

MDM-АЛГОРИТМ И ЗАДАЧА СИЛЬВЕСТРА¹⁾

© 2024 г. В. Н. Малоземов^{1,*}, Н. А. Соловьева^{2,**}, Г. Ш. Тамасян^{3,4,***}

¹199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7/9, С.-Пб гос. ун-т, Россия

²191023 С.-Петербург, наб. к-ла Грибоедова, 30/32, С.-Пб гос. экон. ун-т, Россия

³197198 С.-Петербург, ул. Ждановская, 13, ВКА им. А. Ф. Можайского, Россия

⁴198178 С.-Петербург, Большой пр-т. ВО, 61, ИПМ РАН, Россия

*e-mail: v.malozemov@spbu.ru

**e-mail: 4vinyo@gmail.com

***e-mail: grigoriytamasjan@mail.ru

Поступила в редакцию 06.02.2024 г.

Переработанный вариант 10.03.2024 г.

Принята к публикации 05.04.2024 г.

При разработке численных методов решения нелинейных минимаксных задач возникла следующая вспомогательная задача: в выпуклой оболочке некоторого конечного множества в евклидовом пространстве найти точку, имеющую наименьшую норму. В 1971 г. Б. Митчелл, В. Демьянов и В. Малоземов предложили нестандартный алгоритм решения этой задачи, который в дальнейшем получил название MDM-алгоритма (по главным буквам фамилий авторов). В данной статье рассматривается конкретная минимаксная задача: найти шар наименьшего объема, содержащий заданное конечное множество точек. Она называется задачей Сильвестра и является частным случаем задачи о чебышевском центре множества. Задаче Сильвестра сопоставляется выпуклая задача квадратичного программирования с симплексными ограничениями. Для решения этой задачи в статье предлагается использовать вариант MDM-алгоритма. С его помощью строится минимизирующая последовательность планов, такая, что у соседних планов различаются только две компоненты. Номера этих компонент выбираются на основе некоторых условий оптимальности. Доказывается слабая сходимость полученной последовательности планов, из которой следует сходимость по норме соответствующей последовательности векторов к единственному решению задачи Сильвестра. Приводятся четыре характерных примера на плоскости. Библ. 10. Фиг. 23.

Ключевые слова: задача Сильвестра, квадратичное программирование, MDM-алгоритм.

DOI: 10.31857/S0044466924070038, **EDN:** xiwvrk

ВВЕДЕНИЕ

В пространстве \mathbb{R}^n с евклидовой нормой заданы m попарно различных точек a_1, \dots, a_m . Рассмотрим задачу Сильвестра [1, 2]: найти шар наименьшего объема, содержащий все эти точки.

Задача Сильвестра формализуется следующим образом:

$$\max_{i \in 1:m} \left\{ \frac{1}{2} \|a_i - x\|^2 \right\} \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}. \quad (1)$$

Здесь x — центр шара. Задача (1) имеет решение x^* и оно единственно [2, с. 116].

Обозначим через A матрицу со столбцами a_1, \dots, a_m и через b вектор из \mathbb{R}^m с компонентами $b[i] = \frac{1}{2} \|a_i\|^2$. Введем вспомогательную задачу квадратичного программирования

$$\begin{aligned} Q(u) &:= \frac{1}{2} \langle A^T A u, u \rangle - \langle b, u \rangle \rightarrow \min, \\ \sum_{i=1}^m u[i] &= 1, \quad u[i] \geq 0 \text{ при всех } i \in 1 : m. \end{aligned} \quad (2)$$

Множество ее планов (векторов u , удовлетворяющих ограничениям задачи) обозначим через U . Очевидно, что у задачи (2) существует оптимальный план.

¹⁾Результаты разд. 5 получены в Институте проблем машиноведения РАН при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-41-00060).

Справедливо следующее утверждение (см., например, [2, с. 117–119] и [3]).

Предложение. Если u^* — оптимальный план задачи (2), то вектор $x^* = Au^*$ будет решением задачи (1). При этом

$$\max_{i \in 1:m} \left\{ \frac{1}{2} \|a_i - x^*\|^2 \right\} = -Q(u^*). \quad (3)$$

Отметим, что целевая функция $Q(u)$ задачи (2) на множестве планов U допускает представление

$$Q(u) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m u[i] \cdot \|a_i - x\|^2, \quad (4)$$

где

$$x = Au = \sum_{i=1}^m u[i] a_i.$$

Действительно, в силу определения $b[i]$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m u[i] \cdot \|a_i - x\|^2 &= 2\langle b, u \rangle - 2\langle Au, x \rangle + \|x\|^2 = \\ &= -2\left(\frac{1}{2} \|x\|^2 - \langle b, u \rangle\right) = -2Q(u). \end{aligned}$$

Из (4) следует, что $Q(u) \leq 0$ при всех $u \in U$.

На самом деле, справедлив более точный результат. Чтобы записать его, введем обозначения. Пусть $e_i, i \in 1 : m$, — орты в пространстве \mathbb{R}^m (они являются угловыми точками симплекса U) и

$$I^+(u) = \{i \in 1 : m \mid u[i] > 0\} \text{ — носитель плана } u.$$

Лемма 1. Для произвольного орта e_i справедливо равенство $Q(e_i) = 0$. Для остальных планов $u \in U$ задачи (2) выполняется строгое неравенство $Q(u) < 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $u = e_j$ при некотором $j \in 1 : m$. Тогда $I^+(u) = \{j\}$ и $x = Au = Ae_j = a_j$. Согласно (4) получим

$$Q(e_j) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m e_j[i] \cdot \|a_i - a_j\|^2 = -\frac{1}{2} \|a_j - a_j\|^2 = 0.$$

Теперь возьмем план $u \in U$, не совпадающий ни с одним из ортов e_i . Тогда носитель $I^+(u)$ содержит как минимум два индекса. Обозначим их p и q . На основании (4) запишем

$$\begin{aligned} Q(u) &= -\frac{1}{2} u[p] \cdot \|a_p - x\|^2 - \frac{1}{2} u[q] \cdot \|a_q - x\|^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i \neq p, i \neq q} u[i] \cdot \|a_i - x\|^2. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых в правой части этого равенства не равны нулю одновременно, так как точки a_i попарно различны, а следующая за ними сумма неотрицательна. Значит, $Q(u) < 0$. Лемма доказана.

Вернемся к предложению. Оно показывает, что решение задачи Сильвестра (1) сводится к решению задачи (2). В данной статье для решения задачи (2) предложен простой алгоритм, который, по существу, является вариантом MDM-алгоритма [4–7]. С помощью этого алгоритма строится последовательность $u_0, u_1, \dots, u_i, \dots$ планов задачи (2), слабо сходящаяся к некоторому решению u^* задачи (2). Последовательность $\{u_i\}$ имеет важную особенность: при переходе от u_i к u_{i+1} у плана u_i пересчитываются только две компоненты. Доказано, что соответствующая последовательность векторов $v_0, v_1, \dots, v_i, \dots$, где $v_i = Au_i$, сходится по норме к решению x^* задачи Сильвестра.

