

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© 2024 г. А.И. Федотов^{1,*}

¹420111 Казань, ул. Карла Маркса, 10, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, Россия

*e-mail: fedotovkazan@mail.ru

Поступила в редакцию 18.05.2024 г.

Переработанный вариант 19.05.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

В настоящее время имеется более 30 различных определений производной дробного порядка, и их число продолжает расти. Некоторые из них всего лишь “игры разума”, но другие введены для решения серьезных математических задач. В этой статье дано новое определение производной дробного порядка, основанного на обобщении формулы дифференцирования полиномов Якоби. Это позволило ввести шкалу систем ортогональных полиномов, замыканиями которых являются пространства Соболева. Использование этих производных позволило поставить задачу решения сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром Коши на разомкнутом контуре. Доказано существование и единственность решения таких уравнений, обоснован метод Галеркина для их приближенного решения. Доказана сходимость метода, получены оценки погрешности приближенных решений. Библ. 17.

Ключевые слова: производные дробного порядка, сингулярные интегродифференциальные уравнения, метод Галеркина.

DOI: 10.31857/S0044466924100032, EDN: KAOGET

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к проблемам дробного дифференцирования и интегрирования в математике, физике и смежных дисциплинах постоянно растет, и к настоящему времени можно констатировать, что имеется две параллельно развивающихся теории: дробное дифференцирование и интегрирование периодических функций и дробное дифференцирование и интегрирование непериодических функций, то есть функций определенных на разомкнутых контурах. И если для периодического случая теория дробного дифференцирования и интегрирования имеет вполне законченную форму, то в непериодическом случае нет даже единого общепризнанного определения дробной производной. Даже в фундаментальной монографии [1] имеется несколько определений дробной производной для непериодических функций. И к настоящему моменту имеется уже более 30 таких определений. Каждое определение имеет свои преимущества и недостатки, для преодоления которых вводятся все новые определения. Укажем хотя бы на определение “удобной производной”, появившейся сравнительно недавно в [2] и нашедшей уже много последователей.

Такое обилие определений дробной производной с одной стороны и необходимость дробных производных для прикладных исследований с другой, приводит к необходимости очертить рамки допустимости определений, т.е. ввести критерии их корректности. Такие критерии были сформулированы в работе [3] и позже повторены в современной формулировке в работе [4]. Основными критериями являются следующие:

- а) если функция аналитическая, то ее производная тоже должна быть аналитической;
- б) оператор дробного дифференцирования должен быть линейным;
- в) при натуральных значениях порядка дифференцирования оператор должен совпадать с обычным оператором дифференцирования.

Последнее требование означает, что, как указал Эйлер [3], возникает ситуация, похожая на задачу интерполирования. Имеется система операторов целочисленного дифференцирования, требуется связать эти операторы оператором допускающим дифференцирование любого действительного порядка. И так же как в случае

интерполирования, когда имеется сколь угодно много кривых, соединяющих заданные точки, имеется бесконечно много способов - о чем писал Лейбниц в письме Лопиталю - определить оператор дробного дифференцирования, совпадающий при целых значениях порядка дифференцирования с обычным оператором дифференцирования. Все такие операторы должны считаться корректно определенными. При этом важно понимать, что операторы целочисленного дифференцирования являются частными случаями операторов дробного дифференцирования, и поэтому обладают свойствами, которыми операторы дробного дифференцирования могут и не обладать. И вопрос тогда уже не столько в корректности определения оператора дробного дифференцирования, а в выборе такого оператора, который бы наилучшим образом подходил для решения конкретной задачи.

В работе [5] автор определил оператор дробного дифференцирования интерполируя операторы целочисленного дифференцирования сплайнами первого порядка. Это позволило поставить задачу решения интегродифференциального уравнения дробного порядка, предложить квадратурно-разностный метод для его решения и обосновать его. Легко проверить, что для такого определения все условия корректности определения а)–в) выполнены. Это означает, что такое определение должно считаться корректным.

В данной работе оператор дробного дифференцирования определен интерполированием показателей степеней весовой функции. Это позволило сформулировать задачу решения сингулярного интегродифференциального уравнения с дробными производными, предложить метод Галеркина для его решения и обосновать этот метод. И для этого определения оператора дробного дифференцирования все условия корректности выполнены, поэтому и это определение оператора должно считаться корректным.

Метод Галеркина в этой работе применяется к достаточно простому уравнению. Однако аналогичные уравнения с целочисленными операторами дифференцирования рассматривались в нескольких работах. Например, в [6] рассмотрен метод Галеркина, основанный на аппроксимации точного решения линейными комбинациями полиномов Лежандра, а в [7] предложен интересный смешанный метод для решения того же уравнения. Оба метода обоснованы в работах автора [8] и [9].

В данной работе сделан очередной шаг в развитии теории и приближенных методов решения сингулярных интегродифференциальных уравнений на разомкнутом контуре: установлены условия однозначной разрешимости таких уравнений, доказана сходимость метода Галеркина и получены оценки погрешности.

Структура статьи следующая. В разд. 2 даются основные определения и обозначения. Раздел 3 содержит вспомогательные результаты, некоторые свойства введенных полиномов и известные результаты необходимые для доказательства однозначной разрешимости точного уравнения и сходимости приближенных решений. В разд. 4 и 5 мы определяем и исследуем свойства весовых пространств Соболева и соответствующих сопряженных пространств. Раздел 6 содержит некоторые новые факты о сингулярных интегродифференциальных уравнениях Коши необходимые для дальнейших исследований. В разд. 7 представлено сингулярное интегродифференциальное уравнение Коши, исследованы условия его однозначной разрешимости и получена оценка оператора левой части этого уравнения. В разд. 8 описан метод Галеркина для решения вышеуказанного уравнения. В этом разделе, кроме того, показано, что метод сходится и получена оценка погрешности. Наконец, разд. 9 содержит численный пример, который подтверждает теоретические результаты статьи.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Будем, как обычно, обозначать $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0$ множество натуральных чисел дополненных нулем, а $\mathbb{R}$ множество действительных чисел.

Функции, за исключением $\{P_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ – полиномов Лежандра, $\{P_l^{(\mu, \nu)}\}_{l \in \mathbb{N}_0}$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu > -1$, $\nu > -1$, – полиномов Якоби, $\{T_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ – полиномов Чебышёва первого рода и $\{U_l\}_{l \in \mathbb{N}_0}$ – полиномов Чебышёва второго рода, будем обозначать строчными латинскими буквами. Пространства функций и операторы действующие в этих пространствах будем обозначать заглавными латинскими буквами.

Обозначим

$$p(\alpha, t) = (1 - t^2)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}, \quad t \in (-1, 1), \quad (1)$$

весовую функцию, а

$$v(l, 0, \alpha, t) = \frac{\Gamma(l + 2\alpha + 1)}{2^\alpha \Gamma(l + \alpha + 1)} P_l^{(\alpha, \alpha)}(t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}, \quad t \in [-1, 1], \quad (2)$$

систему нормированных полиномов Якоби ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ с весом (1). При $\alpha = -\frac{1}{2}$ полиномы $v(l, 0, -\frac{1}{2}, t)$, $l \in \mathbb{N}_0$, $t \in [-1, 1]$, совпадают с нормированными полиномами Чебышёва первого рода

$$v(0, 0, -\frac{1}{2}, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} T_0, \quad v(l, 0, -\frac{1}{2}, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi l}} T_l(t), \quad l \in \mathbb{N}, \quad t \in [-1, 1],$$

$$T_l(t) = \cos(l \arccos t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [-1, 1].$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ полиномы $v(l, 0, \frac{1}{2}, t)$, $l \in \mathbb{N}$, $t \in [-1, 1]$, совпадают с нормированными полиномами Чебышёва второго рода

$$v(l, 0, \frac{1}{2}, t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} U_l(t), \quad U_l(t) = \frac{\sin((l+1) \arccos t)}{\sin(\arccos t)}, \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [-1, 1].$$

А при $\alpha = 0$ полиномы $v(l, \frac{1}{2}, 0, t)$, $l \in \mathbb{N}$, $t \in [-1, 1]$, совпадают с полиномами Лежандра [10]

$$v(l, \frac{1}{2}, 0, t) = P_l(t) = \sum_{n=0}^l g_{2n} \cos((l-2n) \arccos t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [-1, 1],$$

$$g_{2n} = \frac{(2n-1)!!(2l-2n-1)!!}{(2n)!!(2l-2n)!!}, \quad n = 0, 1, \dots, l.$$

Здесь полагаем $(-1)!! = 0!! = 1$.

