_2(t), u_2(t)\big) + \int_{t_1}^{t}\Big[g_2\big(t, \tau, \bar{x}_2(\tau), \bar{u}_2(\tau)\big) - g_2\big(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau)\big)\Big] d\tau, \tag{10}$$

$$\Delta x_2(t_1) = G(\bar{x}_1(t)) - G(x_1(t_1)). \tag{11}$$

Пусть $\psi_i = \psi_i(t)$, $i = 1, 2$ — пока произвольные n-мерные вектор-функции.

Применяя дискретный аналог теоремы Фубини (см., например, [8]) доказывается, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1'(t)\,\Delta x_1(t+1) = \psi_1'(t_1-1)\Delta x_1(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1'(t-1)\,\Delta x_1(t) =$$

$$= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi_1'(t)\,\big(f_1(t, \bar{x}_1(t), \bar{u}_1(t)) - f_1(t, x_1(t), u_1(t))\big) +$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi_1'(\tau)\left[g_1\big(\tau,t,\bar{x}_1(t),\bar{u}_1(t)\big)-g_1\big(\tau,t,x_1(t),u_1(t)\big)\right]\right]. \quad (12)$$

Далее, применяя формулу Фубини (Дирихле) (см., например, [5, 7]) , получим

$$\int_{t_1}^{t_2}\psi_2'\Delta\dot{x}_2(t)dt=\psi_2'(t_2)\Delta x_2(t_2)-\psi_2'(t_1)\Big(G\big(\bar{x}(t_1)-G\big(x(t_1)\big)\Big)-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\psi_2'\Delta x_2(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\psi_2'(t)\Big(f_2\big(t,\bar{x}_2(t),\bar{u}_2(t)\big)-f_2\big(t,x_2(t),u_2(t)\big)\Big)+\right. \quad (13)$$

$$\left.+\int_{t_1}^{t_2}\psi_2'(\tau)\left[g_2\big(\tau,t,\bar{x}_2(t),\bar{u}_2(t)\big)-g_2\big(\tau,t,x_2(t),u_2(t)\big)\right]d\tau\right]dt.$$

Далее запишем формулу приращения функционала (7).

После некоторых преобразований будем иметь

$$\begin{gathered}\Delta J(u_1,u_2)=\varphi_1\big(\bar{x}_1(t_1)\big)-\varphi_1\big(x_1(t_1)\big)+\varphi_2\big(\bar{x}_2(t_2)\big)-\varphi_2\big(x_2(t_2)\big)+\\ +\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_1}^{t_1-1}\left[F_1\big(\tau,t,\bar{x}_1(t),\bar{u}_1(t)\big)-F_1\big(\tau,t,x_1(t),u_1(t)\big)\right]\right]+\\ +\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t_1}^{t_2}\left[F_2\big(\tau,t,\bar{x}_2(t),\bar{u}_2(t)\big)-F_2\big(\tau,t,x_2(t),u_2(t)\big)\right]d\tau\right]dt.\end{gathered} \quad (14)$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered}H_1\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1'(t)\big)=\psi_1'(t)f_1\big(t,x_1(t),u_1(t)\big)-\sum_{\tau=t}^{t_1-1}F_1\big(\tau,t,x_1(t),u_1(t)\big)+\\ +\sum_{\tau=t}^{t_1-1}\psi_1'(\tau)g_1\big(\tau,t,x_1(t),u_1(t)\big),\end{gathered} \quad (15)$$

$$\begin{gathered}H_2\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2'(t)\big)=\psi_2'(t)f_2\big(t,x_2(t),u_2(t)\big)-\int_{t_1}^{t_2}F_2\big(\tau,t,x_2(t),u_2(t)\big)d\tau+\\ +\int_{t_1}^{t_2}\psi_2'(\tau)g_2\big(\tau,t,x_2(t),u_2(t)\big)d\tau.\end{gathered} \quad (16)$$

Заметим, что функции $H_i(t,x_i(t),u_i(t),\psi_i(t))$, $i=1,2$, являются аналогами функции Гамильтона–Понтрягина (гамильтониана).

Учитывая эти обозначения, а также форму (12), (13), (15), (16) формула приращения (14) функционала представляется в виде

$$\begin{gathered}\Delta J(u_1,u_2)=\varphi_1\big(\bar{x}_1(t_1)\big)-\varphi_1\big(x_1(t_1)\big)+\varphi_2\big(\bar{x}_2(t_2)\big)-\varphi_2\big(x_2(t_2)\big)+\psi_1'(t_1-1)\Delta x_1(t_1)+\\ +\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'(t-1)\Delta x_1(t)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H_1\big(t,\bar{x}_1(t),\bar{u}_1(t),\psi_1(t)\big)-H_1\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t)\big)\right]+\\ +\psi_2'(t_2)\Delta x_2(t_2)-\psi_2'(t_1)\Big(G\big(\bar{x}_1(t_1)\big)-G\big(x_1(t_1)\big)\Big)-\int_{t_1}^{t_2}\dot{\psi}_2'(t)\Delta x_2(t)dt-\\ -\int_{t_1}^{t_2}\left[H_2\big(t,\bar{x}_2(t),\bar{u}_2(t),\psi_2(t)\big)-H_2\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t)\big)\right]dt.\end{gathered} \quad (17)$$