В статье дано подробное изложение результатов, представленных в тезисах [8].

1. КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Получим нестандартный вариант критерия оптимальности для задачи (2).

Теорема 1. План u задачи (2) будет оптимальным тогда и только тогда, когда для вектора $x = Au$ при некотором вещественном μ выполняются соотношения

$$\langle a_i, x \rangle - b[i] = \mu, \quad \text{если } u[i] > 0, \quad (5)$$

$$\langle a_i, x \rangle - b[i] \geq \mu, \quad \text{если } u[i] = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Напомним стандартный критерий оптимальности, использующий условия Куна—Таккера: для того, чтобы план u задачи (2) был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашлись вещественные числа $\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_m$, такие, что

$$A^T Au - b = \mu e + \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i, \quad (7)$$

$$\lambda_i u[i] = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{при всех } i \in 1 : m. \quad (8)$$

Здесь e — вектор из \mathbb{R}^m , все компоненты которого равны единице, и e_i — i -й орт в \mathbb{R}^m . Покажем, что условия (5), (6) и (7), (8) эквивалентны.

Предположим, что выполняются условия (7), (8). Обозначим $x = Au$ и распишем равенство (7) покомпонентно:

$$\langle a_i, x \rangle - b[i] = \mu + \lambda_i, \quad i \in 1 : m. \quad (9)$$

Если $u[i] > 0$, то, согласно (8), $\lambda_i = 0$. В этом случае из (9) следует (5). При $u[i] = 0$ воспользуемся тем, что $\lambda_i \geq 0$. Тогда из (9) будет следовать (6).

Проверим обратное утверждение. Пусть выполнены условия (5), (6). Обозначим

$$\lambda_i = \langle a_i, x \rangle - b[i] - \mu, \quad i \in 1 : m. \quad (10)$$

Формула (10) равносильна формуле (9), которая в свою очередь представляет собой покомпонентную запись равенства (7). Далее, по определению, $\lambda_i = 0$ при $u[i] > 0$ и $\lambda_i \geq 0$ при $u[i] = 0$. Это гарантирует выполнение условий (8).

Теорема доказана.

Замечание 1. Для константы μ можно получить явное представление

$$\mu = \|x\|^2 - \langle b, u \rangle.$$

Покажем это. Согласно (5), (6) и определению $b[i]$ имеем

$$\|x\|^2 - \|a_i - x\|^2 = 2(\langle a_i, x \rangle - b[i]) = 2\mu \quad \text{при } u[i] > 0,$$

$$\|x\|^2 - \|a_i - x\|^2 \geq 2\mu \quad \text{при } u[i] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\|a_i - x\|^2 = \|x\|^2 - 2\mu \quad \text{при } u[i] > 0,$$

$$\|a_i - x\|^2 \leq \|x\|^2 - 2\mu \quad \text{при } u[i] = 0.$$

Значит,

$$R^2 := \max_{i \in 1:m} \|a_i - x\|^2 = \|x\|^2 - 2\mu.$$

Вместе с тем, по формуле (3), $R^2 = -2Q(u)$, так что

$$\mu = \frac{1}{2} \|x\|^2 + Q(u) = \|x\|^2 - \langle b, u \rangle.$$

Критерий оптимальности (5), (6) можно еще упростить. Для этого введем оценку плана u — величину

$$\Delta(u) = \max_{i \in I^+(u)} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \} - \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \}. \quad (11)$$

Здесь $x = Au$ и $I^+(u) = \{ i \in 1 : m \mid u[i] > 0 \}$ — носитель плана u . Величина $\Delta(u)$ при всех $u \in U$ неотрицательна. Действительно,

$$\Delta(u) \geq \max_{i \in I^+(u)} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \} - \min_{i \in I^+(u)} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \} \geq 0. \quad (12)$$

Теорема 2. План u задачи (2) будет оптимальным тогда и только тогда, когда $\Delta(u) = 0$.

Доказательство. Для оптимального плана u равенство $\Delta(u) = 0$ непосредственно следует из условий (5), (6). Обратно, пусть $\Delta(u) = 0$. Согласно (12) имеем

$$\max_{i \in I^+(u)} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \} = \min_{i \in I^+(u)} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \}.$$

Значит,

$$\langle a_i, x \rangle - b[i] =: \mu \quad \text{при } i \in I^+(u). \quad (13)$$

Еще раз воспользуемся условием $\Delta(u) = 0$. Получим

$$\mu = \max_{i \in I^+(u)} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \} = \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \},$$

так что

$$\langle a_i, x \rangle - b[i] \geq \mu \quad \text{при } i \in 1 : m. \quad (14)$$

Условия (13) и (14) гарантируют оптимальность плана u .

Теорема доказана.

С помощью $\Delta(u)$ можно оценить близость вектора $x = Au$ к решению x^* задачи (1).

Теорема 3. Пусть u — план задачи (2) и $x = Au$. Тогда

$$\|x - x^*\|^2 \leq \Delta(u). \quad (15)$$

Доказательство. По предложению справедливо равенство $x^* = Au^*$, где u^* — оптимальный план задачи (2). Согласно теореме 2, $\Delta(u^*) = 0$.

Имеем

$$\|x - x^*\|^2 = \langle x, x - x^* \rangle - \langle x^*, x - x^* \rangle.$$

Воспользуемся ограничениями на план задачи (2). Получим

$$\begin{aligned} \langle x, x - x^* \rangle &= \langle u, A^T(x - x^*) \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^m u[i] \times \left((\langle a_i, x \rangle - b[i]) - (\langle a_i, x^* \rangle - b[i]) \right) \leq \\ &\leq \max_{i \in I^+(u)} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \} - \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x^* \rangle - b[i] \}. \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle x^*, x - x^* \rangle &= \sum_{i=1}^m u^*[i] \times \left((\langle a_i, x \rangle - b[i]) - (\langle a_i, x^* \rangle - b[i]) \right) \geq \\ &\geq \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \} - \max_{i \in I^+(u^*)} \{ \langle a_i, x^* \rangle - b[i] \}. \end{aligned} \quad (17)$$

Вычтем неравенство (17) из неравенства (16). Так как $\Delta(u^*) = 0$, то придем к требуемому неравенству (15).

Теорема доказана.

