

РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ С ПОМОЩЬЮ АЛГОРИТМА УЛУЧШЕНИЯ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦ¹⁾

© 2024 г. А.С. Леонов^{1,*}, Д.В. Лукьяненко^{2,**}, А.Г. Ягола^{2,***}

¹115409 Москва, Каширское ш., 31, НИЯУ «МИФИ», Россия

²119992 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Россия

*e-mail: asleonov@mephi.ru

**e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

***e-mail: yagola@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 27.03.2024 г.

Переработанный вариант 27.03.2024 г.

Принята к публикации 28.06.2024 г.

Рассматривается одна из возможных постановок обратных задач гравиметрии и магнитометрии, которая состоит в нахождении на заданной глубине гипотетических точечных источников соответствующих потенциальных полей по этим полям, измеряемым на поверхности Земли. Устанавливается единственность решения таких обратных задач. Для численного решения дискретизированных их вариантов применяется новый алгоритм, основанный на улучшении числа обусловленности матрицы задачи с помощью метода минимальной псевдообратной матрицы (алгоритм МПМУ). Алгоритм тестируется на модельных задачах грави- и магнито-разведки при их раздельном решении. Предлагается и тестируется также вариант алгоритма МПМУ для совместного решения этих обратных задач. В заключение, алгоритм применяется для раздельной и совместной обработки некоторых широко известных данных грави- и магнито-разведки для Курской магнитной аномалии. Библ. 31. Фиг. 11.

Ключевые слова: грави- и магнито-разведка, обратная задача, единственность решения, метод минимальной псевдообратной матрицы.

DOI: 10.31857/S0044466924100023, EDN: KATTQB

1. ВВЕДЕНИЕ

В абстрактной форме обратные задачи гравиметрии и/или магнитометрии заключаются в определении источников, лежащих в известной пространственной области и создающих гравитационные и/или магнитные поля, которые измеряются в другой области. Эти измерения в рамках принятых математических моделей генерации полей часто позволяют найти источники с помощью специальных процедур решения обратных задач. Конкретные постановки таких обратных задач могут быть весьма разнообразными и зачастую зависят как от аппаратуры, методики, структуры и результатов измерений, так и от возможностей однозначного решения соответствующей математической обратной задачи. Все это можно видеть на примере многочисленных публикаций, из которых для краткости мы выделим лишь некоторые, близкие по направлению исследований, работы (см. [1]–[18]) и, в частности, недавние работы [19], [20]. Анализируя математические постановки обратных задач из этих работ, можно убедиться, что ключевым моментом в них является стремление получить определенное (единственное) решение обратной задачи. Хорошо известно, что найти однозначное распределение источников в заданной ограниченной области по измерениям соответствующих потенциальных полей вне этой области в общем случае нельзя (см. [6]). Соответствующие задачи имеют бесконечно много эквивалентных по генерируемому полю решений. Для выделения единственного решения делаются специальные дополнительные предположения. Например, в [21] для достаточно редко встречающихся обратных задач определения формы рудного тела делаются предположения о его форме, так что единственность решения обратной задачи вытекает из известных теорем П.С.Новикова [1] и Л.Н.Сретенского [2]. Часто встречается предположение о расположении источников. Так, в цикле работ [14]–[18] предлагается метод линейных интегральных представлений

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 23-41-00002).

потенциальных полей, в котором по измерениям на земной поверхности определяются двумерные распределения источников на фиксированных различных глубинах. Распределения такого рода позволяют судить о геологической структуре, создающей наблюдаемые поля. Отметим высокую скорость решения соответствующих обратных задач и достаточную устойчивость получаемых решений по отношению к случайным возмущениям данных. Этот и многие другие методы решения линейных обратных задач грави- и магнитометрии связаны с обращением некоторых матриц, которые мы будем называть *матрицами обратных задач*. Очень часто такие матрицы оказываются плохо обусловленными или даже вырожденными. Отсюда возникает проблема устойчивости решений, полученных при обращении таких матриц. Она решается по-разному в различных работах. Так, многие авторы применяют метод регуляризации А.Н.Тихонова [22, 23] в различных его модификациях. Можно также использовать алгоритмы типа известного метода TSVD [24] и т.д.

Повысить устойчивость решаемой линейной обратной задачи можно также, заменив ее матрицу на некоторую «близкую», но имеющую лучшее (меньшее) число обусловленности. Именно такой подход будет использоваться ниже для решения некоторых обратных задач грави- и магнитометрии. Постановка этих задач дается в разд. 2. В разд. 3 излагается алгоритм их решения, основанный на так называемой *процедуре улучшения числа обусловленности матрицы задачи с помощью метода минимальной псевдообратной матрицы* (коротко, процедура МПМУ, в английской транскрипции МРМІ). В разд. 4 процедура МПМУ апробируется при раздельном решении модельных задач грави- и магнитометрии. В разд. 5 она применяется для раздельного решения этих задач с данными по Курской магнитной аномалии, а в разд. 6 делается попытка решить эти задачи совместно. Выводы из этих численных экспериментов представлены в разд. 7.

2. ПОСТАНОВКА ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ

Будем решать обратные задачи гравиметрии и магнитометрии в следующей *региональной постановке*. Считаем, что измерения соответствующих потенциальных полей проводятся на земной поверхности с известным рельефом (высотой) $z = z_0(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$, где D — область исследований с кусочно-гладкой границей. Более детально, измерения проводятся в трехмерной области вида $T = \{(x, y, z) : z_0(x, y) < z < z_1(x, y), (x, y) \in D\}$, $z_{0,1}(x, y) \in C(D)$. Нас интересуют следующие задачи.

Задача 1. На заданной поверхности $H = H(x, y) < 0$, $H(x, y) \in C(D)$, найти число N , отличающиеся между собой расположения $(x'_k, y'_k, H(x'_k, y'_k))$, $k = \overline{1, N}$, и массы $g = [g_k]_{k=1}^N$ точечных источников гравитации, которые создают поле силы тяжести с вертикальной составляющей $G_z(x, y, z)$, измеренной в T .

Эта задача сводится к решению уравнения

$$\gamma \sum_{k=1}^N \frac{(z - H(x'_k, y'_k))g_k}{((x - x'_k)^2 + (y - y'_k)^2 + (z - H(x'_k, y'_k))^2)^{3/2}} = G_z(x, y, z), \quad (x, y, z) \in T, \quad (2.1)$$

относительно величин N , (x'_k, y'_k) , g_k , $k = \overline{1, N}$. Коэффициент γ есть известная гравитационная постоянная. В векторной форме уравнение имеет вид

$$\gamma \sum_{k=1}^N K_{gr}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k)g_k = G_z(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in T,$$

где

$$K_{gr}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k) = \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k, \mathbf{n})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|^3},$$

а $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}'_k = (x'_k, y'_k, H(x'_k, y'_k))$, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$.

Задача 2. На заданной поверхности $H = H(x, y) < 0$, $H(x, y) \in C(D)$, найти число N , отличающиеся между собой расположения $(x'_k, y'_k, H(x'_k, y'_k))$, $k = \overline{1, N}$, и вертикальные составляющие $m = \{m_k\}_{k=1}^N$ векторов намагниченности точечных магнитных диполей, которые создают поле магнитной индукции с вертикальной составляющей $B_z(x, y, z)$, измеренной в T .

Задача сводится к решению уравнения

$$\mu_0 \sum_{k=1}^N K_{mg}(x, y, z, x'_k, y'_k)m_k = B_z(x, y, z), \quad (x, y, z) \in T, \quad (2.2)$$

относительно неизвестных N , (x'_k, y'_k) , m_k , $k = \overline{1, N}$. Здесь μ_0 — известная магнитная постоянная, а

$$K_{mg}(x, y, z, x', y') = K_{mg}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{3(z - H(x', y'))^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{n})^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Замечание. Физические величины, фигурирующие в формулах (2.1), (2.2), следует выражать в принятых для таких задач единицах системы СИ. В частности, величины типа x, y, z будут выражаться в километрах (km), величина $G_z(x, y, z)$ — в миллигалах (mGal), а величина $B_z(x, y, z)$ выражается в нанотеслах (nTl). Однако для удобства записи мы будем принимать постоянные γ, μ_0 равными единице. Тогда искомые величины будут далее иметь следующие размерности: $[g] = \text{mGal} \cdot \text{km}^2, [m] = \text{nTl} \cdot \text{km}^3$.

