

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОВЫШЕНИЮ ТОЧНОСТИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДА РОМБ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2024 г. Н.Я. Моисеев^{1,*}

¹456770 Снежинск, Челябинская обл., ул. Победы, 17-87, Россия

*e-mail: nik.moiseev.43@mail.ru

Поступила в редакцию 02.04.2024 г.

Переработанный вариант 02.04.2024 г.

Принята к публикации 05.05.2024 г.

Представлена модификация метода РОМБ для численного решения нестационарных нелинейных уравнений теплопроводности. Модифицированные разностные схемы являются консервативными и на гладких решениях аппроксимируют модельные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами со вторым порядком по времени и по пространству. Для модифицированных разностных схем приведены первые дифференциальные приближения, которые позволяют оценить погрешности аппроксимации в схемах. Библ. 14. Табл. 1.

Ключевые слова: нестационарное нелинейное уравнение теплопроводности, разностные схемы предиктор-корректор, метод РОМБ.

DOI: 10.31857/S0044466924080084, EDN: YAPRJA

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод РОМБ является одним из методов численного решения нестационарных нелинейных одномерных [1], двумерных [2–3] и трехмерных [4] уравнений теплопроводности. Разностные схемы в методе РОМБ являются схемами типа предиктор-корректор [5–6], позволяют получать монотонные численные решения широкого класса прикладных задач и аппроксимируют исходные дифференциальные уравнения теплопроводности с первым порядком по времени и вторым по пространству [3]. Метод предназначен для его применения при решении уравнений газовой динамики, поэтому уравнение теплопроводности — это квазилинейное уравнений вида $\partial E / \partial t = \text{div}(k \text{ grad } T)$, где внутренняя энергия E и температура T вещества связаны уравнением состояния, в общем случае нелинейным.

Численные решения многомерных (2D или 3D) уравнений теплопроводности в схеме РОМБ находятся итерациями методом переменных направлений со стабилизирующей поправкой [6–7].

Если внутренняя энергия зависит от температуры нелинейно, то уравнения теплопроводности путем линеаризации энергии по температуре преобразуются к уравнению для вычисления температуры. Это уравнение в дальнейшем будем называть линеаризованным уравнением теплопроводности. Разностные схемы РОМБ (1D–3D) относятся к схемам типа предиктор-корректор и конструируются на основе линеаризованного уравнения теплопроводности.

В результате линеаризации энергии по температуре в линеаризованных уравнениях теплопроводности появляются недивергентные члены, которые можно рассматривать как источник погрешностей аппроксимации. Погрешности аппроксимации проявляются в нарушении консервативности разностных схем: дисбаланс по энергии отличен от нуля. Поэтому вопрос устранения источника этих погрешностей в методе РОМБ является актуальным.

Здесь представлена модификация метода РОМБ, которая позволяет повысить точность метода, обеспечить консервативность и устранить отмеченный выше источник погрешностей аппроксимации. Суть модификации состоит в том, что на этапе предиктор температуры и тепловые потоки на гранях ячеек вычисляются на промежуточных дробных временных шагах по методу РОМБ; а на этапе корректор вместо расчета температуры из линеаризованного уравнения вычисляется удельная внутренняя энергия вещества из дивергентного нелинейного уравнения теплопроводности без линеаризации энергии по температуре.

Особенности модификации метода РОМБ излагаются на примере решения двумерного уравнения теплопроводности в случае плоской симметрии.

2. МЕТОД РОМБ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

2.1. Постановка задачи

Двумерное уравнение теплопроводности в случае плоской симметрии запишем в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] + Q. \quad (2.1)$$

Здесь x, y и t — независимые переменные по пространству и времени соответственно, E, T — неизвестные функции, E — удельная внутренняя энергия вещества, T — температура вещества, $\kappa(\rho, T)$ — коэффициент теплопроводности, ρ, Q — известные функции, ρ — удельная плотность вещества, Q — функция источника. Уравнение (2.1) дополняется уравнением состояния вещества в форме $E = E(\rho, T)$. Начальные условия: $T(0, x, y) = T_0(x, y)$ заданы на плоскости x, y в области D , ограниченной контуром L . Граничные условия: $\alpha T + \beta \mathbf{S} * \mathbf{n} = \varphi(t)$ для $(x, y) \in L$, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к L , $\mathbf{S}(S_x, S_y) = -\kappa \nabla T$ — вектор плотности теплового потока, S_x, S_y — компоненты вектора плотности теплового потока $\mathbf{S}$ вдоль координатных осей x, y соответственно, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)^T$, α, β, φ — параметры, с помощью которых можно задать различные граничные условия.

