

УДК 519.635

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТОНКОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА<sup>1)</sup>

© 2024 г. Е. В. Ласковец<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> 656049 Барнаул, пр-т Ленина, 61, Алтайский государственный университет, Институт математики  
и информационных технологий

\*e-mail: [katerezanova@mail.ru](mailto:katerezanova@mail.ru)

Поступила в редакцию 21.11.2023 г.  
Переработанный вариант 23.02.2024 г.  
Принята к публикации 05.03.2024 г.

Предложена математическая модель, описывающая течение тонкого слоя жидкости по наклонной, неравномерно нагретой подложке. В качестве определяющих уравнений используются система Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости и соотношения, представляющие собой обобщенные кинематическое, динамическое и энергетическое условия на границе раздела для случая испарения. Постановка приводится в двумерном случае для больших чисел Рейнольдса. Решение задачи осуществляется в рамках длинноволнового приближения. Проведен параметрический анализ задачи, получено эволюционное уравнение для нахождения толщины жидкого слоя. Предложен алгоритм численного решения для задачи о периодическом стекании жидкости по наклонной подложке. Изучено влияние гравитационных эффектов и характера нагрева твердой подложки на течение жидкого слоя. Библ. 24. Фиг. 4. Табл. 2.

**Ключевые слова:** термокапиллярное течение жидкости, обобщенные условия на границе раздела, испарение, эволюционное уравнение, численное решение.

DOI: 10.31857/S0044466924060156, EDN: XYAAUT

### ВВЕДЕНИЕ

Потребность в теоретическом изучении задач, связанных с течением тонких слоев жидкостей, как правило, связана с их широкой применимостью в наукоемкой промышленности. Технологии, использующие в качестве рабочих сред испаряющиеся жидкости, встречаются, например, в системах термостабилизации и при нанесении покрытий.

Часто течения жидких пленок сопровождаются газовыми потоками, оказывающими влияние на характеристики течений. Изучению динамики тонких слоев жидкостей, сопровождаемых спутным потоком газа, посвящен ряд экспериментальных работ (см., например, [1, 2, 3]).

Одним из наиболее важных вопросов при изучении течений со свободными границами и границами раздела является формулировка граничных условий. Большое количество эффектов, влияющих на характер процессов, существенно затрудняет математическое моделирование подобных течений. В работах [4, 5, 6, 7, 8, 9] проводится математическое моделирование испаряющихся пленок. В работе [6] принимаются во внимание дополнительные силы на границе раздела, учитывающие перенос

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке проекта “Современные модели гидродинамики для задач природопользования, промышленных систем и полярной механики” (2024–26) (гос. задание FZMW-2024-0003).

энергии на газожидкостной границе и эффективное давление. В статье [10] обсуждается влияние эффекта Марангони, гравитационного эффекта, степени неравновесности и динамики пара на неустойчивость течения пленки жидкости, сопровождаемой потоком газа. Подробный вывод условий на свободной границе на основе законов сохранения массы, импульса и энергии с учетом дополнительных гипотез проведен в [11]. Для получения граничных условий с учетом испарения в [12] использовались интегральные законы сохранения без предположения о неразрывности касательных скоростей и температуры. В [13] аналогичные условия выведены в предположении о диффузионном потоке пара на границе раздела.

Часто течения тонких слоев жидкостей моделируются с помощью уравнений Навье–Стокса [14, 15] или Обербека–Буссинеска [8]. В указанных работах проведен параметрический анализ задачи, что позволяет выявить эффекты, оказывающие наибольшее влияние на характер течения. В статьях [8, 14, 15] моделирование осуществлялось для случая умеренных чисел Рейнольдса порядка  $O(1)$ .

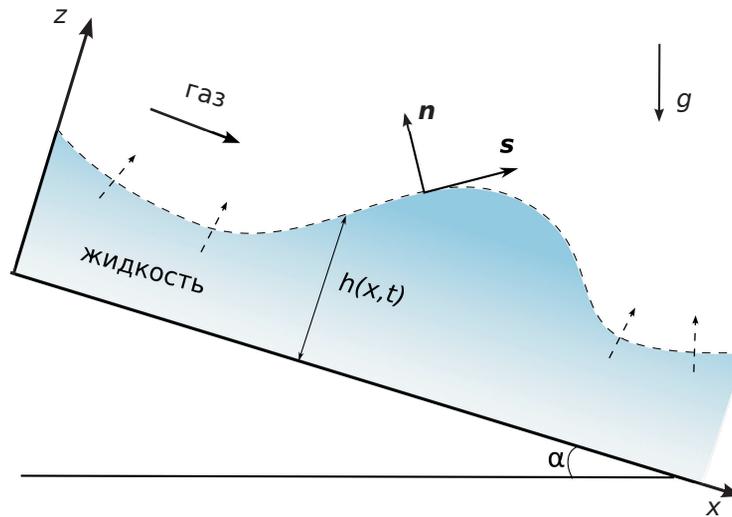
В настоящей работе предложена односторонняя математическая модель, описывающая течение тонкого слоя жидкости по наклонной неравномерно нагреваемой подложке. При моделировании приняты во внимание гравитационный, капиллярный и термокапиллярный эффекты, испарение и действие дополнительных касательных напряжений со стороны сопутствующего потока газа. Моделирование проводится на основе длинноволнового приближения системы уравнений Навье–Стокса и переноса тепла, кинематического, динамического и энергетического условий на границе раздела сред, обобщенных для случая ненулевого потока пара [13, 16–18]. Кинетическое уравнение Герца–Кнудсена используется для определения зависимости локального потока массы пара от температуры. На твердой непроницаемой подложке, подверженной неоднородному нагреву, выполняются условия прилипания. Для случая больших чисел Рейнольдса порядка  $O(1/\varepsilon)$  построены точные решения для главных и первых членов разложения по степеням малого параметра, проведен параметрический анализ задачи [19]. Получено эволюционное уравнение, определяющее положение границы раздела сред, для главных членов разложения. Схема численного решения реализована для случая периодического стекания тонкого слоя жидкости. На примере системы “этанол – азот” показано, что гравитационные эффекты и характер нагрева подложки оказывают существенное влияние на структуру течения жидкости.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ИСПАРЕНИЯ

Рассматривается тонкий слой вязкой несжимаемой жидкости, стекающий по наклонной, неравномерно нагретой твердой непроницаемой подложке в условиях спутного потока газа и испарения на термокапиллярной границе раздела сред. В данной постановке динамические процессы в газе не принимаются во внимание (т.е. строится односторонняя модель). Тем не менее, касательные напряжения, индуцируемые газовым потоком, могут учитываться на границе раздела.

