

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА—АМПЕРА

© 2024 г. Е. В. Чижонков^{1,*}

¹ 119899 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия

*e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 02.11.2023 г.

Переработанный вариант 10.03.2024 г.

Принята к публикации 03.04.2024 г.

Для кинетической модели плазмы, базирующейся на уравнениях Власова—Ампера, построена неявная схема типа Мак-Кормака. По сравнению с явной схемой она имеет более слабое ограничение на устойчивость, но сохраняет прежнюю вычислительную эффективность, т.е. не использует внутренние итерации. При этом погрешность полной энергии соответствует второму порядку точности алгоритма, а полный заряд (число частиц) сохраняется на сеточном уровне. В качестве моделируемого физического процесса рассматривается формирование плазменных волн, возбуждаемых коротким мощным лазерным импульсом. Библ. 31. Фиг. 8.

Ключевые слова: кинетическая модель плазмы, уравнения Власова—Ампера, плазменные колебания и волны, численное моделирование, неявная схема Мак-Кормака.

DOI: 10.31857/S0044466924070116, EDN: xidnpg

ВВЕДЕНИЕ

Плазма имеет решающее значение для различных приложений. Понимание сложного поведения плазмы привело к важным достижениям в области космической физики, термоядерной энергетики и создания мощных микроволновых излучений и крупномасштабных ускорителей частиц (см. [1]). Однако изучение поведения плазмы с использованием традиционных экспериментальных методов является сложной задачей из-за ее высокой динамичности, что побуждает к разработке различных методов моделирования. Теоретическим фундаментом современного моделирования плазменных процессов, безусловно, является уравнение Власова (см. [2]). Однако, как и большинство кинетических уравнений, оно требует не только нетривиальных алгоритмов для получения приближенного решения, но и весьма значительных объемов вычислений для их реализации.

Для численного решения уравнения Власова, как правило, используются два основных подхода: на основе частиц и на основе сеток. Подход на основе сеток часто называют *эйлеровым*. Метод *частиц в ячейке* — хорошо известный способ отслеживания движения конечного числа макрочастиц (см. [3]). Хотя такой подход эффективен в вычислительном отношении и подходит для задач большой размерности, он может создавать собственный численный шум, особенно для потоков плазмы с небольшими возмущениями. Поэтому в последнее время предпочтение отдается эйлерову моделированию на основе решения кинетического уравнения непосредственно в фазовом пространстве. Хорошие обзоры сеточных эйлеровых методов можно найти в работах [4]– [6].

В настоящей работе основное внимание уделяется системе Власова—Ампера. Эту систему можно рассматривать как нулевой магнитный предел общей системы Власова—Максвелла. Кроме того, она эквивалентна наиболее популярной системе Власова—Пуассона, если решение гладкое и отсутствуют внешние силы. Однако в отличие от системы Власова—Пуассона здесь электрическое поле не находится из уравнения Пуассона, а смещается во времени за счет тока, генерируемого движущимися зарядами. Для решения системы Власова—Ампера известны численные алгоритмы, основанные на различных идеях: метод “частиц в ячейке” (см. [7]), метод конечных разностей типа Мак-Кормака (см. [8]), полулагранжев метод (см. [9]), схема конечного объема второго порядка (см. [10]), разрывный метод Галеркина (см. [11]) и пр. Следует отметить, что сейчас основным направлением в разработке подобных алгоритмов является контроль за сохранением энергии при снятии ограничений на

устойчивость, присущих явным расчетным схемам (см. [12], [13]). Это связано с тем, что при моделировании на длительных временных диапазонах паразитная энергия, создаваемая или уничтожаемая численными методами, может накапливаться и приводить к нефизическим результатам, таким как самонагрев или охлаждение плазмы (см. [14]). Проблема становится более заметной, если используется сетка с недостаточным разрешением или большие временные шаги.

Работа посвящена развитию эйлерова сеточного метода типа Мак-Кормака (см. [8]). Новизна заключается в сохранении эффективности явной схемы (т.е. без использования итераций) при наличии устойчивости, как у неявной схемы (см. [15]). При этом погрешность полной энергии соответствует второму порядку точности алгоритма, а полный заряд (число частиц) сохраняется на сеточном уровне. В качестве моделируемого физического процесса рассматривается динамика плазменных (ленгмюровских) колебаний и волн, возбуждаемых коротким мощным лазерным импульсом (см. [16]).

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 приведена простейшая кинетическая постановка задачи Коши на основе уравнений Власова—Ампера, описывающая нерелятивистские колебания и волны плазмы. В разд. 2 описана оригинальная неявная схема Мак-Кормака для модельного скалярного уравнения переноса, а также отмечены наиболее важные вычислительные свойства этой схемы. В разд. 3 построена неявная схема Мак-Кормака для системы нелинейных уравнений из первого раздела. Наконец, в разд. 4 описаны результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующих эффективность предложенного подхода. В заключении систематизированы результаты проведенных исследований.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем считать, что одномерное движение разреженной плазмы описывается в фазовой плоскости (x, v) следующим безразмерным уравнением Власова:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial x} - E(x, t) \frac{\partial F}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

где $F = F(x, v, t)$ — функция распределения электронов, $E = E(x, t)$ — напряженность электрического поля. При отсутствии внешних (заданных) полей функции E и F связаны соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x, t) = 1 - N(x, t), \quad (2)$$

где функция $N(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F dv$ имеет смысл плотности электронов. Как правило, вместо функции электрического поля в уравнениях (1), (2) используется его потенциал, удовлетворяющий в векторном случае соотношению $\text{grad } \varphi = \mathbf{E}$, тогда эту систему двух уравнений называют уравнениями Власова—Пуассона. Формальной причиной для этого является преобразование уравнения (2) относительно φ в известное уравнение Пуассона.