3. О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ (2.1), (2.2)

Обратные задачи (2.1), (2.2) можно записать в следующей единообразной форме: найти число $N \in \mathbb{N}$, не совпадающие для различных k координаты $\mathbf{r}'_k = (x'_k, y'_k, z'_k) \in \Sigma, k = \overline{1, N}$, и такие числа X_k , что выполнено равенство

$$\sum_{k=1}^N K(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k) X_k = Y(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in T. \quad (3.1)$$

Здесь Σ — заданная кусочно-гладкая поверхность, лежащая в полупространстве $z < 0$, а ядро K и величина $Y(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in T$, известны. Абстрактная задача такого типа может не иметь решения; если ее решение существует, то оно может быть не единственным. Однако в задачах (2.1), (2.2) единственность решений можно гарантировать из-за специфических свойств функции $K(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k)$ и выбора поверхности Σ .

Для дальнейшего нам понадобится область $T_H = \{(x, y, z) : H(x, y) < z < z_1(x, y), (x, y) \in D\}$. Из условий на функции $z_0(x, y), H(x, y)$ ясно, что $T \subset T_H$. Мы также будем считать, что поверхность Σ определяется уравнением $z = H(x, y) \in C(D)$.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{r}'_k \in \Sigma$ для всякого $k \in \mathbb{N}$, а функция $K(\mathbf{r})$ является гармонической по переменным $\mathbf{r} = (x, y, z)$ всюду при $|\mathbf{r}| > 0$, причем $K(\mathbf{r}) \rightarrow \infty$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow 0$. Тогда задача (3.1) с данными $Y(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in T$, не может иметь более одного решения $\{N \in \mathbb{N}, X_k, \mathbf{r}'_k \in \Sigma, k = \overline{1, N}\}$.

Пусть $\mathbf{r}'_k \in \Sigma$ для всякого $k \in \mathbb{N}$, а функция $K(\mathbf{r})$ является гармонической по переменным $\mathbf{r} = (x, y, z)$ всюду при $|\mathbf{r}| > 0$, причем $K(\mathbf{r}) \rightarrow \infty$ при $|\mathbf{r}| \rightarrow 0$. Тогда задача (3.1) с данными $Y(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in T$, не может иметь более одного решения $\{N \in \mathbb{N}, X_k, \mathbf{r}'_k \in \Sigma, k = \overline{1, N}\}$.

Доказательство. Предположим, что задача (3.1) имеет два решения, т.е. найдутся числа $N_{1,2} \in \mathbb{N}$, две различные совокупности векторов: $\mathbf{r}_k^{(1)} \in \Sigma, k = \overline{1, N_1}$, и $\mathbf{r}_k^{(2)} \in \Sigma, k = \overline{1, N_2}$, и две совокупности чисел: $\{X_k^{(1)}\}_{k=1}^{N_1}$ и $\{X_k^{(2)}\}_{k=1}^{N_2}$, для которых выполнены равенства

$$\sum_{k=1}^{N_1} K(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^{(1)}) X_k^{(1)} = \sum_{k=1}^{N_2} K(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k^{(2)}) X_k^{(2)} = Y(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in T. \quad (3.2)$$

Если учесть, что множества элементов $\{\mathbf{r}_k^{(1)}\}$ и $\{\mathbf{r}_k^{(2)}\}$ могут иметь непустое пересечение, то из равенств (3.2) следует существование такого числа $N \in \mathbb{N}$, такого набора различных векторов $\mathbf{r}'_k \in \Sigma, k = \overline{1, N}$, и такого нетривиального набора чисел $X_k, \sum_{k=1}^N X_k^2 > 0$, что

$$\sum_{k=1}^N K(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k) X_k = 0, \quad \mathbf{r} \in T. \quad (3.3)$$

В левой части равенства (3.3) стоит гармоническая в области T_H функция, и она равна нулю в подобласти $T, T \subset T_H$. Поэтому, согласно известному свойству единственности гармонического продолжения [25, с. 88–89], равенство (3.3) будет верно и в области T_H . В частности, оно будет верно и для последовательности точек $\{\mathbf{r}_n\}_{n=1}^\infty \subset T_H$ такой, что $\mathbf{r}_n \rightarrow \mathbf{r}'_1$ при $n \rightarrow \infty$:

$$K(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_1) X_1 + \sum_{k=2}^N K(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_k) X_k = 0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая свойства: $K(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_1) \rightarrow \infty, K(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}'_k) \rightarrow K(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_k) \in \mathbb{R}, k = 2, 3, \dots, N$, приходим к выводу, что $X_1 = 0$. Поэтому член с $k = 1$ из равенства (3.3) можно исключить:

$$\sum_{k=2}^N K(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k) X_k = 0, \quad \mathbf{r} \in T_H.$$

Далее, в этом равенстве можно вместо $\mathbf{r}$ взять последовательность $\{\mathbf{r}_n\}_{n=1}^\infty \subset T_H$, $\mathbf{r}_n \rightarrow \mathbf{r}'_2$, и тем же путем убедиться, что $X_2 = 0$. Продолжая этот процесс, получим, что $X_k = 0$ для всех $k = \overline{1, N}$, а это противоречит нетривиальности решения уравнения (3.3).

Отметим, что условия теоремы выполнены для функций K_{gr} и K_{mg} из задач 1 и 2, так что последние имеют не более одного решения. Отметим также, что теорема верна и в случае, когда область $T \subset \mathbb{R}^3 \cap \{z > 0\}$, $\text{int} T \neq \emptyset$, имеет кусочно-гладкую границу общего вида, кусочно-гладкая поверхность Σ лежит в полупространстве $\mathbb{R}^3 \cap \{z < 0\}$, а для области T_H выполнены условия: $T \subset T_H$, $\Sigma \subset \partial T_H$.

4. О ДИСКРЕТИЗАЦИИ ЗАДАЧ (2.1), (2.2)

Данные $G_z(x, y, z)$, $B_z(x, y, z)$ в задачах (2.1), (2.2) измеряются, как правило, в конечном числе точек на рельефе $z = z_0(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in D$, или вблизи него. Кроме того, в этих задачах часто задают положения источников $\mathbf{r}'_k = (x_k, y_k, H(x_k, y_k))$. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать следующие дискретные варианты задач (2.1), (2.2): для заданных точек наблюдения $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_0(x_i, y_i))$, $i = \overline{1, M_0}$, и заданных точек расположения источников $\mathbf{r}'_k = (x_k, y_k, H(x_k, y_k))$, $k = \overline{1, N}$, найти решения $g = \{g_k\}$, $m = \{m_k\}$ каждой из систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^N K_{gr}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_k)g_k = G_z(\mathbf{r}_i), \quad \sum_{k=1}^N K_{mg}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}'_k)m_k = B_z(\mathbf{r}_i), \quad i = \overline{1, M_0}. \quad (4.1)$$

Эти СЛАУ можно формально записать в виде $AX = Y$, где A — матрица соответствующей задачи, Y — ее правая часть, а X — соответствующие неизвестные. В этих задачах нам известна точно заданная матрица A , а правые части СЛАУ Y заданы, вообще говоря, с «ошибкой измерения» δ : вместо Y известна приближенная правая часть Y_δ такая, что $\|Y - Y_\delta\| \leq \delta$. Здесь и далее все нормы евклидовы. По этим данным нужно найти величины $X = g, m$.

Теоретически, СЛАУ $AX = Y$ может не иметь обычного решения, когда рассматриваемые модели не адекватны экспериментальным данным. Но она всегда имеет решение в смысле метода наименьших квадратов (МНК), т.е. всегда существует решение системы $A^T AX = A^T Y$. Она также может быть неоднозначно разрешимой или плохо обусловленной. Таким образом, рассматриваемые дискретные варианты задач (2.1), (2.2) в общем случае оказываются некорректно поставленными, и для их решения необходимо применять специальные методы — методы регуляризации. В частности, регуляризацию некорректной обратной задачи можно проводить с помощью метода А.Н.Тихонова, метода TSVD и др. (см., например, [22–24]). Мы же предлагаем следующий новый метод.

5. АЛГОРИТМ МПМУ УЛУЧШЕНИЯ ЧИСЛА ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦ ЗАДАЧ

Рассмотрим СЛАУ общего вида $\bar{A}X = Y$, где $X \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^m$ и действительная матрица $\bar{A}$ имеет размер $\dim \bar{A} = m \times n$. Мы будем искать нормальное псевдорешение $\bar{X}$ этой СЛАУ, т.е. то ее решения по методу наименьших квадратов, у которого минимальна евклидова норма. В случае однозначной разрешимости рассматриваемой СЛАУ, $\bar{X}$ совпадает с обычным решением. Данными для нахождения $\bar{X}$ являются величины $\bar{A}, Y$. Для этих *точных данных* задача формально решается с помощью псевдообратной матрицы A^+ : $\bar{X} = A^+Y$. Если вместо величин Y известна приближенная правая часть Y_δ , то вектор $X_\delta = \bar{A}^+Y_\delta$ является устойчивым приближением к $\bar{X}$: $X_\delta \rightarrow \bar{X}$ в $\mathbb{R}^n$ при $\delta \rightarrow 0$.

