ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 6, с. 973–991

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.54

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРВОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

М. Ю. Ватолкин[1,*]

[1] 426069 Ижевск, ул. Студенческая, 7, Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова, Россия

*e-mail: vmyu6886@gmail.com

Поступила в редакцию 18.12.2023 г.
Переработанный вариант 28.02.2024 г.
Принята к публикации 05.03.2024 г.

Исследуется на предмет представления собственных функций в виде скалярных рядов двухточечная краевая задача типа $(n-1, 1)$ в предположении, что существует функционал $\widetilde{\ell}$ сосредоточенный в одной точке, такой, что первые $n-1$ из исходных краевых условий и $\widetilde{\ell}\, x = 1$ превращаются в условия Коши в этой точке. Собственная функция рассматриваемой краевой задачи, отвечающая собственному значению λ_*, представлена в виде ряда по степеням λ_*. Рассматривается уравнение $\Phi(\lambda) = 0$, где $\Phi(\lambda)$ — сумма ряда по степеням λ, для нахождения собственных значений исходной задачи. Приведены примеры вычисления первого собственного значения некоторых краевых задач. Получены различные оценки для коэффициентов таких степенных рядов. Определяется некоторая функция двух переменных t и λ, для нее получено уравнение в частных производных и получены условия, которым она удовлетворяет. Нули "сечения" этой функции совпадают с собственными значениями исходной краевой задачи, что может быть использовано для их приближенного вычисления. Библ. 36. Табл. 1.

Ключевые слова: краевые задачи на собственные значения, собственные функции, собственные значения, функция Коши, представление собственных функций в виде сумм степенных рядов, корни уравнения, оценки для коэффициентов степенных рядов.

DOI: 10.31857/S0044466924060075, **EDN:** XYPKQO

1. ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В современной спектральной теории дифференциальных операторов актуальной была и остается задача исследования свойств собственных значений и собственных функций дифференциального оператора в зависимости от гладкости коэффициентов дифференциального выражения, порождающего такой оператор. Эти вопросы достаточно полно и хорошо изложены в работе [1] и в известных монографиях (см. [2]–[6] и ссылки в этих работах). Различные свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма–Лиувилля с гладкими и негладкими потенциалами являются предметом исследований ведущих научных школ, занимающихся спектральной теории дифференциальных операторов уже много десятилетий. Круг этих задач на данный момент времени достаточно хорошо изучен. Авторами [10] рассмотрен оператор Штурма–Лиувилля с суммируемым потенциалом и найдены формулы для асимптотики собственных значений и собственных функций, то есть в [10] для фиксированного суммируемого потенциала получены асимптотические формулы для собственных функций и собственных значений классической задачи Штурма–Лиувилля с помощью современной трактовки метода Лиувилля–Стеклова.

В работе [7] рассматривается класс операторов Штурма–Лиувилля, порожденных симметрическими (формально самосопряженными) квазидифференциальными выражениями второго порядка с локально интегрируемыми коэффициентами. Спектральная теория квазидифференциальных операторов второго порядка применяется к изучению операторов типа Штурма—Лиувилля с коэффициентами-распределениями. Основной целью работы является построение теории Титчмарша—Вейля для таких операторов. При этом вопрос о дефектных числах оператора и об условиях на коэффициенты, обеспечивающих реализацию случая предельной точки или предельного круга Вейля, — является центральным вопросом работы [7]. Изучению асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений при различных предположениях относительно их коэффициентов и корректному определению дифференциальных уравнений в случае, когда производные понимаются в смысле теории распределений, посвящены работы [8] и [9].