Пусть  $\mathbf{v} = (u, w)$  – вектор скорости жидкости,  $p$  – давление,  $T$  – температура,  $\nu$  и  $\chi$  – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности, соответственно,  $\rho$  – плотность жидкости. Рассматривается движение жидкости по твердой подложке при наличии деформируемой границы раздела. Твердая непроницаемая подложка наклонена под углом  $\alpha$  к линии горизонта. Система координат выбрана таким образом, что ось  $Ox$  направлена вдоль твердой границы, определяемой уравнением  $z = 0$ . Положение границы раздела задается с помощью соотношения  $z = h(x, t)$  (см. фиг. 1). Тогда вектор силы тяжести  $\mathbf{g}$  имеет вид  $\mathbf{g} = (g_1, g_2) = (g \sin \alpha, -g \cos \alpha)$ ,  $g = |\mathbf{g}|$ .

В данной постановке характерная длина деформации свободной поверхности существенно превосходит амплитуду деформации. Таким образом, в задаче имеется два различных масштаба длины:  $l$  – продольная характерная длина,  $d$  – поперечная характерная длина, причем  $l \gg d$ . Пусть  $\varepsilon = d/l$  – малый параметр системы. Отметим, что характерные продольная и поперечная скорости  $u_*$  и  $w_*$  также связаны между собой:  $w_* = \varepsilon u_*$ , а характерное время процесса  $t_*$  связано с другими параметрами задачи следующим образом:  $l = u_* t_*$ . Характерное давление может быть задано выражением  $p_* = \rho u_*^2$ .



Фиг. 1. Геометрия области течения.

Такой выбор характерных параметров позволяет моделировать течения при достаточно больших значениях чисел Рейнольдса.

В рассматриваемой задаче в качестве математической модели течения тонкого слоя жидкости используется система уравнений Навье–Стокса и уравнение переноса тепла. С учетом введенных обозначений в безразмерном виде уравнения записываются следующим образом:

$$\text{Re}\varepsilon^2(u_t + uu_x + wu_z) - \varepsilon^2 u_{xx} = u_{zz} - \text{Re}\varepsilon^2 p_x + \frac{\gamma}{\text{Re}} \sin \alpha, \quad (1)$$

$$\text{Re}\varepsilon^4(w_t + ww_x + ww_z) - \varepsilon^4 w_{xx} - \varepsilon^2 w_{zz} = -\text{Re}\varepsilon^2 p_z - \frac{\gamma}{\text{Re}} \cos \alpha, \quad (2)$$

$$u_x + w_z = 0, \quad (3)$$

$$\text{Re Pr}\varepsilon^2(T_t + uT_x + wT_z) - \varepsilon^2 T_{xx} = T_{zz}, \quad (4)$$

где  $\text{Re} = u_* l / \nu$  – число Рейнольдса,  $\text{Pr} = \nu / \chi$  – число Прандтля,  $\gamma = g d^3 / \nu^2$  – число Галилея.

Положение границы раздела сред в безразмерной постановке задачи также определяется в виде  $z = h(x, t)$ . Вектор нормали  $\mathbf{n}$  и касательный вектор  $\mathbf{s}$  к этой границе имеют координаты  $(n_1, n_2)$  и  $(n_2, -n_1)$ , соответственно. Здесь  $n_1 = -\varepsilon h_x / \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}$ ,  $n_2 = 1 / \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}$ . Кривизна свободной границы и скорость ее перемещения по направлению внешней нормали задаются соотношениями:

$$2H = \varepsilon h_{xx} / \sqrt{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^3}, \quad D_n = -\varepsilon h_t / \sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}.$$

Пусть характерная скорость в системе определяется следующим образом:  $u_* = \nu / d$ . Тогда получим, что число Рейнольдса имеет порядок  $O(1/\varepsilon)$ . Таким образом, дальнейшее моделирование осуществляется для случая больших чисел Рейнольдса.

На границе раздела  $z = h(x, t)$  кинематическое, динамическое и энергетическое условия обобщены для случая ненулевого потока пара [13, 18, 19]. Представим кинематическое условие в виде:

$$-\varepsilon(h_t + h_x u - w) \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}} = J_{ev} \bar{J}. \quad (5)$$

Здесь  $J_{ev}$  – величина локального потока массы пара на границе раздела. Данный параметр определяется с помощью уравнения Герца–Кнудсена (см. [5]). В безразмерной форме уравнение принимает вид

$$J_{ev} = \alpha_J T|_{z=h(x,t)}, \tag{6}$$

где коэффициент  $\alpha_J$  определяется в виде:

$$\alpha_J = \alpha \rho_s \lambda_U \frac{T_*}{J_*} \left( \frac{M}{2\pi R_g T_s^3} \right)^{1/2}$$

(см. [5, 18]). Здесь  $\alpha$  — коэффициент аккомодации,  $\rho_s$  — плотность пара,  $M$  — молекулярный вес,  $R_g$  — универсальная газовая постоянная,  $\lambda_U$  — скрытая теплота парообразования,  $T_s$  — температура насыщенного пара.

