

УДК 517.922

ОБ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ
ОДНОЙ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ¹⁾© 2024 г. Л. Н. Бондарь^{1,*}, С. Б. Мингнар^{1,**}¹630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 2, Новосибирский государственный университет, Россия

*e-mail: l.bondar@g.nsu.ru

**e-mail: s.mingnarov@g.nsu.ru

Поступила в редакцию 05.05.2024 г.

Переработанный вариант 05.05.2024 г.

Принята к публикации 05.05.2024 г.

Рассматривается задача Коши для одной системы, не разрешенной относительно старшей производной по времени. Исследуемая система относится к классу псевдогиперболических. Система описывает поперечные изгибно-крутильные колебания упругого стержня. Получены условия разрешимости задачи Коши в соболевских пространствах и оценки решения. Библ. 12.

Ключевые слова: псевдогиперболическая система, задача Коши, изгибно-крутильные колебания, условия разрешимости.

DOI: 10.31857/S0044466924080092, EDN: YANCYM

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается следующая система

$$\begin{pmatrix} I - \alpha D_x^2 & 0 & a_1 \\ 0 & I - \alpha D_x^2 & -a_2 \\ \sigma a_1 & -\sigma a_2 & I - \alpha D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} + \beta D_x^4 \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1(t, x) \\ f^2(t, x) \\ f^3(t, x) \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где $\alpha, \beta > 0$, $\sigma(a_1^2 + a_2^2) = 1$. Система (1.1) описывает поперечные изгибно-крутильные колебания упругого стержня (см. [1]). Эта система является не разрешенной относительно старшей производной по времени и входит в класс псевдогиперболических систем [2].

В монографии [2] был введен класс псевдогиперболических уравнений и изучена задача Коши для него. Дальнейшие исследования разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений проводились в [3]–[5] и др. Для псевдогиперболических систем общей теории разрешимости задачи Коши нет, есть лишь единичные результаты для конкретных систем (см., например, [6]–[9] и др.).

Отметим, что при $a_1^2 + a_2^2 = 0$, система (1.1) распадается на три псевдогиперболических уравнения и разрешимость задачи Коши для таких уравнений следует из работы [4]. Случай $0 < \sigma(a_1^2 + a_2^2) < 1$ изучен в работе [9]. В данной работе будет исследован случай, когда $\sigma(a_1^2 + a_2^2) = 1$.

Сделаем замену:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{\sqrt{\alpha}}, & \tilde{t} &= \frac{\sigma}{\alpha\sqrt{\beta}}t, & \tilde{\theta}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{\theta(t, x)}{\sqrt{\sigma}}, & \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= u(t, x), \\ \tilde{v}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= v(t, x), & \varepsilon_1 &= \sqrt{\sigma}a_1, & \varepsilon_2 &= \sqrt{\sigma}a_2, \\ \tilde{f}^1(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{\alpha^2\beta}{\sigma^2}f^1(t, x), & \tilde{f}^2(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{\alpha^2\beta}{\sigma^2}f^2(t, x), & \tilde{f}^3(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{\alpha^2\beta}{\sigma^{\frac{3}{2}}}f^3(t, x), & \tilde{\sigma}^2 &= \frac{\beta^2}{\sigma^2}, \end{aligned}$$

систему (1.1) перепишем в виде:

$$\begin{pmatrix} I - D_{\tilde{x}}^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & I - D_{\tilde{x}}^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I - D_{\tilde{x}}^2 \end{pmatrix} D_{\tilde{t}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} + \tilde{\sigma}^2 D_{\tilde{x}}^4 \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}^1(\tilde{t}, \tilde{x}) \\ \tilde{f}^2(\tilde{t}, \tilde{x}) \\ \tilde{f}^3(\tilde{t}, \tilde{x}) \end{pmatrix}.$$

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2022-282 с Минобрнауки РФ.

Для сокращения записи, в системе оставим прежние обозначения, т.е. далее будем рассматривать следующую систему:

$$\begin{pmatrix} I - D_x^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & I - D_x^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I - D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} + \sigma^2 D_x^4 \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f^1(t, x) \\ f^2(t, x) \\ f^3(t, x) \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = 1.$$

Наша цель — доказательство разрешимости задачи Коши для псевдогиперболической системы (1.2) в соболевских пространствах, получение оценок на решение.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим задачу Коши для псевдогиперболической системы:

$$\begin{pmatrix} I - D_x^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & I - D_x^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I - D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 U + \sigma^2 D_x^4 U = F(t, x), \quad t > 0, x \in R, \quad (2.1)$$

$$U|_{t=0} = \Phi(x), \quad D_t U|_{t=0} = \Psi(x),$$

где

$$U(t, x) = (u(t, x), v(t, x), \theta(t, x))^T, \quad F(t, x) = (f^1(t, x), f^2(t, x), f^3(t, x))^T, \\ \Phi(x) = (\varphi^1(x), \varphi^2(x), \varphi^3(x))^T, \quad \Psi(x) = (\psi^1(x), \psi^2(x), \psi^3(x))^T,$$

$\sigma > 0$, при этом $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = 1$.

