ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 6, с. 1028–1041

УДК 517.956.4

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА

С. И. Сахаров[1,*]

[1] *119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия*

[*] *e-mail: ser341516@yandex.ru*

Поступила в редакцию 14.12.2023 г.
Переработанный вариант 06.02.2024 г.
Принята к публикации 05.03.2024 г.

Рассмотрены начально-краевые задачи для однородных параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами при нулевых начальных условиях в полуограниченной плоской области с негладкой боковой границей, допускающей наличие “клювов”, на которой задаются граничные условия общего вида с переменными коэффициентами. Методом граничных интегральных уравнений доказана теорема об однозначной классической разрешимости таких задач в пространстве функций, непрерывных и ограниченных вместе со своей пространственной производной первого порядка в замыкании области. Дано представление полученных решений в виде векторных потенциалов простого слоя. Библ. 28.

Ключевые слова: параболические системы, начально-краевые задачи, негладкая боковая граница, граничные интегральные уравнения, условие Дини.

DOI: 10.31857/S0044466924060115, **EDN:** XYFZEM

ВВЕДЕНИЕ

Однозначная разрешимость начально-краевых задач для параболических систем с гёльдеровскими коэффициентами в пространстве $H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Omega})$, $0<\alpha<1$, в областях с гладкими боковыми границами следует из общей теории параболических задач (см. [1], [2, с. 706]). В этих работах требовалось, чтобы коэффициенты в граничных условиях первого и третьего рода принадлежали пространствам $H^{1+\alpha/2}[0,T]$ и $H^{(1+\alpha)/2}[0,T]$ соответственно.

В случае параболических систем с гёльдеровскими коэффициентами первая и вторая начально-краевые задачи в плоских областях с негладкими боковыми границами из класса Жевре $H^{(1+\alpha)/2}$, допускающими, в частности, наличие “клювов”, рассматривались в [3]–[5]. В более общем случае параболических систем с коэффициентами, удовлетворяющими двойному условию Дини, в [6]–[10] доказаны теоремы о существовании и единственности решений из пространства $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ (см. раздел 1) первой, второй и смешанной начально-краевых задач в областях с боковыми границами из класса Дини–Гёльдера $H^{1/2+\omega}$, где ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини.

Естественно возникает вопрос о получении аналогичных результатов и в случае начально-краевых задач для параболических систем с краевыми условиями общего вида, когда на боковых границах задаются условия как первого, так и третьего рода. Однозначная классическая разрешимость в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ таких задач для однородных параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами и нулевыми начальными условиями была доказана в [11], где рассматривалась полуограниченная область с негладкой боковой границей из класса Дини–Гёльдера $H^{1/2+\omega}$. В этой работе предполагалось, что коэффициенты в граничных условиях являются постоянными. Было сформулировано алгебраическое условие однозначной разрешимости поставленных задач и доказана его эквивалентность известному условию дополнительности.

В настоящей работе результаты [11] обобщаются на случай граничных условий, в которых коэффициенты являются переменными функциями. При этом непрерывные на $[0,T]$ коэффициенты в граничных условиях первого рода удовлетворяют условию Дини–Гёльдера на каждом отрезке $[t_1,T]$, $t_1 \in (0,T)$, и могут не удовлетворять этому условию в окрестности $t = 0$. Старшие коэффициенты в граничных условиях третьего рода являются непрерывными на отрезке $[0,T]$, а младшие коэффициенты в этих условиях могут расти определенным образом при $t \to +0$. Показано также, что условия на характер непрерывности правых частей в граничных условиях являются точными для разрешимости поставленных задач в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$.

Задачи для параболических систем моделируют, в частности, процессы тепло- и массопереноса в многокомпонентных материалах (см., например, [12]–[19]). При этом характер негладкости боковой границы области моделирует, в частности, резкое изменение границ некоторых металлов, связанное с фазовыми переходами при изменении температуры (см., например, [20]).

Работа состоит из четырех разделов. В разделе 1 приводятся необходимые определения и формулируются основные результаты. В разделе 2 доказывается теорема об однозначной разрешимости в пространстве $C[0,T]$ систем граничных интегральных уравнений, к которым редуцируются поставленные задачи. В разделе 3 доказывается основная теорема об однозначной разрешимости рассматриваемых задач. В разделе 4 доказывается точность условий на характер непрерывности правых частей в граничных условиях.

1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Следуя [21, с. 151], *модулем непрерывности* называем непрерывную, неубывающую, полуаддитивную функцию ω: $[0,+\infty) \to \mathbb{R}$, для которой $\omega(0) = 0$. Говорят, что модуль непрерывности ω удовлетворяет *условию Дини*, если

$$\widetilde{\omega}(z) = \int\limits_0^z y^{-1}\omega(y)dy < +\infty, \qquad z > 0. \tag{1}$$

Через $\mathscr{D}$ обозначим множество модулей непрерывности, которые удовлетворяют условию Дини (1).

Пусть число $T > 0$ фиксировано. Через $C[0,T]$ обозначим пространство непрерывных на $[0,T]$ (вектор-)функций с нормой $\|\psi;[0,T]\|^0 = \max\limits_{t\in[0,T]}|\psi(t)|$. Положим $\underset{0}{C}[0,T] = \{\psi \in C[0,T] :\ \psi(0) = 0\}$.

Здесь и далее для числового вектора a (числовой матрицы A) под $|a|$ (соответственно $|A|$) понимаем максимум из модулей его компонент (её элементов).

Пусть ω — некоторый модуль непрерывности. Введем пространства $H^{q+\omega}[0,T] = \Big\{\psi \in C[0,T]$: $\|\psi;[0,T]\|^{q+\omega} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \sup\limits_{\substack{t,t+\Delta t\in(0,T),\\ \Delta t\neq 0}} \frac{|\Delta_t\psi(t)|}{|\Delta t|^q\omega(|\Delta t|^{1/2})} < \infty\Big\}$, $\underset{0}{H}^{q+\omega}[0,T] = \{\psi \in H^{q+\omega}[0,T]:\quad \psi(0) = 0\}$, $q = 0, 1/2$, где $\Delta_t\psi(t) = \psi(t+\Delta t) - \psi(t)$.

