ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 10, с. 1851–1867

УДК 658.5

ПОИСК ГЛОБАЛЬНОГО ОПТИМУМА В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ТОПОЛОГИИ СЕТИ[1)]

 А. Ю. Крылатов[1,2,*]

[1] 199034 Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9, СПбГУ, Россия
[2] 199178 Санкт-Петербург, 12-я лин. В.О., 13, Институт проблем транспорта, Россия
*e-mail: a.krylatov@spbu.ru, aykrylatov@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.
Переработанный вариант 25.05.2024 г.
Принята к публикации 01.07.2024 г.

Статья посвящена проблеме поиска глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети для случая сетей с непересекающимися путями. В рассматриваемой постановке задачи менеджер сети инвестирует в пропускные способности ее элементов, стремясь минимизировать общую задержку, возникающую в результате равновесного распределения потоков. Доказано, что решение исследуемой задачи с необходимостью должно разрешать определенную задачу минимакса. При этом получены условия оптимальности решений возникающей задачи минимакса при достаточно естественных допущениях. На основе полученных результатов разработан новый алгоритм решения задачи оптимизации топологии сети с непересекающимися путями. Библ. 20. Фиг. 3. Табл. 2.

Ключевые слова: оптимизация топологии сети, равновесное распределение потоков.

DOI: 10.31857/S0044466924100068, **EDN**: KAHPGL

ВВЕДЕНИЕ

Одна из первых постановок задачи оптимизации топологии сети была сформулирована в виде игры Штакельберга (см. [1]). В рамках такой постановки лидер инвестирует в пропускные способности элементов сети, стремясь минимизировать общую задержку (общие затраты), возникающую в результате равновесного распределения потоков на нижнем уровне (см. [2]). Можно выделить две ключевые практические предпосылки, послужившие драйвером к возникновению такой модели. Во-первых, принципиально некооперативное поведение единиц потока в различных реальных сетях. Действительно, в общем случае, некооперативно ведут себя, например, потоки участников движения в улично-дорожных сетях (см. [3]), грузовые потоки в логистических сетях (см. [4]), потоки сигналов в беспроводных сетях (см. [5]). Во-вторых, менеджеры сложных сетей, зачастую, не могут непосредственно влиять на поведение единиц потока, что заставляет их добиваться улучшений в функционировании всей сети через воздействие на ее топологию.

Стоит отметить, что формулируемая указанным образом задача оптимизации топологии сети является одной из самых ресурсоемких, с точки зрения вычислений, задач в области транспортного планирования (см. [6], [7]). Тем не менее, в силу практической значимости этой задачи многие исследователи занимаются разработкой подходов к ее решению. При этом подавляющее большинство разрабатываемых методов, представленных в литературе, основаны на идее приближенного представления реакции нижнего уровня на воздействия верхнего как вектор-функции от переменных пропускных способностей. Нет сомнений, что предположение о существовании такой вектор-функции существенно упрощает изначальную задачу, сводя ее к задаче условной нелинейной оптимизации. Однако на текущий момент не известен ни вид такой функции, ни даже ее свойства (см. [8], [9]). Таким образом, используя различные приближения указанной функции, исследователи получают допустимые решения двухуровневой задачи оптимизации топологии сети, но, как правило, не могут ответить на вопрос, приводят ли получаемые решения к глобальному оптимуму или нет (см. [10], [11]).

Наиболее распространенной среди приближенных представлений реакции нижнего уровня на воздействия верхнего является аппроксимация первого порядка, полученная изначально для целей анализа чувствительности равновесного распределения потоков к незначительным изменениям пропускных способностей (см. [12],

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22–71–10063).

[13]). Такая аппроксимация оказалась востребованной, поскольку на ее основе можно разрабатывать различные проекционные методы решения (см. [14], [15]). Действительно, приближение первого порядка позволяет эффективно находить точки локального оптимума за счет применения градиентного спуска (см. [16]). Подобные методы продемонстрировали хорошую сходимость к локальным оптимумам, но не смогли справиться с поиском глобального. Исследователи полагают, что множественные локальные оптимумы возникают вследствие невыпуклости задачи оптимизации топологии сети (см. [11], [14]). В то же время, недавние результаты показали, что, по крайней мере, на малых сетях получаемые проекционными методами локальные оптимумы довольно близки к глобальному (см. [17]).

Таким образом, до сих пор существуют открытые исследовательские вопросы в изучении глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети, формулируемой описанным выше образом. В настоящей работе внимание будет сфокусировано на получении условий оптимальности для поиска глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети в случае специальных видов сетей. Рассматриваемые в статье сети встречаются при моделировании автомобильных потоков на элементах улично-дорожной сети с непересекающимися путями (см. [18]), потоков грузов в дистрибутивных сетях звездочного типа (см. [4]), потоков сигналов в беспроводных сетях (см. [5]). В разд. 1 приведена математическая формулировка задачи оптимизации топологии сети в виде задачи двухуровневой оптимизации для рассматриваемого в статье случая сетей. Последующие разделы посвящены исследованию условий оптимальности решения сформулированной задачи.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим сеть в виде ориентированного графа $G = (V, E)$. Будем считать, что сеть состоит из n непересекающихся альтернативных путей (каналов), либо исходящих из единственного истока, либо входящих в единственный сток, либо исходящих из единственного истока и входящих в единственный сток. Множество всех таких непересекающихся альтернатив будем обозначать через I, $|I| = n$. Предположим, что каждая альтернатива i, $i \in I$, характеризуется величиной пропускной способности y_i, $y = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$ при $y \in \mathbb{R}^n$. При этом будем считать, что величины пропускных способностей y_i, $i \in I$, являются переменными верхнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети, каждая из которых может принимать допустимые значения от $l_i > 0$ до $u_i > 0$, т.е. y_i принадлежит множеству $Y_i = \{y_i \,|\, l_i \le y_i \le u_i\}$ для любого $i \in I$; $l = (l_1, \ldots, l_n)^{\mathrm{T}}$ и $u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{T}}$. Более того, для каждого $i \in I$ введем непрерывно-дифференцируемую строго возрастающую выпуклую функцию на множестве вещественных неотрицательных чисел $g_i(\cdot)$, принимающую только неотрицательные значения. Функцией $g_i(y_i)$, $i \in I$, будем описывать бюджетные затраты, необходимые для увеличения пропускной способности альтернативы i с величины l_i до величины y_i при $g_i(l_i) = 0$. При этом общий бюджет, который может быть инвестирован в увеличение пропускной способности всех альтернатив не должен превышать U: $\sum_{i\in I} g_i(y_i) \le U$. Таким образом, получаем область определения переменных верхнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети:

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i\in I} g_i(y_i) \le U \ \text{ и } \ l_i \le y_i \le u_i \quad \forall i \in I \right\}.$$

В свою очередь, будем считать, что как только допустимый набор величин пропускных способностей $y \in Y$ задан, поток $D > 0$ распределяется среди доступных альтернатив. Через x_i обозначим количество потока, распределенного по альтернативе i, $i \in I$: $D = \sum_{i\in I} x_i$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ при $x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, получаем область определения переменных нижнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i\in I} x_i = D \ \text{ и } \ x_i \ge 0 \quad \forall i \in I \right\}.$$

Более того, будем считать, что каждая альтернатива i, $i \in I$, характеризуется функцией задержки (затрат) $f_i(x_i, y_i)$ единицы потока x_i по альтернативе с пропускной способностью y_i. С одной стороны, будем предполагать, что для любого фиксированного положительного $\bar{y}_i \in \mathbb{R}^1$, $i \in I$, функция $f_i(x_i, \bar{y}_i) \in C^3(\mathbb{R}^1)$, при этом

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(0, \bar{y}_i) = 0, \tag{1}$$