Введя обозначение

$$M\big(\psi_2(t_1), x_1(t_1)\big) = \psi_2'(t_1)\, G\big(x_1(t_1)\big),$$

и применяя отдельным слагаемым в этой формуле (17) формулу Тейлора, получим, что

$$\begin{aligned}
\Delta J(u_1,u_2) &= \frac{\partial \varphi_1'\big(x_1(t_1)\big)}{\partial x_1}\Delta x_1(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2 \varphi_1\big(x_1(t_1)\big)}{\partial x_1^2}\Delta x_1(t_1) + o_1\big(\|\Delta x_1(t_1)\|^2\big) + \\
&+ \psi_1'(t_1-1)\,\Delta x_1(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1'(t-1)\,\Delta x_1(t-1) - \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\frac{\partial H_1'\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t)\big)}{\partial x_1}\Delta x_1(t) + \right.\\
&\left. + \frac{\partial H_1'\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t)\big)}{\partial u_1}\Delta u_1(t)\right] + \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta x_1'(t)\frac{\partial^2 H_1\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t)\big)}{\partial x_1^2}\Delta x_1(t) + \right.\\
&\left. + 2\Delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t)\big)}{\partial u_1 \partial x_1}\Delta x_1(t) + \Delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t)\big)}{\partial^2 u_1}\Delta u_1(t)\right] - \\
&- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2\Big(\big[\|\Delta x_1(t)\| + \|\Delta u_1(t)\|\big]^2\Big) + \frac{\partial \varphi_2'\big(x_2(t_2)\big)}{\partial x_2}\Delta x_2(t_2) + \frac{1}{2}\Delta x_2'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi_2\big(x_2(t_2)\big)}{\partial x_2^2}\Delta x_2(t_2) + \\
&+ o_4\big(\|\Delta x_2(t_2)\|^2\big) + \psi_2'(t_2)\Delta x_2(t_2) - \frac{\partial M'\big(\psi_2(t_1),x_1(t_1)\big)}{\partial x_1}\Delta x_1(t) - \frac{1}{2}\Delta x_1'(t)\frac{\partial^2 M\big(\psi_2(t_1),x_1(t_1)\big)}{\partial x_1^2}\Delta x_1(t) - \\
&- o_3\big(\|\Delta x_1(t_1)\|^2\big) - \int_{t_1}^{t_2}\psi_2'(t)\Delta x_2(t)dt - \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial H_2'\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t)\big)}{\partial x_2}\Delta x_2(t) + \right.\\
&\left. + \frac{\partial H_2'\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t)\big)}{\partial u_2}\Delta u_2(t)\right]dt - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\Delta x_2'(t)\,\frac{\partial^2 H_2\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t)\big)}{\partial x_2^2}\Delta x_2(t) + \right.\\
&\left. + 2\Delta u_2'(t)\,\frac{\partial^2 H_2\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t)\big)}{\partial u_2 \partial x_2}\Delta x_2(t) + \Delta u_2'(t)\,\frac{\partial^2 H_2\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t)\big)}{\partial u_2^2}\Delta u_2(t)\right]dt - \\
&- \int_{t_1}^{t_2} o_5\Big(\big[\|\Delta x_2(t)\| + \|\Delta u_2(t)\|\big]^2\Big)dt. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Здесь $\|\alpha\|$ — норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|$, а $o(\alpha)$ есть величина более высокого порядка чем α, т. е. $\frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Если предполагать, что вектор-функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются соответственно решениями следующих задач:

$$\psi_1(t-1) = \frac{\partial H_1\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t)\big)}{\partial x_1}, \quad t \in T_1, \qquad (19)$$

$$\psi_1(t_1-1) = -\frac{\partial \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1} + \frac{\partial M\big(\psi_2(t_1), x_1(t_1)\big)}{\partial x_1}, \qquad (20)$$

$$\dot\psi_2(t) = -\frac{\partial H_2\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t)\big)}{\partial x_2}, \quad t \in T_2, \qquad (21)$$

$$\psi_2(t_2) = -\frac{\partial \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2}, \qquad (22)$$