Пусть

$$\partial^{1/2}\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\varphi(\tau)d\tau, \qquad t \in [0,T],$$

есть оператор дробного дифференцирования порядка 1/2. Следуя [3], [4], введем пространство $\underset{0}{C}^{1/2}[0,T] = \{\psi \in \underset{0}{C}[0,T] :\ \partial^{1/2}\psi \in \underset{0}{C}[0,T],\ \|\psi;[0,T]\|^{1/2} = \|\psi;[0,T]\|^0 + \|\partial^{1/2}\psi;[0,T]\|^0 < \infty\}$.

Функция $\nu(z)$, $z > 0$, называется *почти убывающей*, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $\nu(z_1) \leqslant C\nu(z_2)$, $z_1 \geqslant z_2 > 0$.

В полосе $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}, \ t \in (0,T)\}$ выделяется область $\Omega = \{(x,t) \in D : \ x > g(t)\}$, где g удовлетворяет условию

$$g \in H^{1/2+\omega_1}[0,T], \qquad \omega_1 \in \mathcal{D}, \tag{2}$$

причем для некоторого $\varepsilon_1 \in (0,1)$ функция $z^{-\varepsilon_1}\omega_1(z), \ z > 0$, почти убывает.

Через $C^0(\overline{\Omega})$ обозначим пространство непрерывных и ограниченных в $\overline{\Omega}$ (вектор-)функций с нормой $\|u;\Omega\|^0 = \sup\limits_{(x,t)\in\Omega} |u(x,t)|$.

Под значениями функций и их производных на границе области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ понимаем их предельные значения “изнутри” Ω.

Положим $C^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : \ \partial_x u \in C^0(\overline{\Omega})\}$, $\|u;\Omega\|^{1,0} = \sum\limits_{l=0}^{1} \|\partial_x^l u;\Omega\|^0$, $\underset{0}{C}{}^{1,0}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^{1,0}(\overline{\Omega}) : \partial_x^l u(x,0) = 0, \ l = 0,1\}$.

Пусть число $m \in \mathbb{N}$ фиксировано. Рассмотрим в D равномерно параболический по И. Г. Петровскому оператор

$$Lu = \partial_t u - \sum_{l=0}^{2} A_l(x,t)\partial_x^l u, \qquad u = (u_1,\ldots,u_m)^{\mathrm{T}},$$

где $A_l = \|a_{jkl}\|$ — $m\times m$-матрицы, элементами которых являются вещественные функции, определенные и ограниченные в $\overline{D}$, и выполнены условия:

a) собственные числа $\mu_r, \ r = \overline{1,m}$, матрицы A_2 подчиняются неравенствам $\mathrm{Re}\mu_r(x,t) \geqslant \delta$ для некоторого $\delta > 0$ и всех $(x,t) \in \overline{D}$;

b) $|a_{jkl}(x+\Delta x, t+\Delta t) - a_{jkl}(x,t)| \leqslant \omega_0(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2}), \ (x+\Delta x, t+\Delta t), \ (x,t) \in \overline{D}$, где ω_0 — модуль непрерывности, удовлетворяющий двойному условию Дини

$$\widetilde{\widetilde{\omega}}_0(z) = \int_0^z y^{-1}dy \int_0^y x^{-1}\omega_0(x)dx < +\infty, \qquad z > 0,$$

причем для некоторого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ функция $z^{-\varepsilon_0}\omega_0(z), \ z > 0$, почти убывает.

Пусть

$$Z(x,t;A_2(\xi,\tau)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\exp\{-y^2 t A_2(\xi,\tau)\}dy, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty), \ (\xi,\tau) \in \overline{D}. \tag{3}$$

Обозначим $D^* = \{(x,t;\xi,\tau) \in \overline{D}\times\overline{D} : \ t > \tau\}$. Известно (см. [22]), что при выполнении условий a) и b) у системы $Lu = 0$ существует фундаментальная матрица решений $\Gamma(x,t;\xi,\tau), \ (x,t;\xi,\tau) \in D^*$, справедливы оценки

$$|\partial_t^k \partial_x^l \Gamma(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp(-c(x-\xi)^2/(t-\tau)), \ (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \ 2k+l \leqslant 2, \tag{4}$$

и, кроме того, для разности

$$W(x,t;\xi,\tau) \equiv \Gamma(x,t;\xi,\tau) - Z(x-\xi,t-\tau;A_2(\xi,\tau)), \ (x,t;\xi,\tau) \in D^*, \tag{5}$$

выполнены оценки

$$|\partial_t^k \partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-(2k+l+1)/2}\exp\left(\frac{-c(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \ 2k+l \leqslant 2, \tag{6}$$

$$|\Delta_t \partial_x^l W(x,t;\xi,\tau)| \leqslant C(\Delta t)^{1-l/2}\widetilde{\omega}_0\left((t-\tau)^{1/2}\right)(t-\tau)^{-3/2}\exp\left(\frac{-c(x-\xi)^2}{t-\tau}\right), \tag{7}$$

$(x,t;\xi,\tau),(x,t+\Delta t;\xi,\tau)\in D^*,\ 0<\Delta t\leqslant t-\tau,\ l=0,1.$

