

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СЕТОЧНОГО ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ТЕОРИИ ДИСКРЕТНОГО ПОТЕНЦИАЛА¹⁾

© 2024 г. И. Э. Степанова^{1,*}, И. И. Колотов², А. Г. Ягола², А. Н. Левашов²

¹ 123242 Москва, ул. Б. Грузинская, 10, стр. 1, Институт физики Земли им. О. Ю. Шмидта, Россия

² 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия

*e-mail: tet@ifz.ru

Поступила в редакцию 13.03.2024 г.

Переработанный вариант 13.03.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

В работе рассматривается проблема однозначного определения фундаментального решения сеточного аналога уравнения Лапласа в рамках теории дискретного гравитационного потенциала. Сеточное фундаментальное решение конечно-разностного аналога уравнения Лапласа играет ключевую роль при восстановлении непрерывно распределенного источника гравитационного или магнитного поля по разнородным и разноточным данным, полученным в точках некоторого сеточного множества. Библ. 15.

Ключевые слова: однозначное определение, фундаментальное решение, дискретный гравитационный потенциал.

DOI: 10.31857/S0044466924070108, EDN: xifmwy

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время весьма остро стоит проблема интерпретации разнородной и разноточной геофизической и геодезической информации, получаемой благодаря спутниковому зондированию. Можно констатировать, что существующие методы обработки больших и сверхбольших массивов постоянно меняющихся данных нуждаются в кардинальном совершенствовании. Как отмечалось в работах [1–4], аппроксимационный подход к решению обратных линейных и нелинейных задач геофизики, геодезии и геоморфологии позволяет редуцировать практически все постановки по определению параметров геологической среды к системам линейных (в некоторых случаях и нелинейных) алгебраических уравнений.

При цифровой обработке сигналов критически важным становится учет дискретности получаемых данных. Даже спутниковые системы высокого разрешения не могут предоставить исследователям всю информацию о непрерывно меняющихся физических полях и изучаемых природных объектах, равно как и об объектах антропогенного происхождения. Поэтому основные принципы теории дискретного гравитационного и магнитного потенциалов, предложенные В. Н. Страховым в начале 1990-х годов и развитые далее в работах [1, 2], могут, на наш взгляд, применяться при решении сложных и масштабных задач по распознаванию изображений, восстановлению источников гравитационного и магнитного полей и т.п. Если одновременно с теорией дискретного потенциала будет использоваться метод линейных интегральных представлений [3–6], то такой подход позволит достичь более высокой степени соответствия математической модели геофизическим реалиям.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНОГО ПОТЕНЦИАЛА

В рамках теории дискретного гравитационного потенциала [1] вместо вектора с координатами в декартовом пространстве R^n : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $-\infty < x_k < +\infty$, $k = 1, \dots, n$, рассматривается его сеточный аналог. Общее число сеток равно 2^n . Из этих сеток одна считается основной,

¹⁾ Работа выполнена в рамках госзадания ИФЗ РАН.

и в узлах этой сетки определены значения сеточного гравитационного потенциала $V_S(x^{(S)})$, где $x^{(S)}$ имеет следующий вид:

$$x^{(S)} = (x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, \dots, x_n^{(S)})^T, \quad x_k^{(S)} = ph_k; \quad -\infty < p < +\infty, \quad p = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$h_k = \text{const}, \quad h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T.$$

“Неосновные” сетки служат для вычисления значений высших производных потенциала. Если e_k — единичный орт вдоль k -й оси, то первая производная гравитационного потенциала запишется в виде

$$\frac{\partial V_S(x^{(S)})}{\partial x_k^{(S)}} = \frac{V_S(x^{(S)} + h_k e_k) - V_S(x^{(S)})}{h_k}. \quad (1)$$

Значения производной по k -й оси относятся к узлам $x^{(S,k)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, вспомогательной сетки:

$$x^{(S,k)} = x^{(S)} + \frac{h_k}{2} e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Вторые производные сеточного потенциала находятся из выражения

$$\frac{\partial^2 V_S(x^{(S)})}{\partial x_p^{(S)} \partial x_q^{(S)}} = \frac{1}{h_q} \left[\frac{\partial V_S(x^{(S)} + h_p e_p)}{\partial x_p^{(S)}} - \frac{\partial V_S(x^{(S)})}{\partial x_p^{(S)}} \right]. \quad (2)$$

Значения $\frac{\partial^2 V_S(x^{(S)})}{\partial x_p^{(S)} \partial x_q^{(S)}}$ при $p \neq q$ относятся к узлам третьей вспомогательной сетки: $x^{(S,3)} = x^{(S)} + \frac{h_p e_p}{2} + \frac{h_q e_q}{2}$; если же $p = q$, то разностные аналоги вторых производных вычисляются в узлах основной сети.

Аналоги операторов Лапласа и Пуассона в сеточном пространстве могут быть записаны в виде

$$\Delta \{V_S(x^{(S)})\} = 0;$$

$$\Delta \{V_S(x^{(S)})\} = -\frac{GC_n m_S(x^{(S)})}{H^{n-2}}, \quad H = \left(\prod_{k=1}^n h_k \right)^{\frac{1}{n}}, \quad m_S(x^{(S)}) = H^n \rho(x^{(S)}). \quad (3)$$

В (3) Δ — выбранный конечно-разностный аналог оператора Лапласа, а $m_S(x^{(S)}) = H^n \rho(x^{(S)})$ — значения сеточных масс, порождающих сеточное гравитационное поле.

В теории дискретного потенциала важнейшей методологической установкой считается формулировка вариационной задачи, в которой наряду с условиями (3) рассматривается дополнительное требование:

$$\left| \Delta_2 \{V_S(x^{(S)})\} \right|_{E(D_S)}^2 + \alpha \Phi(V_S(x^{(S)}), g_S(x^{(S)})) = \min_{V_S(x^{(S)}), x^{(S)} \in \text{Int } D_S}, \quad (4)$$

где $\alpha \geq 0$ — некоторый параметр (можно сказать, параметр регуляризации [7]); D_S — заданная сеточная область; $x^{(S)} \in D_S$; $E(D_S)$ — евклидова норма в сеточной области D_S ; $\Phi(t, z)$ — неотрицательный функционал на векторах одинаковой размерности t и z , Δ_2 — это аппроксимация оператора Лапласа на другом шаблоне, отличная от $\Delta = \Delta_1$. Вариационную задачу (3), (4) можно решать одним из методов, описанных, например, в [8]. Но в наших предыдущих работах (см. [3–6]) мы показали, что при решении больших плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) целесообразно применять специальные методы, которые позволяют эффективно устранять влияние помехи в правой части и матрице.

Система уравнений [3] не является, очевидно, замкнутой: она не позволяет определять сеточные потенциалы однозначно во всем пространстве (даже в некоторой ограниченной трехмерной сеточной области ее решение будет неединственным). Вопросы однозначной разрешимости СЛАУ имеют важное значение для адекватной реальности интерпретации геофизических данных [9–11]. Чем больше произвол в выборе эквивалентного по внешнему полю распределения масс, тем больше неопределенность в истинности того или иного утверждения о геологическом строении среды. В отсутствие

априорной информации об объекте, порождающем поле, вообще ничего нельзя сказать о локализации и геометрии источника сигнала.

Поэтому, прежде чем переходить к формулировке краевых задач для выделения единственного сеточного аналога гравитационного или магнитного потенциала, необходимо рассмотреть принципиально важный для дальнейшего вопрос нахождения фундаментального решения разностного аналога оператора Лапласа.