Требуется найти решение начально-краевой задачи для уравнения (2.1) при $t > 0$.

2.2. Основы подхода к решению нестационарного нелинейного уравнения теплопроводности методом РОМБ

Поскольку метод РОМБ подробно описан во многих публикациях, в частности, в работах [1–4], то здесь приводится краткое описание метода РОМБ для решения нестационарного нелинейного уравнения теплопроводности в двумерном случае.

Уравнение теплопроводности (2.1) в методе РОМБ записывается в потоковой форме в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} \right) &= Q, \\ S_x + \kappa \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ S_y + \kappa \frac{\partial T}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Численное решение уравнения теплопроводности (2.2) находится итерациями методом переменных направлений со стабилизирующей поправкой [6–7] расщеплением по направлениям (называемых в схеме РОМБ каналами). Эти итерации в дальнейшем будем называть *внешними*. На каждой внешней итерации решения уравнения теплопроводности находятся в два этапа. На первом этапе решение находится прогонками вдоль одного каналов (отвечающего координате x), на втором — вдоль второго (отвечающего координате y). Переход от внешней итерации μ к итерации $\mu + 1$ имеет вид

$$\frac{\partial E^{\mu+1/2}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left(\left(\frac{\partial S_x}{\partial x} \right)^{\mu+1/2} + \left(\frac{\partial S_y}{\partial y} \right)^{\mu} \right) = Q, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} (S_x)^{\mu+1/2} + \kappa^{\mu} \frac{\partial T^{\mu+1/2}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial E^{\mu+1}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left(\left(\frac{\partial S_x}{\partial x} \right)^{\mu+1/2} + \left(\frac{\partial S_y}{\partial y} \right)^{\mu+1} \right) &= Q, \\ (S_y)^{\mu+1} + \kappa^{\mu} \frac{\partial T^{\mu+1}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если коэффициент теплопроводности зависит от температуры, то при его вычислении температура берется с предыдущей μ -й итерации.

Если внутренняя энергия E зависит от температуры нелинейно, то уравнения (2.3), (2.4) преобразуются к уравнениям для вычисления температуры с помощью линеаризации энергии по температуре:

$$E(\rho, T^{v+1}) \equiv E^{v+1} \cong E^v + E_T^v(\rho, T^v)(T^{v+1} - T^v). \quad (2.5)$$

Из этого соотношения по найденной энергии E^{v+1} находится температура T^{v+1} . Здесь v — это номер итерации по нелинейности энергии, $E_T^v = (\partial E / \partial T)^v$. Эти итерации будем называть *внутренними*. Из (2.5) следует

$$\frac{\partial E^{v+1}}{\partial t} \cong \frac{\partial E^v}{\partial t} + E_T^v(\rho, T^v) \frac{\partial T^{v+1}}{\partial t}.$$

Точность выполнения внешних и внутренних итераций задается некоторыми постоянными, называемыми *константами сходимости*.

Систему уравнений (2.3), (2.4) с линеаризованным уравнением теплопроводности для вычисления температуры запишем в виде

$$\frac{\partial T^{v+1}}{\partial t} + \frac{1}{\rho E_T(\rho, T^v)} \left(\left(\frac{\partial S_x}{\partial x} \right)^{v+1} + \left(\frac{\partial S_y}{\partial y} \right)^\mu \right) = \frac{1}{E_T(\rho, T^v)} \left(Q + \frac{\partial E^v}{\partial t} \right), \quad (2.6)$$

$$(S_x)^{v+1} + \alpha^\mu \frac{\partial T^{v+1}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial T^{v+1}}{\partial t} + \frac{1}{\rho E_T(\rho, T^v)} \left(\left(\frac{\partial S_x}{\partial x} \right)^{\mu+1/2} + \left(\frac{\partial S_y}{\partial y} \right)^{v+1} \right) = \frac{1}{E_T(\rho, T^v)} \left(Q + \frac{\partial E^v}{\partial t} \right), \quad (2.7)$$

$$(S_y)^{v+1} + \alpha^\mu \frac{\partial T^{v+1}}{\partial y} = 0.$$

Решения уравнений (2.6), (2.7) находятся внутренними итерациями по v . Для вычисления промежуточных температур и тепловых потоков на гранях ячеек система уравнений (2.6), (2.7) дополняется соотношениями связи вдоль каналов между температурой и тепловыми потоками, заданными в центрах и на соответствующих гранях ячеек [3]. Промежуточные температуры и тепловые потоки на гранях ячеек вычисляются из решения расширенной системы уравнений по неявным разностным схемам в момент времени $t^{n+1} = t^n + \tau$ (это этап предиктор).