Пусть $m_j\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ j=0,1$, и $m_0+m_1=m$. Пусть заданы $m_0\times m$-матрица $B_0(t)=\|b_{jk0}(t)\|$ и $m_1\times m$-матрицы $B_1(t)=\|b_{jk1}(t)\|,\ \hat{B}_1(t)=\|\hat{b}_{jk1}(t)\|$, где функции b_{jk0},b_{jk1} и $\hat{b}_{jk1}$ удовлетворяют условиям

$$b_{jk0}\in C[0,T],\ |\Delta_t b_{jk0}(t)|\leqslant\frac{|\Delta t|^{1/2}\omega_1(|\Delta t|^{1/2})}{\min\{t^{1/2},(t+\Delta t)^{1/2}\}},\ t,t+\Delta t\in(0,T], \tag{8}$$

$$b_{jk1}\in C[0,T], \tag{9}$$

$$|\hat{b}_{jk1}(t)|\leqslant\frac{\omega_2(t^{1/2})}{t^{1/2}},\ |\Delta_t\hat{b}_{jk1}(t)|\leqslant\frac{\omega_2(|\Delta t|^{1/2})}{\min\left\{t^{1/2},(t+\Delta t)^{1/2}\right\}},\ t,t+\Delta t\in(0,T], \tag{10}$$

где ω_2 — некоторый модуль непрерывности.

Рассмотрим задачу о нахождении (вектор-)функции $u\in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$, являющейся регулярным решением системы

$$Lu(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\Omega, \tag{11}$$

удовлетворяющей начальному условию

$$u(x,0)=0,\qquad x\geqslant g(0), \tag{12}$$

и граничным условиям

$$B_0(t)u(g(t),t)=\psi_0(t), \tag{13}$$

$$B_1(t)\partial_x u(g(t),t)+\hat{B}_1(t)u(g(t),t)=\psi_1(t),\qquad t\in[0,T]. \tag{14}$$

Замечание 1. В состав граничных условий (13), (14) для компонент искомой (вектор-)функции u входит m_0 граничных условий первого рода и m_1 граничных условий третьего рода, причем $m_0+m_1=m$, где m — порядок матриц $A_l,\ l=0,1,2$, задающих коэффициенты оператора L.

Положим

$$A(t)=A_2(g(t),t),\quad M(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-y^2A(t)\}dy, \tag{15}$$

$$G(t)=\begin{pmatrix}B_0\\ B_1M\end{pmatrix}(t),\qquad t\in[0,T]. \tag{16}$$

Заметим, что из равенства (см. [23])

$$M^2(t)=(A(t))^{-1},\qquad t\in[0,T], \tag{17}$$

следует, что

$$\det M(t)\neq 0,\qquad t\in[0,T]. \tag{18}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* a), b), (2), (8)–(10) *и, кроме того,*

$$\det G(t)\neq 0,\qquad t\in[0,T]. \tag{19}$$

Тогда для любых $\psi_0 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ *и* $\psi_1 \in \underset{0}{C}[0,T]$ *существует единственное регулярное решение* $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ *задачи* (11)–(14)*, и справедлива оценка*

$$\|u;\Omega\|^{1,0} \leqslant C\{\|\psi_0;[0,T]\|^{1/2} + \|\psi_1;[0,T]\|^0\}. \tag{20}$$

При этом для решения $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ *задачи* (11)–(14) *справедливо интегральное представление в виде (векторного) параболического потенциала простого слоя*

$$u(x,t) = \int_0^t \Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau, \qquad (x,t) \in \overline{\Omega}, \tag{21}$$

где $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ — *единственное в* $C[0,T]$ *решение системы граничных интегральных уравнений Вольтерры I и II рода*

$$B_0(t)\int_0^t \Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau = \psi_0(t), \tag{22}$$

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2}B_1(t)(A(t))^{-1}\varphi(t) + \int_0^t [B_1(t)\partial_x\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)+ \\ +\hat{B}_1(t)\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)]\varphi(\tau)d\tau = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь и далее через C, c обозначаем положительные постоянные, зависящие от чисел T, m, коэффициентов оператора L, элементов матриц B_j, $j = 0, 1$, $\hat{B}_1$ и модуля непрерывности ω_1.

Замечание 2. В случае постоянных матриц $B_0(t) \equiv B_0$, $B_1(t) \equiv B_1$ и $\hat{B}_1(t) \equiv \hat{B}_1$, $t \in [0,T]$, теорема 1 доказана в [11].

Замечание 3. В [11] показано, что условие (19) эквивалентно известному (см. [2, с. 700], [24, с. 360]) условию дополнительности: для произвольно фиксированных чисел $p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}p > 0$, и $t \in [0,T]$

$$\det\begin{pmatrix} B_0(t) \displaystyle\int_{\gamma^+(p,t)} (pE + y^2A(t))^{-1}dy \\ B_1(t) \displaystyle\int_{\gamma^+(p,t)} y(pE + y^2A(t))^{-1}dy \end{pmatrix} \neq 0,$$

где $\gamma^+(p,t)$ — произвольный простой замкнутый контур, содержащийся в полуплоскости $\{\mathrm{Im}y > 0\}$ и охватывающий корни уравнения

$$\det\left(pE + y^2A(t)\right) = 0,$$

имеющие положительную мнимую часть (обход кривой $\gamma^+(p,t)$ предполагается направленным против часовой стрелки).

Замечание 4. Условия $\psi_0 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ и $\psi_1 \in \underset{0}{C}[0,T]$ являются точными для существования решения задачи (11)–(14) из пространства $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ (см. ниже раздел 4).

2. СИСТЕМА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В следующих двух леммах приведем известные результаты, которые будут использованы в дальнейшем.

Лемма 1 (см. [25]). *Пусть* $\omega \in \mathcal{D}$. *Тогда* $\partial^{1/2}$ *является ограниченным оператором из* $\underset{0}{H}^{1/2+\omega}[0,T]$ *в* $\underset{0}{H}^{\tilde{\omega}}[0,T]$.

Следуя А. Н. Тихонову (см. [26]), назовем оператор $K : C[0,T] \to C[0,T]$ *вольтерровым*, если для любого $t \in [0,T]$ из равенства $\varphi_1 = \varphi_2$ на $[0,t]$ следует, что $K\varphi_1 = K\varphi_2$ на $[0,t]$.