Дискретными аналогами потенциала и фундаментального решения уравнения Лапласа служат (ср. с формулами (3)):

$$V_S \left(x^{(S)} \right) = G \sum_{\xi^{(S)} \in J_S} m_S \left(\xi^{(S)} \right) \Omega_n^{(S)} \left(\xi^{(S)} - x^{(S)} \right), \quad (5)$$

$$\Delta \left(\Omega_n^{(S)} \left(x^{(S)} \right) \right) = - \frac{C_n}{H^{n-2}} e \left(x^{(S)} \right), \quad (6)$$

$$e \left(x^{(S)} \right) = \begin{cases} 1, & x^{(S)} = 0, \\ 0, & |x^{(S)}| > 0. \end{cases} \quad (7)$$

В (5) есть совокупность векторов координат $\xi^{(S)}$ тех узлов сетки, в которых имеются ненулевые сеточные массы; иначе говоря, J_S есть сеточный носитель источников поля. Функция $\Omega_n^{(S)} \left(x^{(S)} \right)$ есть сеточный аналог фундаментального решения $\Omega_n(x)$ уравнения Лапласа в континуальной теории, Δ — выбранный, как и в (3), конечно-разностный аналог оператора Лапласа. Ясно, что $\Omega_n^{(S)} \left(x^{(S)} \right)$ играет роль сеточного фундаментального решения. Условиями (5)–(7) сеточное фундаментальное решение уравнения Лапласа ни в одной из размерностей однозначно не определяется. В [1] В. Н. Страхов выдвинул гипотезу о том, что имеет место единственность решения задачи по определению сеточного фундаментального решения в R^3 , близкого по евклидовой норме к потенциалу призмы, заданной в области $|\bar{r}| \leq \frac{h}{2}$, $\bar{r} = (x, y, z)^T$, $|\bar{r}| \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Заметим, что уравнениям (6), (7) удовлетворяет, например, следующая сеточная функция трех переменных:

$$\Omega_3^{(0)} \left(x^{(S)} \right) = \frac{1}{6} \cdot \left\{ \left(x_1^{(S)} \right)^2 + \left(x_2^{(S)} \right)^2 + \left(x_3^{(S)} \right)^2 \right\} + Ax_1^{(S)} + Bx_2^{(S)} + Cx_3^{(S)} + D,$$

где A, B, C, D — произвольные вещественные постоянные. Вместо линейной функции сеточных переменных можно взять любой гармонический полином, который удовлетворяет сеточному аналогу уравнения Лапласа (к примеру, $2 \left(x_1^{(S)} \right)^2 + 2 \left(x_2^{(S)} \right)^2 - 4 \left(x_3^{(S)} \right)^2$). Таким образом, об однозначной разрешимости задачи по определению сеточного фундаментального уравнения Лапласа речь может идти только при наложении дополнительных ограничений на функцию $\Omega_3^{(S)} \left(x^{(S)} \right)$. Далее, сеточное фундаментальное решение мы будем искать в некоторой ограниченной области сеточного трехмерного пространства. В качестве такой области может выступать как прямоугольный параллелепипед (в случае декартовой системы координат), так и шар (если рассматривать сеточные аналоги уравнений Лапласа и Пуассона в сферической системе координат).

2. СЕТОЧНОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Оператор Лапласа в (6) будем считать заданным на шаблоне “крест” [12]. Тогда для трехмерного сеточного пространства имеем

$$\Lambda^+ \left(\Omega_3^{(S)} \left(x^{(S)} \right) \right) = - \frac{4\pi}{H} e_S \left(x^{(S)} \right);$$

$$\Lambda^+ \left(\Omega_3^{(S)}(x^{(S)}) \right) = -3 \left(\sum_{p=1}^3 C_p \right) \Omega_3^{(S)}(x^{(S)}) + \sum_{p=1}^3 \left\{ \Omega_3^{(S)}(x^{(S)} - h_p e_p) + \Omega_3^{(S)}(x^{(S)} + h_p e_p) \right\}, \quad (8)$$

$$C_p = \frac{H^3}{h_1 h_2 h_3}, \quad H = \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}, \quad x^{(S)} = (x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, x_3^{(S)}), \quad x_p^{(S)} = k h_p,$$

$$-K \leq k \leq K; \quad h_p = \text{const}, \quad p = 1, 2, 3; \quad |x_p^{(S)}| \leq d_p = K h_p, \quad p = 1, 2, 3.$$

Как утверждается в [1], введение условия $\lim_{|x^{(S)}| \rightarrow \infty} |\Omega_n^{(S)}(x^{(S)})| = 0$ при $n \geq 3$ не снимает неединственности. В самом деле, соображения симметрии показывают, что имеют место равенства

$$\Omega_2^{(S)}(x^{(S)}) = \Omega_3^{(S)}(x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, x_3^{(S)}) = \Omega_3^{(S)}(|x_1^{(S)}|, |x_2^{(S)}|, |x_3^{(S)}|) = \Omega_3^{(S)}(|x_{i_1}^{(S)}|, |x_{i_2}^{(S)}|, |x_{i_3}^{(S)}|),$$

$$(i_1, i_2, i_3) \in S_3,$$

где S_3 — группа перестановок трех индексов. Следовательно, достаточно найти значения $\Omega_3^{(S)}(x^{(S)})$ в области $S_{+++}^3 = \{x^{(S)} : x_1^{(S)} \geq 0, x_2^{(S)} \geq 0, x_3^{(S)} \geq 0, x_1^{(S)} \leq x_2^{(S)} \leq x_3^{(S)}\}$, т.е. в части первого координатного октанта.

При определении значений сеточного фундаментального решения в узлах области S_{+++}^3 можно поставить условие минимальности отклонения сеточного решения от его непрерывного аналога:

$$F \left[\Omega_3^{(S)}(x^{(S)}) \right] = \sum_{x^{(S)} \in S_{+++}^3} \left(\frac{\Omega_3^{(S)}(x^{(S)}) - \Omega_{3,c}(x^{(S)})}{\Omega_{3,c}(x^{(S)})} \right) = \min, \quad (9)$$

где $\Omega_{3,c}(x^{(S)})$ — значения непрерывного фундаментального решения уравнения Лапласа в точках сеточной области.

Таким образом, одним из вариантов “устранения” неопределенности при нахождении сеточного фундаментального решения уравнения Лапласа является минимизация функционала (9) при условиях (8); такого рода вариационные постановки исследовались нами неоднократно при применении метода линейных интегральных представлений к решению обратных линейных задач геофизики [3–6].

В настоящей работе мы попытаемся заменить трехмерное сеточное пространство (т.е. неограниченное множество точек $x^{(S)} = (x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, \dots, x_n^{(S)})^T$, $x_k^{(S)} = p h_k$; $-\infty < p < +\infty$, $p = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $h_k = \text{const}$, ансамблем, или семейством, расширяющихся компактов, представляющих собой прямоугольные параллелепипеды $|x_p^{(S)}| \leq d_p = K_n h_p$, $p = 1, 2, 3$; здесь d_p , K_n и h_p , $p = 1, 2, 3$, — некоторые положительные константы, причем $K_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим уравнения Лапласа и Пуассона в некотором прямоугольном параллелепипеде. Для того чтобы корректно поставить задачу по определению $\Omega(x^{(S)})$ в указанном параллелепипеде нужно задать граничные условия. Будем считать, что на гранях параллелепипеда K_{n_q} с номером n_q , принадлежащего описанному выше семейству расширяющихся компактов, значения фундаментального решения равны нулю (непрерывным аналогом дискретной постановки такого рода является задача Дирихле для уравнения Пуассона):

$$\Omega(x^{(S)}) = 0. \quad (10)$$

Решение задачи (8)–(10) приводит к необходимости применения метода прогонки. В указанном методе матрицы систем линейных алгебраических уравнений имеют трехдиагональный или блочно-

