

О НОВЫХ КЛАССАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ И О σ -КОММУТИРОВАНИИ ($\sigma \neq 0, \pm 1$) ТЁПЛИЦЕВОЙ И ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦ В РАМКАХ УНИФИЦИРОВАННОГО ПОДХОДА¹⁾

© 2024 г. В. Н. Чугунов^{1,*}, Х. Д. Икрамов^{2,**}

¹119333 Москва, ул. Губкина, 8, ИВМ РАН, Россия

²119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

*e-mail: chugunov.vadim@gmail.com

**e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 03.04.2024 г.

Переработанный вариант 03.04.2024 г.

Принята к публикации 03.04.2024 г.

В предыдущей работе авторов был предложен унифицированный подход к конструированию пар матриц (T, H) , решающих задачу о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц. В настоящей статье этот подход применяется к выводу новых классов решений. Библ. 8.

Ключевые слова: тёплицева матрица, ганкелева матрица, σ -коммутирование.

DOI: 10.31857/S0044466924070043, EDN: xiuhcq

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие σ -коммутирования матриц является относительно новым и еще недостаточно изученным в линейной алгебре.

Матрицы K и M σ -коммутируют (или квази-коммутируют), если найдется такое число σ , что $KM = \sigma MK$ (см. [1]). В этой же работе [1] отмечается, что квази-коммутативность является важным соотношением в квантовой физике (см. [2], [3]), а также в теории представлений аффинных алгебр Гекке (Неске) (см. [4]).

Задача о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц заключается в описании пар ненулевых матриц (T, H) таких, что T — тёплицева, H — ганкелева и выполняется соотношение

$$TH = \sigma HT. \quad (1)$$

Необходимо сказать несколько слов о параметре σ . Произвольный выбор σ возможен лишь в случае, когда хотя бы одна из матриц T или H вырождена. Если же обе матрицы невырождены, то σ является одним из корней n -й степени из единицы. В настоящей работе от параметра σ мы требуем, чтобы $\sigma \neq 0, \pm 1$.

Заметим, что так как след произведения двух матриц не меняется при перестановке сомножителей и $\sigma \neq 1$, то матрицы TH и HT имеют нулевой след.

Хотя задача о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц пока не имеет полного решения, в [5] были описаны некоторые частные множества требуемых пар матриц (T, H) . Пусть $\mathcal{P}_n$ — $n \times n$ матрица-перестановка

¹⁾Работа первого автора поддержана Московским центром фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (Соглашение № 075-15-2022-286 с Минобрнауки РФ).

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \cdots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}, \quad (2)$$

называемая иногда перьединичной матрицей.

Теорема 1. Ненулевые тѐплицева матрица T и ганкелева матрица H σ -коммутируют ($\sigma \neq 0, \pm 1$), если T и H входят хотя бы в один из описываемых ниже классов:

Класс 1'. Матрица T является циркулянтном

$$T = F_n^* D_1 F_n,$$

а H — ганкелевым циркулянтном

$$H = F_n^* D_2 F_n \mathcal{P}_n.$$

Здесь F_n — (нормированная) матрица дискретного преобразования Фурье

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \cdots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \cdots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$\varepsilon = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ — первообразный корень n -й степени из единицы; $D_1 = \text{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \text{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}\right)$ — диагональные матрицы; при этом

$$d_1^{(2)} d_1^{(1)} = 0,$$

$$d_j^{(2)} \left(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+2-j}^{(1)}\right) = 0, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Класс 2'. Матрица T является косым циркулянтном

$$T = G_{-1} F_n^* D_1 F_n G_{-1}^*,$$

а H — ганкелевым косым циркулянтном

$$H = G_{-1} F_n^* D_2 F_n G_{-1}^* \mathcal{P}_n,$$

где

$$G_{-1} = \text{diag}(1, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{n-1}),$$

$\psi = e^{i\pi/n}$ есть корень n -й степени из (-1) . Диагональные матрицы $D_1 = \text{diag}\left(d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \dots, d_n^{(1)}\right)$ и $D_2 = \text{diag}\left(d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \dots, d_n^{(2)}\right)$ должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} d_1^{(2)} \left(d_1^{(1)} - \sigma d_2^{(1)}\right) &= 0, & d_2^{(2)} \left(d_2^{(1)} - \sigma d_1^{(1)}\right) &= 0, \\ d_j^{(2)} \left(d_j^{(1)} - \sigma d_{n+3-j}^{(1)}\right) &= 0, & j &= 3, 4, \dots, n. \end{aligned}$$

Класс 3'. Пусть $n = 2r$, матрицы T и H имеют вид

$$T = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta_1 \begin{pmatrix} \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \sigma \mathcal{P}_r \end{pmatrix},$$

α_1, β_1 — произвольные числа.

Класс 4'. Пусть $n = 2r$, матрицы T и H имеют вид

$$T = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta_1 \begin{pmatrix} \sigma \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \mathcal{P}_r \end{pmatrix},$$

α_1, β_1 — произвольные числа.

Замечание 1. Классы 1 и 2 были выделены в [5] во множествах пар матриц (T, H) , в которых T — тёплицев, а H — ганкелев циркулянт или же обе матрицы суть косые циркулянты.

Данные множества получены из различных соображений. Позднее, в работе [6] авторами был предложен унифицированный подход к получению полного набора требуемых матриц. Сущность его состоит в сужении множества всех пар матриц (T, H) до множеств, объединению которых принадлежат все решения рассматриваемой задачи, после чего задача о σ -коммутировании исследуется на каждой конкретной более узкой комбинации наборов (T, H) . Основную роль в этом процессе играет следующее утверждение.

Лемма 1 (см. [6]). *Всякую пару (T, H) , решающую задачу о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц, можно представить в виде*

$$\begin{aligned} T &= \alpha_2 (A - \sigma A^\top), \\ H &= \beta_2 B \mathcal{P}_n, \end{aligned} \quad (3)$$

где A и B — нескаларные тёплицевы матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} AB &= BA, \\ A^\top B + BA^\top &= \mu AB, \\ \mu &= \frac{1 + \sigma^2}{\sigma}, \\ \mu &\neq \pm 2, \end{aligned} \quad (4)$$

α_2, β_2 — произвольные числа.

Сформулированная лемма позволяет считать основным уравнением соотношение

$$A^\top B + BA^\top = \mu AB. \quad (5)$$

Заметим, что в данном уравнении матрицы A и B определены с точностью до скалярного множителя.

Для упрощения уравнения (5) воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 2 (см. [7]). *Две нескаларные тёплицевы матрицы $\check{T}_1$ и $\check{T}_2$ коммутируют тогда и только тогда, когда $\check{T}_1$ и $\check{T}_2$ принадлежат хотя бы одному из следующих классов:*

Класс КТМ_1. Обе матрицы $\check{T}_1$ и $\check{T}_2$ верхнетреугольные или же обе нижнетреугольные.

Класс КТМ_2. Матрицы $\check{T}_1$ и $\check{T}_2$ суть φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$.

Класс КТМ_3. Одна из матриц $\check{T}_1$ или $\check{T}_2$ является линейной функцией от другой.

Согласно приведенной лемме, для коммутирующих тёплицевых матриц A и B возможны лишь следующие четыре случая: 1) обе матрицы A и B являются верхними треугольными; 2) обе матрицы A и B — нижние треугольные; 3) обе матрицы A и B суть φ -циркулянты для одного и того же числа $\varphi \neq 0$; 4) $B = \delta A + \gamma I_n$.

