

ДУАЛИЗМ В ТЕОРИИ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ¹⁾

© 2024 г. Л. А. Бекларян^{1,*}, А. Л. Бекларян^{2,**}

¹117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, Центральный Экономико-Математический Институт РАН, Россия

²101000 Москва, ул. Мясницкая, 20, Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Россия

*e-mail: lbeklaryan@outlook.com

**e-mail: abeklaryan@hse.ru

Поступила в редакцию 12.09.2023 г.

Переработанный вариант 23.02.2024 г.

Принята к публикации 05.03.2024 г.

Статья посвящена дуализму теорий солитонных решений и решений функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Представлены основы формализма такого дуализма, центральным элементом которого является понятие солитонного букета, а также дуальная пара “функция-оператор”. В рамках такого подхода удастся описать все пространство солитонных решений с заданной характеристикой, а также их асимптотику как по пространству, так и по времени. На примере модели транспортного потока на манхэттенской решетке описано все семейство ограниченных солитонных решений. Библ. 28. Фиг. 2.

Ключевые слова: манхэттенская решетка, солитонные решения, функционально-дифференциальное уравнение.

DOI: 10.31857/S0044466924070072, EDN: xiovu0

ВВЕДЕНИЕ

Изучение солитонных решений (решений типа бегущей волны), является одним из активно развивающихся направлений как в разработке теории, так и в приложениях. Центральный вопрос касается как существования таких решений, а так и их многообразия. Имеется большое число работ, посвященных этой тематике. Приведем некоторые из них, как в виде статей, монографий, так и в виде обзора [1–4]. Методы исследования в данной проблематике также многообразны. Одним из универсальных методов исследования таких систем является конструктивное построение решений, использующее явный вид правой части, а также наличие различных симметрий, либо аналитических свойств в виде периодичности, бесконечной дифференцируемости, аналитичности. Далее, методами теории возмущений солитонные решения устанавливаются и для близких правых частей. Обзор по работам такого направления для бесконечномерных (однородных) систем с потенциалами Френкеля—Конторовой и Ферми—Паста—Улама приведен в работе [4]. Следует отметить, что такой подход не позволяет описать пространство всех солитонных решений, а также асимптотику их возможного роста.

В работе представлены некоторые фрагменты формализма теории солитонных решений для бесконечномерных систем, разрабатываемые авторами. В частности, к таким системам относятся конечно-разностные аналоги уравнения математической физики. В рамках такого формализма солитонные решения с заданной характеристикой находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с параметром в виде характеристики семейства солитонных решений. На этом пути удастся описать все пространство солитонных решений с характеристиками в выделенных диапазонах. Описывается возможный рост таких решений, где рост также определяется характеристикой солитонного решения.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00080).

В разрабатываемом формализме правая часть (оператор) бесконечномерного дифференциального уравнения и правая часть индуцированного функционально-дифференциального уравнения образуют дуальную пару “функция-оператор”. Подобный дуализм оказывается весьма полезным. В ряде случаев оказывается возможным использование свойств конечномерности фазового пространства решений индуцированного функционально-дифференциального уравнения. В иных случаях, для солитонных решений удастся воспользоваться спектральными свойствами правой части бесконечномерного дифференциального уравнения. Для дуальной пары “функция-оператор”, возникает естественный вопрос о существовании дуальной пары с таким же индуцированным функционально-дифференциальным уравнением, но более простым оператором. Такой вопрос получает свое положительное решение.

Подход в изучении солитонных решений с заданной характеристикой для бесконечномерной динамической системы, основанный на *соответствии* таких решений решениям индуцированного функционально-дифференциального уравнения использовался в ряде работ [5, 6, 8–11, 20–24].

За пределами обсуждения мы оставляем такую важную проблему в самом общем виде, как разрешимость функционально-дифференциальных уравнений. По этому вопросу можно обратиться к работам [11, 25–28] и ряду других работ.

Рассматривается пример в виде модели движения в манхэттенской решетке. В такой модели с большим числом узлов решетки полагаем, что она является полной по всем направлениям и однородной. Ранее, в работе [17] рассматривалась агрегированная модель манхэттенской решетки, в которой в каждом узле решетки имеется накопитель большой емкости для проведения маневра “разворот”, а общее число транспортного потока представлено без детализации по направлениям движения. В данной работе рассматривается агрегированная модель с ограниченной емкостью накопителей.

Установившиеся потоки в такой решетке описываются солитонными решениями для бесконечномерного обыкновенного дифференциального уравнения в форме конечно-разностного аналога параболического уравнения. Параметром такого семейства уравнений выступает характеристика солитонного решения. В рамках предложенного формализма удастся описать все пространство солитонных решений с характеристиками в выделенных диапазонах, а также получено описание всего семейства ограниченных солитонных решений.

1. СОЛИТОННЫЕ БУКЕТЫ И ДУАЛЬНЫЕ ПАРЫ “ФУНКЦИЯ-ОПЕРАТОР”

Для определения солитонного букета приведем хорошо известное определение условий Каратеодори.

Определение 1. Функция $f : \mathbb{B}_R \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $\mathbb{B}_R$ — интервал на числовой прямой, удовлетворяет условиям Каратеодори, если:

- отображение $f : \mathbb{B}_R \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ определено при всех $z_1, \dots, z_s \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $t \in \mathbb{B}_R$;
- для каждой точки $\bar{t} \in \mathbb{B}_R$ и каждого набора $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s \in \mathbb{R}^n$ существует конечный замкнутый интервал $\Delta \subseteq \mathbb{B}_R$, для которого $\bar{t} \in \Delta$, и $r > 0$ такие, что функция f при почти каждом $t \in \Delta$ непрерывна по совокупности переменных $z_1, \dots, z_s \in \mathbb{R}^n$, $z_j \in B_r(\bar{z}_j)$, $B_r(\bar{z}_j) = \{z_j : \|\bar{z}_j - z_j\|_{\mathbb{R}^n} \leq r\}$, $j = 1, \dots, s$;
- $f(t, z_1, \dots, z_s)$ измерима по переменной $t \in \Delta$ при всех $z_1, \dots, z_s \in \mathbb{R}^n$, $z_j \in B_r(\bar{z}_j)$, $j = 1, \dots, s$;
- существует интегрируемая функция $\zeta_{\Delta r}(t)$, $t \in \Delta$ такая что $\|f(t, z_1, \dots, z_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \zeta_{\Delta r}(t)$ при почти всех $t \in \Delta$ и всех $z_1, \dots, z_s \in \mathbb{R}^n$, $z_j \in B_r(\bar{z}_j)$, $j = 1, \dots, s$.

Из условий Каратеодори следует, что композиция измеримых функций $z_1(t), \dots, z_s(t)$, $t \in \Delta' \subseteq \Delta$ и функции $f(t, z_1, \dots, z_s)$ является измеримой функцией на Δ' , а также интегрируемой.

Определение 2. Совокупность конструкций $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma | Q, g)$ называется солитонным букетом и однозначно определяется набором $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, где:

- (1) Υ — конечно порожденная группа с образующими $\{\check{\gamma}_1, \dots, \check{\gamma}_d\}$ и выделенными элементами $\{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$, а также соответствующее пространство

$$\mathcal{K}_\Upsilon^n = \prod_{\gamma \in \Upsilon} \overline{R_\gamma}, \quad R_\gamma = \mathbb{R}^n,$$

бесконечных последовательностей $\varkappa = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \Upsilon}$, $x_\gamma \in \mathbb{R}^n$, $x_\gamma = (x_{\gamma 1}, \dots, x_{\gamma n})'$, со стандартной топологией полного прямого произведения;

(2) $\mathbb{T}_\Upsilon = \{T_{\hat{\gamma}} : \hat{\gamma} \in \Upsilon\}$ — конечно порожденная группа сдвигов, действующая в пространстве $\mathcal{K}_\Upsilon^n$ по следующему правилу:

$$T_{\hat{\gamma}}\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Upsilon} = \{x_{\gamma\hat{\gamma}}\}_{\gamma \in \Upsilon}, \quad \hat{\gamma} \in \Upsilon, \quad \{x_\gamma\}_{\gamma \in \Upsilon} \in \mathcal{K}_\Upsilon^n, \quad T_{\hat{\gamma}} \in \mathbb{T}_\Upsilon;$$

(3) $\eta : \Upsilon \rightarrow Q$ — эпиморфизм, где Q — группа диффеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию, т.е. $Q \subset \text{Diff}_+^{(1)}(\mathbb{R})$, и, соответственно, Q — конечно порожденная группа с образующими $\check{q}_j = \eta(\check{\gamma}_j)$, $j = 1, \dots, d$, и выделенными элементами $q_j = \eta(\gamma_j)$, $j = 1, \dots, s$;

(4) $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори;

(5) G_Γ — оператор, такой что

$$G_\Gamma : \mathbb{R} \times \mathcal{K}_\Upsilon^n \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n, \quad \Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g), \quad (1)$$

и что координата $(G_\Gamma(t, \varkappa))_e$ бесконечномерной вектор-функции $G_\Gamma(t, \varkappa)$, соответствующая единичному элементу e группы Υ , зависит только лишь от конечного числа координат и равна

$$(G_\Gamma(t, \varkappa))_e = g(t, x_{\gamma_1}, \dots, x_{\gamma_s}); \quad (2)$$

(6) при почти каждом $t \in \mathbb{R}$ выполняются “почти перестановочные” соотношения

$$T_{\hat{\gamma}} G_\Gamma(t, \varkappa) = \frac{d}{dt} \eta(\hat{\gamma})(t) \cdot G_\Gamma(\eta(\hat{\gamma})(t), T_{\hat{\gamma}} \varkappa), \quad \forall \varkappa \in \mathcal{K}_\Upsilon^n, \quad \forall \hat{\gamma} \in \Upsilon. \quad (3)$$

Для солитонного букета $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ в фазовом пространстве $\mathcal{K}_\Upsilon^n$ с фазовой переменной $\varkappa \in \mathcal{K}_\Upsilon^n$ определим систему

$$\dot{\varkappa}(t) = G_\Gamma(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$$\varkappa(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \varkappa(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \hat{\gamma} \in \Upsilon. \quad (5)$$

Производная в бесконечномерном ОДУ (4) понимается как *производная по Гато*. Вектор-функция $\varkappa : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n$, $\varkappa(\cdot) = \{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \Upsilon}$ называется *слабо дифференцируемой* в точке $t \in \mathbb{R}$, если для любого $\gamma \in \Upsilon$ функция $x_\gamma(\cdot)$ дифференцируема в точке $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что такая вектор-функция слабо дифференцируема в точке $t \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда она дифференцируема по Гато. Вектор-функция $\varkappa : [a, b] \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n$, $\varkappa(\cdot) = \{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \Upsilon}$ называется *слабо абсолютно непрерывной (слабо измеримой)*, если для любого $\gamma \in \Upsilon$ функция $x_\gamma(\cdot)$ абсолютно непрерывна (измерима) на интервале $[a, b]$. *Решением системы* (4), (5) называется всякая слабо абсолютно непрерывная вектор-функция $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_\Upsilon^n$, $\varkappa(\cdot) = \{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \Upsilon}$, почти всюду удовлетворяющая уравнению (4) и при любом $t \in \mathbb{R}$ ограничению (5). Нелокальные ограничения (5) означают, что для решений системы *сдвиг по пространству равен сдвигу по времени*. Решения такой системы называются *решениями типа бегущей волны (солитонные решения)*, а группа Q называется *характеристикой бегущей волны*.