Оценке $\Delta(u)$ при $u \in U$ можно дать эквивалентное определение в терминах исходной задачи (1). А именно,

$$\Delta(u) = \frac{1}{2} \left(\max_{i \in 1:m} \|a_i - x\|^2 - \min_{i \in I^+(u)} \|a_i - x\|^2 \right), \quad (18)$$

где $x = Au$. Действительно, так как $b[i] = \frac{1}{2} \|a_i\|^2$, то

$$\langle a_i, x \rangle - b[i] = \frac{1}{2} (\|x\|^2 - \|a_i - x\|^2).$$

Согласно определению (11) имеем

$$\Delta(u) = \frac{1}{2} \left(\max_{i \in I^+(u)} \{ \|x\|^2 - \|a_i - x\|^2 \} - \min_{i \in 1:m} \{ \|x\|^2 - \|a_i - x\|^2 \} \right).$$

Воспользуемся следующими свойствами функций максимума и минимума:

$$\begin{aligned} \max_{i \in 1:m} \{ \alpha_i + c \} &= c + \max_{i \in 1:m} \{ \alpha_i \}, & \min_{i \in 1:m} \{ \alpha_i + c \} &= c + \min_{i \in 1:m} \{ \alpha_i \}, \\ \max_{i \in 1:m} \{ -\alpha_i \} &= - \min_{i \in 1:m} \{ \alpha_i \}, & \min_{i \in 1:m} \{ -\alpha_i \} &= - \max_{i \in 1:m} \{ \alpha_i \}. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} \Delta(u) &= \frac{1}{2} \left(\max_{i \in I^+(u)} \{ -\|a_i - x\|^2 \} - \min_{i \in 1:m} \{ -\|a_i - x\|^2 \} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\max_{i \in 1:m} \|a_i - x\|^2 - \min_{i \in I^+(u)} \|a_i - x\|^2 \right), \end{aligned}$$

что соответствует формуле (18).

Теорема 4. План u задачи (2) будет оптимальным тогда и только тогда, когда для вектора $x = Au$ выполняются равенства

$$\|a_s - x\| = \max_{i \in 1:m} \|a_i - x\| \text{ при всех } s \in I^+(u). \quad (19)$$

Доказательство. Согласно (18) критерий оптимальности $\Delta(u) = 0$ равносильно соотношению

$$\max_{i \in 1:m} \|a_i - x\| = \min_{i \in I^+(u)} \|a_i - x\|. \quad (20)$$

Если u — оптимальный план, то согласно (20) при всех $s \in I^+(u)$ имеем

$$\|a_s - x\| \geq \min_{i \in I^+(u)} \|a_i - x\| = \max_{i \in 1:m} \|a_i - x\|.$$

Обратное неравенство очевидно. Значит, справедливы равенства (19).

Наоборот, если выполнено условие (19), то справедливо соотношение (20). Оно эквивалентно равенству $\Delta(u) = 0$, гарантирующему оптимальность плана u .

Теорема доказана.

Теорему 4 можно переформулировать в геометрических терминах:

план u задачи (2) будет оптимальным тогда и только тогда, когда точки a_s при всех $s \in I^+(u)$ лежат на поверхности шара с центром в точке $x = Au$ и радиусом R , равным $\max_{i \in 1:m} \|a_i - x\|$.

Такие точки a_s будем называть опорными.

2. ВАРИАЦИЯ ПЛАНА ЗАДАЧИ (2)

Зафиксируем план u задачи (2), отличный от оптимального. Согласно теореме 2, его оценка $\Delta(u)$ положительна. Рассмотрим вариацию \tilde{u} плана u следующего вида:

$$\tilde{u} = u + \delta(e_{i'} - e_{i''}), \quad (21)$$

где e_i — орты в пространстве \mathbb{R}^m . Распишем равенство векторов (21) по компонентам:

$$\tilde{u}[i] = \begin{cases} u[i'] + \delta & \text{при } i = i', \\ u[i''] - \delta & \text{при } i = i'', \\ u[i] & \text{при остальных } i \in 1 : m. \end{cases}$$

Будем считать, что выполнено условие

$$0 < \delta \leq u[i'']. \quad (22)$$

Представление (21) и условие (22) гарантируют принадлежность вектора \tilde{u} множеству планов U задачи (2). Выбор параметра δ и индексов i' , i'' из множества $1 : m$ должен обеспечить максимально возможное уменьшение значения $Q(\tilde{u})$ целевой функции по сравнению со значением $Q(u)$.

Вычислим $Q(\tilde{u})$. Пусть $x = Au$. Отметим, что $Ae_i = a_i$. На основании (21) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle A^T A \tilde{u}, \tilde{u} \rangle &= \frac{1}{2} \|A \tilde{u}\|^2 = \frac{1}{2} \|x + \delta(a_{i'} - a_{i''})\|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \|x\|^2 - \delta \langle a_{i''} - a_{i'}, x \rangle + \frac{1}{2} \delta^2 \|a_{i'} - a_{i''}\|^2, \\ \langle b, \tilde{u} \rangle &= \langle b, u \rangle - \delta(b[i''] - b[i']). \end{aligned}$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем

$$Q(\tilde{u}) = Q(u) - \delta [(\langle a_{i''}, x \rangle - b[i'']) - (\langle a_{i'}, x \rangle - b[i'])] + \frac{1}{2} \delta^2 \|a_{i'} - a_{i''}\|^2. \quad (23)$$

Теперь выберем индексы i' и i'' из следующих соображений: $i' \in 1 : m$, $i'' \in I^+(u)$ и

$$\begin{aligned} \langle a_{i''}, x \rangle - b[i''] &= \max_{i \in I^+(u)} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \}, \\ \langle a_{i'}, x \rangle - b[i'] &= \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x \rangle - b[i] \}. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда выражение в квадратных скобках из правой части формулы (23) будет равно $\Delta(u)$ (см. определение (11)). Сама формула (23) примет вид

$$Q(\tilde{u}) = Q(u) - \delta \Delta(u) + \frac{1}{2} \delta^2 \|a_{i'} - a_{i''}\|^2. \quad (25)$$

Условие $i'' \in I^+(u)$ означает, что $u[i''] > 0$. Это важно для дальнейшего неравенства. Оно, в частности, согласуется с условием (22).

Выражение $Q(\tilde{u})$ как функция от δ является квадратным трехчленом. Его минимум достигается при $\delta = \tilde{\delta}$, где

$$\tilde{\delta} = \frac{\Delta(u)}{\|a_{i'} - a_{i''}\|^2}. \quad (26)$$

Чтобы удовлетворить условию (22), придется подкорректировать δ . Положим

$$\delta = \begin{cases} \tilde{\delta}, & \text{если } \tilde{\delta} \leq u[i''], \\ u[i''], & \text{если } \tilde{\delta} > u[i'']. \end{cases} \quad (27)$$

Ясно, что $0 < \delta \leq \tilde{\delta}$.

Все параметры в формуле (21) для \tilde{u} определены. Индексы i' и i'' находятся по формуле (24), а параметр δ — по формуле (27). При этом значение $Q(\tilde{u})$ вычисляется по формуле (25).

Отметим, что при $\delta = \tilde{\delta}$ равенство (25) упрощается:

$$Q(\tilde{u}) = Q(u) - \frac{1}{2} \tilde{\delta} \Delta(u).$$

Отсюда в силу неравенства $\delta \leq \tilde{\delta}$ следует, что в общем случае

$$Q(\tilde{u}) \leq Q(u) - \frac{1}{2} \delta \Delta(u). \quad (28)$$

3. MDM-АЛГОРИТМ

Опишем, как применяется MDM-алгоритм к решению задачи Сильвестра.

В качестве начального приближения возьмем произвольный план u_0 задачи (2). Ему соответствует вектор $x_0 = Au_0$.