и для $m = \overline{1,2}$ справедливо

$$\frac{\partial^m f_i}{\partial x_i^m}(x_i, \bar{y}_i) > 0 \quad \forall x_i > 0. \tag{2}$$

С другой стороны, будем предполагать, что для любого фиксированного $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^1$, $i \in I$, функция $f_i(\bar{x}_i, y_i) \in \in C^1(\mathbb{R}^1)$, при этом если $\bar{x}_i \geq 0$, то

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(\bar{x}_i, y_i) \leq 0 \quad \forall y_i \in Y_i. \tag{3}$$

В настоящей статье мы рассмотрим двухуровневую задачу оптимизации топологии сети G в виде игры Штакельберга. Будем предполагать, что лидер стремится минимизировать общие затраты в сети на верхнем уровне оптимизации, в то время как на нижнем уровне происходит равновесное распределение потоков (затраты на всех используемых альтернативах одинаковы и меньше затрат на неиспользуемых). В рамках введенных предположений некооперативная игра равновесного распределения потоков на нижнем уровне является потенциальной игрой и может быть сформулирована в виде следующей задачи условной нелинейной оптимизации (см. [18], [19]):

$$\min_{x \in X} \sum_{i \in I} \int_0^{x_i} f_i(u, y_i) du.$$

Заметим, что при строго возрастающих функциях $f_i(x_i, y_i)$ по x_i, $i \in I$, для любого $y \in Y$ мы получаем задачу минимизации выпуклой целевой функции на выпуклом множестве ограничений. Другими словами, для любого $y \in Y$ задача оптимизации нижнего уровня имеет единственное решение. В свою очередь, лидер на верхнем уровне стремится минимизировать общие затраты (общую задержку) в сети за счет минимальных инвестиций в увеличение пропускной способности альтернатив (см. [20]):

$$\min_{y \in Y} \sum_{i \in I} f_i(x_i, y_i) x_i + w \sum_{i \in I} g_i(y_i),$$

где вес $w \geq 0$ определяет значимость инвестиционных затрат в целевой функции верхнего уровня. Таким образом, окончательно получаем следующую задачу двухуровневой оптимизации топологии сети (см. [2]):

$$\min_{y \in Y} \sum_{i \in I} f_i(x_i, y_i) x_i + w \sum_{i \in I} g_i(y_i) \tag{4}$$

при

$$x = \arg\min_{x \in X} \sum_{i \in I} \int_0^{x_i} f_i(u, y_i) du. \tag{5}$$

2. РАВНОВЕСИЕ ПОТОКОВ КАК МИНИМУМ РАВНОВЕСНОЙ ЗАДЕРЖКИ

Для любого $\hat{I} \subseteq I$ зададим функцию

$$\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = \frac{\sum\limits_{i \in \hat{I}} \dfrac{f_i(x_i, y_i)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}}{\sum\limits_{i \in \hat{I}} \dfrac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}} \tag{6}$$

на $X_{\hat{I}} \times \overline{Y}$, где $X_{\hat{I}} = \{x \in X \mid x_i > 0 \Leftrightarrow i \in \hat{I}\}$, а $\overline{Y} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid l_i \leq y_i \leq u_i \quad \forall i \in I\}$.

Лемма 1. *Для любого $y \in \overline{Y}$, если система уравнений $f_s(x_s, y_s) = f_r(x_r, y_r)$, $s, r \in \hat{I}$, имеет решение $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$, то $\hat{x}$ является точкой максимума функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$ на множестве $X_{\hat{I}}$.*

Доказательство. I. Для произвольно выбранного $y \in \overline{Y}$ рассмотрим Лагранжиан функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$ на множестве $X_{\hat{I}}$:

$$L(x, y) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) + \omega \left(D - \sum_{i \in \hat{I}} x_i \right), \tag{7}$$

где ω является множителем Лагранжа. Согласно условиям Каруша–Куна–Таккера, решение следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x, y) = 0 \quad \forall i \in \hat{I}, \tag{8}$$

удовлетворяющее $\sum_{i\in\hat{I}} x_i = D$, может являться точкой экстремума функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y)$ на множестве $X_{\hat{I}}$ для заданного $y \in \overline{Y}$. Если подставить (7) в (8), то получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y) = \omega \quad \forall i \in \hat{I}. \tag{9}$$

Таким образом, для любого $y \in \overline{Y}$, если существует вектор $x \in X_{\hat{I}}$ и число ω, удовлетворяющее системе (9), то выполняются условия оптимальности первого порядка, а значит, такой x может являться точкой экстремума функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y)$ на множестве $X_{\hat{I}}$ для заданного $y \in \overline{Y}$.

Рассмотрим первые частные производные функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y)$ по каждой из компонент x:

$$\frac{\partial \mathbb{f}_{\hat{I}}}{\partial x_i} = \frac{1}{\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}}} + \left(\frac{\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{f_s}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}}}{\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}}} - f_i\right) \frac{\frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}}{\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right]^2}}{\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}}} \quad \forall i \in \hat{I}. \tag{10}$$

Для любого $\hat{I} \subseteq I$ и $y \in \overline{Y}$, если система уравнений $f_i(x_i,y_i) = f_j(x_j,y_j)$, $i,j \in \hat{I}$, имеет решение $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$, то, благодаря (10),

$$\frac{\partial \mathbb{f}_{\hat{I}}}{\partial x_i}(\hat{x},y) = \frac{1}{\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s,y_s)}} \quad \forall i \in \hat{I}. \tag{11}$$

Таким образом, для любого $y \in \overline{Y}$, если существует вектор $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ такой, что $f_i(\hat{x}_i,y_i) = f_j(\hat{x}_j,y_j)$, $i,j \in \hat{I}$, то $\hat{x}$ может являться точкой экстремума функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y)$ на множестве $X_{\hat{I}}$, так как в таком случае существует $\omega = 1/\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s,y_s)}$, при котором $\hat{x}$ удовлетворяет системе уравнений (9).

II. Для произвольно выбранного $y \in \overline{Y}$ проверим, является ли $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$, удовлетворяющий $f_i(\hat{x}_i,y_i) = f_j(\hat{x}_j,y_j)$ для всех $i,j \in \hat{I}$, точкой экстремума функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y)$ на множестве $X_{\hat{I}}$. Другими словами, проверим выполнимость условий оптимальности второго порядка. Необходимо установить, какие значения принимает квадратичная форма функции Лагранжа

$$Q(x,y) = \sum_{i,j\in\hat{I}} \frac{\partial^2 L(x,y)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j \tag{12}$$

в точке $\hat{x}$ при Δx_i, $i \in \hat{I}$, удовлетворяющих следующим условиям: $\sum_{i\in\hat{I}} \frac{\partial q}{\partial x_i}\Delta x_i = 0$, где $q(x) = \sum_{i\in\hat{I}} x_i - D$, т.е.

$$\sum_{i\in\hat{I}} \Delta x_i = 0. \tag{13}$$

Не умаляя общности, положим, что k является последним элементом упорядоченного множества $\hat{I}$. В таком случае из (13) следует, что

$$\Delta x_k = -\sum_{i=1}^{k-1} \Delta x_i. \tag{14}$$

При этом для произвольно выбранного $y \in \overline{Y}$, если система уравнений $f_s(x_s,y_s) = f_r(x_r,y_r)$, $s,r \in \hat{I}$, имеет решение $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$, то вторые частные производные функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y)$ по x_i, $i \in \hat{I}$, в точке $\hat{x}$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 \mathbb{f}_{\hat{I}}}{\partial x_i^2}(\hat{x},y) = 2\frac{\frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\hat{x}_i,y_i)}{\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i,y_i)\right]^2}}{\left[\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s,y_s)}\right]^2} - \frac{\frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\hat{x}_i,y_i)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i,y_i)}}{\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s,y_s)}} \quad \forall i \in \hat{I}, \tag{15}$$