Температура в центрах ячеек вычисляется из разностных уравнений (2.6), (2.7) (это этап корректор).

Если решается уравнение (2.6), то $T^{v=0} = T^n$, т.е. температура берется с нижнего слоя по времени. При сходимости внутренних v -итераций с заданной точностью температура $T^{\mu+1/2}$, отвечающая внешней μ -итерации, полагается равной температуре T^{v+1} на последней внутренней итерации. Если решается уравнение (2.7), то $T^{v=0} = T^{\mu+1/2}$. Затем, при сходимости внешних итераций с заданной точностью температура $T^{\mu+1}$ на внешней итерации с номером $\mu + 1$ полагается равной температуре T^{v+1} . Контроль сходимости внутренних итераций проверяется в каждой точке i, j по условию

$$|T_{i,j}^{v+1} - T_{i,j}^v| < \varepsilon_1 (1 + T_{i,j}^v).$$

Здесь ε_1 — константа сходимости внутренних итераций, $T_{i,j}^{v+1}, T_{i,j}^v$ — температура вещества в центре ячейки i, j на $v + 1$ и v итерациях соответственно. Если условие выполнено, то итерации заканчиваются.

Контроль сходимости внешних итераций проверяется по условию

$$|T_{i,j}^{\mu+1} - T_{i,j}^\mu| < \varepsilon_2 (1 + T_{i,j}^\mu).$$

Здесь ε_2 — константа сходимости внешних итераций. Температура $T_{i,j}^{n+1}$ в центре ячейки при сходимости внешних μ -итераций полагается равной температуре на последней итерации

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{\mu+1}.$$

Удельная внутренняя энергия вещества в центрах ячеек вычисляется из уравнения состояния.

Поскольку уравнения теплопроводности (2.6), (2.7) нелинейные и решения находятся итерациями, то консервативность и дисбаланс схем зависят от констант сходимости $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, что можно отнести к недостаткам метода РОМБ.

3. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД РОМБ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Основная цель модификации метода РОМБ направлена на повышение точности численных решений за счет устранения отмеченных выше недостатков в методе РОМБ, а именно, первый порядок аппроксимации по времени и нарушение консервативности в случае нелинейной зависимости внутренней энергии от температуры. В предлагаемой модифицированной схеме повышение порядка аппроксимации достигается за счет перехода к вычислению промежуточных величин температуры и тепловых потоков на гранях ячеек в другой момент времени $t^{n+1/2} = t^n + \tau^*$, $0 < \tau^* < \tau$. Параметр τ^* подбирается так, чтобы решения были монотонными, и на гладких решениях разностная схема аппроксимировала бы дифференциальные уравнения с повышенным вторым порядком по времени [8–9].

Обеспечение консервативности схем в случае нелинейной зависимости внутренней энергии от температуры достигается за счет перехода на этапе корректор от вычисления температуры к вычислению удельной внутренней энергии из дивергентных уравнений теплопроводности (2.3), (2.4) без линеаризации энергии.

В результате модифицированная разностная схема является консервативной, т.е. дисбаланс внутренней энергии равен нулю и не зависит от итераций по нелинейности энергии. На верхнем слое по времени температура вещества $T_{i,j}^{n+1}$ вычисляется в центрах ячеек из уравнения состояния, например, итерационным методом Ньютона, но эта процедура уже не нарушает баланс внутренней энергии.