В уравнении (2) символ “1” означает, что ионы неподвижны, а их плотность (безразмерная) постоянна. Поэтому согласно одному из уравнений Максвелла, которое часто называют уравнением Ампера, дополнительно имеем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} v F dv. \quad (3)$$

Если для замыкания системы к уравнению (1) добавляют уравнение (3), то такую систему двух уравнений называют уравнениями Власова—Ампера.

Система уравнений (1)–(3) давно и хорошо известна (см., например, [17]). При моделировании плазмы в каждом конкретном случае применяют либо подсистему (1), (2), либо — (1), (3). Учитывая форму уравнения (1), для обозначения любой из подсистем используют термин “1D1V-система”.

Рассмотрим возбуждение ленгмюровских колебаний и волн с помощью короткого мощного лазерного импульса. Согласно кинетической модели распространения лазерных импульсов в плазме

(см. [18], [19]) вынужденное изменение электрического поля можно описать, используя градиент квадрата модуля медленно изменяющейся комплексной амплитуды высокочастотного лазерного поля (так называемой огибающей). При этом, если импульс имеет гауссово пространственное распределение, формулу возмущающего электрического поля удобно задать в виде

$$E_0(x) = \alpha x \exp \left\{ -2 \frac{x^2}{\rho_*^2} \right\}, \quad \alpha = \left(\frac{a_*}{\rho_*} \right)^2, \quad (4)$$

где параметры ρ_* и a_* характеризуют масштаб области локализации и максимальную величину $E_{\max} = \frac{a_*^2}{\rho_* 2\sqrt{e}} \approx 0.3 \frac{a_*^2}{\rho_*}$ электрического поля. Здесь $e = 2.71828\dots$ — основание натурального логарифма. Вид функции (4) выбран из соображений, что подобное возмущение электрического поля может возбуждаться в разреженной плазме:

$$\omega_l \gg \omega_p = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{m} \right)^{1/2},$$

(n_0 — значение невозмущенной плотности электронов, e, m — заряд и масса электрона) лазерным импульсом с частотой ω_l при его фокусировке в линию (этого можно добиться при использовании цилиндрической линзы, см. детали в [20]).

Формула (4) порождает однозначное возмущение равновесного значения электронной плотности на основании уравнения (2), т.е.

$$N_0(x) = 1 - \frac{\partial}{\partial x} E_0(x). \quad (5)$$

При этом параметры ρ_* и a_* в (4) должны обеспечивать положительность начальной электронной плотности, т.е. выполнение условия $\alpha < 1$. В свою очередь, соотношение (5) дает возможность задать начальное значение функции распределения, необходимое для решения уравнения Власова (1),

$$F(x, v, t = 0) = N_0(x) f_M(v, T_0), \quad (6)$$

где функция

$$f_M(v, T_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T_0}} \exp \left\{ -\frac{v^2}{2T_0} \right\} \quad (7)$$

определяет максвелловское распределение скоростей при фиксированной температуре T_0 .

Для рассматриваемой постановки (1)–(7) справедлива теорема существования и единственности (см. [21]): “Если непрерывная начальная функция $F(x, v, t = 0) > 0$ такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(x, v, t = 0) dv - 1 \right] dx = 0,$$

$$F(x, v, t = 0) < G(v), \quad \int_{-\infty}^{\infty} v^2 G(v) dv < \infty,$$

где $G(v)$ — монотонно убывающая функция $|v|$, то решение задачи Коши для системы (1)–(2) существует и единственно в классе непрерывных функций $E(x, t)$, имеющих ограниченную производную $\partial E / \partial x$ на всей оси x и обращающихся в нуль при $x \rightarrow \pm\infty$ ”.

Заметим, что в теореме используется по существу ограничение на параметр α ($\alpha < 1$), так как требуется обеспечить положительность начальной плотности электронов.

Ниже нас будет интересовать в полупространстве $t > 0$ решение задачи Коши для уравнений (1), (3) с начальными условиями (4), (6). Обратим внимание, что в постановке принципиально отсутствует периодичность решения по пространству, т.е. рассматривается решение с конечной энергией.

2. НЕЯВНАЯ СХЕМА МАК-КОРМАКА ДЛЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Следуя оригинальной идее [15], напомним основные формулы неявной схемы Мак-Кормака для простейшего уравнения переноса с постоянным коэффициентом a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

снабженного начальным условием $u(x, 0) = u_0(x)$ таким, что $u_0(x) = 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Определим дискретизацию независимых переменных с помощью постоянных параметров τ и h так, что

$$t^n = n\tau, \quad n \geq 0, \quad x_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

и будем обозначать зависимую переменную $u(x, t)$ в узле сетки (x_i, t^n) как u_i^n .

Запишем неявную схему Мак-Кормака в традиционной форме “предиктор–корректор”, считая известными величины u_i^n :

1) предиктор с результатом u_i^p —

$$\begin{aligned} \Delta u_i^n &= -\frac{a\tau}{h} (u_{i+1}^n - u_i^n), \\ \left(1 + \frac{\lambda\tau}{h}\right) \delta u_i^p &= \Delta u_i^n + \frac{\lambda\tau}{h} \delta u_{i+1}^p, \quad u_i^p = u_i^n + \delta u_i^p, \end{aligned} \quad (8)$$

где вычисления проводятся в сторону уменьшения индекса $i = \dots, k+1, k, k-1, \dots$;

2) корректор с результатом u_i^c —

$$\begin{aligned} \Delta u_i^p &= -\frac{a\tau}{h} (u_i^p - u_{i-1}^p), \\ \left(1 + \frac{\lambda\tau}{h}\right) \delta u_i^c &= \Delta u_i^p + \frac{\lambda\tau}{h} \delta u_{i-1}^c, \quad u_i^c = u_i^p + \delta u_i^c, \end{aligned} \quad (9)$$

где вычисления проводятся в сторону увеличения индекса $i = \dots, k-1, k, k+1, \dots$.