Дадим определения анизотропных соболевских пространств (см., например, [2]), которые понадобятся нам при доказательстве разрешимости задачи (2.1).

Определение 1. Функция $u(t, x) \in L_2(G)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству $W_2^{l_1, l_2}(G)$, $G \subseteq R^2$, $l_1, l_2 \in N$, если существуют обобщенные производные

$$D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x), \quad \alpha_1/l_1 + \alpha_2/l_2 \leq 1,$$

в области G , при этом $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t, x) \in L_2(G)$. Введем норму

$$\|u, W_2^{l_1, l_2}(G)\| = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2): \alpha_1/l_1 + \alpha_2/l_2 \leq 1} \|D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u, L_2(G)\|.$$

Определение 2. Функция $u(t, x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству с экспоненциальным весом $W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)$, $\gamma > 0$, если $e^{-\gamma t} u(t, x) \in W_2^{l_1, l_2}(G)$. Полагаем

$$\|u(t, x), W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)\| = \|e^{-\gamma t} u(t, x), W_2^{l_1, l_2}(G)\|.$$

Определение 3. Функция $f(t, x)$ принадлежит анизотропному соболевскому пространству $W_{2, \gamma}^{0, 1}(G)$, $\gamma > 0$, если $e^{-\gamma t} f(t, x) \in L_2(G)$, существует обобщенная производная $D_x f(t, x)$ в G , при этом $e^{-\gamma t} D_x f(t, x) \in L_2(G)$. Полагаем

$$\|f(t, x), W_{2, \gamma}^{0, 1}(G)\| = \|e^{-\gamma t} f(t, x), L_2(G)\| + \|e^{-\gamma t} D_x f(t, x), L_2(G)\|.$$

Будем говорить, что $V(t, x) = (v^1(t, x), v^2(t, x), v^3(t, x))^T \in W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)$, если $v^j(t, x) \in W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)$, $j = 1, 2, 3$. Полагаем

$$\|V(t, x), W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)\| = \sum_{j=1}^3 \|v^j(t, x), W_{2, \gamma}^{l_1, l_2}(G)\|.$$

В работе доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $\Phi(x) \in W_2^4(R)$, $\Psi(x) \in W_2^3(R)$ и вектор-функция $F(t, x) = (f^1(t, x), f^2(t, x), f^3(t, x))^T \in W_{2, \gamma}^{0, 1}(R_+^2)$, $\gamma > 0$, такая, что

$$(1 + x^2)F(t, x) \in L_{2, \gamma}(R_+; L_1(R))$$

и выполнены условия:

$$\varepsilon_1 \int_R f^1(t, x) dx - \varepsilon_2 \int_R f^2(t, x) dx - \int_R f^3(t, x) dx = 0, \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_1 \int_R x f^1(t, x) dx - \varepsilon_2 \int_R x f^2(t, x) dx - \int_R x f^3(t, x) dx = 0, \quad t > 0. \quad (2.3)$$

Тогда задача Коши (2.1) имеет единственное решение $U(t, x)$ в пространстве вектор-функций $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$, $\gamma > 0$, таких, что $D_t^2 D_x^2 U \in L_{2,\gamma}(R_+^2)$, при этом справедлива оценка:

$$\begin{aligned} & \|U(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)\| + \|D_t^2 D_x^2 U(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq \\ & \leq c(\gamma) \left(\|\Phi(x), W_2^4(R)\| + \|\Psi(x), W_2^3(R)\| + \|F(t, x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\| + \right. \\ & \left. + \| (1+x^2)F(t, x), L_1(R) \|, L_{2,\gamma}(R_+) \| \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $c(\gamma)$ — константа, зависящая от коэффициентов системы и γ .

Условия, подобные (2.2), (2.3) возникали и раньше при исследовании разрешимости задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений в соболевских пространствах (см. [2, 4]). В [2] были приведены примеры, показывающие, что подобные условия являются необходимыми для разрешимости задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений в соответствующих классах.

