ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 6, с. 1064–1081

УДК 517.958

ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В СЛАБОНЕОДНОРОДНЫХ СРЕДА[1)]

© 2024 г. А. В. Калинин[1,2,*], А. А. Тюхтина[1,], С. А. Малов[1]**

[1] *603022 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, ННГУ им. Н. И. Лобачевского, Россия*

[2] *603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 66, ИПФ РАН, Россия*

[*] *e-mail: avk@mm.unn.ru*

[**] *e-mail: tyukhtina@iee.unn.ru*

Поступила в редакцию 23.10.2023 г.
Переработанный вариант 28.12.2023 г.
Принята к публикации 05.03.2024 г.

Рассматриваются постановки начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в различных квазистационарных приближениях в однородных и неоднородных проводящих средах. В случае слабонеоднородных сред формулируются и обосновываются асимптотические разложения решений рассматриваемых начально-краевых задач по параметру, характеризующему степень неоднородности среды. Показано, что построение асимптотического разложения для квазистационарного электромагнитного приближения приводит к последовательному решению независимых задач для квазистационарного электрического и квазистационарного магнитного приближения в однородной среде. Приведены условия на начальные данные, при которых асимптотические ряды являются сходящимися. Библ. 32.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, квазистационарное электромагнитное приближение, проводимость, неоднородные среды, асимптотическое разложение.

DOI: 10.31857/S0044466924060144, **EDN:** XYBGFT

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих прикладных задачах для описания относительно медленных электромагнитных процессов используются различные квазистационарные приближения для системы уравнений Максвелла [1]–[3]. Вопросы иерархии квазистационарных приближений обсуждаются в работах [4]–[7]. Наряду с классическими квазистационарными приближениями (квазистационарное электрическое приближение [8], квазистационарное магнитное приближение [9]), значительное внимание уделяется обобщающему их квазистационарному электромагнитному приближению, которое также называется приближением Дарвина [10]. Это приближение основано на разложении электрического поля на потенциальную и вихревую составляющие и сохранении в системе уравнений Максвелла потенциальной составляющей тока смещения. Обсуждению применимости квазистационарного электромагнитного приближения при построении физических моделей квазистационарных процессов посвящены работы [6], [11]–[13]. Вопросы построения численных алгоритмов решения задач для квазистационарного электромагнитного приближения рассматриваются в работах [14]–[20].

Одной из важнейших областей применения квазистационарных приближений является исследование электромагнитных явлений в атмосфере Земли. В зависимости от величины проводимости при моделировании переходных процессов могут использоваться как квазистационарное электрическое [21]–[23], так и квазистационарное магнитное приближения [24]. Для единого описания физи-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 23-21-00440), https://rscf.ru/project/23-21-00440.

ческих полей в различных слоях атмосферы естественно использовать квазистационарное электромагнитное приближение [25].

Математическому исследованию внутренних и внешних задач для системы уравнений Максвелла в квазистационарном электромагнитном приближении посвящены работы [4], [10], [26]–[29]. В этих работах для однородных сред и заданной объемной плотности тока были доказаны теоремы о корректности постановок рассматриваемых задач, построены и исследованы асимптотические разложения, обосновывающие применимость квазистационарного электромагнитного приближения. С использованием метода ортогонального проектирования доказана возможность декомпозиции исходной задачи на задачу определения потенциальной составляющей электрического поля, соответствующую квазистационарному электрическому приближению, и задачу определения магнитного поля и вихревой составляющей электрического поля, соответствующую квазистационарному магнитному приближению.

В общем случае, когда объемную плотность тока и напряженность электрического поля связывает обобщенный закон Ома, в средах с неоднородной проводимостью такая декомпозиция невозможна. Соответствующие задачи при общих условиях на коэффициенты были исследованы в работах [7], [25], [30], где были получены результаты о математической корректности постановок и приведены оценки, обосновывающие применимость различных квазистационарных приближений в зависимости от безразмерных параметров, характеризующих проводимость и масштабы неоднородности среды.

В настоящей работе рассматривается система уравнений Максвелла в квазистационарном электромагнитном приближении в случае, когда объемную плотность тока и напряженность электрического поля связывает обобщенный закон Ома, в предположении о слабой неоднородности среды. Показано, что если удельная проводимость является постоянной величиной, возможна декомпозиция начально-краевой задачи, приводящая к задаче определения потенциального электрического поля, соответствующей электрическому приближению, и задаче определения магнитного поля и вихревого электрического поля, соответствующей магнитному приближению. Построены и обоснованы асимптотические разложения решений начально-краевых задач по малому параметру, характеризующему степень неоднородности среды. Показано, что построение асимптотического разложения для квазистационарного электромагнитного приближения приводит к последовательному решению независимых задач для квазистационарного электрического и квазистационарного магнитного приближения в однородной среде. Приведены условия на начальные данные, при которых асимптотические ряды являются сходящимися.

2. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

В разделе обсуждаются постановки начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в различных квазистационарных приближениях в однородных и неоднородных средах. В гауссовой системе единиц нестационарная система уравнений Максвелла имеет вид [1]

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(x,t) + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}(x,t)}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(x,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}(x,t)}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B}(x,t) = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}(x,t) = 4\pi\rho(x,t), \tag{4}$$

где $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathrm{R}^3$, $T > 0$. Предполагается, что векторные поля $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ удовлетворяют линейным материальным соотношениям

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},\ \ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H},\ \ \mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{\text{ст}}, \tag{5}$$

позволяющим формулировать задачи определения двух неизвестных функций $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, описывающих электрическое и магнитное поле соответственно. При изучении задач в проводящих средах уравнение (4) служит для определения функции ρ.

В работе предполагается, что $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ — открытая ограниченная односвязная область с липшиц-непрерывной границей Γ, состоящей из компонент связности Γ_1, Γ_2, гомеоморфных сферам в R^3. В почти каждой точке $x \in \Gamma$ определен единичный вектор внешней нормали $\boldsymbol{\nu}(x)$. Подобная пространственная область рассматривается при описании электромагнитных процессов в атмосфере, Γ_1 соответствует в этом случае поверхности Земли, Γ_2 — условной границе атмосферы с ионосферой. Результаты настоящей работы естественным образом обобщаются на случай односвязных областей, граница которых состоит из конечного числа замкнутых поверхностей, гомеоморфных сферам.

Далее предполагается, что $\varepsilon = \mu = 1$, σ — измеримая в Ω функция, при почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяющая условиям $\sigma_1 \leqslant \sigma(x) \leqslant \sigma_2$, где $\sigma_i > 0$ $(i = 1, 2)$ — заданные числа.

Квазистационарные приближения для системы (1)–(5) будут рассматриваться при однородном граничном условии
$$\mathbf{E}(x,t) \times \boldsymbol{\nu}(x) = 0, \ (x,t) \in \Gamma \times (0,T). \tag{6}$$
При исследовании задач атмосферного электричества граничные условия (6) соответствуют предположению о том, что поверхности Γ_1 и Γ_2 являются идеальными проводниками.

Квазистационарное электрическое приближение для системы уравнений Максвелла [3, 8] формально заключается в пренебрежении слагаемым $\partial/c\partial t\mathbf{B}$ в уравнении (2). Система уравнений Максвелла с учетом материальных соотношений в этом приближении имеет вид
$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}^{\text{ст}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}, \ \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{7}$$
Система (7) рассматривается при граничных условиях (6) и начальных условиях
$$\mathbf{E}(x,0) = \mathbf{e}(x), \ x \in \Omega. \tag{8}$$

Квазистационарное магнитное приближение [2] для системы уравнений Максвелла заключается в пренебрежении током смещения, т.е. в уравнении (1) можно положить $\partial/c\partial t\mathbf{D} \approx 0$. С учетом материальных соотношений система уравнений Максвелла в этом приближении имеет вид
$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}^{\text{ст}}, \ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}, \ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{9}$$

Система (9) будет рассматриваться при граничных условиях (6) и начальных условиях
$$\mathbf{H}(x,0) = \mathbf{h}(x), \ x \in \Omega. \tag{10}$$

В квазистационарном электромагнитном приближении [4]–[7] уравнение (1) содержит только потенциальную часть тока смещения. Пусть $\mathbf{E} = \mathscr{E} - \operatorname{grad}\varphi$, где $\operatorname{div}\mathscr{E} = 0$. Тогда система уравнений Максвелла с учетом материальных соотношений имеет в этом приближении вид
$$\operatorname{rot}\mathbf{H}(x,t) = \frac{4\pi}{c}\sigma(x)\mathbf{E}(x,t) + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}^{\text{ст}}(x,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi(x,t), \tag{11}$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E}(x,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}(x,t). \tag{12}$$
Система будет рассматриваться при граничных условиях (6) и начальных условиях
$$\mathbf{H}(x,0) = \mathbf{h}(x), \ \operatorname{grad}\varphi(x,0) = \operatorname{grad}\varphi_0(x). \tag{13}$$

При постановке рассматриваемых начально-краевых задач используются следующие гильбертовы пространства вектор-функций [31], [32]:

$$H(\mathrm{div}\,;\Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 :\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} \in L_2(\Omega)\},\ K(\mathrm{div}\,;\Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 :\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\},$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathrm{div}} = (\mathbf{u},\mathbf{v})_{2,\Omega} + (\mathrm{div}\,\mathbf{u}, \mathrm{div}\,\mathbf{v})_{2,\Omega},$$

$$H(\mathrm{rot}\,;\Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 :\ \mathrm{rot}\,\mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\},\ K(\mathrm{rot}\,;\Omega) = \{\mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 :\ \mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0\},$$

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathrm{rot}} = (\mathbf{u},\mathbf{v})_{2,\Omega} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{u}, \mathrm{rot}\,\mathbf{v})_{2,\Omega},$$

где через $(\cdot,\cdot)_{2,\Omega}$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Omega)$ и в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

Через $H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, $H_0(\mathrm{div}\,;\Omega)$ обозначается замыкание множества пробных вектор-функций $\{\mathscr{D}(\Omega)\}^3$ соответственно в $H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ и $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$, $K_0(\mathrm{rot}\,;\Omega) = K(\mathrm{rot}\,;\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, $K_0(\mathrm{div}\,;\Omega) = K(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H_0(\mathrm{div}\,;\Omega)$.