Пусть уже имеется k -е приближение $u_k \in U$. Ему соответствует вектор $x_k = Au_k$. Проверим план u_k на оптимальность. Для этого выберем индексы $i'_k \in 1 : m$ и $i''_k \in I^+(u_k)$ из условий

$$\begin{aligned} \langle a_{i'_k}, x_k \rangle - b[i'_k] &= \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x_k \rangle - b[i] \}, \\ \langle a_{i''_k}, x_k \rangle - b[i''_k] &= \max_{i \in I^+(u_k)} \{ \langle a_i, x_k \rangle - b[i] \}. \end{aligned}$$

Вычислим оценку $\Delta(u_k)$ плана u_k :

$$\Delta(u_k) = \langle a_{i''_k} - a_{i'_k}, x_k \rangle - (b[i''_k] - b[i'_k]).$$

Если $\Delta(u_k) = 0$, то u_k — решение задачи (2), а x_k — решение задачи (1). Процесс закончен.

Пусть $\Delta(u_k) > 0$. В этом случае будем говорить, что план u_k порождает k -ю итерацию. Вычислим

$$\tilde{\delta}_k = \frac{\Delta(u_k)}{\|a_{i'_k} - a_{i''_k}\|^2} \tag{29}$$

и положим

$$\delta_k = \begin{cases} \tilde{\delta}_k, & \text{если } \tilde{\delta}_k \leq u_k[i''_k], \\ u_k[i''_k], & \text{если } \tilde{\delta}_k > u_k[i''_k]. \end{cases} \tag{30}$$

Очевидно, что $0 < \delta_k \leq \tilde{\delta}_k$. Если $\delta_k = \tilde{\delta}_k$, то k -ю итерацию будем называть *неусеченной*. При $\delta_k < \tilde{\delta}_k$ получаем *усеченную итерацию*. Формулы

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \delta_k (e_{i'_k} - e_{i''_k}), \\ x_{k+1} &= x_k + \delta_k (a_{i'_k} - a_{i''_k}) \end{aligned} \tag{31}$$

определяют очередное $(k + 1)$ -е приближение. Описание алгоритма завершено.

С помощью предложенного алгоритма строятся две последовательности

$$\begin{aligned} u_0, u_1, \dots, u_k, \dots, \\ x_0, x_1, \dots, x_k, \dots \end{aligned} \tag{32}$$

Они конечны, если при некотором k выполнится равенство $\Delta(u_k) = 0$. Они бесконечны, когда $\Delta(u_k) > 0$ при всех $k = 0, 1, \dots$. В следующем разделе изучается вопрос о сходимости этих последовательностей.

4. СХОДИМОСТЬ MDM-АЛГОРИТМА

Итак, считаем, что

$$\Delta(u_k) > 0 \quad \text{при всех } k = 0, 1, \dots \tag{33}$$

Согласно (28) при всех $k = 0, 1, \dots$ выполняется неравенство

$$Q(u_k) - Q(u_{k+1}) \geq \frac{1}{2} \delta_k \Delta(u_k). \tag{34}$$

Так как δ_k и $\Delta(u_k)$ положительны, то $Q(u_k) > Q(u_{k+1})$. Получили, что последовательность $\{Q(u_k)\}$ строго убывает. Кроме того, она ограничена снизу наименьшим значением $Q(u)$ на множестве планов U . Значит, последовательность $\{Q(u_k)\}$ имеет предел. Обозначим этот предел через α и запишем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q(u_k) = \alpha. \tag{35}$$

Напомним, что MDM-алгоритм состоит из итераций двух типов: неусеченных (при $\delta_k = \tilde{\delta}_k$) и усеченных (при $\delta_k < \tilde{\delta}_k$).

Лемма 2. *Количество идущих подряд усеченных итераций конечно.*

Доказательство существенно опирается на тот факт, что в последовательности $\{u_k\}$ все планы попарно различны в силу строгого убывания последовательности $\{Q(u_k)\}$.

Пусть итерация с номером k_0 усеченная и далее следуют также усеченные итерации. Согласно (30), при $k \geq k_0$ справедливо равенство $\delta_k = u_k[i_k'']$. Правило перехода от плана u_k к плану u_{k+1} принимает вид

$$u_{k+1}[i] = \begin{cases} u_k[i_k'] + u_k[i_k''] & \text{при } i = i_k', \\ 0 & \text{при } i = i_k'', \\ u_k[i] & \text{при остальных } i \in 1 : m. \end{cases} \quad (36)$$

По определению, $u_k[i_k''] > 0$. Если $u_k[i_k'] > 0$, то у плана u_{k+1} появляется дополнительная нулевая компонента. При $u_k[i_k'] = 0$ формула (36) упрощается

$$u_{k+1}[i] = \begin{cases} u_k[i_k''] & \text{при } i = i_k', \\ 0 & \text{при } i = i_k'', \\ u_k[i] & \text{при остальных } i \in 1 : m. \end{cases}$$

Ненулевая компонента $u_k[i_k'']$ переместилась на позицию $i = i_k'$, на которой раньше стоял ноль. Количество нулевых компонент не изменилось. Вместе с тем, количество последовательных преобразований, перемещающих положительную компоненту текущего плана на место нулевой компоненты, конечно. Значит, через конечное число усеченных итераций с $u_k[i_k'] = 0$ мы получим план, у которого аналогичная компонента положительна. У следующего плана появится дополнительная нулевая компонента.

Описанный процесс не может быть бесконечным, так как все планы u_k ненулевые.

Лемма доказана.

Таким образом, MDM-алгоритм может содержать конечные блоки подряд идущих усеченных итераций.

Из последовательности $\{u_k\}$ исключим все планы, порождающие усеченные итерации. Останется бесконечная подпоследовательность планов $\{u_{k_j}\}$, порождающих неусеченные итерации.

Теорема 5. *Для векторов $x_{k_j} = Au_{k_j}$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j} = x^*,$$

где x^* — решение задачи (1).

Доказательство. Воспользуемся определением неусеченной итерации и формулой (29). Запишем

$$\delta_{k_j} = \tilde{\delta}_{k_j} = \frac{\Delta(u_{k_j})}{\|a_{i_{k_j}'} - a_{i_{k_j}''}\|^2} \geq \frac{\Delta(u_{k_j})}{d^2},$$

где $d = \max_{i \in 1:m, j \in 1:m} \|a_i - a_j\|$. Подставив это неравенство в (34) при $k = k_j$, получим

$$Q(u_{k_j}) - Q(u_{k_j+1}) \geq \frac{[\Delta(u_{k_j})]^2}{2d^2}. \quad (37)$$

Поскольку последовательность $\{Q(u_k)\}$ сходится, то левая часть неравенства (37) стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta(u_{k_j}) = 0. \quad (38)$$

На основании (15) приходим к заключению теоремы.

Вернемся к предельному соотношению (35) и выясним, чему равна константа α .

Теорема 6. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} Q(u_k) = Q(u^*),$$

где u^* — некоторое решение задачи (2).

Так что $\alpha = Q(u^*)$.