Целью настоящей работы является применение унифицированного подхода к конструированию пар матриц (T, H) , решающих задачу о σ -коммутировании тёплицевой и ганкелевой матриц, для получения новых классов решений. А именно, будет полностью исследован случай, когда $B = \delta A + \gamma I_n$ и $\mu \neq 0$.

Введем вспомогательную операцию. Пару пар матриц $(\widetilde{T}, \widetilde{H})$ назовем $\mathcal{P}_n$ -преобразованием пары (T, H) , если

$$\widetilde{T} = \mathcal{P}_n T \mathcal{P}_n, \quad \widetilde{H} = \mathcal{P}_n H \mathcal{P}_n.$$

Учитывая персимметричность тёплицевых матриц, имеем

$$\widetilde{T} = T^\top, \quad \widetilde{H} = \mathcal{P}_n H \mathcal{P}_n.$$

Очевидно, что операция $\mathcal{P}_n$ -преобразования пары (T, H) сохраняет тёплицевость матрицы T . Ниже мы покажем, что эта операция сохраняет и ганкелевость матрицы H , а также свойство σ -коммутирования в случае σ -коммутирования самих матриц T и H .

Структура статьи следующая. В разд. 2 формулируется теорема, являющаяся главным результатом статьи и содержащая описание новых классов пар σ -коммутирующих матриц (T, H) с точностью до $\mathcal{P}_n$ -преобразования. Доказательство теоремы проводится в разд. 3.

Для дальнейшего нам понадобятся перечисляемые ниже факты, первый из которых мы доказываем, а остальные формулируем, указывая источник.

Лемма 3. *Если произведение нескаларных симметричных или кососимметричных тёплицевых матриц T_1 и T_2 является тёплицевой матрицей, то матрицы T_1 и T_2 будут обе циркулянтами или обе косыми циркулянтами.*

Доказательство леммы 3. Известен следующий факт, принадлежащий своего рода тёплицеву фольклору: произведение произвольных нескаларных тёплицевых матриц T_1 и T_2 (необязательно симметричных или кососимметричных) является тёплицевой матрицей тогда и только тогда, когда T_1 и T_2 либо верхне- (нижне-) треугольные матрицы либо φ -циркулянты для одного и того же числа φ . Первый случай невозможен в силу нескаларности и одной из симметрий. Значит, T_1 и T_2 суть φ -циркулянты.

Рассмотрим матрицу T_1 с элементами первой строки $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ и первого столбца $t_0, t_{-1}, \dots, t_{-(n-1)}$. Пусть она является нескаларным симметричным φ -циркулянт, тогда для ненулевого внедиагонального элемента t_j имеем

$$\begin{aligned} t_j &= \{\text{матрица } T_1 \text{ симметрична}\} = t_{-j} = \\ &= \{\text{матрица } T_1 - \varphi\text{-циркулянт}\} = \varphi t_{n-j} = \\ &= \{\text{матрица } T_1 \text{ симметрична}\} = \varphi t_{-(n-j)} = \\ &= \{\text{матрица } T_1 - \varphi\text{-циркулянт}\} = \varphi^2 t_j \end{aligned}$$

или

$$(1 - \varphi^2) t_j = 0.$$

Так как $t_{j_0} \neq 0$ для некоторого j_0 в силу нескаларности T_1 , то $\varphi^2 = 1$, т.е. T_1 и T_2 — суть циркулянты или косые циркулянты.

Если же матрица T_1 является нескаларным кососимметричным φ -циркулянт, то для ненулевого элемента t_j имеем

$$\begin{aligned} t_j &= \{\text{матрица } T_1 \text{ кососимметрична}\} = -t_{-j} = \\ &= \{\text{матрица } T_1 - \varphi\text{-циркулянт}\} = -\varphi t_{n-j} = \\ &= \{\text{матрица } T_1 \text{ кососимметрична}\} = \varphi t_{-(n-j)} = \\ &= \{\text{матрица } T_1 - \varphi\text{-циркулянт}\} = \varphi^2 t_j \end{aligned}$$

или

$$(1 - \varphi^2) t_j = 0.$$

Поскольку $t_{j_0} \neq 0$ для некоторого $j_0 \neq 0$ в силу нескаларности T_1 , то $\varphi^2 = 1$, т.е. снова T_1 и T_2 суть циркулянты или косые циркулянты. Лемма 3 доказана.

Лемма 4 (см. [8]). *Ненулевые симметричная тёплицева матрица T_1 и кососимметричная тёплицева матрица T_2 антикоммутируют, т.е.*

$$T_1 T_2 + T_2 T_1 = 0, \quad (6)$$

тогда и только тогда, когда они принадлежат одному из следующих классов:

Класс АСТКТМ_1. Матрицы T_1 и T_2 — циркулянты, делящие нуль, т.е. $T_1 T_2 = 0$.

Класс АСТКТМ_2. Матрицы T_1 и T_2 суть косые циркулянты, делящие нуль.

Класс АСТКТМ_3. Матрицы T_1 и T_2 имеют вид

$$T_1 = \alpha_3 (L + L^\top), \quad T_2 = \beta_3 (L - L^\top),$$

где L — ненулевая строго нижнетреугольная тѐплицева матрица, для которой $L^2 = 0$; α_3, β_3 — произвольные числа.

Класс АСТКТМ_4. Матрицы T_1 и T_2 задаются формулами

$$T_1 = \alpha_3 C, \quad T_2 = \beta_3 (S - CSC).$$

Здесь C — симметричный инволютивный циркулянт, S — косо циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы C ; α_3, β_3 — произвольные числа.

Класс АСТКТМ_5. Матрицы T_1 и T_2 задаются формулами

$$T_1 = \alpha_3 S, \quad T_2 = \beta_3 (C - SCS).$$

Здесь S — симметричный инволютивный косо циркулянт, C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S ; α_3, β_3 — произвольные числа.

Класс АСТКТМ_6. Порядок n — четное число. Матрицы T_1 и T_2 задаются формулами

$$T_1 = \alpha_3 (C - SCS), \quad T_2 = \beta_3 S,$$

где S — кососимметричный инволютивный косо циркулянт, а C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S ; α_3, β_3 — произвольные числа.

Класс АСТКТМ_7. Матрицы T_1 и T_2 задаются формулами

$$T_1 = \alpha_3 (Z + Z^\top), \quad T_2 = \beta_3 (Z - Z^\top),$$

где Z — инволютивный φ -циркулянт, причем $|\varphi| = 1, \varphi \neq \pm 1$; α_3, β_3 — произвольные числа.

Лемма 5 (см. [8]). Пусть S — ненулевой кососимметричный косо циркулянт, C — нескаларный циркулянт. Матрица $SC - CS^\top$ тогда и только тогда является косым циркулянтом, когда выполняются следующие условия: n — четное число, векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в матрицах C и S , пропорциональны, и матрица S с точностью до скалярного множителя есть инволюция.

Лемма 6 (см. [8]). Пусть C — циркулянт, а S — косо циркулянт, причем обе матрицы нескаларные и имеют один и тот же порядок. Матрица $SC - CS^\top$ тогда и только тогда является тѐплицевой, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в C и S , коллинеарны.

