

УДК 517.956.224

## ТЕСТИРОВАНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ПРЯМОГО ЗНАЧЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ НА ГРАНИЦЕ ТОНКОГО ТЕЛА<sup>1)</sup>

© 2024 г. П.А. Крутицкий<sup>1,\*</sup>, И.О. Резниченко<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

\*e-mail: [biem@mail.ru](mailto:biem@mail.ru)

\*\*e-mail: [io.reznichenko@physics.msu.ru](mailto:io.reznichenko@physics.msu.ru)

Поступила в редакцию 17.03.2024 г.

Переработанный вариант 17.03.2024 г.

Принята к публикации 24.04.2024 г.

С помощью тестовых примеров, построенных на основе явного решения задачи о скачке, проведено сравнение квадратурных формул для прямого значения нормальной производной гармонического потенциала простого слоя на границе тонкого тела. Установлено, что погрешность вычислений по квадратурной формуле, основанной на численном интегрировании, в несколько раз больше, чем погрешность вычислений по улучшенной квадратурной формуле, основанной на аналитическом вычислении интегралов. Как показали численные тесты, улучшенная квадратурная формула обеспечивает приемлемую точность вычислений и в том случае, когда толщина тела существенно меньше диаметра разбиения поверхности, что позволяет достичь требуемой точности вычислений при меньшей стоимости. Полученные результаты могут использоваться для численного решения краевых задач в тонких телах и в слоистых средах методом потенциалов. Библ. 10. Фиг. 3. Табл. 5.

**Ключевые слова:** уравнение Лапласа, теория потенциала, тонкое тело, квадратурные формулы.

**DOI:** 10.31857/S0044466924100016, **EDN:** KBCTMN

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Квадратурные формулы для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя используются при решении краевых задач для уравнения Лапласа методом интегральных уравнений [1]. В [2, Гл. 2] построены квадратурные формулы, основанные на численном интегрировании. В [3], [4] получены квадратурные формулы, основанные на приближенном аналитическом вычислении интегралов. Формула из [4] является улучшением формулы из [3] за счет более точного учета элементов подынтегральной функции при аналитическом вычислении интегралов.

При решении краевых задач в слоистых средах возникает необходимость использования квадратурных формул на границе тонкого тела. В настоящей работе изучается возможность использования различных квадратурных формул для прямого значения нормальной производной гармонического потенциала простого слоя в таких задачах. Для этого построены тестовые примеры, где известны явные выражения для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя на границе тонкого тела. Граница моделируется двумя эквидистантными сферами. Примеры получены на основе решения задачи о скачке для гармонических функций, которая изучалась в [5], [6] в трехмерном случае и в [7], [8] в двумерном случае. В результате численного тестирования квадратурных формул на границе тонкого тела установлено, что формула, основанная на численном интегрировании [2, Гл. 2], дает в несколько раз более высокую погрешность, чем квадратурные формулы, полученные в [3], [4] и основанные на аналитическом вычислении интегралов. Как показали численные тесты, формула [4] превосходит по точности формулу из [3]. Кроме того, формула из [4] позволяет проводить вычисления с высокой точностью и в том случае, когда толщина тела существенно меньше шага интегрирования, что позволяет уменьшить вычислительные затраты. Таким образом, квадратурная формула из [4] может эффективно использоваться при моделировании различных физических процессов в слоистых средах и тонких телах.

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке И.О. Резниченко Московским центром фундаментальной и прикладной математики по соглашению N 075-15-2022-283 с Минобрнауки РФ.

## 2. ЗАДАЧА О СКАЧКЕ

В декартовых координатах  $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$  рассмотрим конечное число простых гладких замкнутых поверхностей класса  $C^2$ , не имеющих общих точек. Пусть каждая поверхность ограничивает объемно-односвязную внутреннюю область. Совокупность этих поверхностей обозначим через  $\Gamma$ . Будем считать, что на каждой поверхности выбрано непрерывное поле нормалей, единичную нормаль в точке  $x \in \Gamma$  обозначим через  $\mathbf{n}_x$ . Все поверхности, составляющие  $\Gamma$ , будем рассматривать как двусторонние. Через  $\Gamma^-$  обозначим ту сторону  $\Gamma$ , которую мы видим, глядя навстречу вектору нормали  $\mathbf{n}_x$ , а через  $\Gamma^+$  обозначим противоположную сторону.

Сформулируем задачу о скачке.

**Задача S.** Найти функцию  $u(x) \in C^0(R^3) \cap C^2(R^3 \setminus \Gamma)$ , равномерно стремящуюся к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ , имеющую на  $\Gamma^+$  и на  $\Gamma^-$  правильную нормальную производную, удовлетворяющую уравнению Лапласа

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in R^3 \setminus \Gamma,$$

и граничному условию в виде скачка нормальной производной на  $\Gamma$

$$\left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^+} - \left. \frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^-} = \mu(x) \in C^0(\Gamma). \quad (1)$$

Здесь  $\mu(x)$  — заданная функция, понятие правильной нормальной производной введено в [9, § 24.2].

**Теорема.** Решение задачи S существует, единственно и дается гармоническим потенциалом простого слоя с плотностью  $\mu(x)$

$$\mathcal{V}_0[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\mu(y)}{|x-y|} ds_y. \quad (2)$$

**Доказательство.** 1. Существование. Гармонический потенциал простого слоя (2) удовлетворяет всем условиям задачи S. В частности, потенциал имеет правильную нормальную производную [9, § 24.2] на  $\Gamma^+$  и на  $\Gamma^-$  и удовлетворяет граничному условию на  $\Gamma$ , так как

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^+} - \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^-} = \mu(x), \quad (3)$$

согласно предельным формулам для нормальной производной потенциала простого слоя [9, § 27.7]. Тем самым, решение задачи S существует и дается функцией (2).