Матрица $\bar{A}^+$, как правило, вычисляется приближенно с помощью различного вида вычислительной техники с конечной разрядной сеткой. При этом, из-за округлений, в известных процедурах псевдообращения вместо $\bar{A}$ фактически используется весьма близкая к ней матрица A_h с известным (оцениваемым) уровнем возмущения h : $\|\bar{A} - A_h\| \leq h$. В итоге, мы вычисляем A_h^+ , а не $\bar{A}^+$, и получаем на самом деле вместо $\bar{X}$ приближенное решение $X_{h\delta} = A_h^+Y_\delta$. Для вырожденных и плохо обусловленных матриц $\bar{A}$ многие процедуры псевдообращения численно неустойчивы по отношению к ошибкам данных. Как следствие, приближения $X_{h\delta}$ даже при малых погрешностях h могут быть сколь угодно «далеки» от точного нормального псевдорешения $\bar{X}$. В связи с этим разработаны специальные устойчивые методы приближенного нахождения $\bar{A}^+$ по возмущенным данным (см., например, [22, 24, 26] и др.).

Нам понадобится так называемый *метод минимальной псевдообратной матрицы* (МПМ) [23, 27]. Сформулируем его, как в указанных работах, для СЛАУ $\bar{A}z = u$, $z \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$. Считается, что точная матрица неизвестна, а вместо нее задана A_h : $\|\bar{A} - A_h\| \leq h$, причем число h известно. Правая часть u также неизвестна, и в нашем распоряжении имеется ее приближение u_δ с точностью δ : $\|u_\delta - u\| \leq \delta$. Матрицы $\bar{A}, A_h$ — действительные. Метод МПМ состоит в следующем:

а) находится матрица метода $\tilde{A}_h$, удовлетворяющая условию

$$\|\tilde{A}_h^+\| = \inf \{ \|A^+\| : \forall A, \dim A = m \times n, \|A - A_h\| \leq h \},$$

т.е. из всех матриц, сравнимых по точности с A_h (сюда входит и точная матрица $\bar{A}$) выбирается та, у которой псевдообратная имеет минимальную норму;

б) находится приближенное решение в виде $z_{\delta h} = \tilde{A}_h^+ u_{\delta}$.

Такое приближенное решение СЛАУ имеет оптимальный порядок точности, а матрица $\tilde{A}_h$ имеет число обусловленности, по порядку близкое к наилучшему (см. [23, 27]). Кроме того, метод МПМ позволяет вычислять устойчивую оценку ранга неизвестной точной матрицы. Отметим, что метод не требует знания погрешности δ , но требует знания числа h . Метод МПМ реализуется численно с помощью сингулярного разложения матрицы A_h . Соответствующие формулы даны в [23, 27] и в Приложении. Преимущества метода МПМ перед другими методами указаны в [23, 27].

В отличие от постановки задачи с применением метода МПМ, в задачах (4.1), которые нас интересуют, мы знаем точно матрицу $\bar{A}$. Однако она может быть плохо обусловленной или даже вырожденной, и в этом случае необходима регуляризация соответствующей СЛАУ. Одним из вариантов регуляризации является улучшение (уменьшение) числа обусловленности матрицы путем варьирования ее в определенных пределах возмущений. Изложим соответствующий алгоритм для СЛАУ $\bar{A}X = Y$, считая, что $\bar{A} \neq 0$ и точная правая часть СЛАУ нетривиальна: $Y \neq 0$.

Пусть дано сингулярное разложение точной матрицы: $\bar{A} = U\bar{R}V^T$, где U, V — ортогональные матрицы размера $m \times m$ и $n \times n$ соответственно, а $\bar{R}$ — диагональная матрица размера $m \times n$, содержащая сингулярные числа матрицы $\bar{A}$, упорядоченные по невозрастанию:

$$\bar{R} = \text{diag} [\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2, \dots, \bar{\rho}_{\bar{r}}, 0, \dots, 0], \quad \bar{\rho}_1 \geq \bar{\rho}_2 \geq \dots, \bar{\rho}_{\bar{r}} > 0.$$

Здесь $\bar{r} = \text{rank } \bar{A} \leq M = \min(m, n)$. Введем также спектральное число обусловленности матрицы $\bar{A}$: $\nu_s(\bar{A}) = \bar{\rho}_1 / \bar{\rho}_{\bar{r}}$.

Алгоритм МПМУ решения СЛАУ $\bar{A}X = Y$ с данными $\{\bar{A}, Y_{\delta}\}$ состоит в следующем.

Предварительный шаг: находим число $\mu_{\delta} = \inf \{ \|\bar{A}X - Y_{\delta}\| : \forall X \in \mathbb{R}^n \}$ — меру несовместности решаемой СЛАУ. Устойчивые методы решения этой задачи описаны, например, в [23].

Шаг 1. Зададим число h_0 , $h_0 > h_1 = \frac{27}{16}\bar{\rho}_1^4$. Для каждого h , $0 \leq h \leq h_0$, заменяем точную матрицу $\bar{A}$ на приближенную матрицу вида $\bar{A}_h = U\bar{R}_hV^T$, где

$$\bar{R}_h = \text{diag} [\bar{\rho}_1 x_1(h), \bar{\rho}_2 x_2(h), \dots, \bar{\rho}_{\bar{r}} x_{\bar{r}}(h), 0, \dots, 0]$$

диагональная матрица, получаемая по формулам из Приложения с заменой там матрицы A_h и ее сингулярных чисел на матрицу $\bar{A}$ и ее сингулярные числа. Более детально,

$$x_k(h) = \{\bar{x}_k(h), 0 \leq h \leq h_k; 0, h > h_k\}$$

для $k = 1, \dots, \bar{r}$, где $\bar{x}_k(h)$ — решение уравнения $\bar{x}_k^4 - \bar{x}_k^3 = h\bar{\rho}_k^{-4}$, $\bar{x}_k \in [1, \frac{3}{2}]$, а $h_k = \frac{27}{16}\bar{\rho}_k^4$.

Шаг 2. Вводим функцию $\beta_{\delta}(h) = \|\bar{A}_h^+ Y_{\delta} - Y_{\delta}\|$, $0 \leq h \leq h_0$, и решаем уравнение $\beta_{\delta}^2(h) = \delta^2 + \mu_{\delta}^2$. Обозначим его решение как $h(\delta) > 0$. Вопросы разрешимости уравнения будут рассмотрены далее.

Шаг 3. Находим матрицу метода МПМУ $\bar{A}_{h(\delta)} = U\bar{R}_{h(\delta)}V^T$ и с ее помощью вычисляем приближенное решение СЛАУ: $X_{\delta} = \bar{A}_{h(\delta)}^+ Y_{\delta} = V\bar{R}_{h(\delta)}^+ U^T Y_{\delta}$.

В [28] установлены следующие свойства такого алгоритма.

Пусть для каждого δ , $0 < \delta < \delta_0 = \text{const}$, выполнено неравенство $\|Y_{\delta}\| > \mu_{\delta}$. Тогда верно следующее:

1) функция $\beta_{\delta}(h)$ монотонно не убывает при $h \in [0, h_0]$, непрерывна слева в каждой точке $h > 0$ и имеет разрывы первого рода в точках h_k ;

2) $\beta_{\delta}^2(+0) = \mu_{\delta}^2$, $\beta_{\delta}^2(h_0) = \|Y_{\delta}\|^2$;

3) уравнение $\beta_{\delta}^2(h) = \delta^2 + \mu_{\delta}^2$ имеет «обобщенное решение» $h(\delta) > 0$, т.е. точку, для которой выполнены неравенства

$$\lim_{h \rightarrow h(\delta)} \beta_{\delta}^2(h) = \beta_{\delta}^2(h(\delta) - 0) \leq \mu_{\delta}^2 + \delta^2 \leq \beta_{\delta}^2(h(\delta) + 0) = \overline{\lim}_{h \rightarrow h(\delta)} \beta_{\delta}^2(h);$$

это либо обычное решение уравнения, либо одна из точек разрыва h_k функции $\beta_{\delta}^2(h)$;

4) $h(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и поэтому $\bar{A}_{h(\delta)}^+ \rightarrow \bar{A}$, $X_{\delta} = \bar{A}_{h(\delta)}^+ Y_{\delta} \rightarrow \bar{X}$;

5) выполнена оценка $x_k(h) \sim 1 + a_k h$ при $h \rightarrow +0$ для каждого k , $1 \leq k \leq \bar{r}$, где $a_k = \bar{\rho}_k^{-4}$;

6) обозначим как $r(\delta)$ ранг матрицы $\bar{A}_{h(\delta)}$. Тогда $r(\delta) \leq \bar{r}$.