Пусть $\gamma_\nu :\ H(\mathrm{div}\,;\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ — оператор следа, $\gamma_\nu \mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu}$,

$$K(\Omega) = \{\mathbf{u} \in K(\mathrm{div}\,;\Omega) :\ \langle \gamma_\nu \mathbf{u}, 1\rangle_{\Gamma_i} = 0, i = 1,2\},$$

$$H(\Omega) = \{\psi \in H^1(\Omega) :\ \psi(x) = 0, x \in \Gamma_1,\ \psi(x) = \mathrm{const},\ x \in \Gamma_2\},$$

$$U_1(\Omega) = K(\Omega) \cap H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega),\ U_2(\Omega) = K_0(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathrm{rot}\,;\Omega).$$

Справедливы следующие утверждения [8, 32].

Лемма 1. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in K(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ *найдется функция* $p \in H^1(\Omega)$ *такая, что* $\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,p$. *Если* $\mathbf{u} \in K_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, *можно выбрать* $p \in H(\Omega)$.

Лемма 2. *Ортогональное дополнение к* $K(\Omega)$ *в* $\{L_2(\Omega)\}^3$ *совпадает с* $K_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)$. *Ортогональное дополнение к* $K_0(\mathrm{div}\,;\Omega)$ *в* $\{L_2(\Omega)\}^3$ *совпадает с* $K(\mathrm{rot}\,;\Omega)$.

2.1. Задачи для системы уравнений Максвелла в однородных средах

Рассмотрим начально-краевые задачи для квазистационарных приближений в однородной проводящей среде, т.е. в предположении, что σ — заданное положительное число. Покажем, что в этом случае возможна декомпозиция задач на задачи определения функций $\mathbf{H}$, $\mathscr{E}$ и задачи определения функции $\mathrm{grad}\,\varphi$.

Пусть $\mathbf{J}^{\text{ст}} \in L_2(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$, $\mathbf{h} \in K_0(\mathrm{div}\,;\Omega)$, $\varphi_0 \in H(\Omega)$ — заданные функции.

Обобщенным решением начально-краевой задачи (11)–(13), (6) для системы уравнений Максвелла в квазистационарном электромагнитном приближении называются функции $\mathbf{H} \in L_2\big(0,T,U_2(\Omega)\big)$, $\mathscr{E} \in L_2\big(0,T,K(\Omega)\big)$, $\varphi \in L_2\big(0,T,H(\Omega)\big)$ такие, что равенства (11)–(13) выполнены в смысле теории распределений.

Обозначим через P_1 и P_2 операторы ортогонального проектирования из $\{L_2(\Omega)\}^3$ на пространства $K_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ и $K(\Omega)$ соответственно. Для $\mathbf{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3$ функции $P_1\mathbf{u} \in K_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, $P_2\mathbf{u} \in K(\Omega)$ удовлетворяют при всех $\mathbf{q} \in K_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, $\mathbf{v} \in K(\Omega)$ равенствам

$$(P_1\mathbf{u},\mathbf{q})_{2,\Omega} = (\mathbf{u},\mathbf{q})_{2,\Omega},\ (P_2\mathbf{u},\mathbf{v})_{2,\Omega} = (\mathbf{u},\mathbf{v})_{2,\Omega}.$$

Теорема 1. *Для всех* $\mathbf{h} \in K_0(\mathrm{div}\,;\Omega)$, $\varphi_0 \in H(\Omega)$, $\mathbf{J}^{\text{ст}} \in L_2(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$ *существует единственное решение* $\mathbf{H} \in L_2(0,T,U_2(\Omega))$, $\mathscr{E} \in L_2(0,T,K(\Omega))$, $\varphi \in H^1(0,T,H(\Omega))$ *задачи* (11)–(13), (6). *При этом* $\mathbf{H}$, $\mathscr{E}$ — *обобщенное решение задачи*

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathscr{E} + \frac{4\pi}{c}P_2\mathbf{J}^{\text{ст}},\ \mathrm{rot}\,\mathscr{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H},\ \mathbf{H}(0) = \mathbf{h}, \tag{14}$$

$\mathbf{H} \in C\left([0,T], K_0(\operatorname{div};\Omega)\right)$ *и справедливы оценки*

$$\|\operatorname{rot}\mathbf{H}\|_{2,Q} \leqslant \frac{4\pi}{c}\|P_2\mathbf{J}^{\text{ст}}\|_{2,Q} + \frac{2\sqrt{\pi\sigma}}{c}\|\mathbf{h}\|_{2,\Omega}, \tag{15}$$

$$\|\mathbf{H}\|^2_{C([0,T],\{L_2(\Omega)\}^3)} \leqslant \frac{4\pi}{\sigma}\|P_2\mathbf{J}^{\text{ст}}\|^2_{2,Q} + \|\mathbf{h}\|^2_{2,\Omega}, \tag{16}$$

$$\|\mathscr{E}\|^2_{2,Q} \leqslant \frac{1}{\sigma^2}\|P_2\mathbf{J}^{\text{ст}}\|^2_{2,Q} + \frac{1}{4\pi\sigma}\|\mathbf{h}\|^2_{2,\Omega}. \tag{17}$$

Функция $\operatorname{grad}\varphi$ *является обобщенным решением задачи*

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi + 4\pi\sigma\operatorname{grad}\varphi = 4\pi P_1\mathbf{J}^{\text{ст}},\ \operatorname{grad}\varphi(0) = \operatorname{grad}\varphi_0 \tag{18}$$

и удовлетворяет неравенству

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|^2_{2,Q} \leqslant \frac{1}{\sigma^2}\|P_1\mathbf{J}^{\text{ст}}\|^2_{2,Q} + \frac{1}{4\pi\sigma}\min\{1, 4\pi\sigma T\}\|\operatorname{grad}\varphi_0\|^2_{2,\Omega}. \tag{19}$$

Если $\mathbf{h} \in U_2(\Omega)$ *и* $\mathbf{E}^{\text{ст}} \in L_2\left(0,T,H_0(\operatorname{rot};\Omega)\right)$, *то* $\partial/\partial t\mathbf{H} \in L_2\left(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3\right)$.

Справедливость теоремы 1 вытекает из более общих результатов, полученных в [7], [25]. При этом задача (14) может быть сформулирована как задача определения функции $\mathbf{H} \in L_2\left(0,T,U_2(\Omega)\right)$, удовлетворяющей начальному условию и такой, что для всех $\mathbf{v} \in U_2(\Omega)$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\mathbf{H},\mathbf{v})_{2,\Omega} + \frac{c}{4\pi}(\sigma^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{v})_{2,\Omega} = (\sigma^{-1}P_2(\mathbf{J}^{\text{ст}}), \operatorname{rot}\mathbf{v})_{2,\Omega}. \tag{20}$$

Решение задачи (18), функция $\varphi \in H^1(0,T,H(\Omega))$, при всех $\psi \in H(\Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega} + 4\pi(\sigma\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega} = 4\pi(\mathbf{J}^{\text{ст}}, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}. \tag{21}$$

Задача (9), (10) для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении с использованием проектирования на подпространства разбивается на задачу определения функций $\mathbf{H}$, $\mathscr{E}$, имеющую тот же вид, что и задача (14), и равенство

$$\operatorname{grad}\varphi = \sigma^{-1}P_1(\mathbf{J}^{\text{ст}}). \tag{22}$$

Таким образом, магнитное поле и вихревая составляющая электрического поля в случае однородной среды определяются одинаково при использовании квазистационарного магнитного приближения и при использовании квазистационарного электромагнитного приближения.

Начально-краевая задача (7), (8) для системы уравнений Максвелла в квазистационарном электрическом приближении расщепляется на задачу определения функции $\operatorname{grad}\varphi \in H^1\left(0,T,K_0(\operatorname{rot};\Omega)\right)$, совпадающую с (18), и систему

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}P_2\mathbf{J}^{\text{ст}},\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{23}$$

Следовательно, потенциальная составляющая электрического поля одинаково определяется в случае однородной среды квазистационарным электрическим и квазистационарным электромагнитным приближением.

Проектируя первое уравнение нестационарной системы уравнений Максвелла на подпространство $K_0(\operatorname{rot};\Omega)$, получим уравнение (18), т.е. потенциальная компонента электрического поля не меняется при переходе к электрическому и к электромагнитному приближениям. Из этого, в частности, следует, что для электрического и электромагнитного приближений остается справедливым закон со-

хранения электрического заряда
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0.$$

Таким образом, можно говорить о том, что квазистационарное электромагнитное приближение охватывает классические квазистационарные электрическое и магнитное приближения и занимает промежуточное положение между ними и нестационарной системой уравнений Максвелла.

2.2. Задачи для квазистационарных приближений в неоднородных средах

Приводятся результаты о существовании и единственности решений начально-краевых задач в предположении, что σ — измеримая функция. Декомпозиция задач, рассмотренная в предыдущем пункте, в этом случае невозможна.

Квазистационарное электрическое приближение. Пусть $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, $\mathbf{e} = -\operatorname{grad}\varphi_0$. Исключая из системы (7) $\mathbf{H}$, получим задачу определения скалярного электрического потенциала φ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varphi + 4\pi \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad}\varphi) = 4\pi \operatorname{div}\mathbf{J}^{\text{ст}}, \tag{24}$$

$$\int_{\gamma_1} ((\operatorname{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + 4\pi\sigma \operatorname{grad}\varphi - 4\pi\mathbf{J}^{\text{ст}})\cdot \boldsymbol{\nu})d\gamma = 0, \tag{25}$$

$$\varphi(x,0) = \varphi_0(x),\ x \in \Omega, \tag{26}$$

$$\varphi(x,t)|_{x\in\Gamma_1} = 0,\ \varphi(x,t)|_{x\in\Gamma_2} = V(t),\ t \in (0,T). \tag{27}$$

Уравнение (24) в исследованиях атмосферного электричества называется уравнением глобальной электрической цепи [21].