2. Единственность. В силу линейности задачи S для доказательства того, что задача S имеет не более одного решения, достаточно показать, что однородная задача S имеет только тривиальное решение. Пусть  $u^0(x)$  — решение однородной задачи S, где  $\mu \equiv 0$ , тогда из граничного условия (1) получаем, что нормальная производная функции  $u^0(x)$  не имеет скачка при переходе через  $\Gamma$ :

$$\left. \frac{\partial u^0(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^+} = \left. \frac{\partial u^0(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma^-}.$$

Поскольку сама функция  $u^0(x)$  непрерывна при переходе через  $\Gamma$  по условиям задачи S, то, используя третью формулу Грина для гармонических функций [9, § 24], можно показать, что функция  $u^0(x)$  аналитически продолжима через  $\Gamma$ . Следовательно, функция  $u^0(x)$  является гармонической во всем пространстве  $R^3$ , в том числе на  $\Gamma$ . Далее теорему можно доказывать двумя способами. Первый способ основан на использовании аналога теоремы Лиувилля для гармонических функций [9, § 24.9]. Поскольку функция  $u^0(x)$  — гармоническая во всем пространстве, то она по указанной теореме является гармоническим полиномом. Поскольку функция  $u^0(x)$  ограничена на бесконечности, то она является полиномом нулевой степени, т.е. константой. По условию на бесконечности функция  $u^0(x)$  равномерно стремится к нулю при  $|x| \rightarrow \infty$ , откуда следует, что эта константа равна нулю, поэтому  $u^0(x) \equiv 0$  в  $R^3$ . Другой способ доказательства единственности решения основан на использовании принципа максимума для гармонических функций [9, § 24.5]. Теорема доказана.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ К ПОСТРОЕНИЮ ТЕСТОВЫХ ПРИМЕРОВ НА ГРАНИЦЕ СФЕРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Рассмотрим функции

$$g_1(x, R_0) = \begin{cases} R_0 & \text{при } |x| < R_0, \\ \frac{R_0^2}{|x|} & \text{при } |x| > R_0, \end{cases} \quad g_2(x, R_0) = \begin{cases} \frac{|x| \cos \vartheta}{3} & \text{при } |x| < R_0, \\ \frac{R_0^3 \cos \vartheta}{3|x|^2} & \text{при } |x| > R_0; \end{cases}$$

$$g_3(x, R_0) = \begin{cases} \frac{|x| \cos \varphi \sin \vartheta}{3}, & \text{если } |x| < R_0, \\ \frac{R_0^3 \cos \varphi \sin \vartheta}{3|x|^2}, & \text{если } |x| > R_0, \end{cases} \quad g_4(x, R_0) = \begin{cases} \frac{|x| \sin \varphi \sin \vartheta}{3}, & \text{если } |x| < R_0, \\ \frac{R_0^3 \sin \varphi \sin \vartheta}{3|x|^2}, & \text{если } |x| > R_0, \end{cases}$$

где  $\varphi$  и  $\vartheta$  — азимутальный и зенитный углы в сферических координатах с центром в начале координат.

Функции  $g_1(x, R_0), \dots, g_4(x, R_0)$  — гармонические вне сферы радиуса  $R_0$  с центром в начале координат, равномерно стремятся к нулю на бесконечности, непрерывны всюду в  $R^3$  и имеют на сфере радиуса  $R_0$  правильную нормальную производную извне и изнутри, поскольку их производные непрерывно продолжимы на указанную сферу извне и изнутри [9, § 24.2]. Каждая из функций  $g_1(x, R_0), \dots, g_4(x, R_0)$  имеет на сфере радиуса  $R_0$  скачок нормальной производной, и эти скачки даются выражениями

$$\frac{\partial g_1(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0-0} - \frac{\partial g_1(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0+0} = 1,$$

$$\frac{\partial g_2(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0-0} - \frac{\partial g_2(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0+0} = \cos \vartheta,$$

$$\frac{\partial g_3(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0-0} - \frac{\partial g_3(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0+0} = \cos \varphi \sin \vartheta,$$

$$\frac{\partial g_4(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0-0} - \frac{\partial g_4(x, R_0)}{\partial |x|} \Big|_{|x|=R_0+0} = \sin \varphi \sin \vartheta.$$

Пусть совокупность поверхностей  $\Gamma$  состоит из 2-х сфер с центром в начале координат: сферы  $\Gamma_1$  единичного радиуса и сферы  $\Gamma_2$  радиуса  $\varrho > 1$ . Пусть через  $\mathbf{n}_x$  на сфере  $\Gamma_1$  обозначается внешняя нормаль, а на сфере  $\Gamma_2$  — внутренняя нормаль. Тогда  $\Gamma_1^+$  — внутренняя сторона единичной сферы, а  $\Gamma_1^-$  — ее внешняя сторона. Для сферы радиуса  $\varrho$  через  $\Gamma_2^+$  обозначается внешняя сторона, а через  $\Gamma_2^-$  — внутренняя сторона. Соответственно,  $\Gamma^\pm = \Gamma_1^\pm \cup \Gamma_2^\pm$ .

Рассмотрим функции

$$u_1(x) = g_1(x, 1) + g_1(x, \varrho), \tag{4}$$

$$u_2(x) = g_1(x, 1) + g_2(x, \varrho), \tag{5}$$

$$u_3(x) = g_1(x, 1) + g_3(x, \varrho), \tag{6}$$

$$u_4(x) = g_3(x, 1) + g_4(x, \varrho), \tag{7}$$

$$u_5(x) = g_2(x, 1) + g_3(x, \varrho). \tag{8}$$

Функция  $u_j(x)$  удовлетворяет задаче о скачке  $\mathbf{S}$  вне сфер  $\Gamma$  со следующим граничным условием на  $\Gamma$  :

$$\frac{\partial u_j(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma^+} - \frac{\partial u_j(x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma^-} = \mu_j(x), \quad j = 1, \dots, 5,$$

где

$$\begin{aligned} \mu_1(x)|_{|x|=1} &= 1, & \mu_1(x)|_{|x|=\varrho} &= 1, \\ \mu_2(x)|_{|x|=1} &= 1, & \mu_2(x)|_{|x|=\varrho} &= \cos \vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_3(x)|_{|x|=1} &= 1, & \mu_3(x)|_{|x|=q} &= \cos \varphi \sin \vartheta, \\ \mu_4(x)|_{|x|=1} &= \cos \varphi \sin \vartheta, & \mu_4(x)|_{|x|=q} &= \sin \varphi \sin \vartheta, \\ \mu_5(x)|_{|x|=1} &= \cos \vartheta, & \mu_5(x)|_{|x|=q} &= \cos \varphi \sin \vartheta.\end{aligned}$$

По теореме решение задачи о скачке  $\mathbf{S}$  дается потенциалом простого слоя (2) и единственно. В силу единственности решения задачи  $\mathbf{S}$  заключаем, что функции  $u_1(x), \dots, u_5(x)$ , дающие решение задачи  $\mathbf{S}$  вне сфер  $\Gamma$ , могут быть представлены в виде потенциалов простого слоя

$$u_j(x) = \mathcal{V}_0[\mu_j](x), \quad j = 1, \dots, 5. \quad (9)$$

Таким образом, для потенциалов простого слоя (9) имеем явные выражения (4) – (8). Прямое значение нормальной производной для потенциала простого слоя (2) на  $\Gamma$  можно найти по формуле [9, § 27.7]

$$\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma^+} + \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{\Gamma^-} \right]. \quad (10)$$