Из условий теоремы следует, что для разрешимости задачи Коши (2.1) помимо условий ортогональности (2.2), (2.3) существенными требованиями являются условия гладкости на правую часть системы $F(t, x)$ и начальные данные $\Phi(x)$, $\Psi(x)$. Отметим, что требования дополнительной гладкости правых частей и начальных данных является характерной особенностью для задачи Коши для гиперболических уравнений и систем (см., например, [10], [11]).

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ

Для построения решения задачи (2.1) рассмотрим вспомогательную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $\xi \in R$, которая получается при формальном применении оператора Фурье по x к задаче (2.1):

$$\begin{pmatrix} 1 + \xi^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 1 + \xi^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 1 + \xi^2 \end{pmatrix} D_t^2 V + \sigma^2 \xi^4 V = \widehat{F}(t, \xi), \quad t > 0, \xi \in R, \quad (3.1)$$

$$V|_{t=0} = \widehat{\Phi}(\xi), \quad D_t V|_{t=0} = \widehat{\Psi}(\xi),$$

где $\widehat{F}(t, \xi)$ — преобразование Фурье вектор-функции $F(t, x)$ по x .

Поскольку матрица при производной $D_t^2 V$

$$L^0(i\xi) = \begin{pmatrix} 1 + \xi^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 1 + \xi^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & 1 + \xi^2 \end{pmatrix}$$

вырождается при $\xi = 0$, $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = 1$, то будем рассматривать систему (3.1) при $\xi \in R \setminus \{0\}$. Нетрудно получить формулы решения задачи Коши (3.1):

$$V(t, \xi) = V_1(t, \xi) + V_2(t, \xi) + V_3(t, \xi), \quad (3.2)$$

где

$$V_1(t, \xi) = (B_1 \cos(b_1(\xi)t) + B_2 \cos(b_2(\xi)t) + B_3 \cos(b_3(\xi)t)) \widehat{\Phi}(\xi), \quad (3.3)$$

$$V_2(t, \xi) = \left(B_1 \frac{\sin(b_1(\xi)t)}{b_1(\xi)} + B_2 \frac{\sin(b_2(\xi)t)}{b_2(\xi)} + B_3 \frac{\sin(b_3(\xi)t)}{b_3(\xi)} \right) \widehat{\Psi}(\xi), \quad (3.4)$$

$$V_3(t, \xi) = \int_0^t \left(B_1 \frac{\sin(b_1(\xi)(t-s))}{b_1(\xi)} + B_2 \frac{\sin(b_2(\xi)(t-s))}{b_2(\xi)} + B_3 \frac{\sin(b_3(\xi)(t-s))}{b_3(\xi)} \right) G(s, \xi) ds. \quad (3.5)$$

Здесь

$$B_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_2^2 & \varepsilon_1^2 & 0 \\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 & 1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2B_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2B_3 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1^2 & \varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1(\xi) = \frac{\sigma \xi^2}{\sqrt{1 + \xi^2}}, \quad b_2(\xi) = \sigma |\xi|, \quad b_3(\xi) = \frac{\sigma \xi^2}{\sqrt{2 + \xi^2}}, \quad (3.6)$$

$$G(t, \xi) = (L^0(i\xi))^{-1} \hat{F}(t, \xi) = \begin{pmatrix} (1 + \xi^2)^2 - \varepsilon_2^2 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 & -\varepsilon_1(1 + \xi^2) \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 & (1 + \xi^2)^2 - \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2(1 + \xi^2) \\ -\varepsilon_1(1 + \xi^2) & \varepsilon_2(1 + \xi^2) & (1 + \xi^2)^2 \end{pmatrix} \frac{\hat{F}(t, \xi)}{\xi^2(1 + \xi^2)(2 + \xi^2)}.$$

Представим вектор-функцию $G(t, \xi)$ в виде:

$$G(t, \xi) = G_1(t, \xi) + G_2(t, \xi), \quad (3.7)$$

$$G_1(t, \xi) = \begin{pmatrix} 2 + \xi^2 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 2 + \xi^2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 2 + \xi^2 \end{pmatrix} \frac{\hat{F}(t, \xi)}{(1 + \xi^2)(2 + \xi^2)},$$

$$G_2(t, \xi) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 1 \end{pmatrix} \frac{\hat{F}(t, \xi)}{\xi^2(1 + \xi^2)(2 + \xi^2)}.$$

Введем

$$\chi^m(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| > 1/m, \\ 0, & |\xi| < 1/m, \end{cases} \quad V^m(t, \xi) = \chi^m(\xi) V(t, \xi).$$

Тогда для всех $t > 0$ вектор-функции $V^m(t, \xi) \in L_2(R)$ и к ним можно применить обратный оператор Фурье по ξ , и задать, как и в работе [4], в качестве последовательности приближенных решений задачи Коши (2.1) $\{U^m(t, x)\}$, где $U^m(t, x) = F^{-1}[V^m](t, x)$. Далее мы покажем, что последовательность $\{U^m(t, x)\}$, действительно, является последовательностью приближенных решений задачи (2.1).