Рассмотрим аппроксимацию модифицированной разностной схемы. Для простоты изложения предположим, что плотность вещества $\rho = 1$, источник энергии $Q = 0$, внутренняя энергия зависит от температуры линейно $E(\rho, T) = T$ и коэффициент теплопроводности $\kappa(\rho, T) = k = \text{const}$. Для исключения влияния погрешности внешних μ -итерации, доводим их до сходимости с точностью, при которой погрешность расщепления по направлениям можно считать равной нулю. Область интегрирования — прямоугольник со сторонами параллельными координатным осям. Разностное уравнение для вычисления удельной внутренней энергии (температуры) в этом случае записывается в виде

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\tau} + \frac{S_{i,j+1/2}^{n+1/2} - S_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} + \frac{S_{i+1/2,j}^{n+1/2} - S_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta y} = 0. \quad (3.1)$$

Здесь $\tau, \Delta x, \Delta y$ — шаги интегрирования вдоль осей t, x, y соответственно, $S_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ — тепловые потоки, которые вычислены на гранях ячеек по неявной разностной схеме методом РОМБ [3] в момент времени $t^{n+1/2} = t^n + \tau^*$, $\tau^* > 0$. Разностные сетки являются равномерными вдоль каждого направления. Первое дифференциальное приближение (ПДП) [10] схемы (3.1) выпишем в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = w. \quad (3.2)$$

Здесь $w \equiv w(\tau^*, \tau, \Delta x, \Delta y)$,

$$w = k^2(2\tau^* - 0.5\tau) \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} \right) + k \left(\frac{(\Delta x)^2}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{(\Delta y)^2}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} \right).$$

Правую часть w ПДП (3.2) можно рассматривать как основную погрешность аппроксимации дифференциального уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0.$$

Замечание. ПДП упрощенной разностной схемы в [4] для решения нестационарного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами и с тремя пространственными переменными запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = w, \quad (3.3)$$

$$w = (2\tau^* - 0.5\tau)k^2 \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 T}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 T}{\partial y^2 \partial z^2} \right) + \\ + \frac{1}{12}(\Delta x)^2 k \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{1}{12}(\Delta y)^2 k \frac{\partial^4 T}{\partial y^4} + \frac{1}{12}(\Delta z)^2 k \frac{\partial^4 T}{\partial z^4}.$$

Из ПДП (3.2), (3.3) следует, что разностные схемы с двумя и тремя пространственными переменными аппроксимируют соответствующие дифференциальные уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами с первым порядком по времени и вторым по пространству. Погрешность аппроксимации $O(\tau, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$. Погрешности аппроксимации при $\tau^* = 0$ и $\tau^* = 0.5\tau$ в явной и неявной разностных схемах соответственно для решения одномерного уравнения теплопроводности совпадают с главными членами ошибок аппроксимации, которые приведены в работе [11].

Если $\tau^* = 0.25\tau$, то разностные схемы аппроксимируют упрощенные дифференциальные уравнения теплопроводности на гладких решениях со вторым порядком по времени и по пространству. Погрешность аппроксимации $O(\tau^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$. Если $\tau^* > 0.25\tau$, то коэффициенты в ПДП положительные. Известно, что в схемах второго порядка точности могут появляться осцилляции. Поэтому конструируется гибридная разностная схема, в которой на гладких решениях применяются схемы повышенной точности, а в зоне больших градиентов —

схемы первого порядка точности [8, 9]. Это достигается выбором параметра τ^* , который подбирается так, чтобы решения были монотонными [9].

Поскольку погрешность аппроксимации w линейно зависит от параметра τ^* , то минимум и максимум погрешности достигаются на концах интервала $0.25\tau \leq \tau^* \leq \tau$, на котором коэффициенты ПДП положительные. Поэтому для погрешности выполняются условия

$$w(\tau^* = 0.25\tau) \leq w(\tau^*) \leq w(\tau^* = \tau).$$

Если $\tau^* = \tau$, то $w(\tau^* = \tau)$ — это погрешность аппроксимации метода РОМБ. Следовательно, погрешность аппроксимации модифицированного метода РОМБ для $0.25\tau \leq \tau^* < \tau$ не превосходит погрешности метода РОМБ.