Используя явные выражения для потенциалов  $\mathcal{V}_0[\mu_1](x), \dots, \mathcal{V}_0[\mu_5](x)$ , находим для них прямые значения нормальной производной на сферах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_1](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} &= -\frac{1}{2}, & \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_1](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=q} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{q^2}, \\ \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_2](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} &= -\frac{1}{2} + \frac{\cos \vartheta}{3}, & \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_2](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=q} &= \frac{1}{q^2} + \frac{\cos \vartheta}{6}, \\ \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_3](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} &= -\frac{1}{2} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3}, & \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_3](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=q} &= \frac{1}{q^2} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6}, \\ \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_4](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} &= -\frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6} + \frac{\sin \varphi \sin \vartheta}{3}, & \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_4](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=q} &= \frac{2 \cos \varphi \sin \vartheta}{3q^3} + \frac{\sin \varphi \sin \vartheta}{6}, \\ \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_5](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=1} &= -\frac{\cos \vartheta}{6} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3}, & \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_5](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \Big|_{|x|=q} &= \frac{2 \cos \vartheta}{3q^3} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6}.\end{aligned}$$

Тем самым на границе сферического слоя построены тестовые примеры с явными выражениями для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя.

#### 4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ, ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

Сфера единичного радиуса  $\Gamma_1$  задается параметрически уравнениями

$$y_1(\varphi, \vartheta) = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y_2(\varphi, \vartheta) = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad y_3(\varphi, \vartheta) = \cos \vartheta, \quad (11)$$

а сфера  $\Gamma_2$  радиуса  $q > 1$  определяется уравнениями

$$y_1(\varphi, \vartheta) = q \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y_2(\varphi, \vartheta) = q \sin \vartheta \sin \varphi, \quad y_3(\varphi, \vartheta) = q \cos \vartheta, \quad (12)$$

где  $\varphi$  и  $\vartheta$  — азимутальный и зенитный углы в сферических координатах с центром в начале координат. Пусть  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $\vartheta \in [0, \pi]$  для внутренней сферы  $\Gamma_1$  и  $\varphi \in [4\pi, 6\pi]$ ,  $\vartheta \in [0, \pi]$  для внешней сферы  $\Gamma_2$ . Прямоугольник  $[0, 2\pi] \times [0, \pi]$  отображается на сферу  $\Gamma_1$ , а прямоугольник  $[4\pi, 6\pi] \times [0, \pi]$  отображается на сферу  $\Gamma_2$ , и различным внутренним точкам этих прямоугольников соответствуют различные точки на каждой сфере.

Известно [10, Гл. 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного)  $\eta(y(\varphi, \vartheta)) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$  в точке  $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$  выражаются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_{\varphi} & (y_3)_{\varphi} \\ (y_2)_{\vartheta} & (y_3)_{\vartheta} \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_{\varphi} & (y_1)_{\varphi} \\ (y_3)_{\vartheta} & (y_1)_{\vartheta} \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_{\varphi} & (y_2)_{\varphi} \\ (y_1)_{\vartheta} & (y_2)_{\vartheta} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Будем считать, что нормаль  $\eta(y)$  на  $\Gamma_1$  и на  $\Gamma_2$  выбрана внутренней по отношению к сферическому слою, т.е. на сфере  $\Gamma_1$  берется внешняя нормаль, а на сфере  $\Gamma_2$  — внутренняя. Следовательно, на внутренней сфере  $\Gamma_1$  имеем

$$\eta_1 = \cos \varphi \sin^2 \vartheta, \quad \eta_2 = \sin \varphi \sin^2 \vartheta, \quad \eta_3 = \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

На внешней сфере  $\Gamma_2$  имеем

$$\eta_1 = -\varrho^2 \cos \varphi \sin^2 \vartheta, \quad \eta_2 = -\varrho^2 \sin \varphi \sin^2 \vartheta, \quad \eta_3 = -\varrho^2 \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

Положим  $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$ , тогда  $|\eta(y)| = \sin \vartheta$  на  $\Gamma_1$  и  $|\eta(y)| = \varrho^2 \sin \vartheta$  на  $\Gamma_2$ . Отметим, что направление единичной нормали  $\mathbf{n}_x$  совпадает с направлением нормали  $\eta$ , так как вектор  $\mathbf{n}_x$  получается из  $\eta$  в результате нормировки.

Разобьем отрезок  $[0, 2\pi]$ , где меняется  $\varphi$  для внутренней сферы, на  $N_1$  отрезочков с длиной  $h_1 = 2\pi/N_1$ , а отрезок  $[4\pi, 6\pi]$ , где меняется  $\varphi$  для внешней сферы, на  $N_2$  отрезочков с длиной  $h_2 = 2\pi/N_2$ . Для внутренней сферы середины отрезков разбиения имеют координату  $\varphi_n = (n + 1/2)h_1$ , где  $n = 0, \dots, N_1 - 1$ . Для внешней сферы середины отрезков разбиения имеют координату  $\varphi_n = 4\pi + (n - N_1 + 1/2)h_2$ , где  $n$  меняется от  $N_1$  до  $N - 1$ , и  $N = N_1 + N_2$ .

Разобьем отрезок  $[0, \pi]$ , где меняется  $\vartheta$  для внутренней сферы, на  $M_1$  отрезочков с длиной  $H_1 = \pi/M_1$ , а отрезок  $[0, \pi]$ , где меняется  $\vartheta$  для внешней сферы, на  $M_2$  отрезочков с длиной  $H_2 = \pi/M_2$ . На внутренней сфере середины отрезков разбиения имеют координату  $\vartheta_m = (m + 1/2)H_1$ , где  $m = 0, \dots, M_1 - 1$ . На внешней сфере середины отрезков разбиения имеют координату  $\vartheta_m = (m + 1/2)H_2$ , где  $m = 0, \dots, M_2 - 1$ .

Положим  $\mu_{nm} = \mu(y(\varphi_n, \vartheta_m))$ , где  $n = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ ,  $m = 0, 1, \dots, M_1 - 1$  — на внутренней сфере  $\Gamma_1$ , и  $n = N_1, N_1 + 1, \dots, N - 1$ ,  $m = 0, 1, \dots, M_2 - 1$  — на внешней сфере  $\Gamma_2$ .