Из этих свойств вытекает

Теорема 2. Пусть сингулярные числа матрицы $\bar{A}$ простые: $\bar{\rho}_k > \bar{\rho}_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, M-1$. Тогда при $\delta \rightarrow 0$ справедлива оценка

$$\nu_s(\bar{A}_{h(\delta)}) = \frac{\bar{\rho}_1 x_1(h(\delta))}{\bar{\rho}_{r(\delta)} x_{r(\delta)}(h(\delta))} \sim \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_{r(\delta)}} (1 - h(\delta)(a_{r(\delta)} - a_1)) < \frac{\bar{\rho}_1}{\bar{\rho}_r} = \nu_s(\bar{A}).$$

Доказательство легко следует из свойств 4) – 6) с учетом неравенства $a_1 = \bar{\rho}_1^{-4} < \bar{\rho}_{r(\delta)}^{-4} = a_{r(\delta)}$.

Таким образом, число обусловленности матрицы $\bar{A}_{h(\delta)}$ меньше числа обусловленности для $\bar{A}$ по крайней мере при «малых» δ .

Численная реализации алгоритма МПМУ рассмотрена в [28] (см. также [23, 27]). Там же представлено сравнение результатов работы этого алгоритма и методов регуляризации А.Н.Тихонова [22] и TSVD [24].

Рассмотрим на простом примере «механизм действия» этого алгоритма.

Пример 1. Пусть точная матрица СЛАУ, ее точная и приближенная правые части и точное решение имеют вид

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-8} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_\delta = \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \end{bmatrix}, \bar{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решим СЛАУ $\bar{A}X = Y_\delta$ с помощью алгоритма МПМУ для различных δ .

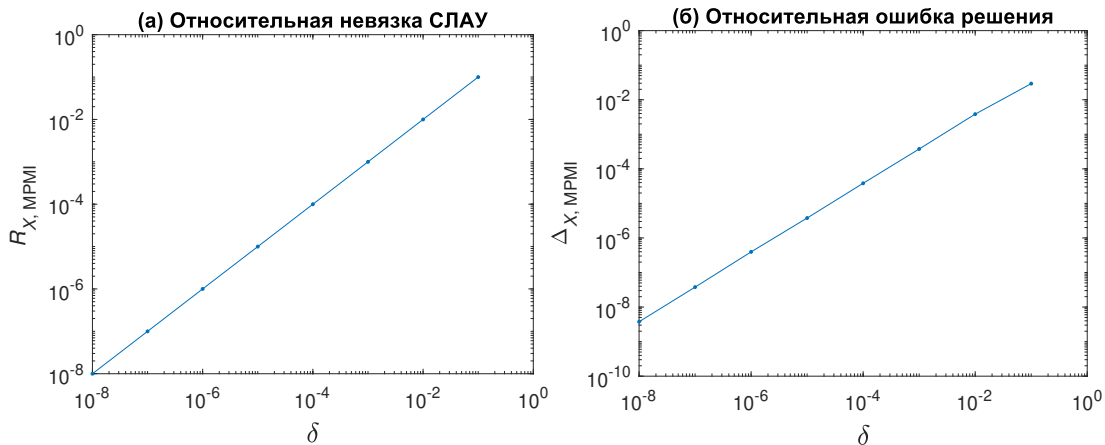
Число обусловленности матрицы есть $\nu_s(\bar{A}) = 10^8$, т.е. матрица весьма плохо обусловлена. Нетрудно видеть, что относительная точность непосредственного решения СЛАУ $\bar{A}X = Y_\delta$, т.е. величина $\Delta_X = \|\bar{X} - \bar{A}^{-1}Y_\delta\| / \|\bar{X}\| = 10^8\delta$, представляется очень плохой при «больших» δ . Теперь применим для приближенного решения СЛАУ предлагаемый алгоритм. Оказывается, что для $0 < \delta < 1$ матрица метода МПМУ выражается как

$$A_{h(\delta)} = \begin{bmatrix} x(h) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, x^4(h) - x^3(h) = h, x(h) \in \left[1, \frac{3}{2}\right],$$

ее число обусловленности $\nu_s(A_{h(\delta)}) = x(h)$ не велико по сравнению с $\nu_s(\bar{A}) = 10^8$ и при этом $\text{rank } A_{h(\delta)} = 1$. Фактически, алгоритм удаляет для указанных величин δ из СЛАУ второе уравнение с малым коэффициентом 10^{-8} , и в результате решается только первое уравнение системы. Остальные характеристики приближенных решений, полученных с помощью алгоритма МПМУ для разных δ , представлены на фиг. 1. Видно, что невязка СЛАУ и точность приближенного решения убывают как некоторая степень δ при $\delta \rightarrow 0$.

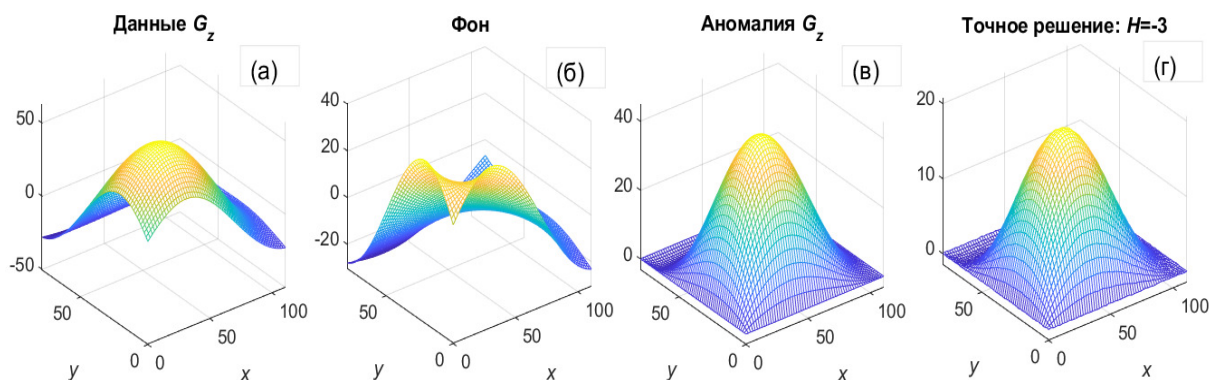
6. АДАПТАЦИЯ АЛГОРИТМА И МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

В дальнейшем мы будем рассматривать задачи 1 и 2 в дискретной постановке (4.1), $AX = Y_{an}$, с данными Y_{an} для гравитационных и магнитных аномалий, и будем решать эти задачи с помощью алгоритма МПМУ. Заме-



Фиг. 1. Результат работы алгоритма МПМУ для СЛАУ из примера 1 для различных уровней возмущения правой части δ ; (а) — относительная невязка СЛАУ $R_{X, MPMI} = \frac{\|A_{h(\delta)}X_\delta - Y_\delta\|}{\|Y_\delta\|}$; (б) — относительная ошибка приближенного решения

$$\Delta_{X, MPMI} = \frac{\|\bar{X} - A_{h(\delta)}^+ Y_\delta\|}{\|\bar{X}\|}.$$



Фиг. 2. (а) — Данные с возмущением в 0.5%, (б) — вычисленный фон, (в) — выделенная аномалия, (г) — точное решение ($H = -3$).