Для определения производной дробного порядка $\beta \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \leq \beta$, от полиномов (2) формально обобщим формулу дифференцирования полиномов Якоби [10]

$$D^m P_{l+m}^{(\mu, \nu)}(t) = \frac{\Gamma(l+2m+\mu+\nu+1)}{2^m \Gamma(l+m+\mu+\nu+1)} P_l^{(m+\mu, m+\nu)}(t),$$

$$l, m \in \mathbb{N}_0, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}, \quad \mu > -1, \nu > -1, \quad t \in [-1, 1],$$

на случай оператора дифференцирования порядка β

$$D^\beta v(l, \beta, \alpha, t) = \frac{\Gamma(l+\beta+2\alpha+1)}{2^\alpha \Gamma(l+\beta+\alpha+1)} D^\beta P_{l+\beta}^{(\alpha, \alpha)}(t) = \frac{\Gamma(l+2(\alpha+\beta)+1)}{2^{\alpha+\beta} \Gamma(l+\alpha+\beta+1)} P_l^{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}(t) = v(l, 0, \alpha+\beta, t).$$

Наконец, для произвольных $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \leq \beta$, $0 \leq \gamma < 1$, производная порядка β от полинома $v(l, \gamma, \alpha, t)$ будет иметь вид¹

$$D^\beta v(l, \gamma, \alpha, t) = \frac{\Gamma(l+\gamma-\beta+2(\alpha+\beta)+1)}{2^{\alpha+\beta} \Gamma(l+\gamma-\beta+\alpha+\beta+1)} P_{l+\gamma-\beta}^{(\alpha+\beta, \alpha+\beta)}(t) = v(l + [\gamma - \beta], \{\gamma - \beta\}, \alpha + \beta, t), \quad l + [\gamma - \beta] \in \mathbb{N}_0.$$

В частности,

$$D^{\frac{1}{2}} v(l+1, 0, -\frac{1}{2}, t) = v(l, \frac{1}{2}, 0, t) = P_l(t),$$

$$D^{\frac{1}{2}} P_l(t) = D^{\frac{1}{2}} v(l, \frac{1}{2}, 0, t) = v(l, 0, \frac{1}{2}, t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [-1, 1],$$

то есть производными порядка $\frac{1}{2}$ от нормированных полиномов Чебышёва первого рода являются полиномы Лежандра, а производными порядка $\frac{1}{2}$ от полиномов Лежандра являются нормированные полиномы Чебышёва второго рода.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим некоторые свойства полиномов

$$v(l, \gamma, \alpha, t) = \frac{\Gamma(l+\gamma+2\alpha+1)}{2^\alpha \Gamma(l+\gamma+\alpha+1)} P_l^{(\alpha, \alpha)}(t), \quad (3)$$

$$l \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \quad -\frac{1}{2} \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1, \quad t \in [-1, 1],$$

и операторов дробного дифференцирования D^β , $\beta \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \leq \beta$.

Лемма 1. Для любых фиксированных $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \leq \alpha$, $0 \leq \gamma < 1$, полиномы $v(l, \gamma, \alpha, t)$, $l \in \mathbb{N}_0$, $t \in [-1, 1]$, образуют ортогональную систему полиномов с весом $p(\alpha, t) = (1-t^2)^\alpha$ на $[-1, 1]$, причем

$$\int_{-1}^1 p(\alpha, \tau) v^2(l, \gamma, \alpha, \tau) d\tau = \frac{\Gamma^2(l+\gamma+2\alpha+1) \Gamma^2(l+\alpha+1)}{(l+\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma^2(l+\gamma+\alpha+1) \Gamma(l+2\alpha+1) l!}, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

¹Здесь и далее $[\alpha]$ означает целую часть, а $\{\alpha\}$ — дробную часть числа α .

Доказательство. Ортогональность системы полиномов $v(l, \gamma, \alpha, t)$, $l \in \mathbb{N}_0$, $t \in [-1, 1]$, при любых фиксированных $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \leq \alpha$, $0 \leq \gamma \leq 1$, сразу следует из определения (3) и ортогональности системы полиномов Якоби $\{P_l^{(\alpha, \alpha)}\}_{l \in \mathbb{N}_0}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \alpha$, с весом $p(\alpha, t)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Так как для системы полиномов Якоби $\{P_l^{(\mu, \nu)}\}_{l \in \mathbb{N}_0}$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, $\mu > -1$, $\nu > -1$, выполняются равенства [10]

$$\int_{-1}^1 (1-\tau)^\mu (1+\tau)^\nu (P_l^{(\mu, \nu)}(\tau))^2 d\tau = \frac{2^{\mu+\nu+1} \Gamma(l+\mu+1) \Gamma(l+\nu+1)}{(2l+\mu+\nu+1) \Gamma(l+\mu+\nu+1) l!}, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

то, учитывая (3), найдем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(\alpha, \tau) v^2(l, \gamma, \alpha, \tau) d\tau &= \frac{\Gamma^2(l+\gamma+2\alpha+1)}{2^{2\alpha} \Gamma^2(l+\gamma+\alpha+1)} \int_{-1}^1 p(\alpha, \tau) (P_l^{(\alpha, \alpha)}(\tau))^2 d\tau = \\ &= \frac{\Gamma^2(l+\gamma+2\alpha+1) 2^{2\alpha+1} \Gamma^2(l+\alpha+1)}{2^{2\alpha} \Gamma^2(l+\gamma+\alpha+1) 2(l+\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma(l+2\alpha+1) l!} = \\ &= \frac{\Gamma^2(l+\gamma+2\alpha+1) \Gamma^2(l+\alpha+1)}{(l+\alpha+\frac{1}{2}) \Gamma^2(l+\gamma+\alpha+1) \Gamma(l+2\alpha+1) l!}, \quad l \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 следует, в частности, что справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(-\frac{1}{2}, \tau) v^2(l+1, 0, -\frac{1}{2}, \tau) d\tau &= \frac{1}{(l+1)^2}, \\ \int_{-1}^1 p(0, \tau) v^2(l, \frac{1}{2}, 0, \tau) d\tau &= \frac{1}{l+\frac{1}{2}}, \\ \int_{-1}^1 p(\frac{1}{2}, \tau) v^2(l, 0, \frac{1}{2}, \tau) d\tau &= 1, \quad l \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Для дальнейшего изложения нам понадобятся еще 2 леммы. Доказательство первой из них имеется, например, в [11], второй – в [12].