Величина прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя для границы сферического слоя представляет собой сумму вкладов от двух сфер:  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma} &= \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma_1} + \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{\Gamma_2} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x - y|} ds_y + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \frac{1}{|x - y|} ds_y, \quad x \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \end{aligned} \quad (14)$$

отсюда следует, что в рассматриваемом случае в квадратурных формулах для нормальной производной потенциала простого слоя [3], [4] вместо одной суммы будет две суммы, одна из них отвечает интегралу по  $\Gamma_1$ , а другая — интегралу по  $\Gamma_2$ . Стандартная квадратурная формула из [2, Гл. 2] (она также приводится в [4]) для нормальной производной гармонического потенциала простого слоя с плотностью  $\mu(y(\varphi, \vartheta)) \in \Gamma$  принимает вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x=y(\varphi_{\hat{n}}, \vartheta_{\hat{m}}) \in \Gamma} &\approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{\substack{n=N_1-1, m=M_1-1 \\ n=0, m=0 \\ (n, m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} |\eta(y(\varphi_n, \vartheta_m))| \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(\varphi_n, \vartheta_m) - x_j)}{|x - y(\varphi_n, \vartheta_m)|^3} h_1 H_1 + \\ &+ \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{\substack{n=N-1, m=M_2-1 \\ n=N_1, m=0 \\ (n, m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} |\eta(y(\varphi_n, \vartheta_m))| \sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(x)(y_j(\varphi_n, \vartheta_m) - x_j)}{|x - y(\varphi_n, \vartheta_m)|^3} h_2 H_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $\hat{n}, n = 0, 1, \dots, N_1 - 1$ ;  $\hat{m}, m = 0, 1, \dots, M_1 - 1$  — на внутренней сфере  $\Gamma_1$ , и  $\hat{n}, n = N_1, N_1 + 1, \dots, N - 1$ ;  $\hat{m}, m = 0, 1, \dots, M_2 - 1$  — на внешней сфере  $\Gamma_2$ . Улучшенная квадратурная формула из [4] для нормальной производной гармонического потенциала простого слоя с плотностью  $\mu(y(\varphi, \vartheta)) \in \Gamma$  принимает вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{x=y(\varphi_{\hat{n}}, \vartheta_{\hat{m}}) \in \Gamma} &\approx \frac{1}{4\pi} \mu_{\hat{n}\hat{m}} \mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}} + \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{\substack{n=N_1-1, m=M_1-1 \\ n=0, m=0 \\ (n, m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} T_{nm}(x) + \\ &+ \frac{1}{4\pi|\eta(x)|} \sum_{\substack{n=N-1, m=M_2-1 \\ n=N_1, m=0 \\ (n, m) \neq (\hat{n}, \hat{m})}} \mu_{nm} T_{nm}(x), \end{aligned} \quad (16)$$

где функции  $\mathcal{J}_{\hat{n}\hat{m}}$  и  $T_{nm}(x)$  найдены в [4] в явном виде. Область изменения индексов  $\hat{n}, n$  и  $\hat{m}, m$  такая же, как в (15). Аналогично можно записать и квадратурную формулу из [3].

## 5. ТЕСТИРОВАНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ПРЯМОГО ЗНАЧЕНИЯ НОРМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРОСТОГО СЛОЯ НА $\Gamma$

Тестирование проводилось с целью выяснить точность вычислений по квадратурным формулам на границе тонкого сферического слоя, в частности, когда толщина слоя может быть меньше шага интегрирования.

В тестах точное прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя в узловых точках на  $\Gamma$  сравнивалось с приближенными значениями, вычисленными по квадратурным формулам — по улучшенной формуле (16), по стандартной формуле (15) и по формуле из [3]. В каждой узловой точке вычислялась абсолютная погрешность по трем формулам. Вычисления проводились в случае  $N_1 = N_2$  и  $M_1 = M_2$  для разных значений  $M_1$  и  $N_1$ . Значения шагов определяются формулами  $h = h_1 = h_2 = 2\pi/N_1$ ,  $H = H_1 = H_2 = \pi/M_1$ . Если  $N_1/2 = M_1 = 10$ , то  $h = H \approx 0.31$ ; если  $N_1/2 = M_1 = 20$ , то  $h = H \approx 0.16$ ; если  $N_1/2 = M_1 = 40$ , то  $h = H \approx 0.079$ .

В численных тестах, проведенных по методике, описанной выше, пары узловых точек, расположенные на разных сферах, лежат на одной нормали к обеим сферам, что обусловлено условием  $N_1 = N_2$  и  $M_1 = M_2$ . Поэтому численные тесты были проведены также и по другой методике, в которой при сохранении указанного условия узловые точки на внешней сфере сдвинуты относительно точек на внутренней сфере на  $h/2$  по углу  $\varphi$ , при этом все узловые точки на сферах лежат на разных нормалях к сферам.

В процессе тестирования квадратурных формул выяснилось, что максимальная погрешность стандартной квадратурной формулы (15) достигается в тестах без сдвига, тогда как максимальные погрешности двух других квадратурных формул достигаются в тестах со сдвигом.

Для каждого теста при разных значениях расстояния между сферами  $\varepsilon = \varrho - 1$  вычислялся максимум абсолютной погрешности по всем узловым точкам на обеих сферах для формул (15), (16) и для формулы из [3]. Причем максимум вычислялся как в тесте со сдвигом, так и без него. В таблицах для каждого теста приводится наибольшее значение из двух этих максимумов, т.е. в таблицах указана наибольшая абсолютная погрешность при разных способах вычислений. Для первого теста приводится также таблица с максимальной относительной погрешностью при разных способах вычислений (со сдвигом и без).

В первой строке таблицы для каждого теста указаны значения  $N_1, M_1$ , в последующих строках — максимальные погрешности для стандартной формулы (15), для формулы из [3] и для улучшенной формулы (16) при разных расстояниях между сферами.

Численные тесты получены на основе примеров, представленных в разд. 3.

**Тест 1.** Пусть  $\mu_1(x)|_{|x|=1} = 1$ ,  $\mu_1(x)|_{|x|=\varrho} = 1$ , тогда прямое значение нормальной производной гармонического потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu_1](x)$  на  $\Gamma$  имеет вид

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_1](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{1}{2}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_1](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=\varrho} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\varrho^2}.$$

**Тест 2.** Пусть  $\mu_2(x)|_{|x|=1} = 1$ ,  $\mu_2(x)|_{|x|=\varrho} = \cos \vartheta$ , тогда прямое значение нормальной производной гармонического потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu_2](x)$  на  $\Gamma$  имеет вид

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_2](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{1}{2} + \frac{\cos \vartheta}{3}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_2](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=\varrho} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{\cos \vartheta}{6}.$$

**Тест 3.** Пусть  $\mu_3(x)|_{|x|=1} = 1$ ,  $\mu_3(x)|_{|x|=\varrho} = \cos \varphi \sin \vartheta$ , тогда прямое значение нормальной производной гармонического потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu_3](x)$  на  $\Gamma$  имеет вид

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_3](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{1}{2} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_3](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=\varrho} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6}.$$

**Тест 4.** Пусть  $\mu_4(x)|_{|x|=1} = \cos \varphi \sin \vartheta$ ,  $\mu_4(x)|_{|x|=\varrho} = \sin \varphi \sin \vartheta$ , тогда прямое значение нормальной производной гармонического потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu_4](x)$  на  $\Gamma$  имеет вид