Проекции динамического условия в безразмерной форме имеют вид:

$$-p + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x + w_z - h_x (u_z + \varepsilon^2 w_x)] = -p^g + \frac{\bar{\rho}\bar{v}\bar{d}}{\bar{h}} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x^g + w_z^g - \varepsilon h_x (u_z^g + w_x^g)] + \left(1 - \frac{1}{\bar{\rho}}\right) J_{ev}^2 \bar{J}^2 + \sigma \frac{\varepsilon^2}{Ca} \frac{h_{xx}}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^3}}, \tag{7}$$

$$\frac{2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} \left[ -\varepsilon^2 h_x u_x + \varepsilon^2 h_x w_z - \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2 h_x) (u_z + \varepsilon^2 w_x) \right] - \frac{\bar{\rho}\bar{v}\bar{d}}{\bar{h}} \cdot \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} \times \left[ -\varepsilon h_x u_x^g + \varepsilon h_x w_z^g + \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^2 h_x^2) (u_z^g + w_x^g) \right] = -\frac{Ma}{Pr} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}} (T_x + h_x T_z). \tag{8}$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\bar{v} = u_*^g/u_*$  — отношение характерной продольной скорости газа к характерной скорости жидкости,  $\bar{v}, \bar{\rho}$  — отношение коэффициентов кинематической вязкости и плотностей газа и жидкости, соответственно,  $\bar{h}$  — отношение характерного размера слоя газа к  $l$ ,  $p^g$  — давление в газе,  $Ma = \sigma_T T_* l / (\rho v \chi)$  — число Марангони,  $Ca = u_* \rho v / \sigma_0$  — капиллярное число. Параметр  $\bar{J}$  определяется с помощью следующего соотношения:  $\bar{J} = J_*^{ev} / (\rho u_*)$ , характерная величина потока массы пара  $J_*^{ev}$  вычисляется как  $\kappa T_* / (d \lambda_U)$ ,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности жидкости. Предполагается, что коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  линейно зависит от температуры. В безразмерной форме данная зависимость имеет вид  $\sigma = 1 - \alpha_\sigma T$ , где  $\alpha_\sigma = Ma Ca \varepsilon / Pr$ ,  $\sigma_0$  — значение коэффициента поверхностного натяжения при некотором относительном значении температуры,  $\sigma_T$  — температурный коэффициент поверхностного натяжения,  $T_*$  — характерный перепад температуры.

Энергетическое условие в безразмерной форме представимо следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial n} + \beta_2 \{T \text{div}_\Gamma \mathbf{v}\} = \beta_3 \bar{J} J_{ev} + \beta_4 \bar{J} J_{ev} \left\{ -p + \frac{2\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^2 h_x^2 u_x + w_z - h_x (u_z + \varepsilon^2 w_x)] \right\} + \frac{1}{2} \beta_5 \bar{J}^3 J_{ev}^3 + \beta_6 \bar{J} \varepsilon \sigma \frac{h_{xx}}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 h_x^2)^3}} J_{ev}. \tag{9}$$

Здесь  $\frac{\partial T}{\partial n}$  и  $\text{div}_\Gamma \mathbf{v}$  вычисляются согласно формулам

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 h_x^2}} (-\varepsilon^2 h_x T_x + T_z),$$

$$\text{div}_\Gamma \mathbf{v} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^2 n_i (\mathbf{n} \cdot \nabla v_i) = (u_x + w_z)|_\Gamma - \left\{ \frac{\varepsilon^2 h_x^2}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} u_x - \frac{\varepsilon h_x}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} u_z - \frac{\varepsilon h_x}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} w_x + \frac{1}{1 + \varepsilon^2 h_x^2} w_z \right\}.$$

Коэффициенты  $\beta_i$  ( $i = 2, \dots, 6$ ) имеют следующий вид:  $\beta_2 = \frac{Ma\varepsilon^2}{PrE\bar{U}}$ ,  $\beta_3 = \frac{1}{E}$ ,  $\beta_4 = \frac{(1/\bar{\rho})-1}{E\bar{U}}$ ,  $\beta_5 = \frac{(1-(1/\bar{\rho}))^2}{E\bar{U}}$ ,  $\beta_6 = \frac{1-(1/\bar{\rho})\varepsilon}{CaE\bar{U}}$ ,  $\bar{U} = \frac{\lambda_U}{u_*^2}$ ,  $E = \frac{\kappa T_*}{\lambda_U \rho \nu}$  — параметр испарения [4]. Первое слагаемое в левой части условия (9) определяет дефект тепла при его переносе через границу раздела, второе отвечает за затраты энергии для преодоления деформации поверхности термокапиллярными силами вдоль этой поверхности. Правая часть соотношения (9) определяет затраты тепла на деформацию свободной поверхности в результате испарения и пропорциональна скорости потока испаряющейся массы. Первое слагаемое в правой части задает расход тепла на парообразование, второе — на деформацию границы, третье — на изменение кинетической энергии вещества при фазовом переходе, четвертое — на совершаемую веществом жидкости при массопереносе работу вследствие изменения удельного объема [13, 20].

На твердой подложке  $z = 0$  полагаются выполненными условия прилипания

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = 0, \quad (10)$$

и задано распределение температуры

$$T|_{z=0} = \Theta_0(x, t). \quad (11)$$

## 2. ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО ТОЛЩИНУ ЖИДКОГО СЛОЯ

В рамках сформулированной задачи (1)–(4), (5)–(11) компоненты скорости  $u$ ,  $w$ , температура  $T$ , давление  $p$  и толщина жидкого слоя  $h$  определяются в длинноволновом приближении. Решение ищется в виде разложений по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Система уравнений (1)–(4), записанная для главных членов разложения, имеет следующий вид:

$$u_{zz}^0 = -\gamma \sin \alpha, \quad (12)$$

$$p_z^0 = -\gamma \cos \alpha, \quad (13)$$

$$u_x^0 = -w_z^0, \quad (14)$$

$$T_{zz}^0 = 0. \quad (15)$$

На твердой наклонной подложке должны быть выполнены следствия условий прилипания (10)

$$u^0|_{z=0} = 0, \quad w^0|_{z=0} = 0,$$

и задана функция, определяющая нагрев подложки (11)

$$T^0|_{z=0} = \Theta_0.$$

Для проведения параметрического анализа задачи определены значения безразмерных комплексов, порядок значений представлен в табл. 1, 2 для системы типа “этанол – азот”. При этом физические характеристики этанола и азота таковы:  $\rho = 0.79$  г/см<sup>3</sup>,  $\nu = 0.015$  см<sup>2</sup>/сек,  $\kappa = 4 \cdot 10^{-4}$  кал/(сек см К),  $\chi = 0.89 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/сек,  $\sigma_0 = 22$  дин/см,  $\sigma_T = 0.08$  дин/(см К),  $\lambda_U = 217$  кал/г,  $\alpha = 0.01$ ,  $M = 46$  г/моль,  $\rho_s = 1.6 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>,  $\rho_g = 1.2 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup>,  $\nu_g = 0.15$  см<sup>2</sup>/сек,  $\kappa_g = 0.65 \cdot 10^{-4}$  кал/(сек см К),  $\chi_g = 0.3$  см<sup>2</sup>/сек. Характерный перепад температуры  $T_*$  выбран 10 К (см. также [17, 18]).