тим, однако, что в реальных измерениях регистрируется не сама величина Y_{an} , а суммарное поле Y , создаваемое аномалией и породами, ее окружающими. Таким образом, необходимо выделить собственно аномальное поле из измерений Y , используя некоторое модельное математическое определение аномального поля. Для того чтобы нагляднее описать этот процесс, сделаем следующие упрощающие предположения. Считаем, что измерения поля Y проводятся на плоском рельефе $z = H_0 = \text{const} \geq 0$ в прямоугольной области D , а именно: на равномерной сетке точек $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n \in D$. Эта же сетка на глубине $H < 0$ определяет положение искомым источников поля: $(x'_k, y'_k) = (x_k, y_k)$. Далее предположим, что $Y = Y_{an} + Y_{bg}$, где Y_{an} — поле, создаваемое собственно гравитационной или магнитной аномалией, а Y_{bg} — это фоновое поле, создаваемое окружающими область измерений породами. Математически фоновое поле определим как потенциальное поле (поле внешних источников-пород) в плоской области $D \times \{z = H_0\}$, удовлетворяющее на границе этой области условию $Y_{bg}|_{\partial D} = Y|_{\partial D}$. Таким образом, аномальное поле удовлетворяет нулевым граничным условиям на границе ∂D , а фоновое поле есть решение задачи Дирихле в прямоугольной области:

$$\begin{aligned} \Delta Y_{bg} &= 0, \quad (x, y) \in D \setminus \partial D, \\ Y_{bg}|_{\partial D} &= Y|_{\partial D}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

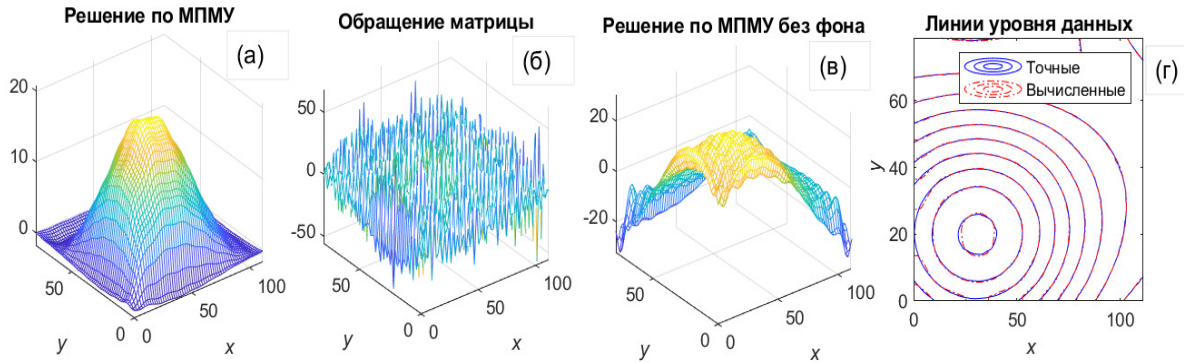
Соответственно, решая эту задачу с помощью одного из многих имеющихся эффективных методов (см., например, [29]), можно найти фоновое поле, а затем — необходимое для решения задач (4.1) аномальное поле $Y_{an} = Y - Y_{bg}$.

Сделанные предположения о рельефе носят модельный характер, и от них можно отказаться, изменяя соответственно процедуру выделения аномального поля. Для краткости мы не будем здесь это рассматривать.

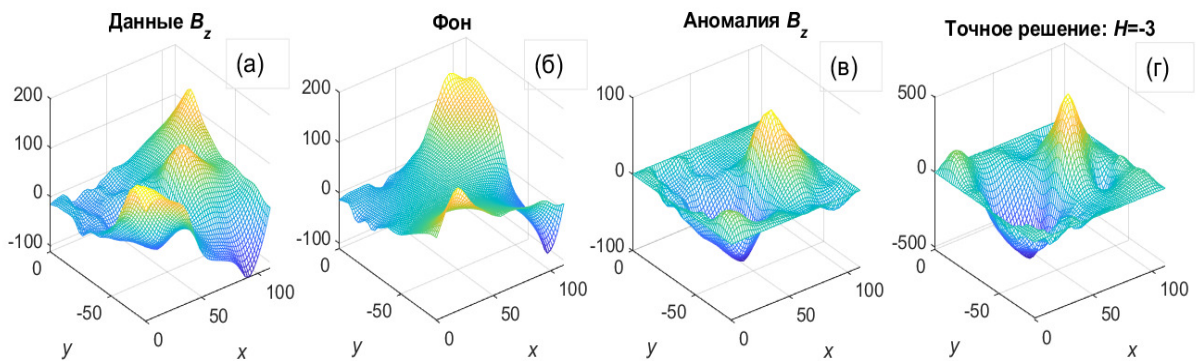
Сначала проиллюстрируем возможности алгоритма МПМУ на примерах модельных задач.

Решение обратной задачи гравиметрии. На фиг. 2а показаны данные $Y = G_z(x, y, z)$ обратной задачи при $z = H_0 = 0$, полученные путем решения прямой задачи из модельного решения $\tilde{X}$, которое задано на глубине $H = -3$ на равномерной сетке размера 3721×3721 в области $D = [0, 111] \times [0, 79]$ (см. фиг. 2г). Данные подвергнуты возмущению поточечной нормально распределенной ошибкой с нулевым средним так, что выполнено условие $\frac{\|Y - Y_\delta\|}{\|Y\|} \leq \delta_0$ для $\delta_0 = 0.005$ (ошибка в 0.5%, $\delta = \delta_0 \|Y\|$). На фиг. 2б, в представлены найденный фон Y_{bg} , т.е. решение задачи (6.1), и аномалия Y_{an} . Матрица обратной задачи A имеет полный ранг $\text{rank} A = 3721$ и число обусловленности $\nu_s(A) \approx 1464.6$. Применяв алгоритм МПМУ, мы получили матрицу $A_{h(\delta)}$, для которой $\text{rank} A_{h(\delta)} = 192$ и $\nu_s(A_{h(\delta)}) \approx 2.8$. Приближенное решение обратной задачи, полученное по этому алгоритму, т.е. величина $X_\delta = A_{h(\delta)}^+ Y_{an}$, представлена на фиг. 3а. Относительная точность полученного решения оказалась такой: $\Delta = \frac{\|X_\delta - \tilde{X}\|}{\|\tilde{X}\|} \approx 0.094$. Для сравнения на фиг. 3б показано решение обратной задачи путем обращения исходной матрицы: $\tilde{X}_\delta = A^{-1} Y_{an}$, которое, как видно, не приемлемо для интерпретации.

Сравним это решение по алгоритму МПМУ с данными в виде выделенной аномалии Y_{an} с аналогичным решением с исходными данными Y без выделения фона. Соответствующее приближение показано на фиг. 3в. Из сравнения ясно, что процедура выделения фона может существенно менять приближенное решение. На фиг. 3г дано сравнение линий уровня (изолиний) исходных данных обратной задачи (фиг. 2а) и их аналогов, вычисленных с помощью решения по алгоритму МПМУ с выделением фона. Невязка точных и вычисленных данных $\frac{\|A\tilde{X} - A X_\delta\|}{\|A\tilde{X}\|}$ составляет около 2.7%. При сравнении изолинии оказываются весьма близкими графически. Приблизительно такая же картина получается при сравнении исходных изолиний и их аналогов, вычисленных с



Фиг. 3. (а) — Решение методом МПМУ, (б) — решение путем обращения матрицы задачи, (в) — решение с данными без выделения фона, (г) — сравнение линий уровня исходных данных и их аналогов, вычисленных по алгоритму МПМУ с выделением фона.



Фиг. 4. (а) — Данные с возмущением в 0.5%, (б) — вычисленный фон, (в) — выделенная аномалия, (г) — точное решение ($H = -3$).

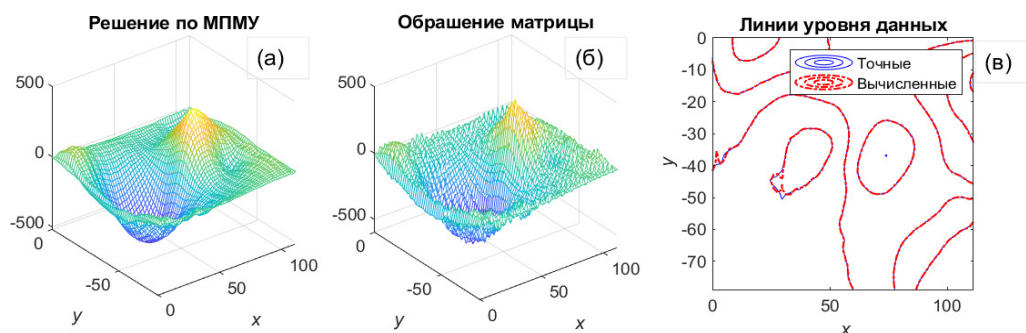
помощью решения $\tilde{X}_\delta = A^{-1}Y_{an}$ и с помощью решения по алгоритму МПМУ с исходными данными без выделения фона. Это подтверждает численную неустойчивость рассматриваемой обратной задачи. Для краткости мы не включаем в текст соответствующие рисунки.