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_4](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6} + \frac{\sin \varphi \sin \vartheta}{3}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_4](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=\varrho} = \frac{2 \cos \varphi \sin \vartheta}{3\varrho^3} + \frac{\sin \varphi \sin \vartheta}{6}.$$

**Тест 5.** Пусть  $\mu_5(x)|_{|x|=1} = \cos \vartheta$ ,  $\mu_5(x)|_{|x|=\varrho} = \cos \varphi \sin \vartheta$ , тогда прямое значение нормальной производной гармонического потенциала простого слоя  $\mathcal{V}_0[\mu_5](x)$  на  $\Gamma$  имеет вид

$$\left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_5](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=1} = -\frac{\cos \vartheta}{6} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{3}, \quad \left. \frac{\partial \mathcal{V}_0[\mu_5](x)}{\partial \mathbf{n}_x} \right|_{|x|=\varrho} = \frac{2 \cos \vartheta}{3\varrho^3} + \frac{\cos \varphi \sin \vartheta}{6}.$$

**Таблица 1.**  $q = 1 + \varepsilon$ . Максимальные погрешности квадратурных формул в тесте 1. Первое число в ячейках таблицы — погрешность стандартной формулы (15), второе — погрешность формулы из [3], третье число — погрешность формулы (16).

$\varepsilon$	$N_1/2 = M_1 = 10; h = H = 0.31,$	$N_1/2 = M_1 = 20; h = H = 0.16,$	$N_1/2 = M_1 = 40; h = H = 0.079,$
1	0.046; 0.0095; 0.0061;	0.024; 0.0057; 0.0042;	0.012; 0.0031; 0.0025;
0.5	0.046; 0.019; 0.0069;	0.024; 0.0085; 0.0042;	0.012; 0.0039; 0.0023;
0.3	0.062; 0.037; 0.012;	0.024; 0.015; 0.0044;	0.012; 0.0057; 0.0023;
0.2	0.13; 0.057; 0.017;	0.025; 0.026; 0.0049;	0.013; 0.0091; 0.0024;
0.15	0.26; 0.071; 0.023;	0.034; 0.038; 0.0065;	0.015; 0.014; 0.0026;
0.1	0.68; 0.081; 0.039;	0.086; 0.058; 0.0097;	0.021; 0.024; 0.0029;
0.08	1.12; 0.081; 0.053;	0.16; 0.068; 0.012;	0.027; 0.033; 0.0032;
0.04	4.9; 0.15; 0.15;	1.01; 0.078; 0.027;	0.14; 0.065; 0.0063;

Максимальная абсолютная погрешность.

1	0.091; 0.013; 0.0082;	0.047; 0.0076; 0.0056;	0.024; 0.0044; 0.0034;
0.5	0.093; 0.031; 0.014;	0.047; 0.009; 0.0044;	0.024; 0.0041; 0.0031;
0.3	0.12; 0.06; 0.023;	0.047; 0.019; 0.0065;	0.024; 0.0052; 0.0028;
0.2	0.26; 0.084; 0.035;	0.051; 0.04; 0.0097;	0.024; 0.0098; 0.0025;
0.15	0.51; 0.095; 0.047;	0.067; 0.061; 0.013;	0.024; 0.019; 0.0034;
0.1	1.35; 0.097; 0.071;	0.17; 0.091; 0.019;	0.026; 0.041; 0.005;
0.08	2.25; 0.091; 0.09;	0.33; 0.1; 0.024;	0.034; 0.057; 0.0063;
0.04	9.79; 0.18; 0.18;	2.03; 0.11; 0.05;	0.27; 0.11; 0.013;

Максимальная относительная погрешность.

**Таблица 2.**  $q = 1 + \varepsilon$ . Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 2. Первое число в ячейках таблицы — погрешность стандартной формулы (15), второе — погрешность формулы из [3], третье число — погрешность формулы (16).

$\varepsilon$	$N_1/2 = M_1 = 10; h = H = 0.31,$	$N_1/2 = M_1 = 20; h = H = 0.16,$	$N_1/2 = M_1 = 40; h = H = 0.079,$
1	0.047; 0.011; 0.0087;	0.024; 0.006; 0.0046;	0.012; 0.0032; 0.0025;
0.5	0.047; 0.021; 0.011;	0.024; 0.0088; 0.0045;	0.012; 0.0039; 0.0024;
0.3	0.05; 0.039; 0.013;	0.024; 0.015; 0.0048;	0.012; 0.0057; 0.0024;
0.2	0.076; 0.059; 0.018;	0.024; 0.026; 0.0053;	0.013; 0.0091; 0.0025;
0.15	0.15; 0.072; 0.026;	0.031; 0.038; 0.0063;	0.015; 0.014; 0.0026;
0.1	0.5; 0.082; 0.042;	0.056; 0.058; 0.0098;	0.021; 0.025; 0.003;
0.08	0.9; 0.083; 0.056;	0.12; 0.068; 0.013;	0.027; 0.033; 0.0033;
0.04	4.43; 0.15; 0.15;	0.9; 0.078; 0.028;	0.11; 0.066; 0.0064;

**Таблица 3.**  $q = 1 + \varepsilon$ . Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 3. Первое число в ячейках таблицы — погрешность стандартной формулы (15), второе — погрешность формулы из [3], третье число — погрешность формулы (16).

$\varepsilon$	$N_1/2 = M_1 = 10; h = H = 0.31,$	$N_1/2 = M_1 = 20; h = H = 0.16,$	$N_1/2 = M_1 = 40; h = H = 0.079,$
1	0.048; 0.016; 0.014;	0.024; 0.005; 0.0036;	0.012; 0.0029; 0.0019;
0.5	0.049; 0.02; 0.017;	0.024; 0.0052; 0.0045;	0.012; 0.0029; 0.0019;
0.3	0.064; 0.031; 0.022;	0.025; 0.01; 0.0057;	0.012; 0.003; 0.0019;
0.2	0.13; 0.051; 0.027;	0.026; 0.021; 0.0073;	0.012; 0.0062; 0.0019;
0.15	0.25; 0.065; 0.033;	0.034; 0.033; 0.0089;	0.012; 0.011; 0.0023;
0.1	0.66; 0.075; 0.045;	0.086; 0.053; 0.012;	0.013; 0.022; 0.0031;
0.08	1.1; 0.075; 0.058;	0.16; 0.063; 0.015;	0.018; 0.03; 0.0037;
0.04	4.78; 0.15; 0.15;	1.01; 0.073; 0.028;	0.14; 0.063; 0.0069;

**Таблица 4.**  $q = 1 + \varepsilon$ . Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 4. Первое число в ячейках таблицы — погрешность стандартной формулы (15), второе — погрешность формулы из [3], третье число — погрешность формулы (16).