в то время как вторые частные производные функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y)$ по x_i и x_j, $i,j \in \hat{I}$, в точке $\hat{x}$ имеют вид

$$\frac{\partial^2 \mathbb{f}_{\hat{I}}}{\partial x_i \partial x_j}(\hat{x},y) = \frac{\frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\hat{x}_i,y_i)}{\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i,y_i)\right]^2}}{\left[\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s,y_s)}\right]^2} + \frac{\frac{\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_j^2}(\hat{x}_j,y_j)}{\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\hat{x}_j,y_j)\right]^2}}{\left[\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s,y_s)}\right]^2} \quad \forall i,j \in \hat{I}. \tag{16}$$

Подставляя (14)–(16) в (12), получаем

$$Q(\hat{x}, y) = -\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\hat{x}_i, y_i)}{\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, y_i)\right]^2}}{\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s, y_s)}} (\Delta x_i)^2 - \frac{\frac{\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_k^2}(\hat{x}_k, y_k)}{\left[\frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\hat{x}_k, y_k)\right]^2}}{\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\hat{x}_s, y_s)}} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \Delta x_i\right)^2.$$

Другими словами, квадратичная форма функции Лагранжа отрицательна в точке $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$. Следовательно, для любого $y \in \overline{Y}$, если существует $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ такой, что $f_i(\hat{x}_i, y_i) = f_j(\hat{x}_j, y_j)$ для всех $i, j \in \hat{I}$, то $\hat{x}$ является точкой экстремума (максимума) функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$ на множестве $X_{\hat{I}}$.

Лемма 2. *Для любого $y \in \overline{Y}$ вектор $\hat{x}$ является точкой экстремума функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$ на множестве $X_{\hat{I}}$ тогда и только тогда, когда $f_s(\hat{x}_s, y_s) = f_r(\hat{x}_r, y_r)$ для всех $s, r \in \hat{I}$.*

Доказательство. *Достаточность*. Согласно лемме 1, для любого $y \in \overline{Y}$, если система уравнений $f_s(x_s, y_s) = f_r(x_r, y_r)$, $s, r \in \hat{I}$, имеет решение $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$, то $\hat{x}$ является точкой экстремума функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$.

Необходимость. Допустим, существует $\bar{y} \in \overline{Y}$, для которого функция $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y})$ имеет точку экстремума $\bar{x} \in X_{\hat{I}}$ такую, что $f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s) \neq f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ для некоторых $s, r \in \hat{I}$. В таком случае, поскольку $\bar{x}$ – точка экстремума функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y})$, то $\bar{x}$ должен удовлетворять условиям оптимальности первого порядка (9) для некоторого ω при $y = \bar{y}$, из чего, с учетом (10), следует, что должен существовать скаляр d, удовлетворяющий следующим равенствам:

$$\left(\frac{\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}}{\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}} - f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\right) \frac{\frac{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)}{\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\right]^2}}{\sum\limits_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}} = d \quad \forall i \in \hat{I}. \tag{17}$$

Заметим при этом, что d может равняться нулю тогда и только тогда, когда $f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s) = f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ для всех $s, r \in \hat{I}$. Однако мы исходим из предположения, что $f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s) \neq f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ для некоторых $s, r \in \hat{I}$, а значит, $d \neq 0$. Таким образом, согласно (17), получаем, что $(\bar{x}, \bar{y})$ должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\sum_{s\in\hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} = f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \sum_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} + d\,\Omega_i(\bar{x}, \bar{y}) \quad \forall i \in \hat{I} \tag{18}$$

при $d \neq 0$, где

$$\Omega_i(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}\right)^2 \frac{\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\right]^2}{\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2}(\bar{x}_i, \bar{y}_i)} > 0 \quad \forall i \in \hat{I}.$$

Предположим, что $d > 0$. В таком случае, с одной стороны, из (18) следует, что

$$\sum_{s\in\hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} > f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \sum_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} \quad \forall i \in \hat{I}. \tag{19}$$

Однако, с другой стороны, поскольку $f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s) \neq f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ для некоторых $s, r \in \hat{I}$, то существует $k \in \hat{I}$ такой, что $f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \geq f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)$ для всех $s \in \hat{I}$ и при этом $f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) > f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ хотя бы для одного $r \in \hat{I}$. Следовательно, для такого k справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{s\in\hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} < \sum_{s\in\hat{I}} \frac{f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} = f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \sum_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}. \tag{20}$$

Одновременное выполнение (19) и (20) невозможно, а значит, d не может быть строго больше нуля.

Предположим, что $d < 0$. В таком случае, с одной стороны, из (18) следует, что

$$\sum_{s\in\hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} < f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \sum_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} \quad \forall i \in \hat{I}. \tag{21}$$

Однако, с другой стороны, поскольку $f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s) \neq f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ для некоторых $s, r \in \hat{I}$, то существует $k \in \hat{I}$ такой, что $f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \leq f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)$ для всех $s \in \hat{I}$ и при этом $f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) < f_r(\bar{x}_r, \bar{y}_r)$ хотя бы для одного $r \in \hat{I}$. Следовательно, для такого k справедливо следующее неравенство:

$$\sum_{s\in\hat{I}} \frac{f_s(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} > \sum_{s\in\hat{I}} \frac{f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k)}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)} = f_k(\bar{x}_k, \bar{y}_k) \sum_{s\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_s}{\partial x_s}(\bar{x}_s, \bar{y}_s)}. \tag{22}$$

Одновременное выполнение (21) и (22) невозможно, а значит, d не может быть строго меньше нуля.

Таким образом, получаем, что $(\bar{x}, \bar{y})$ должны удовлетворять системе уравнений (18) для некоторого $d \neq 0$, и при этом d не может быть строго больше или строго меньше нуля. Другими словами, приходим к противоречию, доказывающему, что для любого $y \in \overline{Y}$, если вектор $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ является точкой экстремума функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$, то $f_s(\hat{x}_s, y_s) = f_r(\hat{x}_r, y_r)$ для всех $s, r \in \hat{I}$.

Лемма 3. *Для любого $\hat{I} \subseteq I$ и любого $y \in \overline{Y}$ справедливо неравенство*

$$\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \geq f_i(0, y_i) \quad \forall i \in \hat{I}.$$

Доказательство. Для произвольного $\hat{I} \subseteq I$ и $y \in \overline{Y}$ домножим и разделим $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$ на $\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_j, y_j)$ при произвольно выбранном $j \in \hat{I}$. В таком случае получим

$$\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = \frac{f_j(x_j, y_j) + \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_j, y_j) \sum\limits_{i\in\hat{I}\setminus j} \frac{f_i(x_i, y_i)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}}{1 + \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_j, y_j) \sum\limits_{i\in\hat{I}\setminus j} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}},$$

откуда в силу (1) следует, что

$$\lim_{x_j\to 0} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = f_j(0, y_j) \quad \forall j \in \hat{I}. \tag{23}$$

Рассмотрим последовательность точек $x^k \in X_{\hat{I}}$ такую, что $x_j^1 = \epsilon > 0$ и $x_j^k > x_j^{k+1}$, т.е.

$$\lim_{k\to+\infty} x_j^k = 0.$$

Поскольку

$$\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \geq \mathbb{f}_{\hat{I}}(x^k, y) \quad \forall k \geq 1,$$

то

$$\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \geq \lim_{k\to+\infty} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x^k, y),$$

а значит, в силу (23) получаем

$$\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \geq f_j(0, y_j) \quad \forall j \in \hat{I}.$$

Теорема 1. *Для любого $y \in Y$ существует единственное решение задачи оптимизации нижнего уровня* (5)*, и если $x^\star \in X$ является этим решением, то*

$$\min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \begin{cases} = f_i(x_i^\star, y_i) & \textit{при } x_i^\star > 0, \\ \leq f_i(x_i^\star, y_i) & \textit{при } x_i^\star = 0, \end{cases} \quad \forall i \in I. \tag{24}$$

