

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

© 2024 г. А.Н. Квитко^{1,*}

¹199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7-9, С.-Петербургский гос. университет, Россия

*e-mail: alkvit46@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2024 г.

Переработанный вариант 28.05.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Предложен достаточно удобный для численной реализации алгоритм построения дифференцируемой управляющей функции, гарантирующей перевод широкого класса нелинейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в начало координат на нефиксированном промежутке времени. Найдено конструктивное достаточное условие калмановского типа, гарантирующее указанный перевод. Эффективность алгоритма иллюстрируется при решении конкретной практической задачи и ее численном моделировании. Библ. 20. Фиг. 1.

Ключевые слова: управляемость, граничные условия, стабилизация.

DOI: 10.31857/S0044466924100057, **EDN:** KANFYS

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных направлений развития математической теории управления является исследование проблемы построения различных типов управляющих функций и соответствующих функций фазовых координат, обеспечивающих перевод систем обыкновенных дифференциальных уравнений из начального состояния в заданное конечное состояние. Среди этих задач важное место занимают задачи построения указанных управляющих функций в случае, когда время перевода не является заданной величиной и подлежит нахождению. Данный класс задач называют задачами терминального управления.

Актуальность исследования задач терминального управления обусловлена тем, что с одной стороны при решении задачи терминального управления можно получить более широкую область достижимости, с другой стороны результаты ее решения могут служить опорными приближениями при решении задач оптимизации. В частности при решении задачи оптимального быстродействия. Проблеме терминального управления посвящено большое количество работ. Некоторые из них приведены в ссылках [1]–[18]. Основные научные результаты указанных публикаций связаны с нахождением необходимых и достаточных условий, гарантирующих заданный перевод [2]–[6], [9], [13], [16]–[18], построением и оценками множества достижимости [1], [2], [4], [14], [16], а также разработкой методов приближенного или точного построения искомых управлений и соответствующих функций фазовых координат [7]–[12], [15]. В работах [2]–[5], [9], [16]–[18] необходимые и достаточные условия разрешимости задачи терминального управления формулируются в терминах алгебры Ли векторных полей порожденных правой частью исходной системы. В [6], [13] получены достаточные условия локальной управляемости на основе свойств вариационного конуса. Для оценок областей достижимости используется как дифференциально-геометрический подход, так и метод, основанный на вариации множества достижимости. При решении задач терминального управления для нелинейных систем специального вида применяются методы основанные на замене зависимых и независимых переменных, которые позволяют значительно упростить решение исходной задачи. В настоящее время проблема терминальных задач для управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно подробно изучена для линейных и нелинейных систем специального вида. Однако теория решения задач терминального управления для нелинейных управляемых систем общего вида ввиду их сложности еще недостаточно разработана. Основные усилия автора направлены на разработку достаточно простого для численной реализации и устойчивого к погрешностям вычислений алгоритма решения нелокальной задачи терминального управления для более широкого класса нелинейных ста-

ционарных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений и нахождению конструктивного достаточного условия калмановского типа, гарантирующего его реализацию. Поставленная цель достигнута сведением решения исходной нелокальной терминальной задачи к решению некоторого числа локальных граничных задач на фиксированном промежутке времени. В свою очередь каждая из граничных задач может быть решена с помощью алгоритма из работы [19] с небольшими изменениями.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)^T$, $\mathbf{u} \in R^r$, $r \leq n$,

$$\mathbf{f} \in C^{2n}(R^n \times R^r; R^n), \quad \mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (1.3)$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{0}).$$

Построим матрицу $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = (\mathbf{B}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))$. Предположим, что для всех $\mathbf{x}$ из области

$$\|\mathbf{x}\| \leq C, \quad C > 0, \quad (1.4)$$

выполнено условие

$$\text{rank } \mathbf{S}(\mathbf{x}) = n. \quad (1.5)$$

Пусть $\bar{\mathbf{x}} \in R^n$, $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$, $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$, — фиксированное состояние.

Задача. Найти пару функций: $\mathbf{x}(t) \in C^n([0, t_1]; R^n)$, $\mathbf{u}(t) \in C^n([0, t_1]; R^r)$, удовлетворяющую системе (1.1) и условиям

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

В (1.6) t_1 — заранее неизвестный момент времени, подлежащий определению. При $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ полагаем $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Теорема. Пусть для правой части системы (1.1) выполнены условия (1.2), (1.3) и в области (1.4) выполнено условие (1.5). Тогда для всех $\bar{\mathbf{x}} : \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{C}{2}$ существует решение поставленной задачи, которое может быть получено после решения конечного числа вспомогательных локальных граничных задач на заданном промежутке времени.

Основная идея решения вспомогательных локальных задач состоит в том, чтобы посредством преобразований зависимых и независимых переменных, решение каждой исходной локальной задачи свести к решению задачи стабилизации нелинейной вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида при постоянно действующих возмущениях. Для ее решения находится вспомогательное управление, обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы линейной части этой системы. На заключительном этапе находится решение задачи Коши для вспомогательной системы, замкнутой указанным управлением, и осуществляется переход к исходным зависимым и независимым переменным.

2. ФОРМУЛИРОВКА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ И ПОСТРОЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Пусть

$$L = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq C} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})\|, \quad t_0 \leq \frac{C}{2L}.$$

Рассмотрим функцию $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$, $\boldsymbol{\varphi}(t) \in C^{2n}[0, t_1]$, удовлетворяющую системе

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{0}), \quad t \in [0, t_1], \quad \boldsymbol{\varphi}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{C}{2}, \quad \boldsymbol{\varphi}(t_1) = \bar{\mathbf{x}}_1, \quad \bar{\mathbf{x}}_1 = (\bar{x}_1^1, \dots, \bar{x}_1^n)^T, \quad 0 < t_1 \leq t_0. \quad (2.1)$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что из условий (1.2), (2.1) и определения момента $t_0 > 0$ следуют неравенства

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| \leq C, \quad \left\| \frac{d^k \boldsymbol{\varphi}}{dt^k}(t) \right\| \leq K, \quad k = 1, \dots, 2n \quad \forall t \in [0, t_1],$$

где константа $K > 0$ зависит от области (1.4).

Задача 1. Найти пару функций $\mathbf{x}(t) \in C^n([0, t_1]; R^n)$, $\mathbf{u}(t) \in C^n([0, t_1]; R^r)$, удовлетворяющую системе (1.1) и условиям

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{C}{2}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}(t_1) = (1 - \varepsilon(t_1))\bar{\mathbf{x}}_1 = \bar{\mathbf{x}}_2, \quad 0 < \varepsilon(t_1) \leq 1. \quad (2.2)$$

Здесь $\varepsilon(t_1)$ и $t_1 : 0 < t_1 \leq t_0$ подлежат определению. Выполним в системе (1.1) замену

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t) + \mathbf{y}, \quad t \in [0, t_1], \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T. \quad (2.3)$$

Тогда в новой переменной $\mathbf{y}$ система (1.1) примет вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{0}), \quad t \in [0, t_1]. \quad (2.4)$$

Рассмотрим задачу: найти пару функций $\mathbf{y}(t) \in C^n[0, t_1]$, $\mathbf{u}(t) \in C^n[0, t_1]$, удовлетворяющую системе (2.4) и условиям

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(t_1) = -\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{u}(t_1) = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Указанную пару функций будем называть *решением задачи* (2.4), (2.5). Выполним в системе (2.4) замену:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{a}(t) - \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1. \quad (2.6)$$

В новой переменной $\mathbf{a}(t)$ система (2.4) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{f}(\mathbf{a} + \boldsymbol{\varphi}(t) - \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{0}) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}(t)), \quad t \in [0, t_1], \\ \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}(t)) &\equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Рассмотрим условия

$$\mathbf{a}(0) = \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_1. \quad (2.8)$$

Будем искать пару $\mathbf{a}(t) \in C^n([0, t_1]; R^n)$, $\mathbf{u}(t) \in C^n([0, t_1]; R^r)$, удовлетворяющую системе (2.7) и условиям (2.8). Указанную пару функций $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ будем называть *решением задачи* (2.7), (2.8). Выполним в системе (2.7) преобразование независимой переменной t по формуле

$$t = t_1 - t_1 e^{-\alpha\tau}, \quad \tau \in [0, +\infty), \quad (2.9)$$

где $\alpha > 0$ — некоторое фиксированное число, подлежащее определению. Тогда в новой независимой переменной τ система (2.7) и условия (2.8) примут вид:

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\tau} = \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{c}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{d}, \boldsymbol{\varphi}(t(\tau))), \quad (2.10)$$

$$\mathbf{c}(\tau) = \mathbf{a}(t(\tau)), \quad \mathbf{d}(\tau) = \mathbf{u}(t(\tau)), \quad \tau \in [0, +\infty), \quad \mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T, \quad \mathbf{d} = (d_1, \dots, d_r)^T, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{c}(0) = \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{d}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}(\tau) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}(\tau) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (2.12)$$

Пару функций $\mathbf{c}(\tau) \in C^n([0, \infty); R^n)$, $\mathbf{d}(\tau) \in C^n([0, \infty); R^r)$, удовлетворяющую системе (2.10) и условиям (2.12), будем называть *решением задачи* (2.10), (2.12).