Лемма 7 (см. [8]). Пусть C — симметричный и нескаларный циркулянт, а S — кососимметричный и нескаларный косо циркулянт. Матрица $SC - CS^\top$ тогда и только тогда является циркулянтом, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в матрицах C и S , пропорциональны, а циркулянт C с точностью до скалярного множителя есть инволюция.

Лемма 8 (см. [8]). Пусть C — циркулянт, а S — косо циркулянт, причем обе матрицы нескаларные и имеют один и тот же порядок. Матрица $CS - SC^\top$ тогда и только тогда является тѐплицевой, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в C и S , коллинеарны.

Лемма 9 (см. [8]). Пусть S — симметричный и нескаларный косо циркулянт, а C — кососимметричный и нескаларный циркулянт. Матрица $CS - SC^\top$ тогда и только тогда является косым циркулянтом, когда векторы, составленные из поддиагональных элементов первых столбцов в матрицах C и S , пропорциональны, а косо циркулянт S с точностью до скалярного множителя есть инволюция.

Лемма 10 (см. [8]). Пусть T — тѐплицева $n \times n$ -матрица вида $T = t_0 I_n + L + L^\top$, где L — нижняя треугольная тѐплицева матрица с первым столбцом $(l_0 = 0, l_1, \dots, l_{n-1})^\top$ такая, что $L^2 = 0$. Если T является нескаларным циркулянтом или косым циркулянтом, то n — четное число $n = 2r$, а T — циркулянт вида

$$T = \begin{pmatrix} t_0 I_r & l_r I_r \\ l_r I_r & t_0 I_r \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Доказательство леммы 10. Рассмотрим отдельно случаи нечетного и четного порядка матрицы T .

Пусть сначала $n = 2r + 1$, тогда из условия $L^2 = 0$ следует, что $l_j = 0$ для $j = 1, 2, \dots, r$. Из вида матрицы T имеем соотношения $\{T\}_{1, n+1-j} = l_{n-j}$ при $j = 1, 2, \dots, r$. Так как T — циркулянт или

косой циркулянт, то $l_{n-j} = \{T\}_{1,n+1-j} = \pm \{T\}_{j+1,1} = \pm l_j = 0$ для $j = 1, 2, \dots, r$. Получаем, что $L = 0$ и T — скалярная матрица.

Если же n — четное число $n = 2r$, то из условия $L^2 = 0$ следует, что $l_j = 0$ для $j = 1, 2, \dots, r-1$. Аналогично, из вида матрицы T имеем соотношения $\{T\}_{1,n+1-j} = l_{n-j}$ при $j = 1, 2, \dots, r-1$. Так как T — циркулянт или косой циркулянт, то $l_{n-j} = \{T\}_{1,n+1-j} = \pm \{T\}_{j+1,1} = \pm l_j = 0$ для $j = 1, 2, \dots, r-1$. Приходим к тому, что $l_j = 0$ для $j = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n-1$. Значит, в силу нескаларности матрица T имеет вид (7) и является циркулянтом. Лемма 10 доказана.

2. ГЛАВНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ

Прежде, чем сформулировать главный результат, остановимся на некоторых особенностях $\mathcal{P}_n$ -преобразования пары (T, H) в пару $(\tilde{T}, \tilde{H})$.

Если положить $H = \check{T}\mathcal{P}_n$ для некоторой тёплицевой матрицы $\check{T}$, то

$$\tilde{H} = \mathcal{P}_n H \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n \check{T} \mathcal{P}_n \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n \check{T} = \check{T}^\top \mathcal{P}_n.$$

Таким образом, $\mathcal{P}_n$ -преобразование сохраняет ганкелевость матрицы $\tilde{H}$.

В случае, когда матрицы T и H σ -коммутируют, можем записать

$$\tilde{T} \tilde{H} = \mathcal{P}_n T \mathcal{P}_n \mathcal{P}_n H \mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n T H \mathcal{P}_n = \sigma \mathcal{P}_n H T \mathcal{P}_n = \sigma \mathcal{P}_n H \mathcal{P}_n \mathcal{P}_n T \mathcal{P}_n = \sigma \tilde{H} \tilde{T}.$$

Тем самым $\mathcal{P}_n$ -преобразование сохраняет σ -коммутирование тёплицевой и ганкелевой матриц.

Теорема 2. Пусть $\hat{L}$ — нижняя треугольная тёплицева матрица порядка r , где $r = \lfloor n/2 \rfloor$. Ненулевые тёплицева матрица T и ганкелева матрица H σ -коммутируют, если эти матрицы (с точностью до $\mathcal{P}_n$ -преобразования) входят хотя бы в один из следующих классов:

Класс 1. Если порядок матриц является четным числом $n = 2r$, то сами матрицы T и H имеют вид

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \hat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \sigma \hat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \hat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix},$$

α, β — произвольные числа.

Класс 2. Если порядок матриц является нечетным числом $n = 2r + 1$, то сами матрицы T и H имеют вид

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \hat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \sigma \hat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_r & 0_{r,r}^\top \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ 0_{r,r} & 0_r & \hat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix},$$

α, β — произвольные числа.

3. ОБОСНОВАНИЕ ГЛАВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим уравнение (5) при условии $B = \delta A + \gamma I_n$.

Начнем исследование со специального случая, когда $\delta = 0$. Поскольку A и B определены с точностью до скалярных множителей, то можно считать, что $B = I_n$ и уравнение (5) имеет вид

$$2A^\top = \mu A.$$

Отсюда путем несложных выкладок выводим соотношение

$$\left(1 - \frac{\mu^2}{4}\right) A = 0,$$

которое не может быть выполнено, так как $A \neq 0$ и $\mu \neq \pm 2$. Следовательно, $\delta \neq 0$. Так как матрицы A и B определены с точностью до скалярных множителей, то δ можно положить равным единице, и тогда $B = A + \gamma I_n$. Решаемое уравнение приобретает вид

$$A^\top A + A A^\top = \mu A^2 + \gamma \mu A - 2\gamma A^\top. \quad (8)$$

В дальнейшем будем считать, что $\mu \neq 0$. Исследуем несколько взаимоисключающих случаев.

1. Если матрица A симметрична, то приходим к уравнению

$$2A^2 = \mu A^2 + \gamma \mu A - 2\gamma A,$$

которое запишем в виде

$$(\mu - 2)(A^2 + \gamma A) = 0.$$

Поскольку $\mu \neq 2$, получаем условие

$$A^2 + \gamma A = 0$$

или

$$A(A + \gamma I_n) = 0.$$

Произведение тёплицевых матриц в левой части дает (нулевую) тёплицеву матрицу. Так как матрица A симметрична, то, по лемме 3, A и, поэтому, B суть циркулянты или косые циркулянты. В таком случае исходные матрицы T и H являются тёплицевыми и ганкелевыми циркулянтами либо косыми циркулянтами. Эти ситуации уже были рассмотрены согласно замечанию 1.