Доказательство. Рассмотрим нелинейную задачу условной оптимизации нижнего уровня (5). Для любого $y \in Y$ функции $f_i(x_i, y_i)$, $i \in I$, являются строго возрастающими на X, а значит, целевая функция нижнего уровня (5) является выпуклой на выпуклом X. Следовательно, задача (5) имеет единственное решение для любого $y \in Y$, а согласно условиям Каруша–Куна–Таккера, для заданного $y \in Y$, если вектор $x^\star \in X$ является решением задачи (5), то частные производные по компонентам x функции Лагранжа

$$L(x, y) = \sum_{i\in I} \int_0^{x_i} f_i(u, y_i)du + \zeta \left(D - \sum_{i\in I} x_i\right) + \sum_{i\in I} (-x_i)\nu_i,$$

где ζ и ν_i, $i \in I$, – множители Лагранжа, должны равняться нулю в точке $x^\star$ (условия стационарности):

$$f_i(x_i^\star, y_i) - \zeta - \nu_i = 0 \quad \forall i \in I$$

при

$$\sum_{i \in I} x_i^\star = D. \tag{25}$$

Другими словами, $x^\star \in X$ должен удовлетворять (25) и следующей системе:

$$f_i(x_i^\star, y_i) = \zeta + \nu_i \quad \forall i \in I$$

или

$$f_i(x_i^\star, y_i) \begin{cases} = \zeta, & \text{при} \quad x_i^\star > 0, \\ \geq \zeta, & \text{при} \quad x_i^\star = 0, \end{cases} \quad \forall i \in I, \tag{26}$$

поскольку в силу условий дополняющей нежесткости $(-x_i^\star)\nu_i = 0$ при $\nu_i \geq 0$ и $x_i^\star \geq 0$ для всех $i \in I$.

Будем считать, что подмножество $I^\star \subseteq I$ таково, что

$$x_i^\star \begin{cases} > 0 & \text{для} \quad i \in I^\star, \\ = 0 & \text{для} \quad i \in I \backslash I^\star. \end{cases}$$

Покажем, что справедливо

$$\min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = \sup_{x \in X_{I^\star}} \mathbb{f}_{I^\star}(x, y) = f_i(x_i^\star, y_i) \quad \forall i \in I^\star. \tag{27}$$

С одной стороны, согласно (26),

$$f_i(x_i^\star, y_i) = f_j(x_j^\star, y_j) \quad \forall i, j \in I^\star, \tag{28}$$

а значит, в силу леммы 1 $x^\star$ – точка максимума функции $\mathbb{f}_{I^\star}(x, y)$ на множестве $X_{I^\star}$, т.е.

$$\sup_{x \in X_{I^\star}} \mathbb{f}_{I^\star}(x, y) = \mathbb{f}_{I^\star}(x^\star, y),$$

откуда в силу вида функции $\mathbb{f}_{I^\star}(x, y)$ следует

$$\sup_{x \in X_{I^\star}} \mathbb{f}_{I^\star}(x, y) = f_i(x_i^\star, y_i) \quad \forall i \in I^\star. \tag{29}$$

С другой стороны, согласно (26),

$$f_i(x_i^\star, y_i) \leq f_j(0, y_j) \quad \forall i \in I^\star, j \in I \backslash I^\star,$$

или

$$\sup_{x \in X_{I^\star}} \mathbb{f}_{I^\star}(x, y) \leq f_j(0, y_j) \quad \forall j \in I \backslash I^\star.$$

В свою очередь, для любого $\hat{I} \subseteq I$ такого, что $I^\star \subset \hat{I}$ в силу леммы 3

$$f_j(0, y_j) \leq \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \quad \forall j \in \hat{I}.$$

Следовательно, для произвольно выбранного $j \in I \backslash I^\star$, справедливо:

$$\sup_{x \in X_{I^\star}} \mathbb{f}_{I^\star}(x, y) \leq f_j(0, y_j) \leq \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y),$$

а значит,

$$\sup_{x \in X_{I^\star}} \mathbb{f}_{I^\star}(x, y) \leq \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) \tag{30}$$

для любого такого $\hat{I} \subseteq I$, что $I^\star \subset \hat{I}$.

В то же время, в силу непрерывности и строгого возрастания функций $f_i(x_i, y_i)$, $i \in I$, по x_i на множестве положительных чисел, из (28) следует, что существуют такие $\Delta x_i^\star > 0$, $i \in I^\star$, что

$$f_i(x_i^\star + \Delta x_i^\star, y_i) = f_j(x_j^\star + \Delta x_j^\star, y_j) \quad \forall i \in I^\star \backslash s$$

при

$$x_s^\star = \sum_{i\in I^\star\setminus s} \Delta x_i^\star$$

для произвольно выбранного $s \in I^\star$. Другими словами, для $\hat{I} = I^\star\setminus s$ существует $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ такой, что $\hat{x}_i = x_i^\star + \Delta x_i^\star$ для всех $i \in \hat{I}$ и $f_i(\hat{x}_i, y_i) = f_j(\hat{x}_j, y_j)$ для всех $i, j \in \hat{I}$. В таком случае в силу леммы 1 $\hat{x}$ является точкой максимума функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$ на $X_{\hat{I}}$, т.е.

$$\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(\hat{x},y),$$

откуда, в силу вида функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$, следует

$$\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y) = f_i(\hat{x}_i,y_i) \quad \forall i \in \hat{I},$$

что, в силу строгого возрастания функций $f_i(x_i, y_i)$, $i \in I$, при $x_i > 0$, приводит к

$$\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y) = f_i(x_i^\star + \Delta x_i^\star, y_i) > f_i(x_i^\star, y_i) \quad \forall i \in I^\star\setminus s,$$

а значит, в силу (29),

$$\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y) > \sup_{x\in X_{I^\star}} \mathbb{f}_{I^\star}(x,y).$$

Таким образом, действительно, равенство (27) справедливо, а значит, из (26) следует (24).

3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ТОПОЛОГИИ СЕТИ К МИНИМАКСУ

Теорема 2. *Решение задачи двухуровневой оптимизации* (4)–(5) *существует, и* $y^* \in Y$ *является этим решением тогда и только тогда, когда*

$$y^* \in \arg\min_{y\in Y}\left[\min_{\hat{I}\subseteq I}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y)D + w\sum_{i\in I} g_i(y_i)\right]. \tag{31}$$

Доказательство. Множество Y замкнуто и ограничено, при этом для любого $y \in Y$ существует единственное решение задачи нижнего уровня (5). Следовательно, существует $y^* \in Y$, обеспечивающее наименьшее значение целевого функционала верхнего уровня. Другими словами, решение задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5) существует.