Замечание 2. Имея решение задачи (2.10), (2.12) с помощью формул (2.9), (2.11) получим решение задачи (2.7), (2.8). В свою очередь подстановка решения задачи (2.7), (2.8) в формулы (2.6), (2.3) и предельный переход при $t \rightarrow t_1$ даст решение задачи 1.

Введем обозначения

$$\tilde{\mathbf{c}} = \theta_i \mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \theta_i \mathbf{d}, \quad \tilde{t}_1 = t_1 + \theta_i(t - t_1), \quad \theta_i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, n, \quad |k| = \sum_{i=1}^n k_i,$$

$$|m| = \sum_{i=1}^r m_i, \quad k! = k_1! \dots k_n!, \quad m! = m_1! \dots m_r!.$$

Используя свойство (1.2), разложение правой части системы (2.7) в ряд Тейлора в окрестности точки $(\mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{u} = \mathbf{0}, t = t_1)$ и замену (2.9), (2.11), систему (2.10) можно записать в виде:

$$\frac{dc_i}{d\tau} = \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_j +$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \frac{1}{2} \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j c_k + \right. \\
& + 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j d_k + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial u_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_j d_k + \\
& + 2 t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j + 2 t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial u_j \partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_j + \\
& \left. + t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \right] + \dots \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-1} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial^{|k|+|m|+l} \Psi_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \dots d_r^{m_r} e^{-\alpha\tau} t_1^l + \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n} \frac{1}{k!m!l!} \frac{\partial^{|k|+|m|+l} \Psi_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \partial u_2^{m_2} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}(\tilde{c}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{t}_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1^{m_1} \dots d_r^{m_r} e^{-\alpha\tau} t_1^l, \\
& i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Ограничим область изменения $\mathbf{c}(\tau)$, $\mathbf{d}(\tau)$ неравенствами

$$\|\mathbf{c}(\tau)\| \leq C, \quad \|\mathbf{d}(\tau)\| \leq C, \quad \tau \in [0, \infty). \tag{2.14}$$

Сделаем $2n - 1$ преобразований сдвигов функций $c_i(\tau) : c_i(\tau) \rightarrow c_i^{2n-1}(\tau)$, $i = 1, \dots, n$. Главная их цель состоит в том, чтобы в правой части системы, полученной в результате этих преобразований, все слагаемые, не содержащиеся в явном виде степеней компонент $\mathbf{c}^{2n-1}$ и $\mathbf{d}$, в области (2.14) удовлетворяли оценке $O(e^{-2n\alpha\tau} t_1^{2n})$ при $\tau \rightarrow \infty$, $t_1 \rightarrow 0$. На первом этапе выполним замену $c_i(\tau)$, $i = 1, \dots, n$, по формуле

$$c_i(\tau) = c_i^1 - t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.15}$$

Пусть

$$D^{|k|+|m|+l} \Psi_i \equiv \frac{\partial^{|k|+|m|+l} \Psi_i}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1^{m_1} \dots \partial u_r^{m_r} \partial t^l}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ниже для компактности записи в правой части системы (2.16) зависимость ε от t_1 будем опускать, полагая, что $0 < \varepsilon \leq \varepsilon(t_1)$. После подстановки (2.15) в левую и правую части системы (2.13) получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{dc_i^1}{d\tau} = & -\alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - \\
& -\alpha t_1^3 e^{-3\alpha\tau} \sum_{j=n}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \\
& + \frac{1}{2} \alpha t_1^3 e^{-3\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \\
& + \alpha (e^{-\alpha\tau} t_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j^1 - e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j^1) + \\
& + e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j^1 + \alpha (e^{-\alpha\tau} t_1 \sum_{j=1}^r \frac{\partial \Psi_i}{\partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k - \\
& - e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial u_k \partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k + e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial u_k \partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \alpha t_1 e^{-\alpha \tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j^1 c_k^1 + \alpha e^{-\alpha \tau} t_1 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k c_j^1 + \\
& + \frac{1}{2} \alpha e^{-\alpha \tau} t_1 \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial u_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_j d_k + \frac{1}{2} \alpha e^{-3\alpha \tau} t_1^3 \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \dots \\
& \dots + \alpha t_1 e^{-\alpha \tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-2} \frac{1}{k!m!l!} D^{|k|+|m|+l} \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) (c_1^1 - e^{-\alpha \tau} t_1 \Psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1))^{k_1} \times \dots \\
& \dots \times (c_n^1 - e^{-\alpha \tau} t_1 \Psi_n(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1))^{k_n} d_1^{m_1} \times \dots \times d_r^{m_r} t_1^l + \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha \tau} \sum_{|k|+|m|+l=2n-1} \frac{1}{k!m!l!} D^{|k|+|m|+l} \Psi_i(\tilde{\mathbf{c}}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{t}_1) (c_1^1 - e^{-\alpha \tau} t_1 \Psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1))^{k_1} \times \dots \\
& \dots \times (c_n^1 - e^{-\alpha \tau} t_1 \Psi_n(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1))^{k_n} d_1^{m_1} \times \dots \times d_r^{m_r} t_1^l, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Из (2.15), (2.12) следует

$$c_i^1(0) = \varepsilon(t_1) \bar{x}_1^i + t_1 \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.17}$$

Нетрудно видеть, что в правой части системы (2.16) слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов $\mathbf{c}^1$ и $\mathbf{d}$, в области (2.14) удовлетворяют условию $O(e^{-2\alpha \tau} t_1^2)$, $\tau \rightarrow \infty$, $t_1 \rightarrow 0$. На втором этапе сделаем замену

$$\begin{aligned}
c_i^1(\tau) &= c_i^2(\tau) + \frac{1}{2} t_1^2 e^{-2\alpha \tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - \\
&- \frac{1}{2} t_1^2 e^{-2\alpha \tau} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) = c_i^2(\tau) + t_1^2 e^{-2\alpha \tau} \varphi_i^2(\varepsilon(t_1)), \\
\varphi_i^2(\varepsilon(t_1)) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1), \\
\varphi_i^2(0) &= 0, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Последнее равенство в (2.18) следует из (2.7). В результате получим систему в новых переменных $\mathbf{c}_i^2$. Несложный анализ показывает, что в ее правой части слагаемые, не содержащие в явном виде степеней компонент векторов $\mathbf{c}_i^2$ и $\mathbf{d}$, в области (2.14) удовлетворяют условию $O(e^{-3\alpha \tau} t_1^3)$, $\tau \rightarrow \infty$, $t_1 \rightarrow 0$. Начальное условие согласно (2.17), (2.18) примет вид

$$c_i^2(0) = \varepsilon(t_1) \bar{x}_1^i + t_1 \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - t_1^2 \varphi_i^2(\varepsilon(t_1)), \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.19}$$

Используя (2.15), (2.18) и индуктивный переход на k -м шаге получим искомое преобразование вида

$$c_i^{k-1}(\tau) = c_i^k + t_1^k e^{-k\alpha \tau} \phi_i^k(\varepsilon(t_1)), \quad \phi_i^k(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.20}$$