Решение обратной задачи магнитометрии. Модельная задача построена по аналогии с модельной задачей гравиметрии на равномерной сетке размера 3721×3721 в области $D = [0, 111] \times [-79, 0]$. Ее исходные данные $Y = B_z(x, y, z)$ при $z = 0$ представлены на фиг. 4а. Модельное точное решение $\bar{X}$ на глубине $H = -3$ изображено на фиг. 4г. Данные возмущены ошибкой с $\delta_0 = 0.005$. На фиг. 2б,в показаны найденный фон и вычисленная магнитная аномалия. Матрица обратной задачи A здесь снова имеет полный ранг $\text{rank} A = 3721$, а ее число обусловленности есть $\nu_s(A) \approx 68.7$. Таким образом, эта матрица достаточно хорошо обусловлена. После применения алгоритма МПМУ получается матрица $A_{h(\delta)}$, для которой $\text{rank} A_{h(\delta)} = 1565$ и $\nu_s(A_{h(\delta)}) \approx 3.9$. Приближенное решение обратной задачи $X_\delta = A_{h(\delta)}^+ Y_{an}$, полученное по этому алгоритму изображено на фиг. 5а. Его относительная точность есть $\Delta = \frac{\|X_\delta - \bar{X}\|}{\|\bar{X}\|} \approx 0.353$. Для сравнения на фиг. 5б показано не регуляризованное решение обратной задачи $\tilde{X}_\delta = A^{-1}Y_{an}$, которое содержит колебания, не имеющие отношения к геофизической структуре.

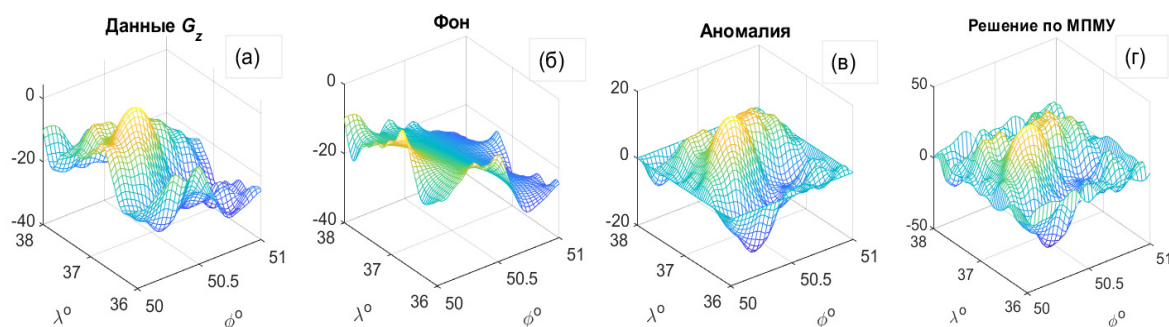
На фиг. 5в проводится сравнение изолиний исходных данных обратной задачи и их аналогов, вычисленных с помощью решения по алгоритму МПМУ с выделением фона. Невязка точных и вычисленных данных составляет около 2.2%. Видна графическая близость изолиний.

7. РАЗДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ ДЛЯ КУРСКОЙ МАГНИТНОЙ АНОМАЛИИ

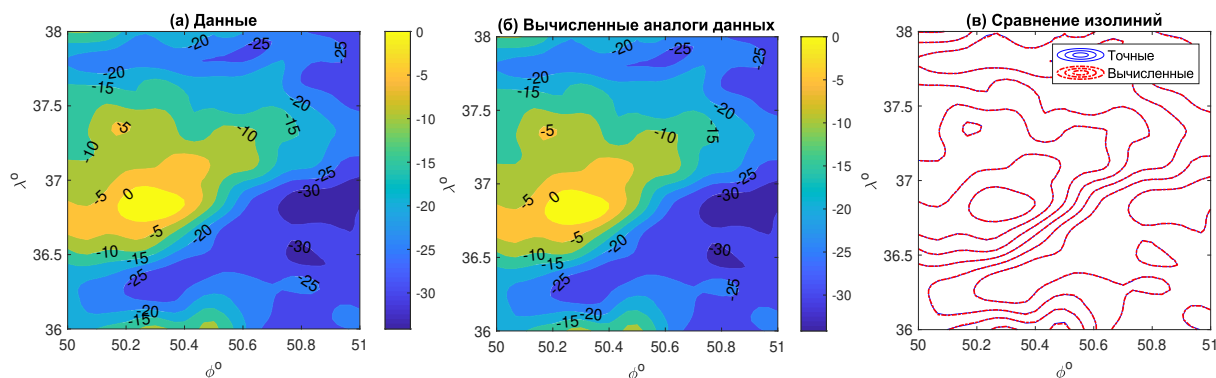
Алгоритм МПМУ был применен для обработки реальных данных для Курской магнитной аномалии (координаты: северная широта $\phi \in [50^\circ, 51^\circ]$, восточная долгота $\lambda \in [36^\circ, 38^\circ]$). Приведем результаты решения



Фиг. 5. (а) — Решение методом МПМУ, (б) — решение путем обращения матрицы задачи, (в) — сравнение линий уровня исходных данных и их аналогов, вычисленных по алгоритму МПМУ.



Фиг. 6. (а) — Данные G_z , (б) — вычисленный фон, (в) — выделенная аномалия, (г) — решение методом МПМУ.

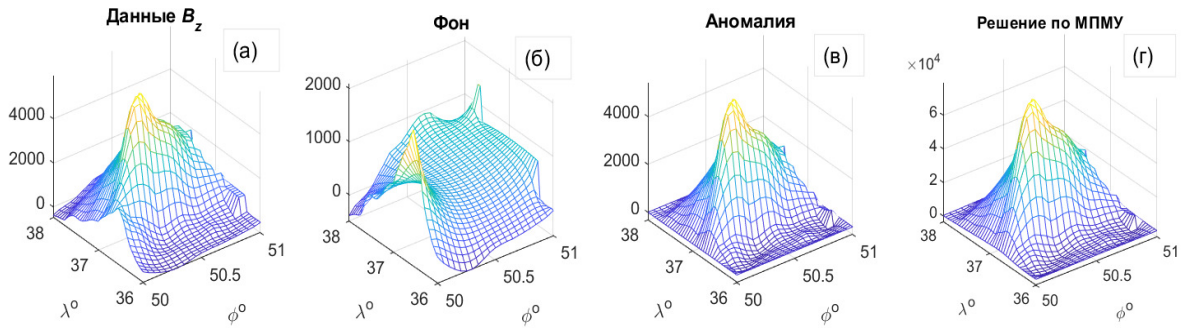


Фиг. 7. (а) — Изолинии данных G_z , (б) — изолинии их аналогов, вычисленных с помощью метода МПМУ, (в) — сравнение этих изолиний.

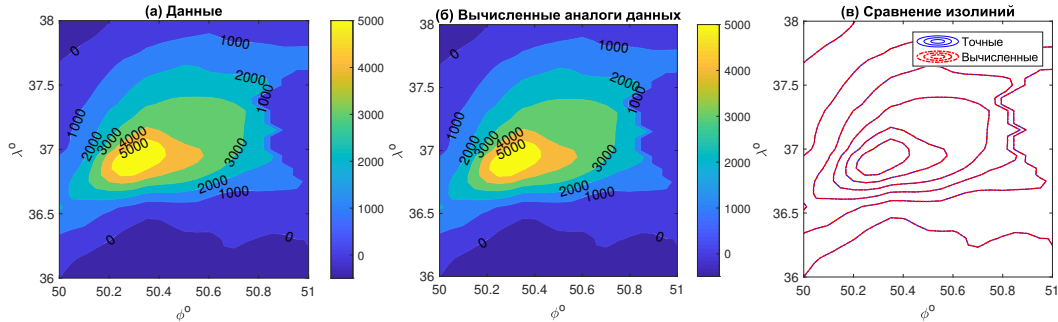
соответствующих обратных задач 1 и 2 в дискретной постановке (4.1) для $H = -3$, приближенно считая рельеф плоским: $H_0 = 0$. Все исходные данные и сетки взяты из баз данных WGM2012 GLOBAL MODEL [30] (гравитационные данные) и WDMAM [31] (магнитные данные). Во всех расчетах предполагалось, что данные измерены с относительной точностью 0.1%.

Обратная задача гравиметрии. На фиг. 6 показаны данные обратной задачи G_z , вычисленный фон, найденная аномалия и решение обратной задачи по методу МПМУ. На фиг. 7 изображены изолинии точных данных, их аналогов, вычисленных с помощью решения обратной задачи. Приведено также сравнение этих результатов. Невязка точных и вычисленных данных составляет 3.6%. Изолинии графически близки.

Обратная задача магнитометрии. Аналогичные результаты отображены на фиг. 8, 9. Невязка точных и вычисленных данных составляет здесь 3.1%.



Фиг. 8. (а) — Данные B_z , (б) — вычисленный фон, (в) — выделенная аномалия, (г) — решение методом МПМУ.



Фиг. 9. (а) — Изолинии данных B_z , (б) — изолинии их аналогов, вычисленных с помощью метода МПМУ, (в) — сравнение этих изолиний.