Пусть $\varphi_0 \in H(\Omega)$. Обобщенным решением задачи (24)–(27) называется функция $\varphi \in H^1(0,T,H(\Omega))$, удовлетворяющая условию $\varphi(0) = \varphi_0$ и такая, что для всех $\psi \in H(\Omega)$ имеем

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega} + 4\pi(\sigma \operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega} = 4\pi(\mathbf{J}^{\text{ст}}, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}. \tag{28}$$

Теорема 2. *Для всех* $\varphi_0 \in H(\Omega)$, $\mathbf{J}^{\text{ст}} \in L_2(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)$ *существует единственное решение* $\varphi \in H^1(0,T,H(\Omega))$ *задачи* (28)*. При этом найдется единственная функция* $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{H} \in L_2(0,T,K(\Omega))$ *такая, что выполнено первое равенство в* (7)*, где* $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$*. Справедлива оценка*

$$\|\operatorname{grad}\varphi\|_{2,Q} \leqslant \frac{1}{\sigma_1}\|\mathbf{J}^{\text{ст}}\|_{2,Q} + \sqrt{T}\|\operatorname{grad}\varphi_0\|_{2,\Omega}. \tag{29}$$

Утверждение теоремы вытекает из результатов, полученных в [8].

Напряженность магнитного поля $\mathbf{H}(x,t)$ может быть найдена как решение в каждый момент t задачи

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}(x,t) = \mathbf{F}(x,t),\ \operatorname{div}\mathbf{H}(x,t) = 0, x \in \Omega,\ \mathbf{H}(x,t)\cdot\boldsymbol{\nu}(x) = 0,\ x \in \Gamma. \tag{30}$$

Обобщенным решением задачи (30) называется функция $\mathbf{H} \in L_2(0,T,U_2(\Omega))$, которая при всех $\mathbf{v} \in L_2(0,T,U_2(\Omega))$ удовлетворяет равенству

$$(\operatorname{rot}\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{v})_{2,Q} = (\mathbf{F}, \operatorname{rot}\mathbf{v})_{2,Q}.$$

Согласно лемме Лакса-Мильграма, эта задача имеет единственное решение.

Квазистационарное магнитное приближение. Пусть $\mathbf{J}^{\text{ст}} = \sigma\mathbf{E}^{\text{ст}}$. Обобщенным решением задачи (9), (10), (6) называется функция $\mathbf{H} \in L_2(0,T,U_2(\Omega))$, удовлетворяющая условию $\mathbf{H}(0) = \mathbf{h}$, такая, что при всех $\mathbf{v} \in U_2(\Omega)$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\mathbf{H}, \mathbf{v})_{2,\Omega} + \frac{c}{4\pi}(\sigma^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{v})_{2,\Omega} = (\mathbf{E}^{\text{ст}}, \operatorname{rot}\mathbf{v})_{2,\Omega}. \tag{31}$$

Теорема 3. *Для всех* $\mathbf{h} \in K_0(\operatorname{div};\Omega)$, $\mathbf{E}^{\text{ст}} \in \{L_2(Q)\}^3$ *существует единственное решение* $\mathbf{H} \in L_2\big(0, T, U_2(\Omega)\big)$ *задачи* (31). *Для функций* $\mathbf{H}$ *и* $\mathbf{E} \in L_2\big(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3\big)$, *определяемой соотношением*

$$\mathbf{E} = \frac{c}{4\pi}\sigma^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{E}^{\text{ст}},$$

второе равенство в (9) *выполнено в смысле распределений на* $Q = \Omega \times (0, T)$. *Справедливы оценки*

$$\|\operatorname{rot}\mathbf{H}\|_{2,Q} \leqslant \frac{4\pi\sigma_2}{c}\|\mathbf{E}^{\text{ст}}\|_{2,Q} + \frac{2}{c}\sqrt{\pi\sigma_2}\|\mathbf{h}\|_{2,\Omega}, \tag{32}$$

$$\|\mathbf{E}\|_{2,Q}^2 \leqslant \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\|\mathbf{E}^{\text{ст}}\|_{2,Q}^2 + \frac{1}{4\pi\sigma_1}\|\mathbf{h}\|_{2,\Omega}^2. \tag{33}$$

Если $\mathbf{h} \in U_2(\Omega)$ *и* $\mathbf{E}^{\text{ст}} \in L_2\big(0, T, H_0(\operatorname{rot};\Omega)\big)$, *то* $\partial/\partial t\mathbf{H} \in \{L_2(Q)\}^3$.

Квазистационарное электромагнитное приближение. Обобщенным решением задачи (11)–(13) называются функции $\mathbf{H} \in L_2\big(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3\big)$, $\varphi \in L_2\big(0, T, H(\Omega)\big)$ и $\mathscr{E} \in L_2\big(0, T, K(\Omega)\big)$ такие, что для всех $\mathbf{u} \in H(\operatorname{rot};\Omega)$, $\psi \in H(\Omega)$, $\mathbf{v} \in U_1(\Omega)$

$$\frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\mathbf{H}, \mathbf{u})_{2,\Omega} + (\mathscr{E}, \operatorname{rot}\mathbf{u})_{2,\Omega} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega} - 4\pi(\sigma\mathscr{E}, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega} + 4\pi(\sigma\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega} = 4\pi(\mathbf{J}^{\text{ст}}, \operatorname{grad}\psi)_{2,\Omega}, \tag{35}$$

$$(\sigma\mathscr{E}, \mathbf{v})_{2,\Omega} - (\sigma\operatorname{grad}\varphi, \mathbf{v})_{2,\Omega} - \frac{c}{4\pi}(\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{v})_{2,\Omega} = -(\mathbf{J}^{\text{ст}}, \mathbf{v})_{2,\Omega} \tag{36}$$

и выполнены начальные условия

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{h}, \ \varphi(0) = \varphi_0. \tag{37}$$

Теорема 4. *Для любых* $\mathbf{h} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\mathbf{J}^{\text{ст}} \in L_2\big(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3\big)$ *существует единственное решение* $\mathbf{H} \in C\big(0, T, H(\operatorname{rot};\Omega)\big)$, $\varphi \in H^1\big(0, T, H(\Omega)\big)$, $\mathscr{E} \in L_2\big(0, T, K(\Omega)\big)$ *задачи* (34)–(37). *Справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{E}\|_{2,Q} \leqslant \frac{1}{\sigma_1}\|\mathbf{J}^{\text{ст}}\|_{2,Q} + \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma_1}}(\|\mathbf{h}\|_{2,\Omega} + \|\operatorname{grad}\varphi_0\|_{2,\Omega}). \tag{38}$$

Если $\mathbf{h} \in U_2(\Omega)$, $\mathbf{J}^{\text{ст}} \in H^1\big(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3\big)$, *то* $\partial/\partial t\mathbf{H} \in L_2\big(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3\big)$, $\varphi \in H^1\big(0, T, H(\Omega)\big)$, $\mathscr{E} \in L_2\big(0, T, U_1(\Omega)\big)$ *и справедливы соотношения* (11), (12).

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Для задач в слабонеоднородных средах обосновываются асимптотические разложения решений начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в различных квазистационарных приближениях в ряды по параметру, характеризующему степень неоднородности среды.

Перейдем к безразмерным переменным, заменяя x на $\Delta x \cdot x'$, t на $\Delta t \cdot t'$, где Δx — характерный пространственный масштаб, Δt — характерный временной масштаб, $(x', t') \in Q' = \Omega' \times (0, T')$, и вводя обозначения $\sigma = \sigma^*\sigma_0$, $\sigma_{01} \leqslant \sigma_0(x') \leqslant \sigma_{02}$,

$$\gamma = 4\pi\Delta t\sigma^*, \ \beta = \frac{\Delta x}{c\Delta t}, \ \mathbf{J}^{\text{ст}} = \sigma^*\sigma_0\mathbf{E}^{\text{ст}},$$

где σ^* — характерное значение удельной проводимости.

Система уравнений Максвелла принимает вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \gamma\beta\sigma_0\mathbf{E} + \gamma\beta\sigma_0\mathbf{E}^{\text{ст}} + \beta\frac{\partial}{\partial t'}\mathbf{E},\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\beta\frac{\partial}{\partial t'}\mathbf{H}.$$

Далее опускаем штрихи при безразмерных переменных (x', t') и области их изменения $Q' = \Omega' \times \times (0, T')$.

Пусть $\operatorname{grad}\sigma_0 \in \{L_\infty(\Omega)\}^3$, $\sigma_0 = 1 + \eta\tilde{\sigma}$, где $\|\operatorname{grad}\tilde{\sigma}\|_{\infty,\Omega} = 1$, $\|\tilde{\sigma}\|_{\infty,\Omega} \leqslant \tilde{\sigma}^*$, $\eta < (\tilde{\sigma}^*)^{-1}$.