то формула приращения (18) примет вид

$$\begin{aligned}
\Delta J(u_1,u_2) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H_1\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t)\big)}{\partial u_1}\Delta u_1(t) - \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\Delta x_1'(t)\frac{\partial^2 H_1\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t)\big)}{\partial x_1^2}\Delta x_1(t) + \right.\\
&\left. + 2\Delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t)\big)}{\partial u_1 \partial x_1}\Delta x_1(t) + \Delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1\big(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t)\big)}{\partial^2 u_1}\Delta u_1(t)\right] -
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_2\Big(\big[\|\Delta x_1(t)\|+\|\Delta u_1(t)\|\big]^2\Big)+\frac{1}{2}\Delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2\varphi_1\big(x_1(t_1)\big)}{\partial x_1^2}\Delta x_1(t_1)+o_1\big(\|\Delta x_1(t_1)\|^2\big)-$$

$$-\frac{1}{2}\Delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2 M\big(\psi_2(t_1),x_1(t_1)\big)}{\partial x_1^2}\Delta x_1(t_1)-o_3\big(\|\Delta x_1(t_1)\|^2\big)+\frac{1}{2}\Delta x_2'(t_2)\frac{\partial^2\varphi_2\big(x_2(t_2)\big)}{\partial x_2^2}\Delta x_2(t_2)+o_4\big(\|\Delta x_2(t_2)\|^2\big)-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial H_2'\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t)\big)}{\partial u_2}\Delta u_2(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\Bigg[\Delta x_2'(t)\,\frac{\partial^2 H_2\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t)\big)}{\partial x_2^2}\Delta x_2(t)+$$

$$+2\Delta u_2'(t)\,\frac{\partial^2 H_2\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t)\big)}{\partial u_2\partial x_2}\Delta x_2(t)+\Delta u_2'(t)\,\frac{\partial^2 H_2\big(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t)\big)}{\partial u_2^2}\Delta u_2(t)\Bigg]dt-$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} o_5\Big(\big[\|\Delta x_2(t)\|+\|\Delta u_2(t)\|\big]^2\Big)dt. \quad (23)$$

Задачи Коши (19), (20) и (21), (22) являются сопряженной системой в рассматриваемой задаче.

Доказанная формула приращения функционала качества позволяет получить необходимые условия оптимальности первого и второго порядков. Для этого нужно получить оценки для $\|x_1(t)\|$ и $\|x_2(t)\|$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА И АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Пусть в рассматриваемой задаче $\Delta u_1(t)\neq 0$, а $\Delta u_1(t)=0$. Тогда из задачи (8), (9) линеаризацией получаем, что

$$\Delta x_1(t+1)=\frac{\partial f_1\big(t,x_1(t),u_1(t)\big)}{\partial x_1}\Delta x_1(t)+\frac{\partial f_1\big(t,x_1(t),u_1(t)\big)}{\partial u_1}\Delta u_1(t)+o_6\Big(\big[\|\Delta x_1(t)\|+\|\Delta u_1(t)\|\big]\Big)+$$

$$+\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\frac{\partial g_1\big(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau)\big)}{\partial x_1}\Delta x_1(\tau)+\frac{\partial g_1\big(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau)\big)}{\partial u_1}\Delta u_1(\tau)+o_7\big(\|\Delta x_1(\tau)\|+\|\Delta u_1(\tau)\|\big)\right], \quad (24)$$

$$\Delta x_1(t_0)=0, \quad (25)$$

а из задачи (10), (11) получаем, что

$$\Delta x_2(t)=\int_{t_1}^{t}\frac{\partial f_2\big(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau)\big)}{\partial x_2}\Delta x_2(\tau)d\tau+\int_{t_1}^{t}\left[\int_{\tau}^{t}\frac{\partial g_2\big(s,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau)\big)}{\partial x_2}\Delta x_2(\tau)ds\right]d\tau+$$

$$+\int_{t_1}^{t}\Big(o_8\big(\|\Delta x_2(\tau)\|\big)+o_9\big(\|\Delta x_2(\tau)\|\big)\Big)d\tau+\frac{\partial G\big(x_1(t_1)\big)}{\partial x_1}\Delta x_1(t_1)+o_{10}\big(\|\Delta x_1(t_1)\|\big). \quad (26)$$

Пусть ε — произвольное достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_1(t)\in R^r$, $t\in T_1$, произвольная r-мерная дискретная и ограниченная вектор-функция (вариация управляющей функции $u_2(t)$).

Тогда специальное приращение управляющей функции $u_1(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u_1(t;\varepsilon)=\varepsilon\delta u_1(t). \quad (27)$$

Через $(\Delta x_1(t;\varepsilon),\Delta x_2(t;\varepsilon))$ определим специальное приращение траектории $(x_1(t),x_2(t))$, отвечающее специальному приращению (28) управления $u_1(t)$.