Учитывая представление $V(t, \xi)$ из (3.2), перепишем $U^m(t, x)$ в виде:

$$U^m(t, x) = \sum_{j=1}^3 U_j^m(t, x), \quad U_j^m(t, x) = F^{-1}[\chi^m(\xi) V_j](t, x), \quad (3.8)$$

где $V_1(t, \xi)$, $V_2(t, \xi)$, $V_3(t, \xi)$ из (3.3)–(3.5), соответственно.

В следующих леммах проведем оценки последовательности $\{U_j^m(t, x)\}$, $j = 1, 2, 3$, в норме пространства $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$.

Лемма 1. *Справедлива следующая оценка:*

$$\sum_{\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{4} < 1} \left(\|D_t^{\beta_1} D_x^{\beta_2} U_1^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \|D_t^{\beta_1} D_x^{\beta_2} U_2^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \right) \leq$$

$$\leq c \left(\|\Phi(x), W_2^3(R)\| + \|\Psi(x), W_2^2(R)\| \right),$$

где константа $c > 0$ не зависит от m , $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, более того, для любого $k \geq 1$ имеет место сходимость

$$\sum_{\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{4} < 1} \|D_t^{\beta_1} D_x^{\beta_2} [U_j^{m+k}(t, x) - U_j^m(t, x)], L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2. \quad (3.9)$$

Доказательство леммы 1. Учитывая (3.3), (3.6), (3.8), равенство Парсеваля, оценку

$$|b_1(\xi)| + |b_2(\xi)| + |b_3(\xi)| \leq c_1 |\xi|, \quad (3.10)$$

имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{4} < 1} \|D_t^{\beta_1} D_x^{\beta_2} U_1^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq \\ & \leq \frac{c_2}{\sqrt{\gamma}} \sum_{\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{4} < 1} \sum_{i=1}^3 \| |\xi|^{\beta_1 + \beta_2} \widehat{\varphi}^i(\xi), L_2(R) \| \leq \frac{c_3}{\sqrt{\gamma}} \|\Phi(x), W_2^3(R)\|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Учитывая оценку $b_i(\xi) \geq c|\xi|$, $|\xi| \geq 1$, будем иметь

$$\left| \frac{\sin(b_i(\xi)t)}{b_i(\xi)} \right| \leq \frac{c_4}{|\xi|}, \quad |\xi| \geq 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.12)$$

а из формулы

$$\sin(b_i(\xi)t) = b_i(\xi)t \int_0^1 \cos(s b_i(\xi)t) ds, \quad i = 1, 2, 3,$$

следует

$$\left| \frac{\sin(b_i(\xi)t)}{b_i(\xi)} \right| \leq t, \quad |\xi| < 1, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.13)$$

Оценки (3.12), (3.13) перепишем в одно неравенство:

$$\left| \frac{\sin(b_i(\xi)t)}{b_i(\xi)} \right| \leq \frac{c_3(t+1)}{1+|\xi|}, \quad \xi \in R, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.14)$$

В силу равенства Парсеваля, учитывая (3.4), (3.6), (3.10), (3.14), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{4} < 1} \|D_t^{\beta_1} D_x^{\beta_2} U_2^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq \\ & \leq c_4(\gamma) \left(\sum_{i=1}^3 \|\widehat{\psi}^i(\xi), L_2(R)\| + \sum_{0 < \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{4} < 1} \sum_{i=1}^3 \| |\xi|^{\beta_1 + \beta_2 - 1} \widehat{\psi}^i(\xi), L_2(R) \| \right) \leq \\ & \leq c_5(\gamma) \|\Psi(x), W_2^2(R)\|. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из оценок (3.11), (3.15) вытекает нужная оценка и, рассуждая аналогично, получим сходимость (3.9).

Лемма доказана.