трехдиагональный вид (если постановка рассматривается в трехмерном сеточном пространстве):

$$\begin{aligned}
 A_{NN} &= \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & \dots & 0 \\ B_{21} & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & A_{NN} & \end{bmatrix}, \quad A_{kk} = \begin{bmatrix} a & b \dots & 0 \\ b & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^{(k)} \\ \mathbf{y}_2^{(k)} \\ \dots \\ \mathbf{y}_{N_2}^{(k)} \end{pmatrix}, \\
 a &= 2(1 + \alpha_1 + \alpha_2), \quad \alpha_1 = \frac{h_3^2}{h_1^2}, \quad \alpha_2 = \frac{h_3^2}{h_2^2}, \quad b = -\alpha_1; \\
 c &= -\alpha_2; \quad \mathbf{y}_j^{(k)} = \left(y_{1,j}^{(k)}, y_{2,j}^{(k)}, \dots, y_{N_1,j}^{(k)} \right)^T, \quad 1 \leq k \leq N_3 - 1; \\
 B_{12} &= B_{21}, \quad B_{ij} = \begin{bmatrix} c & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & c \end{bmatrix}, \quad j = i \pm 1; \quad i = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j = 1, \dots, N_2 - 1.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Необходимо сделать важное замечание: соотношение (8) — это конечно-разностный аналог уравнения Пуассона, заданный в неограниченной сеточной области, фактически во всем сеточном пространстве. Для однозначной разрешимости такого рода уравнений необходимо задать граничные условия, причем в тех точках, где это возможно сделать. Поэтому нужно определиться со свойствами сеточных областей, в которых мы в дальнейшем будем рассматривать краевые задачи для конечно-разностных аналогов уравнений Лапласа и Пуассона. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \omega_3 &= (ih_1, jh_2, kh_3), \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1, \quad 1 \leq k \leq N_3 - 1; \\
 \omega &= (ih_1, jh_2), \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1; \\
 \gamma_3 &= (0, jh_2, kh_3) \cup (N_1, jh_2, kh_3) \cup (jh_1, 0, kh_3) \cup (jh_1, N_2, kh_3) \cup (jh_1, jh_2, 0) \cup (ih_1, jh_2, N_3), \\
 1 &\leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1, \quad 1 \leq k \leq N_3 - 1; \\
 \gamma &= (0, jh_2) \cup (N_1, jh_2) \cup (jh_1, 0) \cup (jh_1, N_2), \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, мы задали равномерные сетки в трехмерном и двумерном пространствах (ω_3, ω) , а также обозначили границы соответствующих областей.

Дифференциально-разностному оператору в (6) соответствует при решении краевых задач схема матричной прогонки [12] следующего вида:

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{Y}_{k-1} + \mathbf{C}_k \mathbf{Y}_k + \mathbf{Y}_{k+1} &= \mathbf{F}_k, \quad 1 \leq k \leq N_3 - 1, \\
 \mathbf{C} \mathbf{Y} &= (\Lambda \mathbf{y}_1, \Lambda \mathbf{y}_2, \dots, \Lambda \mathbf{y}_{N_2-1}), \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_{N_2-1}), \\
 \mathbf{y}_j &= (y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{N_1-1,j}), \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1, \\
 \Lambda \mathbf{y}_j &= (\Lambda_1 y_{1,j}, \Lambda_1 y_{2,j}, \dots, \Lambda_1 y_{N_1-1,j}), \\
 \Lambda_1 y_{i,j} &= 2y_{i,j} - C_3^2 y_{\bar{x}_1 x_1; i, j} - C_3^2 y_{\bar{x}_2 x_2; i, j}, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1; \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1.
 \end{aligned} \tag{13}$$

В (13) через $\mathbf{Y}_k$ обозначен блочный вектор значений сеточной функции в слое, соответствующем значению третьей координаты $x_3^{(S)} = kh_3$, $1 \leq k \leq N_3 - 1$. Правые части $\mathbf{F}_k$ при изменении индекса $1 \leq k \leq N_3 - 1$ — это значения сеточной функции $\frac{4\pi}{H} e_S(x^{(S)})$ в соответствующих точках, константа C_3^2 определяется в (8) (точнее говоря, это — квадрат C_3). К уравнениям (13) необходимо добавить граничные условия с тем, чтобы возникла постановка краевой задачи. Мы рассмотрим граничные условия I рода:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{Y}_{N_3} = \mathbf{F}_{N_3}. \tag{14}$$

Постановка (13), (14) — это частный случай более общей задачи: найти векторы $\mathbf{Y}_k$, $0 \leq k \leq N_3$, удовлетворяющие следующей системе:

$$\begin{aligned}
 -\mathbf{A}_k \mathbf{Y}_{k-1} + \mathbf{C}_k \mathbf{Y}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{Y}_{k+1} &= \mathbf{F}_k, \quad 1 \leq k \leq N_3 - 1, \\
 C_0 \mathbf{Y}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{Y}_1 &= \mathbf{F}_0, \quad k = 0, \\
 -\mathbf{A}_{N_3} \mathbf{Y}_{N_3-1} + \mathbf{C}_{N_3} \mathbf{Y}_{N_3} &= \mathbf{F}_{N_3}, \quad k = N_3,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$ — блочные матрицы; $\mathbf{C}_k$ — блочная квадратная матрица $N_2 \times N_2$ каждый блок которых имеет размер $N_1 \times N_1$; $\mathbf{A}_k$ — блочная прямоугольная матрица размера $N_2 - 1 \times N_2$, блоки которой имеют размер $N_1 \times N_1$; $\mathbf{B}_k$ — блочная прямоугольная матрица $N_2 + 1 \times N_2$ с блоками размера $N_1 \times N_1$; $\mathbf{Y}_k$ — блочный вектор размера N_2 с блоками длины N_1 .

Формулы матричной прогонки имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= (\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k \alpha_{k-1})^{-1} \mathbf{B}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N_3 - 1, \quad \alpha_1 = \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{B}_0; \\ \beta_{k+1} &= (\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k \alpha_{k-1})^{-1} (\mathbf{F}_k + \mathbf{A}_k \beta_k), \quad k = 1, 2, \dots, N_3, \quad \beta_1 = \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{F}_0; \\ \mathbf{Y}_k &= \alpha_{k+1} \mathbf{Y}_{k+1} + \beta_{k+1}, \quad k = N_1 - 1, \quad N_3 - 2, \dots, 0, \quad \mathbf{Y}_{N_3} = \beta_{N_3+1}, \end{aligned} \quad (16)$$

причем алгоритм (16) корректен, если матрицы $(\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k \alpha_{k-1})^{-1}$ не вырождены для $k = 1, 2, \dots, N_3$.

В (12) показано, что при $\mathbf{C}_k = \mathbf{C}$, $A_{N_3} = B_0 = 0$, $C_0 = C_{N_3} = E$, $C_0 = C_{N_3} = E$, $B_k = A_k = E$, $1 \leq k \leq N_3$, а квадратная матрица $\mathbf{C}_k$ задана в (16), условия корректности алгоритма (16) принимают вид

$$\|\mathbf{C}^{-1}\| = \max_l |\lambda_l(\mathbf{C}^{-1})| = \frac{1}{\min_l |\lambda_l \mathbf{C}|} \leq 0.5. \quad (17)$$

В (17) максимум и минимум берется по собственным значениям матрицы $\mathbf{C}^{-1}$ и $\mathbf{C}$ соответственно. Из определения матрицы $\mathbf{C}$ можно получить, что при замене $\lambda_l = 2 + C_3^2 \lambda_{l_1}^{(1)} + C_3^2 \lambda_{l_2}^{(2)}$, $l = (l_1, l_2)$, задача по поиску собственных значений λ_1 для оператора

$$\begin{aligned} \Lambda_1 y_{i,j} &= 2y_{i,j} - C_3^2 y_{x_1 x_1; i,j} - C_3^2 y_{x_2 x_2; i,j} = \lambda_l y_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1; \quad 1 \leq N_2 \leq N_2 - 1, \\ y_{k,0} &= y_{k,N_2} = y_{0,j} = y_{N_1,j} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