Лемма 2 (см. [27]). *Пусть* ω — *некоторый модуль непрерывности, и* $K : C[0,T] \to \underset{0}{H}^{\omega}[0,T]$ — *линейный ограниченный вольтерров оператор. Тогда для любой (вектор-)функции* $\psi \in C[0,T]$ *уравнение* $\varphi + K\varphi = \psi$ *имеет единственное решение* $\varphi \in C[0,T]$, *и справедлива оценка* $\|\varphi;[0,T]\|^0 \leqslant C\|\psi;[0,T]\|^0$.

Рассмотрим систему граничных интегральных уравнений (22), (23). Полагая (см. (15))

$$N_0(t,\tau) = B_0(\tau)[\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau) - Z(0,t-\tau;A(\tau))] + [B_0(t) - B_0(\tau)]\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau), \tag{24}$$

$$N_1(t,\tau) = B_1(t)\partial_x\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau) + \hat{B}_1(t)\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau), \qquad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T,$$

систему (22), (23) можно записать в виде

$$\int\limits_0^t B_0(\tau)Z(0,t-\tau;A(\tau))\varphi(\tau)d\tau + \int\limits_0^t N_0(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = \psi_0(t), \tag{25}$$

$$-\frac{1}{2}B_1(t)(A(t))^{-1}\varphi(t) + \int\limits_0^t N_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = \psi_1(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{26}$$

Пусть оператор дробного интегрирования действует на $\varphi \in C[0,T]$ по формуле

$$I^{1/2}\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\varphi(\tau)d\tau, \qquad t \in [0,T].$$

В силу (3) и (15)

$$Z(0,t-\tau;A(\tau)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}}M(\tau), \qquad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T,$$

поэтому уравнение (25) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2}I^{1/2}(B_0M\varphi)(t) + \int\limits_0^t N_0(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = \psi_0(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{27}$$

Введем операторы H_0 и H_1, действующие на функции $\varphi \in C[0,T]$ по формулам

$$(H_l\varphi)(t) = \int\limits_0^t N_l(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau, \qquad t \in [0,T],\ l = 0,1,$$

и перепишем систему (27), (26) в виде

$$\frac{1}{2}I^{1/2}(B_0M\varphi)(t) + (H_0\varphi)(t) = \psi_0(t), \tag{28}$$

$$-\frac{1}{2}B_1(t)(A(t))^{-1}\varphi(t) + (H_1\varphi)(t) = \psi_1(t),\ t \in [0,T]. \tag{29}$$

Пусть

$$\omega_3(z) = \sup_{\substack{t,t+\Delta t\in[0,T],\\ |\Delta t|\leqslant z}} |\Delta_t B_1(t)|, \qquad z \in [0,T],\ \omega_3(z) = \omega_3(T),\ z \geqslant T.$$

Функция ω_3 удовлетворяет определению модуля непрерывности. Положим $\omega_4(z) = \widetilde{\omega}_0(z) + \omega_1(z)$, $\omega_5(z) = \widetilde{\omega}_4(z) + \omega_2(z) + \omega_3(z)$, $z \geqslant 0$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* a), b), (2) и (8). *Тогда* H_0 *является ограниченным оператором из* $C[0,T]$ *в* $\underset{0}{H}^{1/2+\omega_4}[0,T]$.

Доказательство. Здесь и далее полагаем $C_\varphi = C\|\varphi;[0,T]\|^0$. Достаточно доказать справедливость следующих оценок:

$$|(H_0\varphi)(t)| \leqslant C_\varphi t^{1/2}\omega_4(t^{1/2}), \tag{30}$$

$$|\Delta_t(H_0\varphi)(t)| \leqslant C_\varphi(\Delta t)^{1/2}\omega_4((\Delta t)^{1/2}), \qquad t, t+\Delta t \in [0,T],\ \Delta t > 0. \tag{31}$$

Имеет место представление (см. (24))

$$(H_0\varphi)(t) = \int\limits_0^t B_0(\tau)[\Gamma(g(t),t;g(\tau);\tau) - Z(0,t-\tau;A(\tau))]\varphi(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t [B_0(t) - B_0(\tau)]\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau \equiv (H_{01}\varphi)(t) + (H_{02}\varphi)(t), \qquad t \in [0,T].$$

Для $H_{01}\varphi$ оценки (30), (31) следуют из результатов [28]. Докажем справедливость оценок (30), (31) для $H_{02}\varphi$.

Положим

$$N_{02}(t,\tau) = [B_0(t) - B_0(\tau)]\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau), \qquad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T.$$

В силу оценок (4) и условия (8), справедливо неравенство

$$|N_{02}(t,\tau)| \leqslant C\omega_1((t-\tau)^{1/2})\tau^{-1/2}, \qquad 0 < \tau < t \leqslant T, \tag{32}$$

из которого следует оценка (**??**) для $H_{02}\varphi$:

$$|(H_{02}\varphi)(t)| \leqslant C_\varphi \int\limits_0^t \omega_1((t-\tau)^{1/2})\tau^{-1/2}d\tau \leqslant C_\varphi t^{1/2}\omega_1(t^{1/2}), \qquad t \in [0,T].$$

Справедливость оценки (31) для $H_{02}\varphi$, в силу (30), достаточно доказать в случае $0 < \Delta t < t/2$. Положим

$$\Delta_t(H_{02}\varphi)(t) = \sum_{j=0}^{1}(-1)^{j+1}\int\limits_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t} N_{02}(t+j\Delta t,\tau)\varphi(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^{t-\Delta t} \Delta_t N_{02}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau \equiv \sum_{j=0}^{2} R_j(t,\Delta t), \qquad t, t+\Delta t \in [0,T],\ 0 < \Delta t < \frac{t}{2}.$$