Лемма 2. Справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \left(\|D_t^2 U_j^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \|D_t^2 D_x^2 U_j^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \right. \\ & \left. + \|D_x^4 U_j^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \right) \leq c(\gamma) (\|\Phi(x), W_2^4(R)\| + \|\Psi(x), W_2^3(R)\|), \end{aligned}$$

где константа $c(\gamma) > 0$ зависит от γ и не зависит от $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, m , более того, для любого $k \geq 1$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned} & \|D_t^2 [U_j^{m+k}(t, x) - U_j^m(t, x)], L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \rightarrow 0, \quad j = 1, 2, \\ & \|D_t^2 D_x^2 [U_j^{m+k}(t, x) - U_j^m(t, x)], L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \rightarrow 0, \\ & \|D_x^4 [U_j^{m+k}(t, x) - U_j^m(t, x)], L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 2 повторяет рассуждения из предыдущей леммы.

Проведем оценку третьего слагаемого из (3.8).

Лемма 3. При выполнении условий теоремы имеет место оценка

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^4 \|D_x^l U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| &\leq c_1(\gamma) \|F(t, x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\| + \\ &+ c_2(\gamma) \| (1+x^2)F(t, x), L_1(R) \|, L_{2,\gamma}(R_+) \|, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где константы $c_1(\gamma)$, $c_2(\gamma) > 0$ зависят от γ и не зависят от m , $F(t, x)$, более того, для любого $k \geq 1$ имеет место сходимость

$$\sum_{l=0}^4 \|D_x^l [U_3^{m+k}(t, x) - U_3^m(t, x)], L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.17)$$

Доказательство леммы 3. Обозначим через

$$G_\gamma(t, \xi) = e^{-\gamma t} \theta(t) G(t, \xi),$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, вектор-функция $G(t, \xi)$ определена в (3.7).

Учитывая (3.5), преобразование Фурье для свертки, получим

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^4 \|D_x^l U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| &= \sum_{l=0}^4 \| |\xi|^l V_3^m(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2) \| = \\ &= \sum_{l=0}^4 \left\| \chi^m(\xi) |\xi|^l \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-s) e^{-\gamma(t-s)} \left(B_1 \frac{\sin(b_1(\xi)(t-s))}{b_1(\xi)} + \right. \right. \\ &+ B_2 \frac{\sin(b_2(\xi)(t-s))}{b_2(\xi)} + B_3 \frac{\sin(b_3(\xi)(t-s))}{b_3(\xi)} \Big) G(s, \xi) \theta(s) e^{-\gamma s} ds, L_2(R^2) \Big\| = \\ &= \sum_{l=0}^4 \left\| \chi^m(\xi) |\xi|^l \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) e^{-(i\eta+\gamma)t} \left(B_1 \frac{\sin(b_1(\xi)t)}{b_1(\xi)} + \right. \right. \\ &+ B_2 \frac{\sin(b_2(\xi)t)}{b_2(\xi)} + B_3 \frac{\sin(b_3(\xi)t)}{b_3(\xi)} \Big) dt \widehat{G}_\gamma(\eta, \xi), L_2(R^2) \Big\|. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что выполнены соотношения

$$\int_0^{+\infty} e^{-(i\eta+\gamma)t} \frac{\sin(b_j(\xi)t)}{b_j(\xi)} dt = \frac{1}{(i\eta+\gamma)^2 + (b_j(\xi))^2}, \quad j = 1, 2, 3,$$

и имеют место оценки:

$$|(i\eta+\gamma)^2 + (b_j(\xi))^2| \geq c\gamma \sqrt{|\eta|^2 + \gamma^2 + (b_j(\xi))^2}, \quad \gamma > 0, (\eta, \xi) \in R^2,$$

где $c > 0$ — константа. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^4 \|D_x^l U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| &\leq \sum_{j=1}^3 \sum_{l=0}^4 \|\chi^m(\xi) \frac{|\xi|^l B_j \widehat{G}_\gamma(\eta, \xi)}{(i\eta+\gamma)^2 + (b_j(\xi))^2}, L_2(R^2)\| \leq \\ &\leq \frac{c}{\gamma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=0}^4 \|\chi^m(\xi) \frac{|\xi|^l B_j \widehat{G}_\gamma(\eta, \xi)}{\sqrt{|\eta|^2 + \gamma^2 + (b_j(\xi))^2}}, L_2(R^2)\|. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Учитывая (3.18), равенство Парсеваля, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{l=2}^4 \|D_x^l U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq \\ & \leq \frac{c}{\gamma} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=2}^4 \left(\|\chi^m(\xi) \frac{|\xi|^l B_j G(t, \xi)}{b_j(\xi)}, L_2(|\xi| > 1)\|, L_{2,\gamma}(R_+) \| + \right. \\ & \quad \left. + \|\chi^m(\xi) \frac{|\xi|^l B_j G(t, \xi)}{\gamma}, L_2(|\xi| \leq 1)\|, L_{2,\gamma}(R_+) \| \right). \end{aligned}$$