В формулах (8), (9) верхний индекс p (или c) обозначает шаг предиктор (или корректор) или n — временной слой t^n , λ — постоянный параметр схемы, который будет определен ниже.

Окончательная формула, формирующая решение на следующем временном слое с номером $(n+1)$, имеет вид

$$u_i^{n+1} = (u_i^p + u_i^c) / 2.$$

Отметим, что если положить $\lambda = 0$, то неявная схема трансформируется в обычную явную схему Мак-Кормака (см. [22]) с условием устойчивости $\omega = |a|\tau/h \leq 1$ (условие Куранта) и первым дифференциальным приближением (см. [23]) вида

$$u_t + au_x = \frac{ah^2}{6} (\omega^2 - 1) u_{xxx} + O(\tau^3 + h^3).$$

Если же выбирать λ из условия

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \max \left\{ |a| - \frac{h}{\tau}, 0 \right\},$$

то неявная схема (при $\lambda > 0$) будет безусловно устойчивой, а в правую часть первого дифференциального приближения добавится слагаемое (см. [24])

$$-\tau^2 a \lambda \left(\lambda + \frac{h}{\tau} \right) u_{xxx}.$$

Иными словами, на гладких решениях погрешность аппроксимации неявной схемы асимптотически не хуже, чем погрешность явной схемы. При этом замена явной схемы на неявную требует незначительного увеличения вычислительной работы, а сама неявная процедура носит безытерационный характер. Вышесказанное серьезно увеличивает привлекательность неявной схемы Мак-Кормака.

3. НЕЯВНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА–АМПЕРА

При численном решении задачи Коши для уравнений (1), (3) с начальными условиями (4), (6) искомые функции рассматриваются в ограниченной области

$$\Omega = \{|x| \leq x_{\max}, |v| \leq v_{\max}, 0 \leq t \leq t_{\max}\}.$$

Дискретизация независимых переменных проводится с помощью постоянных параметров τ , h_x , h_v так, что

$$t^n = n\tau, \quad n \geq 0, \quad x_i = ih_x - x_{\max}, \quad 0 \leq i \leq M_x, \\ v_j = \left(j - \frac{1}{2}\right)h_v - v_{\max}, \quad 1 \leq j \leq M_v,$$

где $h_x = 2x_{\max}/M_x$, $h_v = 2v_{\max}/M_v$, M_v — четное. Искомую переменную $F(x, v, t)$ в узле сетки (x_i, v_j, t^n) будем обозначать как $F_{i,j}^n$, аналогично $E(x, t)$ в узле сетки $(x_i, t^n) — E_i^n$.

Введем полезные обозначения для операторов пространственных разностей “вперед” D^+ и “назад” D^- :

$$D_x^+ G_{i,j} = G_{i+1,j} - G_{i,j}, \quad D_x^- G_{i,j} = G_{i,j} - G_{i-1,j}, \\ D_v^+ G_{i,j} = G_{i,j+1} - G_{i,j}, \quad D_v^- G_{i,j} = G_{i,j} - G_{i,j-1},$$

и запишем неявную схему Мак-Кормака (см. [15]) для уравнения (1) в традиционной форме предиктор—корректор, считая известными величины $F_{i,j}^n$, $E_i^{n+1/2}$:

1) шаг предиктор с результатом $F_{i,j}^p$ —

$$\Delta F_{i,j}^n = -\tau \left(\frac{v_j}{h_x} D_x^+ F_{i,j}^n - \frac{E_i^{n+1/2}}{h_v} D_v^+ F_{i,j}^n \right), \\ \left(I - \lambda \frac{\tau}{h_x} |v_j| D_x^+ \right) \left(I - \lambda \frac{\tau}{h_v} |E_i^{n+1/2}| D_v^+ \right) \delta F_{i,j}^p = \Delta F_{i,j}^n, \\ F_{i,j}^p = F_{i,j}^n + \delta F_{i,j}^p, \tag{10}$$

2) шаг корректор с результатом $F_{i,j}^c$ —

$$\Delta F_{i,j}^p = -\tau \left(\frac{v_j}{h_x} D_x^- F_{i,j}^p - \frac{E_i^{n+1/2}}{h_v} D_v^- F_{i,j}^p \right), \\ \left(I + \lambda \frac{\tau}{h_x} |v_j| D_x^- \right) \left(I + \lambda \frac{\tau}{h_v} |E_i^{n+1/2}| D_v^- \right) \delta F_{i,j}^c = \Delta F_{i,j}^p, \\ F_{i,j}^c = F_{i,j}^p + \delta F_{i,j}^c. \tag{11}$$

В формулах (10), (11) верхний индекс p (или c) обозначает шаг предиктор (или корректор) или n — временной слой t^n , λ — постоянный параметр схемы, который будет определен ниже.

Окончательные формулы, формирующие решение на следующем временном слое с номером $(n+1)$, имеют вид

$$F_{i,j}^{n+1} = [F_{i,j}^p + F_{i,j}^c] / 2. \tag{12}$$

Обратим внимание, что величины x_{\max} и v_{\max} следует выбирать достаточно большими, чтобы в процессе численного решения задачи Коши начальные возмущения не успели распространиться до границы расчетной области. Это дает возможность использовать краевые условия первого рода для функции $F(x, v, t)$ и, в свою очередь, для дискретных вариаций этой функции, т.е. величин $\delta F_{i,j}^p$ и $\delta F_{i,j}^c$, — однородные краевые условия.