Используя (32), получаем оценки для интегралов $R_j,\ j = 0,1$:

$$\begin{gathered} |R_j(t,\Delta t)| \leqslant C_\varphi \int\limits_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t} \omega_1((t+j\Delta t-\tau)^{1/2})\tau^{-1/2}d\tau \leqslant \\ \leqslant C_\varphi(\Delta t)^{1/2}\omega_1\big((\Delta t)^{1/2}\big), \qquad t, t+\Delta t \in [0,T],\ 0 < \Delta t < \tfrac{t}{2}. \end{gathered} \tag{33}$$

Рассмотрим интеграл R_2. В силу условия (2) и оценок (4), имеем

$$|\Delta_t\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)| \leqslant C[(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-1} + \Delta t(t-\tau)^{-3/2}], \tag{34}$$

$0 \leqslant \tau < t < t + \Delta t \leqslant T,\ \Delta t \leqslant t - \tau$. Отсюда, используя (4) и (8), последовательно получаем

$$|\Delta_t N_{02}(t,\tau)| \leqslant$$
$$\leqslant C\big[(\Delta t)^{1/2}\omega_1\big((\Delta t)^{1/2}\big)(t-\tau)^{-1/2}t^{-1/2} + (\Delta t)^{1/2}\omega_1\big((\Delta t)^{1/2}\big)\omega_1\big((t-\tau)^{1/2}\big)(t-\tau)^{-1/2}\tau^{-1/2} +$$
$$+(\Delta t)\omega_1\big((t-\tau)^{1/2}\big)(t-\tau)^{-1}\tau^{-1/2}\big] \leqslant C(\Delta t)^{1/2}\omega_1\big((\Delta t)^{1/2}\big)(t-\tau)^{-1/2}\tau^{-1/2},$$

$0 < \tau < t < t + \Delta t \leqslant T,\ \Delta t \leqslant t - \tau$,

$$|R_2(t,\Delta t)| \leqslant C_\varphi(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2}), \qquad t, t+\Delta t \in [0,T],\ 0 < \Delta t < \frac{t}{2}.$$

Отсюда и из (33) вытекает оценка (31) для $H_{02}\varphi$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* a), b), (2), (9) и (10). *Тогда* H_1 *является ограниченным оператором из* $C[0,T]$ *в* $\underset{0}{H}^{\omega_5}[0,T]$.

Доказательство. Достаточно доказать справедливость оценок

$$|(H_1\varphi)(t)| \leqslant C_\varphi\omega_5(t^{1/2}), \tag{35}$$

$$|\Delta_t(H_1\varphi)(t)| \leqslant C_\varphi\omega_5((\Delta t)^{1/2}), \qquad t, t+\Delta t \in [0,T],\ \Delta t > 0. \tag{36}$$

Докажем оценку (35). Используя неравенство (см. [22])

$$|\partial_x\Gamma(g(t),t;g(\tau),\tau)| \leqslant C(\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2}) + \omega_1((t-\tau)^{1/2}))(t-\tau)^{-1}, \qquad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T,$$

оценку (4) и условия (9), (10), последовательно получаем

$$|N_1(t,\tau)| \leqslant C\{\omega_4((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1} + \omega_2(t^{1/2})t^{-1/2}(t-\tau)^{-1/2}\}, \qquad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T, \tag{37}$$

$$|(H_1\varphi)(t)| \leqslant C_\varphi(\widetilde{\omega}_4(t^{1/2}) + \omega_2(t^{1/2})), \qquad t \in [0,T].$$

Справедливость оценки (36) докажем с помощью представления

$$\Delta_t(H_1\varphi)(t) = \sum_{j=0}^{1}(-1)^{j+1}\int\limits_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t} N_1(t+j\Delta t,\tau)\varphi(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^{t-\Delta t}\Delta_t N_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau \equiv \sum_{j=0}^{2}P_j(t,\Delta t),\ t, t+\Delta t \in [0,T],\ 0 < \Delta t < t.$$

При этом, в силу (35), можно считать, что $0 < \Delta t < t$. Используя неравенство (37), получаем оценки для интегралов $P_j,\ j = 0, 1$:

$$|P_j(t,\Delta t)| \leqslant C_\varphi\int\limits_{t-\Delta t}^{t+j\Delta t}\omega_4((t+j\Delta t-\tau)^{1/2})(t+j\Delta t-\tau)^{-1} + \omega_2((t+j\Delta t)^{1/2})(t+j\Delta t)^{-1/2}(t+j\Delta t-\tau)^{-1/2}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_\varphi(\widetilde{\omega}_4((\Delta t)^{1/2}) + \omega_2((\Delta t)^{1/2})), \qquad t, t+\Delta t \in [0,T],\ 0 < \Delta t < t. \tag{38}$$

Рассмотрим интеграл P_2. Имеем (см. (5))

$$N_1(t,\tau) = B_1(t)[\partial_x Z(g(t)-g(\tau), t-\tau; A(\tau)) + \partial_x W(g(t), t; g(\tau), \tau)] +$$
$$+\hat{B}_1(t)\Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau), \qquad 0 \leqslant \tau < t \leqslant T.$$

Из условия (9) и неравенств (см. [22])

$$|\partial_x Z(g(t)-g(\tau), t-\tau; A(\tau))| \leqslant C\omega_1((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1},$$
$$|\Delta_t \partial_x Z(g(t)-g(\tau), t-\tau; A(\tau))| \leqslant C\{(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2} + (\Delta t)\omega_1((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-2}\} \leqslant$$
$$\leqslant C(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2}, \qquad 0 \leqslant \tau < t < t+\Delta t \leqslant T,\ \Delta t \leqslant t-\tau,$$

следует, что

$$|\Delta_t\{B_1(t)\partial_x Z(g(t)-g(\tau), t-\tau; A(\tau))\}| \leqslant C\{\omega_3(\Delta t)\omega_1((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1} +$$
$$+(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2}\}, \qquad 0 \leqslant \tau < t < t+\Delta t \leqslant T,\ \Delta t \leqslant t-\tau. \tag{39}$$