Необходимость. Пусть $y^* \in Y$ является решением задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5). В таком случае

$$\sum_{i\in I} f_i(x_i^*, y_i^*)x_i^* + w\sum_{i\in I} g_i(y_i^*) \le \sum_{i\in I} f_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\bar{x}_i + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i) \quad \forall \bar{y}\in Y, \tag{32}$$

где $x^* \in X$ и $\bar{x} \in X$ являются единственными решениями задачи (5) при заданных $y^* \in Y$ и $\bar{y} \in Y$ соответственно. Благодаря теореме 1, получаем

$$\min_{\hat{I}\subseteq I}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y^*)\begin{cases} = f_i(x_i^*,y_i^*) & \text{при } x_i^* > 0,\\ \le f_i(x_i^*,y_i^*) & \text{при } x_i^* = 0,\end{cases} \quad \forall i\in I, \tag{33}$$

и

$$\min_{\hat{I}\subseteq I}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x,\bar{y})\begin{cases} = f_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i) & \text{при } \bar{x}_i > 0,\\ \le f_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i) & \text{при } \bar{x}_i = 0,\end{cases} \quad \forall i\in I. \tag{34}$$

Если определить $I^* \subseteq I$ и $\bar{I} \subseteq I$ такими, что

$$x_i^*\begin{cases} >0 & \text{для} \quad i\in I^*,\\ =0 & \text{для} \quad i\in I\setminus I^*,\end{cases} \qquad \text{и} \qquad \bar{x}_i\begin{cases} >0 & \text{для} \quad i\in \bar{I},\\ =0 & \text{для} \quad i\in I\setminus \bar{I}^*,\end{cases}$$

то из (33) следует

$$\sum_{i\in I} f_i(x_i^*,y_i^*)x_i^* + w\sum_{i\in I} g_i(y_i^*) = \sum_{i\in I^*} f_i(x_i^*,y_i^*)x_i^* + w\sum_{i\in I} g_i(y_i^*) =$$

$$= \min_{\hat{I}\subseteq I}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x,y^*)\sum_{i\in I} x_i^* + w\sum_{i\in I} g_i(y_i^*) =$$

$$= \min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y^*)D + w\sum_{i\in I} g_i(y_i^*),$$

а из (34) следует

$$\sum_{i\in I} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\bar{x}_i + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i) = \sum_{i\in \bar{I}} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\bar{x}_i + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i) =$$

$$= \min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y})\sum_{i\in \bar{I}} \bar{x}_i + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i) =$$

$$= \min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y})D + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i).$$

Таким образом, для произвольно выбранного $\bar{y} \in Y$, в силу (32), приходим к

$$\min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y^*)D + w\sum_{i\in I} g_i(y_i^*) \le \min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y})D + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i).$$

Другими словами,

$$y^* \in \arg\min_{y\in Y} \left[\min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)D + w\sum_{i\in I} g_i(y_i)\right].$$

Достаточность. Пусть $y^* \in Y$ является решением задачи (31), но не является решением задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5). В таком случае существует решение $\bar{y} \in Y$ задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5) и при этом

$$\sum_{i\in I} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\bar{x}_i + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i) < \sum_{i\in I} f_i(x_i^*, y_i^*)x_i^* + w\sum_{i\in I} g_i(y_i^*), \tag{35}$$

где $x^* \in X$ и $\bar{x} \in X$ являются единственными решениями задачи (5) при заданных $y^* \in Y$ и $\bar{y} \in Y$ соответственно. Однако, если $x^* \in X$ и $\bar{x} \in X$ являются решениями задачи (5) при заданных $y^* \in Y$ и $\bar{y} \in Y$ соответственно, то, как было показано при доказательстве необходимости,

$$\sum_{i\in I} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\bar{x}_i + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i) = \min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y})D + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i),$$

а

$$\sum_{i\in I} f_i(x_i^*, y_i^*)x_i^* + w\sum_{i\in I} g_i(y_i^*) = \min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y^*)D + w\sum_{i\in I} g_i(y_i^*),$$

и, значит, из (35) следует

$$\min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y})D + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i) < \min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y^*)D + w\sum_{i\in I} g_i(y_i^*),$$

что невозможно, поскольку $y^* \in Y$ является решением задачи (31). Таким образом, приходим к противоречию, доказывающему, что если $y^* \in Y$ является решением задачи (31), то $y^* \in Y$ также является решением задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5).

Для любого $\hat{I} \subseteq I$ зададим функцию

$$\phi_{\hat{I}}(x, y) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)D + w\sum_{i\in I} g_i(y_i)$$

на $X_{\hat{I}} \times Y$.

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$\min_{y\in Y} \min_{\hat{I}\subseteq I} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y) = \min_{\hat{I}\subseteq I} \min_{y\in Y} \sup_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y). \tag{36}$$

Доказательство. На множестве Y зададим

$$\psi_{\hat{I}}(y) = \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y)$$

для произвольно выбранного $\hat{I} \subseteq I$. Заметим, что, поскольку Y — компакт, а множество подмножеств множества I конечно, то существуют $\tilde{y} \in Y$ и $\tilde{I} \subseteq I$ такие, что

$$(\tilde{y}, \tilde{I}) = \arg \min_{(y, \hat{I}) \in Y \times I} \psi_{\hat{I}}(y).$$

В таком случае, с одной стороны,

$$\min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \psi_{\hat{I}}(y) \le \min_{\hat{I} \subseteq I} \psi_{\hat{I}}(\tilde{y}) \le \psi_{\tilde{I}}(\tilde{y}), \tag{37}$$

$$\min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \psi_{\hat{I}}(y) \le \min_{y \in Y} \psi_{\tilde{I}}(y) \le \phi_{\tilde{I}}(\tilde{y}). \tag{38}$$

С другой стороны,

$$\psi_{\tilde{I}}(\tilde{y}) = \min_{(y, \hat{I}) \in Y \times I} \psi_{\hat{I}}(y) \le \min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \psi_{\hat{I}}(y), \tag{39}$$

$$\psi_{\tilde{I}}(\tilde{y}) = \min_{(y, \hat{I}) \in Y \times I} \psi_{\hat{I}}(y) \le \min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \psi_{\hat{I}}(y). \tag{40}$$

Благодаря (37) и (39), получаем

$$\min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \psi_{\hat{I}}(y) = \psi_{\tilde{I}}(\tilde{y}), \tag{41}$$

а, благодаря (38) и (40), получаем

$$\min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \psi_{\hat{I}}(y) = \psi_{\tilde{I}}(\tilde{y}). \tag{42}$$

Одновременное выполнение (41) и (42) ведет к

$$\min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \psi_{\hat{I}}(y) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \psi_{\hat{I}}(y)$$

или

$$\min_{y \in Y} \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y).$$

Следствие 1. Если y^* является решением задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5), а x^* — решением задачи (5) для y^*, то пара (x^*, y^*) является решением задачи минимакса

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{I^*}} \phi_{I^*}(x, y) \tag{43}$$

при

$$I^* \in \arg \min_{\hat{I} \subseteq I} \left[\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y) \right]. \tag{44}$$

Доказательство. Если $\bar{x}$ является решением задачи (5) для $\bar{y} \in Y$, то в силу теоремы 1

$$\sum_{i \in I} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\bar{x}_i + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) = \sum_{i \in \bar{I}} f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\bar{x}_i + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) =$$

$$= \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y}) \sum_{i \in I} \bar{x}_i + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y}) D + w \sum_{i \in I} g_i(\bar{y}_i),$$

где $\bar{I} \subseteq I$ такое, что

$$\bar{x}_i \begin{cases} > 0 & \text{для} \quad i \in \bar{I}, \\ = 0 & \text{для} \quad i \in I \backslash \bar{I}. \end{cases}$$

При этом в силу вида функции $\mathbb{f}_{\bar{I}}(x, y)$ справедливо

$$\mathbb{f}_{\bar{I}}(\bar{x}, \bar{y}) = \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \bar{y}).$$

В таком случае

$$\sum_{i\in I} f_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\bar{x}_i + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i) = \min_{\hat{I}\subseteq I}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x,\bar{y})D + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i) =$$

$$= \min_{\hat{I}\subseteq I}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x,\bar{y}) = \mathbb{f}_{\bar{I}}(\bar{x},\bar{y})D + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i) = \phi_{\bar{I}}(\bar{x},\bar{y}).$$

Другими словами, для любого $\bar{y}\in Y$ выполняется

$$\sum_{i\in I} f_i(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\bar{x}_i + w\sum_{i\in I} g_i(\bar{y}_i) = \phi_{\bar{I}}(\bar{x},\bar{y}) = \min_{\hat{I}\subseteq I}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x,\bar{y}),$$