С помощью формулы (24) доказывается справедливость разложения

$$\Delta x_1(t;\varepsilon)=\varepsilon\delta x_1(t)+o(\varepsilon;t),\quad t\in T_1. \quad (28)$$

Здесь $\delta x_1(t)$ — вариация траектории $x_1(t)$, являющаяся решением уравнения в вариациях (см., например, [5, 6])

$$\delta x_1(t+1)=\frac{\partial f_1(t,x_1(t),u_1(t))}{\partial x_1}\delta x_1(t)+\frac{\partial f_1(t,x_1(t),u_1(t))}{\partial u_1}\delta u_1(t)+$$

$$+\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\frac{\partial g_1\left(t,\tau,x_1\left(\tau\right),u_1\left(\tau\right)\right)}{\partial x_1}\delta x_1\left(\tau\right)+\frac{\partial g_1\left(t,\tau,x_1\left(\tau\right),u_1\left(\tau\right)\right)}{\partial u_1}\delta u_1\left(\tau\right)\right],\quad t\in T_1, \tag{29}$$

$$\delta x_1\left(t_0\right)=0. \tag{30}$$

Далее из линеаризованной системы (26) получаем, что

$$\Delta x_2\left(t;\varepsilon\right)=\varepsilon\delta x_2\left(t\right)+o\left(\varepsilon;t\right), \tag{31}$$

где $\delta x_1\left(t_0\right)$ является решением аналога уравнения в вариациях (см., например, [6])

$$\delta\dot{x}_2\left(t\right)=\frac{\partial f_2\left(t,x_2\left(t\right),u_2\left(t\right)\right)}{\partial x_2}\delta x_2\left(t\right)+\int\limits_{t_1}^{t_1}\frac{\partial g_2\left(t,\tau,x_2\left(\tau\right),u_2\left(\tau\right)\right)}{\partial x_2}\delta x_2\left(\tau\right)d\tau, \tag{32}$$

$$\delta x_2\left(t_1\right)=\frac{\partial G\left(x_1\left(t_1\right)\right)}{\partial x_1}\delta x_1\left(t_1\right). \tag{33}$$

Сейчас предположим, что $\Delta u_1(t)=0$, а $\Delta u_1(t)\neq 0$. Тогда ясно, что при этом $\Delta x_1\left(t\right)=0$, а $\Delta x_2\left(t\right)$ будет решением задачи

$$\Delta\dot{x}_2(t)=f_2\big(t,\bar{x}_2(t),\bar{u}_2(t)\big)-f_2\big(t,x_2(t),u_2(t)\big)+\int\limits_{t_1}^{t}\Big[g_2\left(t,\tau,\bar{x}_2\left(\tau\right),\bar{u}_2\left(\tau\right)\right)-g_2\big(t,\tau,x_2\left(\tau\right),u_2\left(\tau\right)\big)\Big]d\tau, \tag{34}$$

$$\Delta x_2(t_1)=0. \tag{35}$$

Из задачи (34), (35) следует, что

$$\Delta x_2(t)=\int\limits_{t_1}^{t}\left[\Big(f_2\big(\tau,\bar{x}_2(\tau),\bar{u}_2(\tau)\big)-f_2\big(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau)\big)\Big)+\int\limits_{\tau}^{t}\Big[g_2\big(s,\tau,\bar{x}_2\left(\tau\right),\bar{u}_2\left(\tau\right)\big)-g_2\big(s,\tau,x_2\left(\tau\right),u_2\left(\tau\right)\big)\Big]ds\right]d\tau. \tag{36}$$

Из формулы (36) переходя к норме и используя условие Липшица, получаем, что

$$\|\Delta x_2(t)\|\leq L_4\int\limits_{t_1}^{t}\big(\|\Delta x_2(\tau)\|+\|\Delta u_2(\tau)\|\big)d\tau, \tag{37}$$

где $L_4=\text{const}>0$ — некоторое постоянное.

Из неравенства (37), применяя лемму Гроноулла–Беллмана получим, что

$$\|\Delta x_2(t)\|\leq L_5\int\limits_{t_1}^{t}\|\Delta u_2(\tau)\|d\tau, \tag{38}$$

где $L_5=\text{const}>0$ — некоторое постоянное.

Пусть теперь μ достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u_2\left(t\right)\in R^q$, $t\in T_2$, произвольная кусочно-непрерывная ограниченная q-мерная вектор-функция (допустимая вариация управляющей функции $u_2\left(t\right)$).

Специальное приращение допустимого управления $u_2\left(t\right)$ определим по формуле

$$\Delta u_2\left(t;\mu\right)=\mu\delta u_2\left(t\right),\quad t\in T_2. \tag{39}$$

Через $\Delta x_2\left(t;\mu\right)$ обозначим специальное приращение траектории $x_2\left(t\right)$, отвечающее приращению (39) управления $u_2\left(t\right)$.

Из оценки (38) следует, что

$$\|\Delta x_2\left(t;\mu\right)\|\leqslant L_6\mu,\quad t\in T_2. \tag{40}$$

Учитывая формулу (33) и оценку (40) с помощью (36) доказывается справедливость разложения

$$\Delta x_2\left(t;\mu\right)=\mu y\left(t\right)+o\left(\mu;t\right), \tag{41}$$

где $y(t)$ (вариация траектории $x_2(t)$) является решением задачи

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} y(t) + \frac{\partial f_2(\tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} \delta u_2(t) + $$
$$+ \int_{t_1}^{t_1} \left[\frac{\partial g_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial x_2} y(\tau) + \frac{\partial g_2(t, \tau, x_2(\tau), u_2(\tau))}{\partial u_2} \delta u_2(\tau) \right] d\tau, \tag{42}$$

$$\delta y(t_1) = 0. \tag{43}$$

Доказанные разложения (28), (31) и формулы (27), (39) позволяют сформулировать необходимые условия оптимальности первого и второго порядков.