В паре с системой (4), (5) рассматривается индуцированное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{x}(t) = g(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t))), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Каждый солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ определяет дуальную пару $(G_\Gamma|Q, g)$ функция-оператор. Для каждого солитонного букета (дуальной пары) существует канонический солитонный букет (каноническая дуальная пара), описание которой приводится ниже.

Лемма 1. *Каждый солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ определяет бесконечномерную систему (4), (5) и функционально-дифференциальное уравнение точечного типа (6). Каждое функционально-дифференциальное уравнение точечного типа (6) с функцией g , удовлетворяющей условиям Каратеодори, и конечно-порожденная группа $Q \subseteq \text{Diff}_+^{(1)}(\mathbb{R})$ с образующими $\check{q}_j \in Q$, $j = 1, \dots, d$, и выделенной системой элементов $q_j \in Q$, $j = 1, \dots, s$, индуцируют канонический солитонный букет*

$(Q, d, s, \mathcal{I}, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$ и каноническую дуальную пару $(G_\Gamma|Q, g)$, где $\mathcal{I}$ — тождественный автоморфизм группы Q .

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе утверждение.

Для этого нам следует для набора $(Q, d, s, \mathcal{I}, G_\Gamma|Q, g)$ задать оператор G_Γ в координатной форме

$$(G_\Gamma(t, \kappa))_q = \frac{d}{dt} \mathcal{I}(q)(t) \cdot g(\mathcal{I}(q)(t), x_{q_1q}, \dots, x_{q_sq}), \quad q \in Q. \quad (7)$$

Такой набор будет определять солитонный букет. Аналог системы (4), (5), определенной в фазовом пространстве $\mathcal{K}_Q^n$ с фазовой переменной $\kappa \in \mathcal{K}_Q^n$, $\kappa = \{x_q\}_{q \in Q}$, задающей решения типа бегущей волны, будет иметь вид

$$\dot{\kappa}(t) = G_\Gamma(t, \kappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

$$\kappa(\hat{q}(t)) = T_{\hat{q}} \kappa(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \hat{q} \in Q. \quad (9)$$

Аналог дифференциального уравнения (6), индуцированный солитонным букетом $(Q, d, s, \mathcal{I}, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, g)$, совпадает с этим же уравнением.

Для заданных Q, g канонический солитонный букет выделяется наиболее простой структурой набора $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$ и, соответственно, оператора G_Γ .

Для солитонного букета справедливо следующее важное утверждение о дуализме солитонных решений и решений индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа.

Теорема 1. Пусть $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ является солитонным букетом. Тогда каждому решению $x(t), t \in \mathbb{R}$, функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6) соответствует решение $\kappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Upsilon}, t \in \mathbb{R}$ бесконечномерной системы (4)–(5) (солитонное решение) и наоборот. Такие решения связаны соотношениями $x_\gamma(t) = x_e(\eta(\gamma)(t)), x_e(t) = x(t), \gamma \in \Upsilon, t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Если $\kappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Upsilon}, t \in \mathbb{R}$, решение бесконечномерной системы (4), (5), то функция $x_e(\cdot)$ будет удовлетворять функционально-дифференциальному уравнению точечного типа (6).

В обратную сторону. Пусть $x(\cdot)$ является решением функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6). Определим бесконечномерную вектор-функцию $\kappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Upsilon}, t \in \mathbb{R}$, где $x_\gamma(t) = x(\eta(\gamma)(t)), \gamma \in \Upsilon$. Тогда, в силу уравнения (6), будет выполняться система равенств

$$\begin{aligned} \dot{x}_\gamma(t) &= \frac{d}{dt} \eta(\gamma)(t) \cdot g(\eta(\gamma)(t), x(\eta(\gamma_1\gamma)(t)), \dots, x(\eta(\gamma_s\gamma)(t))), \\ \forall \gamma \in \Upsilon \quad &\text{для п.в. } t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (10)$$

и вектор функция $\kappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Upsilon}, t \in \mathbb{R}$, будет решением бесконечномерной системы (4), (5).

2. ВОПРОСЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРОСТРАНСТВА СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ И РЕШЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ является солитонным букетом.

Так как пространство $\mathcal{K}_\Upsilon^n$ только лишь метризуемо, то исследование пространства солитонных решений (пространства решений системы (4), (5)) весьма затруднительно. Более продвинутое изучение требует локализации пространства солитонных решений, основанной на тех или иных представлениях. Одним из подходов по локализации пространства солитонных решений может быть требование их гладкости, или аналитичности [4]. В рамках такого способа локализации пространства солитонных решений, как правило, в пространстве бесконечно дифференцируемых функций удастся установить существование солитонных решений, а в пространстве аналитических функций удастся установить единственность солитонных решений.

Для более продвинутого исследования пространства солитонных решений предлагается иной подход локализации пространства солитонных решений. Такой подход основан на учете асимптотики решений по пространству как траекторий в бесконечномерном пространстве последовательностей $\mathcal{K}_\Upsilon^n$. Для этого в пространстве $\mathcal{K}_\Upsilon^n$ выбирается семейство банаховых подпространств

$\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, $\mu \in (0, 1)$, $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, +\infty)$, непрерывно вложенных друг в друга так, что для любых $\mu' < \mu$, $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n \subset \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu' h}^n$. При этом пространства $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ должны быть таковыми, чтобы отображение $G_{\Gamma p\mu h} = G_{\Gamma}|_{\mathbb{R} \times \mathcal{K}_{\Upsilon p\mu h}^n}$ действовало в пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon p\mu h}^n$, т.е. отображение $G_{\Gamma p\mu h} : \mathbb{R} \times \mathcal{K}_{\Upsilon p\mu h}^n \rightarrow \mathcal{K}_{\Upsilon p\mu h}^n$ было корректно определено и удовлетворяло ряду хороших свойств, стандартных для дифференциальных уравнений с такой правой частью.

Определение 3. Вектор-функция $\varkappa : \mathbb{B}_R \rightarrow \mathbb{X}$, где $\mathbb{X}$ — банахово пространство и $\mathbb{B}_R$ — интервал на числовой прямой, называется сильно измеримой на $\mathbb{B}_R$, если она является на этом интервале пределом почти везде сходящейся последовательности счетнозначных вектор-функций $\varkappa_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Если функция $\|\varkappa(t)\|_{\mathbb{X}}$ к тому же интегрируема, то вектор-функцию $\varkappa(\cdot)$ называют интегрируемой по Бохнеру (сильно интегрируемой).

Определение 4. Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство и задано отображение (оператор) $\Phi : \mathbb{B}_R \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$, где $\mathbb{B}_R$ — интервал на числовой прямой. Тогда Φ удовлетворяет условиям Каратеодори в сильной форме, если:

- Φ определено при почти каждом $t \in \mathbb{B}_R$ и каждом $\varkappa \in \mathbb{X}$;
- для каждой точки $\bar{t} \in \mathbb{B}_R$ и каждом векторе $\bar{\varkappa} \in \mathbb{X}$ существуют конечный замкнутый интервал $\Delta \subseteq \mathbb{B}_R$, для которого $\bar{t} \in \Delta$, и $\sigma > 0$ такие, что вектор-функция $\Phi(t, \varkappa)$ при почти каждом $t \in \Delta$ непрерывна по переменной $\varkappa$ в шаре $B_{\sigma}(\bar{\varkappa}) = \{\varkappa : \|\bar{\varkappa} - \varkappa\|_{\mathbb{X}} \leq \sigma\}$;
- вектор-функция $\Phi(t, \varkappa)$ сильно измерима по переменной $t \in \Delta$ при всяком векторе $\varkappa$ из шара $B_{\sigma}(\bar{\varkappa}) = \{\varkappa : \|\bar{\varkappa} - \varkappa\|_{\mathbb{X}} \leq \sigma\}$;
- существует интегрируемая функция $\zeta_{\Delta\sigma}(t)$, $t \in \Delta$, такая, что при почти всех $t \in \Delta$ и всех $\varkappa$ из шара $B_{\sigma}(\bar{\varkappa}) = \{\varkappa : \|\bar{\varkappa} - \varkappa\|_{\mathbb{X}} \leq \sigma\}$ выполняется оценка $\|\Phi(t, \varkappa)\|_{\mathbb{X}} \leq \zeta_{\Delta\sigma}(t)$.

В случае конечномерности пространства $\mathbb{X}$ измеримость, дифференцируемость, абсолютная непрерывность в сильной и слабой форме и, соответственно, условия Каратеодори и условия Каратеодоре в сильной форме совпадают. Из условий Каратеодори в сильной форме следует, что композиция сильно измеримой вектор-функции $\varkappa(t)$, $t \in \Delta' \subseteq \Delta$, с образом в шаре $B_{\sigma}(\bar{\varkappa})$ и вектор-функции $\Phi(t, \varkappa)$ является сильно измеримой вектор-функцией, а также сильно интегрируемой (интегрируемой по Бохнеру) на интервале Δ' .

Определим семейство подпространств $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, $\mu \in (0, 1)$, $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, следующим образом:

$$\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n = \left\{ \varkappa : \varkappa \in \mathcal{K}_{\Upsilon}^n; \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_{\gamma}\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma)h} < +\infty \right\}, \quad (11)$$

$$\|\varkappa\|_{\Upsilon\infty\mu h} = \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_{\gamma}\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{l(\gamma)h},$$

где $l(\gamma)$ обозначает длину слова $\gamma \in \Upsilon$ в конечно-порожденной группе Υ ([19]). Параметр h в таких банаховых пространствах определяется по группе Q из рассматриваемого солитонного букета следующим образом:

$$h \geq \check{h}, \quad (12)$$

$$\check{h} = \max_{j \in \{1, \dots, d\}} h_{\check{q}_j}, \quad h_{\check{q}_j} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t - \check{q}_j(t)|, \quad j = 1, \dots, d,$$

где $\check{q}_j$, $j = 1, \dots, d$, образующие группы Q .

Сформулируем дополнительные условия на функцию g в виде условий роста, не выше линейного, а также условия для группы диффеоморфизмов Q из рассматриваемого солитонного букета:

- функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям Каратеодори;
- для любых $z_j, \bar{z}_j$, $j = 1, \dots, s$, и почти всех t имеет место рост не выше линейного

$$\|g(t, z_1, \dots, z_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_0(t) + M_1 \sum_{j=1}^s \|z_j\|_{\mathbb{R}^n}$$

и условие Липшица

$$\|g(t, z_1, \dots, z_s) - g(t, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s)\|_{\mathbb{R}^n} \leq M_2 \sum_{j=1}^s \|z_j - \bar{z}_j\|_{\mathbb{R}^n};$$

(в) существует $\mu^* \in (0, 1]$ такое, что

$$M_0(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R}) \quad \left(\mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) : \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}} < +\infty \right\} \right)$$

(г) задана группа диффеоморфизмов Q с системой образующих $\check{q}_1, \dots, \check{q}_d$ и выделенными элементами $q_1, \dots, q_s \in Q$, для любого $q \in Q$ величины

$$h_q = \sup_{t \in \mathbb{R}} |t - q(t)|, \quad h_{\dot{q}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \dot{q}(t)$$

конечны, семейство величин $h_{\dot{q}}, q \in Q$, равномерно ограничены и поэтому величины

$$\check{h} = \max_{j \in \{1, \dots, d\}} \sup_{t \in \mathbb{R}} |t - \check{q}_j(t)|, \quad h_{\dot{Q}} = \sup_{q \in Q} h_{\dot{q}}$$

конечны.