где $\bar{x}$ является решением задачи (5) для $\bar{y}\in Y$. Поскольку y^* является решением задачи (4)–(5), а x^* – решением задачи (5) для y^*, то

$$\phi_{I^*}(x^*,y^*) = \min_{\hat{I}\subseteq I}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x,y^*) \le \min_{\hat{I}\subseteq I}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x,y) \quad \forall y\in Y$$

или

$$\phi_{I^*}(x^*,y^*) = \min_{\hat{I}\subseteq I}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x,y^*) = \min_{y\in Y}\min_{\hat{I}\subseteq I}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x,y),$$

а значит, согласно теореме 3,

$$\phi_{I^*}(x^*,y^*) = \min_{\hat{I}\subseteq I}\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x,y).$$

Следовательно,

$$\phi_{I^*}(x^*,y^*) = \min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{I^*}} \phi_{I^*}(x,y)$$

при

$$I^* \in \arg\min_{\hat{I}\subseteq I}\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x,y).$$

Замечание 1. Следствие 1 позволяет утверждать, что если y^* является решением задачи двухуровневой оптимизации (4)–(5), а x^* – решением задачи (5) для y^*, то с необходимостью пара (x^*,y^*) разрешает задачу минимакса

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x,y) \tag{45}$$

для некоторого $\hat{I}\subseteq I$.

4. УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ВОЗНИКШИХ ЗАДАЧ МИНИМАКСА

Теорема 4. *Если функция $\phi_{\hat{I}}(x,y)$ имеет седловую точку $(\hat{x},\hat{y})\in X_{\hat{I}}\times Y$, то*

$$f_i(\hat{x}_i,\hat{y}_i) = f_j(\hat{x}_j,\hat{y}_j) \quad \forall i,j\in\hat{I}, \tag{46}$$

$$\hat{y}_j = l_j \quad \forall j\in I\backslash\hat{I}, \tag{47}$$

$$\frac{-\frac{\frac{\partial f_j}{\partial y_j}(\hat{x}_j,\hat{y}_j)}{\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\hat{x}_j,\hat{y}_j)}}{\sum\limits_{i\in\hat{I}}\frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i,\hat{y}_i)}} \begin{cases} \le \frac{w+\lambda}{D}\frac{\partial g_j}{\partial y_j}(\hat{y}_j) & \textit{при} \quad \hat{y}_j = l_j, \\ = \frac{w+\lambda}{D}\frac{\partial g_j}{\partial y_j}(\hat{y}_j) & \textit{при} \quad l_j < \hat{y}_j < u_j, \qquad \forall j\in\hat{I}, \\ \ge \frac{w+\lambda}{D}\frac{\partial g_j}{\partial y_j}(\hat{y}_j) & \textit{при} \quad \hat{y}_j = u_j, \end{cases} \tag{48}$$

где

$$\lambda\begin{cases} \ge 0, & \textit{если} \quad \sum_{i\in I} g_i(\hat{y}_i) = U, \\ = 0, & \textit{если} \quad \sum_{i\in I} g_i(\hat{y}_i) < U. \end{cases} \tag{49}$$

Доказательство. Если функция $\phi_{\hat{I}}(x,y)$ имеет седловую точку $(\hat{x},\hat{y})\in X_{\hat{I}}\times Y$, то

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x,y) = \max_{x\in X_{\hat{I}}}\min_{y\in Y} \phi_{\hat{I}}(x,y) = \phi_{\hat{I}}(\hat{x},\hat{y}). \tag{50}$$

С одной стороны, $\hat{x}$ удовлетворяет условиям Каруша–Куна–Таккера (ККТ) применительно к $\phi_{\hat{I}}(x,\hat{y})$ на множестве $X_{\hat{I}}$. Составим Лагранжиан

$$L_x(x,\hat{y}) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(x,\hat{y})D + w\sum_{i\in I} g_i(\hat{y}_i) + \omega\left(D - \sum_{i\in\hat{I}} x_i\right),$$

где ω является множителем Лагранжа. Точка $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\partial L_x}{\partial x_i}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \quad \forall i \in \hat{I},$$

откуда получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbb{f}_{\hat{I}}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\omega}{D} \quad \forall i \in \hat{I}. \tag{51}$$

Заметим, что при доказательстве леммы 2 было показано, что при $\hat{y} \in Y$ вектор $\hat{x} \in X_{\hat{I}}$ является решением системы (51) тогда и только тогда, когда $f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = f_j(\hat{x}_j, \hat{y}_j)$ для всех $i, j \in \hat{I}$. Следовательно, пара $(\hat{x}, \hat{y})$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = f_j(\hat{x}_j, \hat{y}_j) \quad \forall i, j \in \hat{I}. \tag{52}$$

С другой стороны, $\hat{y}$ удовлетворяет условиям ККТ применительно к $\phi_{\hat{I}}(\hat{x}, y)$ на множестве Y. Составим Лагранжиан

$$L_y(\hat{x}, y) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(\hat{x}, y)D + w\sum_{i\in I} g_i(y_i) + \lambda\left(\sum_{i\in I} g_i(y_i) - U\right) + \sum_{i\in I}\eta_i(l_i - y_i) + \\ + \sum_{i\in I}\gamma_i(y_i - u_i),$$

где $\lambda \geq 0$ и $\eta_i \geq 0$, $\gamma_i \geq 0$, $i \in I$, являются множителями Лагранжа. Точка $\hat{y}$ должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{\partial L_y}{\partial y_i}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \quad \forall i \in I, \tag{53}$$

$$\lambda\left(\sum_{i\in I} g_i(\hat{y}_i) - U\right) = 0, \tag{54}$$

$$\eta_i(l_i - \hat{y}_i) = 0 \quad \forall i \in I, \tag{55}$$

$$\gamma_i(\hat{y}_i - u_i) = 0 \quad \forall i \in I. \tag{56}$$

Таким образом, из (53) следует, что

$$-D\frac{\partial \mathbb{f}_{\hat{I}}}{\partial y_j}(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = (w + \lambda)\frac{\partial g_j}{\partial y_j}(\hat{y}_j) - \eta_j + \gamma_j \quad \forall j \in I, \tag{57}$$

а, в силу (55) и (56), имеет место система

$$\begin{array}{lll} \eta_i \geq 0, \gamma_i = 0 & \text{при} & \hat{y}_i = l_i, \\ \eta_i = 0, \gamma_i = 0 & \text{при} & l_i < \hat{y}_i < u_i, \quad \forall i \in I, \\ \eta_i = 0, \gamma_i \geq 0 & \text{при} & \hat{y}_i = u_i, \end{array}$$

откуда, согласно (57), получаем

$$-\frac{\partial \mathbb{f}_{\hat{I}}}{\partial y_j}(\hat{x}_i, \hat{y}_i) \begin{cases} \leq \frac{w+\lambda}{D}\frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad l_j = \hat{y}_j, \\ = \frac{w+\lambda}{D}\frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad l_j < \hat{y}_j < u_j, \quad \forall j \in I. \\ \geq \frac{w+\lambda}{D}\frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad \hat{y}_j = u_j, \end{cases} \tag{58}$$

Продифференцируем функцию $\mathbb{f}_{\hat{I}}(\hat{x}, y)$ по y_j для всех $j \in I$:

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\sum\limits_{i\in\hat{I}} \frac{f_i(\hat{x}_i, y_i)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, y_i)}}{\sum\limits_{i\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, y_i)}}\right) = \frac{\frac{\frac{\partial f_j}{\partial y_j}}{\frac{\partial f_j}{\partial x_j}}}{\sum\limits_{i\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}}} + \frac{\frac{\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_j \partial y_j}}{\left[\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\right]^2}}{\sum\limits_{i\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}}}\left(\frac{\sum\limits_{i\in\hat{I}} \frac{f_i}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}}}{\sum\limits_{i\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}}} - f_j\right). \tag{59}$$