Для численного решения уравнения Ампера воспользуемся схемой второго порядка точности по времени аналогично [8]:

$$\frac{E_i^{n+1} - E_i^{n-1}}{2\tau} = \sum_{j=1}^{M_v} v_j F_{i,j}^n h_v \left(\approx \int_{-\infty}^{\infty} v F dv \right), \\ E_i^{n+1/2} = [E_i^n + E_i^{n+1}] / 2. \tag{13}$$

Заметим, что начальное условие (6) дает $E_t(x, t = 0) = 0$, что приводит к справедливости $E(x, t = \tau) = E_0(x) + O(\tau^2)$. Поэтому для инициализации вычислений без потери точности можно положить $E_i^1 = E_i^0$, $0 \leq i \leq M_x$.

Для вычисления приближенного значения электронной плотности $N(x, t)$ используется простейшая составная формула прямоугольников (см. [25]):

$$N_i^n = \sum_{j=1}^{M_v} F_{i,j}^n h_v.$$

При этом, следуя [8], суммирование по индексу j (аналог интегрирования по переменной v) всюду в схеме проводится “в парах”.

Сделаем несколько замечаний о предложенной схеме. В формулах (10), (11) используются известные или предварительно вычисленные коэффициенты переноса v_j и $E_i^{n+1/2}$, что на каждом из этапов (предиктор или корректор) приводит к необходимости решать фактически линейное уравнение Власова. По этой причине в предыдущем разделе приведены аргументы в пользу безусловной устойчивости неявной схемы Мак-Кормака для модельного линейного уравнения с постоянным коэффициентом переноса. При этом, с точки зрения применения теоретических конструкций типа “замороженных коэффициентов” (см. [26]), разница между переменными и постоянными коэффициентами не играет принципиального значения.

Отметим, что при использовании в работе [8] явной схемы Мак-Кормака традиционное ограничение на устойчивость (типа двумерного условия Куранта) возникало именно на этапе решения такого же линейного уравнения Власова, что соответствует частному случаю $\lambda = 0$ в (10), (11). Иными словами, ослабление жесткого ограничения происходит за счет обобщения исходного алгоритма (с явной схемы до неявной) только в части решения уравнения Власова. Уравнение Ампера решается таким же способом, как в [8].

Для предлагаемого алгоритма совместного решения уравнений Власова—Ампера в настоящее время отсутствует теоретическое обоснование безусловной устойчивости, поэтому пока можно говорить только о более слабом ограничении на устойчивость для решаемой нелинейной задачи. Следует отметить, что при численном решении уравнений, описывающих динамику вязкого сжимаемого газа, в исходной работе [15] также имелась в виду не безусловная устойчивость неявной схемы для нелинейной задачи, а только ослабление ограничений по сравнению с явной схемой.

Важный аспект построенной схемы — отсутствие вспомогательных итераций при решении нелинейной задачи. В первую очередь, это связано со вторым порядком точности метода, который часто соответствует схемам типа предиктор—корректор. Хорошо известен подобный пример для численного решения ОДУ, когда решение обладает достаточной гладкостью: вместо дополнительных итераций можно использовать формулы явного пересчета (см. [26], с. 368).

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для однозначного задания начальных условий и сохранения преемственности с предыдущими расчетами (см., например, [27], [28]) зафиксируем параметры в (6): $\rho_* = 0.5$, $\alpha = 0.3$, $T_0 = 1.6 \times 10^{-3}$ и заметим, что на больших расстояниях от прямой $x = 0$ функция распределения электронов не возмущается:

$$F(x \rightarrow \pm\infty, v, t) = f_M(v, T_0).$$

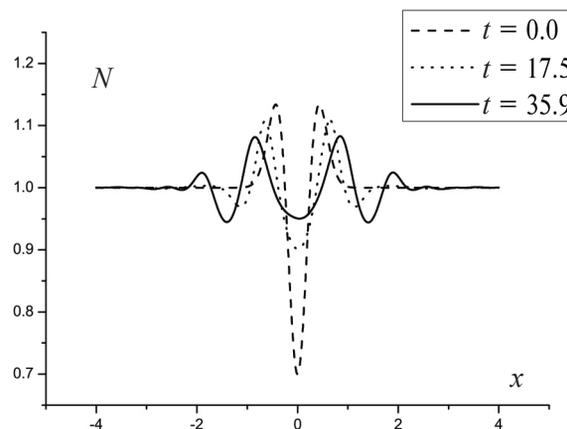
Однако в целях численного моделирования расчетную область необходимо ограничить. При гидродинамическом моделировании ленгмюровских колебаний холодной плазмы, независимо от времени наблюдения за ними, вполне достаточно положить $x_{\max} = 4.5\rho_*$ (см. [27]); здесь же (в кинетике) влияние температуры будет трансформировать колебания в волны (см. [28], [29]), пространственная динамика которых существенно зависит от времени наблюдения за ними. Иными словами, величина x_{\max} должна быть согласована со значением t_{\max} , которое, в свою очередь, зависит от скорости распространения волны и неявно определяется температурой T_0 плазмы. В данном случае плазма предполагается “теплой”, т.е. приводящей к небольшой скорости распространения волны (в линейном