Все перечисленные условия для функции g , как правой части дифференциального уравнения, являются стандартными в теории дифференциальных уравнений.

Условие (г) мы всегда можем удовлетворить, сделав замену времени, но при этом может нарушиться условие Липшица (поточечно условие Липшица выполняется, но константы Липшица не являются равномерно ограниченными) и условие (в) (рост по переменной t может быть выше экспоненциального, что является нарушением стандартных условий на правую часть уравнения даже и для обыкновенного дифференциального уравнения).

Важное замечание состоит в том, что для конечно-разностных аналогов уравнений математической физики, в рамках дуальной пары “функция-оператор”, условия (а)–(г) на функцию g , как правую часть индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6), выполняются. При этом, группа Q изоморфна коммутативной группе $\mathbb{Z}^n$, где n — размерность фазового пространства функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6).

Правая часть $g(\cdot)$ функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6) является элементом банахового пространства функций $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ с липшицевой нормой

$$\begin{aligned} V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n) &= \{g(\cdot) : g(\cdot) \text{ удовлетворяет условиям (а)–(г)}\}, \\ \|g(\cdot)\|_{\text{Lip}} &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t, 0, \dots, 0)(\mu^*)^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} + \\ &+ \sup_{(t, z_1, \dots, z_s, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s) \in \mathbb{R}^{1+2ns}} \frac{\|g(t, z_1, \dots, z_s) - g(t, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s)\|_{\mathbb{R}^n}}{\sum_{j=1}^s \|z_j - \bar{z}_j\|_{\mathbb{R}^n}}, \end{aligned} \quad (13)$$

где параметр $\mu \in \mathbb{R}_+$ совпадает с соответствующей константой из условия (в). Очевидно, что для функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ наименьшее значение константы M_2 из условия Липшица (условие (2)) совпадает со значением второго слагаемого в определении нормы $\|g(\cdot)\|_{\text{Lip}}$.

Опишем свойства оператора $G_{\Gamma \infty \mu h} = G|_{\mathbb{R} \times \mathcal{K}_{\Gamma \infty \mu h}^n}$. Для Υ из рассматриваемого солитонного букета и любых $\mu \in (0, 1)$, $h \in [0, +\infty)$, $t \in \mathbb{R}$, положим

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h} &= \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h}, \quad \mathcal{M}_{0\Upsilon \infty \mu h}(t) = h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} M_0(\eta(\gamma)(t)) \mu^{l(\gamma)h}, \\ \mathcal{M}_{1\Upsilon \infty \mu h} &= h_{\dot{Q}} M_1 \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h}, \quad \mathcal{M}_{2\Upsilon \infty \mu h} = h_{\dot{Q}} M_2 \mathcal{P}_{\Upsilon \mu h}. \end{aligned} \quad (14)$$

Лемма 2. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условиям (а)–(в), а группа диффеоморфизмов Q — условиям (г). Тогда для любых $\mu \in (0, \mu^*)$, $h \in [\check{h}, +\infty)$, имеет место условие

$$\mathcal{M}_{0\Upsilon \infty \mu h}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R}). \quad (15)$$

Доказательство. Заметим, что для любых $t \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \Gamma$ имеет место неравенство

$$|\eta(\gamma)(t)| \leq |t| + l(\gamma)\check{h}. \quad (16)$$

Используя неравенство (16), для любого $t \in \mathbb{R}$ получим цепочку оценок

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{0\Upsilon\infty\mu h}(t) &= h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} M_0(\eta(\gamma)(t)) \mu^{l(\gamma)h} = \\ &= h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} M_0(\eta(\gamma)(t)) (\mu^*)^{|\eta(\gamma)(t)|} (\mu^*)^{-|\eta(\gamma)(t)|} \mu^{l(\gamma)h} \leq \\ &\leq h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} M_0(\eta(\gamma)(t)) (\mu^*)^{|\eta(\gamma)(t)|} (\mu^*)^{-|t|} \left(\frac{\mu}{\mu^*}\right)^{l(\gamma)h} \leq \\ &\leq h_{\dot{Q}} \|M_0(\cdot)\|_{\mu^*} (\mu^*)^{-|t|} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left(\frac{\mu}{\mu^*}\right)^{l(\gamma)h} \end{aligned} \quad (17)$$

откуда и следует, что $\mathcal{M}_{0\Upsilon\infty\mu h}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu^*}^1 L_\infty(\mathbb{R})$.

Лемма 3. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условиям (а)–(в), а группа диффеоморфизмов Q — условиям (г). Тогда для любых $\mu \in (0, \mu^*)$, $h \in [\check{h}, +\infty)$, отображение $G_{\Gamma\infty\mu h}$, являющееся ограничением отображения G_Γ на подпространство $\mathbb{R} \times \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, при почти каждом $t \in \mathbb{R}$ и каждом $\varkappa \in \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ действует из $\mathbb{R} \times \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ в $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, для него справедливы оценки

$$\|G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa)\|_{\Upsilon\infty\mu h} \leq \mathcal{M}_{0\Upsilon\infty\mu h}(t) + \mathcal{M}_{1\Upsilon\infty\mu h} \|\varkappa\|_{\Upsilon\infty\mu h}, \quad (18)$$

$$\|G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa) - G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \bar{\varkappa})\|_{\Upsilon\infty\mu h} \leq \mathcal{M}_{2\Upsilon\infty\mu h} \|\varkappa - \bar{\varkappa}\|_{\Upsilon\infty\mu h} \quad (19)$$

и вектор-функция $G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa)$ удовлетворяет условию Каратеодори в сильной форме.

Доказательство. Покажем, что отображение $G_{\Gamma\infty\mu h}$ действует из пространства $\mathbb{R} \times \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ в пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$. Для любых $\varkappa \in \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ и почти каждом $t \in \mathbb{R}$, используя первую оценку из условия (б), получим

$$\begin{aligned} \|G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa)\|_{\Upsilon\infty\mu h} &\leq \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left\| \frac{d}{dt} \eta(\gamma)(t) g(\eta(\gamma)(t), x_{\gamma_1\gamma}, \dots, x_{\gamma_s\gamma}) \right\|_{R^n} \mu^{l(\gamma)h} \leq \\ &\leq h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left[M_0(\eta(\gamma)(t)) + h_{\dot{Q}} M_1 \sum_{j=1}^s \|x_{\gamma_j\gamma}\|_{R^n} \right] \mu^{l(\gamma)h} \leq \\ &\leq h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} M_0(\eta(\gamma)(t)) \mu^{l(\gamma)h} + h_{\dot{Q}} M_1 \sum_{j=1}^s \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_{\gamma_j\gamma}\|_{R^n} \mu^{l(\gamma)h} = \\ &= \mathcal{M}_{0\Upsilon\infty\mu h}(t) + h_{\dot{Q}} M_1 \sum_{j=1}^s \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_{\gamma_j\gamma}\|_{R^n} \mu^{l(\gamma_j\gamma)h} \mu^{-l(\gamma_j\gamma)h} \mu^{l(\gamma)h} \leq \\ &\leq \mathcal{M}_{0\Upsilon\infty\mu h}(t) + h_{\dot{Q}} M_1 \|\varkappa\|_{\Upsilon\infty\mu h} \sum_{j=1}^s \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j\gamma)h} \mu^{l(\gamma)h}. \end{aligned} \quad (20)$$

Проведем оценку выражения, стоящего под знаком суммы в (20)

$$\sum_{j=1}^s \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j\gamma)h} \mu^{l(\gamma)h} \leq \sum_{j=1}^s \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{-(l(\gamma_j)+l(\gamma))h} \mu^{l(\gamma)h} = \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h}. \quad (21)$$

Если для последней суммы в неравенстве (20) использовать оценки (21) и обозначения (14), то получим оценку (18). В частности, отсюда будет следовать, что отображение $G_{\Gamma\infty\mu h}$ действует из пространства $\mathbb{R} \times \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ в пространство $\mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$.

Используя условие Липшица для функции $g(\cdot)$, для любых $\varkappa, \bar{\varkappa} \in K_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ и почти каждом $t \in \mathbb{R}$ получим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
 & \|G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa) - G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \bar{\varkappa})\|_{\Upsilon\infty\mu h} = \\
 & = \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left\| \frac{d}{dt} \eta(\gamma)(t) [g(\eta(\gamma)(t), x_{\gamma_1\gamma}, \dots, x_{\gamma_s\gamma}) - g(\eta(\gamma)(t), \bar{x}_{\gamma_1\gamma}, \dots, \bar{x}_{\gamma_s\gamma})] \right\|_{R^n} \mu^{l(\gamma)} \leq \\
 & \leq h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} M_2 \sum_{j=1}^s \|x_{\gamma_j\gamma} - \bar{x}_{\gamma_j\gamma}\|_{R^n} \mu^{l(\gamma)h} \leq h_{\dot{Q}} M_2 \sum_{j=1}^s \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_{\gamma_j\gamma} - \bar{x}_{\gamma_j\gamma}\|_{R^n} \mu^{l(\gamma)h} = \\
 & = h_{\dot{Q}} M_2 \sum_{j=1}^s \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x_{\gamma_j\gamma} - \bar{x}_{\gamma_j\gamma}\|_{R^n} \mu^{l(\gamma_j\gamma)h} \mu^{-l(\gamma_j\gamma)h} \mu^{l(\gamma)h} \leq \\
 & \leq h_{\dot{Q}} M_2 \|\varkappa - \bar{\varkappa}\|_{\Upsilon\infty\mu h} \sum_{j=1}^s \sup_{\gamma \in \Upsilon} \mu^{-l(\gamma_j\gamma)h} \mu^{l(\gamma)h}. \tag{22}
 \end{aligned}$$

В силу оценки (21) для суммы из неравенства (22) и обозначений (14), непосредственно будет следовать оценка (19).

Остается показать, что отображение $G_{\Gamma\infty\mu h}$ удовлетворяет условию Каратеодори в сильной форме. Фиксируем произвольную точку $\bar{t} \in \mathbb{R}$ и вектор $\bar{\varkappa} \in K_{\Upsilon\infty\mu h}^n$. Выберем замкнутый интервал Δ , $\bar{t} \in \Delta$ и $\sigma > 0$. Тогда для почти каждого $t \in \Delta$ и каждого $\varkappa$ из шара $B_{\Upsilon\sigma}(\bar{\varkappa}) = \{\varkappa : \|\bar{\varkappa} - \varkappa\|_{\Upsilon\infty\mu h} \leq \sigma\}$ в силу неравенства (18) выполняется оценка $\|G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa)\|_{\Upsilon\infty\mu h} \leq \zeta_{\Delta\sigma}(t)$, где $\zeta_{\Delta\sigma}(t) = \mathcal{M}_{0\Upsilon\infty\mu h}(t) + \mathcal{M}_{1\Upsilon\infty\mu h}[\|\bar{\varkappa}\|_{\Upsilon\infty\mu h} + \sigma]$. Так как функция $\zeta_{\Delta\sigma}(t)$ непрерывная по $t \in \Delta$, то она является интегрируемой на интервале Δ .