$\varepsilon$	$N_1/2 = M_1 = 10; h = H = 0.31,$	$N_1/2 = M_1 = 20; h = H = 0.16,$	$N_1/2 = M_1 = 40; h = H = 0.079,$
1	0.048; 0.013; 0.012;	0.024; 0.0034; 0.003;	0.012; 0.00086; 0.00077;
0.5	0.048; 0.016; 0.015;	0.024; 0.0044; 0.0039;	0.012; 0.0011; 0.00098;
0.3	0.05; 0.021; 0.019;	0.024; 0.0057; 0.0051;	0.012; 0.0015; 0.0013;
0.2	0.096; 0.027; 0.025;	0.024; 0.0073; 0.0067;	0.012; 0.0019; 0.0017;
0.15	0.21; 0.032; 0.03;	0.026; 0.0089; 0.0083;	0.012; 0.0023; 0.0021;
0.1	0.62; 0.044; 0.042;	0.067; 0.012; 0.011;	0.012; 0.0031; 0.003;
0.08	1.06; 0.053; 0.052;	0.14; 0.014; 0.014;	0.013; 0.0038; 0.0036;
0.04	4.74; 0.14; 0.14;	0.99; 0.027; 0.027;	0.13; 0.0069; 0.0067;

**Таблица 5.**  $q = 1 + \varepsilon$ . Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 5. Первое число в ячейках таблицы — погрешность стандартной формулы (15), второе — погрешность формулы из [3], третье число — погрешность формулы (16).

$\varepsilon$	$N_1/2 = M_1 = 10; h = H = 0.31,$	$N_1/2 = M_1 = 20; h = H = 0.16,$	$N_1/2 = M_1 = 40; h = H = 0.079,$
1	0.047; 0.013; 0.012;	0.024; 0.0053; 0.0038;	0.012; 0.003; 0.002;
0.5	0.047; 0.017; 0.015;	0.024; 0.0052; 0.0039;	0.012; 0.003; 0.002;
0.3	0.049; 0.03; 0.019;	0.024; 0.0097; 0.0051;	0.012; 0.003; 0.002;
0.2	0.09; 0.05; 0.025;	0.024; 0.02; 0.0067;	0.012; 0.006; 0.002;
0.15	0.21; 0.063; 0.031;	0.025; 0.032; 0.0083;	0.012; 0.01; 0.0021;
0.1	0.62; 0.074; 0.043;	0.064; 0.052; 0.012;	0.012; 0.021; 0.003;
0.08	1.06; 0.075; 0.052;	0.14; 0.062; 0.014;	0.018; 0.03; 0.0036;
0.04	4.74; 0.097; 0.097;	0.99; 0.073; 0.027;	0.13; 0.062; 0.0067;



Как видно из приведенных численных результатов, стандартная квадратурная формула (15) при  $\varepsilon \geq h$  имеет первый (по  $h$ ) порядок сходимости. При  $\varepsilon \geq 2h$  максимальная абсолютная погрешность этой формулы во всех тестах не превосходит  $h/5$ , а при  $\varepsilon \geq h$  она не превосходит  $h/2.5$ . В вычислениях по формуле (15) начинается резкое нарастание погрешности, когда толщина слоя  $\varepsilon$  становится меньше шага интегрирования  $h$ .

При  $\varepsilon \geq h/2$  абсолютная погрешность квадратурной формулы (16) во всех тестах, как правило, не превосходит  $h/10$ . Если же  $\varepsilon \geq h/10$ , то абсолютная погрешность этой формулы во всех тестах не превосходит  $h/2$ . При  $\varepsilon \geq h$  квадратурная формула (16) дает сходимость первого порядка по  $h$ . Максимальная абсолютная погрешность вычислений по формуле (16) в 5 (или более) раз меньше, чем погрешность вычислений по стандартной формуле (15). Когда толщина слоя  $\varepsilon$  становится меньше шага интегрирования  $h$ , в вычислениях по формуле (16) начинается нарастание погрешности. Из результатов первого теста вытекает, что максимальная относительная погрешность формулы (16) составляет менее 1% при  $\varepsilon \geq h \approx 0.1$ .

Таким образом, если при заданном  $\varepsilon$  взять шаг сетки  $h = 2\varepsilon$ , то абсолютная погрешность вычислений по формуле (16) будет не более  $\varepsilon/5$ . Следовательно, квадратурная формула (16) позволяет брать шаг сетки меньше толщины слоя и при этом получать приемлемую точность вычислений, что уменьшает стоимость расчетов по сравнению с другими квадратурными формулами.

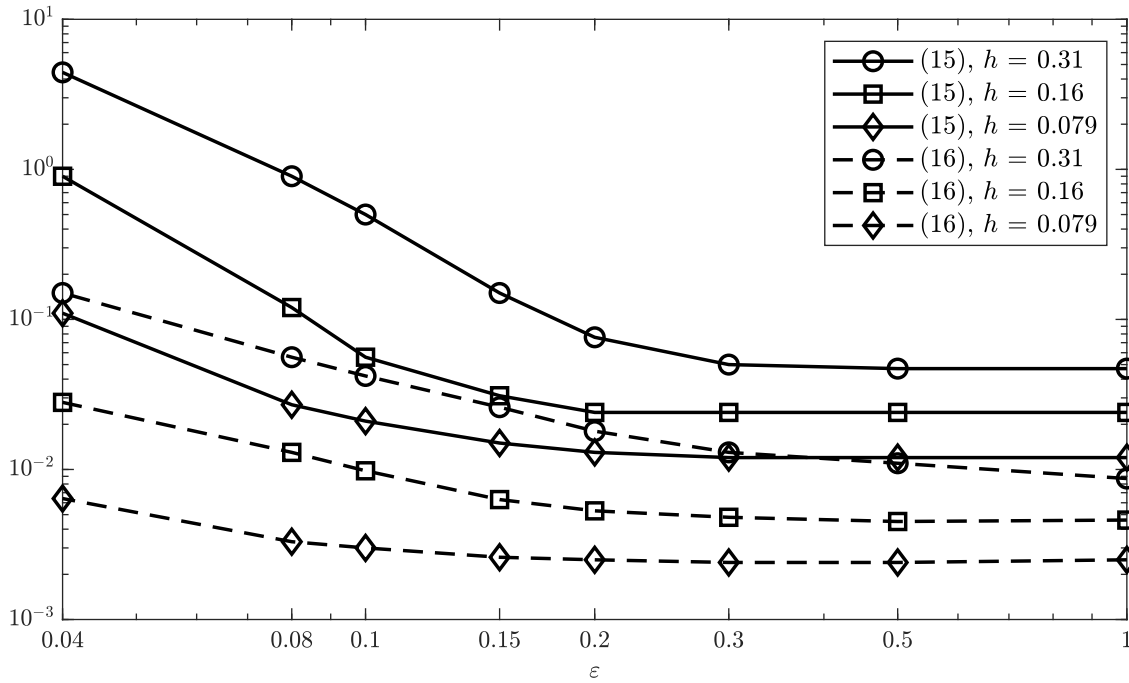
Максимальная абсолютная погрешность, полученная в тестах по формуле из [3] как правило меньше, чем по формуле (15), но больше, чем по формуле (16). Тем самым в задаче на границе тонкого слоя формула из [3] оказывается лучше стандартной формулы, но хуже, чем формула (16).