Из ПДП (3.2) следует оценка погрешности аппроксимации, которая на гладких решениях с ограниченными четвертыми производными

$$|\partial^4 T / \partial x^4| \leq M_1, \quad |\partial^4 T / \partial x^4| \leq M_2, \quad |\partial^4 T / \partial x^2 \partial y^2| \leq M_3$$

записывается в виде

$$w(\tau^*) \leq \{(\Delta x)^2/12 + (\Delta y)^2/12 + 4k(2\tau^* - 0.5\tau)\}kM, \quad M = \max\{M_1, M_2, M_3\}.$$

Константы M_1, M_2, M_3 не зависят от шагов интегрирования по времени и по пространству. Следовательно, с уменьшением шагов интегрирования по времени и по пространству погрешность аппроксимации стремится к нулю, а решения ПДП (3.2) сходятся к решению дифференциального уравнения. Это дает основание надеяться, что модифицированные разностные схемы с переменными коэффициентами обладают этими же свойствами.

Эффективность модифицированной схемы можно повысить за счет ослабления требований к сходимости внешних и внутренних итераций (по v и по μ соответственно) выбором более грубых констант сходимости. Погрешность аппроксимации с грубой константой сходимости компенсируется за счет вычисления удельной внутренней энергии по консервативным схемам, как отмечено в [12]. В результате число итераций уменьшается и время счета шага сокращается.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Для проверки эффективности и работоспособности модифицированного метода РОМБ проведены расчеты модельных одномерных и двумерных задач. Результаты этих расчетов сравнивались с результатами расчетов по методике РОМБ и с аналитическими решениями. Эффективность модифицированного метода по сравнению с методом РОМБ демонстрируется по результатам расчетов двух модельных задач: одномерной и двумерной.

Одномерная начально-краевая задача с плоской симметрией. В области $\{0 \leq x \leq 10\}$ задана начальная температура $T(0, x) = 0.0001$. Плотность вещества $\rho = 1$. На левой границе задана температура $T(t, 0) = at^b$, $a = 1.54, b = 1/8$. На правой границе задан поток $S(t, 10) = ct^b$, $c = -49.35$. Скорость тепловой волны $D = 32$, коэффициент теплопроводности — $k(\rho, T) = 256T^8$. Уравнение состояния линейное — $E(\rho, T) = T$. Требуется рассчитать положение тепловых волн в момент времени $t = 0.15$. Задача имеет точное решение [13].

Расчеты проводились на сгущающихся равномерных разностных сетках с шагами интегрирования по пространству h_k и по времени $\tau_k = h_k/D$, с константами сходимости $\varepsilon_{1,1} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$ и $\varepsilon_{2,1} = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.00001$. Тепловая волна с такими шагами интегрирования проходит за один шаг одну ячейку. Промежуточные величины на этапе предиктор в расчетах по модифицированной методике рассчитывались с параметром $\tau^* = 0.75\tau$.

Погрешность аппроксимации $w(\tau^*)$ в расчетах одномерных задач вычислялась в сеточном аналоге нормы L_1 по формуле

$$w_k = h_k \sum_{i=1}^{N_k} |T_i - T_i^{\text{exact}}|, \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad N_k = 25, 50, \dots, 3200.$$

Здесь T_i^{exact} — это точное решение, T_i — численное решение, h_k — шаг интегрирования по пространству, N_k — число интервалов по пространству.

В табл. 1 приведены в первом столбце — число интервалов в области, во втором и третьем — погрешности $w(\varepsilon_{1,1})$, $w(\varepsilon_{2,1})$, полученные в расчетах по методу РОМБ с константами сходимости $\varepsilon_{1,1}$, $\varepsilon_{2,1}$ соответственно, в четвертом — погрешности $f(\varepsilon_{1,1})$, полученные в расчетах по предложенному в данной статье модифицированному методу, в столбцах $k1, k2, k3, k4, k5, k6$ — коэффициенты эффективности модифицированного метода относительно методики РОМБ: $k1 = f(\varepsilon_{1,1})/w(\varepsilon_{1,1})$, $k4 = f(\varepsilon_{1,1})/w(\varepsilon_{2,1})$, $k2 = tf(\varepsilon_{1,1})/tw(\varepsilon_{1,1})$, $k5 = tf(\varepsilon_{1,1})/tw(\varepsilon_{2,1})$ — отношения времен счета, $k3 = vf(\varepsilon_{1,1})/vw(\varepsilon_{1,1})$, $k6 = vf(\varepsilon_{1,1})/vw(\varepsilon_{2,1})$ — отношения

Таблица 1.