сводится к следующей задаче на собственные значения (12):

$$\begin{aligned} \Lambda y(x) + \lambda_l y(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \omega, \quad \Lambda = \Lambda_x + \Lambda_y, \\ y(x) &= 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \gamma; \\ y_{ij} &= y(x_{1,i}, x_{2,j}); \quad x_{1,i} = ih_1, \quad x_{2,j} = jh_2; \\ \Lambda_x \mu_{l_1}^{(1)} + \lambda_{l_1}^{(1)} \mu_{l_1}^{(1)} &= 0, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1, \\ \Lambda_y \mu_{l_2}^{(2)} + \lambda_{l_2}^{(2)} \mu_{l_2}^{(2)} &= 0, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1, \\ \mu_{l_1}^{(1)}(0) = \mu_{l_1}^{(1)}(N_1) = 0 &= \mu_{l_2}^{(2)}(0) = \mu_{l_2}^{(2)}(N_2), \\ \lambda_{l_\alpha}^{(\alpha)} &= \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \left(\frac{l_\alpha \pi}{2N_\alpha} \right) = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \left(\frac{l_\alpha \pi h_\alpha}{2d_\alpha} \right), \quad l_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \\ \mu_{l_1}^{(1)}(i) &= \sqrt{\frac{2}{d_1}} \sin \left(\frac{l_1 \pi i}{N_1} \right), \quad l_1 = 1, \dots, N_1 - 1; \\ \mu_{l_2}^{(2)}(j) &= \sqrt{\frac{2}{d_2}} \sin \left(\frac{l_2 \pi j}{N_2} \right), \quad l_2 = 1, \dots, N_2 - 1; \\ y_{ij} &= \mu_l(i, j) = \mu_{l_1}^{(1)}(i) \cdot \mu_{l_2}^{(2)}(j), \\ \Lambda_x y_{ij} &= \frac{1}{h_1^2} [y_{i+1,j} - 2y_{ij} + y_{i-1,j}], \quad \Lambda_y y_{ij} = \frac{1}{h_2^2} [y_{i,j+1} - 2y_{ij} + y_{i,j-1}]. \end{aligned} \quad (19)$$

Само же собственное значение равно

$$\lambda_l = 2 + C_3^2 \cdot \sum_{\alpha=1}^2 \lambda_{l_\alpha}^{(\alpha)}. \quad (20)$$

В (17) через $y(x)$ обозначена сеточная функция двух аргументов, определенная на двумерной сетке $x = (x_1, x_2) \in \omega$ (см. (12)). При этом в каждом слое рассматривается «своя» задача на собственные значения конечно-разностного оператора вида (18). Из (20) становится ясно, что $\lambda_1 > 2$, поэтому

алгоритм матричной прогонки является для задачи (8)–(10) корректным, и мы можем утверждать, что справедлива следующая

Теорема 1. *Фундаментальное решение сеточного аналога уравнения Лапласа в трехмерном случае определяется условиями (8)–(10) однозначно.*

Подчеркнем, что корректность алгоритма матричной прогонки означает, что решение задачи (8)–(10) не только существует, но и единственно.

3. СЕТОЧНОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Наряду с сеточными областями в трехмерном евклидовом пространстве мы будем рассматривать их сферические аналоги:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^{(S)} &= (r^{(S)}, \varphi^{(S)}, \vartheta^{(S)})^T, \quad r_k^{(S)} = r_{k-1}^{(S)} + h_{r,k}; \quad k = 1, \dots; \\ \varphi_m^{(S)} &= \varphi_{m-1}^{(S)} + mh_\varphi, \quad m = 1, \dots, N_2, \quad h_\varphi = \text{const}; \\ \vartheta_l^{(S)} &= \vartheta_{l-1}^{(S)} + h_{\vartheta,l}, \quad l = 1, \dots, N_3. \end{aligned} \quad (21)$$

В (21) по радиусу и углу ϑ введены сетки с произвольными переменными шагами $h_{r,k}$, $h_{\vartheta,l}$, и индексы k и l принимают значения из счетного и конечного множеств соответственно (ср. со случаем декартовой системы координат, когда значения координат сеточных масс $\mathbf{x}_{k,j,m}^{(S)} = x_k^{(S)}, y_l^{(S)}, z_m^{(S)}$ принадлежат прямому произведению $\square \times \square \times \square$ — трех экземпляров группы целых чисел $\square$). Если сеточная область ограничена по радиусу и двум углам, будем полагать, что $k = 0, \dots, N_1; l = 0, \dots, N_2; m = 0, \dots, N_3$. Можно считать, что заданы три сеточные функции целочисленного аргумента $h_1(k) = h_{r,k}$, $h_2(m) = h_\varphi$, $h_3(l) = h_{\vartheta,l}$ значения которых в целых точках вещественной прямой равны шагам по соответствующим координатам. Определим также средние шаги по каждой из сферических координат:

$$\begin{aligned} \bar{h}_i(m) &= \begin{cases} \frac{1}{2} h_i(1), & m = 0, \\ \frac{1}{2} \{h_i(m+1) + h_i(m)\}, & 1 \leq m \leq N_i - 1, \\ \frac{1}{2} h_i(N_i), & m = N_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3; \\ h_1(k) &= h_{r,k}, \quad h_2(m) = h_\varphi, \quad h_3(l) = h_{\vartheta,l}. \end{aligned} \quad (22)$$

В сферической системе координат оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta_{r,\varphi,\vartheta} f(x^{(i)}) \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right), \quad (23)$$

$$x^{(i)} = (r^{(i)}, \varphi^{(i)}, \vartheta^{(i)}).$$

Уравнению (23) соответствует в декартовых координатах следующий дифференциальный оператор эллиптического типа (в общем случае):

$$A_k f \equiv \text{div} (k(x) \nabla f), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \quad k(x) \geq k_0 > 0. \quad (24)$$

Для описания сеточного фундаментального решения в криволинейной системе координат необходимо знать, как выглядят в ней дискретные аналоги операторов Лапласа и Пуассона. Для этого введем сеточные функции $\rho(i)$ и $\tau(l)$ [12]:

$$\begin{aligned} \rho(k) &= r_k, \quad 1 \leq k \leq N_1; \quad \rho = \begin{cases} \frac{1}{4} h_{r,1}, & r_0 = 0, \\ 0, & r_0 > 0, \end{cases} \\ \tau(l) &= \sin \vartheta_l^{(S)}, \quad 1 \leq l \leq N_2; \\ \tau(0) &= \begin{cases} \frac{1}{4} \sin h_{\vartheta,1}, & \vartheta_0 = 0, \\ \sin \vartheta_0, & \vartheta_0 > 0, \end{cases} \quad \tau(N_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sin h_{\vartheta,N_2}, & \vartheta_{N_2} = \pi, \\ \sin \vartheta_{N_2}, & \vartheta_{N_2} < \pi. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Для функций $\rho(k)$, $\tau(l)$ мы ниже будем использовать также обозначения $\rho_k = \rho(k)$ и $\tau(\vartheta_l^{(S)} = \tau(l))$.