Доказательство. По определению множества планов U задачи (2) последовательность $\{u_{k_j}\}$ ограничена. Из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не умаляя общности, будем считать, что вся последовательность $\{u_{k_j}\}$ сходится к вектору \check{u} ,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u_{k_j} = \check{u}. \quad (39)$$

Очевидно, что \check{u} — план задачи (2). Покажем, что это оптимальный план.

Достаточно проверить, что $\Delta(\check{u}) = 0$. Допустим противное $\Delta(\check{u}) > 0$. Выберем столь большое J , чтобы при $j \geq J$ выполнялись неравенства

$$u_{k_j}[i] > 0 \quad \text{при } i \in I^+(\check{u}), \quad (40)$$

$$\left| (\langle a_i, x_{k_j} \rangle - b[i]) - (\langle a_i, x^* \rangle - b[i]) \right| < \varepsilon \quad \text{при } i \in 1:m. \quad (41)$$

Здесь выбрано $\varepsilon = \frac{1}{4}\Delta(\check{u})$, x^* — решение задачи (1). В силу (40) имеем $I^+(\check{u}) \subset I^+(u_{k_j})$. Далее

$$\begin{aligned} \Delta(u_{k_j}) &= \max_{i \in I^+(u_{k_j})} \{ \langle a_i, x_{k_j} \rangle - b[i] \} - \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x_{k_j} \rangle - b[i] \} \geq \\ &\geq \max_{i \in I^+(\check{u})} \{ \langle a_i, x_{k_j} \rangle - b[i] \} - \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x_{k_j} \rangle - b[i] \}. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся неравенством (41). Получим

$$\begin{aligned} \Delta(u_{k_j}) &\geq \max_{i \in I^+(\check{u})} \{ \langle a_i, x^* \rangle - b[i] - \varepsilon \} - \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x^* \rangle - b[i] + \varepsilon \} = \\ &= \max_{i \in I^+(\check{u})} \{ \langle a_i, x^* \rangle - b[i] \} - \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x^* \rangle - b[i] \} - 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (39) следует, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Au_{k_j} = A\check{u},$$

так что, по теореме 5, $x^* = A\check{u} =: \check{x}$. Заменим в (42) x^* на \check{x} . Придем к неравенству

$$\Delta(u_{k_j}) \geq \Delta(\check{u}) - 2\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta(\check{u}) > 0.$$

Это противоречит соотношению (38).

Установлено, что \check{u} оптимальный план задачи (2). Будем писать u^* вместо \check{u} . На основании (39) по непрерывности получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} Q(u_{k_j}) = Q(u^*).$$

Строгое убывание последовательности $\{Q(u_k)\}$ гарантирует справедливость заключения теоремы.

В теореме 6, по существу, установлена слабая сходимости последовательности $\{u_k\}$.

Теорема 7 (о сильной сходимости последовательности $\{x_k\}$). *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\| = 0,$$

где x^* — решение задачи (1).

Доказательство. Согласно теореме 1 имеем

$$\|x^*\|^2 = \langle x^*, Ax^* \rangle = \langle A^T x^*, u^* \rangle = \sum_{i=1}^m u^*[i] (\langle a_i, x^* \rangle - b[i]) + b[i] =$$

$$= \langle b, u^* \rangle + \sum_{i \in I^+(u^*)} u^*[i] \mu^* = \langle b, u^* \rangle + \mu^*.$$

Отсюда следует, что

$$\mu^* - \frac{1}{2} \|x^*\|^2 = \frac{1}{2} \|x^*\|^2 - \langle b, u^* \rangle = Q(u^*). \quad (43)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \langle x^*, x_k \rangle &= \langle A^T x^*, u_k \rangle = \sum_{i=1}^m u_k[i] (\langle a_i, x^* \rangle - b[i]) + b[i] \geq \\ &\geq \langle b, u_k \rangle + \min_{i \in 1:m} \{ \langle a_i, x^* \rangle - b[i] \} = \langle b, u_k \rangle + \mu^*. \end{aligned}$$

Теперь запишем

$$\begin{aligned} \|x_k - x^*\|^2 &= \|x_k\|^2 - 2\langle x^*, x_k \rangle + \|x^*\|^2 \leq \\ &\leq \|x_k\|^2 - 2(\langle b, u_k \rangle + \mu^*) + \|x^*\|^2 = \\ &= 2\left(\frac{1}{2} \|x_k\|^2 - \langle b, u_k \rangle\right) - 2\left(\mu^* - \frac{1}{2} \|x^*\|^2\right). \end{aligned}$$

Согласно (43) получаем

$$\|x_k - x^*\|^2 = 2(Q(u_k) - Q(u^*)).$$

Остается сослаться на теорему 6. Теорема доказана.

5. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим четыре характерных примера на применение MDM-алгоритма к решению задачи Сильвестра на плоскости. Вычисления заканчивались, когда на очередном приближении u_k выполнялось одно из условий:

$$\sqrt{\Delta(u_k)} < 5 \cdot 10^{-3}$$

или

$$\|x_k - x_{k+1}\| < 10^{-5}.$$

При описании результатов используется обозначение $R_k = \sqrt{-2Q(u_k)}$ для приближенного значения радиуса минимального круга.

Пример 1. Возьмем три точки, лежащих на окружности, с центром в начале координат и радиусом 2 (см. точки синего цвета на фиг. 1):

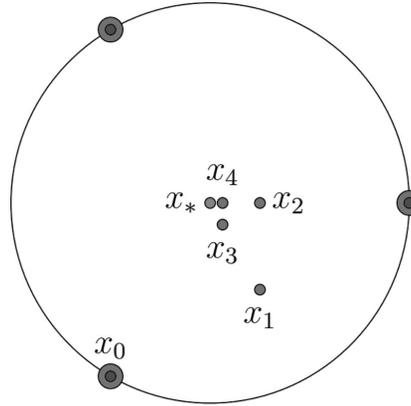
$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

В качестве начального приближения возьмем вектор $u_0 = (1, 0, 0)$, что соответствует $x_0 = a_1$. На фиг. 1 зеленым цветом отмечен искомый центр минимальной окружности. Точки на окружности, выделенные красным цветом, являются опорными.

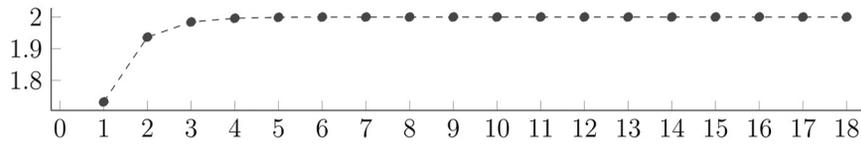
Ниже в виде графиков приведены результаты вычислений. Всюду по оси абсцисс указывается номер итерации.

В качестве начального приближения можно взять центр тяжести заданной системы a_1, \dots, a_m , а именно вектор u_0 с компонентами $u_0[i] = \frac{1}{m}$, $i \in 1 : m$. Можно поступить иначе: искусственно к исходному набору точек a_k добавить еще одну точку $a_{m+1} := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i$. При этом минимальный круг сохранится. В качестве начального приближения возьмем план u_0 с компонентами $u_0[i] = 0$, $i \in 1 : m$, $u_0[m+1] = 1$.