Учитывая их из формулы приращения (23) функционала получаем, что

$$J(u_1(t) + \varepsilon \delta u_1(t), u_2(t)) - J(u_1(t), u_2(t)) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1'(t))}{\partial u_1} \delta u_1(t) -$$
$$- \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\delta x_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1'(t))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t) + 2\delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1'(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \delta x_1(t) + \right.$$
$$\left. + \delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1'(t))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} \delta x_2'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t_2) -$$
$$- \frac{\varepsilon^2}{2} \delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta x_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2'(t))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t)\, dt + o(\varepsilon^2); \tag{44}$$

$$J(u_1(t), u_2(t) + \mu \delta u_2(t)) - J(u_1(t), u_2(t)) = -\mu \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2'(t))}{\partial u_2} \delta u_2(t)\, dt +$$
$$+ \frac{\mu^2}{2} \delta y'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta y(t_2) - \frac{\mu^2}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[y'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2'(t))}{\partial x_2^2} y(t) + \right.$$
$$\left. + 2\delta u_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2'(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) + \delta u_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2'(t))}{\partial u_2^2} \delta u_2(t) \right] dt + o(\mu^2). \tag{45}$$

Из разложений (44) и (45) следуют выражения первых и вторых вариаций функционала в виде

$$\delta^1 J(u_1, u_2; \delta u_1) = - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1} \delta u_1(t), \tag{46}$$

$$\delta^1 J(u_1, u_2; \delta u_2) = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2} \delta u_2(t)\, dt, \tag{47}$$

$$\delta^2 J(u_1, u_2; \delta u_1) = \delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) + \delta x_2'(t_2) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t_2) -$$
$$- \delta x_1'(t_1) \frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \delta x_2'(t) \frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} \delta x_2(t)\, dt -$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[\delta x_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} \delta x_1(t) + 2\delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} \delta x_1(t) + \right.$$
$$\left. + \delta u_1'(t) \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1^2} \delta u_1(t) \right], \tag{48}$$

$$\delta^2 J(u_1, u_2; \delta u_2) = y'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} y(t_2) - \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[y'(t)\frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} y(t) + \right.$$
$$\left. + 2\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) + \delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2^2}\delta u_2(t)\right] dt. \quad (49)$$

5. НЕОБХОДИЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ТЕРМИНАХ ВАРИАЦИЙ ФУНКЦИОНАЛА

Как известно из вариационного исчисления (см., например, [4–7]) в случае задачи на минимум, вдоль оптимального управления первая вариация функционала равна нулю, а вторая неотрицательна. Поэтому из соотношений (46) и (47) получаем, что вдоль оптимального управления

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\frac{\partial H_1'(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1}\delta u_1(t) = 0,$$
$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 H_2'(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2}\delta u_2(t)\,dt = 0$$

для всех $\delta u_1(t) \in R^r$, $t \in T_1$, и $\delta u_2(t) \in R^q$, $t \in T_2$, соответственно.

Учитывая произвольность допустимых вариаций δu_1 и δu_2, доказывается

Теорема 1. *Для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы выполнялись соотношения*

$$\frac{\partial H_1(\theta, x_1(\theta), u_1(\theta), \psi_1(\theta))}{\partial u_1} = 0 \quad \forall \theta \in T_1, \quad (50)$$
$$\frac{\partial H_2(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \psi_2(\theta))}{\partial u_2} = 0 \quad \forall \theta \in [t_1, t_2). \quad (51)$$

Здесь $\theta \in [t_1, t_2)$ — произвольная точка непрерывности управления $u_2(t)$.

Соотношения (50), (51) являются необходимыми условиями оптимальности первого порядка и представляют собой аналог уравнения Эйлера из классического вариационного исчисления (см., например, [4, 5]).

Любое допустимое управление $(u_1(t), u_2(t))$, удовлетворяющее аналог уравнения Эйлера (50), (51) назовем *классической экстремалью*.

Известно, что число классических экстремалей может быть достаточно большим [6].

Поэтому надо иметь необходимые условия оптимальности второго порядка.