Конечно-разностные аналоги операторов дифференцирования по сферическим координатам запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\partial_{\bar{r}} f &\equiv \frac{f(r_k, \vartheta, \varphi) - f(r_{k-1}, \vartheta, \varphi)}{h_{r,k}}, \quad \partial_r f \equiv \frac{f(r_{k+1}, \vartheta, \varphi) - f(r_k, \vartheta, \varphi)}{h_{r,k+1}}, \\ \partial_{\bar{\vartheta}} f &\equiv \frac{f(r, \vartheta_l, \varphi) - f(r, \vartheta_{l-1}, \varphi)}{h_{\vartheta,l}}, \quad \partial_r f \equiv \frac{f(r, \vartheta_{l+1}, \varphi) - f(r, \vartheta_l, \varphi)}{h_{\vartheta,l+1}}, \\ \partial_{\bar{\varphi}} f &\equiv \frac{f(r, \vartheta, \varphi_m) - f(r, \vartheta, \varphi_{m-1})}{h_{\varphi}}, \quad \partial_{\varphi} f \equiv \frac{f(r, \vartheta, \varphi_{m+1}) - f(r, \vartheta, \varphi_m)}{h_{\varphi}}.\end{aligned}\quad (26)$$

Тогда для сеточного фундаментального решения в сферических координатах можно записать следующую систему конечно-разностных уравнений, аналогичную (8) для декартовых координат:

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbf{h}(r,\vartheta,\varphi)} \Omega_3^{(S)}(\mathbf{x}_{k,l,m}^{(S)}) &\equiv \\ &\equiv \frac{1}{\rho_k^2} \frac{\rho_{k+1}^2 \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)} + h_{r,k}, \varphi_m^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}) - 2\rho_k^2 \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)} + h_{r,k}, \varphi_m^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}) + \rho_{k-1}^2 \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)} - h_{r,k-1}, \varphi_m^{(S)}, \vartheta_l^{(S)})}{\bar{h}_r} + \\ &+ \frac{1}{\rho_k^2} \frac{\tau(\vartheta_{l+1}^{(S)}) \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \varphi_m^{(S)}, \vartheta_l^{(S)} + h_{\vartheta,l}) - 2\tau(\vartheta_l^{(S)}) \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \varphi_m^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}) + \tau(\vartheta_{l-1}^{(S)}) \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \varphi_m^{(S)}, \vartheta_l^{(S)} - h_{\vartheta,l-1})}{\bar{h}_{\vartheta}} + \\ &+ \frac{\Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \varphi_{m+1}^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}) - 2\Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \varphi_m^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}) + \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \varphi_{m-1}^{(S)}, \vartheta_l^{(S)})}{\rho_k^2 [\tau(\vartheta_l^{(S)})]^2 h_{\varphi}^2} \equiv [\Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \varphi_m^{(S)}, \vartheta_l^{(S)})]_{r\bar{r}} + \\ &+ \frac{1}{\rho_k^2 \cdot \bar{h}_3(l)} [\Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \varphi_m^{(S)}, \vartheta_l^{(S)})]_{\vartheta, \bar{\vartheta}} + \frac{1}{\rho_k^2 [\tau(\vartheta_l^{(S)})]^2 h_{\varphi}^2} [\Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \varphi_m^{(S)}, \vartheta_l^{(S)})]_{\varphi \bar{\varphi}} = -\frac{4\pi}{H} e_S(\mathbf{x}_{k,l,m}^{(S)}), \\ k = 1, \dots, N_1 - 1; \quad l = 1, \dots, N_2 - 1; \quad m = 1, \dots, N_3 - 1; \quad \mathbf{x}_{k,l,m}^{(S)} = (r_k^{(S)}, \varphi_m^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}).\end{aligned}\quad (27)$$

В (27) через $e_S(\mathbf{x}_{k,l,m}^{(S)})$ обозначена функция, определенная в (7); H — это среднее геометрическое из $\bar{h}_r$, h_{φ} , $\bar{h}_{\vartheta}$: $H = \sqrt[3]{\bar{h}_r h_{\varphi} \bar{h}_{\vartheta}}$, $\bar{h}_r = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} h_{r,k}$; $\bar{h}_{\vartheta} = \frac{1}{N_2} \sum_{l=1}^{N_2} h_{\vartheta,l}$.

Заметим, что в (27) по радиусу и углу ϑ вводится равномерная сетка, но для общего случая мы приведем систему конечно-разностных уравнений ниже.

Для однозначности определения сеточной функции $\Omega_3^{(S)}(\mathbf{x}_{(l,k,m)}^{(S)})$ необходимо, как и при формулировке сеточной краевой задачи (13), (14), указать, каким граничным условиям удовлетворяет указанная функция. Будем (для простоты) полагать, что сеточная функция $\Omega_3^{(S)}(\mathbf{x}_{(l,k,m)}^{(S)})$ задана в шаровом слое:

$$\begin{aligned}DS_R &= \{x^{(S)} : \rho(0) \leq |x^{(S)}| \leq R, \arcsin(4\tau(0)) \leq \vartheta \leq \pi - \arcsin(4\pi(N_2)), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \\ \rho(0) &= \begin{cases} \frac{1}{4} h_{r,l}, & r_0 = 0, \\ 0, & r_0 > 0, \end{cases} \\ \tau(0) &= \begin{cases} \frac{1}{4} \sin h_{\vartheta,l}, & \vartheta_0 = 0, \\ \sin \vartheta_0, & \vartheta_0 > 0, \end{cases} \quad \tau(N_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} \sin h_{\vartheta,N_2}, & \vartheta_{N_2} = \pi, \\ \sin \vartheta_{N_2}, & \vartheta_{N_2} < \pi. \end{cases}\end{aligned}\quad (28)$$

В (28) r_0 и ϑ_0 , ϑ_{N_2-1} — некоторые константы, $h_{r,1}$ и $h_{\vartheta,1}$ — первые шаги дискретной сети по радиусу и углу ϑ соответственно, h_{ϑ,N_2-1} — последний шаг по углу ϑ . Для краткости обозначим $\mathbf{x}_{(l,k,m)}^{(S)}$ через $x^{(S)}$.

Тогда вместе с условиями

$$\Omega_3^{(S)} \Big|_{x^{(S)} \in \Gamma(DS_{R_n})} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

получим краевую задачу в сеточном пространстве, аналогичную (13), (14). В (29) через $\Gamma(DS_{R_n})$ обозначена граница n -го шарового слоя (вместо n -го параллелепипеда в декартовом случае).

Матрица оператора Λ_1 является блочной трехдиагональной, и он имеет следующий вид:

$$\Lambda_1 \Omega_3^{(S)}(x^{(S)}) = 2\Omega_n(x^{(S)}) - \rho_k^2 \left[\tau(\vartheta_l^{(S)}) \right]^2 \cdot h_\varphi^2 \Omega_3^{(S)}(x^{(S)})_{\bar{r}r} - \rho_k^2 \left[\tau(\vartheta_l^{(S)}) \right]^2 \cdot h_\varphi^2 \Omega_3^{(S)}(x^{(S)})_{\bar{\vartheta}\vartheta}, \quad (30)$$

$$1 \leq k \leq N_1 - 1; \quad 1 \leq l \leq N_2.$$

В (30) фактически рассматриваются значения сеточной функции в m -м слое сетки, соответствующем значению угла $\varphi_m^{(S)} = \varphi_{m+1}^{(S)} + mh_\varphi$, $m = 1, \dots, N_2$, $h_\varphi = \text{const}$, где $\varphi_m^{(S)}$ — дискретный аналог переменной φ в “континуальной” сферической системе координат (см. (21)).