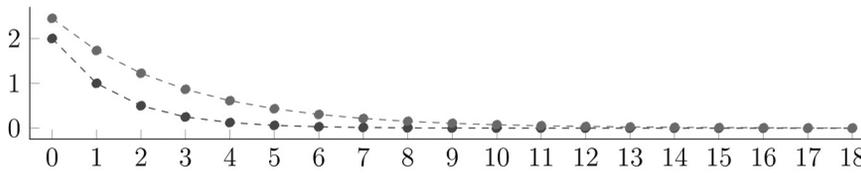
Пусть в примере 1 начальное приближение строится с привлечением дополнительной точки $a_4 = 0$. Положим $u_0 = (0, 0, 0, 1)$, что соответствует $x_0 = a_4 = 0$. На фиг. 6–10 приведены результаты расчетов.



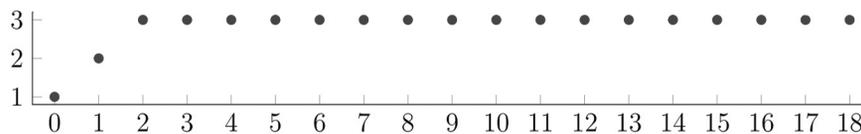
Фиг. 1. Ход решения при $u_0 = (1, 0, 0)$.



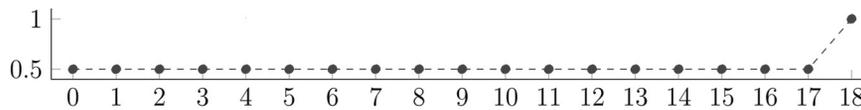
Фиг. 2. График последовательности R_k .



Фиг. 3. Графики оценок $\|x_k - x_*\|$ и $\sqrt{\Delta(u_k)}$.

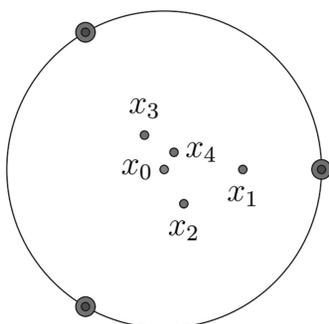


Фиг. 4. График последовательности $|I^+(u_k)|$.

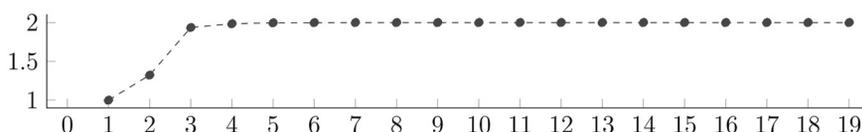


Фиг. 5. График отношения $\frac{\|x_{k+1} - x_*\|}{\|x_k - x_*\|}$.

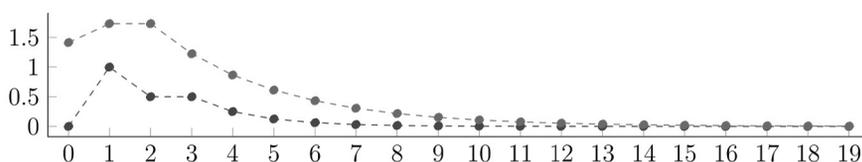
На фиг. 8 видно, что план u_0 не оптимальный, $\sqrt{\Delta(u_0)} > 0$. Вместе с тем, соответствующая ему точка $x_0 = 0$ является решением исходной задачи (1). Оптимальным планом задачи (2) будет вектор $(1/3, 1/3, 1/3, 0)$.



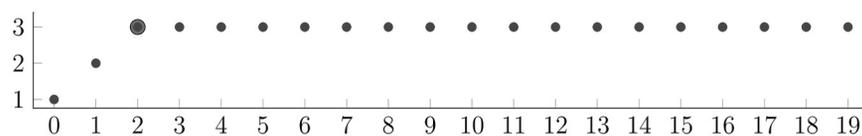
Фиг. 6. Ход решения при $u_0 = (0, 0, 0, 1)$.



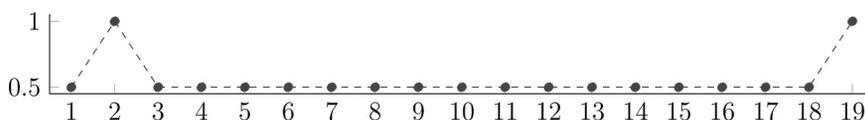
Фиг. 7. График последовательности R_k .



Фиг. 8. Графики оценок $\|x_k - x_*$ и $\sqrt{\Delta(u_k)}$.



Фиг. 9. График последовательности $|I^+(u_k)|$.

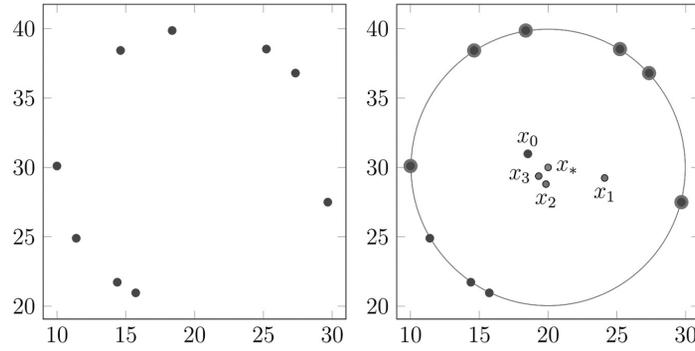


Фиг. 10. График отношения $\frac{\|x_{k+1} - x_*\|}{\|x_k - x_*\|}$.

На фиг. 9 красным цветом выделена усеченная итерация. В обоих случаях вычисления закончились по условию $\sqrt{\Delta(u_k)} < 0.005$.

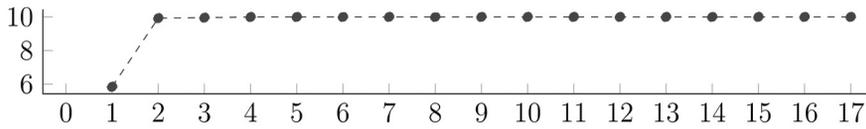
Пример 2. Предположим, что нужно выяснить, лежит ли данный набор точек на некоторой окружности. Это можно сделать, решая соответствующую задачу Сильвестра.

В примере генерировалось 9 случайных точек, лежащих на границе круга $(x - 20)^2 + (y - 30)^2 \leq 10$ (см. фиг. 11).

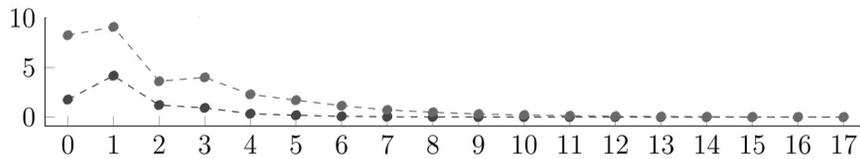


Фиг. 11. Исходные данные и ход решения задачи.