2. Матрица A является линейным многочленом от кососимметричной матрицы K , т.е. $A = a_0 I_n + K$. В этом случае решаемое уравнение

$$\begin{aligned} (a_0 I_n - K)(a_0 I_n + K) + (a_0 I_n + K)(a_0 I_n - K) = \\ = \mu(a_0 I_n + K)^2 + \gamma \mu(a_0 I_n + K) - 2\gamma(a_0 I_n - K) \end{aligned}$$

можно упростить до вида

$$2a_0^2 I_n - 2K^2 = \mu a_0^2 I_n + 2\mu a_0 K + \mu K^2 + (\mu - 2)\gamma a_0 I_n + (\mu + 2)\gamma K,$$

допускающего запись

$$(\mu - 2)a_0^2 I_n + (\mu - 2)\gamma a_0 I_n + (\mu + 2)K^2 = -(2\mu a_0 + (\mu + 2)\gamma)K.$$

В левой части стоит симметричная матрица, в правой части — кососимметричная. Приходим к системе

$$\begin{aligned} (\mu - 2)a_0^2 I_n + (\mu - 2)\gamma a_0 I_n + (\mu + 2)K^2 &= 0, \\ (2\mu a_0 + (\mu + 2)\gamma)K &= 0. \end{aligned}$$

Перепишем первое уравнение системы в виде

$$(\mu + 2)K^2 = -(\mu - 2)a_0^2 I_n - (\mu - 2)\gamma a_0 I_n.$$

Так как $\mu \neq -2$, то K^2 является тёплицевой матрицей. В силу косой симметрии матрицы K по лемме 3 сама матрица K и, поэтому, A и B суть циркулянты или косые циркулянты. В таком случае исходные матрицы T и H являются тёплицевыми и ганкелевыми циркулянтами либо косыми циркулянтами, что было уже рассмотрено согласно замечанию 1.

3. Матрица A не является ни симметричной, ни линейным многочленом от кососимметричной матрицы. В этом случае введем вспомогательные тёплицевы матрицы — симметричную матрицу X и кососимметричную матрицу Y — формулами

$$X = \frac{A + A^\top}{2}, \quad Y = \frac{A - A^\top}{2},$$

тогда

$$A = X + Y, \quad A^\top = X - Y. \quad (9)$$

В силу условий рассматриваемого случая матрицы X и Y не скалярны. Подставляя эти выражения в (8), получаем соотношение

$$(X - Y)(X + Y) + (X + Y)(X - Y) = \mu(X + Y)^2 + \gamma \mu(X + Y) - 2\gamma(X - Y),$$

которое можно преобразовать к виду

$$2X^2 - 2Y^2 = \mu X^2 + \mu(XY + YX) + \mu Y^2 + \gamma(\mu - 2)X + \gamma(\mu + 2)Y$$

или к виду

$$(2 - \mu)X^2 - (2 + \mu)Y^2 + \gamma(2 - \mu)X = \mu(XY + YX) + \gamma(\mu + 2)Y.$$

В левой части стоит симметричная матрица, в правой — кососимметричная. Приходим к системе

$$\begin{aligned} (2 - \mu)X^2 - (2 + \mu)Y^2 + \gamma(2 - \mu)X &= 0, \\ \mu(XY + YX) + \gamma(\mu + 2)Y &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (\mu - 2)X^2 + (\mu + 2)Y^2 + \gamma(\mu - 2)X &= 0, \\ \mu(XY + YX) + \gamma(\mu + 2)Y &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что $\sigma \neq \pm 1$, от искоемых матриц X и Y перейдем к симметричной матрице X_0 и кососимметричной матрице Y_0 . Эти тёплицевы матрицы определяются формулами

$$X = X_0, \quad Y = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} Y_0. \quad (11)$$

Вспоминая, что $\mu = \frac{1+\sigma^2}{\sigma}$, можем записать

$$\begin{aligned} X^2 &= X_0^2, \\ Y^2 &= \frac{(\sigma - 1)^2}{(\sigma + 1)^2} Y_0^2 = \frac{\sigma^2 + 1 - 2\sigma}{\sigma^2 + 1 + 2\sigma} Y_0^2 = \frac{\frac{1+\sigma^2}{\sigma} - 2}{\frac{1+\sigma^2}{\sigma} + 2} Y_0^2 = \frac{\mu - 2}{\mu + 2} Y_0^2. \end{aligned}$$

После подстановки этих соотношений в систему (10) и почленного деления первого уравнения на ненулевое число $(\mu - 2)$, а второго на $\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$, получаем

$$\begin{aligned} X_0^2 + Y_0^2 + \gamma X_0 &= 0, \\ \mu(X_0 Y_0 + Y_0 X_0) + \gamma(\mu + 2)Y_0 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Положим

$$X_0 = X_1 - \frac{\gamma}{2} I_n, \quad Y_0 = Y_1 \quad (13)$$

и подставим эти выражения в (12):

$$\begin{aligned} X_1^2 + Y_1^2 &= \frac{\gamma^2}{4} I_n, \\ \mu(X_1 Y_1 + Y_1 X_1) + 2\gamma Y_1 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как $\mu \neq 0$, то можем переписать эту систему в виде

$$\begin{aligned} X_1^2 + Y_1^2 &= \frac{\gamma^2}{4} I_n, \\ \left(X_1 + \frac{\gamma}{\mu} I_n\right) Y_1 + Y_1 \left(X_1 + \frac{\gamma}{\mu} I_n\right) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Введем тёплицевы симметричную матрицу Q и кососимметричную матрицу V такие, что

$$X_1 = Q - \frac{\gamma}{\mu} I_n, \quad Y_1 = V.$$

Из (9), (11), (13) получаем

$$A = X + Y = X_0 + \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} Y_0 = X_1 - \frac{\gamma}{2} I_n + \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} Y_1 = Q - \left(\frac{\gamma}{\mu} + \frac{\gamma}{2}\right) I_n + \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} V, \quad (16)$$

$$B = A + \gamma I_n,$$

где матрицы Q и V таковы, что

$$\begin{aligned} Q^2 - \frac{2\gamma}{\mu} Q + V^2 &= \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2}\right) I_n, \\ QV + VQ &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, тёплицевы симметричная матрица Q и кососимметричная матрица V должны антикоммутировать. При этом ни Q , ни V не должны быть скалярными матрицами, так как в противном случае A является скалярной или симметричной матрицей либо линейным многочленом от кососимметричной матрицы, а эти случаи уже были разобраны. Согласно лемме 4, Q и V принадлежат хотя бы одному из семи классов АСТКТМ.

3.1. Если Q и V — циркулянты, то A и B тоже циркулянты, и тогда исходные матрицы T и H будут соответственно циркулянтном и ганкелевым циркулянтном. Этот случай был разобран (см. замечание 1).

3.2. Если Q и V — косые циркулянты, то A и B тоже косые циркулянты, и тогда исходные матрицы T и H будут соответственно косым циркулянтном и ганкелевым косым циркулянтном. Этот случай также был разобран.

3.3. Пусть теперь

$$Q = \alpha_3 (L + L^\top), \quad V = \beta_3 (L - L^\top),$$

где L — ненулевая строго нижнетреугольная тёплицева матрица, для которой $L^2 = 0$. Подставляя эти выражения в первое уравнение системы (17), получаем

$$\alpha_3^2 (LL^\top + L^\top L) - \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu} (L + L^\top) - \beta_3^2 (LL^\top + L^\top L) = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) I_n$$

или

$$(\alpha_3^2 - \beta_3^2) (LL^\top + L^\top L) - \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu} (L + L^\top) = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) I_n. \quad (18)$$

Так как $L^2 = 0$, то, вводя параметр $r = \lfloor n/2 \rfloor$ и нижнюю треугольную тёплицеву матрицу $\hat{L}$ порядка r , можем записать, что

$$L = \begin{pmatrix} 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \\ \hat{L} & 0_{r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\beta_3 = \pm\alpha_3$. Так как Q — не скалярная матрица, то $\alpha_3 \neq 0$ и $L \neq 0$. Из соотношения (18) выводим, что $\gamma = 0$ и, значит, $B = A$.