Непрерывность отображения $G_{\Gamma\infty\mu h}$ при почти каждом $t \in \Delta$ по переменной $\varkappa$ из шара $B_{\Upsilon\sigma}(\bar{\varkappa}) = \{\varkappa : \|\bar{\varkappa} - \varkappa\|_{\Upsilon\infty\mu h} \leq \sigma\}$ следует из оценки (19).

Остается показать сильную измеримость по переменной $t \in \Delta$ вектор-функции $G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa)$ при каждом фиксированном векторе $\varkappa$ из шара $B_{\Upsilon\sigma}(\bar{\varkappa})$. Пусть Υ^r , $r = 0, 1, \dots$, множество слов в группе Υ длины не более чем r [19]. Покажем, что при каждом фиксированном векторе $\varkappa$ из шара $B_{\Upsilon\sigma}(\bar{\varkappa})$ и почти каждом $t \in \Delta$ имеет место сходимость

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \|P_{\Upsilon^r} G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa) - G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa)\|_{\Upsilon\infty\mu h} = 0, \tag{23}$$

равномерная по переменной $t \in \Delta$. Следуя преобразованиям из (17), (20), (21), получим

$$\begin{aligned}
 & \|P_{\Upsilon^r} G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa) - G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa)\|_{\Gamma\infty\mu h} = \\
 & = \sup_{\gamma \in \Upsilon \setminus \Upsilon^r} \left\| \frac{d}{dt} \eta(\gamma)(t) g(\eta(\gamma)(t), x_{\gamma_1\gamma}, \dots, x_{\gamma_s\gamma}) \right\|_{R^n} \mu^{l(\gamma)h} \leq \\
 & \leq h_{\dot{Q}} \sup_{\gamma \in \Upsilon \setminus \Upsilon^r} [M_0(\eta(\gamma)(t)) + M_1 \sum_{j=1}^s \|x_{\gamma_j\gamma}\|_{R^n}] \mu^{l(\gamma)h} \leq \\
 & \leq h_{\dot{Q}} \left[\sup_{\gamma \in \Upsilon \setminus \Upsilon^r} M_0(\eta(\gamma)(t)) \mu^{l(\gamma)h} + \sup_{\gamma \in \Upsilon \setminus \Upsilon^r} M_1 \sum_{j=1}^s \|x_{\gamma_j\gamma}\|_{R^n} \mu^{l(\gamma)h} \right] \leq \\
 & \leq h_{\dot{Q}} \left[\sup_{\gamma \in \Upsilon \setminus \Upsilon^r} M_0(\eta(\gamma)(t)) \mu^{l(\gamma)h} + M_1 \sum_{j=1}^s \sup_{\gamma \in \Upsilon \setminus \Upsilon^r} \|x_{\gamma_j\gamma}\|_{R^n} \mu^{l(\gamma)h} \right] \leq \\
 & \leq h_{\dot{Q}} \|M_0(\cdot)\|_{\mu^*} (\mu^*)^{-|t|} \sup_{\gamma \in \Upsilon \setminus \Upsilon^r} \left(\frac{\mu}{\mu^*} \right)^{l(\gamma)h} + \\
 & + h_{\dot{Q}} M_1 \sum_{j=1}^s \sup_{\gamma \in \Upsilon \setminus \Upsilon^r} \|x_{\gamma_j\gamma}\|_{R^n} \mu^{l(\gamma_j\gamma)h} \sup_{\gamma \in \Upsilon \setminus \Upsilon^r} \mu^{-l(\gamma_j\gamma)h} \mu^{l(\gamma)h} \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq h_{\dot{Q}} \|M_0(\cdot)\|_{\mu^*} (\mu^*)^{-|t|} \sup_{\gamma \in \Upsilon \setminus \Upsilon^r} \left(\frac{\mu}{\mu^*} \right)^{l(\gamma)h} + \\ &+ h_{\dot{Q}} M_1 \|P_{\Upsilon \setminus \Upsilon^{r-i} \mathcal{K}}\|_{\Gamma_{\infty \mu h}} \sum_{j=1}^s \mu^{-l(\gamma_j)h}. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда для $\varkappa = 0$ получим

$$\|P_{\Upsilon^r} G_{\Gamma_{\infty \mu h}}(t, 0) - G_{\Gamma_{\infty \mu h}}(t, 0)\|_{\Gamma_{\infty \mu h}} \leq h_{\dot{Q}} \|M_0(\cdot)\|_{\mu^*} (\mu^*)^{-|t|} \sup_{\gamma \in \Upsilon \setminus \Upsilon^r} \left(\frac{\mu}{\mu^*} \right)^{l(\gamma)h}. \quad (25)$$

При $r \rightarrow +\infty$ последний сомножитель в правой части неравенства (25) стремится к нулю. Поэтому, вся правая часть неравенства (25) равномерно по $t \in \Delta$ стремится к нулю. Вектор-функция $P_{\Upsilon^r} G_{\Gamma_{\infty \mu h}}(t, 0)$ имеет конечное число координат, не равных нулю. Поэтому она будет не только слабо измеримой, но также и сильно измеримой. А равномерный предел сильно измеримых вектор-функций также является сильно измеримой. Следовательно, вектор-функция $G_{\Gamma_{\infty \mu h}}(t, 0)$ также будет сильно измеримой. Используя сдвиг по переменной $\varkappa$ в банаховом пространстве $\mathcal{K}_{\Gamma_{\infty \mu h}}^n$, получим сильную измеримость вектор функции $G_{\Gamma_{\infty \mu h}}(t, \varkappa)$ при произвольном $\varkappa$.

В рамках дуализма между солитонными решениями и решениями индуцированного функционально-дифференциального точечного типа (6) мы будем изучать решения последних в параметрическом семействе банаховых подпространств (пространства функций с весами) с параметром $\mu \in (0, 1)$

$$\mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\} \quad (26)$$

и нормой

$$\|x(\cdot)\|_{\mu}^{(0)} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}. \quad (27)$$

3. УТОЧНЕНИЕ СООТВЕТСТВИЙ В РАМКАХ ИЗУЧАЕМОГО ДУАЛИЗМА

Для заданных $\mu \in (0, 1)$, $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, наряду с системой (4), (5) в исходном фазовом пространстве $\mathcal{K}_{\Upsilon}^n$, в подпространстве $\mathcal{K}_{\Gamma_{\infty \mu h}}^n$ рассматривается система

$$\frac{d\varkappa(t)}{dt} = G_{\Gamma_{\infty \mu h}}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

$$\varkappa(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \varkappa(t) \quad \forall \hat{\gamma}, t, \quad \hat{\gamma} \in \Upsilon, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

в виде дифференциального уравнения (28) с нелокальными ограничениями (29). Здесь дифференциальное уравнение (28) понимается в сильной форме (производная по Фреше), а не в слабой форме (производная по Гато) как в (4). По лемме 3 оператор $G_{\Gamma_{\infty \mu h}}$ удовлетворяет условиям Каратеодоре в сильном смысле и условию Липшица по переменной $\varkappa$. Для любой сильно измеримой (тем более непрерывной) вектор-функции $\varkappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}_{\Gamma_{\infty \mu h}}^n$ суперпозиция $G_{\Gamma_{\infty \mu h}}(t, \varkappa(t))$, $t \in \mathbb{R}$, на каждом конечном интервале является сильно измеримой и интегрируемой по Бохнеру вектор-функцией.

Решением такого дифференциального уравнения с фазовым пространством $\mathcal{K}_{\Gamma_{\infty \mu h}}^n$ называется всякая сильно абсолютно непрерывная вектор-функция $\varkappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (непрерывная вектор-функция, почти всюду дифференцируемая по Фреше, производная $\dot{\varkappa}(\cdot)$ интегрируема по Бохнеру и вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ однозначно восстанавливается по производной $\dot{\varkappa}(\cdot)$) почти всюду, удовлетворяющая этому уравнению. Для такого уравнения (28) справедлива теорема существования и единственности задачи Коши. Решения бесконечномерного дифференциального уравнения (28) имеет асимптотику по пространству, которая определяется параметром μ . Важной задачей является определение асимптотики такого решения системы (28), (29) (солитонное решение) и по времени.

Теорема 1 устанавливает соответствие между всем пространством солитонных решений (решений системы (4), (5)) и решениями функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6).

Следующая задача состоит в том, чтобы уточнить это соответствие для подсемейства солитонных решений, как решений системы (28), (29) (солитонные решения), с решениями функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6) в терминах асимптотики по пространству, а также по времени для первых, и асимптотики по времени для вторых.

Лемма 4. Пусть функция $g(\cdot)$ удовлетворяет условиям (а)–(в), а группа диффеоморфизмов Q — условиям (г). Если функция $x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R)$, $\mu \in (0, \mu^*)$, является решением функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6), то $\dot{x}(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n L_\infty(R)$.

Доказательство. Пусть $x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R)$, $\mu \in (0, \mu^*)$ и $x(\cdot)$ является решением исходного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6). Используя оценку

$$|q(t)| \leq |t| + l(q)\check{h} \quad \forall q \in Q, \quad (30)$$

для почти всякого $t \in \mathbb{R}$ получим

$$\begin{aligned} \|\dot{x}(t)\mu^{|t|}\|_{R^n} &= \|g(t, x(q_s(t)), \dots, x(q_s(t)))\mu^{|t|}\|_{R^n} \leq M_0(t)\mu^{|t|} + \\ &+ M_1 \sum_{j=1}^s \|x(q_j(t))\|_{R^n} \mu^{|t|} = M_0(t)\mu^{|t|} + M_2 \sum_{j=1}^s \|x(q_j(t))\|_{R^n} \mu^{|q_j(t)|} \mu^{-|q_j(t)|} \mu^{|t|} \leq \\ &\leq M_0(t)\mu^{|t|} + M_1 \sum_{j=1}^s \sup_{t' \in R} [\|x(q_j(t'))\|_{R^n} \mu^{|q_j(t')|}] \mu^{-|q_j(t)|} \mu^{|t|} = \\ &= M_0(t)\mu^{|t|} + M_1 \|x(\cdot)\|_\mu \sum_{j=1}^s \mu^{-|q_j(t)|} \mu^{|t|} \leq M_0(t)\mu^{|t|} + \\ &+ M_1 \|x(\cdot)\|_\mu \sum_{j=1}^s \mu^{-[|t|+l(q_j)\check{h}]} \mu^{|t|} = M_0(t)\mu^{|t|} + M_1 \|x(\cdot)\|_\mu \sum_{j=1}^s \mu^{-l(q_j)\check{h}}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое является константой, а равномерная ограниченность первого слагаемого по $t \in \mathbb{R}$ следует из условия $\mu \in (0, \mu^*)$ и ограничений на рост функции $M_0(\cdot)$. Тогда для почти всякого $t \in \mathbb{R}$ величина $\|x(t)\mu^{|t|}\|_{R^n}$ также равномерно ограничена, что и доказывает лемму.

В рамках отмеченного дуализма сформулируем теорему о взаимосоответствии между решениями системы (28), (29) (солитонными решениями) и решениями функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6).