Предполагаем, $\mathbf{E}^{\text{ст}} = \mathscr{E}^{\text{ст}} - \operatorname{grad}\psi^{\text{ст}}$ не зависит от η, начальные функции допускают асимптотические разложения по степеням η:

$$\mathbf{h} = \sum_{k=0}^{\infty}\eta^k\mathbf{h}_k,\ \varphi_0 = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{0k}, \tag{39}$$

$$\|\mathbf{h} - \mathbf{h}^N\|_{2,\Omega} \leqslant C_{1,N}\eta^{N+1},\ \|\operatorname{grad}\varphi_0 - \operatorname{grad}\varphi_0^N\|_{2,\Omega} \leqslant C_{2,N}\eta^{N+1},\ N = 0, 1, \ldots,$$

где $\mathbf{h}^N = \sum_{k=0}^N \eta^k\mathbf{h}_k$, $\operatorname{grad}\varphi_0^N = \sum_{k=0}^N \eta^k\operatorname{grad}\varphi_{0k}$, постоянные $C_{1,N}$, $C_{2,N}$ не зависят от η.

Для решений $\mathbf{H}$, $\operatorname{grad}\varphi$, $\mathscr{E}$ задач определения квазистационарных электромагнитных полей получим асимптотические разложения

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\eta^k\mathbf{H}_k,\ \operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}\varphi^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\eta^k\operatorname{grad}\varphi_k,\ \mathscr{E} = \mathscr{E}^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\eta^k\mathscr{E}_k. \tag{40}$$

Используются обозначения

$$\mathbf{H}^N = \mathbf{H}^0 + \sum_{k=1}^{N}\eta^k\mathbf{H}_k,\ \operatorname{grad}\varphi^N = \operatorname{grad}\varphi^0 + \sum_{k=1}^{N}\eta^k\operatorname{grad}\varphi_k,\ \mathscr{E}^N = \mathscr{E}^0 + \sum_{k=1}^{N}\eta^k\mathscr{E}_k,\ N \geqslant 1.$$

Квазистационарное электрическое приближение. Функции $\vec{H} \in L_2\big(0, T, U_2(\Omega)\big)$, $\varphi \in H^1\big(0, T, H(\Omega)\big)$ — решение задачи

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \beta\gamma(1 + \eta\tilde{\sigma})(-\operatorname{grad}\varphi + \mathbf{E}^{\text{ст}}) - \beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi,\ \varphi(0) = \varphi_0, \tag{41}$$

которое, согласно теореме 2, существует и единственно при $\eta < (\tilde{\sigma}^*)^{-1}$.

С использованием операторов проектирования P_1 и P_2 на $K_0(\operatorname{rot};\Omega)$ и $K(\Omega)$ соответственно уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi + \gamma\operatorname{grad}\varphi = -\gamma\operatorname{grad}\psi^{\text{ст}} + \gamma\eta P_1(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \operatorname{grad}\varphi)),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \beta\gamma\mathbf{E}^{\text{ст}} + \beta\gamma\eta P_2(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \operatorname{grad}\varphi)).$$

Компоненты асимптотического разложения, функции $\mathbf{H}^0$, $\mathbf{H}_k \in L_2(0, T, U_2(\Omega))$ и $\operatorname{grad}\varphi^0$, $\operatorname{grad}\varphi_k \in \in H^1(0, T, H(\Omega))$, $k = 1, 2, \ldots$ — решения соответствующих задач

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^0 = \beta\gamma(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \operatorname{grad}\varphi^0) - \beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi^0,\ \varphi^0(0) = \varphi_{00}, \tag{42}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = -\beta\gamma\operatorname{grad}\varphi_1 + \beta\gamma\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \operatorname{grad}\varphi^0) - \beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_1,\ \varphi_1(0) = \varphi_{01}, \tag{43}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_k = -\beta\gamma\operatorname{grad}\varphi_k - \beta\gamma\tilde{\sigma}\operatorname{grad}\varphi_{k-1} - \beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_k,\ \varphi_k(0) = \varphi_{0k},\ k = 2, 3, \ldots. \tag{44}$$

Из (42), проектируя на ортогональные подпространства, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\varphi^0 + \gamma\mathrm{grad}\,\varphi^0 = -\gamma\mathrm{grad}\,\psi^{\text{ст}},\ \ \mathrm{rot}\,\mathbf{H}^0 = \beta\gamma\mathscr{E}^{\text{ст}},$$

т. е. нулевое приближение соответствует случаю однородной среды. Далее,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\varphi_1 + \gamma\mathrm{grad}\,\varphi_1 = \gamma P_1(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \mathrm{grad}\,\varphi^0)),$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_1 = \beta\gamma P_2(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \mathrm{grad}\,\varphi^0)),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\varphi_k + \gamma\mathrm{grad}\,\varphi_k = -\gamma P_1(\tilde{\sigma}\mathrm{grad}\,\varphi_{k-1}),$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_k = -\beta\gamma P_2(\tilde{\sigma}\mathrm{grad}\,\varphi_{k-1}),\ \ k = 2, 3, \ldots.$$

Существование и единственность решений рассматриваемых задач вытекает из теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть* $\eta \leqslant \eta^* < (\tilde{\sigma}^*)^{-1}$. *Справедливы оценки*

$$\|\mathrm{grad}\,(\varphi - \varphi^N)\|_{2,Q} \leqslant E_N\eta^{N+1},\ \ \|\mathrm{rot}\,(\mathbf{H} - \mathbf{H}^N)\| \leqslant \beta\gamma\tilde{\sigma}^* E_N\eta^N,\ \ N = 0, 1, \ldots, \tag{45}$$

где постоянные $E_N > 0$ *не зависят от* η, β, γ.

Доказательство. Для всех $\psi \in H(\Omega)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{grad}\,(\varphi - \varphi^0), \mathrm{grad}\,\psi)_{2,\Omega} + \gamma(\mathrm{grad}\,(\varphi - \varphi^0), \mathrm{grad}\,\psi)_{2,\Omega} =$$

$$= -\gamma\eta(\tilde{\sigma}\mathrm{grad}\,\varphi, \mathrm{grad}\,\psi)_{2,\Omega} + \gamma\eta(\tilde{\sigma}\mathbf{E}^{\text{ст}}, \mathrm{grad}\,\psi)_{2,\Omega},$$

из которого следует, что

$$\|\mathrm{grad}\,(\varphi - \varphi^0)\|_{2,Q} \leqslant \eta(\|\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \mathrm{grad}\,\varphi)\|_{2,Q}^2 + C_{2,0}^2 T)^{1/2}.$$

Функции φ^N, $N \geqslant 1$, — решения задач

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\varphi^N + \gamma\mathrm{grad}\,\varphi^N = -\gamma\mathrm{grad}\,\psi^{\text{ст}} + \gamma\eta P_1(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \mathrm{grad}\,\varphi^{N-1})),\ \ \varphi^N(0) = \varphi_0^N, \tag{46}$$

функции $\varphi - \varphi^N$ удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,(\varphi - \varphi^N) + \gamma\mathrm{grad}\,(\varphi - \varphi^N) = \gamma\eta P_1(\tilde{\sigma}(\mathrm{grad}\,\varphi - \mathrm{grad}\,\varphi^{N-1})).$$

Из (19) следуют оценки

$$\|\mathrm{grad}\,(\varphi - \varphi^N)\|_{2,Q} \leqslant \eta((\tilde{\sigma}^*)^2\|\mathrm{grad}\,(\varphi - \varphi^{N-1})\|_{2,Q}^2 + C_{2,N}^2 T\eta^{2N})^{1/2}.$$

По индукции получаем

$$\|\mathrm{grad}\,(\varphi - \varphi^N)\|_{2,Q} \leqslant \eta^{N+1}(\tilde{\sigma}^*)^N\left(\|\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \mathrm{grad}\,\varphi)\|_{2,Q}^2 + T(C_{2,0}^2 + \frac{C_{2,1}^2}{(\tilde{\sigma}^*)^2} + \ldots + \frac{C_{2,N}^2}{(\tilde{\sigma}^*)^{2N}})\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \eta^{N+1}(\tilde{\sigma}^*)^N\left(\|\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \mathrm{grad}\,\varphi)\|_{2,Q} + \sqrt{T}(C_{2,0} + \frac{C_{2,N}}{\tilde{\sigma}^*} + \ldots + \frac{C_{2,N}}{(\tilde{\sigma}^*)^N})\right).$$

Для всех $\mathbf{u} \in U_2(\Omega)$ справедливо равенство

$$(\operatorname{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^0), \operatorname{rot}\mathbf{u})_{2,\Omega} = \beta\gamma\eta(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \operatorname{grad}\varphi), \operatorname{rot}\mathbf{u})_{2,\Omega},$$

следовательно,

$$\|\operatorname{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^0)\|_{2,Q} \leqslant \beta\gamma\eta\|\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \operatorname{grad}\varphi)\|_{2,Q}.$$

Пусть $N \geqslant 1$. Тогда

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^N = \beta\gamma(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \eta P_2(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \operatorname{grad}\varphi^{N-1}))),$$

для всех $\mathbf{u} \in U_2(\Omega)$ справедливы равенства

$$(\operatorname{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^N), \operatorname{rot}\mathbf{u})_{2,\Omega} = -\beta\gamma\eta(\tilde{\sigma}\operatorname{grad}(\varphi - \varphi^{N-1}), \operatorname{rot}\mathbf{u})_{2,\Omega}.$$

Таким образом,

$$\|\operatorname{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^N)\|_{2,Q} \leqslant \beta\gamma\eta\|\tilde{\sigma}\operatorname{grad}(\varphi - \varphi^{N-1})\|_{2,Q},\ N = 1, 2, \ldots .$$

Из теоремы 2 следует, что

$$\|\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} - \operatorname{grad}\varphi)\|_{2,Q} \leqslant \tilde{\sigma}^*\left(\frac{2}{\sqrt{1 - \eta^*\tilde{\sigma}^*}}\|\mathbf{E}^{\text{ст}}\|_{2,Q} + \sqrt{T}\|\operatorname{grad}\varphi_0\|_{2,\Omega}\right).$$

Таким образом, справедливы оценки (45), где

$$E_N = (\tilde{\sigma}^*)^N\left(\frac{2\tilde{\sigma}^*}{1 - \eta^*\tilde{\sigma}^*}\|\mathbf{E}^{\text{ст}}\|_{2,Q} + \sqrt{T}\left(\tilde{\sigma}^*\|\operatorname{grad}\varphi_0\|_{2,\Omega} + \sum_{k=0}^{N}\frac{C_{2,k}}{(\sigma^*)^k}\right)\right).$$

Теорема доказана.