Далее, в силу (2), (6), (7), (9), (10) и (34), имеем

$$|\Delta_t\{B_1(t)\partial_x W(g(t), t; g(\tau), \tau)\}| \leqslant C\{\omega_3(\Delta t)\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1} +$$
$$+(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2} + (\Delta t)^{1/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2}\} \leqslant$$
$$\leqslant C\{\omega_3(\Delta t)\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1} + (\Delta t)^{1/2}\widetilde{\omega}_0((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2}\},$$

$$|\Delta_t\{\hat{B}_1(t)\Gamma(g(t), t; g(\tau), \tau)\}| \leqslant C\{\omega_2((\Delta t)^{1/2})t^{-1/2}(t-\tau)^{-1/2} +$$
$$+\omega_2(t^{1/2})t^{-1/2}[(\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-1} + \Delta t(t-\tau)^{-3/2}]\} \leqslant$$
$$\leqslant C\{(\omega_1((\Delta t)^{1/2}) + \omega_2((\Delta t)^{1/2}))t^{-1/2}(t-\tau)^{-1/2} + (\Delta t)^{1/2}\omega_2((\Delta t)^{1/2})(t-\tau)^{-3/2}\},$$

$0 \leqslant \tau < t < t+\Delta t \leqslant T,\ \Delta t \leqslant t-\tau$. Отсюда и из (39) получаем оценку

$$|P_2(t,\Delta t)| \leqslant C_\varphi\{\omega_3(\Delta t)\int_0^{t-\Delta t}\omega_4((t-\tau)^{1/2})(t-\tau)^{-1}d\tau + (\Delta t)^{1/2}\omega_1((\Delta t)^{1/2})\int_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-3/2}d\tau +$$
$$+(\Delta t)^{(1-\varepsilon_0)/2}\widetilde{\omega}_0((\Delta t)^{1/2})\int_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-(3-\varepsilon_0)/2}d\tau + (\omega_1((\Delta t)^{1/2}) + \omega_2((\Delta t)^{1/2}))t^{-1/2}\int_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-1/2}d\tau +$$
$$+(\Delta t)^{1/2}\omega_2((\Delta t)^{1/2})\int_0^{t-\Delta t}(t-\tau)^{-3/2}d\tau\} \leqslant C_\varphi(\omega_2((\Delta t)^{1/2}) + \omega_3(\Delta t) + \omega_4((\Delta t)^{1/2})),$$

$t, t+\Delta t \in [0,T],\ 0 < \Delta t < t$, которая, вместе с (38), дает (36). Лемма 4 доказана.

Докажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* a), b), (2), (8)–(10) и (19). *Тогда для любых (вектор-)функций* $\psi_0 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$ *и* $\psi_1 \in \underset{0}{C}[0,T]$ *система* (22), (23) *имеет единственное в пространстве* $C[0,T]$ *решение* $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ *и справедлива оценка*

$$\|\varphi; [0,T]\|^0 \leqslant C\{\|\psi_0; [0,T]\|^{1/2} + \|\psi_1; [0,T]\|^0\}. \tag{40}$$

Доказательство. Как показано выше, система (22), (23) может быть записана в виде (28), (29). Пусть операторы K_0 и K_1 действуют на $\varphi \in C[0,T]$ по формулам

$$(K_0\varphi)(t) = 2\partial^{1/2}(H_0\varphi)(t), \quad (K_1\varphi)(t) = -2(H_1\varphi)(t), \qquad t \in [0,T].$$

В силу лемм 1, 3 и 4, $K_j : C[0,T] \to \underset{0}{H}^{\omega_5}[0,T],\ j = 0,1$, являются линейными ограниченными вольтерровыми операторами. Применяя к обеим частям уравнения (28) оператор дробного дифференцирования $\partial^{1/2}$, в силу равенств $\partial^{1/2}I^{1/2}\chi = \chi,\ I^{1/2}\partial^{1/2}\psi = \psi$, справедливых для $\chi \in C[0,T],\ \psi \in C^{1/2}[0,T]$, для отыскания $\varphi \in C[0,T]$ получим эквивалентную (28), (29) систему уравнений II рода

$$B_0(t)M(t)\varphi(t) + (K_0\varphi)(t) = 2\partial^{1/2}\psi_0(t), \tag{41}$$

$$B_1(t)(A(t))^{-1}\varphi(t) + (K_1\varphi)(t) = -2\psi_1(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{42}$$

Положим

$$K = \begin{pmatrix} K_0 \\ K_1 \end{pmatrix}, \ \psi = \begin{pmatrix} 2\partial^{1/2}\psi_0 \\ -2\psi_1 \end{pmatrix}.$$

В силу (17)–(19), систему (41), (42) можно переписать в виде операторного уравнения

$$\varphi + \hat{K}\varphi = \hat{\psi}, \tag{43}$$

где $\hat{K} = (GM)^{-1}K$, $\hat{\psi} = (GM)^{-1}\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$. Из свойств операторов K_0 и K_1 вытекает, что $\hat{K} : C[0,T] \to$ $\to \underset{0}{H}^{\omega_5}[0,T]$ – линейный ограниченный вольтерров оператор, и, следовательно, по лемме 2, уравнение (43) имеет единственное в $C[0,T]$ решение φ, причем выполнено неравенство $\|\varphi;[0,T]\|^0 \leqslant$ $\leqslant C\|\psi;[0,T]\|^0$. Отсюда получаем оценку (40). Кроме того, из вида уравнения (43) следует, что $\varphi(0) = 0$. Теорема 2 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Сначала докажем *существование* решения задачи (11)–(14). Это решение ищем в виде потенциала простого слоя (21) с плотностью $\varphi \in C[0,T]$, подлежащей определению. Для любой $\varphi \in C[0,T]$ потенциал (21) является решением системы (11) и удовлетворяет начальному условию (12). Подставляя (21) в граничные условия (13) и (14), получаем систему интегральных уравнений Вольтерры I и II рода (22), (23). Из теоремы 2 следует, что система (22), (23) имеет единственное в $C[0,T]$ решение $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$, подставляя которое в потенциал (21), получаем решение задачи (11)–(14). Из оценки (40) и свойств потенциала простого слоя (см. [22]) делаем вывод, что найденное решение принадлежит пространству $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ и выполнено неравенство (20).