Если применить преобразования (2.20) $(2n-1)$ раз, объединить слагаемые в полученной системе, линейные по компонентам вектора $\mathbf{c}^{2n-1}$ и содержащие коэффициенты $t_1^i e^{-i\alpha \tau}$, $i = 1, \dots, n-1$, а также слагаемые, линейные по компонентам вектора $\mathbf{d}$ и содержащие коэффициенты $t_1^i e^{-i\alpha \tau}$, $i = 1, \dots, n-1$, то согласно (2.16), (2.17), (2.19) будем иметь систему и начальные данные, которые в векторной форме можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{c}^{2n-1}}{d\tau} = \mathbf{P} \mathbf{c}^{2n-1} + \mathbf{Q} \mathbf{d} + \sum_{i=1}^4 \mathbf{R}_i (\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau), \quad \mathbf{R}_i = (R_i^1, \dots, R_i^n)^T, \quad i = 1, \dots, 4. \tag{2.21}$$

Функции R_1^i содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора $\mathbf{c}^{2n-1}$ с коэффициентами $t_1^i e^{-i\alpha \tau}$, $i \geq n$, не содержащие степеней компонент вектора $\mathbf{d}$. Функции R_2^i содержат все слагаемые, линейно зависящие от компонент вектора $\mathbf{d}$ с коэффициентами $t_1^i e^{-i\alpha \tau}$, $i \geq n$, не содержащие степеней компонент вектора $\mathbf{c}^{2n-1}$. В R_3^i содержатся все слагаемые, нелинейные по компонентам векторов $\mathbf{c}^{2n-1}$ и $\mathbf{d}$. Функция R_4^i состоит из слагаемых, не содержащих степеней компонент векторов $\mathbf{c}^{2n-1}$ и $\mathbf{d}$. Матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ и начальные данные имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{P} &= t_1 \alpha e^{-\alpha \tau} (\mathbf{P}_1(t_1) + e^{-\alpha \tau} t_1 \mathbf{P}_2(t_1) + \dots + e^{-(n-2)\alpha \tau} t_1^{n-2} \mathbf{P}_{n-1}(t_1)), \\
\mathbf{Q} &= t_1 \alpha e^{-\alpha \tau} (\mathbf{Q}_1(t_1) + e^{-\alpha \tau} t_1 \mathbf{Q}_2(t_1) + \dots + e^{-(n-2)\alpha \tau} t_1^{n-2} \mathbf{Q}_{n-1}(t_1)),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^{2n-1}(0) &= \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1 + t_1\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - t_1^2\mathbf{f}^2(\varepsilon(t_1)) - t_1^3\mathbf{f}^3(\varepsilon(t_1)) - \dots \\
&\dots - t_1^{2n}\mathbf{f}^{2n-1}(\varepsilon(t_1)), \mathbf{f}^i(\varepsilon(t_1)) = (\phi_1^i(\varepsilon(t_1)), \dots, \phi_n^i(\varepsilon(t_1)))^T, \\
\mathbf{f}^i(0) &= \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, 2n-1.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Введем новую управляющую функцию $\mathbf{w}(\tau)$, связанную с $\mathbf{d}(\tau)$ уравнениями

$$\frac{d\mathbf{d}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{v}_1, \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{d\tau} = \mathbf{v}_{i+1}, \quad i = 1, \dots, 2n-2, \quad \frac{d\mathbf{v}_{2n-1}}{d\tau} = \alpha\bar{t}e^{-\alpha\tau}\mathbf{w}, \quad \mathbf{v}_i = (v_1^i, \dots, v_r^i)^T, \quad \mathbf{v}_i \in R^r. \tag{2.24}$$

Положим

$$\mathbf{d}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, 2n-1. \tag{2.25}$$

Систему (2.21), (2.24) и начальные данные (2.23), (2.25) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}}{d\tau} &= \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{c}}^{2n-1} + \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{w} + \sum_{i=1}^4 \bar{\mathbf{R}}_i(\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau), \quad \bar{\mathbf{c}}^{2n-1} = (\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \bar{\mathbf{v}})_{n+2nr \times 1}^T, \\
\bar{\mathbf{v}} &= (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)^T, \quad \mathbf{w} = (w_1, \dots, w_r)^T, \quad \bar{\mathbf{R}}_1 = (R_1^1, \dots, R_1^n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})_{n+2nr \times 1}^T, \\
\bar{\mathbf{R}}_2 &= (R_2^1, \dots, R_2^n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})_{n+2nr \times 1}^T, \quad \bar{\mathbf{R}}_3 = (R_3^1, \dots, R_3^n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})_{n+2nr \times 1}^T, \\
\bar{\mathbf{R}}_4 &= (R_4^1, \dots, R_4^n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})_{n+2nr \times 1}^T,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} & \mathbf{O}_{n \times r} & \mathbf{O}_{n \times r} & \dots & \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{O}_{r \times n} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{E}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \dots & \mathbf{O}_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{r \times n} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{E}_{r \times r} & \dots & \mathbf{O}_{r \times r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_{r \times n} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \dots & \mathbf{E}_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{r \times n} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \mathbf{O}_{r \times r} & \dots & \mathbf{O}_{r \times r} \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{n \times r} \\ \mathbf{O}_{r \times r} \\ \mathbf{O}_{r \times r} \\ \vdots \\ \mathbf{O}_{r \times r} \\ \alpha\bar{t}e^{-\alpha\tau}\mathbf{E}_{r \times r} \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

$$\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(0) = \bar{\mathbf{c}}_0^{2n-1}, \quad \bar{\mathbf{c}}_0^{2n-1} = (\mathbf{c}^{2n-1}(0), \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})_{n+2nr \times 1}^T, \tag{2.28}$$

где $\mathbf{O}_{r \times n}$, $\mathbf{O}_{r \times r}$ — матрицы с нулевыми элементами, $\mathbf{E}_{r \times r}$ — единичная матрица.

Рассмотрим задачу: найти пару функций $\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(\tau) \in C^1[0, \infty)$, $\mathbf{w}(\tau) \in C^1[0, \infty)$, удовлетворяющую системе (2.26) и условиям

$$\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(0) = \bar{\mathbf{c}}_0^{2n-1}, \quad \bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(\tau) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty. \tag{2.29}$$

Указанную пару $\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(\tau)$, $\mathbf{v}(\tau)$ будем называть *решением задачи* (2.26), (2.29).

Замечание 3. Легко видеть, что имея пару функций $(\mathbf{c}^{2n-1}(\tau), \mathbf{d}(\tau)) = \bar{\mathbf{c}}^{2n-1}(\tau)$, входящую в решение задачи (2.26), (2.29) и используя формулы (2.20), (2.18) и (2.15), получаем решение задачи (2.10), (2.12).

Для удобства дальнейших рассуждений введем область изменения $\mathbf{c}^{(2n-1)}$ согласованную с областью (2.14). Учитывая (2.20), (2.18), (2.15), (2.7) и индуктивный переход, получим равенство $\mathbf{c} = \mathbf{c}^{2n-1} + \chi(\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1), \chi(\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1) \rightarrow \mathbf{0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon(t_1)$. Отсюда $\|\mathbf{c}\| \leq \|\mathbf{c}^{2n-1}\| + \|\chi(\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1)\|$. В силу сказанного, для любого $\bar{\mathbf{x}}_1$ из области (1.4) и $t_1 : 0 < t_1 \leq t_0$, следует существование констант $C_1, \varepsilon_0 : 0 < C_1 < C, 0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon(t_1)$ таких, что для всех $\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1 : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и для всех $\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}$, принадлежащих области

$$\|\bar{\mathbf{c}}^{2n-1}\| < C_1, \tag{2.30}$$

соответствующие функции $\mathbf{c}(\tau)$, $\mathbf{d}(\tau)$ будут принадлежать области (2.14).