Квазистационарное магнитное приближение. Функции $\mathbf{H} \in L_2(0, T, U_2(\Omega))$, $\mathbf{E} = \mathscr{E} - \operatorname{grad}\varphi \in L_2\big(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3\big)$, где $\mathscr{E} \in L_2\big(0, T, K(\Omega)\big)$, $\varphi \in L_2\big(0, T, H(\Omega)\big)$, — обобщенное решение задачи

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \beta\gamma(1 + \eta\tilde{\sigma})(\mathscr{E} - \operatorname{grad}\varphi + \mathbf{E}^{\text{ст}}),\ \operatorname{rot}\mathscr{E} = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H},\ \mathbf{H}(0) = \mathbf{h}.$$

Для нулевого приближения получаем задачу

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^0 = \beta\gamma(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E}^0),\ \operatorname{rot}\mathbf{E}^0 = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}^0,\ \mathbf{H}^0(0) = \mathbf{h}_0, \tag{47}$$

функции $\mathbf{H}_k \in L_2(0, T, U_2(\Omega))$, $\mathbf{E}_k = \mathscr{E}_k - \operatorname{grad}\varphi_k \in L_2(0, T, \{L_2(\Omega)\}^3)$ — решения задач

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = \beta\gamma\mathbf{E}_1 + \beta\gamma\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E}_0),\ \operatorname{rot}\mathbf{E}_1 = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}_1,\ \mathbf{H}_1(0) = \mathbf{h}_1, \tag{48}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_k = \beta\gamma\mathbf{E}_k + \beta\gamma\tilde{\sigma}\mathbf{E}_{k-1},\ \operatorname{rot}\mathbf{E}_k = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}_k,\ \mathbf{H}_k(0) = \mathbf{h}_k,\ k = 2, 3, \ldots . \tag{49}$$

Задачи (47)–(49) соответствуют задачам для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении в однородной среде. Проектирование на ортогональные подпространства приводит к задачам вида (14) определения функций $\mathbf{H}_k \in L_2\big(0, T, U_2(\Omega)\big)$, $\mathscr{E}_k \in L_2\big(0, T, K(\Omega)\big)$, и равенствам вида (22) для определения функций $\varphi_k \in L_2\big(0, T, H(\Omega)\big)$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^0 = \beta\gamma(\mathscr{E}^{\text{ст}} + \mathscr{E}^0),\ \operatorname{rot}\mathscr{E}^0 = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}^0,\ \mathbf{H}^0(0) = \mathbf{h}_0, \tag{50}$$

$$\operatorname{grad}\varphi^0 = -\operatorname{grad}\psi^{\text{ст}}, \tag{51}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = \beta\gamma\mathscr{E}_1 + \beta\gamma P_2(\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E}_0)),\ \operatorname{rot}\mathscr{E}_1 = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}_1,\ \mathbf{H}_1(0) = \mathbf{h}_1, \tag{52}$$

$$\operatorname{grad}\varphi_1 = P_1(\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E}_0)), \tag{53}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_k = \beta\gamma\mathscr{E}_k + \beta\gamma P_2(\tilde\sigma\mathbf{E}_{k-1}),\ \operatorname{rot}\mathscr{E}_k = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}_k,\ \mathbf{H}_k(0) = \mathbf{h}_k, \tag{54}$$

$$\operatorname{grad}\varphi_k = P_1(\tilde\sigma\mathbf{E}_{k-1}),\ k = 2, 3, \ldots. \tag{55}$$

Существование и единственность решения поставленных задач вытекает из теоремы 1.

Теорема 6. *Пусть* $\eta \leqslant \eta^* < (\tilde\sigma^*)^{-1}$, $\mathbf{E}^N = \mathscr{E}^N - \operatorname{grad}\varphi^N$, $N = 0, 1, \ldots$ *Справедливы оценки*

$$\|\operatorname{grad}\varphi - \operatorname{grad}\varphi^N\|_{2,Q} \leqslant \eta^{N+1}(M_N^1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}M_N^0),\ \|\mathbf{E} - \mathbf{E}^N\|_{2,Q} \leqslant \eta^{N+1}(M_N^1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}M_N^2), \tag{56}$$

$$\|\mathbf{H} - \mathbf{H}^N\|_{C(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)} \leqslant \eta^{N+1}(\sqrt{\gamma}M_N^1 + M_N^2),\ \|\operatorname{rot}\mathbf{H} - \operatorname{rot}\mathbf{H}^N\|_{2,Q} \leqslant \eta^{N+1}\beta(\gamma M_N^1 + \sqrt{\gamma}M_N^2), \tag{57}$$

где постоянные M_N^0, M_N^1, M_N^2 *не зависят от* η, β, γ.

Доказательство. Из равенств (52), (54) получаем

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^N = \beta\gamma(\mathscr{E}^N + \mathscr{E}^{\text{ст}}) + \beta\gamma\eta P_2(\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E}^{N-1})), \tag{58}$$

$$\operatorname{rot}\mathscr{E}^N = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}^N,\ \mathbf{H}^N(0) = \mathbf{h}^N\ N = 1, 2, \ldots. \tag{59}$$

Следовательно, функции $\mathbf{H} - \mathbf{H}^N \in L_2\big(0, T, U_2(\Omega)\big)$, $\mathscr{E} - \mathscr{E}^N \in L_2(0, T, K(\Omega))$, $N = 0, 1, \ldots,$ — обобщенные решения задач

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{H} - \mathbf{H}^0\right) = \beta\gamma\left(\mathscr{E} - \mathscr{E}^0\right) + \beta\gamma\eta P_2\left(\tilde\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}})\right),$$

$$\operatorname{rot}\left(\mathscr{E} - \mathscr{E}^0\right) = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{H} - \mathbf{H}^0\right),\ \left(\mathbf{H} - \mathbf{H}^0\right)(0) = \mathbf{h} - \mathbf{h}_0,$$

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{H} - \mathbf{H}^N\right) = \beta\gamma\left(\mathscr{E} - \mathscr{E}^N\right) + \beta\gamma\eta P_2\left(\tilde\sigma(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{N-1})\right),$$

$$\operatorname{rot}\left(\mathscr{E} - \mathscr{E}^N\right) = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{H} - \mathbf{H}^N\right),\ \left(\mathbf{H} - \mathbf{H}^N\right)(0) = \mathbf{h} - \mathbf{h}^N.$$

Для решений этих задач справедливы безразмерные аналоги оценок (15)–(17), т. е.

$$\|\mathbf{H} - \mathbf{H}^0\|^2_{C(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)} \leqslant \eta^2\left(\gamma\|\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E})\|^2_{2,Q} + C^2_{1,0}\right),$$

$$\|\operatorname{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^0)\|^2_{2,Q} \leqslant \eta^2\beta^2\left(\gamma^2\|\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E})\|^2_{2,Q} + C^2_{1,0}\gamma\right),$$

$$\|\mathscr{E} - \mathscr{E}^0\|^2_{2,Q} \leqslant \eta^2\left(\|P_2(\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E}))\|^2_{2,Q} + \frac{C^2_{1,0}}{\gamma}\right),$$

$$\|\mathbf{H} - \mathbf{H}^N\|^2_{C(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)} \leqslant \eta^2\gamma(\tilde\sigma^*)^2\|\mathbf{E} - \mathbf{E}^{N-1}\|^2_{2,Q} + C^2_{1,N}\eta^{2N+2},$$

$$\|\operatorname{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^N)\|^2_{2,Q} \leqslant \eta^2\beta^2\gamma^2(\tilde\sigma^*)^2\|\mathbf{E} - \mathbf{E}^{N-1}\|^2_{2,Q} + \beta^2\gamma C^2_{1,N}\eta^{2N+2},$$

$$\|\mathscr{E} - \mathscr{E}^N\|^2_{2,Q} \leqslant \eta^2\|P_2(\tilde\sigma(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{N-1})\|^2_{2,Q} + \frac{C^2_{1,N}}{\gamma}\eta^{2N+2} \leqslant \eta^2(\tilde\sigma^*)^2\|\mathbf{E} - \mathbf{E}^{N-1}\|^2_{2,Q} + \frac{C^2_{1,N}}{\gamma}\eta^{2N+2}.$$

Используя равенства (51), (55), получаем оценки

$$\|\operatorname{grad}\left(\varphi - \varphi^0\right)\|_{2,Q} \leqslant \eta\|P_1\left(\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E})\right)\|_{2,\Omega},\ \|\operatorname{grad}\left(\varphi - \varphi^N\right)\|_{2,Q} \leqslant \eta\|P_1\left(\tilde\sigma(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{N-1})\right)\|_{2,Q}.$$

Следовательно, справедливы неравенства

$$\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^0\|_{2,Q}^2 \leqslant \eta^2\left(\|\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E})\|_{2,Q}^2+\frac{C_{1,0}^2}{\gamma}\right),$$

$$\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^N\|_{2,Q}^2 \leqslant \eta^2(\tilde{\sigma}^*)^2\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^{N-1}\|_{2,Q}^2+\frac{C_{1,N}^2}{\gamma}\eta^{2N+2}.$$