Поскольку $(\hat{x}, \hat{y})$ удовлетворяет (52), то из (59) следует, что

$$\frac{\partial \mathbb{f}_{\hat{I}}}{\partial y_j}(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\frac{\frac{\partial f_j}{\partial y_j}(\hat{x}_j, \hat{y}_j)}{\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\hat{x}_j, \hat{y}_j)}}{\sum\limits_{i\in\hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)}} \quad \forall j \in I. \tag{60}$$

Заметим при этом, что в силу вида функции $\mathbb{f}_{\hat{I}}(\hat{x}, y)$ справедливо следующее равенство:

$$\frac{\partial \mathbb{f}_{\hat{I}}}{\partial y_j}(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \quad \forall j \in I \backslash \hat{I}. \tag{61}$$

Таким образом, если подставить (60) и (61) в (58), то получим

$$\frac{-\frac{\frac{\partial f_j}{\partial y_j}(\hat{x}_j, \hat{y}_j)}{\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\hat{x}_j, \hat{y}_j)}}{\sum\limits_{i \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\hat{x}_i, \hat{y}_i)}} \begin{cases} \leq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad l_j = \hat{y}_j, \\ = \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad l_j < \hat{y}_j < u_j, \qquad \forall j \in \hat{I}, \\ \geq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad \hat{y}_j = u_j, \end{cases} \tag{62}$$

и

$$0 \begin{cases} \leq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad l_j = \hat{y}_j, \\ = \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad l_j < \hat{y}_j < u_j, \qquad \forall j \in I \backslash \hat{I}. \\ \geq \frac{w+\lambda}{D} \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(\hat{y}_i) & \text{при} \quad \hat{y}_j = u_j, \end{cases} \tag{63}$$

При этом, поскольку $\lambda \geq 0$, то, в силу (54), имеют место следующие условия:

$$\lambda \begin{cases} \geq 0, & \text{если} \quad \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) = U, \\ = 0, & \text{если} \quad \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) < U. \end{cases} \tag{64}$$

Более того, поскольку $w \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $D > 0$ и $\frac{\partial g_i}{\partial y_i}(y_i) > 0$ для всех $i \in I$, то из (63) следует, что

$$\hat{y}_j = l_j \quad \forall j \in I \backslash \hat{I}. \tag{65}$$

5. ПОИСК ОПТИМАЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ СЕТИ

В предыдущих разделах статьи было доказано, что решение двухуровневой задачи оптимизации топологии сети с непересекающимися путями с необходимостью должно разрешать определенную задачу минимакса. При этом для соответствующей задачи минимакса получены условия оптимальности при достаточно естественных допущениях. На основе полученных результатов может быть построен следующий алгоритм решения исследуемой задачи оптимизации топологии сети.

Алгоритм 1

1: $\hat{x} \leftarrow$ решение задачи нижнего уровня (5) при $y = l$
2: $\hat{I} \leftarrow$ множество индексов таких, что

$$\hat{x}_i \begin{cases} > 0 & \text{для} \quad i \in \hat{I}, \\ = 0 & \text{для} \quad i \in I \backslash \hat{I}, \end{cases}$$

3: $(\hat{y}, \hat{x}) \leftarrow$ решение задачи минимакса:

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y),$$

4: **while** $\hat{x}$ не является решением задачи (5) для $\hat{y}$ **do**
5: $\quad \hat{I} \leftarrow \hat{I} \backslash s$, где s – компонент, в котором нарушается условие (24)
6: $\quad (\hat{y}, \hat{x}) \leftarrow$ решение задачи минимакса:

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \phi_{\hat{I}}(x, y),$$

7: **end while**
8: **return** $(\hat{y}, \hat{x})$ & $\hat{I}$

Рассмотрим результаты работы алгоритма на конкретном примере сети, представленной в виде ориентированного графа $G = (V, E)$ и состоящей из четырех непересекающихся альтернативных путей (каналов). Величины верхних и нижних границ пропускных способностей доступных альтернатив даны в табл. 1.
Бюджетные затраты, необходимые для увеличения пропускной способности альтернативы i, $i = \overline{1,4}$, с величины l_i до величины y_i, будем описывать с помощью функции следующего вида:

$$g_i(y_i) = 100(y_i - l_i)^2 \quad \forall i = \overline{1,4},$$

Таблица 1. Нижняя и верхняя границы пропускных способностей

$i=\overline{1,4}$	y_1	y_2	y_3	y_4
Нижняя граница (l_i)	50	80	70	40
Верхняя граница (u_i)	80	100	95	70

Таблица 2. Параметры функций задержки

i	1	2	3	4
Время свободного движения (t_i^0)	20	25	18	28

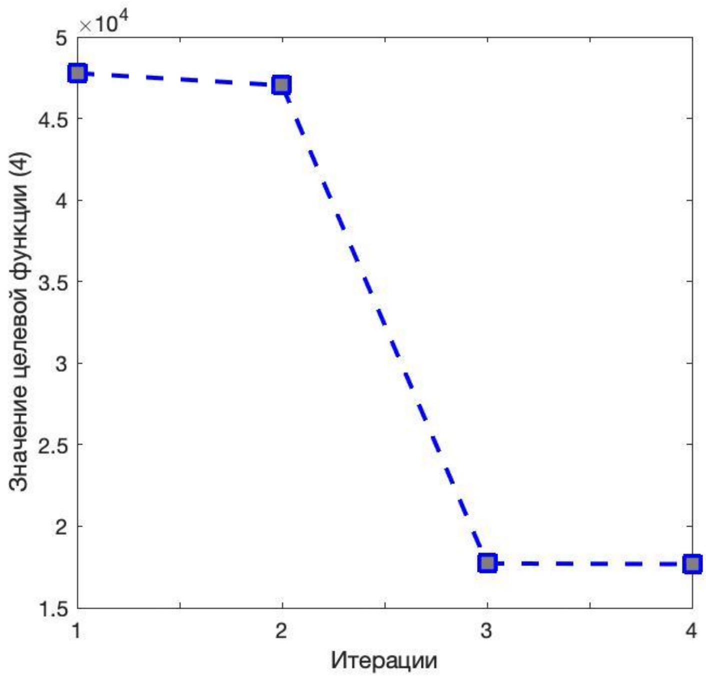
а общий бюджет, который может быть инвестирован в увеличение пропускной способности всех альтернатив не должен превышать 200 000: $\sum_{i=1}^{4} g_i(y_i) \le 200\,000$. При этом каждая альтернатива i, $i=\overline{1,4}$, характеризуется BPR-функцией задержки (затрат) $f_i(x_i, y_i)$ единицы потока x_i по альтернативе с пропускной способностью y_i:

$$f_i(x_i, y_i) = t_i^0 + 0.15\left(\frac{x_i}{y_i}\right)^4 \quad \forall i=\overline{1,4},$$

при параметрах, заданных в табл. 2.

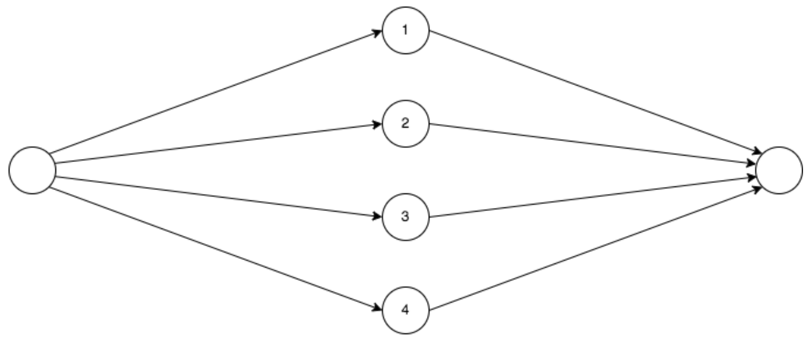
Как только допустимый набор величин пропускных способностей задан, поток $D=1000$ распределяется среди доступных альтернатив в соответствии с принципом конкурентного равновесия при заданных функциях задержки (затрат). Если лидер на верхнем уровне стремится минимизировать общие затраты (общую задержку) в сети за счет минимальных инвестиций в увеличение пропускной способности альтернатив, то возникает задача двухуровневой оптимизации (4)–(5). При этом будем считать, что $w=0.01$, т.е. единицу общих сетевых затрат (общей задержки) лидер оценивает в 100 бюджетных единиц.

