

ОЦЕНКИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

© 2024 г. А.Ю. Круковский^{1,*}, И.В. Попов^{1,**}, Ю.А. Повещенко^{1,***}

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Россия

*e-mail: alexander-krukovskiy@yandex.ru

**e-mail: piv2964@mail.ru

***e-mail: hecon@mail.ru

Поступила в редакцию 15.04.2024 г.

Переработанный вариант 15.04.2024 г.

Принята к публикации 05.05.2024 г.

В настоящей работе рассматривается вопрос сходимости итерационных процессов, применяемых к неявным полностью консервативным разностным схемам трехмерной магнитной гидродинамики методов раздельного и комбинированного решения групп разностных уравнений, которые разбиваются по физическим процессам. Получены оценки сходимости итерационных процессов для рассматриваемых в данной работе численных методов. Исследован вопрос области применимости как метода комбинированных, так и раздельных способов решения разностных трехмерных уравнений магнитной гидродинамики. Учитывая, что проведенные исследования представленных алгоритмов носят в основном качественный характер, справедливость полученных оценок была подтверждена численными экспериментами, причем рассматривались как модельные, так и реальные задачи. Отметим, что полученные оценки сходимости итерационных процессов дают возможность при решении трехмерных задач магнитной гидродинамики на любом шаге по времени выбрать оптимальный численный метод решения разностных уравнений. Библ. 12. Фиг. 7.

Ключевые слова: уравнения трехмерной магнитной гидродинамики, неявная полностью консервативная разностная схема, сходимость итерационного процесса.

DOI: 10.31857/S0044466924080076, EDN: YARBOF

1. ВВЕДЕНИЕ

При моделировании задач на первом этапе определяется ее специфика и, исходя из этого, выбирается метод или методы ее оптимального численного решения. Созданный на основе такого численного метода (методов) комплекс программ (КП) может решать лишь узкий класс задач. Задачи, которые в данный класс не входят, либо решаются не эффективно, либо не решаются вообще. Создание достаточно универсального алгоритма для решения широкого класса задач математической физики, как правило, не приводит к положительным результатам из-за чрезвычайной громоздкости подобного алгоритма.

В работе уделяется большое внимание исследованию сходимости метода, примененного к неявной полностью консервативной разностной схеме (ПКРС) трехмерной магнитной гидродинамики (МГД), раздельного и комбинированного решения групп трехмерных разностных уравнений. Эти уравнения разбиты по физическим процессам [1–3], а именно по группам: динамическая, тепловая и электромагнитная.

Метод раздельного решения разностных уравнений заключается в том, что эти три группы решаются раздельно.

Комбинированный метод решения разностных уравнений заключается в том, что три группы объединяются следующим образом: в первую группу включаются уравнения динамики и электромагнитного поля, а во вторую группу — уравнения энергии.

Уравнение состояния является уравнением — связкой между тремя (двумя) группами. Уравнения трех (обеих) групп решаются некоторым итерационным методом, например, методом Ньютона, относительно определенных переменных, а не входящие в эту группу переменные считаются “замороженными” и берутся с предыдущей итерации. Последовательное решение групп уравнений связывается внешним итерационным процессом. Сходимость этого процесса контролируется по точности выполнения общего баланса энергии и точности распределения полной энергии по ее отдельным видам.

Полученные в настоящей работе теоретические оценки сходимости итерационных процессов для системы разностных уравнений трехмерных МГД подтверждается численными расчетами как модельных, так и реальных физических задач.

2. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В декартовой системе координат система уравнений МГД имеет следующий вид (см. [4]):

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = w; \quad \frac{dz}{dt} = v; \quad (1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial w}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad (2)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_y^2}{8\pi} + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x^2)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_y)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_z)}{\partial z}; \quad (3)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(P + \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_y^2}{8\pi} + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_y)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_y^2)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_y B_z)}{\partial z}; \quad (4)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_y^2}{8\pi} + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_z)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_y B_z)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_z^2)}{\partial z}; \quad (5)$$

$$P \frac{d\varepsilon}{dt} = -\rho P \frac{\partial(1/\rho)}{\partial t} - \frac{\partial W_x}{\partial x} - \frac{\partial W_y}{\partial y} - \frac{\partial W_z}{\partial z} + G_{\text{Joul}}; \quad (6)$$

$$G_{\text{Joul}} = \frac{1}{4\pi} (E_x J_x + E_y J_y + E_z J_z); \quad (7)$$

$$J_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}; \quad J_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}; \quad J_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}; \quad (8)$$

$$W_x = -\kappa_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} - \kappa_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} - \kappa_{xz} \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (9)$$

$$W_y = -\kappa_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} - \kappa_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} - \kappa_{yz} \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (10)$$

$$W_z = -\kappa_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} - \kappa_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} - \kappa_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (11)$$

$$\kappa_{\alpha\alpha} = \kappa_{\parallel} \left(\frac{B_{\alpha}}{B} \right)^2 - \kappa_{\perp} \left(1 - \left(\frac{B_{\alpha}}{B} \right)^2 \right), \quad \alpha = x, y, z; \quad (12)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\beta\alpha} = (\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}) \frac{B_{\alpha} B_{\beta}}{B^2}, \quad \alpha = x, y, z, \quad \beta = x, y, z, \quad \alpha \neq \beta; \quad (13)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_x}{\rho} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \left(B_x \frac{\partial u}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial y} + B_z \frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad (14)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_y}{\rho} \right) = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} + \left(B_x \frac{\partial w}{\partial x} + B_y \frac{\partial w}{\partial y} + B_z \frac{\partial w}{\partial z} \right); \quad (15)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_z}{\rho} \right) = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \left(B_x \frac{\partial v}{\partial x} + B_y \frac{\partial v}{\partial y} + B_z \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad (16)$$

$$E_{\alpha} = \frac{1}{4\pi\sigma_{\perp}} J_{\alpha} + \frac{\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}}{4\pi\sigma_{\perp}\sigma_{\parallel}} \frac{B_{\alpha}}{B^2} (\mathbf{J}, \mathbf{B}), \quad \alpha = x, y, z; \quad (17)$$

$$(\mathbf{J}, \mathbf{B}) = (J_x B_x + J_y B_y + J_z B_z). \quad (18)$$

Здесь t — время, $\mathbf{U} = (u, w, v)$ — вектор скорости вещества, ρ — плотность, T — температура, P — гидродинамическое давление, ε — удельная внутренняя энергия, отнесенная к единице массы, $\mathbf{W} = (W_x, W_y, W_z)$ — вектор потока тепла, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ — вектор магнитного поля, $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ — вектор электрического поля, $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$ — вектор плотности тока, G_{Joul} — массовая плотность энергии джоулевого нагрева, κ — коэффициенты теплопроводности (тензор), σ — коэффициенты электропроводности (тензор).