Теорема 2. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям (а)–(в), а группа диффеоморфизмов Q — условиям (г). Если функция $x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R)$, $\bar{\mu} \in (0, \mu^*)$, является решением функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6), тогда для произвольных заданных $\mu \in (0, \bar{\mu}]$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ ей соответствует вектор-функция $\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Upsilon}$, $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$, такая, что $x_\gamma(t) = x_e(\eta(\gamma)(t))$, $x_e(t) = x(t)$, $\gamma \in \Upsilon$, $t \in \mathbb{R}$, и вектор-функция $\varkappa(\cdot)$:

- а) является сильно абсолютно непрерывной;
- б) является решением бесконечномерного обыкновенного дифференциального уравнения (28) и удовлетворяет ограничениям (29),
- в) для функции $\rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon \infty \mu h}$, $t \in \mathbb{R}$, справедливо вложение $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R)$.

Если для произвольных заданных $\mu \in (0, \mu^*)$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ вектор-функция $\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Upsilon}$, $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon \infty \mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$, сильно абсолютно непрерывная, является решением бесконечномерной системы (28)–(29) (солитонное решение) и для функции $\rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon \infty \mu h}$, $t \in \mathbb{R}$, справедливо вложение $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R)$, то ей соответствует решение $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, функционально-дифференциального уравнения точечного типа (6). Такие решения связаны соотношениями $x_\gamma(t) = x_e(\eta(\gamma)(t))$, $x_e(t) = x(t)$, $\gamma \in \Upsilon$, $t \in \mathbb{R}$, и выполняется вложение $x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R)$.

Доказательство. Проведем доказательство первой части теоремы. Пусть $x(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(R)$, $\bar{\mu} \in (0, \mu^*)$ и $x(\cdot)$ является решением функционально-дифференциального уравнения (6). Тогда по лемме 4 имеет место условие $\dot{x}(\cdot) \in \mathcal{L}_\mu^n L_\infty(R)$. Определим вектор-функцию $\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Upsilon}$,

$x_\gamma(t) = x_e(\eta(\gamma)(t))$, $x_e(t) = x(t)$, $\gamma \in \Upsilon$, $t \in \mathbb{R}$. Покажем, что для произвольного $\mu \leq \bar{\mu}$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет место вложение $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$.

Для произвольного $\mu \leq \bar{\mu}$ при каждом $t \in \mathbb{R}$, используя оценку $|\eta(\gamma)(t)| \leq |t| + l(\gamma)\check{h}$, $\forall \gamma \in \Upsilon$, получим

$$\begin{aligned} \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon\infty\mu h} &= \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} \mu^{l(\gamma)h} = \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} \mu^{\lfloor |t| + l(\gamma)h \rfloor} \mu^{-|t|} = \\ &= \mu^{-|t|} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} \bar{\mu}^{\lfloor |t| + l(\gamma)h \rfloor} \left(\frac{\mu}{\bar{\mu}}\right)^{\lfloor |t| + l(\gamma)h \rfloor} \leq \\ &\leq \mu^{-|t|} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \|x(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} \bar{\mu}^{\eta(\gamma)(t)} \left(\frac{\mu}{\bar{\mu}}\right)^{\lfloor |t| + l(\gamma)h \rfloor} \leq \\ &\leq \mu^{-|t|} \|x(\cdot)\|_{\bar{\mu}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left(\frac{\mu}{\bar{\mu}}\right)^{\lfloor |t| + l(\gamma)h \rfloor} = \bar{\mu}^{-|t|} \|x(\cdot)\|_{\bar{\mu}} \sup_{\gamma \in \Upsilon} \left(\frac{\mu}{\bar{\mu}}\right)^{l(\gamma)h} = \bar{\mu}^{-|t|} \|x(\cdot)\|_{\bar{\mu}}, \end{aligned} \quad (31)$$

что и доказывает справедливость вложения $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$ при каждом $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что таким образом определенная вектор-функция $\varkappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет нелокальным ограничениям (29).

По лемме 4 имеют место условия $x(\cdot)$, $\dot{x}(\cdot) \in \mathcal{L}_{\bar{\mu}}^n C^{(0)}(R)$. Тогда для семейств функций $\bar{\mu}^{l(\gamma)h} x_\gamma(\cdot)$, $\bar{\mu}^{l(\gamma)h} \frac{d}{dt} x_\gamma(t)$, $\gamma \in \Upsilon$, при каждом $t \in \mathbb{R}$ и, соответственно, при почти каждом $t \in \mathbb{R}$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\bar{\mu}^{l(\gamma)h} x_\gamma(t)\|_{R^n} &= \|\bar{\mu}^{l(\gamma)h} x(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} = \bar{\mu}^{-|t|} \|\bar{\mu}^{\lfloor |t| + l(\gamma)h \rfloor} x(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} \leq \\ &\leq \bar{\mu}^{-|t|} \|\bar{\mu}^{\eta(\gamma)(t)} x(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} = \bar{\mu}^{-|t|} \|x(\cdot)\|_{\bar{\mu}}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \|\bar{\mu}^{l(\gamma)h} \frac{d}{dt} x_\gamma(t)\|_{R^n} &= \|\bar{\mu}^{l(\gamma)h} \frac{d}{dt} x(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} = \|\bar{\mu}^{l(\gamma)h} \dot{x}(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} \frac{d}{dt} \eta(\gamma)(t) \leq \\ &\leq h_{\dot{Q}} \|\bar{\mu}^{l(\gamma)h} \dot{x}(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} = h_{\dot{Q}} \bar{\mu}^{-|t|} \|\bar{\mu}^{\lfloor |t| + l(\gamma)h \rfloor} \dot{x}(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} \leq \\ &\leq h_{\dot{Q}} \bar{\mu}^{-|t|} \|\bar{\mu}^{\eta(\gamma)(t)} \dot{x}(\eta(\gamma)(t))\|_{R^n} \leq h_{\dot{Q}} \bar{\mu}^{-|t|} \|\dot{x}(\cdot)\|_{\bar{\mu}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Следовательно, семейства функций $\bar{\mu}^{l(\gamma)h} x_\gamma(\cdot)$, $\bar{\mu}^{l(\gamma)h} \frac{d}{dt} x_\gamma(t)$, $\gamma \in \Upsilon$, на любом конечном интервале $[a, b]$ равномерно ограничены. В таком случае, семейство функций $\bar{\mu}^{l(\gamma)h} x_\gamma(\cdot)$, $\gamma \in \Upsilon$, будет также и равномерно непрерывным. Тогда вектор-функция $\varkappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$, будет сильно абсолютно непрерывной. Так как $\bar{\mu} \in (0, \mu^*)$, то из условия $\mu \leq \bar{\mu}$ следует условие $\mu < \mu^*$. Тогда из леммы 3 следует, что вектор-функция $G_{\Upsilon\infty\mu h}(t, \varkappa)$ удовлетворяет условию Каратеодори в сильной форме, а также вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ является решением обыкновенного дифференциального уравнения (28). Вложение $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\bar{\mu}}^n C^{(0)}(R)$ непосредственно следует из оценки (31). Первая часть теоремы доказана.

Доказательство второй части теоремы. В силу леммы 3 для произвольных $\mu \in (0, \mu^*)$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ вектор-функция $G_{\Upsilon\infty\mu h}(t, \varkappa)$ корректно определена и удовлетворяет условию Каратеодори в сильной форме. Для произвольных $\mu \in (0, \mu^*)$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ вектор-функция $\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \Upsilon}$, $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Upsilon\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$, сильно абсолютно непрерывна и является решением бесконечномерной системы (28), (29) (решение типа бегущей волны). Из условий (29) следуют соотношения $x_\gamma(t) = x_e(\eta(\gamma)(t))$, $\gamma \in \Upsilon$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда функция $x(t) = x_e(t)$, $t \in \mathbb{R}$, будет абсолютно непрерывной, а из вида координаты с индексом e в бесконечномерном дифференциальном уравнении (28) следует, что она удовлетворяет функционально-дифференциальному уравнению (6). Остается установить асимптотику возможного роста решения $x(\cdot)$. Для любых $t \in \mathbb{R}$ справедлива оценка $\|x(t)\|_{R^n} \leq \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon\infty\mu h}$. Так как для функции $\rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon\infty\mu h}$, $t \in \mathbb{R}$, справедливо вложение $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\bar{\mu}}^n C^{(0)}(R)$, то отсюда будет следовать вложение $x(\cdot) \in \mathcal{L}_{\bar{\mu}}^n C^{(0)}(R)$. Теорема доказана.

В приведенной теореме вложение $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\bar{\mu}}^n C^{(0)}(R)$ для функции $\rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Upsilon\infty\mu h}$, $t \in \mathbb{R}$, является важным. Поэтому опишем асимптотику по времени решений бесконечномерного дифференциального уравнения (28).

Предложение 1. Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция g удовлетворяет условиям (а)–(в), а группа диффеоморфизмов Q — условиям (г). Тогда для

произвольных $\mu \in (0, \mu^*)$, $h \in [\tilde{h}, +\infty)$ в задаче Коши

$$\frac{d\kappa(t)}{dt} = G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \kappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

$$\kappa(\bar{t}) = \bar{\kappa}, \quad \bar{\kappa} \in \mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad (35)$$

при любых заданных начальном условии $\bar{\kappa} \in \mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$ и начальном времени $\bar{t} \in \mathbb{R}$ существует, причем единственное, решение $\kappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Для такого решения вектор-функция $\kappa(\cdot)$ является сильно абсолютно непрерывной, для функции $\rho(t) = \|\kappa(t)\|_{\Gamma\infty\mu h}$, $t \in \mathbb{R}$, справедливо вложение

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\hat{\mu}}^n C^{(0)}(R), \quad \hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-\mathcal{M}_{2\Gamma\infty\mu h}}\} \quad (36)$$

и функция $\rho(t)$, $t \in \mathbb{R}$, как элемент пространства $\mathcal{L}_{\hat{\mu}}^n C^{(0)}(R)$, непрерывно зависит от начального данного $\bar{\kappa}$.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что вектор-функция $G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \kappa)$ корректно определена и удовлетворяет условию Каратеодори в сильной форме. Так как вектор-функция $G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \kappa)$ по переменной κ удовлетворяет условию Липшица с константой $\mathcal{M}_{2\Gamma\infty\mu h}$, то для задачи Коши (34), (35) существует, причем единственное, решение $\kappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такое, что вектор-функция $\kappa(\cdot)$ является сильно абсолютно непрерывной. Остается установить асимптотику роста такого решения. Решение $\kappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$, имеет представление

$$\kappa(t) = \bar{\kappa} + \int_{\bar{t}}^t G_{\Gamma\infty\mu h}(\tau, \kappa(\tau)) d\tau$$

откуда и следует оценка

$$\frac{d}{dt} \|\kappa(t)\|_{\Gamma\infty\mu h} \leq \|G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \kappa(t))\| \leq \mathcal{M}_{0\Gamma\infty\mu h}(t) + \mathcal{M}_{2\Gamma\infty\mu h} \|\kappa(t)\|_{\Gamma\infty\mu h},$$

а из последнего неравенства и вложения (15) из леммы 2 для функции $\mathcal{M}_{0\Gamma\infty\mu h}(\cdot)$ будет следовать вложение $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\hat{\mu}}^n C^{(0)}(R)$, $\hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-\mathcal{M}_{2\Gamma\infty\mu h}}\}$.

Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения (34) от начального данного $\bar{\kappa}$ является хорошо известным фактом теории дифференциальных уравнений.

4. ОСНОВНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В силу теоремы 2, изучение пространства солитонных решений эквивалентно изучению пространства решений системы (28), (29). Вопрос разрешимости такой системы переформулируем в форме разрешимости краевой задачи

$$\frac{d\kappa(t)}{dt} = G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \kappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (37)$$

$$\kappa(\eta(\hat{\gamma})(\bar{t})) = T_{\hat{\gamma}}\kappa(\bar{t}) \quad \forall \hat{\gamma} \in \Upsilon, \quad (38)$$

при заданном начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$.

Теорема 3. Пусть $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\Gamma}|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ является солитонным букетом, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям (а)–(в), а группа диффеоморфизмов Q — условиям (г). Тогда при заданном начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$ любое решение задачи (28), (29) (солитонное решение) является решением краевой задачи (37), (38) и наоборот.

Доказательство. В одну сторону доказательство очевидно и для этого не нужны никакие дополнительные условия. Пусть функция $\kappa(\cdot)$ является решением краевой задачи (37), (38). Уравнение (37) перепишем в эквивалентной интегральной форме: для любых $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\kappa(t) = \kappa(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t G_{\Gamma\infty\mu h}(\tau, \kappa(\tau)) d\tau, \quad (39)$$

где интеграл понимается в смысле интеграла Бохнера. Из равенства (39) следует справедливость следующего равенства: для заданного фиксированного $\tilde{\gamma} \in \Upsilon$ и произвольного $t \in \mathbb{R}$

$$T_{\tilde{\gamma}}\kappa(t) = T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t T_{\tilde{\gamma}}G_{\Gamma\infty\mu h}(\tau, \kappa(\tau)) d\tau.$$

В силу коммутационного соотношения (3) получим равенство

$$T_{\tilde{\gamma}}\kappa(t) = T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t \frac{d}{dt} \eta(\tilde{\gamma})(t) G_{\Gamma\infty\mu h}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (40)$$

справедливое при любых фиксированных $\tilde{\gamma} \in \Upsilon$. Используя очевидное тождество $\eta(\tilde{\gamma}^{-1})(\eta(\tilde{\gamma})(t)) \equiv t$ и, сделав замену времени под знаком интеграла, придем к уравнению

$$T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\eta(\tilde{\gamma}^{-1})(\eta(\tilde{\gamma})(t))) = T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\bar{t}) + \int_{\eta(\tilde{\gamma})(\bar{t})}^{\eta(\tilde{\gamma})(t)} G_{\Gamma\infty\mu h}(\tau, T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\eta(\tilde{\gamma}^{-1})(\tau))) d\tau,$$

также справедливое при всех $t \in \mathbb{R}$. Полученное уравнение эквивалентно тому, что вектор-функция $u(t) = T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\eta(\tilde{\gamma}^{-1})(t))$ является решением задачи Коши для уравнения (37) с начальным значением вида $u(\eta(\tilde{\gamma})(\bar{t})) = T_{\tilde{\gamma}}\tilde{\kappa}$, где $\tilde{\kappa} = \kappa(\bar{t})$, и начальным моментом $\eta(\tilde{\gamma})(\bar{t})$.

С другой стороны, используя ограничение (38) для рассматриваемого решения $\kappa(\cdot)$, соотношение (40) преобразовывается к виду

$$\kappa(\eta(\tilde{\gamma})(t)) = T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t \frac{d}{dt} \eta(\tilde{\gamma})(t) G_{\Gamma\infty\mu h}(\eta(\tilde{\gamma})(\tau), \kappa(\eta(\tilde{\gamma})(\tau))) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Проведя замену времени окончательно получим

$$\kappa(\eta(\tilde{\gamma})(t)) = T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\bar{t}) + \int_{\eta(\tilde{\gamma})(\bar{t})}^{\eta(\tilde{\gamma})(t)} G_{\Gamma\infty\mu h}(\tau, \kappa(\tau)) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (41)$$

Полученное уравнение эквивалентно тому, что вектор-функция $\kappa(t)$ является решением задачи Коши для уравнения (37) с начальным значением вида $\kappa(\eta(\tilde{\gamma})(\bar{t})) = T_{\tilde{\gamma}}\tilde{\kappa}$, где $\tilde{\kappa} = \kappa(\bar{t})$, и начальным моментом $\eta(\tilde{\gamma})(\bar{t})$. В силу единственности решения задачи Коши для уравнения (37) имеет место тождество $u(t) \equiv \kappa(t)$.

Учитывая вид функции $u(t) = T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\eta(\tilde{\gamma}^{-1})(t))$ получим, что для любых $t \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\eta(\tilde{\gamma}^{-1})(t)) = \kappa(t).$$

Сделав подстановку $t = \eta(\tilde{\gamma})(\tau)$, получим, что для любых $\tau \in \mathbb{R}$ будут выполняться равенства

$$T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\tau) = \kappa(\eta(\tilde{\gamma})(\tau)).$$

Так как это справедливо для каждого заданного $\tilde{\gamma} \in \Upsilon$, то они совпадают с нелокальными ограничениями (29), что и доказывает теорему.

Сформулируем важное следствие.

Следствие 1. Пусть $(\Upsilon, d, s, \eta, G_{\Gamma}|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ является солитонным букетом, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям (а)–(в), а группа диффеоморфизмов Q — условиям (г). Фиксируем элемент $\tilde{\gamma} \in \Upsilon$ и начальный момент $\bar{t} \in \mathbb{R}$. Тогда при любых $\mu \in (0, \mu^*)$, $h \in [\tilde{h}, +\infty)$ всякое решение системы

$$\dot{\kappa}(t) = G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \kappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (42)$$

$$\kappa(\eta(\tilde{\gamma})(t)) = T_{\tilde{\gamma}}\kappa(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (43)$$

является решением краевой задачи

$$\dot{\kappa}(t) = G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \kappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R},$$

$$\kappa(\eta(\tilde{\gamma})(\bar{t})) = T_{\tilde{\gamma}}\kappa(\bar{t})$$

и наоборот.

Доказательство. Доказательство леммы полностью проведено в ходе доказательства теоремы 3.

На основе теоремы 3 и следствия 1 мы можем сформулировать краевую задачу, описывающую все солитонные решения (эквивалентную системе (28), (29)).

Теорема 4. Пусть $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$ является солитонным букетом, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям (а)–(в), а группа диффеоморфизмов Q — условиям (г). Фиксируем начальный момент $\bar{t} \in \mathbb{R}$. Тогда при любых $\mu \in (0, \mu^*)$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ всякое решение системы (28), (29) (солитонное решение) является решением краевой задачи

$$\dot{\varkappa}(t) = G_{\Gamma\mu h}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (44)$$

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) = T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\bar{t}), \quad k = 1, \dots, d, \quad (45)$$

и наоборот.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из теоремы 3, следствия 1 и того, что множество элементов $\check{\gamma}_k$, $k = 1, \dots, d$, являются образующими группы Υ .

При заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и координате (элементе) $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ сформулируем основную начально-краевую задачу

$$\dot{\varkappa}(t) = G_{\Gamma\infty\mu h}(t, \varkappa) \quad \text{для п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (46)$$

$$\varkappa(\eta(\check{\gamma}_k)(\bar{t})) = T_{\check{\gamma}_k} \varkappa(\bar{t}), \quad k = 1, \dots, d, \quad (47)$$

$$(\varkappa(\bar{t}))_{\bar{\gamma}} = \bar{x}, \quad \bar{\gamma} \in \Upsilon, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}. \quad (48)$$

Теорема 5 (гипотеза). Пусть задан солитонный букет $(\Upsilon, d, s, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\Upsilon, d, s, \eta, Q, g)$, в котором функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям (а)–(в), а группа диффеоморфизмов Q — условиям (г). Если при $\mu \in (0, \mu^*)$, $h \in [\check{h}, +\infty)$ справедливо неравенство

$$\check{h} \check{h} \dot{M}_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(q_j)h} < h \ln \mu^{-1}, \quad (49)$$

то при любых заданных начальном моменте $\bar{t} \in \mathbb{R}$, начальном значении $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, координате $\bar{\gamma} \in \Upsilon$ для индуцированной основной начально-краевой задачи (46)–(48) существует решение $\varkappa(t) \in \mathcal{K}_{\Gamma\infty\mu h}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Такое решение является единственным, а также непрерывно зависит от начального значения $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

Доказательство гипотезы для случая, когда группа диффеоморфизма Q является циклической группой сдвигов и $h = \check{h}$, приведена в [11]. Пример манхэттенской решетки, который будет приведен ниже, относится к этому случаю. Полное доказательство гипотезы будет приведено в последующих публикациях.

Замечание 1. Пусть выполняется условие (49) и $\check{h} \neq 0$. Тогда для функции $\rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\Gamma\infty\mu h}$, $t \in \mathbb{R}$, где $\varkappa(\cdot)$ — решение уравнения (46), справедливо вложение (справедлива асимптотика по времени)

$$\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\hat{\mu}}^n C^{(0)}(R), \quad \hat{\mu} = \mu^{\frac{h}{\check{h}}}. \quad (50)$$

Доказательство. Неравенство (49) имеет вид $\check{h} M_{2\Gamma\mu h} < h \ln \mu^{-1}$. Так как $\mu < \mu^*$, то, пользуясь оценкой (49) и уточнив значение $\hat{\mu}$ в (36) из предложения 1, получим вложение $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\hat{\mu}}^n C^{(0)}(R)$.

Из замечания 1 следует, что в случае $h = \check{h}$, $\check{h} \neq 0$ имеет место вложение $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(R)$ и асимптотика решений уравнения (46) как по пространству, так и по времени задается параметром μ .

Параметрами в неравенстве (49) выступает группа Q и h . Все решения такого неравенства образуют некоторый максимальный связный интервал $(\mu_1(Q, h), \mu_2(Q, h)) \subseteq (0, 1)$. При малых $\varepsilon > 0$ пространство $\mathcal{K}_{\Gamma\infty(\mu_2(Q, h)-\varepsilon)h}^n$ уже чем пространство $\mathcal{K}_{\Gamma\infty(\mu_1(Q, h)+\varepsilon)h}^n$. Справедливость гипотезы будет гарантировать существование решение основной начально-краевой задачи в узком пространстве $\mathcal{K}_{\Gamma\infty(\mu_2(Q, h)-\varepsilon)h}^n$ и единственность в широком пространстве $\mathcal{K}_{\Gamma\infty(\mu_1(Q, h)+\varepsilon)h}^n$.

5. ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТОЧЕЧНОГО ТИПА

Сформулируем задачу Коши

$$\dot{x}(t) = g(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t))), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (51)$$

$$x(\hat{t}) = \bar{x}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (52)$$

В действительности, соответствия, которые описаны в теореме 2, продолжаются до соответствий между решениями основной начально-краевой задачи (46)–(48) и решениями задачи Коши (51), (52). В них начальное значение $\bar{x}$ одно и то же, а начальные моменты связаны соотношением $\hat{t} = \bar{\gamma}(\hat{t})$.

Пользуясь дуализмом и, соответственно, теоремой 2 о взаимосоответствиях, мы можем переформулировать гипотезу из предыдущего раздела в отношении к функционально-дифференциальному уравнению точечного типа (6).