Лемма 2. Пусть A и B – линейные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Z . Предположим, что оператор A обратим и выполнено условие $\|B\|_{X \rightarrow Z} \|A^{-1}\|_{Z \rightarrow X} < 1$. Тогда оператор $A+B: X \rightarrow Z$ также обратим, и справедлива оценка

$$\|(A+B)^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \leq \frac{\|A^{-1}\|_{Z \rightarrow X}}{1 - \|B\|_{X \rightarrow Z} \|A^{-1}\|_{Z \rightarrow X}}.$$

Вновь обозначим X и Z банаховы пространства и пусть $X_n \subset X$, $Z_n \subset Z$, $n = 1, 2, \dots$, их подпространства. Рассмотрим уравнения

$$Kx = z, \quad K: X \rightarrow Z, \quad (4)$$

$$K_n x_n = z_n, \quad K_n: X_n \rightarrow Z_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где K и K_n , $n = 1, 2, \dots$, линейные ограниченные операторы.

Лемма 3. Предположим, что оператор $K: X \rightarrow Z$ обратим, и операторы K_n , $n = 1, 2, \dots$, равномерно сходятся к нему

$$\|K - K_n\|_{X_n \rightarrow Z} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Если $\dim X_n = \dim Z_n$, $n = 1, 2, \dots$, то для всех n , удовлетворяющих условию

$$u_n = \|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \|K - K_n\|_{X_n \rightarrow Z} < 1,$$

приближенные уравнения (5) имеют единственные решения $x_n^* \in X_n$ для любых правых частей $z_n \in Z_n$, и верна оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \frac{\|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X}}{1 - u_n} (\|z - z_n\|_Z + u_n \|z\|_Z),$$

где $x^* = K^{-1}z$ – точное решение уравнения (4).

4. ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

Зафиксируем $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \leq \alpha$, $0 \leq s$, $0 \leq \gamma < 1$, и обозначим $H_{\alpha, \gamma}^s$ пространство Соболева функций являющееся замыканием множества полиномов $v(l, \gamma, \alpha, \tau)$, $l \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in [-1, 1]$, относительно нормы

$$\|x\|_{H_{\alpha, \gamma}^s} = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{x}^2(l, \gamma, \alpha) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad x \in H_{\alpha, \gamma}^s, \quad l = \begin{cases} l, & l \in \mathbb{N}, \\ 1, & l = 0, \end{cases} \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad (6)$$

$$\hat{x}(l, \gamma, \alpha) = h(l, \gamma, \alpha) \int_{-1}^1 p(\alpha, \tau) x(\tau) v(l, \gamma, \alpha, \tau) d\tau,$$

$$h(l, \gamma, \alpha) = \frac{\Gamma(l + \gamma + \alpha + 1) \sqrt{(l + \alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(l + 2\alpha + 1) l!}}{\Gamma(l + \gamma + 2\alpha + 1) \Gamma(l + \alpha + 1)}, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

$$x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \hat{x}(l, \gamma, \alpha) h(l, \gamma, \alpha) v(l, \gamma, \alpha, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Пространство $H_{\alpha, \gamma}^s$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle_{\alpha, \gamma}^s = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{x}(l, \gamma, \alpha) \hat{y}(l, \gamma, \alpha), \quad x, y \in H_{\alpha, \gamma}^s,$$

которое связано с нормой (6) равенством

$$\|x\|_{H_{\alpha, \gamma}^s} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\alpha, \gamma}^s}, \quad x \in H_{\alpha, \gamma}^s.$$

Параметр s является параметром гладкости функций входящих в пространство $H_{\alpha, \gamma}^s$. Как показано в [13], при $s > \frac{1}{2}$ пространство $H_{\alpha, \gamma}^s$ вкладывается в пространство непрерывных функций, при $s > \frac{3}{2}$ — в пространство функций, первая производная которых непрерывна и так далее.

5. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Вновь зафиксируем $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \leq \alpha$, $0 \leq s$, $0 \leq \gamma < 1$, и обозначим

$$w(l, \gamma, -\alpha, \tau) = p(\alpha, \tau) v(l, \gamma, \alpha, \tau), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad \tau \in [-1, 1], \quad (7)$$

множество функций являющихся произведениями весовой функции $p(\alpha, \tau)$ и полиномов $v(l, \gamma, \alpha, \tau)$. Легко видеть, что функции (7) ортогональны на $[-1, 1]$ с весом $p(-\alpha, t)$, причем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(-\alpha, \tau) w^2(l, \gamma, -\alpha, \tau) d\tau &= \int_{-1}^1 p(\alpha, \tau) v^2(l, \gamma, \alpha, \tau) d\tau = \\ &= \frac{\Gamma^2(l + \gamma + 2\alpha + 1) \Gamma^2(l + \alpha + 1)}{(l + \alpha + \frac{1}{2}) \Gamma^2(l + \gamma + \alpha + 1) \Gamma(l + 2\alpha + 1) l!}, \quad l \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Обозначим через $H_{-\alpha, \gamma}^{s*}$ замыкание множества функций (7) относительно нормы

$$\|y\|_{H_{-\alpha, \gamma}^{s*}} = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{y}^2(l, \gamma, -\alpha) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad y \in H_{-\alpha, \gamma}^{s*}, \quad (8)$$

$$\hat{y}(l, \gamma, -\alpha) = h(l, \gamma, \alpha) \int_{-1}^1 p(-\alpha, \tau) y(\tau) w(l, \gamma, -\alpha, \tau) d\tau, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

$$y(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \hat{y}(l, \gamma, -\alpha) h(l, \gamma, \alpha) w(l, \gamma, -\alpha, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Пространство $H_{-\alpha, \gamma}^{s*}$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle x, y \rangle_{-\alpha, \gamma}^s = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{x}(l, \gamma, -\alpha) \hat{y}(l, \gamma, -\alpha), \quad x, y \in H_{-\alpha, \gamma}^{s*},$$

которое связано с нормой (8) равенством

$$\|y\|_{H_{-\alpha,\gamma}^{s*}} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{-\alpha,\gamma}^{s*}}, \quad x \in H_{-\alpha,\gamma}^{s*}.$$

Для любых $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \leq \alpha$, $0 \leq s$, $0 \leq \gamma < 1$, скалярное произведение

$$(x, y)_{\alpha,\gamma}^s = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \widehat{x}(l, \gamma, \alpha) \widehat{y}(l, \gamma, -\alpha), \quad x \in H_{\alpha,\gamma}^s, \quad y \in H_{-\alpha,\gamma}^{s*},$$

задает сопряжение между пространствами $H_{\alpha,\gamma}^s$ и $H_{-\alpha,\gamma}^{s*}$. Легко видеть, что для любых $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \leq \alpha$, $0 \leq s$, $0 \leq \gamma < 1$, выполняются соотношения $H_{\alpha,\gamma}^{s**} = H_{\alpha,\gamma}^s$, а при $\alpha = 0$ пространства $H_{0,\gamma}^s$ являются самосопряженными для любых $0 \leq s$, $0 \leq \gamma < 1$.

6. СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛ КОШИ

Обозначим через S оператор, который каждой функции $y \in H_{-\alpha,\gamma}^{s*}$, $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \leq \alpha$, $0 \leq s$, $0 \leq \gamma < 1$, ставит в соответствие сингулярный интеграл

$$(Sy)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad t \in (-1, 1), \quad (9)$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши-Лебегу. В [14] показано, что для любых $\alpha, \gamma, s \in \mathbb{R}$, $-\frac{1}{2} \leq \alpha$, $0 \leq s$, $0 \leq \gamma < 1$, оператор S ограничен в паре пространств $(H_{-\alpha,\gamma}^{s*}, H_{\alpha,\gamma}^s)$, однако вычисление сингулярного интеграла в явном виде возможно лишь в редких частных случаях. В этой связи разработано большое число квадратурных формул для приближенного вычисления таких интегралов. Эти формулы основаны на аппроксимации тем или иным способом подынтегрального выражения агрегатами допускающими точное вычисление сингулярных интегралов. Однако и здесь арсенал средств ограничен, по существу, хорошо известными формулами

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(-\frac{1}{2}, \tau) T_{l+1}(\tau) d\tau}{\tau - t} = U_l(t), \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\frac{1}{2}, \tau) U_l(\tau) d\tau}{\tau - t} = -T_{l+1}(t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in (-1, 1),$$

для сингулярных интегралов от полиномов Чебышёва первого и второго рода, которые в терминах пар пространств $(H_{\frac{1}{2},0}^{s*}, H_{\frac{1}{2},0}^s)$ и $(H_{-\frac{1}{2},0}^{s*}, H_{-\frac{1}{2},0}^s)$ будут выглядеть

$$Sw(l+1, 0, \frac{1}{2}, t) = (l+1)^{-1} v(l, 0, \frac{1}{2}, t), \quad Sw(l, 0, -\frac{1}{2}, t) = -(l+1) v(l+1, 0, -\frac{1}{2}, t), \quad l \in \mathbb{N}_0, \quad t \in (-1, 1). \quad (10)$$

В этом разделе показано, что такими значениями являются значения $\alpha = m - \frac{1}{2}$, $m \in \mathbb{N}_0$. При $m = 0$ и $m = 1$ значения сингулярных интегралов от функций $w(l, 0, m - \frac{1}{2}, t)$ указаны в (10). Следующая лемма показывает, что и для $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ сингулярные интегралы от функций $w(l, m - \frac{1}{2}, t)$ также являются полиномами.

Лемма 4. Для любых $m, l \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 2$ сингулярные интегралы $Sw(l, 0, -m + \frac{1}{2}, t)$ равны полиномам, которые выражаются через полиномы $v(j, 0, -\frac{1}{2}, t)$ по формулам

$$Sw(l, -m + \frac{1}{2}, t) = - \sum_{j=l+1}^{l+2m-1} d_{j-1} j v(j, 0, -\frac{1}{2}, t),$$

$$d_j = \int_{-1}^1 p(m - \frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, m - \frac{1}{2}, \tau) v(j, 0, \frac{1}{2}, \tau) d\tau, \quad j = l, l+1, \dots, l+2m-2.$$

Доказательство. Зафиксируем $m, l \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 2$, и представим функцию $w(l, 0, -m + \frac{1}{2}, t)$ в виде разложения

$$\begin{aligned} w(l, 0, -m + \frac{1}{2}, t) &= p(m - \frac{1}{2}, t) v(l, 0, m - \frac{1}{2}, t) = p(\frac{1}{2}, t) p(m-1, t) v(l, 0, m - \frac{1}{2}, t) = \\ &= p(\frac{1}{2}, t) \sum_{j=l}^{l+2m-2} d_j v(j, 0, \frac{1}{2}, t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$d_j = \int_{-1}^1 p(m - \frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, m - \frac{1}{2}, \tau) v(j, 0, \frac{1}{2}, \tau) d\tau, \quad j = l, l+1, \dots, l+2m-2,$$

теперь, подставляя разложение (11) в сингулярный интеграл и используя (10), получим

$$Sw(l, 0, -m + \frac{1}{2}, t) = \sum_{j=l}^{l+2m-2} d_j Sw(j, 0, -\frac{1}{2}, t) = - \sum_{j=l+1}^{l+2m-1} d_{j-1} j v(j, 0, -\frac{1}{2}, t).$$

Лемма 4 доказана.

Лемма 4 лишь констатирует тот факт, что сингулярным интегралом от функции $w(l, 0, -m + \frac{1}{2}, t)$ является полином. Вычислить коэффициенты этого полинома в разложении (11) помогают следующая

Лемма 5. *Первообразная порядка $m \in \mathbb{N}$ полинома $v(l, 0, -\frac{1}{2}, t)$ равна*

$$\frac{2^{-m}}{\prod_{j=-m+1}^{m-1} (l-j)} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m-1, l) v(l+m-2k, 0, -\frac{1}{2}, t), \quad (12)$$

где $u(k, m-1, l)$, $k = 0, 1, \dots, m$, — это полиномы с целочисленными коэффициентами порядка $m-1$, зависящие от переменной $l \in \mathbb{N}$ и определяемые рекуррентным соотношением

$$\begin{aligned} u(0, 0, l) &= u(1, 0, l) = 1, \\ u(k, m, l) &= \frac{l^2 - m^2}{m+1} \left(\frac{m-k+1}{l+m-2k} u(k, m-1, l) + \frac{k}{l+m-2k+2} u(k-1, m-1, l) \right), \\ m &\in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по m .

При $m = 1$, переходя к полиномам Чебышёва первого и второго родов, легко получить выражение

$$v(l, 0, -\frac{1}{2}, t) = \frac{1}{2l} (v(l, 0, \frac{1}{2}, t) - v(l-2, 0, \frac{1}{2}, t)). \quad (13)$$

В [15] есть соотношение, которое в терминах данной статьи выглядит как

$$D^k w(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = (-1)^k \frac{(l+k)!(2m+l+1)!}{l!(2m+l+1-k)!} w(l+k, 0, -m - \frac{1}{2} + k, t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (14)$$

Используя его, получаем, что первообразными для полиномов $v(l, 0, -\frac{1}{2}, t)$ являются полиномы

$$\frac{1}{2l} (v(l+1, 0, -\frac{1}{2}, t) - v(l-1, 0, -\frac{1}{2}, t)) = \frac{1}{2l} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} u(k, 0, l) v(l+1-2k, 0, -\frac{1}{2}, t), \quad l \in \mathbb{N},$$

что соответствует формуле (12) при $m = 1$. То есть при $m = 1$ лемма 5 верна.

Предположим, что лемма 5 верна для некоторого $m \in \mathbb{N}$, и докажем, что тогда она верна и для $m+1$. Для этого выразим в формуле (12) полиномы $v(l+m-2k, 0, -\frac{1}{2}, t)$ по формуле (13)

$$v(l+m-2k, 0, -\frac{1}{2}, t) = \frac{1}{2(l+m-2k)} (v(l+m-2k, 0, \frac{1}{2}, t) - v(l+m-2k-2, 0, \frac{1}{2}, t)).$$

Тогда первообразная для $v(l+m-2k, 0, -\frac{1}{2}, t)$ будет равна

$$\frac{1}{2(l+m-2k)} (v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t) - v(l+m-2k-1, 0, -\frac{1}{2}, t)),$$