По индукции получаем

$$\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^N\|_{2,Q} \leqslant \eta^{N+1}(\tilde{\sigma}^*)^N\left(\|\tilde{\sigma}(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{ст}})\|_{2,Q}+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(C_{1,0}+\frac{C_{1,1}}{\tilde{\sigma}^*}+\ldots+\frac{C_{1,N}}{(\tilde{\sigma}^*)^N})\right),$$

$$\|\mathbf{H}-\mathbf{H}^N\|_{C([0,T],\{L_2(\Omega)\}^3)} \leqslant \eta^{N+1}(\tilde{\sigma}^*)^N\left(\sqrt{\gamma}\|\tilde{\sigma}(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{ст}})\|_{2,Q}+C_{1,0}+\frac{C_{1,1}}{\tilde{\sigma}^*}+\ldots+\frac{C_{1,N}}{(\tilde{\sigma}^*)^N}\right),$$

$$\|\operatorname{rot}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^N)\|_{2,Q} \leqslant \beta\eta^{N+1}(\tilde{\sigma}^*)^N\left(\gamma\|\tilde{\sigma}(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{ст}})\|_{2,Q}+\sqrt{\gamma}(C_{1,0}+\frac{C_{1,1}}{\tilde{\sigma}^*}+\ldots+\frac{C_{1,N}}{(\tilde{\sigma}^*)^N})\right),$$

$$\|\operatorname{grad}(\varphi-\varphi^N)\|_{2,Q} \leqslant \eta^{N+1}(\tilde{\sigma}^*)^{N+1}\|\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E}\|_{2,Q}.$$

Из (33) следует оценка

$$\|\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{ст}}\|_{2,Q} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-\eta\tilde{\sigma}^*}}\left(2\|\mathbf{E}^{\text{ст}}\|_{2,Q}+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\|\mathbf{h}\|_{2,\Omega}\right).$$

Таким образом, справедливы оценки (56), (57), где

$$M_N^1=\frac{2(\tilde{\sigma}^*)^{N+1}}{\sqrt{1-\eta^*\tilde{\sigma}^*}}\|\mathbf{E}^{\text{ст}}\|_{2,Q},\ M_N^0=\frac{(\tilde{\sigma}^*)^{N+1}}{\sqrt{1-\eta^*\tilde{\sigma}^*}}\|\mathbf{h}\|_{2,\Omega},\ M_N^2=M_N^0+(\tilde{\sigma}^*)^N\sum_{k=0}^N\frac{C_{1,k}}{(\tilde{\sigma}^*)^k}.$$

Теорема доказана.

Квазистационарное электромагнитное приближение. Пусть $\mathbf{H}\in L_2\left(0,T,U_2(\Omega)\right)$, $\varphi\in H^1\left(0,T,H(\Omega)\right)$, $\mathscr{E}\in L_2\left(0,T,K(\Omega)\right)$ — обобщенное решение задачи

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\beta\gamma(1+\eta\tilde{\sigma})\left(\mathscr{E}-\operatorname{grad}\varphi+\mathbf{E}^{\text{ст}}\right)-\beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi, \tag{60}$$

$$\operatorname{rot}\mathscr{E}=-\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H},\ \mathbf{H}(0)=\mathbf{h},\ \varphi(0)=\varphi_0. \tag{61}$$

Подставляя разложения (40) в (60), (61), получаем для определения компонент разложения задачи, имеющие тот же вид, что и задача для квазистационарного электромагнитного приближения в однородной среде:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^0=\beta\gamma\left(\mathscr{E}^0-\operatorname{grad}\varphi^0+\mathbf{E}^{\text{ст}}\right)-\beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi^0,$$

$$\operatorname{rot}\mathscr{E}^0=-\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}^0,\ \mathbf{H}^0(0)=\mathbf{h}_0,\ \varphi^0(0)=\varphi_{00},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_1=\beta\gamma(\mathscr{E}_1-\operatorname{grad}\varphi_1)+\beta\gamma\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^0+\mathbf{E}^{\text{ст}})-\beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_1,$$

$$\operatorname{rot}\mathscr{E}_1=-\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}_1,\ \mathbf{H}_1(0)=\mathbf{h}_1,\ \varphi_1(0)=\varphi_{01},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_k = \beta\gamma(\mathscr{E}_k - \operatorname{grad}\varphi_k) + \beta\gamma\tilde{\sigma}\mathbf{E}_{k-1} - \beta\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_k,$$

$$\operatorname{rot}\mathscr{E}_k = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}_k,\ \mathbf{H}(0)_k = \mathbf{h}_k,\ \varphi_k(0) = \varphi_{0k},\ k = 2, 3, \ldots,$$

где $\mathbf{E}^0 = \mathscr{E}^0 - \operatorname{grad}\varphi^0$, $\mathbf{E}_k = \mathscr{E}_k - \operatorname{grad}\varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Методом ортогонального проектирования поставленные задачи расщепляются на задачи определения функций $\mathbf{H}^0, \mathbf{H}_k \in L_2(0, T, U_2(\Omega))$, $\mathscr{E}^0, \mathscr{E}_k \in L_2(0, T, K(\Omega))$ и соответствующие задачи определения функций $\varphi^0, \varphi_k \in H^1(0, T, H(\Omega))$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi^0 + \gamma\operatorname{grad}\varphi^0 = -\gamma\operatorname{grad}\psi^{\text{ст}},\ \varphi^0(0) = \varphi_{00},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^0 = \beta\gamma(\mathscr{E}^{\text{ст}} + \mathscr{E}^0),\ \operatorname{rot}\mathscr{E}^0 = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}^0,\ \mathbf{H}^0(0) = \mathbf{h}_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_1 + \gamma\operatorname{grad}\varphi_1 = \gamma P_1(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E}^0)),\ \varphi_1(0) = \varphi_{01},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_1 = \beta\gamma\mathscr{E}_1 + \beta\gamma P_2(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E}^0)),$$

$$\operatorname{rot}\mathscr{E}_1 = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}_1,\ \mathbf{H}_1(0) = \mathbf{h}_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi_k + \gamma\operatorname{grad}\varphi_k = \gamma P_1(\tilde{\sigma}\mathbf{E}_{k-1}),\ \varphi_k(0) = \varphi_{0k},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}_k = \beta\gamma\mathscr{E}_k + \beta\gamma P_2(\tilde{\sigma}\mathbf{E}_{k-1}),$$

$$\operatorname{rot}\mathscr{E}_k = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}_k,\ \mathbf{H}_k(0) = \mathbf{h}_k,\ k = 2, 3, \ldots$$

Существование и единственность решений этих задач вытекает из теоремы 1.

Теорема 7. Пусть $\eta \leqslant \eta^* < (\tilde{\sigma}^*)^{-1}$. Справедливы неравенства

$$\|\operatorname{grad}\varphi - \operatorname{grad}\varphi^N\|_{2,Q} \leqslant \eta^{N+1}\left(K_N^1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}K_N^2\right),\ \|\mathscr{E} - \mathscr{E}^N\|_{2,Q} \leqslant \eta^{N+1}\left(K_N^1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma}}K_N^2\right), \tag{62}$$

$$\|\mathbf{H} - \mathbf{H}^N\|_{C(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)} \leqslant \eta^{N+1}\left(\sqrt{\gamma}K_N^1 + K_N^2\right),\ \|\operatorname{rot}\mathbf{H} - \operatorname{rot}\mathbf{H}^N\|_{2,Q} \leqslant \eta^{N+1}\beta\left(\gamma K_N^1 + \sqrt{\gamma}K_N^2\right), \tag{63}$$

где постоянные K_N^1, K_N^2 $(N \geqslant 0)$ не зависят от η, β, γ.

Доказательство. Функции $\mathbf{H}^N \in L_2\left(0, T, U_2(\Omega)\right)$, $\mathscr{E}^N \in L_2(0, T, K(\Omega))$, $\varphi^N \in H^1(0, T, H(\Omega))$, $N = 1, 2, \ldots$ — обобщенные решения задач

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^N = \beta\gamma\left(\mathscr{E}^N + \mathscr{E}^{\text{ст}}\right) + \beta\gamma\eta P_2\left(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E}^{N-1})\right), \tag{64}$$

$$\operatorname{rot}\mathscr{E}^N = -\beta\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}^N,\ \mathbf{H}^N(0) = \mathbf{h}^N, \tag{65}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}\varphi^N + \gamma\operatorname{grad}\varphi^N = \gamma\eta P_1(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}} + \mathbf{E}^{N-1}) - \gamma\operatorname{grad}\psi^{\text{ст}},\ \varphi^N(0) = \varphi_0^N, \tag{66}$$

где $\mathbf{E}^N = \mathscr{E}^N - \operatorname{grad}\varphi^N$.

Следовательно, функции $\mathbf{H} - \mathbf{H}^N$, $\mathscr{E} - \mathscr{E}^N$, $\varphi - \varphi^N$, $N = 0, 1, \ldots$ — обобщенные решения задач

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^0) = \beta\gamma(\mathscr{E} - \mathscr{E}^0) + \beta\gamma\eta P_2\left(\tilde{\sigma}(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}})\right),$$

$$\operatorname{rot}(\mathscr{E} - \mathscr{E}^0) = -\beta\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^0),\ (\mathbf{H} - \mathbf{H}^0)(0) = \mathbf{h} - \mathbf{h}_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}(\varphi-\varphi^0)+\gamma\operatorname{grad}(\varphi-\varphi^0)=\beta\gamma\eta P_1\left(\tilde\sigma(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{ст}})\right),\ (\varphi-\varphi^0)(0)=\varphi_0-\varphi_{00},$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^N)=\beta\gamma(\mathscr{E}-\mathscr{E}^N)+\beta\gamma\eta P_2\left(\tilde\sigma(\mathbf{E}-\mathbf{E}^{N-1})\right),$$

$$\operatorname{rot}(\mathscr{E}-\mathscr{E}^N)=-\beta\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^N),\ (\mathbf{H}-\mathbf{H}^N)(0)=\mathbf{h}-\mathbf{h}^N,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{grad}(\varphi-\varphi^N)+\gamma\operatorname{grad}(\varphi-\varphi^N)=\beta\gamma\eta P_1\left(\tilde\sigma(\mathbf{E}-\mathbf{E}^{N-1})\right),\ (\varphi-\varphi^N)(0)=\varphi_0-\varphi_0^N.$$