Как и в рассмотренном в разд. 2 случае декартовой системы координат, для решения задачи (28)–(30) можно применить алгоритм матричной прогонки. Матрица системы линейных алгебраических уравнений будет блочно-трехдиагональной, элементы ее имеют вид (11), но вместо $\alpha_1 = \frac{h_3^2}{h_1^2}$; $\alpha_2 = \frac{h_3^2}{h_2^2}$ нужно будет записать следующие выражения:

$$\alpha_1 = \alpha_1(r_k^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}) = h_\varphi^2 (r_k^{(S)})^2 \sin^2(\vartheta_l^{(S)}) \cdot \left(\frac{1}{h_{r,k} \cdot h_{r,k+1}} + \frac{(r_{k-1}^{(S)})^2}{(r_k^{(S)})^2 \cdot (h_{r,k})^2} \right), \quad (31)$$

$$\alpha_2 = \alpha_2(r_k^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}) = h_\varphi^2 (r_k^{(S)})^2 \sin^2(\vartheta_l^{(S)}) \cdot \left(\frac{1}{h_{\vartheta,l} \cdot h_{\vartheta,l+1}} + \frac{\sin \vartheta_{l-1}^{(S)}}{\sin \vartheta_l^{(S)} \cdot (h_{\vartheta,l})^2} \right).$$

В (31) вместо функции $\tau(\vartheta_l^{(S)})$ фигурирует $\sin \vartheta_l^{(S)}$, что приводит к одним и тем же выражениям для элементов СЛАУ в случае, когда $\vartheta_0 > 0$ (см. определение вспомогательных сеточных функций (25)). Алгоритм матричной прогонки применим, если выполняется условие (17). Соотношения (31) легко получаются, если вспомнить, как записываются конечно-разностные аналоги вторых производных сеточного фундаментального решения по радиусу и углу ϑ :

$$\Delta_r^{(S)} \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}, \varphi_m^{(S)}) \equiv \frac{1}{(r_k^{(S)})^2} \left[(r_k^{(S)})^2 \left\{ \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}, \varphi_m^{(S)}) \right\}_r \right]_{\bar{r}} = \frac{\Omega_3^{(S)}(r_{k+1}^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}, \varphi_m^{(S)})}{h_{r,k+1} \cdot h_{r,k}} -$$

$$- \left(\frac{1}{h_{r,k} \cdot h_{r,k+1}} + \frac{(r_{k-1}^{(S)})^2}{(r_k^{(S)})^2 \cdot (h_{r,k})^2} \right) \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}, \varphi_m^{(S)}) + \frac{(r_{k-1}^{(S)})^2 \cdot \Omega_3^{(S)}(r_{k-1}^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}, \varphi_m^{(S)})}{(r_k^{(S)})^2 \cdot (h_{r,k})^2};$$

$$\Delta_\vartheta^{(S)} \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}, \varphi_m^{(S)}) \equiv \frac{1}{\sin \vartheta_l^{(S)}} \left[\sin \vartheta_l^{(S)} \left\{ \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}, \varphi_m^{(S)}) \right\}_\vartheta \right]_{\bar{\vartheta}} = \frac{\Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \vartheta_{l+1}^{(S)}, \varphi_m^{(S)})}{h_{\vartheta,l+1} \cdot h_{\vartheta,l}} -$$

$$- \left(\frac{1}{h_{\vartheta,l} \cdot h_{\vartheta,l+1}} + \frac{\sin \vartheta_{l-1}^{(S)}}{\sin \vartheta_l^{(S)} \cdot (h_{\vartheta,l})^2} \right) \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \vartheta_l^{(S)}, \varphi_m^{(S)}) + \frac{\sin \vartheta_{l-1}^{(S)} \cdot \Omega_3^{(S)}(r_k^{(S)}, \vartheta_{l-1}^{(S)}, \varphi_m^{(S)})}{\sin \vartheta_l^{(S)} \cdot (h_{\vartheta,l})^2}. \quad (32)$$

Собственные значения оператора в Λ_1 в (30) можно оценить следующим образом.

Введем в пространстве сеточных функций от сферических координат $r_k^{(S)}$, $\vartheta_l^{(S)}$ скалярное произведение по формуле (таким образом, значение координаты $\varphi_m^{(S)}$ фиксировано):

$$(u, v) = \sum_{k=0}^{N_1} \sum_{l=0}^{N_2} u(k, l, m) v(k, l, m) \bar{h}_1(k) \bar{h}_2(l). \quad (33)$$

Согласно общей теории линейных операторов [12], собственные значения матрицы оператора Λ_1 определяются из соотношения Рэлея:

$$\lambda = \sup_{\|x^{(S)}\|_E=1} \frac{\|Ax^{(S)}\|_E}{\|x^{(S)}\|_E}. \quad (34)$$

В (34) точная верхняя грань берется по векторам сеточного пространства, имеющим евклидову норму, равную 1. Более подробно:

$$\|x^{(S)}\|_E = \sqrt{(x^{(S)}, x^{(S)})}. \quad (35)$$

В (35) через $(x^{(S)}, y^{(S)})$ обозначено скалярное произведение векторов сеточного пространства, определенное ранее в (33). В [12] получены оценки максимального и минимального собственных значений разностного эллиптического оператора в цилиндрических координатах.

Если для самосопряженного оператора A имеют место неравенства [12]

$$C_1 \delta(u, u) \leq (Au, u) \leq C_2 \Delta(u, u), \quad (36)$$

то собственные значения этого оператора лежат в диапазоне

$$C_1 \delta \leq \lambda_A \leq C_2 \Delta. \quad (37)$$

В случае сферических координат можно сделать аналогичные выводы относительно собственных значений указанного оператора, если ввести скалярное произведение (33) для сеточных функций, являющихся решениями задачи Дирихле. Для того чтобы убедиться в этом, запишем соотношение (20) следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \Omega_3^{(S)}(x^{(S)}) &= 2\Omega_3^{(S)}(x^{(S)}) - \rho_k^2 \left[\tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \right]^2 \cdot h_\varphi^2 \Omega_3^{(S)}(x^{(S)})_{\bar{r}r} - \rho_k^2 \left[\tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \right]^2 \cdot h_\varphi^2 \Omega_3^{(S)}(x^{(S)})_{\bar{\vartheta}\vartheta} = \\ &= \left(2E - \rho_k^2 \left[\tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \right]^2 \cdot h_\varphi^2 A_1 - \rho_k^2 \left[\tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \right]^2 \cdot h_\varphi^2 A_2 \right) \Omega_3^{(S)}(x^{(S)}), \\ &1 \leq k \leq N_1 - 1; \quad 1 \leq l \leq N_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Таким образом, собственные значения оператора Λ_1 можно оценить, если известны собственные значения операторов $\rho_k^2 \left[\tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \right]^2 \cdot h_\varphi^2 A_1$ и $\rho_k^2 \left[\tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \right]^2 \cdot h_\varphi^2 A_2$. Поскольку шаг по углу φ является константой ($h_\varphi = \text{const}$), то нам нужно исследовать свойства операторов A_1 и A_2 , точнее говоря, их суммы, умноженной на $\rho_k^2 \left[\tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \right]^2$. Но $\rho_k^2 \left[\tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \right]^2 \cdot [A_1 + A_2]$ является самосопряженным оператором при определении скалярного произведения согласно (33).

В самом деле,

$$\begin{aligned} \rho_k^2 \left[\tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \right]^2 \cdot [A_1 + A_2] \Omega_3^{(S)}(x^{(S)}) &= \left[\tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \right]^2 \cdot \left\{ \rho_k^2 \left(\Omega_3^{(S)}(x^{(S)}) \right) \right\}_{\bar{r}} + \\ &+ \tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \left\{ \tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \cdot \left(\Omega_3^{(S)}(x^{(S)}) \right) \right\}_{\bar{\vartheta}}. \end{aligned} \quad (39)$$

В (39) первое слагаемое обозначим через $B_1 \Omega_3^{(S)}$, а второе слагаемое — через $B_2 \Omega_3^{(S)}$. Если скалярно умножить $B_1 \Omega_3^{(S)} + B_2 \Omega_3^{(S)}$ на некоторую сеточную функцию $u(x^{(S)})$, удовлетворяющую условиям Дирихле на границе области задания $\Omega_3^{(S)}$ (скалярное произведение при этом определено по (33)), то мы получим

$$\begin{aligned} (B_1 \Omega_3^{(S)} + B_2 \Omega_3^{(S)}, u) &= \left[\tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \right]^2 \cdot \left\{ \rho_k^2 (u(x^{(S)})) \right\}_{\bar{r}} \cdot \Omega^{(S)} + \\ &+ \tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \left\{ \tau \left(\vartheta_l^{(S)} \right) \cdot (u(x^{(S)})) \right\}_{\bar{\vartheta}} \cdot \Omega_3^{(S)} = \left(\Omega_3^{(S)}, B_1 u + B_2 u \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, мы показали, что оператор $B_1 + B_2$ является самосопряженным в евклидовом пространстве сеточных функций со скалярным произведением (33).