а $m+1$ -я первообразная для полинома $v(l, 0, -\frac{1}{2}, t)$ будет равна

$$\frac{2^{-m}}{\prod_{j=-m+1}^{m-1} (l-j)} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m-1, l) \frac{1}{2(l+m-2k)} (v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t) -$$

$$\begin{aligned}
& -v(l+m-2k-1, 0, -\frac{1}{2}, t)) = \\
& = \frac{2^{-m-1}}{\prod_{j=-m+1}^{m-1} (l-j)} \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m-1, l) \frac{v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l+m-2k} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m-1, l) \frac{v(l+m-2k-1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l+m-2k} \right) = \\
& = \frac{2^{-m-1}}{\prod_{j=-m+1}^{m-1} (l-j)} \left(\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m-1, l) \frac{v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l+m-2k} - \right. \\
& \quad \left. - \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} \binom{m}{k-1} u(k-1, m-1, l) \frac{v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l+m-2k+2} \right) = \\
& = \frac{2^{-m-1}}{\prod_{j=-m+1}^{m-1} (l-j)} \left(u(0, m-1, l) \frac{v(l+m+1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l+m} - \right. \\
& \quad \left. - (-1)^m u(m, m-1, l) \frac{v(l-m-1, 0, -\frac{1}{2}, t)}{l-m} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^m v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t) \left((-1)^k \binom{m}{k} \frac{u(k, m-1, l)}{l+m-2k} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - (-1)^k \binom{m}{k-1} \frac{u(k-1, m-1, l)}{l+m-2k+2} \right) \right) = \\
& = \frac{2^{-m-1}}{\prod_{j=-m}^m (l-j)} \left(u(0, m, l) v(l+m+1, 0, -\frac{1}{2}, t) - (-1)^m u(m, m, l) v(l-m-1, 0, -\frac{1}{2}, t) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^m (-1)^k \binom{m+1}{k} \frac{l^2 - m^2}{m+1} \left(\frac{m-k+1}{l+m-2k} u(k, m-1, l) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{k}{l+m-2k+2} u(k-1, m-1, l) \right) v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t) \right) = \\
& = \frac{2^{-m-1}}{\prod_{j=-m}^m (l-j)} \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} u(k, m, l) v(l+m-2k+1, 0, -\frac{1}{2}, t).
\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Теорема 1. Для любых $m, l \in \mathbb{N}$ сингулярный интеграл с ядром Коши от функции $w(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t)$, $t \in [-1, 1]$, равен

$$\begin{aligned}
& Sw(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = 2^{-m} (l+1)(l+2m+1) \times \\
& \times \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k+1} \binom{m}{k} u(k, m-1, l+m+1) v(2m+l+1-2k, 0, -\frac{1}{2}, t).
\end{aligned}$$

Доказательство. Зафиксируем $m, l \in \mathbb{N}_0$ и найдем вначале производную порядка m от искомого интеграла. Применяя m раз представление Крикунова [16] и учитывая, что функции $w(l, -0, j - \frac{1}{2}, t)$, $j = 1, 2, \dots, m$, обращаются в ноль на концах отрезка $[-1, 1]$, получим

$$D^m Sw(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = SD^m w(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t), \quad t \in [-1, 1].$$

По формуле (14)

$$D^m w(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = (-1)^m \frac{(2m + l + 1)!}{l!(m + l + 1)!} w(l + m, 0, -\frac{1}{2}, t),$$

а значение

$$Sw(l + m, 0, -\frac{1}{2}, t) = -(l + m + 1)v(l + m + 1, 0, -\frac{1}{2}, t)$$

указано в (10), поэтому

$$D^m Sw(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = (-1)^{m+1} \frac{(2m + l + 1)!}{l!} v(l + m + 1, 0, -\frac{1}{2}, t).$$

По лемме 5 первообразной порядка m для полинома $v(l + m + 1, 0, -\frac{1}{2}, t)$ является полином

$$\frac{2^{-m}}{\prod_{j=2}^{2m} (l + j)} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} u(k, m - 1, l + m + 1) v(2m + l + 1 - 2k, 0, -\frac{1}{2}, t),$$

поэтому

$$Sw(l, 0, -m - \frac{1}{2}, t) = 2^{-m} (l + 1)(l + 2m + 1) \times \\ \times \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k+1} \binom{m}{k} u(k, m - 1, l + m + 1) v(2m + l + 1 - 2k, 0, -\frac{1}{2}, t).$$

Теорема доказана.

7. СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$x^{(\frac{3}{2})}(t) + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\frac{1}{2}, \tau) x^{(\frac{1}{2})}(\tau) d\tau}{\tau - t} = z(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \in (-1, 1), \quad (15)$$

с начальными условиями

$$\int_{-1}^1 x(\tau) d\tau = 0. \quad (16)$$

В статьях [6], [7] были предложены приближенные методы решения подобных уравнений с целочисленными производными. В работах автора [8], [9] получены достаточные условия однозначной разрешимости этих уравнений и обоснованы использованные в [6], [7], приближенные методы. В работе [17] автором обоснованы методы Галеркина и коллокаций для решения полных сингулярных интегродифференциальных уравнений с переменными коэффициентами на $(-1, 1)$. Сингулярные интегродифференциальные уравнения с производными дробного порядка рассматриваются в данной статье впервые.

Зафиксируем $s \in \mathbb{R}$, $s > \frac{1}{2}$, и обозначим X замыкание множества полиномов $v(l + 1, \frac{1}{2}, 0, \tau)$, $l \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in [-1, 1]$, относительно нормы

$$\|x\|_X = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{x}^2(l + 1, \frac{1}{2}, 0) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad x \in X,$$

$$\hat{x}(l + 1, \frac{1}{2}, 0) = h(l, 0, \frac{3}{2}) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) x^{(\frac{3}{2})}(\tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

$$x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \hat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Обозначим Z замыкание множества полиномов $v(l, 0, \frac{3}{2}, t)$, $l \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in [-1, 1]$, относительно нормы

$$\|z\|_Z = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{z}^2(l, 0, \frac{3}{2}) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad z \in Z,$$

$$\hat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) = h(l, 0, \frac{3}{2}) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) z(\tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

$$z(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \hat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Задачу (15), (16) запишем в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$Kx \equiv D^{\frac{3}{2}}x + \lambda SpD^{\frac{1}{2}}x = z, \quad K : X \rightarrow Z, \quad (17)$$

$$(SpD^{\frac{1}{2}}x)(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{p(\frac{1}{2}, \tau) x(\frac{1}{2})(\tau) d\tau}{\tau - t}, \quad t \in (-1, 1).$$

Достаточные условия однозначной разрешимости задачи (15), (16) устанавливает

Теорема 2. Для всех $|\lambda| < 2$ операторное уравнение (17), а следовательно и задача (15), (16) однозначно разрешимы при любой правой части $z \in Z$, и верна оценка

$$\|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \leq \frac{2}{2 - |\lambda|}.$$

Доказательство. Докажем вначале, что оператор $D^{\frac{3}{2}} : X \rightarrow Z$ и обратный к нему оператор $D^{-\frac{3}{2}} : Z \rightarrow X$ являются взаимнооднозначными и их нормы равны

$$\|D^{\frac{3}{2}}\|_{X \rightarrow Z} = \|D^{-\frac{3}{2}}\|_{Z \rightarrow X} = 1.$$

Для этого рассмотрим уравнение

$$D^{\frac{3}{2}}x = z, \quad x \in X, \quad z \in Z, \quad (18)$$

$$x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \hat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad z(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \hat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

с известными коэффициентами $\hat{z}(l, 0, \frac{3}{2})$, $l \in \mathbb{N}_0$, и искомыми коэффициентами $\hat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0)$, $l \in \mathbb{N}_0$. Уравнение (18) эквивалентно бесконечной системе уравнений

$$\hat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) = \hat{z}(l, 0, \frac{3}{2}), \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

а его решением будет функция

$$x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \hat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Найдем норму функции $D^{\frac{3}{2}}x$ в пространстве Z . Так как

$$(D^{\frac{3}{2}}x)(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \hat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

то

$$\|D^{\frac{3}{2}}x\|_Z = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \hat{x}^2(l+1, \frac{1}{2}, 0) \right\}^{\frac{1}{2}} = \|x\|_X.$$

Это означает, что оператор $D^{\frac{3}{2}}$ взаимнооднозначен и его норма равна 1.