Погрешности формулы из [3] и погрешности формулы (16) достигают максимума во всех тестах при параметризации одной из сфер со сдвигом по  $\varphi$  на  $h/2$  относительно другой сферы. Величины погрешностей не зависят от того, параметризация какой из двух сфер смещена. Для формулы из [3] и формулы (16) погрешности в тестах со сдвигом  $h/2$  начинают превосходить погрешности в тестах без сдвига, когда толщина слоя  $\varepsilon$  становится меньше шага интегрирования  $h$ . Если  $\varepsilon \geq h$ , то погрешности вычислений по этим формулам в тестах со сдвигом и без сдвига примерно одинаковые. Погрешность стандартной квадратурной формулы (15) достигает максимума в случае, когда обе сферы имеют несмещенную параметризацию. Для формулы (15) погрешности в тестах без сдвига начинают превосходить погрешности в тестах со сдвигом одной из сфер на  $h/2$  по  $\varphi$  относительно другой сферы, когда толщина слоя  $\varepsilon$  становится меньше шага интегрирования  $h$ . Если  $\varepsilon \geq h$ , то погрешности вычислений по формуле (15) в тестах со сдвигом и без сдвига примерно одинаковые. Тем самым погрешности в формуле из [3] и в формуле (16) демонстрируют прямо противоположное поведение по сравнению с погрешностями в формуле (15) относительно тестов со сдвигом и без сдвига.

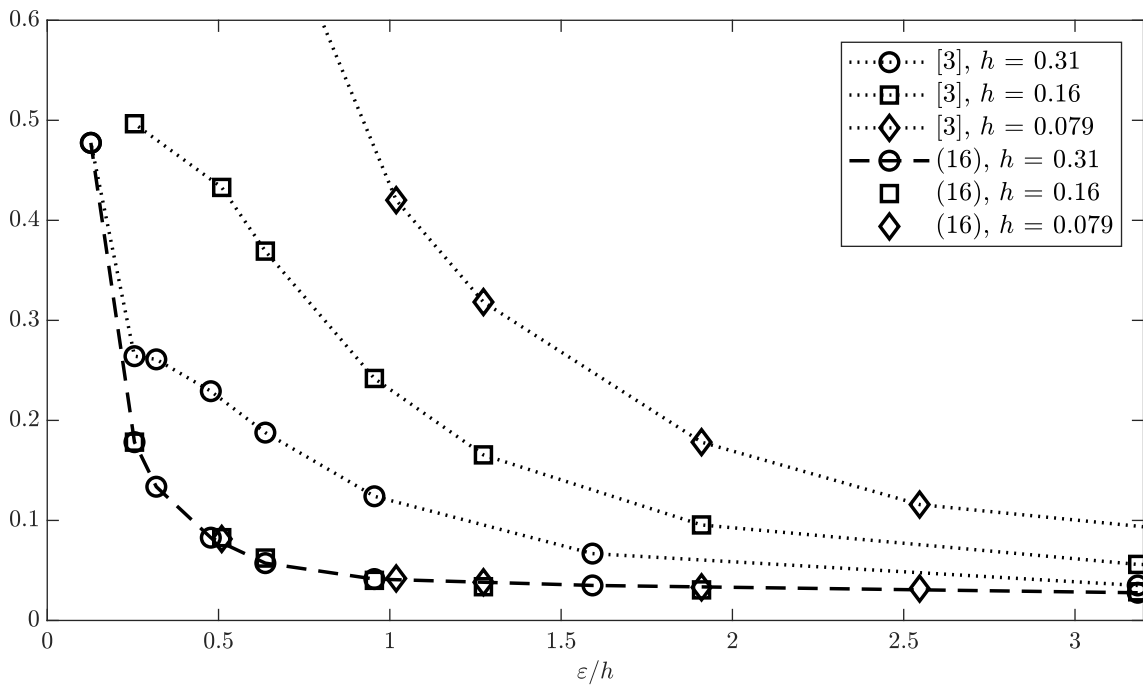
В тесте 4 максимальные абсолютные погрешности, генерируемые формулой (16) и формулой из [3] практически совпадают, что видно из табл. 4. В других тестах формула из [3] дает более высокую погрешность, чем формула (16). Такой эффект объясняется тем, что максимальные погрешности достигаются вблизи полюсов сфер  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , а в тесте 4 плотность в потенциале зануляется на полюсах обеих сфер. Формула (16) обеспечивает более точные вычисления вблизи полюсов, чем формула из [3], однако, обнуление подынтегральной функции вблизи полюсов нивелирует это достоинство формулы (16), в результате максимальные погрешности, получаемые по формуле (16) и по формуле из [3], сравниваются по величине.

С целью визуализации полученных результатов были построены графики для теста 2 на фиг. 1–3. На фиг. 1 представлены графики абсолютной погрешности в тесте 2 для квадратурных формул (15) и (16) в зависимости от толщины тонкого слоя  $\varepsilon$  в логарифмическом масштабе для разных значений  $h$ . По графикам видно, что формулы сходятся при уменьшении  $h$  и что точность вычислений по формуле (16) значительно выше, чем по формуле (15), при фиксированном шаге  $h$ . На фиг. 2, 3 проводится сравнение формулы (16) с формулой (15) и формулой из [3] на данных из теста 2. На этих рисунках построены графики, показывающие поведение абсолютной погрешности вычислений в единицах  $h$  в зависимости от толщины слоя в единицах  $h$ , т.е. от величины  $\varepsilon/h$ . Для формулы (16) кривые при разных значениях  $h$  совпадают (для остальных тестов в тех же координатах они также совпадают). Тем самым абсолютная погрешность вычислений по формуле (16) в единицах  $h$  зависит только от  $\varepsilon/h$  и не зависит собственно от  $h$ . Для остальных двух квадратурных формул погрешность вычислений в указанных координатах зависит от  $h$ , поэтому при разных значениях  $h$  получаются разные кривые. Графики на фиг. 2, 3 показывают, что вычисления по формуле (16) обеспечивают более высокую точность, чем по двум другим формулам. Такие же графики по остальным тестам дают похожую картину.