С учетом проведенного параметрического анализа выпишем следствия условий (5)–(9) для главных членов разложений:

$$p^0 = p^g - \alpha_{Ca} h_{xx} (1 - \alpha_\sigma \Theta^0) + \alpha_D \alpha_J^2 (\Theta^0)^2,$$

$$u_z^0 = \alpha_{Ma} \tilde{\Theta},$$

$$-T_z^0 + \beta_2 \{\Theta^0(u_x^0)\} = \bar{\beta}_3 J_0 - \bar{\beta}_4 p^0 J_0 + \bar{\beta}_6 h_{xx} J_0.$$

Таблица 1. Значения параметров  $\alpha$  в системе “этанол – азот”

$\alpha$ – Параметр	Значения ( $T_* = 10K$ )
$\alpha_\sigma = \frac{MaCa\varepsilon}{Pr}$	$10^{-1}\varepsilon$
$\alpha_{Ca} = \frac{\varepsilon^2}{Ca}$	$10^4\varepsilon^2$
$\alpha_D = \left(\frac{1}{\bar{\rho}} - 1\right) \bar{J}^2$	$10^{-1}$
$\alpha_\tau = \bar{\rho} \bar{\nu} \varepsilon$	$10^{-2}\varepsilon$
$\alpha_{Ma} = \frac{\varepsilon^2 Ma}{Pr}$	$10^3\varepsilon^2$

Таблица 2. Значения параметров  $\beta$  в системе “этанол – азот”

$\beta$ – Параметр	Значения ( $T_* = 10 K$ )
$\beta_2 = \frac{Ma\varepsilon^2}{PrE\bar{U}}$	$10^5\varepsilon^2$
$\bar{\beta}_3 = \beta_3 \bar{J}$	1
$\bar{\beta}_4 = \beta_4 E$	$10^{-1}$
$\bar{\beta}_5 = \beta_5 \bar{J}^3$	$10^{-3}$
$\bar{\beta}_6 = \varepsilon \beta_6 E$	$-\varepsilon^2 10^3$

Здесь  $\Theta^0 = T^0|_\Gamma$ ,  $\tilde{\Theta} = (T_x^0 + h_x T_z^0)|_\Gamma$ ,  $J_0 = \alpha_J \Theta^0$ , а также  $\alpha_{Ca} = \varepsilon^2/Ca$ ,  $\alpha_D = ((1/\bar{\rho}) - 1) \bar{J}^2$ ,  $\alpha_\tau = \bar{\rho} \bar{\nu} \varepsilon/\bar{h}$ ,  $\alpha_{Ma} = \varepsilon^2 Ma/Pr$ ,  $\bar{\beta}_3 = \beta_3 \bar{J}$ ,  $\bar{\beta}_4 = \beta_4 E$ ,  $\bar{\beta}_5 = \beta_5 \bar{J}^3$ ,  $\bar{\beta}_6 = \varepsilon \beta_6 E$ . Параметр  $\alpha_J$  есть величина порядка 10.

Искомые функции  $u^0, w^0, p^0, T^0$  определяются в ходе интегрирования уравнений (12)–(15):

$$u^0 = -\gamma \sin \alpha \frac{z^2}{2} + C_1 z, \tag{16}$$

$$w^0 = -(C_1)_x \frac{z^2}{2}, \tag{17}$$

$$p^0 = -\gamma \cos \alpha z + C_0(x, t), \tag{18}$$

$$T^0 = A(x, t)z + \Theta_0(x, t). \tag{19}$$

Вследствие граничных условий коэффициенты  $C_0(x, t)$ ,  $C_1(x, t)$ ,  $A(x, t)$  удовлетворяют следующим соотношениям:

$$C_0(x, t) = p^g - \alpha_{Ca} h_{xx} (1 - \alpha_\sigma (Ah + \Theta_0)) + \gamma \cos \alpha h + \alpha_D \alpha_J^2 (Ah + \Theta_0)^2,$$

$$C_1(x, t) = \alpha_{Ma} (A_x h + (\Theta_0)_x + h_x A) + \gamma \sin \alpha h,$$

$$A(x, t) = \frac{[-\beta_2 (C_1)_x h + \alpha_J (\bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_6 h_{xx})] \Theta_0}{\beta_2 (C_1)_x h^2 + 1 - \alpha_J h (\bar{\beta}_3 + \bar{\beta}_6 h_{xx})}.$$

Аналогичным образом получена постановка задачи для первых членов разложения по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Искомые функции удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$u_{zz}^1 = p_x^0 + u_t^0 + u^0 u_x^0 + w^0 u_z^0,$$

$$p_z^1 = w_{zz}^0, \quad w_z^1 = -u_x^1,$$

$$T_{zz}^1 = Pr(T_t^0 + u^0 T_x^0 + w^0 T_z^0).$$

На твердой границе  $z = 0$  выполняются условия прилипания:

$$u^1|_{z=0} = 0, \quad w^1|_{z=0} = 0, \quad (20)$$

а из формул (11) и (15) следует соотношение

$$T^1|_{z=0} = 0. \quad (21)$$

На границе раздела сред  $z = h(x, t)$  должны быть выполнены следующие условия:

$$p^1 = \alpha_{Ca} \alpha_\sigma h_{xx} \Theta^1 + \alpha_j^2 \alpha_D \Theta^0 \Theta^1, \quad (22)$$

$$u_z^1 = \alpha_{Ma} \tilde{\Theta}, \quad (23)$$

$$-T_z^1 + \beta_2 \left\{ \Theta^0 [u_x^1 + h_x (u_z^0 + w_x^0)] + \Theta^1 u_x^0 \right\} = 0. \quad (24)$$

Здесь  $\Theta^1 = T^1|_\Gamma$ ,  $\tilde{\Theta} = (T_x^1 + h_x T_z^1)|_\Gamma$ .