Для решений этих задач справедливы безразмерные аналоги оценок (15)–(17), (19), из которых получаем

$$\|\mathbf{H}-\mathbf{H}^0\|^2_{C(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)}\leqslant\eta^2\left(\gamma\|\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E})\|^2_{2,Q}+C^2_{1,0}\right),$$

$$\|\operatorname{rot}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^0)\|^2_{2,Q}\leqslant\eta^2\beta^2\left(\gamma^2\|\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E})\|^2_{2,Q}+C^2_{1,0}\gamma\right),$$

$$\|\mathscr{E}-\mathscr{E}^0\|^2_{2,Q}\leqslant\eta^2\left(\|\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E})\|^2_{2,Q}+\frac{C^2_{1,0}}{\gamma}\right),$$

$$\|\operatorname{grad}(\varphi-\varphi^0)\|^2_{2,Q}\leqslant\eta^2\left(\|\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E})\|^2_{2,Q}+\frac{C^2_{2,0}}{\gamma}\right),$$

$$\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^0\|^2_{2,Q}\leqslant\eta^2\left(\|\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E})\|^2_{2,Q}+\frac{C^2_{1,0}+C^2_{2,0}}{\gamma}\right),$$

$$\|\mathbf{H}-\mathbf{H}^N\|^2_{C(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)}\leqslant\eta^2\gamma(\tilde\sigma^*)^2\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^{N-1}\|^2_{2,Q}+C^2_{1,N}\eta^{2N+2},$$

$$\|\operatorname{rot}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^N)\|^2_{2,Q}\leqslant\eta^2\beta^2\gamma^2(\tilde\sigma^*)^2\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^{N-1}\|^2_{2,Q}+\beta^2\gamma C^2_{1,N}\eta^{2N+2},$$

$$\|\mathscr{E}-\mathscr{E}^N\|^2_{2,Q}\leqslant\eta^2(\tilde\sigma^*)^2\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^{N-1}\|^2_{2,Q}+\frac{C^2_{1,N}}{\gamma}\eta^{2N+2},$$

$$\|\operatorname{grad}(\varphi-\varphi^N)\|^2_{2,Q}\leqslant\eta^2(\tilde\sigma^*)^2\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^{N-1}\|^2_{2,Q}+\eta^{2N+2}\frac{C^2_{2,N}}{\gamma},$$

$$\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^N\|^2_{2,Q}\leqslant\eta^2(\tilde\sigma^*)^2\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^{N-1}\|^2_{2,Q}+\frac{C^2_{1,N}+C^2_{2,N}}{\gamma}\eta^{2N+2}.$$

По индукции доказывается неравенство

$$\|\mathbf{E}-\mathbf{E}^N\|^2_{2,Q}\leqslant\eta^{2N+2}(\tilde\sigma^*)^{2N}\left(\|\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E})\|^2_{2,Q}+\frac{1}{\gamma}\sum_{k=0}^{N}\frac{C^2_{1,k}+C^2_{2,k}}{(\tilde\sigma^*)^{2k}}\right),$$

из которого следуют оценки

$$\|\operatorname{grad}(\varphi-\varphi^N)\|^2_{2,Q}\leqslant\eta^{2N+2}(\tilde\sigma^*)^{2N}\left(\|\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E})\|^2_{2,Q}+\frac{1}{\gamma}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{C^2_{1,k}+C^2_{2,k}}{(\tilde\sigma^*)^{2k}}+\frac{1}{\gamma}\frac{C^2_{2,N}}{(\tilde\sigma^*)^{2N}}\right),$$

$$\|\mathscr{E}-\mathscr{E}^N\|^2_{2,Q}\leqslant\eta^{2N+2}(\tilde\sigma^*)^{2N}\left(\|\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E})\|^2_{2,Q}+\frac{1}{\gamma}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{C^2_{1,k}+C^2_{2,k}}{(\tilde\sigma^*)^{2k}}+\frac{1}{\gamma}\frac{C^2_{1,N}}{(\tilde\sigma^*)^{2N}}\right),$$

$$\|\mathbf{H}-\mathbf{H}^N\|^2_{C(0,T,\{L_2(\Omega)\}^3)}\leqslant\eta^{2N+2}(\tilde\sigma^*)^{2N}\left(\gamma\|\tilde\sigma(\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E})\|^2_{2,Q}+\sum_{k=0}^{N-1}\frac{C^2_{1,k}+C^2_{2,k}}{(\tilde\sigma^*)^{2k}}+\frac{C^2_{1,N}}{(\tilde\sigma^*)^{2N}}\right),$$

$$\|\operatorname{rot}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^N)\|_{2,Q}^2 \leqslant \eta^{2N+2}(\tilde{\sigma}^*)^{2N}\beta^2\left(\gamma^2\|\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}}+\mathbf{E})\|_{2,Q}^2+\gamma\sum_{k=0}^{N-1}\frac{C_{1,k}^2+C_{2,k}^2}{(\tilde{\sigma}^*)^{2k}}+\gamma\frac{C_{1,N}^2}{(\tilde{\sigma}^*)^{2N}}\right).$$

Из (38) вытекает неравенство

$$\|\tilde{\sigma}(\mathbf{E}+\mathbf{E}^{\text{ст}})\|_{2,Q} \leqslant \frac{2\tilde{\sigma}^*}{1-\eta^*\tilde{\sigma}^*}\|\mathbf{E}^{\text{ст}}\|_{2,Q}+\frac{\tilde{\sigma}^*}{\sqrt{\gamma(1-\eta^*\tilde{\sigma}^*)}}(\|\mathbf{h}\|_{2,\Omega}+\|\operatorname{grad}\varphi_0\|_{2,\Omega}).$$

Таким образом, справедливы оценки (62), (63), где

$$K_N^1=\frac{2(\tilde{\sigma}^*)^{N+1}}{1-\eta^*\tilde{\sigma}^*}\|\mathbf{E}^{\text{ст}}\|_{2,Q},\; K_N^2=(\tilde{\sigma}^*)^N\left(\frac{\tilde{\sigma}^*}{1-\eta^*\tilde{\sigma}^*}(\|\mathbf{h}\|_{2,\Omega}+\|\operatorname{grad}\varphi_0\|_{2,\Omega})+\sum_{k=0}^{N}\frac{C_{1,k}+C_{2,k}}{(\tilde{\sigma}^*)^k}\right).$$

Теорема доказана.

Замечание 1. При совпадении исходных данных $\mathbf{E}^{\text{ст}}$, $\mathbf{h}$, $\operatorname{grad}\varphi_0$, нулевые приближения для магнитного поля и вихревой составляющей электрического поля, функции $\mathbf{H}^0$ и $\mathbf{E}^0$, совпадают для квазистационарного магнитного приближения и квазистационарного электромагнитного приближения, нулевые приближения потенциальной составляющей электрического поля, функции $\operatorname{grad}\varphi^0$, совпадают для квазистационарного электрического приближения и квазистационарного электромагнитного приближения.

Для всех $N \geqslant 1$ задачи (64), (65) определения приближений $\mathbf{H}^N$, $\mathscr{E}^N$ для квазистационарного электромагнитного приближения имеют тот же вид, что и соответствующие задачи (58), (59) для квазистационарного магнитного приближения. Аналогично, совпадают задачи (66) и (46) определения функций $\operatorname{grad}\varphi^N$ для квазистационарного электромагнитного приближения и квазистационарного электрического приближения соответственно.

Замечание 2. Из доказательств теорем 5–7 следует, что сходимость полученных асимптотических рядов зависит от свойств рядов $\sum_{k=0}^{\infty} C_{1,k}(\tilde{\sigma}^*)^{-k}$, $\sum_{k=0}^{\infty} C_{2,k}(\tilde{\sigma}^*)^{-k}$. В частности, асимптотические ряды сходятся, если начальные функции $\mathbf{h}$ и $\operatorname{grad}\varphi_0$ не зависят от η. Справедливо также следующее утверждение.

Лемма 3. *Предположим, начальные данные задач удовлетворяют условию согласования*

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}=-\frac{4\pi}{c}\sigma\operatorname{grad}\varphi_0+\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}^{\text{ст}}(0)$$

или, в безразмерных переменных,

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}=-\beta\gamma\sigma_0\operatorname{grad}\varphi_0+\beta\gamma\sigma_0\mathbf{E}^{\text{ст}}(0),$$

позволяющему избежать эффекта пограничного слоя по времени. Тогда асимптотические ряды (40) *для решений начально-краевых задач для системы уравнений Максвелла в квазистационарных приближениях сходятся при* $\eta \leqslant \eta^* < (\tilde{\sigma}^*)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\sigma_0 = 1+\eta\tilde{\sigma}$. Для компонент разложения (39) справедливы равенства

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}_0=-\beta\gamma\operatorname{grad}\varphi_{00}+\beta\gamma\mathbf{E}^{\text{ст}}(0),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}_1=-\beta\gamma\operatorname{grad}\varphi_{01}+\beta\gamma\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}}(0)-\operatorname{grad}\varphi_{00}),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{h}_k=-\beta\gamma\operatorname{grad}\varphi_{0k}-\beta\gamma\tilde{\sigma}(\operatorname{grad}\varphi_{0,k-1}).$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad}\varphi_{00}=-\operatorname{grad}\psi^{\text{ст}},\;\operatorname{rot}\mathbf{h}_0=\beta\gamma\mathscr{E}^{\text{ст}}(0),$$

$$\operatorname{grad}\varphi_{01}=P_1(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}}(0)-\operatorname{grad}\varphi_{00})),\;\operatorname{rot}\mathbf{h}_1=\beta\gamma P_2(\tilde{\sigma}\mathbf{E}^{\text{ст}}(0)-\operatorname{grad}\varphi_{00}),$$

$$\operatorname{grad}\varphi_{0k} = P_1(\tilde{\sigma}(\operatorname{grad}\varphi_{0,k-1})),\ \operatorname{rot}\mathbf{h}_k = -\beta\gamma P_2(\tilde{\sigma}\operatorname{grad}\varphi_{0,k-1}).$$