3. СИСТЕМА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Анализ сходимости итерационного процесса комбинированного решения системы разностных уравнений МГД проведен в одномерном плоском случае в [5] и в двумерном случае в декартовых координатах в [3]. Предполагалось, что $\kappa = 0$ и $\sigma = \infty$. Было показано, что для неявных схем процесс безусловно устойчивый лишь при выполнении следующего условия:

$$\frac{B^2}{8\pi} \geq (\gamma - 2)P. \quad (19)$$

При $\frac{B^2}{8\pi} < (\gamma - 2)P$ условие устойчивости в одномерном случае имеет вид

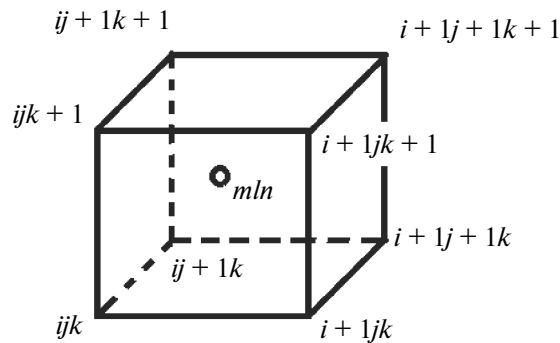
$$\Delta t < \frac{\Delta m}{2\rho \sqrt{(\gamma - 2)\frac{P}{\rho} - \frac{B^2}{8\pi\rho}}}. \quad (20)$$

В двумерном случае условие устойчивости записывается в виде

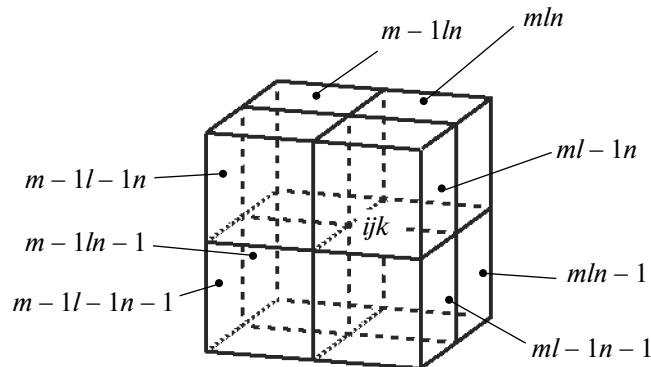
$$\Delta t < \frac{\Delta m}{2\rho(h_x + h_y) \sqrt{(\gamma - 2)\frac{P}{\rho} - \frac{B^2}{8\pi\rho}}}. \quad (21)$$

При учете диссипативных процессов [6] ограничения на временной шаг становятся менее обременительными. В дальнейшем при исследовании устойчивости процесса решения системы разностных уравнений методами раздельного и комбинированного решения предполагаем отсутствие диссипативных процессов. Ограничимся также случаем течения в магнитном поле, ориентированным перпендикулярно плоскости течения ($B_x = B_y = 0$).

Введем пространства сеточных функций определенных в узлах и ячейках разностной сетки (см. фиг. 1 и фиг. 2). Обозначив их H_Ω и H_w , соответственно. Для записи сеточных функций $f \in H_\Omega$ используем индексы (i, j, k) : $f_{ijk} = f \in H_\Omega$, а сеточные функции $g \in H_w$ будем отмечать индексами (m, l, n) : $g_{mln} = g \in H_w$. Полагаем, что массы всех ячеек $\Delta m_{mln} = \Delta m = \text{const}$.



Фиг. 1. $\mathcal{M}_1$ — шаблон ячейки.



Фиг. 2. $\mathcal{M}_2$ — шаблон узла.

В описанных выше предположениях система (1)–(18) аппроксимируется в неявных ПКРС в лагранжевых переменных следующим образом:

$$\Delta mu_t = \sum_{r \in \mathcal{M}_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \left(R \hat{\rho}_r \hat{T}_r + \frac{\hat{B}_r B_r}{8\pi} \right); \quad (22)$$

$$\Delta mw_t = \sum_{r \in \mathcal{M}_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} \right) \left(R \hat{\rho}_r \hat{T}_r + \frac{\hat{B}_r B_r}{8\pi} \right); \quad (23)$$

$$\Delta mv_t = \sum_{r \in \mathcal{M}_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} \right) \left(R \hat{\rho}_r \hat{T}_r + \frac{\hat{B}_r B_r}{8\pi} \right); \quad (24)$$

$$\hat{B} \hat{V} = BV; \quad (25)$$

$$\Delta m \left(\frac{1}{\rho} \right)_t = V_t = \sum_{q \in \mathcal{M}_1} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_q} \right) u_q^{(0,5)} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_q} \right) w_q^{(0,5)} + \left(\frac{\partial V}{\partial z_q} \right) v_q^{(0,5)} \right); \quad (26)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} (\hat{T} - T) = - \frac{\hat{\rho} \hat{T}}{\Delta m} (\hat{V} - V), \quad (27)$$

где объем ячейки

$$V_{\min} = \frac{1}{6} \left[(x_{10} - x_{13})(S_1^x + S_3^x) + (y_{10} - y_{13})(S_1^y + S_3^y) + (z_{10} - z_{13})(S_1^z + S_3^z) + \right. \\ \left. + (x_{12} - x_{11})(S_2^x + S_4^x) + (y_{12} - y_{11})(S_2^y + S_4^y) + (z_{12} - z_{11})(S_2^z + S_4^z) + \right. \\ \left. + (x_{14} - x_9)(S_5^x + S_6^x) + (y_{14} - y_9)(S_5^y + S_6^y) + (z_{14} - z_9)(S_5^z + S_6^z) \right].$$

Здесь

$$r_9 = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4); \quad r_{10} = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_5 + r_6); \quad r_{11} = \frac{1}{4}(r_1 + r_4 + r_5 + r_8); \\ r_{12} = \frac{1}{4}(r_2 + r_3 + r_6 + r_7); \quad r_{13} = \frac{1}{4}(r_3 + r_4 + r_7 + r_8); \quad r_{14} = \frac{1}{4}(r_5 + r_6 + r_7 + r_8); \\ r_1 = r_{i+1jk}; \quad r_2 = r_{i+1j+1k}; \quad r_3 = r_{ij+1k}; \quad r_4 = r_{ijk}; \quad r_5 = r_{i+1jk+1}; \quad r_6 = r_{i+1j+1k+1}; \\ r_7 = r_{ij+1k+1}; \quad r_8 = r_{ijk+1}; \quad r = x, y, z; \\ S_1^r = \frac{1}{2}[(\psi_2 - \psi_5)(\theta_6 - \theta_1) + (\psi_6 - \psi_1)(\theta_5 - \theta_2)]; \\ S_2^r = \frac{1}{2}[(\psi_7 - \psi_2)(\theta_6 - \theta_3) + (\psi_6 - \psi_3)(\theta_2 - \theta_7)]; \\ S_3^r = \frac{1}{2}[(\psi_3 - \psi_8)(\theta_7 - \theta_4) + (\psi_7 - \psi_4)(\theta_8 - \theta_3)]; \\ S_4^r = \frac{1}{2}[(\psi_8 - \psi_1)(\theta_5 - \theta_4) + (\psi_5 - \psi_4)(\theta_1 - \theta_8)]; \\ S_5^r = \frac{1}{2}[(\psi_1 - \psi_3)(\theta_2 - \theta_4) + (\psi_2 - \psi_4)(\theta_3 - \theta_1)]; \\ S_6^r = \frac{1}{2}[(\psi_5 - \psi_7)(\theta_6 - \theta_8) + (\psi_6 - \psi_8)(\theta_7 - \theta_5)];$$

где $r = x, y, z$.

Если $r = x$, то $\psi = y, \theta = z$.

Если $r = y$, то $\psi = z, \theta = x$.

Если $r = z$, то $\psi = x, \theta = y$.

$$\Delta m_{mln} = \hat{\rho}_{mln} \hat{V}_{mln} = \rho_{mln} V_{mln}.$$

Сеточные функции x, y, z, u, w и v определены в узлах разностной сетки, а остальные сеточные функции определены в ячейках.