Пользуясь

$$|b_j(\xi)| \geq c|\xi|, \quad |\xi| > 1,$$

и (3.7), получим

$$\|D_x^2 U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \|D_x^3 U_3^m(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq \frac{c_4}{\gamma} \|F(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\|, \quad (3.19)$$

$$\|D_x^4 U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq \frac{c_5}{\gamma} \|F(t, x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\|. \quad (3.20)$$

Из (3.18) также будем иметь

$$\sum_{l=0}^1 \|D_x^l U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq \frac{c}{\gamma^2} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=0}^1 \left\| \chi^m(\xi) |\xi|^l B_j G(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2) \right\|.$$

Воспользуемся представлением (3.7) и неравенством Минковского:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^1 \|D_x^l U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq \\ & \leq \frac{c}{\gamma^2} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=0}^1 \left(\|\chi^m(\xi) |\xi|^l B_j \begin{pmatrix} 2 + \xi^2 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & 2 + \xi^2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 2 + \xi^2 \end{pmatrix} \frac{\widehat{F}(t, \xi)}{(1 + \xi^2)(2 + \xi^2)}, L_{2,\gamma}(R_+^2) \| + \right. \\ & \quad \left. + \|\chi^m(\xi) |\xi|^l B_j \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 1 \end{pmatrix} \frac{\widehat{F}(t, \xi)}{\xi^2(1 + \xi^2)(2 + \xi^2)}, L_{2,\gamma}(R_+^2) \| \right) \leq \\ & \leq \frac{c_5}{\gamma^2} \|F(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \frac{c_6}{\gamma^2} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=0}^1 \|\chi^m(\xi) |\xi|^l B_j \times \\ & \quad \times \frac{\widehat{g}(t, \xi)}{\xi^2(1 + \xi^2)(2 + \xi^2)}, L_{2,\gamma}(R_+ \times \{|\xi| \leq 1\}) \| \leq \\ & \leq \frac{c_5}{\gamma^2} \|F(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \frac{c_6}{\gamma^2} \sum_{j=1}^3 \sum_{l=0}^1 \|\chi^m(\xi) B_j \frac{\widehat{g}(t, \xi)}{\xi^{2-l}}, L_{2,\gamma}(R_+ \times \{|\xi| \leq 1\}) \|, \quad (3.21) \end{aligned}$$

где

$$\widehat{g}(t, \xi) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^2 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & 1 \end{pmatrix} \widehat{F}(t, \xi).$$

Поскольку выполнено условие (2.2), то

$$\int_R g(t, x) dx = 0,$$

следовательно, учитывая, что $(1+x)F(t, x) \in L_{2,\gamma}(R_+; L_1(R))$ имеет место представление

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R e^{-ix\xi} g(t, x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \int_0^1 D_{\lambda_1}(e^{-ix\xi\lambda_1}) g(t, x) d\lambda_1 dx + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R g(t, x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \int_0^1 e^{-ix\xi\lambda_1} (-ix\xi) g(t, x) d\lambda_1 dx.\end{aligned}\quad (3.22)$$

В силу (2.3) имеем

$$\int_R xg(t, x) dx = 0$$

и, учитывая, представление (3.22), а также $(1+x^2)F(t, x) \in L_{2,\gamma}(R_+; L_1(R))$, получим

$$\begin{aligned}\widehat{g}(t, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \int_0^1 \left[\int_0^1 D_{\lambda_2}(e^{-ix\xi\lambda_1\lambda_2}) (-ix\xi) g(t, x) d\lambda_2 + (-ix\xi) g(t, x) \right] d\lambda_1 dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_R \int_0^1 \int_0^1 e^{-ix\xi\lambda_1\lambda_2} (-ix\xi)^2 \lambda_1 g(t, x) d\lambda_1 d\lambda_2 dx - \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_R xg(t, x) dx = \\ &= -\frac{\xi^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \int_0^1 \int_R e^{-ix\xi\lambda_1\lambda_2} x^2 \lambda_1 g(t, x) dx d\lambda_1 d\lambda_2.\end{aligned}\quad (3.23)$$