Собственные значения B_1 могут быть оценены через собственные значения одномерного оператора Лапласа для задачи Дирихле на отрезке по r от $\rho(0)$ до R :

$$\begin{aligned} \beta_{1\min} \delta_1 &\leq \lambda_1^{(l_1)} \leq \beta_{1\max} \Delta_1, \quad l_1 = 1, \dots, N_1 - 1; \\ \beta_{1\min} &= \min \{ \tau^2(l_2), l_2 = 0, \dots, N_2 \}, \quad \beta_{1\max} = \max \{ \tau^2(l_2), l_2 = 0, \dots, N_2 \}; \\ \delta_1 &= \min \left[\frac{4\pi^2(1)}{h_{1,r}^2}, \max_{1 \leq k \leq N_1-1} \frac{2}{\bar{h}_1(k)} \cdot \left(\frac{\rho^2(k)}{h_{k,r}} + \frac{\rho^2(k+1)}{h_{k+1}} \right) \right], \\ \Delta_1 &= \min \left[\frac{4\pi^2(1)}{h_{1,r}^2}, \max_{1 \leq k \leq N_1-1} \frac{2}{\bar{h}_1(k)} \cdot \left(\frac{\rho^2(k)}{h_{k,r}} + \frac{\rho^2(k+1)}{h_{k+1}} \right) \right], \\ \bar{h}_1(k) &= \frac{1}{2} [h_{k,r} + h_{k+1,r}]. \end{aligned} \quad (41)$$

В (41) мы сохранили обозначения для шагов по координате r и функции $\rho(k)$, значения которой в точках сетки равны радиусу, за исключением начала координат (см. (28)).

Для оценки собственных значений оператора B_2 введем новую переменную

$$\eta = 0.5 \ln \left(\frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \right). \quad (42)$$

В (42) учтено, что $\tau(\vartheta_l^{(S)})$ — это $\sin \vartheta_l^{(S)}$, за исключением концов отрезка по углу ϑ (в случае, когда $0 \leq \vartheta \leq \pi$ или выполняется хотя бы одно из неравенств, входящих в это двойное неравенство).

По переменной η мы получим вместо B_2 оператор Лапласа и краевую задачу Дирихле на отрезке:

$$\begin{aligned} \eta &\in [\beta_{2\min}; \beta_{2\max}], \\ \beta_{2\min} &= \min \left\{ 0.5 \ln \left(\frac{1 - \cos(4 \arcsin \tau(0))}{1 + \cos(4 \arcsin \tau(0))} \right), 0.5 \ln \left(\frac{1 - \cos(4 \arcsin \tau(N_2 - 1))}{1 + \cos(4 \arcsin \tau(N_2 - 1))} \right) \right\}, \\ \beta_{2\max} &= \max \left\{ 0.5 \ln \left(\frac{1 - \cos(4 \arcsin \tau(0))}{1 + \cos(4 \arcsin \tau(0))} \right), 0.5 \ln \left(\frac{1 - \cos(4 \arcsin \tau(N_2 - 1))}{1 + \cos(4 \arcsin \tau(N_2 - 1))} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Собственные значения оператора Лапласа на указанном отрезке при условии равенства всех шагов по координате η лежат в диапазоне:

$$\begin{aligned} \delta_2 &\leq \lambda_2^{(l_2)} \leq \Delta_2, \quad \lambda_2^{(l_2)} = \frac{4}{\tilde{h}_2^2} \sin^2 \frac{\pi l_2}{2N_2}, \quad l_2 = 1, \dots, N_2 - 1; \\ \delta_2 &= \frac{4}{\tilde{h}_2^2} \sin^2 \frac{\pi}{2N_2} \geq \frac{8}{\tilde{d}_2^2}, \quad \tilde{d}_2 = \beta_{2\max} - \beta_{2\min}, \\ \tilde{h}_2 N_2 &= \tilde{d}_2; \quad \Delta_2 = \frac{4}{\tilde{h}_2^2} \cos^2 \frac{\pi}{2N_2} \leq \frac{4}{\tilde{h}_2^2}. \end{aligned} \quad (44)$$

Окончательно, будем иметь следующие оценки для собственных значений оператора Δ_1 на каждом из слоев дискретной сети, соответствующем некоторому значению угла φ :

$$\begin{aligned} \lambda_{\Delta_1}^{(l_1, l_2)} &= 2 + h_\varphi^2 \left(\lambda_1^{(l_1)} + \lambda_2^{(l_2)} \right), \\ 2 + h_\varphi^2 (\beta_{1\min} \delta_1 + \delta_2) \beta_{1\min} \delta_1 + \delta_2 &\leq \lambda_{\Delta_1}^{(l_1, l_2)} \leq 2 + h_\varphi^2 (\beta_{1\max} \Delta_1 + \Delta_2), \\ 1 &\leq l_1 \leq N_1 - 1; \quad 1 \leq l_2 \leq N_2 - 1. \end{aligned} \quad (45)$$

Если учесть, что вторые производные по радиусу вычисляются по формулам (32) (первое равенство), то можно сделать вывод о том, что для сеточного фундаментального решения, зависящего только от радиуса, справедлива

Теорема 2. *Сферически симметричное сеточное фундаментальное решение определяется из (27)–(29) в каждом шаровом слое DS_R однозначно: выполнены условия корректности метода монотонной прогонки по радиальному направлению для задачи Дирихле.*

Снова заметим, что корректность алгоритма прогонки гарантирует также существование решения (27)–(29), зависящего только от радиуса.

Оценка (45) для собственных значений конечно-разностного оператора Δ_1 в общем случае позволяет утверждать, что система (27)–(29) будет однозначно разрешима и при зависимости правой части от всех трех сферических координат, что особенно важно для приложений.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. Система (27)–(29) может быть решена с помощью метода матричной прогонки при любой зависимости правой части от сферических координат: для матриц $C_k = C$, $A_{N_3} = B_0 = 0$, $C_0 = C_{N_3} = E$, $B_m = A_m = E$, $1 \leq m \leq N_3$, в каждом слое, соответствующем $\varphi_m^{(S)}$, $m = 1, \dots, N_3$ выполнены условия корректности алгоритма (17).

4. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ СЕТОЧНОГО ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ НА СЕМЕЙСТВЕ РАСШИРЯЮЩИХСЯ КОМПАКТОВ

Из свойств конечно-разностного аналога оператора Лапласа следует, что функционал (9) — выпуклый и непрерывный. Мы видим также, что дискретный аналог оператора Лапласа (8) — линейный оператор, действующий на пространстве сеточных функций в декартовой системе координат.

В [14] доказывается утверждение о том, что для выпуклого, замкнутого и ограниченного множества G множество $G^* = \{\varphi^* \in G : J(\varphi^*) = \mu\} \neq \emptyset$ выпукло, замкнуто и ограничено. Здесь $J(\varphi^*)$ — выпуклый и непрерывный функционал на некотором гильбертовом пространстве, φ^* — элемент этого пространства. В качестве гильбертова пространства мы выберем пространство сеточных функций Ξ со скалярным произведением, определенным по формуле:

$$\begin{aligned} (u, v) = & \sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{l=1}^{N_2-1} \sum_{m=1}^{N_3-1} u(k, l, m) v(k, l, m) h_1 h_2 h_3 + \\ & + 0.5 \left[\sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{l=1}^{N_2-1} \{u(k, l, 0) v(k, l, 0) + u(k, l, N_3) v(k, l, N_3)\} \right] + \\ & + 0.5 \left[\sum_{k=1}^{N_1-1} \sum_{m=1}^{N_3-1} \{u(k, 0, m) v(k, 0, m) + u(k, N_2, m) v(k, N_2, m)\} \right] + \\ & + 0.5 \left[\sum_{m=1}^{N_3-1} \sum_{l=1}^{N_2-1} \{u(0, l, m) v(0, l, m) + u(N_1, l, m) v(N_1, l, m)\} \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Таким образом, сеточные функции $u(k, l, m), v(k, l, m) \in \Xi$.