Рассмотрим теперь уравнение

$$D^{-\frac{3}{2}}z = x, \quad z \in Z, \quad x \in X, \quad (19)$$

$$z(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

с известными коэффициентами $\widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0)$, $l \in \mathbb{N}_0$, и искомыми коэффициентами $\widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2})$, $l \in \mathbb{N}_0$. Уравнение (18) эквивалентно бесконечной системе уравнений

$$\widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) = \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0), \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

а его решением будет функция

$$z(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Найдем норму функции $D^{-\frac{3}{2}}z$ в пространстве X . Так как

$$(D^{-\frac{3}{2}}z)(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

то

$$\|D^{-\frac{3}{2}}z\|_X = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \widehat{z}^2(l, 0, \frac{3}{2}) \right\}^{\frac{1}{2}} = \|z\|_Z.$$

Это означает, что оператор $D^{-\frac{3}{2}}$ также взаимнооднозначен и его норма равна 1. Равенство

$$\|D^{\frac{3}{2}}\|_{X \rightarrow Z} = \|D^{-\frac{3}{2}}\|_{Z \rightarrow X} = 1$$

доказано.

Теперь для доказательства обратимости оператора $K : X \rightarrow Z$ по лемме 2 достаточно оценить норму оператора $SpD^{\frac{1}{2}} : X \rightarrow Z$. Для этого вновь возьмем произвольный элемент

$$x(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

применим к нему оператор $SpD^{\frac{1}{2}}$ и оценим норму функции $SpD^{\frac{1}{2}}x$ в пространстве Z

$$\|SpD^{\frac{1}{2}}x\|_Z = \left\{ \sum_{l \in \mathbb{N}_0} l^{2s} \widehat{SpD^{\frac{1}{2}}x}^2(l, 0, \frac{3}{2}) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$(D^{\frac{1}{2}}x)(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l+1, 0, \frac{1}{2}, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

а

$$p(\frac{1}{2}, \tau)(D^{\frac{1}{2}}x)(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) w(l+1, 0, -\frac{1}{2}, \tau),$$

то по теореме 1 имеем

$$(SpD^{\frac{1}{2}}x)(t) = - \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) (l+2) v(l+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau).$$

Коэффициенты Фурье функции $(SpD^{\frac{1}{2}}x)(t)$ в пространстве Z будут равны

$$\widehat{SpD^{\frac{1}{2}}x}(l, 0, \frac{3}{2}) = h(l, 0, \frac{3}{2}) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) (SpD^{\frac{1}{2}}x)(\tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau =$$

$$= -h(l, 0, \frac{3}{2}) \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \widehat{x}(k+1, \frac{1}{2}, 0) h(k, 0, \frac{3}{2}) (k+2) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(k+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau, \quad l \in \mathbb{N}_0.$$

В силу ортогональности полиномов $v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau)$ с весом $p(\frac{3}{2}, \tau)$ всем полиномам порядка меньше l и ортогональности полиномов $v(k+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau)$ с весом $p(-\frac{1}{2}, \tau)$ всем полиномам порядка меньше $k+2$ интеграл

$$\int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(k+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau = 0$$

при $k+2 < l$ и $l+4 < k+2$. Однако и среди значений $k+2 = l, l+1, l+2, l+3, l+4$ этот интеграл отличен от нуля только при $k+2 = l+1$ и при $k+2 = l+3$ и равен

$$\int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(k+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau = \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(l+1, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau = -\frac{1}{2}, \quad k+2 = l+1,$$

$$\int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(k+2, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau = \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) v(l+3, 0, -\frac{1}{2}, \tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau = \frac{l}{4(l+3)}, \quad k+2 = l+3.$$

Учитывая, что $\widehat{x}(0, \frac{1}{2}, 0) = 0$, найдем

$$\begin{aligned} \widehat{SpD^{\frac{1}{2}}}(0, 0, \frac{3}{2}) &= 0, \\ \widehat{SpD^{\frac{1}{2}}}x(l, 0, \frac{3}{2}) &= h(l, 0, \frac{3}{2}) \left(\frac{l+1}{2} \widehat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) h(l-1, 0, \frac{3}{2}) - \frac{l}{4} \widehat{x}(l+2, \frac{1}{2}, 0) h(l+1, 0, \frac{3}{2}) \right) = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{(l+1)(l+2)(l+3)}} \left(2\widehat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) \frac{l+1}{\sqrt{l}} - \widehat{x}(l+2, \frac{1}{2}, 0) \frac{l}{\sqrt{l+4}} \right), \quad l \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то есть

$$(SpD^{\frac{1}{2}}x)(t) = \frac{1}{4} \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sqrt{(l+1)(l+2)(l+3)}} (2\widehat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) \frac{l+1}{\sqrt{l}} - \widehat{x}(l+2, \frac{1}{2}, 0) \frac{l}{\sqrt{l+4}}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, t).$$

Это позволяет получить оценку

$$\|SpD^{\frac{1}{2}}x\|_Z^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}} l^{2s} \left(\frac{1}{4\sqrt{(l+1)(l+2)(l+3)}} \left(2\widehat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) \frac{l+1}{\sqrt{l}} - \widehat{x}(l+2, \frac{1}{2}, 0) \frac{l}{\sqrt{l+4}} \right) \right)^2 \leq \frac{1}{4} \|x\|_X^2,$$

и, окончательно,

$$\|SpD^{\frac{1}{2}}\|_{X \rightarrow Z} \leq \frac{1}{2}.$$

При $|\lambda| < 2$ будет верна оценка $\|\lambda SpD^{\frac{1}{2}}\|_{X \rightarrow Z} < 1$, и, так как

$$\|\lambda SpD^{\frac{1}{2}}\|_{X \rightarrow Z} \|D^{-\frac{3}{2}}\|_{Z \rightarrow X} < 1,$$

то по лемме 2 оператор $K : X \rightarrow Z$ будет обратим с оценкой нормы обратного оператора

$$\|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X} \leq \frac{2}{2 - |\lambda|}.$$

Теорема 2 доказана полностью.

Теорема 2 устанавливает лишь достаточные условия разрешимости задачи (15), (16). На самом деле класс однозначно разрешимых задач этого вида значительно шире. Однако эта теорема необходима, чтобы предположение об обратимости оператора K в следующей теореме не было пустым.

8. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и обозначим Q_n

$$(Q_n z)(\tau) = \sum_{l=0}^{n-1} \hat{z}(l, 0, \frac{3}{2}) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad z \in Z, \quad \tau \in [-1, 1],$$

отрезок ряда Фурье функции $z \in Z$ по системе полиномов $v(l, 0, \frac{3}{2}, t)$, $l \in \mathbb{N}_0$, $t \in [-1, 1]$, а $E_n(z)_Z$ — наилучшее приближение этой функции полиномами порядка не выше $n - 1$ по норме пространства Z . Известно, что наилучшее приближение этой функции в гильбертовом пространстве доставляет отрезок ее ряда Фурье, поэтому

$$E_n(z)_Z = \|z - Q_n z\|_Z, \quad z \in Z.$$

Приближенное решение задачи (15), (16) будем искать в виде полинома

$$x_n(t) = \sum_{l=1}^n \hat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) h(l-1, 0, \frac{3}{2}) v(l, \frac{1}{2}, 0, t), \quad t \in [-1, 1],$$