Введем параметр $\vartheta = \pm 1$, тогда $\beta_3 = \vartheta\alpha_3$ и из (16) имеем

$$\begin{aligned} A &= Q + \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} V = \alpha_3 (L + L^\top) + \beta_3 \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} (L - L^\top) = \\ &= \frac{\alpha_3}{\sigma + 1} \left\{ (\sigma + 1) (L + L^\top) + \vartheta(\sigma - 1) (L - L^\top) \right\} = \\ &= \frac{\alpha_3}{\sigma + 1} \left\{ [\sigma(\vartheta + 1) + (1 - \vartheta)] L + [\sigma(1 - \vartheta) + (1 + \vartheta)] L^\top \right\}. \end{aligned}$$

Дальнейший анализ разобьем на два подслучая $\vartheta = -1$ и $\vartheta = 1$. Пусть сначала $\vartheta = -1$. В этом случае

$$A = B = \frac{2\alpha_3}{\sigma + 1} (L + \sigma L^\top).$$

Для четного $n = 2r$ можем написать

$$A = B = \frac{2\alpha_3}{\sigma + 1} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \sigma \hat{L}^\top \\ \hat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

и тогда

$$\begin{aligned} T &= \alpha_2 (A - \sigma A^\top) = \frac{2\alpha_2\alpha_3}{\sigma + 1} \left[\begin{pmatrix} 0_{r,r} & \sigma \hat{L}^\top \\ \hat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \hat{L}^\top \\ \sigma \hat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{2\alpha_2\alpha_3(1 - \sigma^2)}{\sigma + 1} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \hat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \hat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$H = \beta_2 B \mathcal{P}_n = \frac{2\alpha_3 \beta_2}{\sigma + 1} \begin{pmatrix} \sigma \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \widehat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \sigma \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \widehat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix}.$$

Приходим к паре матриц класса 1 с $\alpha = 2\alpha_2\alpha_3(1 - \sigma)$ и $\beta = \frac{2\alpha_3\beta_2}{\sigma+1}$.

Если же $n = 2r + 1$, то

$$A = B = \frac{2\alpha_3}{\sigma + 1} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & \sigma \widehat{L}^\top \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

и тогда

$$\begin{aligned} T = \alpha_2 (A - \sigma A^\top) &= \frac{2\alpha_2\alpha_3}{\sigma + 1} \left[\begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & \sigma \widehat{L}^\top \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & \widehat{L}^\top \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \sigma \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{2\alpha_2\alpha_3(1 - \sigma^2)}{\sigma + 1} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \\ H = \beta_2 B \mathcal{P}_n &= \frac{2\alpha_3\beta_2}{\sigma + 1} \begin{pmatrix} \sigma \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ 0_{r,r} & 0_r & \widehat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \sigma \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ 0_{r,r} & 0_r & \widehat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Получаем пару матриц из класса 2 с $\alpha = 2\alpha_2\alpha_3(1 - \sigma)$ и $\beta = \frac{2\alpha_3\beta_2}{\sigma+1}$.

Если $\vartheta = 1$, то имеем

$$A = B = \frac{2\alpha_3}{\sigma + 1} (\sigma L + L^\top).$$

В случае четного $n = 2r$ можем написать

$$A = B = \frac{2\alpha_3}{\sigma + 1} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \widehat{L}^\top \\ \sigma \widehat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

и тогда

$$\begin{aligned} T = \alpha_2 (A - \sigma A^\top) &= \frac{2\alpha_2\alpha_3}{\sigma + 1} \left[\begin{pmatrix} 0_{r,r} & \widehat{L}^\top \\ \sigma \widehat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \sigma \widehat{L}^\top \\ \widehat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{2\alpha_2\alpha_3(1 - \sigma^2)}{\sigma + 1} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & \widehat{L}^\top \\ 0_{r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \\ &= 2\alpha_2\alpha_3(1 - \sigma) \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \widehat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix}^\top = \alpha \mathcal{P}_n \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \widehat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix} \mathcal{P}_n, \\ H = \beta_2 B \mathcal{P}_n &= \frac{2\alpha_3\beta_2}{\sigma + 1} \begin{pmatrix} \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \sigma \widehat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix} = \beta \mathcal{P}_n \begin{pmatrix} \sigma \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \widehat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix} \mathcal{P}_n. \end{aligned}$$

Эта пара матриц представляет собой $\mathcal{P}_n$ -преобразование пары матриц класса 1 с $\alpha = 2\alpha_2\alpha_3(1 - \sigma)$ и $\beta = \frac{2\alpha_3\beta_2}{\sigma+1}$.

Если же $n = 2r + 1$, то

$$A = B = \frac{2\alpha_3}{\sigma + 1} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & \widehat{L}^\top \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \sigma \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

и

$$T = \alpha_2 (A - \sigma A^\top) = \frac{2\alpha_2\alpha_3}{\sigma + 1} \left[\begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & \widehat{L}^\top \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \sigma \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & \sigma \widehat{L}^\top \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\alpha_2\alpha_3(1-\sigma^2)}{\sigma+1} \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & \widehat{L}^\top \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ 0_{r,r} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \\
&= 2\alpha_2\alpha_3(1-\sigma) \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}^\top = \alpha \mathcal{P}_n \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} \mathcal{P}_n, \\
H &= \beta_2 B \mathcal{P}_n = \frac{2\alpha_3\beta_2}{\sigma+1} \begin{pmatrix} \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ 0_{r,r} & 0_r & \sigma \widehat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix} = \\
&= \beta \begin{pmatrix} \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ 0_{r,r} & 0_r & \sigma \widehat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix} = \beta \mathcal{P}_n \begin{pmatrix} \sigma \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ 0_{r,r} & 0_r & \widehat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix} \mathcal{P}_n.
\end{aligned}$$

Эта пара матриц представляет собой $\mathcal{P}_n$ -преобразование пары матриц класса 2 с $\alpha = 2\alpha_2\alpha_3(1-\sigma)$ и $\beta = \frac{2\alpha_3\beta_2}{\sigma+1}$.

Далее считаем, что $\alpha_3^2 - \beta_3^2 \neq 0$. Перепишем уравнение (18) в виде

$$(L + L^\top)^2 - \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu(\alpha_3^2 - \beta_3^2)} (L + L^\top) = \frac{1}{(\alpha_3^2 - \beta_3^2)} \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) I_n$$

или

$$\left(L + L^\top - \frac{\gamma\alpha_3}{\mu(\alpha_3^2 - \beta_3^2)} I_n \right)^2 = \left[\frac{1}{(\alpha_3^2 - \beta_3^2)} \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) + \frac{\gamma^2\alpha_3^2}{\mu^2(\alpha_3^2 - \beta_3^2)^2} \right] I_n.$$

В силу леммы 3 матрица $U = L + L^\top - \frac{\gamma\alpha_3}{\mu(\alpha_3^2 - \beta_3^2)} I_n$, квадрат которой есть скалярная матрица, должна быть симметричным циркулянтном или косым циркулянтном. Из леммы 10 следует, что $n = 2r$ — четное число и U — циркулянт вида (7). Тогда Q и V с точностью до скалярных множителей можно записать как

$$Q = \alpha_3 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad V = \beta_3 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & -I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

В этом случае $Q^2 = \alpha_3^2 I_n$ и $V^2 = -\beta_3^2 I_n$. Подстановка в первое уравнение системы (17) дает условие

$$\frac{2\gamma}{\mu} Q = \alpha_3^2 I_n - \beta_3^2 I_n - \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) I_n.$$

Поскольку Q — не скалярная матрица, отсюда следует, что $\gamma = 0$, а тогда $\beta_3^2 = \alpha_3^2$, вопреки предположению.