Из формул (48) и (49) следует, что для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ необходимо, чтобы неравенства

$$\delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t_1) + \delta x_2'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t_2) - \delta x_1'(t_1)\frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t_1) -$$
$$- \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\delta x_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t) + 2\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1}\delta x_1(t) + \right.$$
$$\left. + \delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1^2}\delta u_1(t)\right] - \int\limits_{t_1}^{t_2}\delta x_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t)\,dt \geqslant 0, \quad (52)$$

$$y'(t_2)\frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} y(t_2) - \int\limits_{t_1}^{t_2}\left[y'(t)\frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} y(t) + \right.$$
$$\left. + 2\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) + \delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2^2}\delta u_2(t)\right] dt \geqslant 0 \quad (53)$$

выполнялись для всех $\delta u_1(t) \in R^r$, $t \in T_1$, и $\delta u_2(t) \in R^q$, $t \in T_2$, соответственно.

Неравенства (52) и (53) являются неявно заданными необходимыми условиями оптимальности второго порядка.

Поэтому возникает необходимость получения необходимых условий оптимальности второго порядка выраженных в явной форме.

6. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА ЗАДАННЫЕ В ЯВНОЙ ФОРМЕ

Задачи (29), (30) и (32), (33) являются линейными неоднородными задачами Коши.

Пусть матричные функции$F_1(t,\tau)$ и $F_2(t,\tau)$ $(n\times n)$ являются решениями задач

$$F_1(t,\tau-1)=F_1(t,\tau)\frac{\partial f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial x_1}+\sum_{s=\tau}^{t-1}F_1(t,s)\frac{\partial g_1(s,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial x_1}, \tag{54}$$

$$F_1(t,t-1)=E, \tag{55}$$

$$\frac{\partial F_2(t,\tau)}{\partial\tau}=F_2(t,\tau)\frac{\partial f_2(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial x_2}+\int_{t_1}^{t}F_2(t,s)\frac{\partial g_2(s,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial x_2}ds, \tag{56}$$

$$F_2(t,t)=E, \tag{57}$$

где E есть $(n\times n)$ единичная матрица.

Тогда решения задач (29), (30), (32), (33) и (42), (43) могут быть представлены в виде

$$\delta x_1(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t}F_1(t,\tau)\frac{\partial f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}\delta u_1(\tau)+\sum_{\tau=t_0}^{t}\left[\sum_{s=\tau}^{t-1}F_1(t,s)\frac{\partial g_1(s,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}\right]\delta u_1(\tau), \tag{58}$$

$$\delta x_2(t)=F_2(t,t_1)\frac{\partial G(x_1(t_1))}{\partial x_1}\delta x_1(t_1), \tag{59}$$

$$y(t)=\int_{t_1}^{t}F_2(t,\tau)\frac{\partial f_2(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial x_2}\delta u_2(\tau)\,d\tau+\int_{t_1}^{t}\left[\int_{\tau}^{t}F_2(t,s)\frac{\partial g_2(s,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial u_2}\delta u_2(\tau)\,ds\right]d\tau. \tag{60}$$

Учитывая представление (58), представление (59) записывается в виде

$$\delta x_2(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}F_2(t,t_1)\frac{\partial G(x_1(t))}{\partial x_1}\left[F_1(t_1,\tau)\frac{\partial f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}+\sum_{s=\tau}^{t-1}F_1(t,s)\frac{\partial g_1(s,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}\right]\delta u_1(\tau).$$

Введя обозначения

$$Q_1(t,\tau)=F_1(t,\tau)\frac{\partial f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}+\sum_{s=\tau}^{t-1}R_1(t,s)\frac{\partial g_1(s,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1},$$

$$Q_2(t,\tau)=F_2(t,t_1)\frac{\partial G(x_1(t))}{\partial x_1}\left[F_1(t_1,\tau)\frac{\partial f_1(\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}+\sum_{s=\tau}^{t_1-1}F_1(t,s)\frac{\partial g_1(t,\tau,x_1(\tau),u_1(\tau))}{\partial u_1}\right],$$

$$Q_3(t,\tau)=F_2(t,\tau)\frac{\partial f_2(\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial u_2}+\int_{\tau}^{t}F_2(t,s)\frac{\partial K_2(s,\tau,x_2(\tau),u_2(\tau))}{\partial u_2}ds,$$

представления (58), (59) и (60) записываются в следующем компактном виде:

$$\delta x_1(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}Q_1(t,\tau)\,\delta u_1(\tau), \tag{61}$$

$$\delta x_2(t)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}Q_2(t_1,\tau)\,\delta u_1(\tau), \tag{62}$$

$$y(t_1) = \int_{t_1}^{t_1} Q_3(t_1, \tau)\,\delta u_2(\tau)\,d\tau. \tag{63}$$

Теперь учитывая представления (61)–(63), займемся преобразованием отдельных слагаемых в неравенствах (52) и (53).