случае $\approx \sqrt{3T_0}$, однако время наблюдения может быть значительным. Отметим, что исходные уравнения обезразмерены так, что плазменная частота ω_p равна единице, поэтому характерное значение t_{\max} составляет 5–6 периодов, т.е. порядка 40 безразмерных единиц времени. В силу вышесказанного, величина x_{\max} бралась равной 10, т.е. $x_{\max} = 20\rho_*$. В свою очередь, ограничение расчетной области по переменной v задавалось как $v_{\max} = 0.34$, что при выбранном значении T_0 позволяет использовать однородные условия

$$F(x, v \rightarrow \pm\infty, t) \approx 0.$$

Обратим внимание на вибрирующий процесс распространения волн при выбранных значениях параметров. Начальное пространственное распределение электронной плотности $N_0(x)$ порождает избыток положительного заряда в окрестности начала координат (т.е. при $x = 0$). По этой причине электроны начинают движение в направлении центра области, что примерно через полпериода порождает распределение плотности с глобальным максимумом также при $x = 0$. В свою очередь, сформировавшийся избыток электронов в центре области приводит к их движению в обратном направлении. Если бы плазма была холодной ($T_0 = 0$), то после очередной половины периода пространственное распределение электронной плотности возвратилось бы к начальному (как при $t = 0$), и в результате наблюдалось бы 2π -периодическое по времени решение в соответствии с аналитическими результатами [30] (подробные доказательства приведены в [31]).

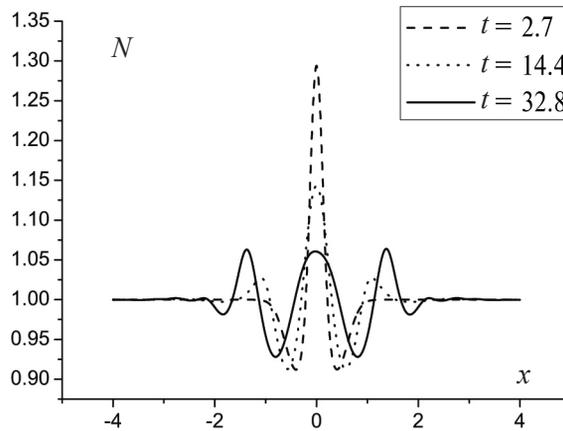
Однако кинетическая модель учитывает влияние температуры плазмы (даже весьма небольшой!), поэтому при движении частиц от прямой $x = 0$ наблюдается типичный волновой эффект, т.е. перемещение энергии. При этом, как и ранее, формируется избыток положительного заряда в центре области, приводящий к соответствующему движению электронов (подходящий образ — “прилив”). Вслед за “приливом” опять следует полпериода “отлива” волны, т.е. переноса энергии и т.д. Хорошей иллюстрацией к описанной динамике волны являются фиг. 1 и 2. На них в специально выбранные моменты времени наблюдаются пространственные распределения плотности электронов N , обеспечивающие вибрирующее поведение волны. Например, на фиг. 1 приведены распределения плотности, аналогичные начальному, т.е. с минимумами при $x = 0$. Интервалы между выбранными моментами времени составляют порядка трех периодов, что делает наглядным перенос энергии в моменты “отливов”. В свою очередь, на фиг. 2 приведены распределения плотности с максимумами при $x = 0$. Интервалы между выбранными моментами времени также составляют порядка трех периодов, что делает наглядным изменение формы волны в моменты “приливов”.



Фиг. 1. Пространственные распределения функции плотности N в моменты времени $t = 0, 17.5, 35.9$ при $\alpha = 0.3$.

Отметим также, что несмотря на гладкость представленных пространственных распределений, значения сеточных параметров невелики:

$$h_x = 2.5 \times 10^{-3}, \quad h_v = 8.5 \times 10^{-4}, \quad \tau = 5 \times 10^{-2},$$



Фиг. 2. Пространственные распределения функции плотности N в моменты времени $t = 2.7, 14.4, 32.8$ при $\alpha = 0.3$.

что было обусловлено необходимостью качественной аппроксимации экспоненциально убывающих начальных функций $E_0(x)$ и $F(x, v, t = 0)$. Если использовать явную схему (при $\lambda = 0$), то необходимое условие устойчивости (см. [8]) для взятых параметров

$$\tau \leq \frac{1}{v_{\max}/h_x + E_{\max}/h_v}$$

приводит к ограничению $\tau \leq 5 \times 10^{-3}$. При этом попытка увеличить в 2 раза шаг по времени в явной схеме сразу приводит к разрушению решения из-за неустойчивости по отношению к ошибкам округлений. Приведенные же иллюстрации получены с помощью неявной схемы (при $\lambda = 1$), когда значение шага по времени τ в 10 раз превышало ограничение для явной схемы, поэтому важно учитывать законы сохранения.

На фиг. 3 приведена динамика относительной погрешности полной энергии, вычисляемой по формуле

$$\text{Total}_{\text{en}}(t) = \frac{1}{2} \left(\int_{-v_{\max}}^{v_{\max}} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} v^2 F dv dx + \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} E^2 dx \right).$$

Приближенное интегрирование по v проводилось, как описано выше, а приближенное интегрирование по x было реализовано с помощью составной формулы трапеций (см. [25]). При уменьшении всех сеточных параметров в 2 раза относительная погрешность полной энергии в полном соответствии с теоретическими свойствами схемы Мак-Кормака уменьшалась в 4 раза. В свою очередь, полный заряд плазмы (количество частиц)

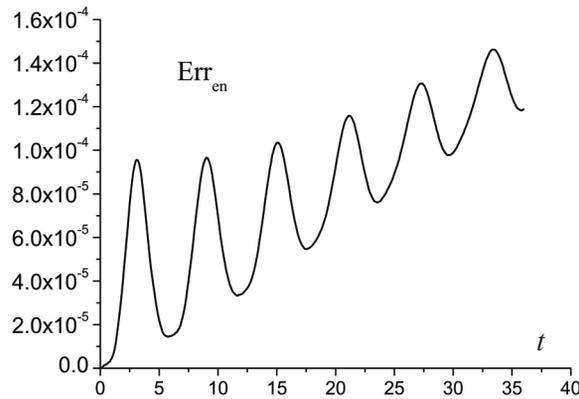
$$\text{Total}_{\text{part}}(t) = \int_{-v_{\max}}^{v_{\max}} \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} F dv dx$$

сохраняется на сеточном уровне (точно!), поэтому соответствующие графики не приводятся.