3.4. Пусть теперь тёплицевы симметричная матрица Q и кососимметричная матрица V задаются формулами

$$Q = \alpha_3 C, \quad V = \beta_3 (S - CSC),$$

где C — симметричный инволютивный не скалярный циркулянт, а S — косой циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы C .

Подстановка матрицы Q в первое уравнение системы (17) дает условие

$$\alpha_3^2 I_n - \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu} C + V^2 = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) I_n,$$

из которого выводим

$$V^2 = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} - \alpha_3^2 \right) I_n + \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu} C.$$

Отсюда следует, что V^2 является циркулянтном. По лемме 3 сама матрица V должна быть циркулянтном или косым циркулянтном. Но если V — косой циркулянт, то C — скалярная матрица, вопреки предположению. Приходим к уже разобранному случаю, когда Q и V — циркулянты.

3.5. Рассмотрим класс $АСТКТМ_5$, в котором матрицы Q и V задаются формулами

$$Q = \alpha_3 S, \quad V = \beta_3 (C - SCS),$$

где S — симметричный инволютивный нескаларный косой циркулянт, а C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S .

Подстановка матрицы Q в первое уравнение системы (17) дает условие

$$\alpha_3^2 I_n - \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu} S + V^2 = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) I_n,$$

из которого выводим

$$V^2 = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} - \alpha_3^2 \right) I_n + \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu} S.$$

Отсюда следует, что V^2 является косым циркулянтном. По лемме 3 сама матрица V должна быть циркулянтном или косым циркулянтном. Но если V — циркулянт, то S — скалярная матрица, вопреки предположению. Приходим к уже разобранному случаю, когда Q и V — косые циркулянты.

3.6. Исследуем теперь симметричную и кососимметричную тёплицевы матрицы из класса $АСТКТМ_6$. В этом случае

$$Q = \alpha_3 (C - SCS), \quad V = \beta_3 S,$$

где S — кососимметричный инволютивный косой циркулянт, а C — циркулянт с поддиагональными элементами, совпадающими с поддиагональными элементами матрицы S ; n — четное число.

Подставим V в первое уравнение системы (17)

$$\left(Q - \frac{\gamma}{\mu} I_n \right)^2 = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \beta_3^2 \right) I_n.$$

Поскольку матрица Q симметрична, то, согласно лемме 3, она должна быть циркулянтном или косым циркулянтном.

В данном случае разложение Q в сумму циркулянта и косого циркулянта имеет вид

$$\begin{aligned} Q = \alpha_3 (C - SCS) &= 2\alpha_3 \frac{1}{2} (C - SCS) = 2\alpha_3 \left(C - \frac{1}{2} (C + SCS) \right) = \\ &= 2\alpha_3 \left(C - \frac{1}{2} S (SC - CS^\top) \right), \end{aligned}$$

так как по лемме 5 матрица $SC - CS^\top$ является косым циркулянтном.

Предположим сначала, что Q есть косой циркулянт. Тогда C — скалярная матрица и, поскольку поддиагональные элементы в S и C совпадают, то скалярными матрицами будут и S , и сама Q .

Если Q — симметричный циркулянт, то

$$C + SCS = \zeta I_n$$

для некоторого числа ζ . Введем вспомогательный циркулянт C_1 формулой

$$C = C_1 + \frac{\zeta}{2} I_n,$$

тогда

$$C_1 + SC_1 S = 0$$

или

$$SC_1 - C_1 S^\top = 0.$$

В силу леммы 7 матрица $SC_1 - C_1S^\top$ является циркулянтном тогда и только тогда, когда циркулянт C_1 есть скалярное кратное симметричной инволюции. При этом у матриц S и C_1 совпадают поддиагональные элементы. Представим эти матрицы в виде

$$S = L - L^\top, \quad C_1 = c_0 I_n + L + L^\top,$$

где L — ненулевая строго нижняя треугольная тёплицева матрица. Условия инволютивности S и того факта, что C_1 — скалярное кратное симметричной инволюции, запишем в виде системы

$$\begin{aligned} (L - L^\top)^2 &= I_n, \\ (c_0 I_n + L + L^\top)^2 &= \lambda I_n, \end{aligned}$$

которую после раскрытия скобок можно переписать как

$$\begin{aligned} L^2 + (L^\top)^2 - LL^\top - L^\top L &= I_n, \\ c_0^2 I_n + 2c_0 L + 2c_0 L^\top + L^2 + (L^\top)^2 + LL^\top + L^\top L &= \lambda I_n. \end{aligned}$$

Складывая уравнения системы, получаем соотношение

$$c_0^2 I_n + 2c_0 L + 2c_0 L^\top + 2L^2 + 2(L^\top)^2 = (1 + \lambda) I_n,$$

приводимое к виду

$$L(c_0 I_n + L) + L^\top(c_0 I_n + L^\top) = \frac{1 + \lambda - c_0^2}{2} I_n.$$

Поскольку L — тёплицева строго нижняя треугольная матрица, то из этого равенства следует, что

$$L(c_0 I_n + L) = 0.$$

В силу условия $L \neq 0$ заключаем, что $c_0 = 0$ и $L^2 = 0$. Теперь из леммы 10 выводим, что $n = 2r$ — четное число и C_1 — циркулянт вида (7). Сами матрицы Q и V с точностью до скалярных множителей можно записать как

$$Q = v_1 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad V = v_2 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ -I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Приходим к матрицам Q и V из п. 3.3.

3.7. И, наконец, исследуем ситуацию, когда нескаларные матрицы Q и V задаются формулами

$$Q = \alpha_3 (Z + Z^\top), \quad V = \beta_3 (Z - Z^\top),$$

где Z — инволютивный φ -циркулянт, причем $|\varphi| = 1$, $\varphi \neq \pm 1$.

Подставляя выражения для Q и V в первое уравнение системы (17), получаем

$$\begin{aligned} 2\alpha_3^2 I_n + \alpha_3^2 (ZZ^\top + Z^\top Z) - \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu} (Z + Z^\top) + 2\beta_3^2 I_n - \\ - \beta_3^2 (ZZ^\top + Z^\top Z) = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) I_n. \end{aligned}$$

Вычитая из обеих частей $4\beta_3^2 I_n$, имеем

$$(\alpha_3^2 - \beta_3^2) (2I_n + ZZ^\top + Z^\top Z) - \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu} (Z + Z^\top) = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) I_n - 4\beta_3^2 I_n$$

или

$$(\alpha_3^2 - \beta_3^2) (Z + Z^\top)^2 - \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu} (Z + Z^\top) = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) I_n - 4\beta_3^2 I_n.$$

Рассмотрим сначала случай $\alpha_3 = \pm\beta_3$. Из нескаллярности Q выводим, что $\gamma = 0$, а тогда $\beta_3 = 0$ и $\alpha_3 = 0$. В результате приходим к равенству $T = H = 0$, которое противоречит условию, что T и H — ненулевые матрицы.