Тогда, принимая во внимание условия на твердой границе (20), (21), получим аналитические решения для первых членов разложения неизвестных функций:

$$u^1 = (C_0)_x \frac{z^2}{2} + (C_1)_t \frac{z^3}{6} + (\bar{C}_3)z + (C_1)_x C_1 \frac{z^4}{24}, \quad (25)$$

$$w^1 = -(C_0)_{xx} \frac{z^3}{6} - (C_1)_{tx} \frac{z^4}{24} - ((C_1)_x^2 + C_1(C_1)_{xx}) \frac{z^5}{120} - (\bar{C}_3)_x \frac{z^2}{2}, \quad (26)$$

$$p^1 = -(C_1)_x z + \bar{C}_2(x, t), \quad (27)$$

$$T^1 = Pr \left\{ [A_t + C_1(\Theta_0)_x] \frac{z^3}{6} + (\Theta_0)_t \frac{z^2}{2} + \left[ -\gamma \sin \alpha \frac{(\Theta_0)_x}{2} + C_1 A_x - \frac{A}{2} (C_1)_x \right] \times \right. \\ \left. \times \frac{z^4}{12} - \gamma \sin \alpha A_x \frac{z^5}{40} \right\} + \tilde{A}z. \quad (28)$$

Функции  $\bar{C}_2$ ,  $\bar{C}_3$ ,  $\tilde{A}$  удовлетворяют соотношениям:

$$\bar{C}_2(x, t) = (C_1)_x h + \Theta^1 (\alpha_{Ca} \alpha_\sigma h_{xx} + 2\alpha_j^2 \alpha_D (Ah + \Theta_0)),$$

$$\bar{C}_3(x, t) = -\alpha_{Ma} \tilde{\Theta} - (\bar{C}_0)_x h - (C_1)_t \frac{h^2}{2} - C_1(C_1)_x \frac{h^3}{6},$$

$$\tilde{A} = F(A, \Theta_0, C_1, h).$$

Функция  $F(A, \Theta_0, C_1, h)$  определяется с помощью соотношения (24).

С учетом формул (16), (17), (25), (26) для выражения функций  $u$  и  $w$  можно получить уравнение для определения толщины слоя жидкости. Представим уравнение для определения положения границы раздела, ограничиваясь главными членами разложения (lubrication approximation):

$$h_t + h_x \left\{ -\gamma \sin \alpha \frac{h^2}{2} + C_1 h + (C_1)_x \frac{h^2}{2} \right\} + EJ_{ev} = 0, \quad (29)$$

где

$$J_{ev} = \alpha_J [A(x, t)h + \Theta_0(x, t)].$$

Отметим также, что для замыкания постановки задачи необходимо определить начальное положение термокапиллярной границы раздела  $h(x, 0) = h_0(x)$ , а также условия на бесконечности. Когда будет определена функция  $h(x, t)$ , распределение скоростей, давление и температура также будут найдены с учетом формул (16)–(19) и (25)–(28).

### 3. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Задача о периодическом стекании часто используется для тестирования задачи о стекании слоя жидкости [21]. Рассмотрим периодическую задачу об определении положения границы раздела  $h$ , удовлетворяющей уравнению (29) на некотором промежутке  $[-L; L]$ . Пусть выполнены следующие периодические условия на границах  $x = \pm L$  рассматриваемой области:

$$h|_{x=-L} = h|_{x=L}, \quad h_x|_{x=-L} = h_x|_{x=L}. \tag{30}$$

Начальное положение термокапиллярной границы имеет вид  $h_0(x) = 1 - \delta_0 \cos kx$ . Неравномерный нагрев подложки определяется с помощью заданной функции  $\Theta_0$ .

С учетом соотношения, определяющего функцию  $C_1(x, t)$ , уравнение (29) может быть записано в следующем виде:

$$h_t + A_2 h_{xx} + A_1 h_x + A_0 h + D = 0. \tag{31}$$

Здесь коэффициенты  $A_2, A_1, A_0, D$  представляют собой функции, зависящие от  $A, h, \Theta_0$  и их производных:

$$A_2 = \frac{h^2}{2} \alpha_{Ma} A, \quad A_1 = 2h^2 \alpha_{Ma} A_x + h \alpha_{Ma} (\Theta_0)_x + h_x h \alpha_{Ma} A + h^2 \gamma \sin \alpha,$$

$$A_0 = \frac{h^2}{2} \alpha_{Ma} A_{xx} + \frac{h}{2} \alpha_{Ma} (\Theta_0)_{xx} + E \alpha_J A, \quad D = E \alpha_J \Theta_0.$$

Для численного решения уравнения (31) используется неявная конечно-разностная схема следующего вида:

$$\frac{h^{k+1} - h^k}{\tau} + A_2^k h_{xx}^{k+1} + A_1^k h_x^{k+1} + A_0^k h^{k+1} + D^k = 0. \tag{32}$$

Для реализации неявной схемы введем равномерную разностную сетку по пространственной переменной  $x$ :  $x_1, x_2, \dots, x_{N+1}$ ,  $x_n = -L + (n - 1)\Delta x$ ,  $n = 1, 2, \dots, N + 1$ , с шагом  $\Delta x = 2L/N$ . Для всех производных по  $x$ , входящих в уравнение (32) используются конечно-разностные аналоги второго порядка аппроксимации.