При записи (22)–(27) использовалось безындексное представление сеточных функций [1]. В (22)–(24) и (27) учитывается, что $P = R \rho T$, $\varepsilon = \frac{RT}{\gamma - 1}$.

Разностные уравнения (22)–(27) записаны на разностных шаблонах $\mathcal{M}_1(m, l, n)$ и $\mathcal{M}_2(i, j, k)$.

Производные объемов по координатам, входящие в (22)–(24), представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{mln}}{\partial r_1} &= \frac{1}{12}(S_{18}^r - S_{13}^r - S_{16}^r); & \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_2} &= \frac{1}{12}(S_{27}^r + S_{24}^r - S_{25}^r); & \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_3} &= \frac{1}{12}(-S_{36}^r + S_{13}^r - S_{38}^r); \\ \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_4} &= \frac{1}{12}(-S_{45}^r - S_{24}^r - S_{47}^r); & \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_5} &= \frac{1}{12}(S_{45}^r - S_{57}^r + S_{25}^r); & \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_6} &= \frac{1}{12}(S_{36}^r + S_{68}^r + S_{16}^r); \\ \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_7} &= \frac{1}{12}(-S_{27}^r + S_{57}^r + S_{47}^r); & \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_8} &= \frac{1}{12}(-S_{18}^r - S_{68}^r + S_{38}^r).\end{aligned}\quad (28)$$

Здесь

$$\begin{aligned}S_{18}^r &= \frac{1}{2}(S_1^r + S_3^r) + (\psi_{12} - \psi_{11})(\theta_5 - \theta_4) + (\theta_{12} - \theta_{11})(\psi_4 - \psi_5); \\ S_{13}^r &= \frac{1}{2}(S_2^r + S_4^r) + (\psi_{14} - \psi_9)(\theta_2 - \theta_4) + (\theta_{14} - \theta_9)(\psi_4 - \psi_2); \\ S_{16}^r &= \frac{1}{2}(S_5^r + S_6^r) + (\psi_{10} - \psi_{13})(\theta_2 - \theta_5) + (\theta_{10} - \theta_{13})(\psi_5 - \psi_2); \\ S_{27}^r &= \frac{1}{2}(S_1^r + S_3^r) + (\psi_{12} - \psi_{11})(\theta_6 - \theta_3) + (\theta_{12} - \theta_{11})(\psi_3 - \psi_6); \\ S_{24}^r &= \frac{1}{2}(S_2^r + S_4^r) + (\psi_{14} - \psi_9)(\theta_1 - \theta_3) + (\theta_{14} - \theta_9)(\psi_3 - \psi_1); \\ S_{25}^r &= \frac{1}{2}(S_5^r + S_6^r) + (\psi_{10} - \psi_{13})(\theta_6 - \theta_1) + (\theta_{10} - \theta_{13})(\psi_1 - \psi_6); \\ S_{36}^r &= \frac{1}{2}(S_1^r + S_3^r) + (\psi_{12} - \psi_{11})(\theta_7 - \theta_2) + (\theta_{12} - \theta_{11})(\psi_2 - \psi_7); \\ S_{38}^r &= \frac{1}{2}(S_5^r + S_6^r) + (\psi_{10} - \psi_{13})(\theta_7 - \theta_4) + (\theta_{10} - \theta_{13})(\psi_4 - \psi_7); \\ S_{45}^r &= \frac{1}{2}(S_1^r + S_3^r) + (\psi_{12} - \psi_{11})(\theta_8 - \theta_1) + (\theta_{12} - \theta_{11})(\psi_1 - \psi_8); \\ S_{47}^r &= \frac{1}{2}(S_5^r + S_6^r) + (\psi_{10} - \psi_{13})(\theta_3 - \theta_8) + (\theta_{10} - \theta_{13})(\psi_8 - \psi_3); \\ S_{57}^r &= \frac{1}{2}(S_2^r + S_4^r) + (\psi_{14} - \psi_9)(\theta_6 - \theta_8) + (\theta_{14} - \theta_9)(\psi_8 - \psi_6); \\ S_{68}^r &= \frac{1}{2}(S_2^r + S_4^r) + (\psi_{14} - \psi_9)(\theta_5 - \theta_7) + (\theta_{14} - \theta_9)(\psi_7 - \psi_5).\end{aligned}$$

4. ОЦЕНКИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ

Для расчетов течений излучающей плазмы исходные модели типа (1)–(18) существенно усложняются – поскольку могут добавляться уравнения кинетики ионизации, радиационного энергообмена, учитываться двухтемпературность, использоваться табличные данные по состоянию вещества, его транспортным коэффициентам и оптическим свойствам и т.д.

Полный анализ сходимости методов решения нелинейных трехмерных уравнений МГД провести зачастую или не удастся, или количество упрощающих предположений делает результаты анализ не пригодными для практического исследования.

В настоящей работе сходимость алгоритмов исследуется для линеаризированной системы (22)–(27). Данный подход к изучению методов решения нелинейной трехмерной системы МГД, несмотря на теоретическую неполноту, позволяет сформулировать физически содержательные критерии сходимости итерационного процесса. Заметим, что этими критериями удобно пользоваться при решении практических задач. Полученные при анализе линеаризированной системы уравнений оценки можно также использовать для изучения сходимости численного метода в нелинейном случае, поскольку, линеаризация является центральным пунктом многочисленных методик [1, 7, 8]. Выводы из линейного анализа в работе проверены в методических расчетах и при расчете реальной задачи.

При построении численных методов решения системы нелинейных уравнений используется принцип локального расщепления физических процессов. Реализующийся осуществляется через разделение системы разностных уравнений по видам физических процессов: уравнения динамики плазмы (D), уравнения электромагнитного поля (ЕМ) и уравнения теплового баланса (Т), описывающие энергообмен между компонентами плазмы в двухтемпературном случае. В простейшем одностепенном случае уравнение теплового баланса

(Т) одно — (27). Для построения конкретного алгоритма уравнения различных видов объединяются в группы. Далее рассматривается как алгоритм, в котором разбиение на группы происходит следующим образом:

- к первой группе относят динамические (D) и электромагнитные (ЕМ) уравнения;
- ко второй — тепловые (Т) уравнения (метод комбинированного решения системы разностных уравнений) и алгоритм, в котором все три группы решаются отдельно (метод раздельного решения системы разностных уравнений).

Уравнения в каждой из этих двух (трех) групп решаются относительно определенных переменных, переменные же, не входящие в данную группу, считаются “замороженными” и берутся с предыдущей итерации. Последовательное решение групп разностных уравнений связано внешним итерационным процессом, в котором контролируется как точность решения разностных уравнений, так и точность выполнения энергетического баланса.