Далее докажем *единственность* решения задачи (11)–(14). Пусть $u \in C^{1,0}(\overline{\Omega})$ – регулярное решение задачи (11)–(14) при $\psi_j(t) = 0,\ t \in [0,T],\ j = 0,1$. Тогда (вектор-)функция u является единственным (см. [10]) в пространстве $C^{1,0}(\overline{\Omega})$ регулярным решением второй начально-краевой задачи

$$\begin{gathered} Lu(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega, \quad u(x,0) = 0, \quad x \geqslant g(0), \\ \partial_x u(g(t),t) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \end{gathered} \tag{44}$$

где $\psi \in \underset{0}{C}[0,T]$, и для нее справедливо интегральное представление (см. [7])

$$u(x,t) = \int_0^t \Gamma(x,t;g(\tau),\tau)\varphi(\tau)d\tau, \qquad (x,t) \in \overline{\omega}, \tag{45}$$

где вектор-функция $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ является решением системы интегральных уравнений Вольтерры II рода, индуцированной граничным условием (44). Подставляя выражение (45) в граничные условия (13) и (14) с нулевыми правыми частями, получим, что $\varphi \in \underset{0}{C}[0,T]$ одновременно является решением системы уравнений (22), (23) с $\psi_j(t) = 0,\ t \in [0,T],\ j = 0, 1$, и, следовательно, в силу теоремы 2, $\varphi(t) = 0,\ t \in [0,T]$. Возвращаясь к представлению (45), получаем, что $u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \overline{\Omega}$. Теорема 1 доказана.

4. О ТОЧНОСТИ ТРЕБОВАНИЙ НА ПРАВЫЕ ЧАСТИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

В лемме 5, следующей ниже, покажем, что условия теоремы 1 на характер непрерывности правых частей в граничных условиях (13), (14) являются точными для разрешимости в пространстве $\underset{0}{C}^{1,0}(\overline{\Omega})$ поставленной задачи.

В полосе D рассмотрим параболический оператор

$$\hat{L}u = \partial_t u - A\partial_x^2 u,$$

где $A = \|a_{jk}\|_{j,k=1}^m$ — $m \times m$-матрица, элементами которой являются вещественные числа, и ее собственные числа $\mu_r,\ r = \overline{1,m}$, удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\mu_r > 0$. Положим $D^+ = \{(x,t) \in D :\ x > 0\}$. Докажем, что справедлива

Лемма 5. *Пусть (вектор-)функция* $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{D}^+)$ — *регулярное решение системы*

$$\hat{L}u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in D^+. \tag{46}$$

Тогда для (вектор-)функций $\hat{\psi}_0(t) = u(0,t),\ \hat{\psi}_1(t) = \partial_x u(0,t),\ t \in [0,T]$, *справедливы включения*

$$\hat{\psi}_0 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T], \qquad \hat{\psi}_1 \in \underset{0}{C}[0,T]. \tag{47}$$

Доказательство. Выполнение (47) для $\hat{\psi}_1$ сразу следует из включения $u \in \underset{0}{C}^{1,0}(\overline{D}^+)$.

Докажем, что (47) имеет место для $\hat{\psi}_0$. Положим

$$Z(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\exp(-y^2tA)dy, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty), \qquad M = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-y^2A)dy.$$

Из теорем о существовании (см. [7]) и единственности (см. [10]) регулярного решения из пространства $C^{1,0}(\overline{D}^+)$ второй начально-краевой задачи для системы (46) следует, что функция u может быть представлена в виде потенциала простого слоя

$$u(x,t) = -2\int_0^t Z(x,t-\tau)A\hat{\psi}_1(\tau)d\tau, \qquad (x,t) \in \overline{D}^+.$$

Отсюда и из равенства (см. [4])

$$\left(\partial_t^{1/2}Z\right)(x,t) = -\partial_x Z(x,t)M^{-1}, \qquad x > 0,\ t > 0,$$

следует, что

$$\left(\partial_t^{1/2}u\right)(x,t) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_t\int_0^t (t-\tau)^{-1/2}d\tau\int_0^\tau Z(x,\tau-\eta)A\hat{\psi}_1(\eta)d\eta =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\partial_t \int\limits_0^t \left\{ \int\limits_\tau^t (t-\eta)^{-1/2} Z(x,\eta-\tau)d\eta \right\} A\hat{\psi}_1(\tau)d\tau = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \left\{ \partial_t \int\limits_\tau^t (t-\eta)^{-1/2} Z(x,\eta-\tau)d\eta \right\} A\hat{\psi}_1(\tau)d\tau =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \left\{ \partial_t \int\limits_0^{t-\tau} (t-\tau-\eta)^{-1/2} Z(x,\eta)d\eta \right\} A\hat{\psi}_1(\tau)d\tau = -2\int\limits_0^t (\partial_t^{1/2} Z)(x,t-\tau)A\hat{\psi}_1(\tau)d\tau =$$

$$= 2\int\limits_0^t \partial_x Z(x,t-\tau)M^{-1}A\hat{\psi}_1(\tau)d\tau, \qquad (x,t)\in D^+.$$

Поэтому, в силу равенства (17) и соотношения (см. [22])

$$\lim_{x\to+0} 2\int\limits_0^t \partial_x Z(x,t-\tau)M^{-1}A\hat{\psi}_1(\tau)d\tau = -M^{-1}\hat{\psi}_1(t),$$

в котором стремление к пределу равномерно по $t\in[0,T]$, получаем равенство

$$\lim_{x\to+0} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_t \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} u(x,\tau)d\tau = -M^{-1}\hat{\psi}_1(t), \tag{48}$$

в котором стремление к пределу равномерно по $t\in[0,T]$. Заметим, кроме того, что

$$\lim_{x\to+0} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2} u(x,\tau)d\tau = \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\hat{\psi}_0(\tau)d\tau, \qquad t\in[0,T]. \tag{49}$$

В силу (48) и (49) существует непрерывная дробная производная

$$(\partial^{1/2}\hat{\psi}_0)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-\tau)^{-1/2}\hat{\psi}_0(\tau)d\tau = -M^{-1}\hat{\psi}_1(t), \qquad t\in[0,T],$$

и $(\partial^{1/2}\hat{\psi}_0)(0)=0$. Следовательно, $\hat{\psi}_0 \in \underset{0}{C}^{1/2}[0,T]$. Лемма 5 доказана.