С помощью формул (61) и (63) доказывается, что

$$\delta x_1'(t_1)\,\frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u_1'(\tau)\,Q_1'(t_1,\tau)\,\frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} Q_1(t_1,s)\,\delta u_1(s), \tag{64}$$

$$x_2'(t_2)\,\frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t_2) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u_1'(\tau)\,Q_2'(t_2,\tau)\,\frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_2(t_2,s)\,\delta u_1(s), \tag{65}$$

$$\delta x_1'(t_1)\,\frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t_1) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u_1'(\tau)\,Q_1'(t_1,\tau)\,\frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1), x_1(t_1))}{\partial x_1^2} Q_1(t_1,s)\,\delta u_1(s), \tag{66}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u_1'(t)\,\frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1}\delta x_1(t) =$$
$$= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta u_1'(t)\left[\sum_{\tau=t_0}^{t} \frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial u_1 \partial x_1} Q_1(t,\tau)\,\delta u_1(\tau)\right], \tag{67}$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \delta x_1'(t)\,\frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2}\delta x_1(t) =$$
$$= \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1} \delta u_1'(\tau)\left[\sum_{\max(\tau,s)+1}^{t_1-1} Q_1'(t,\tau)\,\frac{\partial^2 H_1(t, x_1(t), u_1(t), \psi_1(t))}{\partial x_1^2} Q_1(t,s)\right]\delta u_1(s), \tag{68}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta x_2'(t)\,\frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2}\delta x_2(t)\,dt =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \delta u_1'(\tau)\,Q_2'(t,\tau)\,\frac{\partial^2 H_1(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2}\sum_{s=t_0}^{t_1-1} Q_2(t,s)\,\delta u_2(s)\right]dt, \tag{69}$$

$$y'(t_2)\,\frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} y(t_2) = \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} \delta u_2'(t)\,Q_3'(t_2,\tau)\,\frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_3(t_2,s)\,\delta u_2(s)\,ds d\tau, \tag{70}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta u_2'(t)\,\frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} y(t) =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t_1}^{t_1} \delta u_2'(t)\,\frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial u_2 \partial x_2} Q_3(t,\tau)\,\delta u_2(\tau)\,d\tau\right]dt, \tag{71}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} y'(t)\,\frac{\partial^2 H_2(t, x_2(t), u_2(t), \psi_2(t))}{\partial x_2^2} y(t)\,dt =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2} \delta u_2'(\tau)\left[\int_{max(\tau,s)}^{t_2} Q_3'(t,\tau)\,\frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_3(t,s)\,dt\right]\delta u_2(s)\,ds d\tau. \tag{72}$$

Введем обозначения

$$K_1(\tau, s) = -Q_1'(t_1,\tau)\,\frac{\partial^2 \varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1^2} Q_1(t_1,s) - Q_2'(t_1,\tau)\,\frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} Q_2(t_1,s) +$$

$$+ Q_1'(t_1,\tau)\frac{\partial^2 M(\psi_2(t_1-1),x_1(t_1))}{\partial x_1^2}Q_1(t_1,s) + \sum_{\max(\tau,s)+1}^{t_1-1} Q_1'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial x_1^2}Q_1(t,s) + \\ + \int_{t_1}^{t_2} \delta Q_2'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2^2}Q_2(t,s)\,dt, \quad (73)$$

$$K_2(\tau,s) = -Q_3'(t_2,\tau)\frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2}Q_3(t_2,s) + \int_{\max(\tau,s)}^{t_2} Q_3'(t,\tau)\frac{\partial^2 H_1(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial x_2^2}Q_3(t,s)\,dt. \quad (74)$$

Учитывая доказанные тождества (64)–(72) и обозначения (73), (74), из неравенств (51)–(53) получаем, что

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=t_0}^{t_1-1}\delta u_1'(\tau)K_1(\tau,s)\delta u_1(s) + 2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1\partial x_1}Q_1(t,\tau)\delta u_1(\tau)\right] + \\ + \sum_{t=t_0}^{t_1-1}\delta u_1'(t)\frac{\partial^2 H_1(t,x_1(t),u_1(t),\psi_1(t))}{\partial u_1^2}\delta u_1(t) \leqslant 0, \quad (75)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{t_1}^{t_2}\delta u_2'(\tau)K_2(\tau,s)\delta u_2(s)\,ds d\tau + 2\int_{t_1}^{t_2}\left[\int_{t_1}^{t_1}\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2\partial x_2}Q_3(t,\tau)\delta u_2(\tau)\,d\tau\right]dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2}\delta u_2'(t)\frac{\partial^2 H_2(t,x_2(t),u_2(t),\psi_2(t))}{\partial u_2^2}\delta u_2(t) \leqslant 0. \quad (76)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. *Для оптимальности классической экстремали* $(u_1(t), u_2(t))$ *необходимо, чтобы неравенства* (75) *и* (76) *выполнялись соответственно для всех* $\delta u_1(t) \in R^r$, $t \in T_1$, *и* $\delta u_2(t) \in R^q$, $t \in T_2$.

Как видно, необходимые условия оптимальности (75) и (76) являясь общими условиями оптимальности второго порядка, носят явный характер и выражены непосредственно через параметры рассматриваемой задачи.