N_k	$w(\varepsilon_{1,1})$	$w(\varepsilon_{2,1})$	$f(\varepsilon_{1,1})$	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
25	.2763	.2746	.2208	0.8	0.45	0.53	0.8	0.47	0.36
50	.1511	.1491	.1142	0.76	0.66	0.54	0.76	0.66	0.33
100	.0745	.0736	.0615	0.83	0.5	1.82	0.83	0.29	0.31
200	.0371	.0369	.0328	0.88	0.61	0.6	0.88	0.31	0.32
400	.0187	.0187	.0174	0.93	0.64	0.63	0.93	0.33	0.34
800	.0096	.0096	.0092	0.96	0.67	0.66	0.96	0.35	0.35
1600	.0051	.0051	.0049	0.96	0.72	0.71	0.96	0.37	0.37
3200	.0027	.0027	.0026	0.96	0.75	0.73	0.96	0.41	0.4

среднего числа итераций на одном шаге. Здесь tf, vf — времена счета, число итераций, соответственно, по модифицированной методике, tw, vw — по методу РОМБ.

Из анализа данных в табл. 1 следует, что погрешности с уменьшением шагов интегрирования по времени и по пространству стремятся к нулю с показателем скорости сходимости близким к единице (см. столбцы 2–4). Погрешности расчетов температуры, времена расчетов и число итераций с различными константами сходимости по модифицированному методу меньше, чем по методу РОМБ: все коэффициенты эффективности меньше единицы. Положения тепловых волн, рассчитанные по обоим методикам, хорошо согласуются с точными решениями.

Двумерная задача с плоской симметрией. В двумерной задаче рассчитывается движение тепловой волны в прямоугольной области $\{0 \leq x \leq 18, 0 \leq y \leq 20\}$ с нетеплопроводной вставкой в области $\{10 \leq x \leq 12, 4 \leq y \leq 20\}$, где $k(\rho, T) = 0$. Геометрия задачи взята из работы [2]. Плотность вещества $\rho = 0.1$. Начальная температура $T(0, x, y) = 0.001$. Коэффициент теплопроводности $k(\rho, T) = 6T^6$. Уравнение состояния является нелинейным и записывается в виде [14]

$$E(\rho, T) = aT + bT^4,$$

где $a = 10, b = 13.7$. На границах области тепловые потоки равны нулю $S = 0$. В области $\{0 \leq x \leq 1, 19 \leq y \leq 20\}$ задано энерговыделение $dE/dt = e, e = 15000$. Требуется рассчитать состояние в момент времени $t = 0.26$.

Точного решения задача не имеет. Задача решена в двух вариантах: с нетеплопроводной вставкой и без вставки. Задача существенно двумерная: тепловая волна движется от левого верхнего угла в направлении правого нижнего угла, обтекает на своем пути нетеплопроводную вставку и распространяется между вставкой и правой границей от нижней границы к верхней. На начальной стадии движения имеется выраженный фронт тепловой волны, который исчезает после достижения нижней границы.

Расчеты проводились на равномерных разностных сетках с шагами интегрирования по пространству $\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.1$ и по времени $\tau = 1$ и $\tau = 0.01$ с константами сходимости $\varepsilon_{1,1} = 5e - 4, \varepsilon_{2,1} = 5e - 3$. Дополнительно проводились расчеты по модифицированной методике РОМБ с параметром $\tau^* = 0.56\tau$.

Анализ результатов расчетов показал, что температурные поля, рассчитанные по обоим методикам, хорошо согласуются между собой. Дисбаланс по энергии в расчетах без вставки с константой сходимости $\varepsilon_{1,1}, \tau^* = 0.75\tau$ и шагом интегрирования по времени $\tau = 1$ по модифицированной методике равен $\delta \sim 1e - 14$, число внешних итераций — 991, по методике РОМБ — $\delta \sim 1e - 6$, число внешних итераций — 1155. Время счета по модифицированной методике составляет 0.9 от времени счета по исходной методике. Число внешних итераций в расчетах по модифицированной методике с константой сходимости $\varepsilon_{2,1}$ равно 726, время счета составляет 0.7 относительно времени счета с константой сходимости ε_1 .

Сравнение температур вдоль координатной линии $y = 13.4$ в расчетах задачи со вставкой показывает, что распределения температуры, полученные по методике РОМБ с шагами интегрирования по времени $\tau = 1$ и $\tau = 0.01$ различаются для $y > 10$.