Считая в дальнейшем, что $\alpha_3^2 - \beta_3^2 \neq 0$, разделим последнее соотношение на $\alpha_3^2 - \beta_3^2$:

$$\left(Z + Z^\top\right)^2 - \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu(\alpha_3^2 - \beta_3^2)}(Z + Z^\top) = \frac{1}{\alpha_3^2 - \beta_3^2} \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2}\right) I_n - \frac{4\beta_3^2}{\alpha_3^2 - \beta_3^2} I_n.$$

Добавляя к обеим частям матрицу $\frac{\gamma^2\alpha_3^2}{\mu^2(\alpha_3^2 - \beta_3^2)^2} I_n$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} \left(Z + Z^\top\right)^2 - \frac{2\gamma\alpha_3}{\mu(\alpha_3^2 - \beta_3^2)}(Z + Z^\top) + \frac{\gamma^2\alpha_3^2}{\mu^2(\alpha_3^2 - \beta_3^2)^2} I_n = \\ = \frac{1}{\alpha_3^2 - \beta_3^2} \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2}\right) I_n - \frac{4\beta_3^2}{\alpha_3^2 - \beta_3^2} I_n + \frac{\gamma^2\alpha_3^2}{\mu^2(\alpha_3^2 - \beta_3^2)^2} I_n, \end{aligned}$$

допускающему запись в виде

$$\begin{aligned} \left(Z + Z^\top - \frac{\gamma\alpha_3}{\mu(\alpha_3^2 - \beta_3^2)} I_n\right)^2 = \\ = \frac{1}{\alpha_3^2 - \beta_3^2} \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2}\right) I_n - \frac{4\beta_3^2}{\alpha_3^2 - \beta_3^2} I_n + \frac{\gamma^2\alpha_3^2}{\mu^2(\alpha_3^2 - \beta_3^2)^2} I_n. \end{aligned}$$

Получаем, что квадрат симметричной матрицы $Z + Z^\top - \frac{\gamma\alpha_3}{\mu(\alpha_3^2 - \beta_3^2)} I_n$ является скалярной матрицей. В силу леммы 3, сама эта матрица, как и матрица $Z + Z^\top$, должна быть либо циркулянт, либо косым циркулянт.

Пусть сначала матрица $Z + Z^\top$ — циркулянт. Положим $Z = C + S$, где C — циркулянт, а S — косой циркулянт; при этом S имеет нулевую диагональ. Из условия, что $Z + Z^\top$ — циркулянт, получаем соотношение $S^\top = -S$. Тогда $Z + Z^\top = C + C^\top$ и $Q = \alpha_3(C + C^\top)$.

Запишем условия инволютивности матрицы $Z = C + S$ и транспонированной матрицы $Z^\top$:

$$\begin{aligned} C^2 + CS + SC + S^2 &= I_n, \\ (C^\top)^2 - C^\top S - SC^\top + S^2 &= I_n. \end{aligned}$$

Разность этих соотношений дает равенство

$$S(C + C^\top) - (C + C^\top)S^\top = (C^\top)^2 - C^2. \quad (19)$$

Согласно лемме 7 матрица $C + C^\top$ является скалярным кратным инволютивной матрицы. То же самое можно сказать о матрице Q . Положим $Q^2 = \lambda I_n$ и подставим это равенство в первое уравнение (17):

$$\lambda I_n - \frac{2\gamma}{\mu} Q + V^2 = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2}\right) I_n.$$

Отсюда находим

$$V^2 = \frac{2\gamma}{\mu} Q + \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2}\right) I_n - \lambda I_n.$$

Квадрат тѐплицевой кососимметричной матрицы V является циркулянт.

Если $\gamma \neq 0$, то V^2 — нескаллярный циркулянт, и тогда в силу леммы 3 матрица V — циркулянт. Отсюда следует, что A и B — циркулянты, а сами матрицы T и H будут тѐплицевым и ганкелевым циркулянтами. Этот случай уже был разобран. Аналогично обосновывается случай $\gamma = 0$ и V — циркулянт.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $\gamma = 0$ и V — скалярное кратное инволютивного косого циркулянта. Из соотношений

$$V = \beta_3 (Z - Z^\top) = \beta_3 (C + S - C^\top - S^\top) = \beta_3 (C + 2S - C^\top)$$

следует, что $C^\top = C$, $V = 2\beta_3 S$. Подстановка равенства $C^\top = C$ в (19) дает условие

$$SC - CS^\top = 0.$$

Согласно лемме 6, C и S обладают тем свойством, что векторы, составленные из поддиагональных элементов их первых столбцов, пропорциональны. В силу леммы 7 матрица C с точностью до скалярного кратного является инволюцией. То же верно для матрицы S , коллинеарной матрице V . Запишем эти три факта следующим образом.

Пусть L — строго нижняя треугольная тёплицева матрица. С учетом условия, что S имеет нулевую диагональ, положим

$$C = c_0 I_n + L + L^\top, \quad S = \gamma(L - L^\top), \\ C^2 = \lambda_1 I_n, \quad S^2 = \lambda_2 I_n.$$

Из этих соотношений выводим систему

$$(c_0 I_n + L + L^\top)^2 = \lambda_1 I_n, \\ (L - L^\top)^2 = \frac{\lambda_2}{\gamma^2} I_n,$$

которая после раскрытия скобок приобретает вид

$$c_0^2 I_n + 2c_0 L + 2c_0 L^\top + L^2 + (L^\top)^2 + LL^\top + L^\top L = \lambda_1 I_n, \\ L^2 + (L^\top)^2 - LL^\top - L^\top L = \frac{\lambda_2}{\gamma^2} I_n.$$

Суммируя эти уравнения, получаем

$$c_0^2 I_n + 2c_0 L + 2c_0 L^\top + 2L^2 + 2(L^\top)^2 = \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\gamma^2}\right) I_n.$$

Поскольку L — строго нижняя треугольная тёплицева матрица, приходим к выводу, что

$$L(c_0 I_n + L) = 0.$$

Отсюда следует, что $c_0 = 0$, а тогда $L^2 = 0$. На основании леммы 10 заключаем, что $n = 2r$ — четное число, а матрицы C и S , как и матрицы Q и V , имеют вид

$$C = \nu_1 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad S = \nu_2 \begin{pmatrix} 0_{r,r} & -I_r \\ I_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Подобный случай был разобран при исследовании третьего класса АСТКТМ.

Теперь исследуем ситуацию, когда матрица $Z + Z^\top$ — косой циркулянт. Положим $Z = C + S$, где C — циркулянт, а S — косой циркулянт; при этом C имеет нулевую диагональ. Из условия, что $Z + Z^\top$ — косой циркулянт, получаем соотношение $C^\top = -C$. Тогда $Z + Z^\top = S + S^\top$ и $Q = \alpha_3 (S + S^\top)$.