Конечно-разностную схему (32) можно записать в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} b_1^k h_1^{k+1} + c_1^k h_2^{k+1} &= d_1^k, \quad n = 1; \\ a_n^k h_{n-1}^{k+1} + b_n^k h_n^{k+1} + c_n^k h_{n+1}^{k+1} &= d_n^k, \quad n = 2, 3, \dots, N; \\ a_{N+1}^k h_N^{k+1} + b_{N+1}^k h_{N+1}^{k+1} &= d_{N+1}^k, \quad n = N + 1. \end{aligned} \tag{33}$$

Коэффициенты  $a_n^k, b_n^k, c_n^k, d_n^k$  зависят от  $A_2, A_1, A_0, D$ . Для реализации периодических условий (30) на границах  $x = \pm L$  также используются конечно-разностные аналоги второго порядка аппроксимации (см. [22]).

Таким образом, задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (33) с помощью метода трехточечной прогонки и прогонки с параметром. Поиск значений  $h_n$  осуществляется в виде  $h_n = \alpha_n h_{n+1} + \beta_n h_N + \gamma_n$ . Формулы для прогоночных коэффициентов  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$  имеют следующий вид:

$$\alpha_n = \frac{-c_n}{a_n \alpha_{n-1} + b_n}, \quad \beta_n = \frac{-a_n \beta_{n-1}}{a_n \alpha_{n-1} + b_n}, \quad \gamma_n = \frac{d_n - a_n \gamma_{n-1}}{a_n \alpha_{n-1} + b_n}, \quad n = 2, 3, \dots, N.$$

Стартовые значения коэффициентов  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  определяются с помощью первого уравнения системы (33) и граничного условия. В роли неизвестного параметра выступает значение толщины жидкого слоя на торцах исследуемой области  $h_{N+1}$ . В качестве обратного хода прогонки используется соотношение  $h_n = \tilde{\alpha}_n h_{N+1} + \tilde{\beta}_n$ .

Численное решение задачи о периодическом стекании тонкого слоя жидкости по наклонной подложке состоит из следующих этапов.

1. Расчет на новом временном слое  $k+1$  начинается с вычисления значений функции  $A$ , при этом используются значения функции  $h$ , определяющей положение границы раздела, с предыдущего временного слоя. Здесь

$$(h_{xx})_n = \frac{h_{n+1} - 2h_n + h_{n-1}}{\Delta x^2}, \quad (\Theta_0)_n = 1 + \delta \cos(kx_n), \quad n = 2, \dots, N.$$

Для аппроксимации вторых производных по переменной  $x$  на границах исследуемой области  $[-L, L]$  используются следующие соотношения:

$$\frac{h_3 - 2h_2 + h_1}{\Delta x^2}, \quad \frac{h_{N1} - 2h_N + h_{N-1}}{\Delta x^2}.$$

2. С помощью полученных для  $A_n$  значений насчитываются значения функции  $(C_1)_n$  и ее производной.

3. Определяются значения толщины жидкости  $h$  на новом временном слое с помощью схемы Кранка–Николсона для переменной по времени.

Для замыкания постановки задачи необходимо задать условия на введенных торцах исследуемой области  $x = \pm L$ . В качестве таких условий в данном случае используются условия периодичности значений функции  $h$  и ее первой производной по координате  $x$  [24].

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Проведено численное исследование для случая периодического стекания жидкости типа этанол. В качестве газа, сопровождающего течение, рассматривается азот. Значения безразмерных параметров задачи представлены в табл. 1, 2 (см. также [17, 18, 23, 24]). Характерное время процесса  $t_*$  равно  $0.7 \cdot 10^2$  сек.

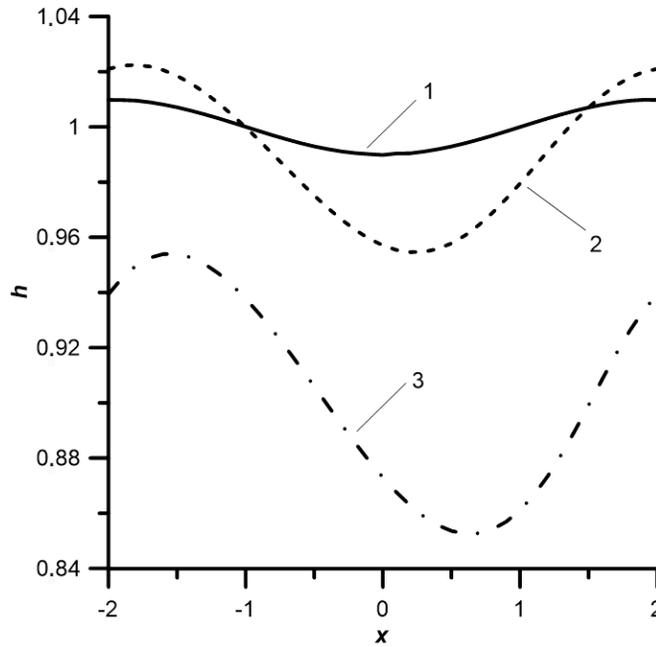
Положение границы раздела сред в начальный момент времени задано в виде следующего соотношения:  $h_0 = 1 - \delta_0 \cos kx$ . Неравномерный нагрев подложки определяется с помощью формулы

$$\Theta_0 = 1 + \delta_1 \cos k_1 x \cdot \cos k_2 t.$$

Значения параметров  $\delta_0$  и  $\delta_1$  здесь полагаются равными 0.01 и 0.25, соответственно;  $k = k_1 = \pi/2$ ,  $k_2 = 10$ . Угол наклона твердой подложки относительно горизонта составляет  $\pi/8$ . Представленные результаты получены с использованием энергетического условия на границе  $y = h(x, t)$  в классической постановке, т.е. безразмерные параметры  $\beta_3$  и  $\tilde{\beta}_6$  принимались равными 0.