Следует отметить, что при расчетах уравнения Власова традиционной иллюстрацией является динамика максимального по области значения электрического поля, т.е. его зависимость от времени:

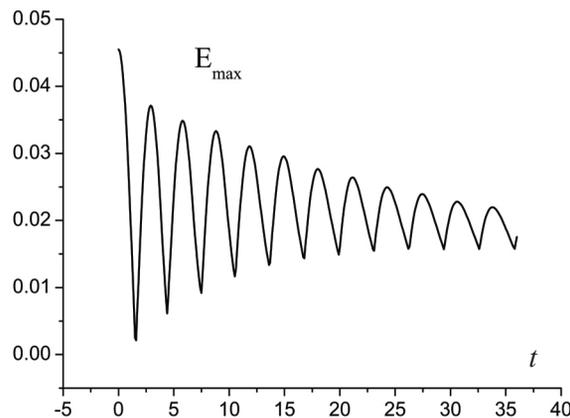
$$E_{\max}(t) = \max_{|x| \leq x_{\max}} E(x, t).$$

На фиг. 4 представлены типичные осцилляции этой величины. Так как температура плазмы достаточно мала, то период колебаний близок к 2π , поэтому, как в холодной плазме (см. [30]), у графика



Фиг. 3. Динамика относительной погрешности полной энергии при $\alpha = 0.3$.

наблюдается примерно два максимума на период. С другой стороны, даже малая температура (в расчетах — $T_0 = 1.6 \times 10^{-3}$) приводит к монотонному убыванию амплитуды электрического поля, что и наблюдается на протяжении примерно шести периодов. Затухание амплитуды связано с распространением волны при сохранении полной энергии и хорошо согласуется с графиками на фиг. 1–3.

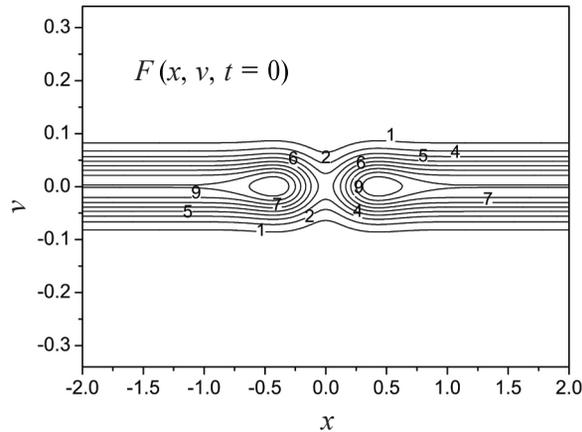


Фиг. 4. Динамика максимального значения электрического поля при $\alpha = 0.3$.

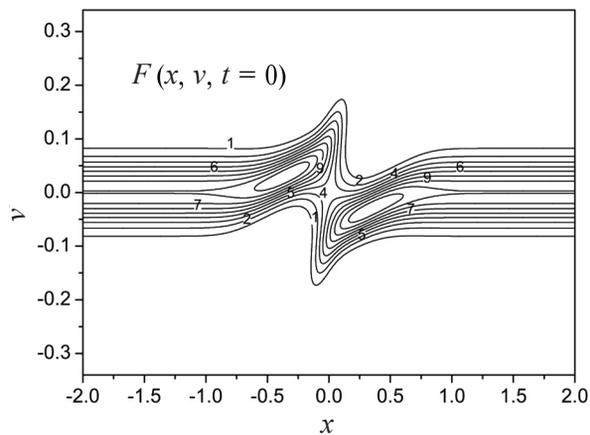
Приведем дополнительно результаты вычислительного эксперимента при $\alpha = 0.55$, т.е. пример волны, возбуждаемой более мощным лазерным импульсом. Остальные параметры брались без изменений. Цель расчетов — иллюстрация быстрой потери гладкости функции распределения F , следовательно, необходимость измельчения сеточных параметров, что является весомым аргументом в пользу применения неявной схемы.

Рассмотрим сначала фиг. 5, где изображены линии уровня функции распределения в начальный момент времени. Возмущение электронной плотности $N_0(x)$ заметно только в небольшой окрестности начала координат (при $|x| \leq 1$), вне которой наглядно максвелловское распределение по скоростям. Напомним, что фиг. 5 соответствует состоянию “отлива” для рассматриваемой волны. Далее на фиг. 6 приведены линии уровня функции распределения в момент времени $t = 2.5$, соответствующий первому “приливу”, т.е. когда при $x = 0$ наблюдается максимум электронной плотности. Наблюдаемые искривления и сгущения линий уровня иллюстрируют большие градиенты решения в окрестности прямой $x = 0$, что, в свою очередь, порождает сильное увеличение плотности электронов — избыток отрицательного заряда. Наконец, на фиг. 7 приведены линии уровня функции распределения

в момент времени $t = 5.5$, соответствующий следующему “приливу”, т.е. когда при $x = 0$ опять наблюдается максимум электронной плотности. Легко видеть, что функция распределения имеет гладкость значительно худшую, чем на фиг. 5 и фиг. 6. При этом наблюдаемая картина — свойство решения, а не недостаток сеточного разрешения, так как иллюстрация полностью идентична полученной при двукратном измельчении всех параметров сетки. Это означает, что дальнейшее продолжение моделирования волны при взятых параметрах практически невозможно: требуется значительное сгущение сетки в подобласти $|x| \leq 1$. Иными словами, вычислительные возможности предложенной неявной схемы здесь уже исчерпаны, т.е. для дальнейшего моделирования требуется применение суперкомпьютеров, параллельных алгоритмов и т.п.