неизвестные коэффициенты $\{\hat{x}(l, \frac{1}{2}, 0)\}_{l=1}^n$ которого найдем из системы линейных алгебраических уравнений метода Галеркина

$$\hat{x}(1, \frac{1}{2}, 0) = \hat{z}(0, 0, \frac{3}{2}), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(l+1, \frac{1}{2}, 0) + \lambda \left(\frac{l+1}{2\sqrt{l(l+2)}} \hat{x}(l, \frac{1}{2}, 0) - \frac{l}{4\sqrt{(l+2)(l+4)}} \hat{x}(l+2, \frac{1}{2}, 0) \right) &= \hat{z}(l, 0, \frac{3}{2}), \quad l = 1, 2, \dots, n-2, \\ \hat{x}(n, \frac{1}{2}, 0) + \frac{\lambda n}{2\sqrt{(n-1)(n+1)}} \hat{x}(n-1, \frac{1}{2}, 0) &= \hat{z}(n-1, 0, \frac{3}{2}). \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть оператор $K : X \rightarrow Z$ задачи (15), (16) обратим и обратный оператор K^{-1} ограничен. Тогда для всех n , $n \in \mathbb{N}$, система уравнений (20) имеет единственное решение $\{\hat{x}^*(l, \frac{1}{2}, 0)\}_{l=1}^n$, и приближенные решения

$$x_n^*(t) = \sum_{l=1}^n \hat{x}^*(l, 0, -\frac{1}{2}) h(l-1, 0, \frac{3}{2}) v(l, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad t \in [-1, 1],$$

сходятся к точному решению x^* задачи (15), (16) по норме пространства X со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X} E_n(z)_Z.$$

Доказательство. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}_0$ и обозначим X_n замыкание множества полиномов $v(l, \frac{1}{2}, 0, \tau)$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\tau \in [-1, 1]$, относительно нормы

$$\|x_n\|_{X_n} = \left\{ \sum_{l=1}^n l^{2s} \hat{x}^2(l+1, \frac{1}{2}, 0) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad x_n \in X_n,$$

$$\hat{x}_n(l, \frac{1}{2}, 0) = h(l-1, 0, \frac{3}{2}) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) x^{(\frac{3}{2})}(\tau) v(l-1, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau, \quad l = 1, \dots, n,$$

$$x_n(\tau) = \sum_{l=1}^n \hat{x}_n(l, \frac{1}{2}, 0) h(l-1, 0, \frac{3}{2}) v(l, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Пространство X_n является подпространством пространства X . Обозначим, кроме того, Z_n замыкание множества полиномов $v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau)$, $l = 0, 1, \dots, n-1$, $\tau \in [-1, 1]$, относительно нормы

$$\|z_n\|_{Z_n} = \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} l^{2s} \hat{z}^2(l, 0, \frac{3}{2}) \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad z_n \in Z_n,$$

$$\hat{z}_n(l, 0, \frac{3}{2}) = h(l, 0, \frac{3}{2}) \int_{-1}^1 p(\frac{3}{2}, \tau) z_n(\tau) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau) d\tau, \quad l = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$z_n(\tau) = \sum_{l=0}^{n-1} \hat{z}_n(l, \frac{3}{2}, 0) h(l, 0, \frac{3}{2}) v(l, 0, \frac{3}{2}, \tau), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Пространство Z_n является подпространством пространства Z .

Теперь систему уравнений (20) можно записать в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$K_n x_n = z_n, \quad K_n : X_n \rightarrow Z_n, \quad K_n = Q_n K, \quad z_n = Q_n z. \quad (21)$$

Так как для любых $x_n \in X_n$ $K x_n = K_n x_n$, то по лемме 3 операторное уравнение (21), а, следовательно и эквивалентная ей система уравнений (20) имеет единственное решение $\{\hat{x}_n^*(l, \frac{1}{2}, 0)\}_{l=1}^n$ при любой правой части $z_n \in Z_n$, и приближенные решения

$$x_n(\tau) = \sum_{l=1}^n \hat{x}_n(l, \frac{1}{2}, 0) h(l-1, 0, \frac{3}{2}) v(l, \frac{1}{2}, 0, \tau), \quad \tau \in [-1, 1],$$

сходятся к точному решению x^* задачи (15), (16) с оценкой

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leq \|K^{-1}\|_{Z \rightarrow X} E_n(z)_Z.$$

Теорема 3 доказана.

9. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим уравнение

$$x^{(\frac{3}{2})}(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{p(\frac{1}{2}, \tau) x^{(\frac{1}{2})}(\tau) d\tau}{\tau - t} = z(t), \quad t \in (-1, 1), \quad (22)$$

с начальным условием

$$\int_{-1}^1 x(\tau) d\tau = 0, \quad (23)$$

и правой частью

$$z(t) = -\frac{2}{25} v(4, 0, \frac{3}{2}, t) - \frac{1}{8} v(3, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{7}{150} v(2, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{59}{48} v(1, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{21}{5} v(0, 0, \frac{3}{2}, t).$$

Точным решением задачи (22), (23) является функция

$$x(t) = t^3 + t^2 + 2t - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} v(3, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{3} v(2, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{13}{5} v(1, \frac{1}{2}, 0, t).$$

Легко проверить, что она удовлетворяет условию (23).

Приближенное решение задачи (22), (23) будем искать вначале в виде полинома

$$x_1(t) = a_1^1 v(1, \frac{1}{2}, 0, t)$$

с искомыми коэффициентами a_1^1 . Подставляя x_1 в левую часть уравнения (22), получим

$$(D^{\frac{3}{2}} x_1)(t) + (Sp D^{\frac{1}{2}} x_1)(t) = a_1^1 (\frac{5}{3} v(0, 0, \frac{3}{2}, t) - \frac{1}{6} v(2, 0, \frac{3}{2}, t)).$$

Теперь, приравнявая, следуя методу Галеркина, коэффициенты Фурье левой и правой частей уравнения (22) по полиному $v(0, 0, \frac{3}{2}, t)$ получим решение

$$a_1^1 = \frac{63}{25}, \quad x_1(t) = \frac{63}{25} v(1, \frac{1}{2}, 0, t).$$

Так как

$$x(t) - x_1(t) = \frac{2}{5}v(3, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{3}v(2, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{25}v(1, \frac{1}{2}, 0, t),$$

то оценка погрешности приближенного решения равна

$$\|x - x_1\|_X \approx 2.48.$$

Наилучшее приближение $E_1(z)_Z$ для z равно

$$E_1(z)_Z = \|z - Q_1 z\|_Z \approx 3.67.$$

Таким образом, для $n = 1$ численный результат подтверждает оценку 3.

Возьмем теперь $n = 2$. Приближенное решение в этом случае будет равно

$$x_2(t) = a_1^2 v(1, \frac{1}{2}, 0, t) + a_2^2 v(2, \frac{1}{2}, 0, t)$$

с искомыми коэффициентами a_1^2, a_2^2 . Подставляя x_2 в левую часть уравнения (22), получим

$$(D^{\frac{3}{2}}x_2)(t) + (SpD^{\frac{1}{2}}x_2)(t) = a_1^2 \frac{5}{3}v(0, 0, \frac{3}{2}, t) + a_2^2 \frac{59}{32}v(1, 0, \frac{3}{2}, t) - a_1^2 \frac{1}{6}v(2, 0, \frac{3}{2}, t) - a_2^2 \frac{3}{16}v(3, 0, \frac{3}{2}, t).$$

Вновь приравнявая по методу Галеркина коэффициенты Фурье левой и правой части уравнения (22) по полиномам $v(0, 0, \frac{3}{2}, t)$ и $v(1, 0, \frac{3}{2}, t)$ получим решение

$$a_1^2 = \frac{63}{25}, \quad a_2^2 = \frac{2}{3}, \quad x_2(t) = \frac{63}{25}v(1, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{3}v(2, \frac{1}{2}, 0, t).$$

Так как

$$x(t) - x_2(t) = \frac{2}{5}v(3, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{25}v(1, \frac{1}{2}, 0, t),$$

то оценка погрешности для этого приближенного решения будет равна

$$\|x - x_2\|_X \approx 1.56.$$

Наилучшее приближение $E_2(z)_Z$ для функции z равно

$$E_2(z)_Z = \|z - Q_2 z\|_Z \approx 1.174.$$

Таким образом, для $n = 2$ численный результат также подтверждает оценку 3.