Линеаризованные уравнения системы (22)–(27), соответствующие принятым выше ограничениям и характеру итерационного процесса, который соответствует методу комбинированного решения, запишем в виде

$$\Delta m \frac{u_{ijk}^{s+1} - u_{ijk}}{\Delta t} = \sum_{r \in \mathbb{M}_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} \right) \left(R(\rho_r T_r + T_r \delta \rho_r^{s+1} + \rho_r \delta T_r^s) + \frac{B_r^{s+1} B_r}{8\pi} \right); \quad (29)$$

$$\Delta m \frac{w_{ijk}^{s+1} - w_{ijk}}{\Delta t} = \sum_{r \in \mathbb{M}_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} \right) \left(R(\rho_r T_r + T_r \delta \rho_r^{s+1} + \rho_r \delta T_r^s) + \frac{B_r^{s+1} B_r}{8\pi} \right); \quad (30)$$

$$\Delta m \frac{v_{ijk}^{s+1} - v_{ijk}}{\Delta t} = \sum_{r \in \mathbb{M}_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} \right) \left(R(\rho_r T_r + T_r \delta \rho_r^{s+1} + \rho_r \delta T_r^s) + \frac{B_r^{s+1} B_r}{8\pi} \right); \quad (31)$$

$$\delta \rho_{mln}^{s+1} = -\frac{\rho_{mln}^2}{\Delta m} (V_{mln}^{s+1} - V_{mln}); \quad (32)$$

$$B_{mln}^{s+1} = B_{mln} \left[1 - \frac{\rho_{mln}}{\Delta m} (V_{mln}^{s+1} - V_{mln}) \right]; \quad (33)$$

$$\delta T_{mln}^s = -\frac{\gamma - 1}{\Delta m} \rho_{mln} T_{mln} (V_{mln}^s - V_{mln}); \quad (34)$$

где

$$V_{mln}^{s+1} - V_{mln} = \frac{\Delta t}{12} \sum_{q \in \mathbb{M}_1} \left[\left(\frac{\partial V_{mln}}{\partial x_q} \right) (u_q + u_q^{s+1}) + \left(\frac{\partial V_{mln}}{\partial y_q} \right) (w_q + w_q^{s+1}) + \left(\frac{\partial V_{mln}}{\partial z_q} \right) (v_q + v_q^{s+1}) \right].$$

Здесь искомые величины обозначаются индексом s — соответственно номеру итерации. Исключив из (29)–(31) $\delta \rho_{mln}^{s+1}$, B_{mln}^{s+1} и δT_{mln}^s с помощью (32)–(34), получим систему трехмерных уравнений, которая связывает U_{ijk}^{s+1} и U_{ijk}^s :

$$(\Lambda_1 U^{s+1})_{ijk} = -(\Lambda_2 U^s)_{ijk} + \mathbf{F}_{ijk}, \quad (35)$$

где $\mathbf{F}_{ijk} = (F_{ijk}^{(1)}, F_{ijk}^{(2)}, F_{ijk}^{(3)})$, $F_{ijk}^{(1)}$, $F_{ijk}^{(2)}$ и $F_{ijk}^{(3)}$ — свободные члены в преобразованных уравнениях (29), (30) и (31) соответственно, в которые входят величины с предыдущего слоя по времени:

$$(\Lambda_1 U)_{ijk} = (\Lambda_1(u)_{ijk}, \Lambda_1(w)_{ijk}, \Lambda_1(v)_{ijk}), \quad (\Lambda_2 U)_{ijk} = (\Lambda_2(u)_{ijk}, \Lambda_2(w)_{ijk}, \Lambda_2(v)_{ijk}), \quad (36)$$

$$\Lambda_1(u)_{ijk} = \kappa u_{ijk} + \sum_{r \in \mathbb{M}_2} c1_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} \right) H_r, \quad \Lambda_1(w)_{ijk} = \kappa w_{ijk} + \sum_{r \in \mathbb{M}_2} c1_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} \right) H_r,$$

$$\Lambda_1(v)_{ijk} = \kappa v_{ijk} + \sum_{r \in \mathbb{M}_2} c1_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} \right) H_r, \quad \Lambda_2(u)_{ijk} = \kappa u_{ijk} + \sum_{r \in \mathbb{M}_2} c2_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} \right) H_r,$$

$$\Lambda_2(w)_{ijk} = \kappa w_{ijk} + \sum_{r \in \mathbb{M}_2} c2_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} \right) H_r, \quad \Lambda_2(v)_{ijk} = \kappa v_{ijk} + \sum_{r \in \mathbb{M}_2} c2_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} \right) H_r, \quad \text{где } \kappa = 2 \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right)^2,$$

$$c1_{mln} = RT_{mln} \rho_{mln}^2 + \frac{B_{mln}^2 \rho_{mln}}{8\pi} = P_{mln} \rho_{mln} + \frac{B_{mln}^2 \rho_{mln}}{8\pi}, \quad c2_{mln} = (\gamma - 1) RT_{mln} \rho_{mln}^2 = (\gamma - 1) P_{mln} \rho_{mln}, \quad (37)$$

$$H_{mln} = \sum_{q \in \mathbb{M}_1} \left(\frac{\partial V_{mln}}{\partial x_q} u_q^{s+1} + \frac{\partial V_{mln}}{\partial y_q} w_q^{s+1} + \frac{\partial V_{mln}}{\partial z_q} v_q^{s+1} \right).$$

Рассмотрим итерационный процесс (35) на множестве сеточных функций, принимающих нулевые значения на границе:

$$U \in \Omega_h^0, \quad U|_{\Gamma_h} = 0.$$

Покажем, что разностный оператор Λ_1 обладает следующим свойством: $\Lambda_1 = \Lambda_1^* > 0$.

Вычислим скалярное произведение $(\Lambda_1 U, U)$. Учитывая форму записи производной объема по координатам имеем

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 U, U) &= \sum_{ijk} (\Lambda_1(u)_{ijk} u_{ijk} \Delta m + \Lambda_1(w)_{ijk} w_{ijk} \Delta m + \Lambda_1(v)_{ijk} v_{ijk} \Delta m) = \\ &= \Delta m \kappa \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) + \Delta m \sum_{ijk} \left[\sum_{r \in \mathcal{H}_2} c_{1r} H_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} u_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} w_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} v_{ijk} \right) \right] = \\ &= \Delta m \kappa \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) + \Delta m \sum_{ijk} \left[\sum_{r \in \mathcal{H}_2} c_{1r} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} u_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} w_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} v_{ijk} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{q \in \mathcal{H}_1} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_q} u_q + \frac{\partial V_r}{\partial y_q} w_q + \frac{\partial V_r}{\partial z_q} v_q \right) \right] = \\ &= \Delta m \kappa \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) + \frac{\Delta m}{144} \sum_{ijk} c_{1mln} I_{ijk}^2 = (U, \Lambda_1 U) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Lambda_1 = \Lambda_1^* > 0$.

Суммирование идет по всем узлам, кроме граничных; $m = i, l = j, n = k$. Здесь

$$\begin{aligned} I &= \left[(u_1 - u_8) S_{18}^x + (u_3 - u_1) S_{13}^x + (u_6 - u_1) S_{16}^x + (u_2 - u_7) S_{27}^x + (u_2 - u_4) S_{24}^x + (u_5 - u_2) S_{25}^x + \right. \\ &\quad + (u_6 - u_3) S_{36}^x + (u_8 - u_3) S_{38}^x + (u_5 - u_4) S_{45}^x + (u_7 - u_4) S_{47}^x + (u_7 - u_5) S_{57}^x + (u_6 - u_8) S_{68}^x + \\ &\quad + (w_1 - w_8) S_{18}^x + (w_3 - w_1) S_{13}^x + (w_6 - w_1) S_{16}^x + (w_2 - w_7) S_{27}^x + (w_2 - w_4) S_{24}^x + (w_5 - w_2) S_{25}^x + \\ &\quad + (w_6 - w_3) S_{36}^x + (w_8 - w_3) S_{38}^x + (w_5 - w_4) S_{45}^x + (w_7 - w_4) S_{47}^x + (w_7 - w_5) S_{57}^x + (w_6 - w_8) S_{68}^x + \\ &\quad + (v_1 - v_8) S_{18}^x + (v_3 - v_1) S_{13}^x + (v_6 - v_1) S_{16}^x + (v_2 - v_7) S_{27}^x + (v_2 - v_4) S_{24}^x + (v_5 - v_2) S_{25}^x + \\ &\quad \left. + (v_6 - v_3) S_{36}^x + (v_8 - v_3) S_{38}^x + (v_5 - v_4) S_{45}^x + (v_7 - v_4) S_{47}^x + (v_7 - v_5) S_{57}^x + (v_6 - v_8) S_{68}^x \right]. \end{aligned}$$

Покажем, что разностный оператор Λ_2 обладает следующим свойством: $\Lambda_2 = \Lambda_2^* > 0$.