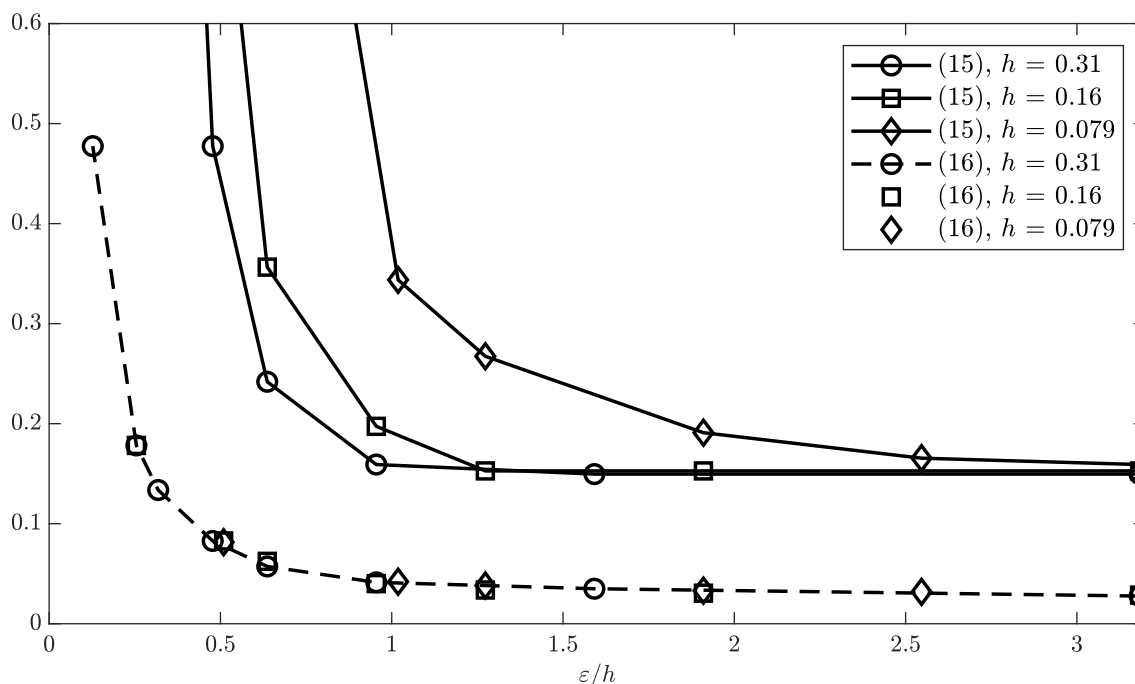
В заключение отметим, что метод задачи о скачке, использованный в настоящей работе, позволяет построить тесты, содержащие явные выражения для нормальной производной потенциала простого слоя на конечном числе эквидистантных сфер. Этот прием дает возможность изучать вычислительные свойства квадратурных формул в многослойных средах.



Фиг. 1. Максимальные абсолютные погрешности стандартной квадратурной формулы (15) и формулы (16) для различных  $h$  в зависимости от толщины сферического слоя  $\varepsilon$  в тесте 2. По оси абсцисс отложена толщина сферического слоя  $\varepsilon$  в логарифмическом масштабе, а по оси ординат отложены максимальные абсолютные погрешности в логарифмическом масштабе.



Фиг. 2. Максимальные абсолютные погрешности квадратурной формулы из [3] и формулы (16) для различных  $h$  в зависимости от толщины сферического слоя  $\varepsilon$  в единицах  $h$ , а по оси ординат отложены максимальные абсолютные погрешности в единицах  $h$ .



**Фиг. 3.** Максимальные абсолютные погрешности стандартной квадратурной формулы (15) и формулы (16) для различных  $h$  в зависимости от толщины сферического слоя  $\varepsilon$  в тесте 2. По оси абсцисс отложена толщина сферического слоя  $\varepsilon$  в единицах  $h$ , а по оси ординат отложены максимальные абсолютные погрешности в единицах  $h$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крутицкий П.А. Смешанная задача для уравнения Лапласа в трехмерной многосвязной области // Дифференц. ур-ния. 1999. Т. 35. № 9. С. 1179–1186.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987.
3. Крутицкий П.А., Резниченко И.О., Кольбасова В.В. Квадратурная формула для прямого значения нормальной производной потенциала простого слоя // Дифференц. ур-ния. 2020. Т. 56. № 9. С. 1270–1288.
4. Krutitskii P.A., Reznichenko I.O. Improved Quadrature Formulas for the Direct Value of the Normal Derivative of a Single-Layer Potential // Comput. Math. and Math. Phys. 2024. Vol. 64. № 2. P. 188–205.
5. Medkova D., Krutitskii P.A. The harmonic Dirichlet problem for a cracked domain with jump conditions on cracks // Applicable Analysis. 2004. V. 83. № 7. P. 661–671.
6. Medkova D., Krutitskii P.A. Neumann and Robin problems in a cracked domain with jump conditions on cracks // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 301. P. 99–114.
7. Krutitskii P.A. The jump problem for the Laplace equation // Appl. Math. Letters. 2001. V. 14. № 3. P. 353–358.
8. Krutitskii P.A. Explicit solution of the jump problem for the Laplace equation and singularities at the edges // Math. Problems in Engng. 2001. V. 7. № 1. P. 1–13.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1981.
10. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Физматлит, 2000.

# TESTING OF QUADRATURE FORMULAS FOR THE DIRECT VALUE OF THE NORMAL DERIVATIVE OF A SINGLE-LAYER POTENTIAL AT THE BOUNDARY OF A THIN BODY

P. A. Krutitskii\*, I. O. Reznichenko\*\*

*125047 Moscow, Miusskaya pl., M.V. Keldysh IAM, RAS, Russia,*

*\*e-mail: biem@mail.ru*

*\*\*e-mail: io.reznichenko@physics.msu.ru*

Received: 17.03.2024

Revised: 17.03.2024

Accepted: 24.04.2024

**Abstract.** Using test examples constructed on the basis of an explicit solution of the jump problem, a comparison of quadrature formulas for the direct value of the normal derivative of the harmonic single-layer potential on the boundary of a thin body is carried out. It is established that the error of calculations using the quadrature formula based on numerical integration is several times greater than the error of calculations using the improved quadrature formula based on the analytical calculation of integrals. As numerical tests have shown, the improved quadrature formula provides acceptable calculation accuracy even when the thickness of the body is significantly smaller than the integration step, which makes it possible to achieve the required calculation accuracy at a lower cost. The obtained results can be used for numerical solution of boundary value problems in thin bodies and in layered media by the potential method.

**Keywords:** Laplace equation, potential theory, thin body, quadrature formulas.