Теорема 6. Пусть функция $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям (а)–(в), а группа диффеоморфизмов Q — условиям (г). Если при $\mu \in (0, \mu^*)$ справедливо неравенство

$$h_{\dot{Q}} M_2 \sum_{j=1}^s \mu^{-l(q_j)\tilde{h}} < \ln \mu^{-1}, \quad (53)$$

то для задачи Коши (51), (52) существует решение $x(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(R)$. Такое решение является единственным, а также как элемент пространства $\mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(R)$ непрерывно зависит от начального значения $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и функции $g(\cdot) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. По лемме 1 такие функция g и группа диффеоморфизмов Q индуцируют канонический солитонный букет $(Q, d, s, \mathcal{I}, G_{\Gamma}|Q, g)$ с $\Gamma = (Q, d, s, \mathcal{I}, Q, g)$ и каноническую дуальную пару $(G_{\Gamma}|Q, g)$, где $\mathcal{I}$ — тождественный автоморфизм группы Q . Для такого солитонного букета рассмотрим основную начально-краевую задачу (46)–(48), в которой положено $h = \tilde{h}$. В силу предложения 1, для решений бесконечномерного уравнения (46) имеет место асимптотика по времени $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(R)$, $\rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{Y_{p\mu\tilde{h}}}$, $t \in \mathbb{R}$, $\hat{\mu} = \min\{\mu^*, e^{-M_{2\Upsilon_{p\mu\tilde{h}}}}\}$. Неравенство (53) имеет вид $M_{2\Upsilon_{p\mu\tilde{h}}} < \ln \mu^{-1}$. Так как $\mu < \mu^*$, то мы получим вложение $\rho(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu}^n C^{(0)}(R)$. Далее доказательство следует из теоремы о соответствиях 2 между решениями основной начально-краевой задачи и решениями индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа и справедливости гипотезы из предыдущего раздела.

Доказательство гипотезы для случая, когда группа диффеоморфизмов Q является циклической группой сдвигов, приведена в [11].

6. ПРИМЕР МАНХЭТТЕНСКОЙ РЕШЕТКИ

Схема движения в манхэттенской решетке (группа $\mathbb{Z}^2$) такова, что из каждой точки узла решетки движение возможно в трех направлениях по основным магистралям (вперед, влево, вправо) и движение в обратном направлении через накопители. Рассмотрим агрегированную модель такого движения, при котором в каждом узле решетки наблюдаемой величиной является только лишь общий объем трафика без разделения его по направлениям движения [18].

Для группы $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ через $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ обозначим систему ее образующих, где $\gamma_1 = (1, 0)$, $\gamma_2 = (0, 1)$. Движение описывается одномерным конечно-разностным аналогом параболического уравнения [17]

$$\begin{aligned} \dot{x}_{\gamma}(t) &= \sum_{l=1}^2 \alpha_{\gamma_l} x_{\gamma_l \gamma} - \sum_{l=1}^2 (\alpha_{\gamma_l} + \beta_{\gamma_l}) x_{\gamma} + \sum_{l=1}^2 \beta_{\gamma_l} x_{\gamma_l^{-1} \gamma} + \varphi(x_{\gamma}), \\ x_{\gamma} &\in \mathbb{R} \quad \forall \gamma \in \mathbb{Z}^2 \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (54)$$

Для каждого $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ (для каждого узла двумерной решетки) через x_{γ} обозначается величина стока транспортного потока в нем. Величины $\alpha_{\gamma_l} [x_{\gamma_l \gamma} - x_{\gamma}]$, $\beta_{\gamma_l} [x_{\gamma_l^{-1} \gamma} - x_{\gamma}]$, $l = 1, 2$, задают интенсивность изменения потока в узле γ в зависимости от разности значений величины потоков в узлах γ , $\gamma_l \gamma$, $\gamma_l^{-1} \gamma$, $l = 1, 2$, соответственно. При отрицательных значениях таких разностей происходит переток потока из узла γ в узлы $\gamma_l \gamma$, $\gamma_l^{-1} \gamma$, $l = 1, 2$, соответственно. При положительных значениях таких разностей происходит переток потока из накопителей в узел γ . Потенциал φ задается непрерывной функцией

и имеет вид

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0] \cup [\Delta, +\infty), \\ \varphi(t) > 0, & t \in (0, \Delta). \end{cases} \quad (55)$$

Уровень потока, равный Δ , является критическим для узла и определяется его техническими возможностями. При значениях величины потока, меньших критического значения Δ , происходит переток потока из накопителей в узел γ . При значениях величины потока, больших критического значения Δ , он остается в этом же узле. Это соответствует случаю, когда объемы накопителей для разгрузки узла малы. Ранее, в работе [17] рассматривался случай, когда объемы накопителей для разгрузки узла достаточны и происходит переток потока из узла γ в накопители, чему соответствовал отрицательный аффинный потенциал на полупрямой $(\Delta, +\infty)$.

Определение 5. Будем говорить, что решение $\{x_\gamma(\cdot)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$ системы (54), определенное для всех $t \in \mathbb{R}$, имеет тип бегущей волны (солитонное решение), если существует $\tau \geq 0$, не зависящая от t и γ , что при всех $\gamma \in \mathbb{Z}^2$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$x_\gamma(t + \tau) = x_{\gamma_l \gamma}(t), \quad l = 1, 2. \quad (56)$$

Константу τ будем называть *характеристикой бегущей волны*.

Задача заключается в том, чтобы установить в каких диапазонах характеристики τ солитонное решение существуют, какова асимптотика таких решений и их зависимость от параметров системы. Среди солитонных решений выделяется важный класс ограниченных солитонных решений, как один из наиболее информативных классов решений.

Определим солитонный букет, порождающий рассматриваемую систему и представим систему (54), (56) в операторной форме. Через $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2}^1$ обозначим пространство последовательностей с элементами $\varkappa = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$, $x_\gamma \in \mathbb{R}$, наделенной тихоновской топологией. Определим линейный оператор $\mathbb{A}$, нелинейный оператор $\mathbb{F}$ и группу операторов сдвига $\mathbb{T}_{\mathbb{Z}^2} = \{T_{\hat{\gamma}} : \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2\}$, действующие непрерывно из пространства $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2}^1$ в себя по следующему правилу: для любых $\gamma, \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2$, $\varkappa \in \mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2}^1$, $\varkappa = \{x_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$

$$\begin{aligned} (\mathbb{A}\varkappa)_\gamma &= \sum_{l=1}^2 \alpha_{\gamma_l} x_{\gamma_l \gamma} - \sum_{l=1}^2 (\alpha_{\gamma_l} + \beta_{\gamma_l}) x_\gamma + \sum_{l=1}^2 \beta_{\gamma_l} x_{\gamma_l^{-1} \gamma}, \quad (\mathbb{F}(\varkappa))_\gamma = \varphi(x_\gamma), \\ T_{\hat{\gamma}} \{x_\gamma\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} &= \{x_{\gamma \hat{\gamma}}\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}. \end{aligned} \quad (57)$$

Определим циклическую группу $Q = \langle \check{q} \rangle$, $\check{q}(t) = t + \tau$, эпиморфизм $\eta : \mathbb{Z}^2 \rightarrow Q$, где $\eta(\gamma_l) = \check{q}$, $l = 1, 2$, для образующих γ_l , $l = 1, 2$, группы $\mathbb{Z}^2$, а также отображение $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$\begin{aligned} g(z_1, z_0, z_{-1}) &= \alpha z_1 - (\alpha + \beta) z_0 + \beta z_{-1} + \varphi(z_0), \\ \alpha &= \alpha_{\gamma_1} + \alpha_{\gamma_2}, \quad \beta = \beta_{\gamma_1} + \beta_{\gamma_2}. \end{aligned}$$

Коэффициенты α_{γ_1} , α_{γ_2} , β_{γ_1} , β_{γ_2} являются неотрицательными.

Зададим солитонный букет $(\mathbb{Z}^2, 2, 1, \eta, G_\Gamma|Q, g)$ с $\Gamma = (\mathbb{Z}^2, 2, 1, \eta, Q, g)$, в котором оператор G_Γ имеет вид $G_\Gamma = \mathbb{A} + \mathbb{F}$. Система (54), (56) имеет следующее эквивалентное операторное представление

$$\dot{\varkappa}(t) = G_\Gamma(\varkappa) \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R}. \quad (58)$$

$$\varkappa(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \varkappa(t) \quad \forall \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (59)$$

Рассмотрим индуцированное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t + \tau) - (\alpha + \beta) x(t) + \beta x(t - \tau) + \varphi(x(t)) \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R}. \quad (60)$$

Наряду с системой (58), (59) будем рассматривать ее ограничение на банахово подпространство $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2 \infty \mu \tau}^1$, $\mu \in (0, 1)$, $\tau \in [0, +\infty)$

$$\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2 \infty \mu \tau}^1 = \{\varkappa : \varkappa \in \mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2}^1; \sup_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} |x_\gamma| \mu^{l(\gamma)\tau} < +\infty\}, \quad l(\gamma) = |(i, j)| = |i| + |j| \quad (61)$$

с нормой

$$\|\mathcal{X}\|_{\mathbb{Z}^2 \times \mu\tau} = \sup_{\gamma \in \mathbb{Z}^2} |x_\gamma| \mu^{l(\gamma)\tau}.$$

Такая система имеет вид

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = G_{\Gamma \infty \mu \tau}(\mathcal{X}) \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R}, \quad (62)$$

$$\mathcal{X}(\eta(\hat{\gamma})(t)) = T_{\hat{\gamma}} \mathcal{X}(t) \quad \forall \hat{\gamma} \in \mathbb{Z}^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (63)$$

Преобразуем функционально-дифференциальное уравнение точечного типа (60) из рассматриваемой дуальной пары. Проведем замену времени с тем, чтобы отклонения аргумента стали целочисленными, а характеристика τ рассматривалась как параметр

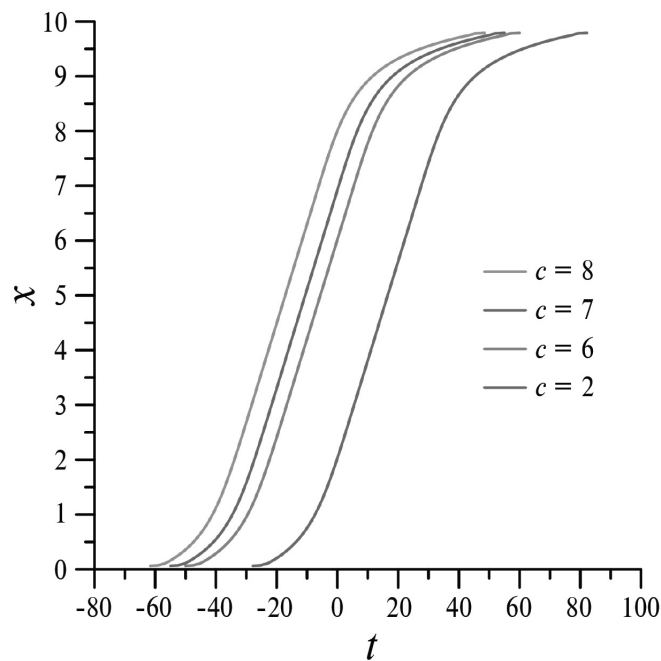
$$\dot{\bar{x}}(t) = \tau[\alpha \bar{x}(t+1) - (\alpha + \beta) \bar{x}(t) + \beta \bar{x}(t-1) + \varphi(\bar{x}(t))] \quad \text{п.в. } t \in \mathbb{R}.$$

Такое уравнение было исследовано в монографии [11] при минимальных ограничениях на потенциал $\varphi(\cdot)$ в виде наличия условия Липшица (квазилинейные потенциалы).