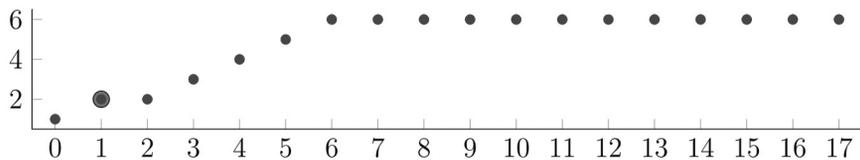
Начальное приближение строилось с привлечением дополнительной точки. На графиках 12–15 представлены соответствующие результаты расчетов. Вычисления закончились на 17-й итерации по достижению условия $\|x_{16} - x_{17}\| < 10^{-5}$.



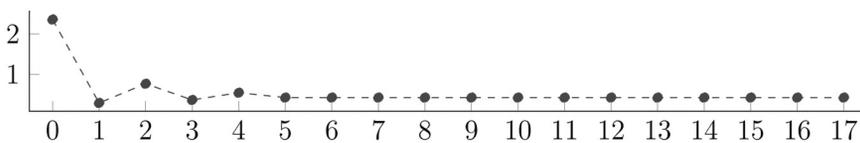
Фиг. 12. График последовательности R_k .



Фиг. 13. Графики оценок $\|x_k - x_*$ и $\sqrt{\Delta(u_k)}$.

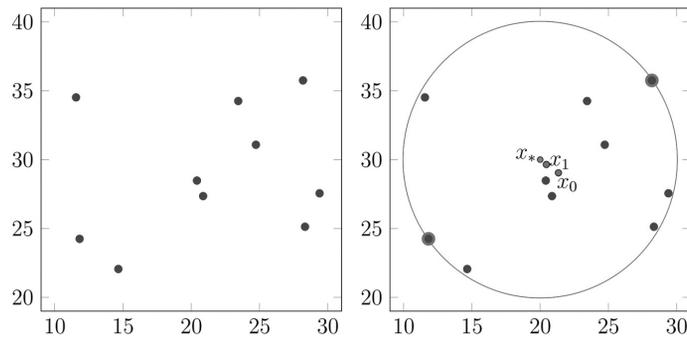


Фиг. 14. График последовательности $|I^+(u_k)|$.



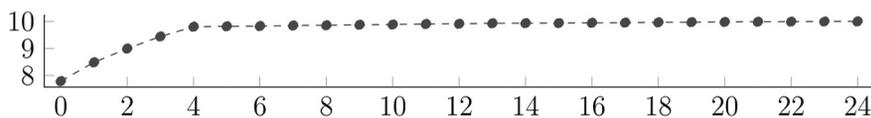
Фиг. 15. График отношения $\frac{\|x_{k+1} - x_*\|}{\|x_k - x_*\|}$.

Пример 3. В этом примере генерировалось 10 случайных точек, лежащих в круге $(x - 20)^2 + (y - 30)^2 \leq 10$ (см. фиг. 16).

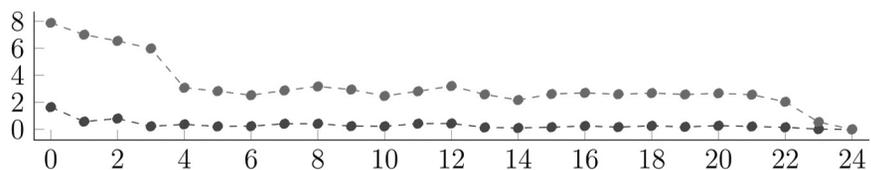


Фиг. 16. Исходные данные и ход решения задачи.

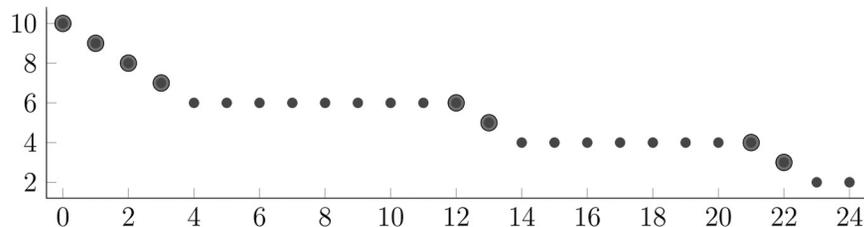
На фиг. 16–20 представлены результаты решения задачи Сильвестра, когда в качестве начального приближения выбран центр тяжести исходных точек. В этом случае мощность носителя $|I^+(u_0)|$ максимальна и равна 10. На фиг. 19 отчетливо демонстрируется нецелесообразность выбора начального приближения, у которого мощность носителя сильно превышает размерность пространства. Вычисления закончились на 24-й итерации при выполнении правила останова $\sqrt{\Delta(u_{24})} < 0.005$.



Фиг. 17. График последовательности R_k .

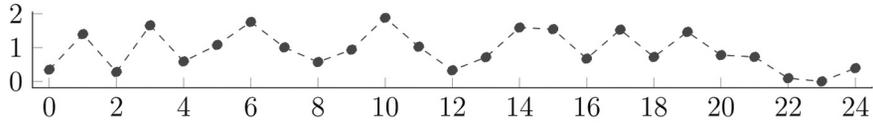


Фиг. 18. Графики оценок $\|x_k - x_*\|$ и $\sqrt{\Delta(u_k)}$.

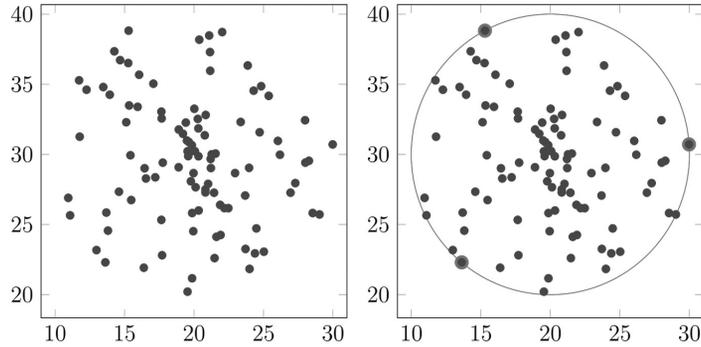


Фиг. 19. График последовательности $|I^+(u_k)|$.

Пример 4. Решим задачу Сильвестра со 100 случайными точками лежащими в круге $(x - 20)^2 + (y - 30)^2 \leq 10$ (см. фиг. 21).

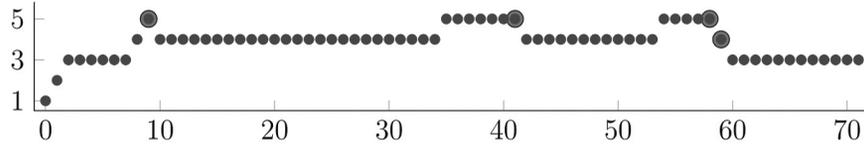


Фиг. 20. График отношения $\frac{\|x_{k+1} - x_*\|}{\|x_k - x_*\|}$.