Автор выражает благодарность профессору Е. А. Бадерко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. Тр. Матем. ин-та В. А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–163.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
3. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Первая краевая задача для параболических систем в плоских областях с негладкими боковыми границами // Докл. РАН. 2014. Т. 458. № 4. С. 379–381.
4. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Потенциал простого слоя и первая краевая задача для параболической системы на плоскости // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 2. С. 198–208.
5. *Коненков А. Н.* Существование и единственность классического решения первой краевой задачи для параболических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. С. 904–913.
6. *Baderko E. A., Cherepova M. F.* Dirichlet problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients Applicable Analysis. 2021. V. 100. N 13. P. 2900–2910.

7. *Зейнеддин М.* О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини. Дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1992.
8. *Бадерко Е. А., Сахаров С. И.* Единственность решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в плоских областях // Докл. РАН. 2022. Т. 502. № 2. С. 26–29.
9. *Бадерко Е. А., Сахаров С. И.* Потенциал Пуассона в первой начально-краевой задаче для параболической системы в полуограниченной области на плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 10. С. 1333–1343.
10. *Бадерко Е. А., Сахаров С. И.* О единственности решений начально-краевых задач для параболических систем с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области на плоскости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 4. С. 584–595.
11. *Сахаров С. И.* Начально-краевые задачи для однородных параболических систем в полуограниченной плоской области и условие дополнительности // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59. № 12. С. 1641–1653.
12. *Ворошнин Л. Г., Хусид Б. М.* Диффузионный массоперенос в многокомпонентных системах. Минск: Наука и техн., 1979. 255 с.
13. *Гуров К. П., Карташкин Б. А., Угасте Ю. Э.* Взаимная диффузия в многофазных металлических системах. М.: Наука, 1981. 350 с.
14. *Криштал М. А.* Многокомпонентная диффузия в металлах. М.: Металлургия, 1985. 177 с.
15. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987. 480 с.
16. *Князева А. Г.* Перекрестные эффекты в твердых средах с диффузией // Прикл. механ. и техн. физ. 2003. Т. 44. № 3. С. 85–99.
17. *Дышин О. А.* Разрешимость в гёльдеровых функциях задачи нестационарной фильтрации жидкости в трещиновато-пористом кольцевом пласте // Науч. труды НИПИ Нефтегаз ГНКАР. 2012. № 2. С. 74–81.
18. *Семенов М. Ю., Смирнов А. Е., Лашнев М. М., Ступников В. В.* Математическая модель вакуумной нитроцементации теплостойкой стали ВКС-10 // Наука и образование [электронное науч.-техн. издание]. 2013. № 8. http://technomag.bmstu.ru/doc/569132.html
19. *Семенов М. Ю.* Методология разработки технологий химико-термической обработки на основе моделирования диффузионных процессов и анализа эксплуатационных свойств зубчатых передач. Дис. … докт. техн. наук. М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015.
20. *Гуляев А. П.* Металловедение. М.: Металлургия, 1986. 544 с.
21. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
22. *Зейнеддин М.* Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини. 1992. Деп. ВИНИТИ РАН. 16.04.92. № 1294–В92.
23. *Семаан Х. Д.* О решении второй краевой задачи для параболических систем на плоскости. Дис. … канд. физ-матем. наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1999.
24. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. М.: Наука, 1964. 444 с.
25. *Камынин Л. И.* Гладкость тепловых потенциалов в пространстве Дини–Гёльдера // Сиб. матем. журн. 1970. Т. 11. № 5. С. 1017–1045.
26. *Тихонов А. Н.* О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Моск. гос. ун-та. Секц. А. 1938. Т. 1. № 8. С. 1–25.
27. *Baderko E. A., Cherepova M. F.* Bitsadze-Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients. Complex Variables and Elliptic Equations. 2019. V. 64. N 5. P. 753–765.
28. *Baderko E. A., Cherepova M. F.* Mixed problems for plane parabolic systems and boundary integral equations // J. Math. Sci. 2022. V. 260. N 4. P. 418–433.

ON INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC SYSTEMS IN A SEMI-BOUNDED PLANE DOMAIN WITH GENERAL BOUNDARY CONDITIONS

S. I. Sakharov*

Lomonosov Moscow State University, Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Leninskie Gory, 1, Moscow, 119991 Russia

**e-mail: ser341516@yandex.ru*

Received 14 December, 2023
Revised 02 February, 2024
Accepted 06 March, 2024

Abstract. The paper considers initial boundary value problems for homogeneous parabolic systems with Dini-continuous coefficients under zero initial conditions in a semi-bounded plane domain with a non-smooth lateral boundary that admits the presence of ”beaks”on which boundary conditions of a general type with variable coefficients are specified. Using the method of boundary integral equations, a theorem is proved on the unique classical solvability of such problems in the space of functions that are continuous and bounded together with their first-order spatial derivative in the closure of the domain. A representation of the solutions obtained is given in the form of vector single layer potentials.

Keywords: parabolic systems, initial-boundary value problems, nonsmooth lateral boundary, boundary integral equations, Dini condition.