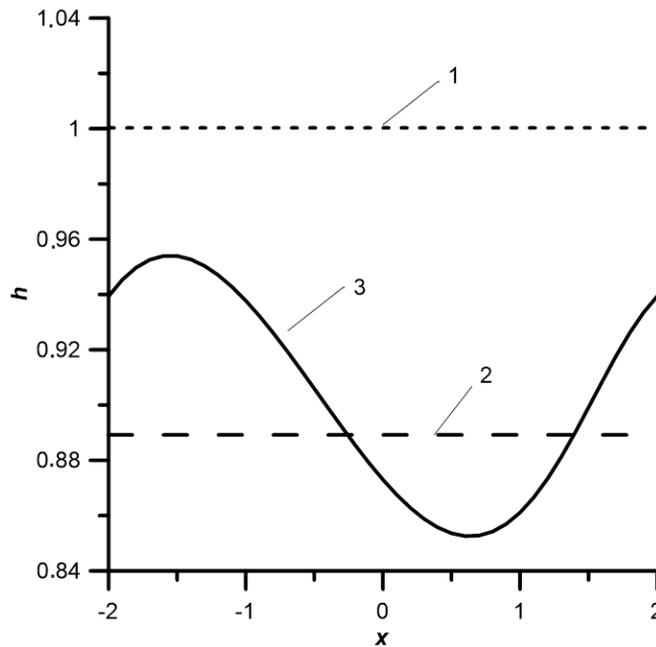
На фиг. 2 проиллюстрирован процесс испарения жидкого слоя со временем в условиях нормальной гравитации ( $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ ). Твердая подложка подвержена неоднородному нестационарному нагреву. С течением времени наблюдается снижение толщины жидкого слоя относительно начального положения (сплошная линия). Амплитуда волны при этом существенно увеличивается, наблюдается смещение локального минимума. В случае продолжения рассматриваемого процесса во времени может наблюдаться образование сухих пятен.

Фигура 3 демонстрирует влияние характера нагрева наклонной подложки на структуру течения слоя жидкости. Приведены положения границы раздела сред в момент времени  $t = 10^{-2}$  в условиях нормальной гравитации. Сплошная линия на фиг. 3 демонстрирует толщину жидкого слоя в случае неоднородного нестационарного нагрева (соответствует линии 3 на фиг. 2). В случае, когда рассматривается случай однородного распределения температуры относительно пространственной ко-



**Фиг. 2.** Изменение характера течения тонкого слоя жидкости со временем: 1 – начальное положение границы раздела; 2 – положение границы раздела в момент времени  $t = 10^{-3}$ ; 3 – положение границы раздела в момент времени  $t = 10^{-2}$ .

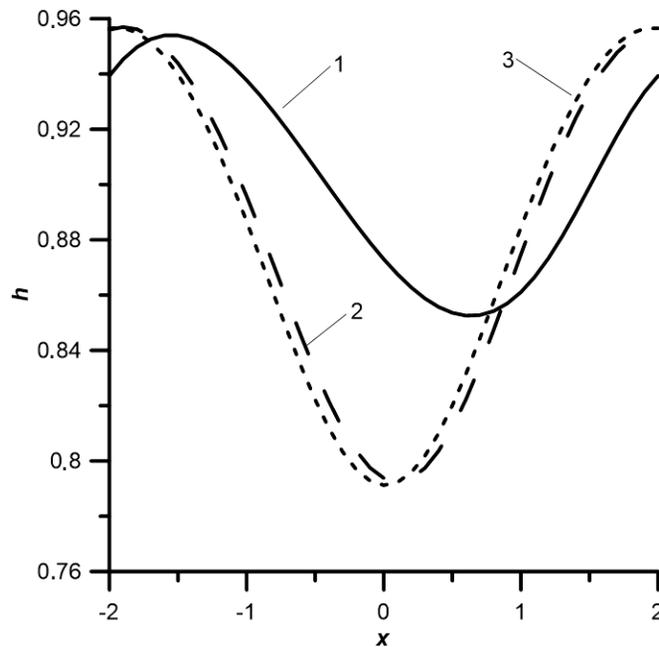
ординаты  $x$  (т.е.  $k_1 = 0$ ), наблюдается выравнивание границы раздела сред (см. штриховые линии на фиг. 3). Линия 2 демонстрирует снижение толщины жидкого слоя со временем в условиях нестационарного нагрева подложки. В случае, когда функция  $\Theta_0$  постоянна как по пространству, так и по времени, наблюдается установление стационарной картины течения без изменения толщины жидкого слоя (линия 3 на фиг. 3).



**Фиг. 3.** Изменение течения тонкого слоя жидкости в зависимости от характера нагрева подложки,  $t = 10^{-2}$ : 1 – однородное стационарное распределение температуры; 2 – однородное нестационарное распределение температуры; 3 – неоднородное, нестационарное распределение температуры.

На фиг. 4 представлены результаты изучения влияния уровня гравитации на характер стекания тонкого слоя жидкости в случае неоднородного нестационарного нагрева подложки. Наиболее слабое снижение толщины жидкого слоя и наименьшая амплитуда волны наблюдаются в условиях нор-

мальной гравитации, когда  $g = 9.8 \text{ м/с}^2$  (сплошная линия 1). При уменьшении уровня гравитации до  $g = 9.8 \cdot 10^{-1} \text{ м/с}^2$  (линия 2) и  $g = 9.8 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2$  (линия 3) имеет место снижение толщины жидкого слоя. При этом смещение локального минимума положения границы раздела относительно начального положения увеличивается с ростом уровня гравитации.



**Фиг. 4.** Изменение течения тонкого слоя жидкости в зависимости от уровня гравитации,  $t = 10^{-2}$ : 1 — нормальная гравитация; 2 — слабая гравитация ( $g \cdot 10^{-1}$ ); 3 — слабая гравитация ( $g \cdot 10^{-2}$ ).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в работе математическая модель позволяет учитывать капиллярный, термокапиллярный, гравитационный эффекты, массоперенос на границе жидкости и газа, угол наклона и характер нагрева подложки, а также действие дополнительных касательных напряжений, возникающих под действием сопутствующего потока газа, на характер течения тонкого слоя жидкости. Параметрический анализ задачи позволяет определить эффекты, оказывающие наибольшее влияние на изучаемые процессы. В рамках рассматриваемой математической модели построены точные (аналитические) решения для главных и первых членов разложения искомых функций по степеням малого параметра задачи.