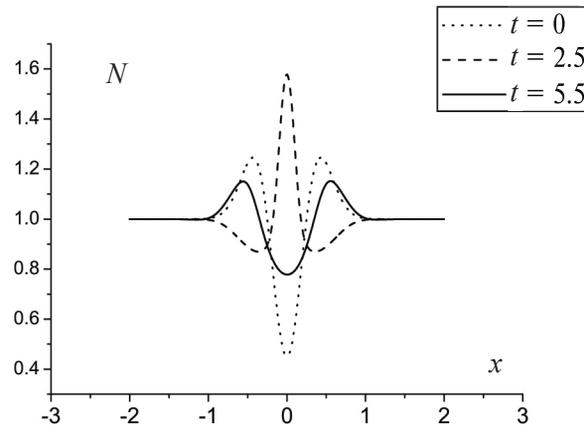


Фиг. 5. Линии уровня функции распределения электронов F в момент времени $t = 0$ при $\alpha = 0.55$.



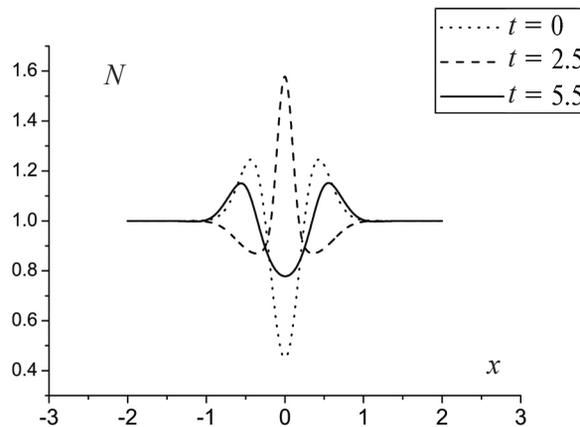
Фиг. 6. Линии уровня функции распределения электронов F в момент времени $t = 2.5$ при $\alpha = 0.55$.

Однако представляется уместным замечание о том, что вариант с $\alpha = 0.55$, как и ранее рассмотренный с $\alpha = 0.3$, полностью удовлетворяет приведенной в разд. 1 теореме существования. Иными словами, вычислительные проблемы — это следствие больших градиентов решения непрерывной задачи. Отметим также, что когда вместо кинетической модели рассматривается гидродинамическая модель холодной плазмы, значение $\alpha = 0.55$ недоступно в принципе: в гидродинамике при $\alpha = 0.55$ плотность электронов становится сингулярной уже при $t_{\text{бр}} < \pi$ (см. [30], [31]). В свою очередь, пространственные распределения электронной плотности в указанные выше моменты времени $t = 0, 2.5, 5.5$, которые приведены на фиг. 8, не вызывают никаких замечаний о гладкости. Это означает, что наблю-



Фиг. 7. Линии уровня функции распределения электронов F в момент времени $t = 5.5$ при $\alpha = 0.55$.

дение только за моментами функции распределения F не всегда позволяет контролировать вычислительный процесс полностью.



Фиг. 8. Пространственные распределения функции плотности N в моменты времени $t = 0, 2.5, 5.5$ при $\alpha = 0.55$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для кинетической модели плазмы, базирующейся на уравнениях Власова—Ампера, построена неявная схема типа Мак-Кормака. По сравнению с явной схемой она имеет более слабое ограничение на устойчивость, но сохраняет прежнюю вычислительную эффективность, т.е. не использует внутренние итерации. При этом погрешность полной энергии соответствует второму порядку точности алгоритма, а полный заряд (число частиц) сохраняется на сеточном уровне.

В качестве моделируемого физического процесса рассматривается динамика плазменных (ленгмюровских) колебаний и волн, возбуждаемых коротким мощным лазерным импульсом. Показано, что перенос энергии носит вибрирующий характер типа “приливов” и “отливов”. Также приведен пример, не имеющий аналога в гидродинамике холодной плазмы и иллюстрирующий потерю гладкости функции распределения при сохранении гладкости функции плотности электронов, т.е. момента нулевого порядка.

Как правило, уравнение Власова используется для моделирования свойств уже сформировавшейся волны, имеющих пространственно-периодический характер. Поэтому определенный интерес представляет процесс именно формирования бегущих волн, распространяющихся из области первоначально возмущенной плотности по причине теплового (хаотического) движения электронов.