Замечание. Введенное в (46) скалярное произведение соответствует постановкам краевых задач с условиями Дирихле.

Введем множества

$$G_R = G \cap K_R, \quad F_R = \{f \in \Phi, \quad f = \Lambda^+ \varphi, \quad \varphi \in G_R\},$$

$$K_R = \{\varphi \in \Phi : \|\varphi\| \leq R\}, \quad S_R = \{\varphi \in \Phi : \|\varphi\| = R\}, \quad \varphi \in \Xi. \quad (47)$$

В (47) через Λ^+ обозначен оператор Лапласа на шаблоне “крест” (см. (8)). Из того, что $K_R \subseteq K_{R'}$ при $\bar{R} \leq R' \leq R'' \leq \bar{R}$ следует справедливость включения $G_R \subseteq G_{R'}$, $F_R \subseteq F_{R'}$.

Согласно теореме 2, доказанной в [14], при $\forall R$ F_R выпукло, слабо замкнуто и ограничено. Это значит, что при $\forall R \geq \bar{R}$ существует единственный $f_R^* \in F_R$ такой, что

$$\|f_R^* - f\|_{\Xi'} = \inf_{f \in F_R} \|f - \bar{f}\|_{\Xi'}. \quad (48)$$

Через Ξ' мы обозначили сеточное пространство функций, определенных во внутренних узлах исходной сетки (поскольку шаблон “крест” предполагает вычисление значений функций именно в таких

узлах). Назовем f^* и f_R^* метрическими проекциями f соответственно на множества F и F_R . Очевидно,

$$\begin{aligned}\mu &= \inf_{\varphi \in G} J(\varphi) = \inf_{f \in F} \|f - \bar{f}\|_{\Xi'}^2 = \|f^* - \bar{f}\|_{\Xi'}^2, \\ \mu(R) &= \inf_{\varphi \in G_R} J(\varphi) = \inf_{f \in F_R} \|f - \bar{f}\|_{\Xi'}^2 = \|f_R^* - \bar{f}\|_{\Xi'}^2.\end{aligned}\quad (49)$$

Поскольку $J(\varphi)$ — непрерывный и выпуклый функционал, G_R — выпукло, замкнуто и ограничено, F_R — выпукло, слабо замкнуто и ограничено, G и F — подмножества гильбертовых пространств, $G_{R'} \subseteq G_{R''}$, $F_{R'} \subseteq F_{R''}$ при $\bar{R} \leq R' \leq R'' \leq \bar{\bar{R}}$, как было показано в [14], то $\mu(R)$ — непрерывная функция при $R \in [\bar{R}, \bar{\bar{R}}]$.

Можно показать (см. [14]), что $J(\varphi)$ достигает своей точной нижней грани на G_R в единственной точке, такой что $\|\varphi_R^*\| = R$.

Через R мы обозначили расстояние от начала координат до точки в пространстве сеточных фундаментальных решений. Как было уже отмечено, норма пространства Ξ связана со скалярным произведением, введенным в (46).

Если под $J(\varphi)$ мы будем понимать функционал качества (9), отражающий близость сеточного фундаментального решения к классическому, континуальному, то можно утверждать, что справедлива

Теорема 4. *На семействе расширяющихся компактов K_{R_n} , $R_N \rightarrow \infty$, существует единственное решение задачи (8)–(9).*

При построении решения задачи (8), (9) на семействе расширяющихся компактов следует использовать регуляризирующие алгоритмы, обеспечивающие высокую точность искомого сеточного фундаментального решения [15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В статье рассмотрены условия однозначной разрешимости системы линейных алгебраических уравнений для определения сеточного фундаментального решения в рамках теории дискретного гравитационного потенциала в декартовых и сферических координатах в некоторой ограниченной сеточной области. Приводятся различные варианты постановок условно-вариационных задач по поиску сеточного фундаментального решения.
2. В работе описывается алгоритм построения сеточных фундаментальных решений на семействе расширяющихся компактов, который позволяет находить значения дискретного потенциала и его производных в любой точке трехмерного сеточного пространства, что важно для геофизических приложений [15].

Авторы выражают глубокую благодарность А. С. Леонову за полезные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Страхов В. Н., Степанова И. Э., Гричук Л. В. Теория дискретного гравитационного потенциала и ее использование в гравиметрии // В сб.: “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”, Труды международной конференции. Воронеж. Воронежский государственный университет. 1996. С. 49–71.
2. Арсанукаев З. З. Вычисление пространственных элементов аномальных полей с использованием методов теории дискретных гравитационных полей // Физ. Земли. 2004. № 11. С. 47–69.
3. Страхов В. Н., Степанова И. Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физ. Земли. 2002. № 2. С. 3–19.
4. Страхов В. Н., Степанова И. Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // Физ. Земли. 2002. № 7. С. 3–12.

5. *Stepanova I. E., Kerimov I. A., Yagola A. G.* Approximation approach in various modifications of the method of linear integral representations // *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*. 2019. V. 55. N. 2. P. 218–231.
6. *Раевский Д. Н., Степанова И. Э.* О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // *Физ. Земли*. 2015. № 2. С. 44–54.
7. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.
8. *Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.* Курс вариационного исчисления. М.Л.: Гостоптехиздат, 1950. 296 с.
9. *Kolotov I. I., Lukyanenko D. V., Stepanova I. E., Shchepetilov A. V., Yagola A. G.* On the uniqueness of solution to systems of linear algebraic equations to which the inverse problems of gravimetry and magnetometry are reduced: a regional variant // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2023. V. 63. № 9. P. 1588–1599.
10. *Kolotov I. I., Lukyanenko D. V., Stepanova I. E., Yagola A. G.* On the uniqueness of solutions to systems of linear algebraic equations resulting from the reduction of linear inverse problems of gravimetry and magnetometry: a local case // *Comput. Math. and Math. Phys.* 2023. V. 63. № 8. P. 1452–1465.
11. *Леонов А. С.* Метод минимальной псевдообратной матрицы // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1987. Т. 27. № 8. С. 1123–1138.
12. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
13. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
14. *Гавурин М. К., Фабровская Ю. Б.* Об одном итеративном методе разыскания суммы квадратов // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1966. Т. 6. № 6. С. 1094–1097.
15. *Leonov A. S.* Extraoptimal A Posteriori Estimates of the Solution Accuracy in the Ill-Posed Problems of the Continuation of Potential Geophysical Fields // *Izvestiya, Physics of the Solid Earth*, 2011. V. 47. N. 6. P. 531–540.

ON THE UNAMBIGUITY OF DETERMINING THE GRID FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE LAPLACE EQUATION IN THE THEORY OF DISCRETE POTENTIAL

I. E. Stepanova^{a,*}, I. I. Kolotov^b, A. G. Yagoda^b, A. N. Levashov^b

^a 123242 Moscow, B. Gruzinskaya str., 10, Bldg. 1, O. Yu. Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russia

^b 119992 Moscow, Lenin Hills, Moscow State University, Russia

*e-mail: tet@ifz.ru

Received 13 March, 2024

Revised 13 March, 2024

Accepted 14 March, 2024

Abstract. The paper considers the problem of unambiguously determining the fundamental solution of the grid analogue of the Laplace equation within the framework of the theory of discrete gravitational potential. The grid fundamental solution of the finite-difference analogue of the Laplace equation plays a key role in reconstructing a continuously distributed source of a gravitational or magnetic field from heterogeneous and unequally accurate data obtained at points of a certain grid set.

Keywords: unambiguous definition, fundamental solution, discrete gravitational potential.