3. ОЦЕНКА СЛАГАЕМЫХ ПРАВОЙ ЧАСТИ СИСТЕМЫ (2.21) И СИНТЕЗ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ ЕЕ ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

Из построения правой части системы (2.21), условия (2.22) и замечания 1 следует, что в области (2.30) $\forall \tau \in [0, \infty)$ имеют место оценки

$$e^{-(i-1)\alpha\tau}t_1^{i-1}\|\mathbf{P}_i(t_1)\| \rightarrow 0, \quad e^{-(i-1)\alpha\tau}t_1^{i-1}\|\mathbf{Q}_i(t_1)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t_1 \rightarrow 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \tag{3.1}$$

$$\|\mathbf{R}_1(\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau)\| \leq e^{-n\alpha\tau}t_1^n L_1 \|\mathbf{c}^{2n-1}\|, \quad \|\mathbf{R}_2(\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau)\| \leq e^{-n\alpha\tau}t_1^n L_2 \|\mathbf{d}\|, \tag{3.2}$$

$$\|\mathbf{R}_3(\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau)\| \leq e^{-\alpha\tau}t_1 L_3 (\|\mathbf{c}^{2n-1}\|^2 + \|\mathbf{d}\|^2), \quad \|\mathbf{R}_4(\mathbf{c}^{2n-1}, \mathbf{d}, \tau)\| \leq L_4(\varepsilon_0\bar{\mathbf{x}}_1)t_1^{2n}e^{-2n\alpha\tau}. \tag{3.3}$$

Константы $L_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$, зависят от области (2.30).

С учетом (2.7), (2.15), (2.16), (2.18), (2.20) имеем

$$L_4(\varepsilon \bar{x}_1) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \quad (3.4)$$

Рассмотрим систему

$$\frac{d\bar{c}^{2n-1}}{d\tau} = \bar{P}\bar{c}^{2n-1} + \bar{Q}w. \quad (3.5)$$

Воспользовавшись условиями (1.5), (2.22), (2.27), (3.1), замечанием 1 и доказательством леммы приведенной в работе [19] с учетом замены матриц $\bar{P}$, $\bar{Q}$ и P , Q , фигурирующих в [19] (см. (2.16), (2.20) из [19]) на матрицы $\bar{P}$, $\bar{Q}$ и P , Q , определенные выражениями (2.27), (2.22), а также $\|F\|$ из работы [19] на t_1 , нетрудно показать, что для любого $\bar{x}_1$ из области (1.4) существует $\bar{t} : 0 < \bar{t} \leq t_0$ такое, что при $t_1 = \bar{t}$ можно построить вспомогательное управление $w(\tau)$ вида

$$w = M(\tau)\bar{c}^{2n-1}, \quad \|M(\tau)\| = O(e^{n\alpha\tau}), \quad \tau \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

обеспечивающее экспоненциальное убывание фундаментальной матрицы $\Phi(\tau)$ системы (3.5), (3.6) при $\bar{x}_1 = \Psi(\bar{t})$. Для $\Phi(\tau)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\Phi(\tau)\| &\leq K\bar{t}e^{-\lambda\tau}, \quad \lambda > 0, \\ \|\Phi(\tau)\Phi^{-1}(t)\| &\leq K\bar{t}^{-(n-1)}e^{-\lambda(\tau-t)\tau}e^{(n-1)\alpha t}, \\ \tau &\geq t, \quad \tau \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (3.7)$$

В дальнейшем будем рассматривать задачу 1 и последующие задачи $2, \dots, k$ на фиксированном промежутке $[0, \bar{t}]$. То есть в (1.6), (2.1)–(2.10), (2.12), (2.13), (2.15)–(2.23) полагаем $t_1 = \bar{t}$,

4. ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Рассмотрим систему (2.26) с начальными данными (2.28), замкнутую вспомогательным управлением (3.6), полученного в ходе доказательства леммы в работе [19], на промежутке $[0, \bar{t}]$. В силу (3.5), (3.6) эта система примет вид

$$\frac{d\bar{c}^{2n-1}}{d\tau} = C\bar{c}^{2n-1} + \sum_{i=1}^4 \bar{R}_i(c^{2n-1}, d, \tau), \quad C = \bar{P} + \bar{Q}M(\tau). \quad (4.1)$$

Если пользоваться рассуждениями, приведенными при доказательстве теоремы в работе [19], с учетом (3.1)–(3.4), (3.7), замечания 1, а также замены $\|\bar{x}\|$ и $\|F\|$ на $\varepsilon\|\bar{x}_1\|$ и формулы (4.15) в [19] на формулу $c^{2n-1} = (\bar{t})^n z e^{-n\alpha\tau}$, то для любого $\bar{x}_1$ из области (1.4) можно найти $\varepsilon_1 : 0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 \leq 1$ такое, что решение системы (4.1) с начальными данными (2.28), (2.23) (с учетом замены $\varepsilon(t_1)\bar{x}_1$ на $\varepsilon_1\bar{x}_1$), не покидает область (2.30) и удовлетворяет условиям (2.29). В результате будем иметь пару функций $\bar{c}^{2n-1}(\tau)$, $w(\tau)$, удовлетворяющую системе (4.1), которая является решением задачи (2.26), (2.29). В свою очередь пара функций $\bar{c}^{2n-1}(\tau) = (c^{2n-1}(\tau), d(\tau))$ после перехода к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (2.20), (2.15), (2.11), (2.9), (2.6), (2.3) и предельного перехода при $t \rightarrow \bar{t}$, согласно (1.2) и замечаниям 3 и 2, дает пару функций

$$\begin{aligned} x^1(t) &\in C^{2n-1}([0, \bar{t}]; R^n), \quad x^1(t) = (x_1^1(t), \dots, x_n^1(t))^T, \\ u^1(t) &\in C^{2n-1}([0, \bar{t}]; R^r), \quad u^1(t) = (u_1^1(t), \dots, u_r^1(t))^T, \end{aligned} \quad (4.2)$$

которая является решением задачи 1, т.е. функции (4.2) удовлетворяют системе

$$\dot{x}^1(t) = f(x^1(t), u^1(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4.3)$$

и условиям

$$x^1(0) = \bar{x}, \quad u^1(0) = 0, \quad x^1(\bar{t}) = (1 - \varepsilon_1)\bar{x}_1 = \bar{x}_2, \quad u^1(\bar{t}) = 0, \quad \|\bar{x}_2\| < \|\bar{x}_1\|. \quad (4.4)$$

Из условий (1.2), (2.27), (2.29) и (4.2) следует

$$\frac{d^k u^1}{dt^k}(\bar{t}) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1, \quad (4.5)$$

Задача 2. Найти пару функций $\mathbf{x}^2(t) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}]; R^n)$, $\mathbf{u}^2(t) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}]; R^r)$, удовлетворяющую системе (1.1) и условиям

$$\mathbf{x}^2(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}^2(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^2(\bar{t}) = (1 - \varepsilon)\bar{\mathbf{x}}_2 = \bar{\mathbf{x}}_3, \quad \mathbf{u}^2(\bar{t}) = \mathbf{0}. \quad (4.6)$$

В (4.6) $\varepsilon : 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$ подлежит определению. Выполним в системе (1.1) замену

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{y} + \mathbf{x}^1(t), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T, \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{u}^1(t), \quad \mathbf{v}^{(1)} = (v_1^{(1)}, \dots, v_r^{(1)})^T, \quad t \in [0, \bar{t}]. \quad (4.7)$$

В результате, с учетом (4.3), (4.4), (4.6), (4.7), в новых переменных система (1.1) и условия (4.6) примут вид

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{x}^1(t), \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{u}^1(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4.8)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^{(1)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(\bar{t}) = -\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2, \quad \mathbf{v}^{(1)}(\bar{t}) = \mathbf{0}. \quad (4.9)$$

После подстановки (2.6) (с заменой $\varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1$ на $\varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2$) в левую и правую часть (4.8) с учетом (4.9) получим аналог системы (2.7) и условий (2.8)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{f}(\mathbf{a} - \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{x}^1(t), \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{u}^1(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t)) = \\ &= \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \\ \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t)) &\equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T, \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{a}(0) = \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2, \quad \mathbf{v}^{(1)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^{(1)}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при } t \rightarrow \bar{t}. \quad (4.11)$$

В результате перехода к независимой переменной τ в (4.10), (4.11) по формуле (2.9) получаем аналог системы (2.10) и условий (2.12)

$$\frac{d\mathbf{c}}{d\tau} = \alpha \bar{t} e^{-\alpha\tau} \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{c}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{d}, \mathbf{x}^1(t(\tau)), \mathbf{u}^1(t(\tau))), \quad (4.12)$$

$$\mathbf{c}(\tau) = \mathbf{a}(t(\tau)), \quad \mathbf{d}(\tau) = \mathbf{v}^{(1)}(t(\tau)),$$

$$\mathbf{c}(0) = \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_2, \quad \mathbf{d}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}(\tau) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{d}(\tau) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty. \quad (4.13)$$