Из них, используя произвольность допустимых вариаций, $\delta u_1(t)$ и $\delta u_2(t)$, управляющих функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, можно получить более простые, но менее информативные условия оптимальности.

Приведем одну из них.

Теорема 3. *Для оптимальности классической экстремали* $(u_1(t), u_2(t))$ *необходимо, чтобы неравенства*

$$v_1{}'K_1(\theta,\theta)v_1 + v_1{}'\frac{\partial^2 H_1(\theta,x_1(\theta),u_1(\theta),\psi_1(\theta))}{\partial u_1^2}v_1 \leqslant 0, \quad (77)$$

$$v_2{}'\frac{\partial^2 H_2(\theta,x_2(\theta),u_2(\theta),\psi(\theta))}{\partial u_2^2}v_2 \leqslant 0 \quad (78)$$

выполнялись для всех $v_1 \in R^r$ *и* $\theta \in T_1$ *и* $v_2 \in R^q$, $\theta \in [t_1, t_2)$ *соответственно.*

Доказательство. Допустимую вариацию $\delta u_1(t)$, управления $u_1(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_1(t) = \begin{cases} v_1, & t = \theta, \theta \in T_1, \\ 0, & t \neq \theta, \end{cases} \quad (79)$$

где $v_1 \in R^r$ — произвольный вектор, $\theta \in T_1$ — произвольная точка.

Учитывая формулу (73) в неравенстве (75) приходим к неравенству (77).

Докажем неравенство (78).

Пусть $\theta \in [t_1, t_2)$ — произвольная точка непрерывности управления $u_2(t)$, $v_2 \in R^q$ — произвольный вектор, $\varepsilon > 0$ — произвольное достаточно малое число такое,что $\theta + \varepsilon < t_2$.

Специальную вариацию управления $u_2(t)$ определим по формуле

$$\Delta u_2(t;\varepsilon) = \begin{cases} v_2, & t \in [\theta, \theta+\varepsilon)\,, \\ 0, & t \in T_2 \setminus [\theta, \theta+\varepsilon)\,. \end{cases} \tag{80}$$

Принимая во внимание формулу (80), в неравенстве (76), после некоторых преобразований получим, что

$$\varepsilon v_2' \frac{\partial^2 H_2\big(\theta, x_2(\theta), u_2(\theta), \psi(\theta)\big)}{\partial u_2^2} v_2 + o(\varepsilon) \le 0.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует неравенство (78).

Этим теорема доказана.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривается одна ступенчатая дискретно-непрерывная задача оптимального управления, описываемая системами разностных уравнений Вольтерра и интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра с общим функционалом типа Больмаца.

Области управления являются открытыми множествами.

Вычислены первая и вторая вариации функционала качества.

С их помощью доказан аналог уравнения Эйлера и ряд необходимых условий оптимальности второго порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розова В.Н.* Оптимальное управление ступенчатыми системами с неинтегральным функционалом // Вестник РУДН. Сер. прикл. и компьютерная математика. 2002. № 1(1). С. 131–136.

2. *Захаров Г.К.* Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемехан. 1993. № 6. С. 32–36.

3. *Исмайлов Р.Р., Мансимов К.Б.* Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. №10. С. 1758–1770.

4. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В., Калинин А.И. и.др.* Методы оптимизации. Минск: Изд–во “Четыре четверти”, 2011. 472 с.

5. *Афансьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш.школа, 1989. 447 с.

6. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011. 256 с.

7. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2018, 384 с.

8. *Souyousefain M., Leela S.* Stability results for difference equations of Volterra type // Appl. Math. Comput. 1990. V. 36. № 1. P. 51–61.

NECESSARY CONDITIONS FOR OPTIMALITY OF THE FIRST AND SECOND ORDERS IN A SINGLE STEP CONTROL PROBLEM DESCRIBED BY VOLTERRA TYPE DIFFERENTIAL AND INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS

K. B. Mansimov[a,b,*], **A. V. Kerimova**[b]

[a] *Az 1148 Baku, Z. Khalilov str., 23, Baku State University, Azerbaijan*
[b] *Az 1141 Baku, B. Vagabzade str., 68, Institute of Systems of the Ministry of Education and Science of Azerbaijan, Azerbaijan*
**e-mail: kamilbmansimov@gmail.com*

Received: 09.01.2024
Revised: 09.01.2024
Accepted: 28.06.2024

Abstract. A stepwise optimal control problem is considered, described by a set of Volterra type difference and integrodifferential equations and a Boltz type functional. Previously, similar problems were investigated for the case of differential as well as ordinary difference equations. Assuming the openness of the control areas, using a modified version of the increment method, the first and second variations of the quality functional are calculated. With the help of these variations, an analogue of the Euler equation and a number of constructively verifiable necessary conditions for second-order optimality are proved.

Keywords: Volterra type difference equation, Volterra integrodifferential equations, functional variation, necessary optimality condition, analog of the Euler equation.