8. СОВМЕСТНОЕ РЕШЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ ЗАДАЧ

Разработано достаточно большое число способов совместного решения обратных задач такого рода (см., например, [9, 10, 13]). Формально решить совместно обратные задачи гравиметрии и магнитометрии в заданном районе можно, объединив системы уравнений с матрицами A_{gr} и A_{mg} для неизвестных g и m соответственно в единую СЛАУ с решением-столбцом $X = [g; m]^T$, правой частью $Y = [G_z; B_z]^T$ и с матрицей $A = [A_{gr} \ 0; 0 \ A_{mg}]$, а затем решить новую систему

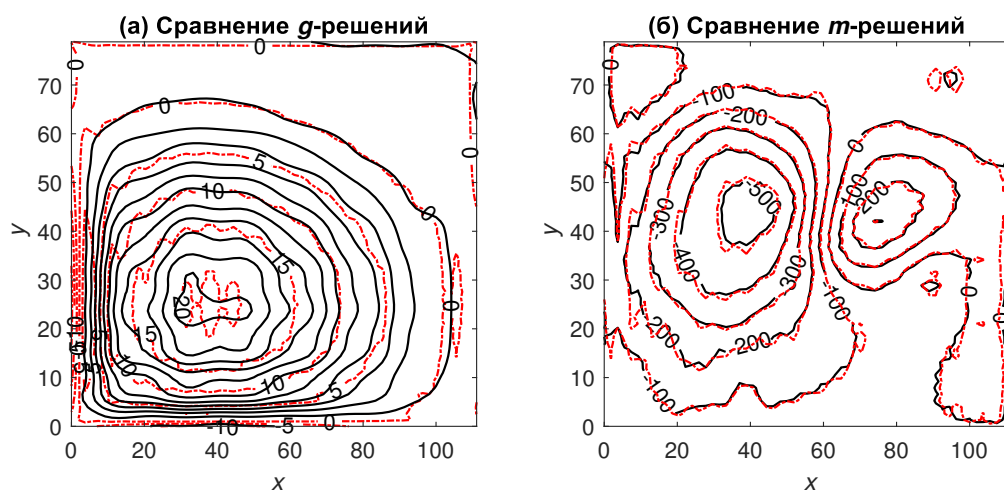
$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_{gr} & 0 \\ 0 & A_{mg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_z \\ B_z \end{bmatrix}.$$

Именно такой подход мы здесь используем для иллюстрации к алгоритму МПМУ. Однако в силу разнородности гравитационных и магнитных измерений и данных требуется масштабирование соответствующих величин. Мы использовали следующие новые масштабированные величины: $\bar{A}_{gr} = \frac{A_{gr}}{\|A_{gr}\|}$, $\bar{A}_{mg} = \frac{A_{mg}}{\|A_{mg}\|}$, $\bar{G}_z = \frac{G_z}{\|G_z\|}$, $\bar{B}_z = \frac{B_z}{\|B_z\|}$. Таким образом, совместное решение обратных задач грави- и магниторазведки сводится к решению СЛАУ вида

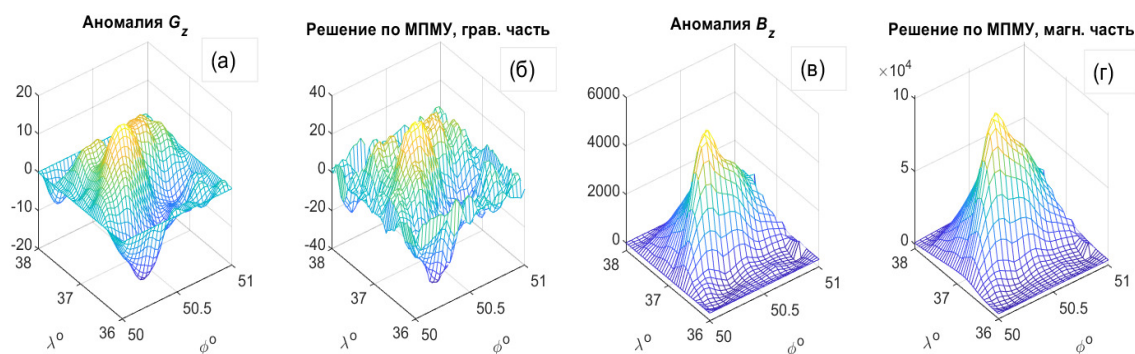
$$\bar{A}\bar{X} = \bar{Y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{A}_{gr} & 0 \\ 0 & \bar{A}_{mg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{g} \\ \bar{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{G}_z \\ \bar{B}_z \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

и искомые величины вычисляются как $g = \frac{\|G_z\|}{\|A_{gr}\|} \bar{g}$, $m = \frac{\|B_z\|}{\|A_{mg}\|} \bar{m}$. Систему (8.1) мы решали с помощью алгоритма МПМУ.

Приведем результаты совместного решения модельных задач из разд. 6. Исходная матрица имеет следующие характеристики: $\dim \bar{A} = 7442 \times 7442$, $\text{rank} \bar{A} = 7442$ и $\nu_s(\bar{A}) \approx 1465$. Для матрицы метода МПМУ оказалось, что $\text{rank} \bar{A}_{h(\delta)} = 3297$ и $\nu_s(\bar{A}_{h(\delta)}) \approx 29.6$. Таким образом, число обусловленности матрицы существенно улучшилось. При этом, однако, точность получаемых приближенных решений гравитационной и магнитной задачи несколько ухудшилась. Качественно, это можно видеть на фиг. 10 из сравнения изолиний решений. Там сравниваются изолинии отдельных решений этих задач (непрерывные линии) и аналогичных линий, полученных при совместном решении (пунктирные линии). Количественно, отклонения полученных приближенных решений от точных получились такие: $\Delta_{gr} = \frac{\|g_{appr} - g_{ex}\|}{\|g_{ex}\|} \approx 0.182$, $\Delta_{mag} = \frac{\|m_{appr} - m_{ex}\|}{\|m_{ex}\|} \approx 0.056$. При этом невязка СЛАУ (8.1) для полученных решений составляет около 1%.



Фиг. 10. Сравнение изолиний отдельного решения (непрерывные линии) и совместного решения (пунктир) обратных задач гравиметрии (а) и магнитометрии (б).



Фиг. 11. Данные (а), (б) и совместные решения (в), (г) обратных задач для Курской магнитной аномалии с помощью алгоритма МПМУ.

Реализация алгоритма МПМУ для совместного решения обратных задач требует несколько большего времени, чем суммарное время решения этих задач раздельно этим же методом. Такой эффект связан с использованием в МПМУ метода сингулярного разложения матриц (SVD). Известно, что число операций N_{SVD} , требуемое в методе SVD с квадратной матрицей размера $N \times N$, имеет асимптотику вида $N_{SVD} \sim \frac{8N^3}{3}$ при больших N . Поэтому для совместного решения рассматриваемых задач с матрицами размера $N_1 \times N_1$ и $N_2 \times N_2$ требуется время порядка $t \sim \frac{8(N_1+N_2)^3}{3}$ а это больше чем сумма времен $t_1 + t_2 \sim \frac{8(N_1^3+N_2^3)}{3}$ раздельного решения задач.

Аналогичное совместное решение гравитационной и магнитной задачи было проведено с данными по Курской магнитной аномалии из разд. 7. В этом случае $\dim \bar{A} = 3782 \times 3782$, $\text{rank} \bar{A} = 3782$ и $v_s(\bar{A}) \approx 3.45 \cdot 10^{19}$. Для матрицы метода МПМУ: $\text{rank} \bar{A}_{h(\delta)} = 2058$ и $v_s(\bar{A}_{h(\delta)}) \approx 6.64$. Следует отметить значительное улучшение числа обусловленности. Полученные приближенные решения можно видеть на фиг. 11б,г. Поскольку точные решения для этой задачи неизвестны, можно сравнить на сколько полученные здесь решения отличаются от решений, найденных раздельно. Будем сравнивать такие величины, вычисляя отклонения $\bar{\Delta} = \frac{\|X_{\text{separate}} - X_{\text{joint}}\|}{\|X_{\text{separate}}\|}$, где X_{separate} — величина, найденная при раздельном решении, а X_{joint} — величина, найденная при совместном решении. Оказалось, что эти отклонения для гравитационных и магнитных решений таковы: $\bar{\Delta}_{gr} \approx 0.048$ и $\bar{\Delta}_{mag} \approx 0.069$.

9. ВЫВОДЫ

1. Предлагаемая в статье постановка обратных задач грави- и магниторазведки гарантирует единственность решений этих задач. Однако, при дискретизации эти задачи могут терять такое свойство, и тогда для их решения необходимо применять регуляризующие алгоритмы.

2. Разработанный алгоритм МПМУ улучшения числа обусловленности матриц обладает регуляризующими свойствами: он позволяет устойчиво по отношению к возмущениям данных найти решение поставленных обратных задач грави- и магниторазведки взятых отдельно, а также совместно. Это доказано теоретически и подтверждено при решении модельных задач.