После разложения правой части системы (4.10) в окрестности точки $(\mathbf{a} = \mathbf{0}, \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{0}, t = \bar{t})$, преобразований (2.20) и присоединения системы (2.24) будем иметь аналог системы (2.26), (2.27) и начальных условий (2.28). Ее линейная часть является аналогом системы (3.5). Воспользовавшись рассуждениями, приведенными при решении задачи 1, применительно к системе (4.12) и условиям (4.13) можно найти $\varepsilon = \varepsilon_2 : 0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$ и пару функций $x^2(t, \bar{\mathbf{x}}_3) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}])$, $u^2(t, \bar{\mathbf{x}}_3) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}])$, $t \in [0, \bar{t}]$, удовлетворяющую системе

$$\frac{d\mathbf{x}^2}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^2(t), \mathbf{u}^2(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4.14)$$

и условиям (4.6). Кроме того, согласно (2.29), (4.5) имеем

$$\frac{d^k \mathbf{u}^2}{dt^k}(\bar{t}) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1, \quad \|\bar{\mathbf{x}}_3\| < \|\bar{\mathbf{x}}_2\| < \|\bar{\mathbf{x}}_1\|.$$

Задача К. Используя рассуждения, приведенные при решении задачи 2 и индуктивный переход получим пару функций

$$\mathbf{x}^k(t) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}]), \quad \mathbf{u}^k(t) \in C^{2n-1}([0, \bar{t}]), \quad (4.15)$$

которая удовлетворяет системе

$$\frac{d\mathbf{x}^k}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k(t), \mathbf{u}^k(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \quad (4.16)$$

и условиям

$$\mathbf{x}^k(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{u}^k(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^k(\bar{t}) = (1 - \varepsilon_k)\bar{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_{k+1}, \quad \mathbf{u}^k(\bar{t}) = \mathbf{0}. \quad (4.17)$$

Кроме того,

$$\frac{d^k \mathbf{u}^k}{dt^k}(\bar{t}) = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1, \quad \|\bar{\mathbf{x}}_{k+1}\| < \dots < \|\bar{\mathbf{x}}_3\| < \|\bar{\mathbf{x}}_2\| < \|\bar{\mathbf{x}}_1\|. \quad (4.18)$$

Замечание 4. Из условий (1.2)–(1.5), (4.18) следует, что процедуру решения задач $1, \dots, k$ можно завершить при выполнении условия $\|\bar{x}_k\| < \varepsilon$ и продолжить решение поставленной задачи по алгоритму, разработанному в [19]. Величина $\varepsilon > 0$ фигурирует в формулировке теоремы из упомянутой работы.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что процедура решения K -й задачи может быть продолжена $\forall \bar{x}_k : \|\bar{x}_k\| \geq \varepsilon$. Предположим противное, тогда

$$\bar{x}_k \rightarrow \bar{y} \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad \|y\| \geq \varepsilon. \quad (4.19)$$

Выполним в системе (4.16) замены

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^k(t) &= \mathbf{y} + \mathbf{x}^{k-1}(t), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T, \\ \mathbf{u}^k(t) &= \mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{u}^{k-1}(t), \quad \mathbf{v}^{(k-1)} = (v_1^{(k-1)}, \dots, v_r^{(k-1)})^T, \quad t \in [0, \bar{t}], \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{a}(t) - (\varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k + (\bar{\mathbf{y}} - \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k)), \quad \bar{\mathbf{y}} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)^T. \quad (4.21)$$

В результате преобразований (4.20) и (4.21) система (4.16) и аналог условий (4.11) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} &= \mathbf{f}(\mathbf{a} - (\varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k + (\bar{\mathbf{y}} - \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k)) + \mathbf{x}^{k-1}(t), \mathbf{v}^{(k-1)} + \mathbf{u}^{k-1}(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{k-1}(t), \mathbf{u}^{k-1}(t)) = \\ &= \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}, \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k + (\bar{\mathbf{y}} - \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k), \mathbf{v}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{k-1}(t), \mathbf{u}^{k-1}(t)), \quad t \in [0, \bar{t}], \\ \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{x}^{k-1}(t), \mathbf{u}^{k-1}(t)) &\equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T, \\ \mathbf{a}(0) &= \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k + \bar{\mathbf{y}} - \varepsilon_k \bar{\mathbf{x}}_k, \quad \mathbf{v}^{(k-1)}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}(t) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^{(k-1)}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \rightarrow \bar{t}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Если разложить в ряд Тейлора правую часть системы (4.22) в окрестности точки $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}^{(k-1)} = \mathbf{0}$, $t = \bar{t}$, использовать замену независимой переменной t по формуле (2.9) и применить алгоритм решения задачи k , основанный на решении задач 1, 2, то, согласно условию (4.19), для достаточно большого $k = m$ получим пару функций $x^m(t)$, $u^m(t)$, удовлетворяющую системе (4.16) и условиям $\mathbf{x}^m(0) = \bar{\mathbf{x}}$, $u^m(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^m(\bar{t}) = \bar{\mathbf{y}}$, $u^m(\bar{t}) = \mathbf{0}$. В свою очередь после решения задачи $k = m + 1$ получим пару функций $x^{m+1}(t)$, $u^{m+1}(t)$, удовлетворяющую системе (4.16) и условиям $\mathbf{x}^{m+1}(0) = \bar{\mathbf{x}}$, $u^{m+1}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}^{m+1}(\bar{t}) = (1 - \varepsilon)\bar{\mathbf{y}}$, $u^{m+1}(\bar{t}) = \mathbf{0}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 1$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения о продолжимости процедуры решения задач $1, \dots, k$. Теорема доказана.

4.1. Описание алгоритма

На основе доказательства теоремы алгоритм решения поставленной задачи состоит из следующих этапов.

Решение задачи 1.

1. При заданном значении $C > 0$ из условия $L = \max_{\|x\| \leq C} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})\|$, $0 < t_0 < \frac{C}{2L}$, находится величина t_0 . Выполняется численными методами.
2. Решение задачи Коши для системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$, на промежутке $[0, t_0]$. В результате получим функцию фазовых координат $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $t \in [0, t_0]$, и состояние $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_1$. Выполняется численными методами.
3. Построение системы (2.26). Выполняется аналитическими методами.
4. Построение матриц (2.22), (2.27). Выполняется аналитическими методами.
5. Нахождение момента $\bar{t}$ из условия $0 < t_1 \leq \bar{t} \leq t_0 : \text{rank} \{L_1, L_2, \dots, L_n\} = \text{rank} \{\bar{L}_1, \bar{L}_2, \dots, \bar{L}_n\} = n$ для всех $s\bar{x}_1$, $s \in [0, 1]$, где

$$\begin{aligned} L_1 &= Q(t_1), \quad L_i = P(t_1)L_{i-1} - \frac{dL_{i-1}}{d\tau}, \\ \bar{L}_1 &= \alpha t_1 e^{-\alpha \tau} Q_1(t_1), \quad \bar{L}_i = \alpha t_1 e^{-\alpha \tau} P_1(t_1) \bar{L}_{i-1} - \frac{d\bar{L}_{i-1}}{d\tau}, \quad i = 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Выполняется аналитическими методами.

6. Решение задачи стабилизации системы (3.5). В результате получаем закон вспомогательного управления в виде обратной связи (3.6). Выполняется аналитическими методами.

7. Переход в обратной связи к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (2.20), (218), (2.15), (2.11), (2.9). В результате будем иметь вспомогательную управляющую функцию $\bar{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}(\tau(t))$.

8. Решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{a}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{a} - \varepsilon_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{0}), \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \alpha^{-1}(\bar{t} - t)^{-1} \mathbf{v}_1(\tau(t)), \quad \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \alpha^{-1}(\bar{t} - t)^{-1} \mathbf{v}_{i+1}(\tau(t)), \quad i = 1, \dots, 2n - 2, \\ \frac{d\mathbf{v}_{2n-1}}{dt} &= \bar{\mathbf{w}}(t)\end{aligned}$$

с начальными данными $\mathbf{a}(0) = \varepsilon_1 \bar{\mathbf{x}}_1$, $\mathbf{u}(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, 2n - 1$, на промежутке $[0, \bar{t}]$. В результате получим известные функции $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{u}(t)$.