Вычислим скалярное произведение $(\Lambda_2 U, U)$. Учитывая (28), получим

$$\begin{aligned} (\Lambda_2 U, U) &= \sum_{ijk} (\Lambda_2(u)_{ijk} u_{ijk} \Delta m + \Lambda_2(w)_{ijk} w_{ijk} \Delta m + \Lambda_2(v)_{ijk} v_{ijk} \Delta m) = \\ &= \Delta m \sum_{ijk} \left[\sum_{r \in \mathcal{H}_2} c_{2r} H_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} u_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} w_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} v_{ijk} \right) \right] = \frac{\Delta m}{144} \sum_{ijk} c_{2mln} I_{ijk}^2 = (U, \Lambda_2 U) > 0, \end{aligned}$$

из этого следует, что $\Lambda_2 = \Lambda_2^* > 0$.

Запишем итерационный процесс (35) в каноническом виде:

$$BU_t + AU = F, \quad U_t = \frac{U^{s+1} - U^s}{\tau_s}. \quad (38)$$

Здесь $B = \Lambda_1$, $A = \Lambda_1 + \Lambda_2$, $\tau_s \equiv 1$. Заметим, что $B = B^* > 0$, $A = A^* > 0$.

Поскольку операторы A и B не зависят от номера итерации, то процесс является стационарным. Достаточным условием для сходимости этого итерационного процесса является выполнение неравенства [8]:

$$B \geq 0.5 \tau_s A \quad (39)$$

или $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$.

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} RR = ((\Lambda_1 - \Lambda_2)U, U) &= \sum_{ijk} ((\Lambda_1 - \Lambda_2)(u)_{ijk} u_{ijk} \Delta m + (\Lambda_1 - \Lambda_2)(w)_{ijk} w_{ijk} \Delta m + (\Lambda_1 - \Lambda_2)(v)_{ijk} v_{ijk} \Delta m) = \\ &= \Delta m \kappa \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) + \frac{\Delta m}{144} \sum_{ijk} (c_{1mln} - c_{2mln}) I_{ijk}^2. \end{aligned}$$

Для всех (i, j, k) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \max & \left(|u_{i+1jk} - u_{ijk+1}|, |u_{ij+1k} - u_{i+1jk}|, |u_{i+1j+1k+1} - u_{i+1jk}|, |u_{i+1j+1k} - u_{ij+1k+1}|, \right. \\ & |u_{i+1j+1k} - u_{ijk}|, |u_{i+1jk+1} - u_{i+1j+1k}|, |u_{i+1j+1k+1} - u_{ij+1k}|, |u_{ijk+1} - u_{ij+1k}|, \\ & |u_{i+1jk+1} - u_{ijk}|, |u_{ij+1k+1} - u_{ijk}|, |u_{ij+1k+1} - u_{i+1jk+1}|, |u_{i+1j+1k+1} - u_{i+1jk+1}|, \\ & |w_{i+1jk} - w_{ijk+1}|, |w_{ij+1k} - w_{i+1jk}|, |w_{i+1j+1k+1} - w_{i+1jk}|, |w_{i+1j+1k} - w_{ij+1k+1}|, \\ & |w_{i+1j+1k} - w_{ijk}|, |w_{i+1jk+1} - w_{i+1j+1k}|, |w_{i+1j+1k+1} - w_{ij+1k}|, |w_{ijk+1} - w_{ij+1k}|, \\ & |w_{i+1jk+1} - w_{ijk}|, |w_{ij+1k+1} - w_{ijk}|, |w_{ij+1k+1} - w_{i+1jk+1}|, |w_{i+1j+1k+1} - w_{i+1jk+1}|, \\ & |v_{i+1jk} - v_{ijk+1}|, |v_{ij+1k} - v_{i+1jk}|, |v_{i+1j+1k+1} - v_{i+1jk}|, |v_{i+1j+1k} - v_{ij+1k+1}|, \\ & |v_{i+1j+1k} - v_{ijk}|, |v_{i+1jk+1} - v_{i+1j+1k}|, |v_{i+1j+1k+1} - v_{ij+1k}|, |v_{ijk+1} - v_{ij+1k}|, \\ & \left. |v_{i+1jk+1} - v_{ijk}|, |v_{ij+1k+1} - v_{ijk}|, |v_{ij+1k+1} - v_{i+1jk+1}|, |v_{i+1j+1k+1} - v_{i+1jk+1}| \right) \leq \\ & \leq \sqrt{2 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_3=0}^1 (u_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + w_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + v_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2)}. \end{aligned}$$

Поэтому, для любого U будет справедливо неравенство:

$$\sum_{ijk} I_{ijk}^2 \leq 2 \sum_{ijk} \left(\sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_3=0}^1 (u_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + w_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + v_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2) \right).$$

$$\begin{aligned} & \left(S_{18}^x + S_{13}^x + S_{16}^x + S_{27}^x + S_{24}^x + S_{25}^x + S_{36}^x + S_{38}^x + S_{45}^x + S_{47}^x + S_{57}^x + S_{68}^x + S_{18}^y + S_{13}^y + S_{16}^y + S_{27}^y + S_{24}^y + S_{25}^y + S_{36}^y + S_{38}^y + \right. \\ & S_{45}^y + S_{47}^y + S_{57}^y + S_{68}^y + S_{18}^z + S_{13}^z + S_{16}^z + S_{27}^z + S_{24}^z + S_{25}^z + S_{36}^z + S_{38}^z + S_{45}^z + S_{47}^z + S_{57}^z + S_{68}^z \Big)^2 \leq \\ & \leq 2 \times 9 \times 144 \times (S^x + S^y + S^z)^2 \cdot \sum_{ijk} \left(\sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_3=0}^1 (u_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + w_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + v_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2) \right). \end{aligned}$$

Здесь $S^x = h_y h_z$; $S^y = h_x h_z$; $S^z = h_x h_y$;

$$\begin{aligned} h_r = \max_{ijk} & \left\{ |r_{i+1jk} - r_{ijk+1}|, |r_{ij+1k} - r_{i+1jk}|, |r_{i+1j+1k+1} - r_{i+1jk}|, |r_{i+1j+1k} - r_{ij+1k+1}|, \right. \\ & |r_{i+1j+1k} - r_{ijk}|, |r_{i+1jk+1} - r_{i+1j+1k}|, |r_{i+1j+1k+1} - r_{ij+1k}|, |r_{ijk+1} - r_{ij+1k}|, \\ & \left. |r_{i+1jk+1} - r_{ijk}|, |r_{ij+1k+1} - r_{ijk}|, |r_{ij+1k+1} - r_{i+1jk+1}|, |r_{i+1j+1k+1} - r_{ij+1k+1}| \right\}. \end{aligned}$$