Для решения полученного эволюционного уравнения, определяющего толщину жидкого слоя, построена численная схема. В рамках задачи о периодическом стекании тонкого слоя жидкости изучено влияние гравитационного эффекта на структуру течения. Проведено численное исследование процесса стекания жидкости с различной картиной распределения температуры по твердой подложке. Показано, что наиболее интенсивное уменьшение толщины жидкого слоя наблюдается с увеличением уровня гравитации для случаев неоднородного нагрева подложки.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kabov O. A., Zaitsev D. V., Cheverda V. V.* Evaporation and flow dynamics of thin, shear-driven liquid films // *Experim. Thermal Fluid Sci.* 2011. V. 35. № 5. P. 825–831.
2. *Реутов В. П., Езерский А. Б., Рыбушкина Г. В., Чернов В. В.* Конвективные структуры в тонком слое испаряющейся жидкости, обдуваемом воздушным потоком // *ПМТФ.* 2007. Т. 48. № 4. С. 3–14.
3. *Frank M. A., Kabov O. A.* Thermocapillary structure formation in a falling film: Experiment and calculations // *Phys. of Fluids.* 2006. № 18. P. 032107-1.

4. *Oron A., Davis S. H., Bankoff S. G.* Long-scale evolution of thin liquid films // *Rev. of Modern Phys.* 1997. Vol. 69. № 3. P. 931–980.
5. *Miladinova S., Slavtchev S., Lebon G., Legros J.-C.* Long-wave instabilities of non-uniformly heated falling films // *J. Fluid Mech.* 2002. Vol. 453. P. 153–175.
6. *Shklyaev O., Fried E.* Stability of an evaporating thin liquid film // *J. of Fluid Mech.* 2007. Vol. 584. P. 157–183.
7. *Кабов О. А., Кабова Ю. О., Кузнецов В. В.* Испарение неизотермической пленки жидкости в микроканале при спутном потоке газа // *ДАН.* 2012. Vol. 446. № 5. С. 522–526.
8. *Гончарова О. Н., Резанова Е. В., Тарасов Я. А.* Математическое моделирование термокапиллярных течений в тонком слое жидкости с учетом испарения // *Известия АлтГУ.* 2014. № 81 (1/1). С. 47–52.
9. *Kuznetsov V. V., Fominykh E. Yu.* Evaporation of a liquid film in a microchannel under the action of a co-current dry gas flow // *Microgravity Science and Technology.* 2020. V. 32. P. 245–258.
10. *Liu R., Liu Q.* The Convective Instabilities in a Liquid–Vapor System with a Non-equilibrium Evaporation Interface // *Microgravity Science and Technology.* 2009. V. 21. P. 233–240.
11. *Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В.* Современные математические модели конвекции. М.: Наука, 2008. 368 с.
12. *Das K. S., Ward C. A.* Surface thermal capacity and its effects on the boundary conditions at fluid-fluid interface // *Phys. Rev. E.* 2007. V. 75. P. 065303-1–065303-4.
13. *Кузнецов В. В.* Тепломассообмен на поверхности раздела жидкость – пар // *Известия РАН. МЖГ.* 2011. № 5. С. 97–107.
14. *Laskovets E. V.* Numerical modeling of an inclined thin liquid layer flow based on generalized boundary conditions // *J. of Mathematical Science.* 2022. Vol. 267. № 4. P. 501–510.
15. *Laskovets E. V.* Mathematical Modeling of the Thin Liquid Layer Runoff Process Based on Generalized Conditions at the Interface: Parametric Analysis and Numerical Solution // *J. of SFU. Math. and Phys.* 2023. Vol. 16, № 1. P. 56–65.
16. *Iorio C. S., Goncharova O. N., Kabov O. A.* Study of evaporative convection in an open cavity under shear stress flow // *Microgravity Sci. Technol.* 2009. V. 21. № 1. P. 313–320.
17. *Iorio C. S., Goncharova O. N., Kabov O. A.* Heat and mass transfer control by evaporative thermal patterning of thin liquid layers // *Comput. Thermal Sci.* 2011. № 3(4). P. 333–342.
18. *Гончарова О. Н.* Моделирование течений в условиях тепло- и массопереноса на границе // *Известия АлтГУ.* 2012. № 73 (1/2). С. 12–18.
19. *Гончарова О. Н., Резанова Е. В.* Математическая модель течений тонкого слоя жидкости с учетом испарения на термокапиллярной границе раздела // *Известия АлтГУ.* 2014. № 81 (1/2). С. 21–25.
20. *Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н.* Задачи испарительной конвекции (обзор) // *ПММ.* 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 219–260.
21. *Копбосынов Б. К., Пухначев В. В.* Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости // *Сб. научн. тр. Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. АН СССР, Ур. научн. центр.* 1983. С. 116–125.
22. *Самарский А. А.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
23. *Краткий справочник физико-химических величин / Под ред. Равделя А. А., Пономаревой А. М.* СПб.: Специальная литература, 1998. 232 с.
24. *Резанова Е. В.* Моделирование конвективных течений с учетом тепломассопереноса на границах раздела. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Барнаул: АлтГУ, 2018.

# NUMERICAL SIMULATION OF CONVECTIVE FLOWS IN A THIN LIQUID LAYER UNDER CONDITIONS OF LARGE REYNOLDS NUMBERS

E. V. Laskovets\*

*Altai State University, Institute of Mathematics and Information Technology, Lenin Ave., 61, Barnaul, 656049 Russia*

*\*e-mail: katerezanova@mail.ru*

Received 21 November, 2023

Revised 23 February, 2024

Accepted 05 March, 2024

**Abstract.** A mathematical model is proposed that describes the flow of a thin layer of liquid on an inclined, non-uniformly heated substrate. The Navier-Stokes system for a viscous incompressible liquid and relations representing generalized kinematic, dynamic and energy conditions at the interface for the case of evaporation are used as governing equations. The statement is given in a two-dimensional case for large Reynolds numbers. The problem is solved within the framework of the long-wave approximation. A parametric analysis of the problem is carried out, an evolutionary equation is obtained for finding the thickness of the liquid layer. An algorithm for a numerical solution is proposed for the problem of periodic flow of liquid down an inclined substrate. The influence of gravitational effects and the nature of heating of a solid substrate on the flow of a liquid layer is studied.

**Keywords:** thermocapillary flow of liquid, generalized conditions at the interface, evaporation, evolution equation, numerical solution.