Распределения, полученные по модифицированной методике с шагами интегрирования по времени $\tau = 1$ и $\tau = 0.01$, хорошо согласуются между собой и с распределением по методике РОМБ в расчете с $\tau = 0.01$.

Дисбаланс по энергии в расчетах задачи со вставкой с константой сходимости $\varepsilon_{1,1}$ и шагом интегрирования по времени $\tau = 1$ по модифицированной методике порядка $\delta \sim 10^{-12}$, по методике РОМБ — $\delta \sim 10^{-5}$, среднее число итераций на одном шаге равно 106 по методике РОМБ и равно 73 по модифицированной методике. Время счета по модифицированной методике составляет 0.7 от времени счета по исходной методике.

Результаты решения задачи 1 с линейным уравнением состояния и задачи 2 со сложным нелинейным уравнением состояния показывают, что предложенная модификация методики РОМБ повышает точность численных решений с преимуществом по времени счета.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена модификация метода РОМБ, применяемого для решения нестационарных нелинейных уравнений теплопроводности в рамках интегрирования уравнений газодинамики. Построенная разностная схема является консервативной и на гладких решениях аппроксимирует модельные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами со вторым порядком по времени и по пространству. Приведенные для модельных разностных схем первые дифференциальные приближения позволяют оценить погрешности в схемах. Полученные численные результаты подтверждают теоретические выводы — модифицированный метод РОМБ обеспечивает повышение точности, вычислительной эффективности и может быть рекомендован для решения многомерных уравнений теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гаджиев А.Д., Писарев В.Н.* Неявный конечно-разностный метод для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19. № 5. С. 1288.
2. *Гаджиев А.Д., Писарев В.Н., Шестаков А.А.* Метод расчета задач теплопроводности на неортогональных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 2. С. 339.
3. *Гаджиев А.Д., Писарев В.Н., Рыкованова В.В., Шестаков А.А.* Методика и программа ТОМ1 для решения двумерного уравнения теплопроводности // ВАНТ. Сер. Методики и программы для численного решения задач математической физики. 1985. Вып.1. С. 53.
4. *Писарев В.Н., Чернова С.В.* Численная методика РОМБ для решения трехмерного уравнения теплопроводности в криволинейной системе координат // ВАНТ. Сер. Методики и программы для численного решения задач математической физики. 2007. Вып. 3(4). С. 3.
5. *Брайн П.Л.И.* Конечно-разностный метод высокого порядка точности для решения трехмерных задач теплопроводности // A.I. Ch. E. J. 1961. № 7. С. 367.
6. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. С. 26—43.
7. *Марчук Г.И.* Методы расщепления. М.: Наука, 1988. С. 129—136.
8. *Федоренко Р.П.* Применение разностных схем высокой точности для решения гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1962. Т. 2. № 6. С.1122.
9. *Моисеев Н.Я.* Неявные разностные схемы бегущего счета повышенной точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 5. С. 920.
10. *Шокин Ю.И.* Метод дифференциального приближения. Новосибирск: Наука, 1979.
11. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей 1. М.: Мир, 1991. С. 110—112.
12. *Забродин А.В., Пикарчук С.Б.* Об одном методе численного решения нелинейного уравнения теплопроводности на параллелограммной сетке точек // ВАНТ. Сер. Методики и программы для численного решения задач математической физики. 1982. Вып. 2(10). С. 14.
13. *Самарский А.А., Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. С. 133—135.
14. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2010. С. 43—48.

ON AN APPROACH TO IMPROVING THE ACCURACY AND EFFICIENCY OF THE ROMB METHOD FOR SOLVING THE UNSTEADY HEAT CONDUCTION EQUATION

N. Ya. Moiseev*

Chelyabinsk region, Snezhinsk, Pobedy st., 17-87, 456770 Russia

**e-mail: nik.moiseev.43@mail.ru*

Received 02 April, 2024

Revised 02 April, 2024

Accepted 05 May, 2024

Abstract. A modification of the ROMB method is presented for numerically solving unsteady nonlinear heat conduction equations. The modified difference schemes are conservative and, for smooth solutions, approximate the model differential equations with constant coefficients with second-order accuracy in both time and space. First differential approximations are provided for the modified difference schemes, enabling the assessment of approximation errors in the schemes.

Keywords: unsteady nonlinear heat conduction equation, predictor-corrector difference schemes, ROMB method.