Здесь учитываем, что $S_{k_1 k_2}^r \leq 3S^r$, $r = x, y, z$. Кроме того, справедливо тождество:

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) &= \frac{1}{8} \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + u_{i+1jk}^2 + u_{ij+1k}^2 + u_{i+1j+1k}^2 + u_{ijk+1}^2 + u_{i+1jk+1}^2 + u_{ij+1k+1}^2 + u_{i+1j+1k+1}^2 + \\ & + w_{ijk}^2 + w_{i+1jk}^2 + w_{ij+1k}^2 + w_{i+1j+1k}^2 + w_{ijk+1}^2 + w_{i+1jk+1}^2 + w_{ij+1k+1}^2 + w_{i+1j+1k+1}^2 + \\ & + v_{ijk}^2 + v_{i+1jk}^2 + v_{ij+1k}^2 + v_{i+1j+1k}^2 + v_{ijk+1}^2 + v_{i+1jk+1}^2 + v_{ij+1k+1}^2 + v_{i+1j+1k+1}^2). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого U выполняется неравенство

$$2 \times 9 \times 144 \times (S^x + S^y + S^z)^2 \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) \geq \sum_{ijk} I_{ijk}^2.$$

Учитывая последнее неравенство, получим

$$\begin{aligned} RR &\geq \frac{\Delta m}{144} \sum_{ijk} \left(\frac{\kappa}{9 \times 16 \times (S^x + S^y + S^z)} + c1_{mln} - c2_{mln} \right) I_{ijk}^2 \geq \\ &\geq \frac{\Delta m}{144} N \cdot \min_{ijk} \left(\frac{\kappa}{9 \times 16 \times (S^x + S^y + S^z)} + c1_{mln} - c2_{mln} \right) I_{ijk}^2. \end{aligned}$$

Здесь N — число узлов разностной сетки, кроме граничных.

Сходимость итерационного процесса (35) имеет место, если

$$\frac{\kappa}{9 \times 16 \times (S^x + S^y + S^z)} + c1_{mln} - c2_{mln} \geq 0$$

выполняется во всех ячейках разностной сетки, т.е. при

$$\frac{B^2}{8\pi} \geq (\gamma - 2)P. \quad (40)$$

В противном случае условие сходимости имеет следующий вид:

$$\Delta t < \frac{\sqrt{2} \cdot \Delta m}{12\rho(S^x + S^y + S^z) \sqrt{(\gamma - 2) \frac{P}{\rho} - \frac{B^2}{8\pi}}}. \quad (41)$$

Таким образом, критерий устойчивости для трехмерного метода комбинированного решения (40) совпадает с критериями для одномерного и двумерного аналогов метода (19). При этом ограничения на шаг по времени при нарушении условия (40), несколько строже ограничения на шаг по времени как для одномерного (20), так и для двумерного (21) аналогов.

Поскольку для большинства практических задач $\gamma < 2$, в этом случае условие сходимости (40) выполняется автоматически.

Рассмотрим теперь сходимость метода раздельного решения основных разностных уравнений (22)–(27). Тогда система разностных уравнений разделяется на три группы: к первой группе относятся динамические уравнения, ко второй — уравнения энергии, к третьей — уравнения электромагнитного поля. Далее решение проводится аналогично предыдущему по группам и также связывается общим итерационным циклом.

Анализ устойчивости данного алгоритма решения разностных уравнений проводится тем же способом, как и показано выше. Итерационный процесс, соответствующий этому алгоритму, сводится к (36) и (37) при

$$c1_{mln} = RT_{mln}\rho_{mln}^2; \quad c2_{mln} = (\gamma - 1)RT_{mln}\rho_{mln}^2 + \frac{B_{mln}^2\rho_{mln}}{8\pi}.$$

Таким образом, метод раздельного решения трехмерных МГД-уравнений будет сходиться, при справедливости условия

$$\frac{B^2}{8\pi} \leq (2 - \gamma)P \quad (42)$$

в каждой ячейке разностной сетки. В противном случае этот метод сходится при условии:

$$\Delta t < \frac{\sqrt{2} \cdot \Delta m}{12\rho(S^x + S^y + S^z) \sqrt{(\gamma - 2) \frac{P}{\rho} + \frac{B^2}{8\pi}}}. \quad (43)$$

5. ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Учитывая, что проведенные выше исследования алгоритмов раздельного и комбинированного решения групп разностных уравнений носят в основном качественный характер, справедливость полученных выше оценок необходимо проверить численными расчетами.

Рассмотрим модельную задачу. В начальный момент времени $t = 0$ покоящееся вещество занимает область: $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$, $-3 \leq z \leq 3$. Начальная плотность и температура равны соответственно $\rho_0 = 0.2$, $T_0 = 0.9$. Вещество является идеальным газом $P = \rho T$, внутренняя энергия $\varepsilon = \frac{T}{\gamma - 1}$. Газ нетеплопроводный,

т.е. $\kappa = 0$. Он помещен в однородное магнитное поле $B = (B_x, B_y, B_z)$, и является практически “вмороженным”: $\sigma = 10^{12}$. На границах $z = z_{\text{лев}}(t)$ и $z = z_{\text{прав}}(t)$ задана малая скорость $U_{\text{лев}}(t) = U_{\text{прав}}(t) = \pm 0.01$, на границах $x = x_{\text{лев}}(t)$, $x = x_{\text{прав}}(t)$, $y = y_{\text{лев}}(t)$ и $y = y_{\text{прав}}(t)$ задается нулевая скорость.

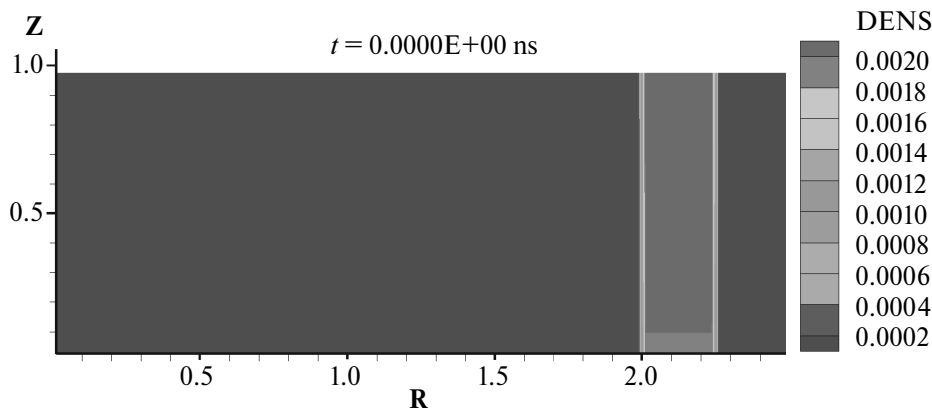
В данной постановке акустические колебания в среде распространяются со скоростью, много большей скорости выдвигания (вдвижения) поршня. Следовательно, в любой момент времени распределение плотности газа и магнитного поля практически однородно.

Задача решалась для различных значений величин $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$ и γ : $0 \leq B \leq 2000$, $1 < \gamma \leq 15$. Данный класс задач решался как в лагранжевых, так и в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных (СЭЛ) [12].