Таким образом,

$$\operatorname{grad}(\varphi_0 - \varphi_{00}) = \eta P_1\left(\tilde{\sigma}(\mathbf{E}^{\text{ст}}(0) - \operatorname{grad}\varphi_0)\right),\ \operatorname{rot}(\mathbf{h} - \mathbf{h}_0) = \beta\gamma\eta P_2\left(\tilde{\sigma}\left(\mathbf{E}^{\text{ст}}(0) - \operatorname{grad}\varphi_0\right)\right),$$

$$\operatorname{grad}\varphi_0 - \operatorname{grad}\varphi_0^N = -\eta P_1\left(\tilde{\sigma}\left(\operatorname{grad}\varphi_0 - \operatorname{grad}\varphi_0^{N-1}\right)\right),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{h} - \operatorname{rot}\mathbf{h}_N = -\beta\gamma\eta P_2\left(\tilde{\sigma}\left(\operatorname{grad}\varphi_0 - \operatorname{grad}\varphi_0^{N-1}\right)\right).$$

По индукции получаем,

$$\|\operatorname{grad}\varphi_0 - \sum_{k=1}^{N}\eta^k\operatorname{grad}\varphi_{0k}\|_{2,\Omega} \leqslant \eta^{N+1}(\tilde{\sigma}^*)^{N+1}\|\mathbf{E}^{\text{ст}}(0) - \operatorname{grad}\varphi_0\|_{2,\Omega},$$

$$\|\operatorname{rot}\mathbf{h} - \sum_{k=1}^{N}\eta^k\operatorname{rot}\mathbf{h}_k\|_{2,\Omega} \leqslant \eta^{N+1}\beta\gamma(\tilde{\sigma}^*)^{N+1}\|\mathbf{E}^{\text{ст}}(0) - \operatorname{grad}\varphi_0\|_{2,\Omega}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{C_{2,k}}{(\tilde{\sigma}^*)^k} \leqslant (N+1)\tilde{\sigma}^*\|\mathbf{E}^{\text{ст}}(0) - \operatorname{grad}\varphi_0\|_{2,\Omega},\ \sum_{k=0}^{N}\frac{C_{1,k}}{(\tilde{\sigma}^*)^k} \leqslant \beta\gamma(N+1)\tilde{\sigma}^* A(\Omega)\|\mathbf{E}^{\text{ст}}(0) - \operatorname{grad}\varphi_0\|_{2,\Omega},$$

где постоянная $A(\Omega)$ зависит только от области Ω. Таким образом, правые части установленных в теоремах 5–7 оценок для остаточных сумм асимптотических рядов стремятся к нулю при $N \to \infty$.

Лемма доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, Физматлит, 1982.
2. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1989.
3. *Толмачев В. В., Головин А. М., Потапов В. С.* Термодинамика и электродинамика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1988.
4. *Raviart P.-A., Sonnendrücker E.* A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations // Numer. Math. 1996. V. 73. P. 329–372.
5. *Larsson J.* Electromagnetics from a quasistatic perspective // Am. J. Phys. 2007. V. 75. N 3. P. 230–239.
6. *Kruger S. E.* The three quasistatic limits of the Maxwell equations // arXiv:1909.11264, 2019.
7. *Kalinin A. V., Tyukhtina A. A.* Hierarchy of models of quasi-stationary electromagnetic fields // MMST 2020, Revised Selected Papers. CCIS, v. 1413. Springer, 2021. P. 77–92.
8. *Kalinin A. V., Slyunyaev N. N.* Initial-boundary value problems for the equations of the global atmospheric electric circuit // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 450. N 1. P. 112–136.
9. *Alonso Rodriguez A., Valli A.* Eddy current approximation of Maxwell equations. Theory, algorithms and applications. Milan: Spriner-Verlag Italia, 2010.
10. *Degond P., Raviart P.-A.* An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations // Forum Math. 1992. V. 4. P. 13–44.
11. *Kaufman A. N., Rostler P. S.* The Darwin model as a tool for electromagnetic plasma simulation // Phys. Fluids. 1971. V. 14. N 2. P. 446–448.
12. *Hewett D. W., Boyd J. K.* Streamlined Darwin simulation of nonneutral plasmas // J. Comput. Phys. 1987. V. 70. P. 166–181.
13. *Krause T. B., Apte A., Morrison P. J.* A unified approach to the Darwin approximation // Phys. Plasmas 2007. V. 14. 102112.

14. *Sonnendrücker E., Ambrosiano J. J., Scott T. Brandon S. T.* A finite element formulation of the Darwin PIC model for use on unstructured grids // J. Comp. Phys. 1995. V. 121. N 2. P. 281–297.
15. *Ciarlet P. Jr., Zou J.* Finite element convergence for the Darwin model to Maxwell's equations // Math. Modeling Numer. Anal. 1997. V. 31. N 2. P. 213–249.
16. *Fang N., Liao C., Ying L. A.* Darwin Approximation to Maxwell's Equations // ICCS 2009. Lecture Notes in Computer Science. V. 5544. Berlin: Springer, 2009.
17. *Koch S., Schneider H., Weiland T.* A low-frequency approximation to the Maxwell equations simultaneously considering inductive and capacitive phenomena // IEEE Trans. Magn. 2012. V. 48. P. 511–514.
18. *Badics Z., Pavo J., Bilicz S., Gyimothy S.* Subdomain perturbation finite element method for quasi-static Darwin approximation // IEEE Trans. Magn. 2020. V. 56. N 1. Art no. 7503304.
19. *Yan S., Tang Z., Henneron T., Ren Z.* Structure-preserved reduced-order modeling for frequency-domain solution of the Darwin model with a gauged potential formulation // IEEE Trans. Magn. 2020. V. 56. N 1. Art no. 7500404.
20. *Clemens M., Kasolis F., Henkel M.-L., Kähne B., Günther M.* A two-step Darwin model time-domain formulation for quasi-static electromagnetic field calculations // IEEE Trans. Magn. 2021. V. 57. N 6. P. 1–4.
21. *Мареев Е. А.* Достижения и перспективы исследований глобальной электрической цепи // Успехи физ. наук. 2010. Т. 180. N 5. С. 527–534.
22. *Калинин А. В., Слюняев Н. Н., Мареев Е. А., Жидков А. А.* Стационарные и нестационарные модели глобальной электрической цепи: корректность, аналитические соотношения, численная реализация // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2014. Т. 50. N 3. С. 314–322.
23. *Slyunyaev N. N., Kalinin A. V., Mareev E. A.* Thunderstorm generators operating as voltage sources in global electric circuit models // J. Atm. Solar-Terr. Phys. 2019. V. 183. P. 99–109.
24. *Shalimov S. L., Bösinger T.* An alternative explanation for the ultra-slow tail of sprite-associated lightning discharges // J. Atm. and Solar-Terr. Phys. 2006. V. 68. N 7. P. 814–820.
25. *Калинин А. В., Тюхтина А. А.* Некоторые математические задачи атмосферного электричества // Итоги науки и техники. Совр. мат. прил. 2022. Т. 207. С. 48–60.
26. *Raviart P.-A., Sonnendrücker E.* Approximate models for the Maxwell equations // J. Comput. Appl. Math. 1994. V. 63. P. 69–81.
27. *Ciarlet P., Sonnendrücker E.* A Decomposition of the electromagnetic field – application to the Darwin model // Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 1997. V. 07. N 8. P. 1085–1120.
28. *Fang N., Ying L.* Three dimensional exterior problem of the Darwin model and its numerical computation // Math. Mod. Meth. Appl. Sci. 2008. V. 18. N 10. P. 1673–1701.
29. *Liao C., Ying L.* An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell equations in 3-D unbounded domains // Comm. Math. Sci. 2008. V. 6. N 3. P. 695–710.
30. *Калинин А. В., Тюхтина А. А.* Приближение Дарвина для системы уравнений Максвелла в неоднородных проводящих средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. N 8. С. 121–134.
31. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981.
32. *Girault V., Raviart P.* Finite element methods for Navier–Stokes equations. N.Y.: Springler-Verlag, 1986.

PROBLEMS OF DETERMINING QUASI-STATIONARY ELECTROMAGNETIC FIELDS IN WEAKLY INHOMOGENEOUS MEDIA

A. V. Kalinin[a,b,*], A. A. Tyukhtina[a,**], S. A. Malov[a]

[a] *National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Gagarin Ave., 23, Nizhny Novgorod, 603022 Russia*
[b] *Institute of Applied Physics, Russian Academy of Sciences, Ulyanov St., 66, Nizhny Novgorod, 603950 Russia*

[*] *e-mail: avk@mm.unn.ru*
[**] *e-mail: tyukhtina@iee.unn.ru*

Received 23 October, 2023
Revised 28 December, 2023
Accepted 05 March, 2024

Abstract. Statements of initial-boundary value problems for the system of Maxwell equations in various quasi-stationary approximations in homogeneous and inhomogeneous conducting media are considered. In the case of weakly inhomogeneous media, asymptotic expansions of solutions of the initial-boundary value problems under consideration in a parameter characterizing the degree of inhomogeneity of the medium are formulated and substantiated. It is shown that the construction of an asymptotic expansion for a quasi-stationary electromagnetic approximation leads to a sequential solution of independent problems for a quasi-stationary electric and quasi-stationary magnetic approximation in a homogeneous medium. Conditions on the initial data are given for which the asymptotic series are convergent.

Keywords: Maxwell's system of equations, quasi-stationary electromagnetic approximation, conductivity, inhomogeneous media, asymptotic expansion.