В силу оценки (3.21), представления (3.22), имеем

$$\begin{aligned}\|D_x U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| &\leq \frac{c_5}{\gamma^2} \|F(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \\ &+ \frac{c_7}{\gamma^2} \|\chi^m(\xi) \int_R \int_0^1 e^{-ix\xi\lambda_1} xg(t, x) d\lambda_1 dx, L_{2,\gamma}(R_+ \times \{|\xi| \leq 1\})\| \leq \\ &\leq \frac{c_5}{\gamma^2} \|F(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \frac{c_8}{\gamma^2} \| \|xF(t, x), L_1(R)\|, L_{2,\gamma}(R_+)\|.\end{aligned}\quad (3.24).$$

Аналогично, учитывая (3.21) и представление (3.23), будем иметь

$$\begin{aligned}\|U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| &\leq \frac{c_5}{\gamma^2} \|F(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \\ &+ \frac{c_9}{\gamma^2} \| \|x^2 F(t, x), L_1(R)\|, L_{2,\gamma}(R_+)\|.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Пользуясь (3.19), (3.20), (3.24), (3.25), будем иметь требуемую оценку (3.16). Аналогично доказывается сходимость (3.17).

Лемма доказана.

Лемма 4. При выполнении условий теоремы имеет место оценка

$$\begin{aligned}\|D_t^2 U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| &+ \|D_t^2 D_x^2 U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq c_1(\gamma) \|F(t, x), W_{2,\gamma}^{0,1}(R_+^2)\| + \\ &+ c_2(\gamma) \| \|(1+x^2)F(t, x), L_1(R)\|, L_{2,\gamma}(R_+)\|,\end{aligned}\quad (3.26)$$

где константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от m , $F(t, x)$, более того, для любого $k \geq 1$ имеет место сходимость

$$\|D_t^2 [U_3^{m+k}(t, x) - U_3^m(t, x)], L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \|D_t^2 D_x^2 [U_3^{m+k}(t, x) - U_3^m(t, x)], L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \rightarrow 0 \quad (3.27)$$

при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство леммы 4. Учитывая (3.5), представим $D_t^2 V_3(t, \xi)$ в виде

$$D_t^2 V_3(t, \xi) = G(t, \xi) + \int_0^t \left(B_1 b_1(\xi) \sin(b_1(\xi)(s-t)) + \right. \\ \left. + B_2 b_2(\xi) \sin(b_2(\xi)(s-t)) + B_3 b_3(\xi) \sin(b_3(\xi)(s-t)) \right) G(s, \xi) ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \|D_t^2 U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \|D_t^2 D_x^2 U_3^m(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq \\ & \leq \|\chi^m(\xi) D_t^2 V_3(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \|\xi^2 \chi^m(\xi) D_t^2 V_3(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq \\ & \leq \|\chi^m(\xi) G(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \|\chi^m(\xi) \xi^2 G(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \\ & + \sum_{j=1}^3 \left\| \chi^m(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-s) e^{-\gamma(t-s)} b_j(\xi) B_j \sin(b_j(\xi)(t-s)) G(s, \xi) \theta(s) e^{-\gamma s} ds, L_2(R^2) \right\| + \\ & + \sum_{j=1}^3 \left\| \chi^m(\xi) \xi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-s) e^{-\gamma(t-s)} b_j(\xi) B_j \sin(b_j(\xi)(t-s)) G(s, \xi) \theta(s) e^{-\gamma s} ds, L_2(R^2) \right\|. \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, как и при доказательстве леммы 3, получим требуемую оценку (3.26) и сходимость (3.27).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу лемм 1–4 последовательность $\{U^m(t, x)\}$, где $U^m(t, x) = \sum_{j=1}^3 U_j^m(t, x)$, фундаментальна в $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$, более того, $\{D_t^2 D_x^2 U^m(t, x)\}$ фундаментальна в $L_{2,\gamma}(R_+^2)$. В силу полноты $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$, $L_{2,\gamma}(R_+^2)$, теоремы о слабой замкнутости оператора обобщенного дифференцирования, существует вектор-функция $U(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)$ такая, что существует обобщенная производная $D_t^2 D_x^2 U(t, x)$ в R_+^2 , $D_t^2 D_x^2 U(t, x) \in L_{2,\gamma}(R_+^2)$, более того, справедлива оценка (2.4). Покажем, что вектор-функция $U(t, x)$ — решение задачи Коши (2.1). Введем обозначение

$$L(D_t, D_x) = \begin{pmatrix} I - D_x^2 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & I - D_x^2 & -\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & I - D_x^2 \end{pmatrix} D_t^2 + \sigma^2 D_x^4 I,$$

тогда задача Коши (2.1) перепишется в виде

$$\begin{aligned} L(D_t, D_x)U &= F(t, x), \quad t > 0, \quad x \in R, \\ U|_{t=0} &= \Phi(x), \\ D_t U|_{t=0} &= \Psi(x). \end{aligned}$$