9. Построение функций $\mathbf{x}^1(t)$, $\mathbf{u}^1(t) = \mathbf{u}(t)$ по формулам $\mathbf{x}^1(t) = \mathbf{a}(t) - \varepsilon_1 \bar{\mathbf{x}}_1 + \boldsymbol{\varphi}(t)$, $\mathbf{u}^1(t) = \mathbf{u}(t)$. В результате получаем пару функций $\mathbf{x}^1(t)$, $\mathbf{u}^1(t)$, удовлетворяющую системе (4.3) и условиям (4.5), (4.4). Выполняется численными методами.

При $\|\bar{\mathbf{x}}_2\| < \varepsilon$ задача решается по алгоритму из работы [19] (см. замечание 4).

Решение задачи 2.

1. Построение системы (4.12). Выполняется аналитическими методами.
2. С помощью оценок (3.2), (3.3), (3.7), (4.6) и (4.22), (4.23) из [19] (с учетом замены F на $\varepsilon \bar{x}_1$) находится значение $0 < \varepsilon_2 \leq 1$.
3. Построение матриц (2.22) и (2.27) с учетом замены t_1 на $\bar{t}$ и ε_1 на ε_2 . Выполняется аналитическими методами.
4. Решение задачи стабилизации системы (3.5). В результате получаем закон вспомогательного управления в виде обратной связи (3.6). Выполняется аналитическими методами.
5. Переход в обратной связи к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (2.20), (218), (2.15), (2.11), (2.9). В результате будем иметь вспомогательную управляющую функцию $\bar{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}(\tau(t))$.
6. Решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{a}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{a} - \varepsilon_2 \bar{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{x}^1(t), \mathbf{u} + \mathbf{u}^1(t)) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^1(t), \mathbf{u}^1(t)), \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \alpha^{-1}(\bar{t} - t)^{-1} \mathbf{v}_1(\tau(t)), \\ \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} &= \alpha^{-1}(\bar{t} - t)^{-1} \mathbf{v}_{i+1}(\tau(t)), \quad i = 1, \dots, 2n - 2, \quad \frac{d\mathbf{v}_{2n-1}}{dt} = \bar{\mathbf{w}}(t)\end{aligned}$$

с начальными данными $\mathbf{a}(0) = \varepsilon_2 \bar{\mathbf{x}}_2$, $\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, 2n - 1$, на промежутке $[0, \bar{t}]$. В результате получаем пару функций $\mathbf{x}^2(t) = \mathbf{a}(t) - \varepsilon_2 \bar{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{x}^1(t)$, $\mathbf{u}^2(t) = \mathbf{u}^1(t) + \mathbf{u}(t)$, удовлетворяющую системе (4.14) и условиям (4.6) при $\varepsilon = \varepsilon_2$. Выполняется численными методами.

Процедура решения задачи **К** совпадает с процедурой решения задачи 2 с учетом замены ε_2 на ε_k . В результате получим пару функций $x^k(t)$, $u^k(t)$, удовлетворяющую системе (4.16) и условиям (4.15), (4.17) и (4.18). При $\|\mathbf{x}^k(\bar{t})\| < \varepsilon$ решение поставленной задачи продолжается по алгоритму из работы [19].

Пример. Пусть правая часть системы (1.1) имеет вид

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \{b_{ij}(\mathbf{x})\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, r, \quad \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)^T.$$

Алгоритм решения поставленной задачи для данной правой части состоит из следующих этапов.

Решение задачи 1.

1. Проверка условия (1.5) в области (1.4), где $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$.
2. Нахождение константы $L = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq C} \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|$, и момента $t_0 \leq \frac{C}{2L}$.

3. Решение задачи Коши для системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad t \in [0, t_1], \quad \mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad \|\bar{\mathbf{x}}\| \leq \frac{C}{2}, \quad 0 < t_1 \leq t_0.$$

В результате получим известную функцию $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t)$ и вектор $\bar{\mathbf{x}}_1 = \boldsymbol{\varphi}(t_1)$.

4. Построение аналога системы (2.7)

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{g}(\mathbf{a} + \boldsymbol{\varphi}(t) - \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1) + \mathbf{B}(\mathbf{a} + \boldsymbol{\varphi}(t) - \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1)\mathbf{u} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\varphi}(t), \mathbf{0}) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{a}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}(t)), \quad t \in [0, t_1],$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \boldsymbol{\varphi}(t)) \equiv \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T.$$

5. Построение аналога системы (2.13).

Введем обозначение

$$\begin{aligned} \bar{b}_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \sum_{j=1}^r b_{ij}(\mathbf{x})u_j, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dc_i}{d\tau} &= \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi_i(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^r b_{ij}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_j + \\ &+ \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \frac{1}{2} \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_j c_k + \right. \\ &+ 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial u_k \partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_j d_k + 2 t_1 e^{-\alpha\tau} \alpha \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) c_j + \\ &+ 2 t_1 e^{-\alpha\tau} \alpha \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial u_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) d_j + t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \left. \right] + \dots \\ &+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-2} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{|k|+l} g_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^l}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} e^{-l\tau} t_1^l + \\ &+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-2} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{|k|+l+1} \bar{b}_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^l \partial u_1 \dots \partial u_r}(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1 \dots d_r e^{-l\tau} t_1^l + \\ &+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-1} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{|k|+l} g_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial t^l}(\tilde{c}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{t}_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} e^{-l\tau} t_1^l + \\ &+ \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-1} \frac{1}{k!l!} \frac{\partial^{|k|+l+1} \bar{b}_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n} \partial u_1 \dots \partial u_r \partial t^l}(\tilde{c}, \varepsilon(t_1)\bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{t}_1) c_1^{k_1} \dots c_n^{k_n} d_1 \dots d_r e^{-l\tau} t_1^l. \end{aligned}$$

После замены (2.15) получим аналог системы (2.16)

$$\begin{aligned} \frac{dc_i^1}{d\tau} &= -\alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \alpha t_1^2 e^{-2\alpha\tau} \frac{\partial \Psi_i}{\partial t}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) - \\ &- \alpha^2 t_1^3 e^{-3\alpha\tau} \sum_{k=1}^n \sum_{j=n}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha t_1^3 e^{-3\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \\ &+ \alpha \left(e^{-\alpha\tau} t_1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_j^1 - e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) c_j^1 \right) + \\ &+ \alpha e^{-2\alpha\tau} t_1^2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) c_j^1 + \alpha (e^{-\alpha\tau} t_1 \sum_{j=1}^r b_{ij}(\mathbf{0}, \varepsilon\bar{\mathbf{x}}_1, t_1) d_j - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^{-2\alpha\tau}t_1^2 \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial u_k \partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \Psi_j(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k + e^{-2\alpha\tau}t_1^2 \alpha \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{b}_i}{\partial u_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) d_j + \\
& + \frac{1}{2} \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) c_j^1 c_k^1 + \alpha e^{-\alpha\tau} t_1 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r \frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial x_j \partial u_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) d_k c_j^1 + \\
& + \frac{1}{2} \alpha e^{-3\alpha\tau} t_1^3 \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \dots \\
& \dots + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-2} \frac{1}{k!l!} D^{|k|+|l|} g_i(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) (c_1^1 - e^{-\alpha\tau} t_1 \Psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_1} \times \dots \\
& \dots \times (c_n^1 - e^{-\alpha\tau} t_1 \Psi_n(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_n} t_1^l + \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-2} \frac{1}{k!l! \partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \frac{\partial^{k+l+1}}{\partial u_1 \dots \partial u_r \partial t^l} \bar{b}_i(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{t}_1) (c_1^1 - e^{-\alpha\tau} t_1 \Psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_1} \times \dots \\
& \dots \times (c_n^1 - e^{-\alpha\tau} t_1 \Psi_n(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_n} d_1 \times \dots \times d_r t_1^l + \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-1} \frac{1}{k!l!} D^{|k|+|l|} g_i(\tilde{c}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{t}_1) (c_1^1 - t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_1} \times \dots \\
& \times (c_n^1 - t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_n} e^{-l\tau} t_1^l + \\
& + \alpha t_1 e^{-\alpha\tau} \sum_{|k|+l=2n-1} \frac{1}{k!l! \partial t^l} \frac{\partial^{k+l+1}}{\partial u_1, \dots, \partial u_r} \bar{b}_i(\tilde{c}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{t}_1) (c_1^1 - t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi(\mathbf{0}, \varepsilon(t_1) \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_1} \times \dots \\
& \times (c_n^1 - t_1 e^{-\alpha\tau} \Psi(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1)^{k_n} d_1 \dots d_r e^{-l\tau} t_1^l.
\end{aligned}$$