Расчеты проводились методами отдельного и комбинированного решения групп разностных уравнений

Ограничения на временной шаг в численных расчетах хорошо согласуются с оценками, полученными в настоящей работе. При $\gamma \leq 2$ расчеты с любыми магнитными полями комбинированным методом проходили практически без ограничения на шаг по времени (в расчетах $\Delta t = 1$). Расчеты отдельным методом абсолютно устойчивы только при $B < 4.6$, при $B = 100$ шаг интегрирования $t \approx 0.0013$, а при $B = 1000$ — $\Delta t \approx 0.00012$, что неприемлемо при решении практических задач. Оценки полученные в работе, справедливы как для лагранжевых, так и для СЭЛ переменных.

Рассмотрим расчет, моделирует сжатие плазмы лайнером (газоплазменной оболочкой), ускоряемым электродинамически импульсом тока [9, 10]). В начальный момент времени неподвижная плазма занимает область $0 \leq R \leq 2.5$, $0 \leq Z \leq 1$ и $0 < \varphi \leq 2\pi$ (рассматривается (R, φ, Z) геометрия). Расчет проводился в СЭЛ переменных. Начальная температура $T_e = T_i = 1$ эВ (рассматривается двухтемпературная модель). В области $2 \leq R \leq 2.25$ моделируется лайнер с плотностью, соответствующей $\rho_l = 1.97 \cdot 10^{-3} \cdot (1 + 0.1 \cdot \sin(\frac{\pi z}{2}))$ г/см³, в остальной области моделируется плазма с плотностью $\rho_{\text{пл}} = 2 \cdot 10^{-6}$ г/см³ (см. фиг. 3).



Фиг. 3. Начальное распределение плотности, $\varphi = \pi$.

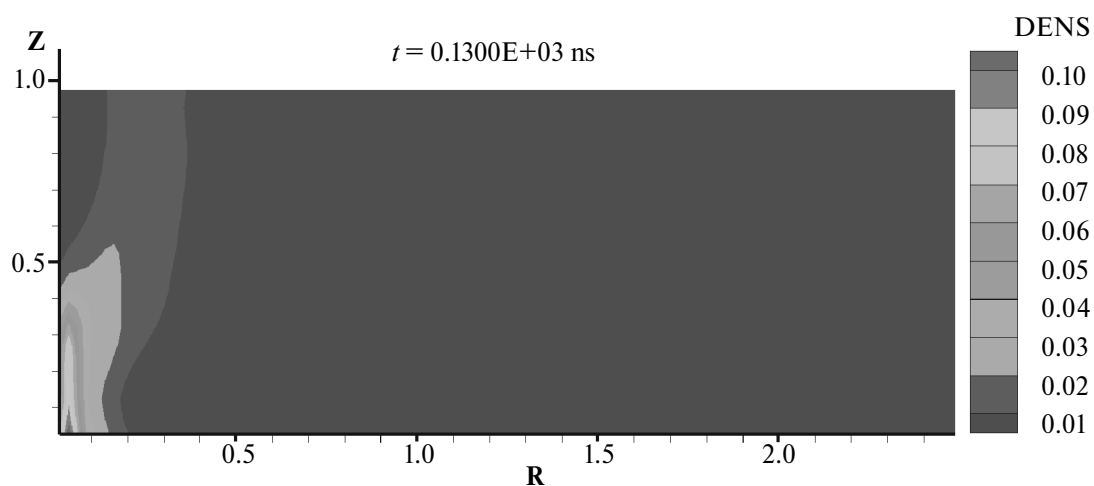
Вещество-вольфрам. Уравнение состояния приводится в работе [11]. Газ помещен в однородное магнитное поле $B_z = 50$ кГс. На внешней границе $B_\varphi(r_{\text{прав}}, \varphi, z) = B_0 \cdot \sin(\frac{\pi t}{0.16})$. Здесь t время, которое измеряется в мкс., $B_0 = 2$ МГс.

На фиг. 4–7 представлены результаты расчета динамики лайнера на момент времени 0.13 мкс в виде распределенной плотности в г/см³; радиальной компоненты скорости U_R в 10^6 см/с; $B_\varphi \cdot R$ — компоненты магнитной индукции B_φ в МГс, умноженной на радиус R ; компоненты магнитной индукции B_z в МГс. Около этого момента времени лайнер достигает осевой линии и продолжает схлопываться.

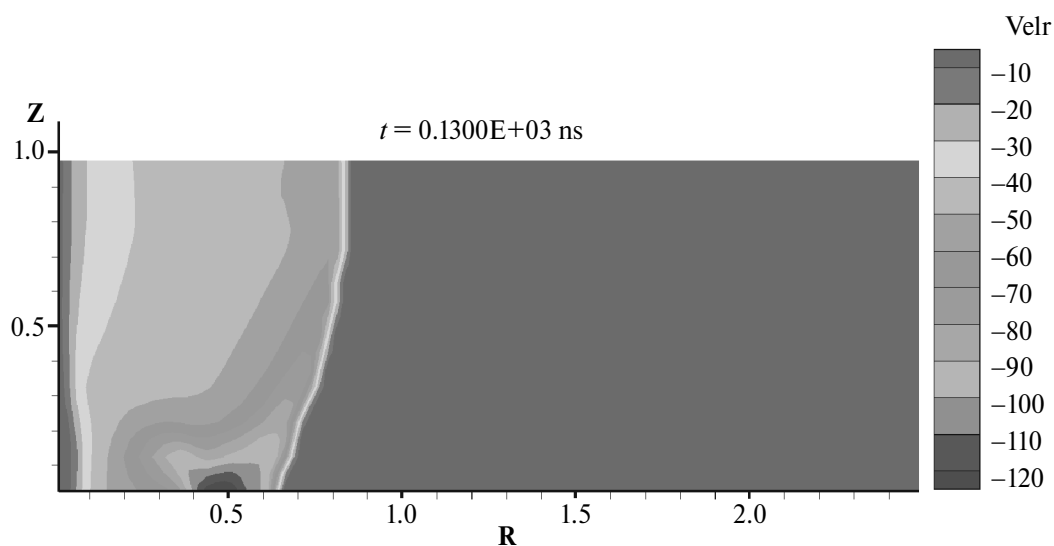
Провести расчет удалось только методом комбинированного решения групп разностных уравнений. При решении задачи методом отдельного решения, при росте $B_\varphi(t)$ шаг по времени резко падает, что подтверждено оценками, полученными в данной работе (см. формулы (42), (43)).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