С одной стороны, учитывая равенство Парсеваля и определение $U^m(t, x)$, имеем

$$\begin{aligned} \|L(D_t, D_x)U^m(t, x) - F(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| &= \|\chi^m(\xi) L(D_t, i\xi) V(t, \xi) - \widehat{F}(t, \xi), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| = \\ &= \|\widehat{F}(t, \xi), L_2(|\xi| \leq 1/m)\|, L_{2,\gamma}(R_+^2) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \|L(D_t, D_x)U^m(t, x) - L(D_t, D_x)U(t, x), L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \leq \\ & \leq c_1 \|D_t^2 D_x^2 [U^m(t, x) - U(t, x)], L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + c_2 \|D_t^2 [U^m(t, x) - U(t, x)], L_{2,\gamma}(R_+^2)\| + \\ & + c_3 \|D_x^4 [U^m(t, x) - U(t, x)], L_{2,\gamma}(R_+^2)\| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В силу единственности предела получим

$$L(D_t, D_x)U(t, x) = F(t, x).$$

Проверим, что для вектор-функции $U(t, x)$ выполнены начальные условия задачи Коши (2.1). В силу теоремы о следах для анизотропных соболевских пространств (см., например, [2], [12]) имеем

$$\begin{aligned} \|U(t, x)|_{t=0} - \Phi(x), L_2(R)\| &= \|U(t, x)|_{t=0} - U^m(t, x)|_{t=0}, L_2(R)\| \leq \\ &\leq c\|U(t, x) - U^m(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)\| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \\ \|D_t(e^{-\gamma t}U(t, x))|_{t=0} - (\Psi(x) - \gamma\Phi(x)), L_2(R)\| &= \\ = \|D_t(e^{-\gamma t}U(t, x))|_{t=0} - D_t(e^{-\gamma t}U^m(t, x))|_{t=0}, L_2(R)\| &\leq \\ &\leq c\|U(t, x) - U^m(t, x), W_{2,\gamma}^{2,4}(R_+^2)\| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$U(t, x)|_{t=0} = \Phi(x)$$

и

$$D_t U(t, x)|_{t=0} = \Psi(x).$$

Доказательство единственности повторяет рассуждения из [2].
Теорема доказана.

Авторы выражают благодарность Г.В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Физматгиз, 1959.
2. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. Fedotov I., Volevich L. V. The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // Russ. J. Math. Phys. 2006. V. 13. No. 3. P. 278–292.
4. Демиденко Г. В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56. No. 6. С. 1289–1303.
5. Бондарь Л.Н., Демиденко Г.В. О корректности задачи Коши для псевдогиперболических уравнений в весовых соболевских пространствах // Сиб. матем. журнал. 2023. Т. 64. No. 5. С. 895–911.
6. Герасимов С. И., Ерофеев В. И. Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров: ФГУП “РФЯЦ-ВНИИЭФ”, 2014.
7. Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В., Пинтус Г. М. Задача Коши для одной псевдогиперболической системы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. No. 4. С. 626–638.
8. Bondar L. N., Demidenko G. V. Solvability of the Cauchy problem for a pseudohyperbolic system // Complex Variables and Elliptic Equations. 2021. 66:6-7, 1084–1099.
9. Бондарь Л. Н., Мингнарлов С. Б. О задаче Коши для одной системы псевдогиперболического типа // Математические заметки СВФУ. 2023. Т.30. No.4. С. 3–11.
10. Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.
11. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
12. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. Изд. 2, доп. и перераб. Изд-во: М.: Наука, Физматлит, 1996.

CONDITIONS FOR SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR ONE PSEUDOHYPERBOLIC SYSTEM

L. N. Bondar^{a,*}, S. B. Mingnarov^{a,**}

^a *Novosibirsk State University, Pirogov St., 1, Novosibirsk, 630090 Russia*

*e-mail: l.bondar@g.nsu.ru

**e-mail: s.mingnarovQg.nsu.ru

Received: 05 May, 2024

Revised: 05 May, 2024

Accepted: 05 May, 2024

Abstract. The Cauchy problem for one system, not resolved with respect to the highest derivative with respect to time, is considered. The system under study belongs to the class of pseudohyperbolic systems. The system describes transverse bending-torsional vibrations of an elastic rod. Conditions for the solvability of the Cauchy problem in Sobolev spaces and estimates of the solution are obtained.

Keywords: pseudohyperbolic system, Cauchy problem, bending-torsional oscillations, solvability conditions.