В результате преобразований (2.20) получим аналог системы (2.21). Первые два слагаемых матрицы (2.22) примут вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_1(t_1) &= \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1), \quad \mathbf{Q}_1(t_1) = b_{ij}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1), \\
\mathbf{P}_2(t_1) &= e^{-\alpha\tau} t_1 \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) + \alpha \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) \right), \\
\mathbf{Q}_2(t_1) &= e^{-\alpha\tau} t_1 \left(\alpha \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial u_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \dot{\varphi}_k(t_1) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \bar{b}_i}{\partial u_j \partial x_k}(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, t_1) \Psi_k(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{0}, t_1) \right).
\end{aligned}$$

Далее находим $t_1 = \bar{t}$ из условия указанного в п. 5 решения задачи 1 и строим вспомогательную систему (2.26), (2.27) с учетом конкретизации матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$. Далее решаются задачи $1, \dots, k$ по алгоритмам, приведенным выше, с учетом конкретизации правой части системы (1.1): $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}$.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОДНОЗВЕННЫМ МАНИПУЛЯТОРОМ

В качестве иллюстрации предложенного метода рассмотрим задачу управления однозвенным роботом-манипулятором при переносе груза в заданную точку. В соответствии с [20], система уравнений, описывающая движение манипулятора с учетом возмущений имеет вид

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -a_2 \sin x_1 - a_1 x_2 + u,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

где x_1 — угол отклонения манипулятора от вертикальной оси, x_2 — скорость изменения угла отклонения, $a_1 = \bar{\alpha} L^{-2} m_1^{-1}$, $m_1 = m_0 + \frac{M}{3}$, $a_2 = g L^{-1} (m_0 + \frac{M}{2}) m_1^{-1}$, g — ускорение свободного падения, $\bar{\alpha}$ — коэффициент трения, m_0 — масса переносимого груза, L — длина манипулятора, M — масса манипулятора, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^T$. Рассмотрим граничные условия

$$\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}, \quad u(0) = 0, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{0}, \quad u(1) = 0. \tag{5.2}$$

После решения задачи Коши для системы (5.1) с начальными данными (5.2) на промежутке $[0, \bar{t}]$ при $u = 0$ будем иметь функцию $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T$, вектор состояния $\bar{\mathbf{x}}_1 = (\bar{x}_1^1, \bar{x}_1^2)^T$, $\bar{x}_1^1 = \varphi_1(\bar{t})$, $\bar{x}_1^2 = \varphi_2(\bar{t})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (0, 1)^T$,

$g_1(\mathbf{x}) = x_1, g_2(\mathbf{x}) = -a_2 \sin x_1 - a_1 x_2$. Вспомогательная система (2.7) и условия (2.8) (при $\varepsilon(t_1) = 1$) для задачи (5.1), (5.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{db_1}{dt} &= b_2 - \bar{x}_2, \\ \frac{db_2}{dt} &= -a_2 \sin(b_1 - \bar{x}_1 + \varphi_1(t)) - a_1 b_2 + a_1 \bar{x}_2 + a_2 \sin \varphi_1(t) + u, \\ \Psi(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, 0, t_1) &= (\psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, 0, t_1), \psi_2(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, 0, t_1))^T, \\ \psi_1(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, 0, t_1) &= -\bar{x}_2, \psi_2(\mathbf{0}, \varepsilon \bar{\mathbf{x}}_1, 0, t_1) = a_1 \varphi_2(t_1) + a_2 \sin \varphi_1(t_1), \\ b_1(0) &= \varphi_1(\bar{t}), \quad b_2(0) = \varphi_2(\bar{t}), \quad u(0) = 0, \quad b_i(t) \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \quad u(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_1. \end{aligned}$$

После замены (2.9) (при $t_1 = \bar{t}$) получим аналог системы (2.10) и матриц

$$\begin{aligned} \frac{dc_1}{d\tau} &= \bar{t} a e^{-\alpha \tau} c_2 - \bar{t} a e^{-\alpha \tau} \varphi_2(\bar{t}), \\ \frac{dc_2}{d\tau} &= -\bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_2 \sin(c_1 - \varphi_1(\bar{t}) + \bar{\varphi}_1(\tau)) - \bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_1 c_2 + \\ &+ \bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_1 \varphi_2(\bar{t}) + \bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_2 \sin \bar{\varphi}_1(\tau) + \bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_2 \sin \bar{\varphi}_1(\tau) + \bar{t} a e^{-\alpha \tau} d, \\ \frac{d}{d\tau} d &= v, \\ \bar{\varphi}_1(\tau) &= \varphi_1(t(\tau)), \quad c_1(\tau) = b_1(t(\tau)), \quad c_2(\tau) = b_2(t(\tau)), \\ d(\tau) &= u(t(\tau)), \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$c_1(0) = \bar{x}_1^1, \quad c_2(0) = \bar{x}_1^2, \quad d(0) = 0, \quad c_i(\tau) \rightarrow 0, \quad v(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2. \tag{5.4}$$

Для решения задачи (5.3), (5.4) выполним замены переменных $c_2(\tau), c_1(\tau)$ по формулам

$$c_2(\tau) = c_2^{(1)}(\tau) - \bar{t} e^{-\alpha \tau} a_1 \varphi_2(\bar{t}) - \bar{t} e^{-\alpha \tau} a_2 \sin \varphi_1(\bar{t}), \quad c_1(\tau) = c_1^{(1)}(\tau) + \bar{t} e^{-\alpha \tau} \varphi_2(\bar{t}). \tag{5.5}$$

В результате система (5.3) примет вид

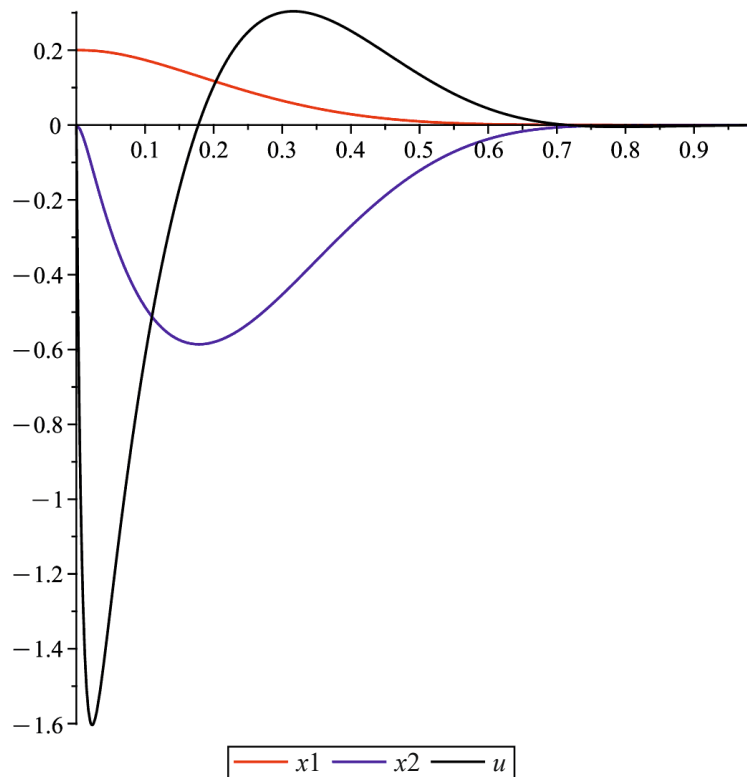
$$\begin{aligned} \frac{dc_1^{(1)}}{d\tau} &= \bar{t} a e^{-\alpha \tau} c_2^{(1)} - \bar{t}^2 e^{-2\alpha \tau} (a_1 \varphi_2(\bar{t}) + a_2 \sin \varphi_1(\bar{t})), \\ \frac{dc_2^{(1)}}{d\tau} &= -a e^{-\alpha \tau} \bar{t} a_2 \sin(c_1^{(1)} + \bar{t} e^{-\alpha \tau} \varphi_2(\bar{t}) - \varphi_1(\bar{t}) + \bar{\varphi}_1(\tau)) - \\ &- a e^{-\alpha \tau} \bar{t} a_1 c_2^{(1)} - \alpha \bar{t}^2 e^{-2\alpha \tau} a_1 \varphi_2(\bar{t}) - \alpha \bar{t}^2 e^{-2\alpha \tau} a_2 \sin \varphi_1(\bar{t}) + a e^{-\alpha \tau} d, \\ \frac{d}{d\tau} d &= v. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Линейная часть системы (5.6) может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{c}}}{d\tau} &= a e^{-\alpha \tau} \bar{P} \bar{\mathbf{c}} + a e^{-\alpha \tau} \bar{\mathbf{Q}} v, \quad \bar{\mathbf{c}} = (c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, d)^T, \\ \bar{P} &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{t} a e^{-\alpha \tau} & 0 \\ -\bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_2 & -\bar{t} a e^{-\alpha \tau} a_1 & \bar{t} a e^{-\alpha \tau} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{t} a e^{-\alpha \tau} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