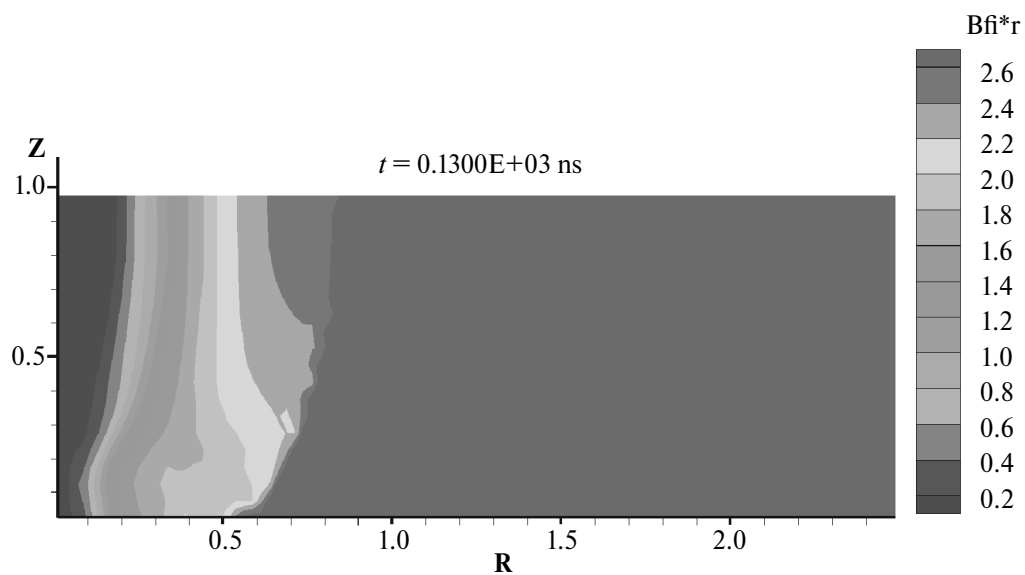
Полученные в работе оценки сходимости алгоритмов отдельного и комбинированного решения системы трехмерных разностных уравнений подкреплены численными модельными расчетами и расчетами практических задач. При решении конкретной задачи представляется целесообразным задействовать оба описанных в настоящей работе численных метода. Вначале каждого временного шага анализируем физическое соотношение



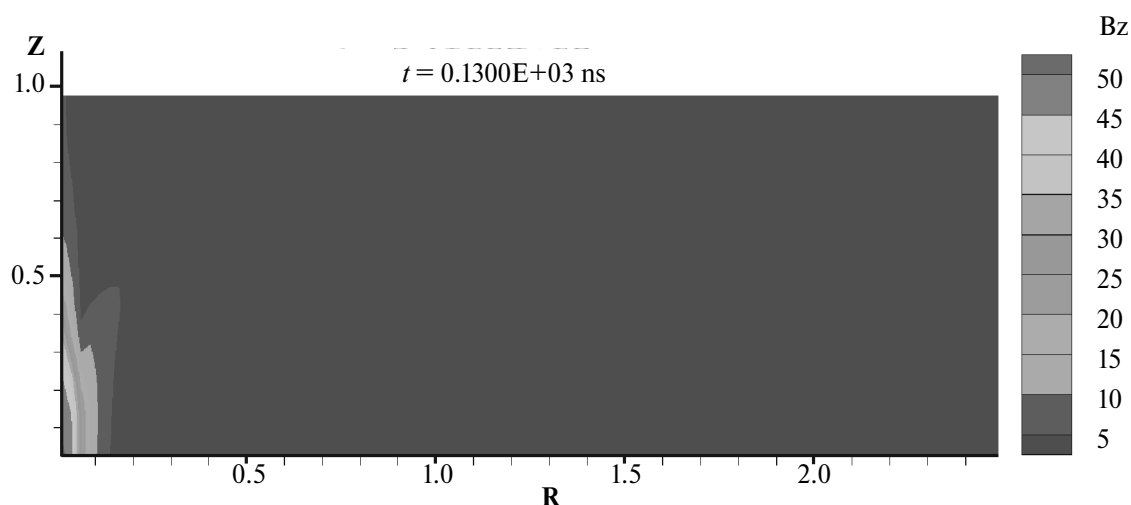
Фиг. 4. Распределение плотности на момент времени 0.13 мкс, $\varphi = \pi$.



Фиг. 5. Распределение радиальной компоненты скорости U_R на момент времени 0.13 мкс, $\varphi = \pi$.



Фиг. 6. Распределение компоненты магнитной индукции B_φ , умноженной на радиус R на момент времени 0.13 мкс, $\varphi = \pi$.



Фиг. 7. Распределение компоненты магнитной индукции B_z на момент времени 0.13 мкс, $\varphi = \pi$.

параметров вещества и магнитного поля. В случае выполнения на данном временном шаге условия сходимости для метода раздельного решения системы разностных уравнений целесообразно использовать именно этот метод. В противном случае необходимо применить более универсальный метод комбинированного решения системы разностных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. 424 с.
2. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Новикова Т.П., Оточин А.А. Оценки сходимости некоторых итерационных алгоритмов численного решения задач двумерной магнитной гидродинамики. М.: 1995. Препринт ИММ РАН, № 6, 20 с.
3. Круковский А.Ю., Гасилов В.А., Повещенко Ю.А., Шарова Ю.С., Ключкова Л.В. Визуализация полностью консервативной лагранжево-эйлеровой схемы для двухмерных задач магнитной гидродинамики // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 1. С. 50–70, <https://doi.org/10/20948/mm-2020-01-04>
4. Куликовский А.Г., Любимов В.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос. 2005. 328 с.
5. Круковский А.Ю. Сходимость метода комбинированных прогонок для разностной схемы одномерной магнитной гидродинамики. М.: 1988. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша № 113, 12 с.
6. Самарский А.А., Волосевич П.П., Волчинская М.И., Курдюмов С.П. Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 5. С. 1025–1038.
7. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во физико-технического института, 1994. 504 с.
8. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
9. Дюдерштадт Дж., Мозес Г. Инерциальный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат, 1984. 300 с.
10. Zakharov S.V., Smirnov V.P., Grabovskii E.V., Nedoseev S.L., Oleinik G.M., Zaitsev V.I. Imploding liner as driver for indirect driven target physics studies // Proc. of the IAEA Technical Committee Meeting on Drivers for Inertial Confinement Fusion. Paris, 1994 (International Atomic Energy Agency Vienna, 1995), p. 395.
11. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. М.: Физматлит, 2000, 400 с.; Nikiforov A.F., Novikov V.G., Uvarov V.B. Quantum-statistical models of hot dense matter. Methods for computation opacity and equation of state. Switzerland: Birkhauser, 2005. 447 p.

12. Головизин В.М., Рязанов В.А., Сорокикова О.С. Об одном классе полностью консервативных схем МГД в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984.Т. 24. №4. С. 520–533.

CONVERGENCE ESTIMATES OF ITERATIVE METHODS FOR NUMERICAL MODELING OF THREE-DIMENSIONAL PROCESSES IN MAGNETOHYDRODYNAMICS

A.Yu. Krukovsky^{a,*}, I.V. Popov^{a,**}, Yu.A. Poveshchenko^{a,***}

^a Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Miusskaya sq., 4, Moscow, 125047 Russia

*e-mail:alexander-krukovskiy@yandex.ru,

**e-mail:piv2964@mail.ru

***e-mail:hecon@mail.ru

Received 15 April, 2024

Revised 15 April, 2024

Accepted 05 May, 2024

Abstract. This paper addresses the convergence of iterative processes applied to implicit, fully conservative difference schemes in three-dimensional magnetohydrodynamics, using both separate and combined solution methods for groups of difference equations split by physical processes. Convergence estimates for the iterative processes of the numerical methods considered in this study are obtained. The applicability of both combined and separate methods for solving three-dimensional difference equations in magnetohydrodynamics is examined. Given that the presented algorithm analysis is mainly qualitative, the validity of the obtained estimates was confirmed through numerical experiments on both model and real-world problems. Notably, the convergence estimates of the iterative processes allow for the selection of an optimal numerical method for solving difference equations in three-dimensional magnetohydrodynamic problems at any time step.

Keywords: three-dimensional magnetohydrodynamics equations, implicit fully conservative difference scheme, convergence of iterative process.