Результаты работы могут быть обобщены на постановки кинетических задач большей размерности и учет дополнительных физических факторов в модели плазмы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chen F. F.* Introduction to plasma physics and controlled fusion. 3rd ed. New York: Springer, 2016. P. 355–411.
2. *Власов А. А.* О вибрационных свойствах электронного газа // Успехи физ. наук. 1967. Т. 93. № 3. 444 с.
3. *Григорьев Ю. Н., Вишивков В. А., Федорук М. П.* Численное моделирование методами частиц-в-ячейках. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2004. С. 190–255.
4. *Arber T., Vann R.* A critical comparison of Eulerian-grid-based Vlasov solvers // J. Comput. Phys. 2002. V. 180. P. 339.
5. *Filbet F., Sonnendrucker E.* Comparison of Eulerian Vlasov solvers // Comput. Phys. Commun. 2003. V. 150. P. 247.
6. *Dimarco G., Pareschi L.* Numerical methods for kinetic equations // Acta Numerica. 2014. V. 23. P. 369.
7. *G.Chen G., Chacon L., Barnes D.* An energy- and charge-conserving, implicit, electrostatic particle-in-cell algorithm // J. Comput. Phys. 2011. V. 230. № 18. P. 7018.
8. *Horne R. B., Freeman M. P.* A new code for electrostatic simulation by numerical integration of the Vlasov and Ampere equations using MacCormack's method // J. Comput. Phys. 2001. V. 171. P. 182.
9. *Crouseilles N., Respaud T.* A charge preserving scheme for the numerical resolution of the Vlasov–Ampere equations // Commun. Comput. Phys. 2011. V. 10. P. 1001.
10. *Elkina N., Buchner J.* A new conservative unsplit method for the solution of the Vlasov equation // J. Comput. Phys. 2006. V. 213. N 2. P. 862.
11. *Cheng Y., Christlieb A. J., Zhong X.* Energy-conserving discontinuous Galerkin methods for the Vlasov–Ampere system // J. Comput. Phys. 2014. V. 256. P. 630.
12. *Anderson S. E., Taitano W. T., Chacon L., Simakov A. N.* An efficient, conservative, time-implicit solver for the fully kinetic arbitrary-species 1D-2V Vlasov-Ampere system // J. Comput. Phys. 2020. V. 419. P. 109686.
13. *Liu H., Cai X., Cao Y., Lapenta G.* An efficient energy conserving semi-Lagrangian kinetic scheme for the Vlasov-Ampere system // J. Comput. Phys. 2023. V. 492. N 1. P. 112412.
14. *Cohen B., Langdon A., Hewett D., Procassini R.* Performance and optimization of direct implicit particle simulation // J. Comput. Phys. 1989. V. 81. N 1. P. 151.
15. *MacCormack R. W.* A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow // AIAA J. 1982. V. 20. N 9. P. 1275.
16. *Горбунов Л. М.* Зачем нужны сверхмощные лазерные импульсы? // Природа. 2007. Т. 21. № 4. С. 11.
17. *Гельфанд И. М., Зуева Н. М., Имшенник В. С., Локуцевский О. В., Рябенский В. С., Хазин Л. Г.* К теории нелинейных колебаний электронной плазмы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1967. Т. 7. № 2. С. 322.
18. *Mora P. A., Antonsen T. M.* Kinetic modeling of intense, short pulses propagating in tenuous plasmas // Phys. Plasmas. 1997. V. 4. N 4. P. 217.

19. Андреев Н. Е., Горбунов Л. М., Рамазашвили Р. Р. К теории трехмерной кильватерной волны, возбуждаемой мощным лазерным импульсом в разреженной плазме // *Физика плазмы*. 1997. Т. 23. № 4. С. 303.
20. Sheppard C. J. R. Cylindrical lenses — focusing and imaging: a review [Invited] // *Appl. Optic*. 2013. V. 52. № 4. P. 538.
21. Иорданский С. В. О задаче Коши для кинетического уравнения плазмы // *Тр. МИАН*. 1961. Т. 60. С. 81.
22. MacCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // *J. Spacecr. Rocket*. 2003. V. 40. № 5. P. 757.
23. Шокин Ю. И., Яненко Н. Н. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1985. С. 17–30.
24. Furst J., Furmanek P. An implicit MacCormack scheme for unsteady flow calculations // *Comput. Fluid*. 2011. V. 46. P. 231.
25. Бахвалов Н. С., Корнев А. А., Чижонков Е. В. Численные методы. Решения задач и упражнения. Серия Классический университетский учебник. Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., испр. и дополн. М.: Лаборатория знаний, 2016. С. 94–101.
26. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. Серия Классический университетский учебник. Учеб. пособие для вузов. 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. С. 524–527.
27. Чижонков Е. В. Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. М.: Физматлит, 2018. С. 12–240.
28. Chizhonkov E. V., Frolov A. A. Effect of electron temperature on formation of travelling waves in plasma: Kinetic and hydrodynamic models // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model*. 2023. V. 38. № 2. P. 63.
29. Фролов А. А., Чижонков Е. В. Численное моделирование плазменных колебаний с учетом теплового движения электронов // *Вычисл. методы и программ.* 2018. Т. 19. С. 194.
30. Розанова О. С., Чижонков Е. В. О существовании глобального решения одной гиперболической задачи // *Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления*. 2020. Т. 492. № 1. С. 97.
31. Rozanova O. S., Chizhonkov E. V. On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma // *Z. Angew. Math. Phys*. 2021. V. 72. № 13. P. 1.

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE VLASOV-AMPERE EQUATIONS

E. V. Chijonkov^{a,*}

^a 119899 Moscow, Lenin Hills, Lomonosov Moscow State University, Russia

*e-mail: chizhonk@mech.math.msu.su

Received 2 November, 2023

Revised 10 March, 2024

Accepted 3 April, 2024

Abstract. An implicit McCormack-type scheme is constructed for the kinetic plasma model based on the Vlasov-Ampere equations. Compared to the explicit scheme, it has a weaker stability constraint, but retains the same computational efficiency, i.e. it does not use internal iterations. In this case, the error of the total energy corresponds to the second order of accuracy of the algorithm, and the total charge (number of particles) is stored at the grid level. The formation of plasma waves excited by a short powerful laser pulse is considered as a simulated physical process.

Keywords: kinetic plasma model, Vlasov-Ampere equations, plasma oscillations and waves, numerical modeling, implicit McCormack scheme.