3. С помощью алгоритма МПМУ были решены рассматриваемые обратные задачи для данных по Курской магнитной аномалии, как раздельно так и совместно. Полученные приближенные решения оказались достаточно близкими, однако время совместного решения обратных задач оказалось несколько большим, чем суммарное время раздельного решения этих задач. Такой эффект объясняется аналогичным свойством метода SVD, который используется в алгоритме МПМУ. Несмотря на это, совместное решение можно применять, например, для контроля получаемых решений.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

МЕТОД МИНИМАЛЬНОЙ ПСЕВДООБРАТНОЙ МАТРИЦЫ И ЕГО ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Центральным пунктом метода является решение **Задачи**: найти матрицу $\tilde{A}_h$, удовлетворяющую условию

$$\|\tilde{A}_h^+\| = \inf \{ \|A^+\| : \forall A, \dim A = m \times n, \|A - A_h\| \leq h \}. \quad (\text{A.1})$$

Эта задача решена в [23, 28] следующим образом. Используется SVD-разложение заданной действительной матрицы A_h : $A_h = U_h R_h V_h^T$. Здесь U_h, V_h — ортогональные матрицы размеров $m \times m$ и $n \times n$, а

$$R_h = \text{diag} [\rho_1^{(h)}, \rho_2^{(h)}, \dots, \rho_M^{(h)}], \quad \rho_1^{(h)} \geq \rho_2^{(h)} \geq \dots \geq \rho_M^{(h)} \geq 0, \quad M = \min \{n, m\},$$

есть диагональная матрица размера $m \times n$, содержащая упорядоченные сингулярные числа $\rho_k^{(h)}, k = 1, \dots, M$. Тогда одно из решений задачи (A.1) имеет вид: $\tilde{A}_h = U_h \tilde{R}_h V_h^T$, где $\tilde{R}_h = \text{diag} [\rho_1^{(h)} x_1(h), \rho_2^{(h)} x_2(h), \dots, \rho_M^{(h)} x_M(h)]$.

Числа $x_k(h)$ вычисляются по следующему правилу. Пусть $h_k = \frac{27}{16} (\rho_k^{(h)})^4$. Тогда $x_k(h) = \{ \tilde{x}_k(h), 0 \leq h \leq h_k; 0, h > h_k \}$, где $\tilde{x}_k(h)$ есть решение уравнения $x_k^4 - x_k^3 = h (\rho_k^{(h)})^{-4}$, $x_k \in [1, \frac{3}{2}]$. Псевдообращение $\tilde{A}_h^+$ вычисляется как $\tilde{A}_h^+ = V_h \tilde{R}_h^+ U_h^T$, где

$$\tilde{R}_h^+ = \text{diag} [\theta [\rho_1^{(h)} x_1(h)], \theta [\rho_2^{(h)} x_2(h)], \dots, \theta [\rho_M^{(h)} x_M(h)]]$$

и $\theta(\rho) = \{\rho^{-1}, \rho > 0; 0, \rho = 0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков П.С. Об единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. № 3. С. 165–168.
2. Сретенский Л.Н. О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. 1954. Т. 99. № 1. С. 21–22.
3. Заморев А.А. Определение формы тела по производным внешнего гравитационного потенциала // Изв. АН СССР Сер. геогр и геофиз. 1942. № 1/2. С. 48–54.
4. Иванов В.К. Теорема единственности обратной задачи логарифмического потенциала для звездных множеств // Изв. вузов. Матем. 1958. № 3. С. 99–106.
5. Цирульский А.В. О единственности решения обратной задачи теории потенциала // Изв. АН СССР Физика Земли. 1969. № 6. С. 60–65.
6. Страхов В.Н. Об эквивалентности в обратной задаче гравиметрии при переменной плотности масс // Докл. АН СССР. 1977. Т. 236. № 2. С. 329–331.
7. Bhattacharyya B.K. A method for computing the total magnetization vector and the dimensions of a rectangular block-shaped body from magnetic anomalies // Geophysics. 1966. V. 31. P. 74–96.
8. Zhdanov M.S. Integral Transforms in Geophysics. New York: Springer-Verlag, 1987.

9. Zeyen H., Pous J. 3-D joint inversion of magnetic and gravimetric data with a priori information // *Geophysical Journal International*. 1993. V. 112. P. 244–256.
10. Haber E., Oldenburg D. Joint inversion: a structural approach // *Inverse Problems*. 1997. V. 13. P. 63–77.
11. Li Y., Oldenburg D.W. 3-D inversion of gravity data // *Geophysics*. 1998. V. 63. P. 109–119.
12. Prilepko A.I., Orlovsky D.G. and Vasin, I.A. *Methods for solving Inverse Problems in Mathematical Physics*. New York: Marcel Dekker, 2000.
13. Fregoso E., Gallardo L. A. Cross-gradients joint 3D inversion with applications to gravity and magnetic data // *Geophysics*. 2009. V. 74. No 4. P. L31–L42.
14. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // *Физика Земли*. 2002. Т. 38. № 2. С. 3–19.
15. Strakhov V.N., Stepanova I.E. Solution of gravity problems by the S-approximation method (regional version) // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2002. V. 38. No 7. P. 535–544.
16. Stepanova I.E. On the S-approximation of the Earth's gravity field: regional version // *Inverse Problems in Science and Engng*. 2009. V. 17. No 8. P. 1095–1111.
17. Степанова И.Э., Керимов И.А., Раевский Д.Н., Щепетилов А.В. Комбинированный метод F-, S- и R-аппроксимаций при решении задач геофизики и геоморфологии // *Физика Земли*. 2018. № 1. С. 96–113.
18. Степанова И.Э., Керимов И.А., Ягола А. Г. Аппроксимационный подход в различных модификациях метода линейных интегральных представлений. *Физика Земли*. 2019. № 2. С. 31–46.
19. Stepanova I., Lukyanenko D., Kolotov I., Shchepetilov A., Yagola A. On the Unique Solvability of Inverse Problems of Magnetometry and Gravimetry // *Mathematics*. 2023. V. 11. P. 3230.
20. Колотов И.И., Лукьяненко Д.В., Степанова И.Э., Щепетилов А.В., Ягола А.Г. О единственности решения систем линейных алгебраических уравнений, к которым редуцируются обратные задачи гравиметрии и магнитометрии: региональный вариант // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2023. Т. 63. № 9. С. 1446–1457.
21. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989.
22. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
23. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995; М.: Курс, 2017.
24. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of Inverse Problems*. Dordrecht: Kluwer, 1996.
25. Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968.
26. Hansen P.C. The truncated SVD as a method for regularization // *BIT*. 1987. V. 27. P. 534–553.
27. Леонов А.С. Метод минимальной псевдообратной матрицы: теория и численная реализация // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1991. Т.31. № 10. С. 1427–1443.
28. Леонов А.С. Методы решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений, улучшающие обусловленность // *Изв. вузов. Математика*. 2024. № 10. С. 21–31.
29. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
30. <https://bgi.obs-mip.fr/data-products/grids-and-models/wgm2012-global-model/>
31. <http://wdmam.org/download.php>

SOLVING SOME INVERSE PROBLEMS OF GRAVIMETRY AND MAGNETOMETRY USING AN ALGORITHM TO IMPROVE THE NUMBER OF MATRIX CONDITIONALITY

A.S. Leonov^{a,*}, D.V. Lukyanenko^{b,**}, A.G. Yagola^{b,***}

^a 115409 Moscow, Kashirskoe shosse, 31, NRNU MEPhI, Moscow, Russia

^b 199992 Moscow, Leninskie Gory, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Russia

*e-mail: asleonov@mephi.ru

**e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

***e-mail: yagola@physics.msu.ru

Received: 27.03.2024

Revised: 27.03.2024

Accepted: 28.06.2024

Abstract. One of the possible formulations of the inverse problems of gravimetry and magnetometry is considered, which consists in finding at a given depth hypothetical point sources of corresponding potential fields for these fields measured on the Earth's surface. The uniqueness of the solution of such inverse problems is established. For the numerical solution of their discretized variants, a new algorithm is used based on improving the condition number of the problem matrix using the minimum pseudo-inverse matrix method (MPM algorithm). The algorithm is tested on model problems of gravity and magnetic exploration with their separate solution. A variant of the MPM algorithm for the joint solution of these inverse problems is also proposed and tested. In conclusion, the algorithm is used for separate and joint processing of some well-known gravity and magnetic exploration data for the Kursk magnetic anomaly.

Keywords: gravity and magnetic exploration, inverse problem, uniqueness of solution, method of minimal pseudo-inverse matrix.