Пусть потенциал φ удовлетворяет условию Липшица с константой L_φ . Рассмотрим трансцендентное уравнение относительно двух переменных $\tau \in (0, +\infty)$ и $\mu \in (0, 1)$

$$2C_\varphi \tau (\mu^{-1} + 1) = \ln \mu^{-1}, \quad C_\varphi = \max \{ \alpha + \beta; L_\varphi \}. \quad (64)$$

Множество решений уравнения (64) описывается функциями $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, заданными на фиг. 1.



Фиг. 1. Графики функций $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$.

Сформулируем теорему существования и единственности решения для индуцированного функционально-дифференциального уравнения (60).

Теорема 7 (см. [11]). Пусть потенциал φ удовлетворяет условию Липшица с константой L_φ . Тогда при любых начальных данных $a \in \mathbb{R}$, начальном моменте $\hat{t} \in \mathbb{R}$ и характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

в пространстве $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R}) \forall \mu, \mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, для функционально-дифференциального уравнения (60) существует и причем единственное решение $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такое, что оно удовлетворяет начальному условию $x(\hat{t}) = a$. Такое решение, как элемент пространства $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$, непрерывно зависит от начального данного $a \in \mathbb{R}$, характеристики τ и потенциала $\varphi(\cdot)$.

Ранее мы определили максимальный связный интервал $(\mu_1(Q, h), \mu_2(Q, h))$, для значений μ из которого справедливо основное условие (49). В рассматриваемом примере для параметров выполняются условия $h = \check{h} = \tau$ и имеют место соотношения $\mu_1(Q, \tau) = \sqrt[3]{\mu_1(\tau)}$, $\mu_2(Q, \tau) = \sqrt[3]{\mu_2(\tau)}$.

Теорема 8. Пусть потенциал φ удовлетворяет условию Липшица с константой L_φ . Тогда при любых начальных данных $\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}^2$, $a \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$, и характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

для исходной бесконечномерной системы дифференциальных уравнений (54) существует единственное солитонное решение $\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$, $t \in \mathbb{R}$ (решением системы (54), (56)), с характеристикой τ такое, что оно удовлетворяет начальному условию $x_{\bar{\gamma}}(\bar{t}) = a$, для любого параметра μ , $\mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, значения вектор-функции

$$\varkappa(t) = \{x_\gamma(t)\}_{\gamma \in \mathbb{Z}^2}$$

при любом $t \in \mathbb{R}$ принадлежат пространству $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}^2 \infty \mu \tau}^1$, а функция

$$\rho(t) = \|\varkappa(t)\|_{\mathbb{Z}^2 \infty \mu \tau}, \quad t \in \mathbb{R},$$

принадлежит пространству $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$. Такое решение непрерывно зависит от начального данного $a \in \mathbb{R}$, характеристики τ и потенциала $\varphi(\cdot)$.

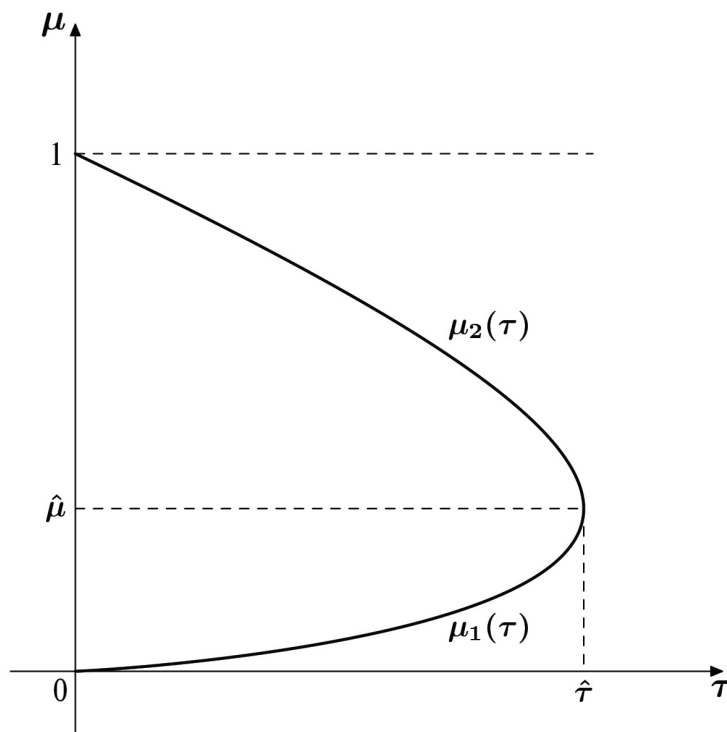
Доказательство. Данное утверждение непосредственно следует из теорем 2 и 7.

6.1. Ограниченные солитонные решения

Среди солитонных решений особое место занимают ограниченные солитонные решения. В силу теоремы 2, ограниченными солитонными решениями соответствуют ограниченные решения индуцированного функционально-дифференциального уравнения и они принадлежат каждому из семейства пространств $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu \in (0, 1)$, а по теореме 7 в пространствах функций $\mathcal{L}_\mu^1 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, $0 < \tau < \hat{\tau}$, справедливо утверждение о единственности для ограниченных решений.

Для начала опишем стационарные решения:

$$x(t) \equiv \xi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \xi \in (-\infty, 0] \cup [\Delta, +\infty). \quad (65)$$



Фиг. 2. График ограниченных решений для различных c .

Рассматриваемое уравнение обладает рядом симметрий. В силу автономности уравнения и теоремы существования и единственности решения (теорема 7), пространство решений инвариантно относительно сдвига решений по времени. Более того, в силу одномерности фазового пространства для функционально-дифференциального уравнения (60), всякое периодическое решение является стационарным. Поэтому не стационарные решения являются строго монотонными и, в силу условий (65), они являются ограниченными.

Дальнейшее усложнение рассматриваемой модели связано с учетом также и направления движения. Это приводит к модели для той же двумерной решетки, где в каждом узле решетки имеется многомерное пространство переменных (16-мерное пространство переменных) с более сложной системой их взаимовлияния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Френкель Я. И., Конторова Т. А. О теории пластической деформации и двойственности // Ж. экспериментальной и теор. физ. 1938. Т. 8. С. 89–97.
2. Toda М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984. 262 с.
3. Мива Т., Джимбо М., Датэ Э. Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечные алгебры. М.: МЦНМО, 2005. 112 с.
4. Пустыльников Л. Д. Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ // УМН. 1997. Т. 52. № 3. С. 105–160.
5. Бекларян Л. А. Краевая задача для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. № 1. С. 19–22.
6. Бекларян Л. А. Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом как бесконечномерная динамическая система // ВЦ АН СССР. Сообщ. по приклад. матем. 1989. 18 с.
7. Бекларян Л. А. Об одном методе регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1991. Т. 317. № 5. С. 1033–1037.
8. Бекларян Л. А. Групповые особенности дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и связанные с ними метрические инварианты // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 1999. Т. 67. С. 161–182.
9. Beklaryan L. A. Equations of Advanced-Retarded Type and Solutions of Traveling-Wave Type for Infinite-Dimensional Dynamic Systems // J. of Math. Sci. 2004. V. 124. N. 4. P. 5098–5109.
10. Beklaryan L. A., Khachatryan N. K. Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Functional differential equations. 2006. V. 13. N. 2. P. 125–155.
11. Бекларян Л. А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Факториал Пресс, 2007. 286 с.
12. Бекларян Л. А. О квазибегущих волнах // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 12. С. 21–68.
13. Бекларян Л. А., Хачатрян Н. К. Об одном классе динамических моделей грузоперевозок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 10. С. 1649–1667.
14. Бекларян Л. А. Квазибегущие волны как естественное расширение класса бегущих волн // Вестн. Тамбовского гос. ун-та. 2014. Т. 19. № 2. С. 331–340.
15. Бекларян Л. А., Бекларян А. Л. Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с сильно нелинейным потенциалом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 2024–2039.

16. Бекларян А. Л., Бекларян Л. А. Вопрос существования ограниченных солитонных решений в задаче о продольных колебаниях упругого бесконечного стержня в поле с нелинейным потенциалом общего вида // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 6. С. 933–950.
17. Beklaryan L. A., Beklaryan A. L., Akopov A. S. Soliton Solutions for the Manhattan Lattice // Inter. J. of Appl. Math. 2023. V. 36. N. 4. P. 569–589.
18. Akopov A. S., Beklaryan L. A. Traffic Improvement in Manhattan Road Networks With the Use of Parallel Hybrid Biobjective Genetic Algorithm // IEEE Access. 2024. V. 12. P. 19532–19552.
19. Григорчук Р. И., Курчанов П. Ф. Некоторые вопросы теории групп, связанные с геометрией // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. 1990. Т. 58. С. 191–256.
20. Keener J. P. Propagation and Its Failure in Coupled Systems of Discrete Excitable Cells // SIAM J. of Appl. Math. 1987. V. 47. N. 3. P. 556–572.
21. Zinner B. Existence of Traveling Wavefront Solutions for the Discrete Nagumo Equation // J. of Different. Equat. 1992. V. 96. N. 1. P. 1–27
22. Cahn J. W., Mallet-Paret J., Van Vleck E. S. Traveling Wave Solutions for Systems of ODEs on Two-Dimensional Spatial Lattice // SIAM J. on Appl. Math. 1998. V. 59. N. 2. P. 455–493.
23. Mallet-Paret J. The Fredholm Alternative for Functional-Differential Equations Mixed Type // J. of Dynamic. and Different. Equat. 1999. V. 11. N. 1. P. 1–47.
24. Mallet-Paret J. The Global Structure of Traveling Waves in Spatially Discrete Dynamical Systems // J. of Dynamic. and Different. Equat. 1999. V. 11. N. 1. P. 49–127.
25. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
26. Hale J. K. Theory of Functional Differential Equations. New York, Springer, 1977. 366 p.
27. Hale J. K., Verduyn L. S. Introduction to Functional-Differential Equations. New York: Springer, 1993. 450 p.
28. Azbelev N. V., Maksimov V. P., Rakhmatullina L. F. Introduction to the Theory of Functional Differential Equations: Methods and Applications. NY, Hindawi, 2007.

DUALISM IN THE SOLITON SOLUTION THEORY

L. A. Beklaryan^{a,*}, A. L. Beklaryan^{b,**}

^a 117418, Moscow, Nakhimovsky Ave, 47, Central Economics and Mathematics Institute, RAS

^b 101000, Moscow, Myasnitskaya Str., 20, National Research University Higher School of Economics

*e-mail: lbeklaryan@outlook.com

**e-mail: abeklaryan@hse.ru

Received 12 September, 2023

Revised 23 February, 2024

Accepted 05 March, 2024

Abstract. The article is dedicated to dualism of the soliton solution theories and solutions of functional differential point form equations. The basics of the formalism of such dualism are presented with the central element being the idea of soliton bunch and the dual pair: function-operator. Within such an approach, it is possible to describe the whole space of soliton solutions with a set characteristic as well as their asymptotics both in space and time. An example of traffic flow on the Manhattan grid shows the whole family of limited soliton solutions.

Keywords: Manhattan grid, soliton solutions, functional differential equations.