Теперь возьмем $n = 3$. Приближенное решение будет иметь вид

$$x_3(t) = a_1^3 v(1, \frac{1}{2}, 0, t) + a_2^3 v(2, \frac{1}{2}, 0, t) + a_3^3 v(3, \frac{1}{2}, 0, t)$$

с искомыми коэффициентами a_1^3, a_2^3, a_3^3 . Подставляя x_3 в левую часть уравнения (22), получаем

$$\begin{aligned} (D^{\frac{3}{2}}x_3)(t) + (SpD^{\frac{1}{2}}x_3)(t) = & v(0, 0, \frac{3}{2}, t)(a_1^3 \frac{5}{3} - a_3^3 \frac{1}{3}) + \\ & + v(1, 0, \frac{3}{2}, t)a_2^3 \frac{59}{32} + v(2, 0, \frac{3}{2}, t)(\frac{23}{15}a_3^3 - a_1^3 \frac{1}{6}) - \\ & - v(3, 0, \frac{3}{2}, t)a_2^3 \frac{3}{16} + v(4, 0, \frac{3}{2}, t)a_3^3 \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

По методу Галеркина получаем решение

$$a_1^3 = \frac{581}{225}, \quad a_2^3 = \frac{2}{3}, \quad a_3^3 = \frac{14}{45}, \quad x_3(t) = \frac{581}{225}v(1, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{2}{3}v(2, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{14}{45}v(3, 0, \frac{3}{2}, t).$$

Так как

$$x(t) - x_3(t) = \frac{4}{45}v(3, 0, \frac{3}{2}, t) + \frac{104}{225}v(1, 0, \frac{3}{2}, t),$$

то оценка погрешности для этого приближенного решения будет равна

$$\|x - x_3\|_X \approx 0.871.$$

Наилучшее приближение $E_3(z)_Z$ для z равно

$$E_3(z)_Z = \|z - Q_3 z\|_Z \approx 1.161.$$

И вновь, при $n = 3$ численное решение подтверждает теорему 3.

Возьмем наконец $n = 4$. Приближенное решение будет иметь вид

$$x_4(t) = a_1^4 v(1, \frac{1}{2}, 0, t) + a_2^4 v(2, \frac{1}{2}, 0, t) + a_3^4 v(3, \frac{1}{2}, 0, t) + a_4^4 v(4, \frac{1}{2}, 0, t)$$

с искомыми коэффициентами $a_1^4, a_2^4, a_3^4, a_4^4$. Подставляя x_3 в левую часть уравнения (22), получим

$$\begin{aligned} (D^{\frac{3}{2}} x_3)(t) + (SpD^{\frac{1}{2}} x_3)(t) = & v(0, 0, \frac{3}{2}, t)(a_1^4 \frac{5}{3} - a_3^4 \frac{1}{3}) + \\ & + v(1, 0, \frac{3}{2}, t)(a_2^4 \frac{59}{32} - \frac{35}{32} a_4^4) + v(2, 0, \frac{3}{2}, t)(\frac{23}{15} a_3^4 - a_1^4 \frac{1}{6}) + \\ & + v(3, 0, \frac{3}{2}, t)(a_4^4 \frac{73}{48} - \frac{3}{16} a_2^4) - v(4, 0, \frac{3}{2}, t) a_3^4 \frac{1}{5} - v(5, 0, \frac{3}{2}, t) a_4^4 \frac{5}{24}. \end{aligned}$$

В этом случае метод Галеркина дает точное решение задачи (22), (23)

$$\begin{aligned} a_1^4 = \frac{13}{5}, a_2^4 = \frac{2}{3}, a_3^4 = \frac{2}{5}, a_4^4 = 0, \\ x_4(t) = \frac{2}{5} v(3, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{2}{3} v(2, \frac{1}{2}, 0, t) + \frac{13}{5} v(1, \frac{1}{2}, 0, t), \end{aligned}$$

поэтому и $\|x - x_4\|_X$, и $E_4(z)_Z$ равны нулю, что означает, что теорема 3 подтверждается тривиально.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техн., 1987. 688 с.
2. Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababhehb M. A new definition of fractional derivative // J. of Comput. and Appl. Math. 2014. N 264. P. 65–70.
3. Ross B. The development of fractional calculus 1695–1900 // Historia math. 1977. N 4. P. 75–89.
4. Hilfer R., Luchko Yu. Disederata for fractional derivatives and integrals // Mathematics. 2019. 7. 149. <https://doi.org/10.3390/math7020149>
5. Федотов А.И. Обоснование квадратурно-разностного метода решения интегродифференциальных уравнений с производными переменного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 4. С. 564–579.
6. Badr A. A., Integro-Differential Equation with Cauchy Kernel // J. Comput. Appl. Math. No 134, 191 (2001).
7. Frankel J.I. A Galerkin solution to a regularized Cauchy singular integro-differential equation // Quart. Appl. Math. 1995. V. 53. No 2. P. 245–258.
8. Fedotov A.I. Justification of the Galerkin method for one class of singular integro-differential equations on an interval // Lobachevskii journal of mathematics. 2008. V. 29. No 2. P. 73–81.
9. Fedotov A.I. Justification of a Galerkin method for a regularized Cauchy singular integro-differential equation // Quart. Appl. Math. 2009. V. 67. No 3. P. 541–552.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Мир. 1985. 1100 с.
11. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
12. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань: Изд-во Казан. ун-та 1980. 231 с.
13. Тейлор М., Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир. 1984. 472 с.

14. *Хведелидзе Б.В.* Линейные разрывные задачи теории функций и некоторые их приложения // Труды Тбилисского матем. инст. Академии наук Грузинской ССР. 1956. Т. 23. С. 3–158.
15. *Даутов Р.З., Тимербаев М.Р.* Точные оценки аппроксимации полиномами в весовых пространствах Соболева // Дифференц. ур-ния. 2015. Т. 51. № 7. С. 886–894. <https://doi.org/10.1134/S0012266115070071>
16. *Крикунов Ю.М.* О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегродифференциального уравнения // Ученые записки КГУ. 1952. Т. 112. № 10. С. 191–199.
17. *Fedotov A.I.* Обоснование методов Галеркина и коллокаций для одного класса сингулярных интегродифференциальных уравнений на отрезке // Уфимский матем. журнал. 2012. Т. 13. № 4. С. 91–111.

JUSTIFICATION OF THE GALERKIN METHOD FOR SOLVING SINGULAR INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL DERIVATIVES

A. I. Fedotov*

420111 Kazan, Karl Marx str., 10, A.N. Tupolev Kazan National Research Technical University, Russia

*e-mail: fedotovkazan@mail.ru

Received: 18.05.2024

Revised: 19.05.2024

Accepted: 28.06.2024

Abstract. Currently, there are more than 30 different definitions of the fractional derivative, and their number continues to grow. Some of them are just “mind games”, but others are introduced to solve serious mathematical problems. In this paper, a new definition of the fractional order derivative is given, based on generalization of the Jacobi polynomial differentiation formula. This made it possible to introduce a scale of orthogonal polynomial systems whose closures are Sobolev spaces. The use of these derivatives made it possible to set the problem of solving singular integrodifferential equations with a Cauchy kernel on an open circuit. The existence and uniqueness of the solution of such equations is proved, and the Galerkin method for their approximate solution is substantiated. The convergence of the method is proved, and estimates of the error of approximate solutions are obtained.

Keywords: fractional order derivatives, singular integrodifferential equations, Galerkin method.