Результат решения возникшей задачи с применением алгоритма 1 представлен на фиг. 1. Значение целевой функции после применения алгоритма 1 равно 17672.6.



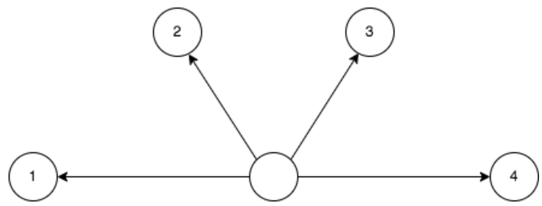
Фиг. 1. Результат работы алгоритма 1.

Стоит отметить, что сформулированная задача двухуровневой оптимизации может относиться к разным прикладным задачам. Действительно, с одной стороны, задача (4)–(5) может возникнуть в случае оптимизации участка улично-дорожной сети с непересекающимися путями (фиг. 2). В таком случае можно считать, что участок улично-дорожной сети обслуживает 1000 неатомарных пользователей, распределяющихся среди четырех маршрутов в стремлении минимизировать индивидуальное время движения.



Фиг. 2. Сеть с непересекающимися маршрутами.

С другой стороны, задача (4)–(5) может возникнуть в случае оптимизации сети дистрибьюторского центра типа звезда (фиг. 3).



Фиг. 3. Сеть типа звезда.

В таком случае можно считать, что дистрибьюторский центр способен поставить 1000 неатомарных единиц продуктового потока, который распределяется среди четырех альтернативных покупателей по принципу аукциона. При этом, если на фиг. 3 направить стрелочки в обратную сторону, то задача (4)–(5) будет соответствовать ситуации, в рамках которой единственный покупатель удовлетворяет свой спрос в 1000 единиц продуктового потока, закупаясь у четырех альтернативных поставщиков по принципу аукциона.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье исследована проблема поиска глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети для случая сетей с непересекающимися путями. В рассматриваемой постановке задачи менеджер сети инвестирует в пропускные способности ее элементов, стремясь минимизировать общую задержку, возникающую в результате равновесного распределения потоков. Доказано, что решение исследуемой задачи с необходимостью должно разрешать определенную задачу минимакса. При этом получены условия оптимальности решений возникающей задачи минимакса при достаточно естественных допущениях. На основе полученных результатов разработан новый алгоритм решения задачи оптимизации топологии сети с непересекающимися путями. В будущих работах планируется обобщить полученные результаты на случай более общих видов сетей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stackelberg H.V.* Marktform und Gleichgewicht. Berlin: Springer, 1934 (English Translated: The Theory of the Market Economy. Oxford: Oxford Univer. Press, 1952).

2. *Migdalas A.* Bilevel programming in traffic planning: Models, methods and challenge // J. Global Optimizat. 1995. V. 7. P. 381–405.

3. *Krylatov A.Y., Zakharov V.V., Malygin I.G.* Competitive traffic assignment in road networks // Transport and Telecommunicat. 2016. V. 17. № 3. P 212–221.

4. *Krylatov A., Raevskaya A.* Freight flow assignment in the intermodal logistics network // Transportat. Res. Procedia. 2023. V. 68C. P. 492–498.

5. *Xing C., Jing Y., Wang S., Ma S., Poor H.V.* New viewpoint and algorithms for Wwater-filling solutions in wireless communications // IEEE Transact. on Signal Proces. 2020. V. 68. P. 1618–1634.

6. *Suh S., Kim T.* Solving nonlinear bilevel programming models of the equilibrium network design problem: a comparative review // Ann. Operat. Res. 1992. V. 34. № 1. P. 203–218.

7. *Yang H., Bell M.G.H.* Models and algorithms for road network design: a review and some new developments // Transport Rev. 1998. V. 18. № 3. P. 257–278.

8. *Abdulaal M., LeBlanc L. J.* Continuous equilibrium network design models // Transportat. Res. Part B. 1979. V. 13. № 1. P. 19–32.

9. *Marcotte P.* Network optimization with continuous control parameters // Transportat. Sci. 1983. V. 17. № 2. P. 181–197.

10. *Marcotte P., Marquis G.* Efficient implementation of heuristics for the continuous network design problem // Ann. Operat. Res. 1992. V. 34. № 1. P. 163–176.

11. *Suwansirikul C., Friesz T.L., Tobin R.L.* Equilibrium decomposed optimization: A heuristic for the continuous equilibrium network design problem // Transportat. Sci. 1987. V. 21. № 4. P. 227–292.

12. *Tobin R. L., Friesz T. L.* Sensitivity analysis for equilibrium network Fflow // Transportat. Sci. 1988. V. 22. № 4. P. 231–293.

13. *Tobin R. L.* Sensitivity analysis for variational inequalities // J. Optimizat. Theory and Appl. 1986. V. 48. № 1. P. 191–204.

14. *Chiou S.* Bilevel programming for the continuous transport network design problem // Transportat. Res. Part B. 2005. V. 39. № 4. P. 361–383.

15. *Friesz T.L., Cho H.-J., Mehta N.J., Tobin R.L., Anandalingam G.* A simulated annealing approach to the network design problem with variational inequality constraints // Transportat. Sci. 1992. V. 26. № 1. P. 1–68.

16. *Meng Q., Yang H., Bell M.G.H.* An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous network design problem // Transportat. Res. B. 2001. V. 35. P. 83–105.

17. *Li C., Yang H., Zhu D., Meng Q.* A global optimization method for continuous network design problems // Transportat. Res. Part B. 2012. V. 46. № 9. P. 1144–1158.

18. *Крылатов А. Ю.* Распределение потока в сети как задача поиска неподвижной точки // Дискретный анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23. № 2. С. 63–87 (English Translated: Krylatov A.Yu. Network flow assignment as a fixed point problem // J. Appl. and Industrial Math. 2016. V. 10. № 2. P. 243–256.)

19. *Schmeidler D.* Equilibrium points of nonatomic games // J. Stat. Phys. 1973. V. 7. № 4. P. 295–300.

20. *Milchtaich I.* Internalization of social cost in congestion games // Economic Theory. 2021. V. 71. P. 717–760.

GLOBAL OPTIMUM SEARCH IN THE NETWORK DESIGN PROBLEM

A. Yu. Krylatov[a,b,*]

[a] *199034 Saint Petersburg, Universitetskaya nab., 7/9, St. Petersburg State University, Russia*
[b] *199178 Saint Petersburg, 12th line VO., 13, Institute of Transport Problems, Russia*
**e-mail: a.krylatov@spbu.ru, aykrylatov@yandex.ru*

Received: 10.11.2023
Revised: 25.05.2024
Accepted: 01.07.2024

Abstract. The global optimum search in the network design problem for the case of networks with disjoint paths is considered. In the considered formulation of the problem, the manager of a network invests in the capacities of its elements, seeking to minimize the total delay arising from the equilibrium flow assignment. It is proven that the solution to the problem under study must necessarily solve a certain minimax problem. Optimality conditions for solutions of the minimax problem are found under fairly natural assumptions. Based on the results, a new algorithm is developed for optimizing the topology of a network with disjoint paths.

Keywords: network design problem, equilibrium flow assignment.