После решения задачи стабилизации системы (5.7) по алгоритму, предложенному в [19], и перехода к исходным зависимым и независимым переменным по формулам (2.9), (2.11), (5.5) будем иметь закон вспомогательного управления в исходных переменных x_1, x_2, t :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}(t) &= M(t) \bar{\mathbf{c}} + \bar{\mathbf{v}}(t), \quad \bar{\mathbf{c}} = (x_1, x_2, u)^T, \\ \bar{M}(t) &= M(\tau(t)) = \begin{pmatrix} -(\bar{t} - t) a_1 a_2 \bar{t} a + 3 a a_2 + 6 a_2 - \frac{1}{\alpha^2 \bar{t}^2} (\bar{t} - t)^{-2} (8 \bar{t}^3 \alpha^3 + 24 \bar{t}^2 \alpha^2 + 22 \bar{t} \alpha + 6) \\ -a_1^2 \bar{t} a + a_2 (\bar{t} - t) \bar{t} a + 3 a_1 \bar{t} a + 6 a_1 - \frac{1}{\alpha} (\bar{t} - t)^{-1} (7 \bar{t}^2 \alpha^2 + 18 \bar{t} \alpha + 11) \\ a_1 \alpha \bar{t} (\bar{t} - t) - 3 \alpha \bar{t} - 6 \end{pmatrix}^T, \\ \bar{\mathbf{v}}(t) &= \bar{M}(t) ((t - \bar{t}) \varphi_2(\bar{t}), (\bar{t} - t) (a_1 \varphi_2(\bar{t}) + a_2 \sin \varphi_1(\bar{t}), 0)^T. \end{aligned} \tag{5.8}$$



Фиг. 1.

На заключительном этапе находим решение задачи Коши для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_2 - a_2 \sin x_1 + u, \\ \dot{u} &= \bar{v}(t),\end{aligned}$$

замкнутой вспомогательным управлением (5.8), на промежутке $[0, 99]$ с начальными данными: $x_1(0) = x_1$, $x_2(0) = x_2$, $d(0) = 0$. В процессе численного моделирования находилось решение задачи (5.1), (5.2) при $C = 2$, $x_1 = 0.2$ рад, $x_2 = 0$ рад/сек, $\bar{\alpha} = 0.1$, $\alpha = 0.25$, $L = 15$ м, $M = 20$ кг, $m_0 = 1$ кг, $\bar{t} = 1$, $g = 9.8$.

На фиг. 1 представлены графики функций фазовых координат $x_1(t)$, $x_2(t)$ и управления $u(t)$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты решения задачи управления роботом-манипулятором и ее численное моделирование показывают, что предложенный в работе метод может быть применен при решении конкретных практических задач. В том числе при решении задачи глобальной стабилизации на конечном промежутке времени широкого класса нелинейных управляемых систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grasse K.A. On the relation between small-time local controllability and normal self-reachability // Math. Control Signal systems. 1992. V. 5. P. 41–66.
2. Елкин В.И. Редукция нелинейных управляемых систем. М.: Наука, 1997.
3. Krastanov M.I. A necessary condition for small-time local controllability // J. of dynamic and control systems. 1998. V. 4. P. 425–456.
4. Krastanov M, Quincampoix M. Local small time controllability and attainability of a set for nonlinear control system // ESEAIM Control, Optimization and Calculus of variations. 2001. V. 6. P. 499–516.
5. Krastanov M.I. A sufficient condition for small-time local controllability // SIAM J.Control Optim. 2009. V. 48. Issue 4. P. 2296–2322.

6. *Cesar O. Agullar, Andrew D. Lewis* Small-Time Local Controllability for a Class of Homogeneous Systems // SIAM J. of control and Optimization. 2012. V. 50. Issue. 3. P. 1502–1517.
7. *Крищенко А.П., Фетисов Д.А.* Терминальная задача для многомерных аффинных систем // Докл. АН. 2013. Т. 452. № 2. С. 144–149.
8. *Крищенко А.П., Фетисов Д.А.* Преобразование аффинных систем и решение задач терминального управления // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2013. № 2. С. 3–16.
9. *Fetisov D.A.* Terminal control problem for affine systems. // Diff. Equa. 2013. V. 49. № 11. P. 1378–1388.93C35.
10. *Крищенко А.П., Фетисов Д.А.* Задача терминального управления для аффинных систем // Дифференц. ур-ния. 2013. Т. 49. № 11. С. 1410–1420.
11. *Фетисов Д.А.* Решение терминальных задач для аффинных систем квазиканонического вида на основе орбитальной линеаризации // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 12. С. 1660–1668.
12. *Фетисов Д.А.* Решение терминальных задач для аффинных систем с векторным управлением на основе орбитальной линеаризации // Матем. и матем. моделирование. 2015. С. 17–31.
13. *Cesar O. Aquilar, A. Di. Lewis* Small-time controllability of homogeneous systems // Engng Mathematics. 2015. P. 1–17.
14. *Hermes H.* Lie algebras of vector fields and local approximation of attainable sets // SIAM J. Control Opt. 1978. V. 16. P. 715–727.
15. *Фетисов Д.А.* О построении решений терминальных задач для многомерных аффинных систем квазиканонического вида // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 12. С. 1709–1720.
16. *Saber Jafarpour* On smaii-time local controllability // Optimization and Control. 2019. V. 7. P. 1–22.
17. *Krastanov M., Nikolova N.* A necessary condition for small-time local controllability // Automatica. 2021. V. 124. Article ID 109258.5P.
18. *Krastanov M., Nikolova M.* On the small-time local controllability // Systems and Control Letters. 2023. V. 177. Article ID.105535.
19. *Квитко А.Н.* Об одном методе решения локальной граничной задачи для нелинейной стационарной управляемой системы в классе дифференцируемых управлений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 4. С. 555–570.
20. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. школа, 1998.

SOLVING THE TERMINAL CONTROL PROBLEM FOR A NONLINEAR STATIONARY SYSTEM IN A LIMITED AREA

A. N. Kvitko*

199034 St. Petersburg, Universitetskaya nab., 7-9, St. Petersburg State University. University, Russia

*e-mail: alkvit46@mail.ru, a.kvitko@spbu.ru

Received: 16.05.2024

Revised: 28.05.2024

Accepted: 28.06.2024

Abstract. An algorithm is proposed that is sufficiently convenient for numerical implementation to construct a differentiable control function that guarantees the transfer of a wide class of nonlinear stationary systems of ordinary differential equations from the initial state to the origin of coordinates over an unfixed period of time. A constructively sufficient Kalman type condition has been found to guarantee the specified transfer. The effectiveness of the algorithm is obvious in solving a specific practical problem and its numerical modeling.

Keywords: controllability, boundary conditions, stabilization.