Запишем условия инволютивности матрицы $Z = C + S$ и транспонированной матрицы $Z^\top$:

$$C^2 + CS + SC + S^2 = I_n, \\ C^2 - S^\top C - CS^\top + (S^\top)^2 = I_n.$$

Разность этих соотношений дает равенство

$$C(S + S^\top) - (S + S^\top)C^\top = (S^\top)^2 - S^2. \quad (20)$$

Согласно лемме 9 матрица $S + S^\top$ является скалярным кратным инволютивной матрицы. То же самое можно сказать о матрице Q . Положим $Q^2 = \lambda I_n$ и подставим это равенство в первое уравнение (17):

$$\lambda I_n - \frac{2\gamma}{\mu} Q + V^2 = \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) I_n$$

или

$$V^2 = \frac{2\gamma}{\mu} Q + \left(\frac{\gamma^2}{4} - \frac{\gamma^2}{\mu^2} \right) I_n - \lambda I_n.$$

Квадрат тёплицевой кососимметричной матрицы является косым циркулянтном.

Если $\gamma \neq 0$, то V^2 — нескаларный косой циркулянт, и тогда в силу леммы 3 матрица V — косой циркулянт. Отсюда следует, что A и B — косые циркулянты, а сами матрицы T и H будут тёплицевым и ганкелевым косыми циркулянтами. Этот случай уже был разобран. Аналогично обосновывается случай $\gamma = 0$ и V — косой циркулянт.

Пусть теперь $\gamma = 0$. Неисследованной остается ситуация, когда V — скалярное кратное инволютивного циркулянта. Напомним, что V — кососимметричная матрица. Из соотношений

$$V = \beta_3 (Z - Z^\top) = \beta_3 (C + S - C^\top - S^\top) = \beta_3 (2C + S - S^\top)$$

следует, что $S^\top = S$, $V = 2\beta_3 C$. Подстановка равенства $S^\top = S$ в (20) дает условие

$$CS - SC^\top = 0.$$

Согласно лемме 8, C и S обладают тем свойством, что векторы, составленные из поддиагональных элементов их первых столбцов, пропорциональны. В силу леммы 9 матрица S с точностью до скалярного кратного является инволюцией. То же верно для матрицы C , коллинеарной матрице V . Запишем эти три факта следующим образом.

Пусть L — строго нижняя треугольная тёплицева матрица, тогда

$$C = L - L^\top, \quad S = \gamma(s_0 I_n + L + L^\top),$$

$$C^2 = \lambda_1 I_n, \quad S^2 = \lambda_2 I_n.$$

Из этих соотношений выводим систему

$$\begin{aligned} (L - L^\top)^2 &= \lambda_1 I_n, \\ (s_0 I_n + L + L^\top)^2 &= \frac{\lambda_2}{\gamma^2} I_n, \end{aligned}$$

которую после раскрытия скобок можно записать как

$$\begin{aligned} L^2 + (L^\top)^2 - LL^\top - L^\top L &= \lambda_1 I_n, \\ s_0^2 I_n + 2s_0 L + 2s_0 L^\top + L^2 + (L^\top)^2 + LL^\top + L^\top L &= \frac{\lambda_2}{\gamma^2} I_n. \end{aligned}$$

Суммируя эти уравнения, получаем

$$s_0^2 I_n + 2s_0 L + 2s_0 L^\top + 2L^2 + 2(L^\top)^2 = \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{\gamma^2} \right) I_n.$$

Поскольку L — строго нижняя треугольная тёплицева матрица, приходим к выводу, что

$$L(s_0 I_n + L) = 0.$$

Отсюда следует, что $s_0 = 0$, а тогда $L^2 = 0$.

Матрица S — косой циркулянт. По лемме 10 матрица S должна в то же время быть циркулянтном и, значит, скалярной матрицей. Отсюда следует, что скалярными будут матрицы Q и V и матрицы A и B , что противоречит условию рассматриваемого случая.

Теорема 2 доказана. Она дает полное решение системы (4) при условии $\mu \neq 0$.

Проведем небольшой анализ решений, учитывая свойство персимметричности тёплицевых матриц. Если пара (T, H) принадлежит классу 1, то

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \widehat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \sigma \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \\ 0_{r,r} & \widehat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix},$$

$$TH = \alpha \beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \sigma \widehat{L} \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$HT = \alpha \beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \widehat{L} \mathcal{P}_r \widehat{L} & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha \beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,r} \\ \widehat{L} \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Для пары из класса 2 получаем

$$T = \alpha \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}, \quad H = \beta \begin{pmatrix} \sigma \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ 0_{r,r} & 0_r & \widehat{L} \mathcal{P}_r \end{pmatrix},$$

$$TH = \alpha \beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \sigma \widehat{L} \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix},$$

$$HT = \alpha \beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \widehat{L} \mathcal{P}_r \widehat{L} & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix} = \alpha \beta \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_r & 0_{r,r} \\ 0_r^\top & 0 & 0_r^\top \\ \widehat{L} \widehat{L}^\top \mathcal{P}_r & 0_r & 0_{r,r} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для каждого класса $TH = \sigma HT$.

Важно отметить, что множества пар матриц (T, H) , составляющих классы 4' и 3' теоремы 1, являются подмножествами класса 1 теоремы 2 и его $\mathcal{P}_n$ -преобразования. Данное наблюдение получается, если в качестве нижней треугольной матрицы $\widehat{L}$ взять единичную матрицу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guterman A. E., Markova O. V., Mehrmann V.* Length realizability for pairs of quasi-commuting matrices // *Linear Algebra and Appl.* 2019. V. 568. P. 135–154.
2. *Kassel C.* Quantum Groups, Grad. Texts in Math. V. 155. Springer-Verlag. New York, 1995.
3. *Manin Yu. I.* Quantum Groups and Non-commutative Geometry. CRM. Montreal, 1988.
4. *Chriss N., Ginzburg V.* Representation Theory and Complex Geometry. Birkhauser. Boston. Basel. Berlin, 1997.
5. *Чугунов В. Н.* О некоторых множествах пар σ -коммутирующих ($\sigma \neq 0, \pm 1$) тёплицевой и ганкелевой матриц // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXXII. Зап. научн. сем. ПОМИ. Т. 482. СПб. 2019. С. 288–294.
6. *Чугунов В. Н., Икрамов Х. Д.* Об одном частном решении задачи о σ -коммутировании ($\sigma \neq 0, \pm 1$) тёплицевой и ганкелевой матриц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. N 11. С. 1817–1828.
7. *Гельфгат В. И.* Условия коммутирования тёплицевых матриц // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. N 1. С. 11–14.
8. *Икрамов Х. Д., Чугунов В. Н.* Об описании пар антикоммутирующих тёплицевой и ганкелевой матриц // Зап. научн. сем. ПОМИ. Т. 463. СПб. 2017. С. 160–223.

ON NEW CLASSES OF SOLUTIONS TO THE PROBLEM OF σ -COMMUTATION ($\sigma \neq 0, \pm 1$) OF THE TOEPLITZ AND HANKEL MATRICES WITHIN THE FRAMEWORK OF A UNIFIED APPROACH

V. N. Chugunov^{a,*}, Kh. D. Ikramov^{b,**}

^a 119333 Moscow, Gubkina str., 8, ICM RAS, Russia

^b 119992 Moscow, Leninskie Gory, Moscow State University, CMC Faculty, Russia

*e-mail: chugunov.vadim@gmail.com

**e-mail: ikramov@cs.msu.su

Received April 3, 2024

Revised April 3, 2024

Accepted April 3, 2024

Abstract. In the previous work by the authors, a unified approach to the design of pairs of matrices (T, H) solving the problem of σ -commutation of Toeplitz and Hankel matrices was proposed. In this paper, this approach is applied to the derivation of new classes of solutions.

Keywords: Teplitz matrix, Hankel matrix, σ -commutation.