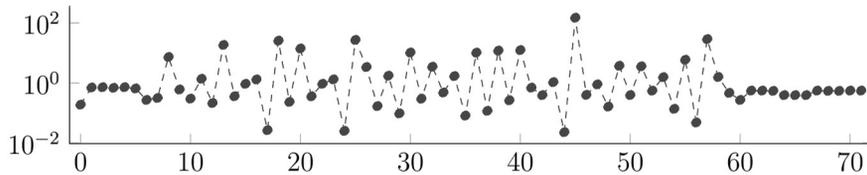


Фиг. 21. Исходные данные и решение задачи.

На фиг. 22, 23 представлены результаты расчетов, когда в качестве начального приближения выбрана одна из исходных точек. Вычисления закончились на 71-й итерации при выполнении условия $\|x_{70} - x_{71}\| < 10^{-5}$.



Фиг. 22. График последовательности $|I^+(u_k)|$.



Фиг. 23. График отношения $\frac{\|x_{k+1} - x_*\|}{\|x_k - x_*\|}$.

Замечание 2. Эффективность MDM-алгоритма решения задачи Сильвестра зависит от величины $|I^+(u^*)|$. Наиболее благоприятный случай, когда $|I^+(u^*)| = n + 1$.

Замечание 3. Если план u_k порождает усеченную итерацию, то при переходе от u_k к u_{k+1} мощность $|I^+(u_k)|$ уменьшается на единицу при $u_k[i'_k] > 0$ и остается прежней при $u_k[i'_k] = 0$ (см. доказательство леммы 2).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Известно, что задача Сильвестра о шаре наименьшего объема, содержащего m заданных точек в n -мерном евклидовом пространстве, сводится к выпуклой задаче квадратичного программирования [2, с. 117, 118]. Двойственная к ней задача после перемены знака у целевой функции принимает

вид (2). Обычно решается именно задача (2). По её оптимальному плану легко восстанавливается единственное решение задачи Сильвестра. Для решения задачи (2) в квадратичном программировании имеются конечные методы (например, метод Данцига [9]), которые эффективно работают при относительно небольших значениях n и m . На каждом шаге таких методов нужно решать систему линейных уравнений и проверять некоторые условия. При больших n и m погрешность вычислений становится критической, что часто приводит к неверному результату. В связи с этим разрабатываются простые итеративные методы, бесконечные в общем случае, с гарантированной сходимостью. В данной статье предлагается такой метод для решения задачи (2). Он аналогичен MDM-алгоритму для нахождения точки выпуклой оболочки конечного множества с наименьшей нормой [4]. Приводятся примеры решения задачи Сильвестра на плоскости. Они преследуют скромную цель — пояснить, как выбирать начальное приближение, и продемонстрировать характер сходимости MDM-алгоритма с учетом усеченных и неусеченных итераций.

В статье используется принципиальная схема MDM-алгоритма, ориентированная на доказательство его сходимости. Однако существует и рабочая схема, которая применяется при решении реальных задач. Вопрос о рабочей схеме и связанный с ним вопрос о сравнении MDM-алгоритма с другими методами решения задачи Сильвестра, в данной работе не рассматриваются. Авторы планируют посвятить этой теме отдельное исследование, в котором будет учтена информация из обзорной статьи [10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зуховицкий С. И.* Алгоритм для отыскания точки, наименее уклоняющейся (в смысле П. Л. Чебышева) от данной системы m точек // ДАН УССР, 1951, № 6. С. 404–407.
2. *Гавурин М. К., Малоземов В. Н.* Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 176 с.
3. *Малоземов В. Н., Плоткин А. В.* Двойственность в квадратичном программировании. Задача Сильвестра // Семинар “CNSA & NDO”. Избранные доклады. 8 декабря 2021 г. (дата обращения: 31.01.2024).
4. *Митчелл Б. Ф., Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Нахождение ближайшей к началу координат точки многогранника // Вестник ЛГУ. 1971. № 19. С. 38–45.
5. *Малоземов В. Н.* МДМ-методу — 50 лет // Семинар “CNSA & NDO”. Избранные доклады. 10 ноября 2021 г. (дата обращения: 31.01.2024).
6. *Lopez J., Barbero A., Dorronsoro J. R.* On the equivalence of the SMO and MDM algorithms for SVM training / Springer-Verlag Berlin Heidelberg. W. Daelemans et al. (Eds.): ECML PKDD 2008, Part I, LNAI 5211, pp. 288–300.
7. *Малозёмов В. Н., Соловьева Н. А.* МДМ-метод для решения общей квадратичной задачи математической диагностики // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. 10(3). С. 516–529.
8. *Малоземов В. Н., Соловьева Н. А., Тамасян Г. Ш.* MDM-алгоритм и задача Сильвестра // Математические методы распознавания образов: Тезисы докладов 21-й Всероссийской конф. с международным участием, Москва, 12–15 декабря 2023 года. М.: РАН, 2023. С. 87–89.
9. *Даугавет В. А.* Численные методы квадратичного программирования. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2004. 128 с.
10. *E. Alper Yildirim.* Two algorithms for the minimum enclosing ball problem // SIAM J. OPTIM. Vol. 19. N 3. 2008. P. 1368–1391.

MDM ALGORITHM AND SYLVESTER'S PROBLEMV. N. Malozemov^{a,*}, N. A. Solovyova^{b,**}, G. Sh. Tamasyan^{c,d,***}^a 199034, St. Petersburg, Universitetskaya Emb., 7/9, S.-Pb State University, Russia^b 191023, St. Petersburg, Griboyedova Channel Emb., 30/32, S.-Pb State Economy. Univ., Russia^c 197198, St. Petersburg, Zhdanovskaya Str., 13, A. F. Mozhaisky MCA^d 198178, St. Petersburg, Bolshoy Ave. VO, 61, IAM RAS, Russia

*e-mail: v.malozemov@spbu.ru

**e-mail: 4vinyo@gmail.com

***e-mail: grigoriytamasjan@mail.ru

Received February 6, 2024

Revised March 1, 2024

Accepted April 5, 2024

Abstract. When developing numerical methods for solving nonlinear minimax problems, the following auxiliary problem arose: in the convex hull of some finite set in Euclidean space, find the point with the lowest norm. In 1971, B. Mitchell, V. Demyanov and V. Malozemov proposed a non-standard algorithm for solving this problem, which later became known as the MDM algorithm (based on the capital letters of the authors' surnames). This article discusses a specific minimax problem: to find a ball of the smallest volume containing a given finite set of points. It is called the Sylvester problem and is a special case of the Chebyshev center of the set problem. The convex quadratic programming problem with simplex constraints is compared to the Sylvester problem. To solve this problem, the article suggests using a variant of the MDM algorithm. With its help, a minimizing sequence of plans is built, such that only two components differ from neighboring plans. The numbers of these components are selected based on certain optimality conditions. The weak convergence of the obtained sequence of plans is proved, from which follows the norm convergence of the corresponding sequence of vectors to the only solution of the Sylvester problem. Four typical examples on the plane are given.

Keywords: Sylvester's problem, quadratic programming, MDM algorithm.