Работы [11]—[13] посвящены изучению асимптотики собственных функций и собственных значений оператора Штурма—Лиувилля с сингулярным потенциалом, являющимся обобщенной функцией первого порядка, в этих работах рассмотрены операторы второго порядка с негладкими потенциалами (типа дельта-функции или потенциалами-распределениями). В работах [14], [15] на основе методики работ [11]—[13] исследовано асимптотическое поведение собственных значений операторов с потенциалом, являющимся дельта-функцией Дирака либо импульсными потенциалами (потенциалами-распределениями). В работах [16]—[18] строится аналог осцилляционной теории Штурма распределения нулей собственных функций на пространственной сети и графах. Изучению краевых задач для дифференциальных уравнений высоких порядков посвящены работы [19]—[23], в этих работах найдена асимптотика решений при больших значениях спектрального параметра при условии суммируемости потенциала.

В настоящей статье рассматриваются и изучаются краевые задачи на собственные значения для квазидифференциальных уравнений. В связи с этим приведем здесь определение квазидифференциального уравнения.

Пусть интервал $I \subseteq \mathbb{R}$ есть открытый интервал, $\mathscr{P} = (p_{ik})_0^n$ — нижняя треугольная матрица, где функции $p_{ik}(\cdot) : I \to \mathbb{R}$, такая, что функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а функции $\dfrac{1}{p_{ii}(\cdot)}$ $(i \in 1 : n-1)$, $\dfrac{p_{ik}(\cdot)}{p_{ii}(\cdot)}$ $(i \in 1 : n, k \in 0 : i-1)$ локально суммируемы в I. Определим квазипроизводные $\overset{k}{_{\mathscr{P}}}x(\cdot)\,(k \in 0 : n)$ функции $x : I \to \mathbb{R}$ равенствами (см. [24], [25])

$$\overset{0}{_{\mathscr{P}}}x \doteq p_{00}x, \quad \overset{k}{_{\mathscr{P}}}x \doteq p_{kk}\frac{d}{dt}\left(\overset{k-1}{_{\mathscr{P}}}x\right) + \sum_{\nu=0}^{k-1} p_{k\nu}(\overset{\nu}{_{P}}x)\;(k \in 1 : n).$$

Линейным однородным квазидифференциальным называется уравнение

$$(\overset{n}{_{\mathscr{P}}})x(t) = 0, \quad t \in I. \tag{1}$$

Его решением называется всякая функция $x(\cdot) : I \to \mathbb{R}$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные $\overset{k}{_{\mathscr{P}}}x(\cdot)$ $(k \in 0 : n-1)$ и почти всюду в I удовлетворяющая этому уравнению (см. [24], [25]).

Линейным неоднородным квазидифференциальным называется уравнение

$$(\ell x)(t) \doteq \left(\overset{n}{_{\mathscr{P}}}x\right)(t) = f(t), \quad t \in I \quad (f : I \to \mathbb{R}). \tag{2}$$

Решением уравнения (2) называется всякая функция $x(\cdot)$, имеющая локально абсолютно непрерывные квазипроизводные до порядка $n-1$ включительно и удовлетворяющая ему почти всюду в I [24], [25]. Если функции $p_{00}(\cdot)$ и $p_{nn}(\cdot)$ измеримы, почти всюду конечны и почти всюду отличны от нуля, а функции

$$\frac{1}{p_{\nu\nu}(\cdot)}\,(\nu \in 1 : n-1), \quad \frac{p_{\nu k}(\cdot)}{p_{\nu\nu}(\cdot)}\,(\nu \in 1 : n,\ k \in 0 : \nu-1), \quad \frac{f}{p_{nn}(\cdot)}$$

локально суммируемы в I, то задача Коши для неоднородного уравнения при начальных условиях $\left({}^{k}_{\mathscr{P}}x\right)(a) = \gamma_k$ $\left(k \in 0 : n-1,\ a \in I,\ \gamma_k \in \mathbb{R}\right)$ эквивалентна задаче

$$\dot{z} = A(t)z + \tilde{f}(t), \quad z(a) = \gamma,$$

где $z(t) \doteq \left(\alpha_{\mathscr{P}}x\right)(t) \doteq \left({}^{0}_{\mathscr{P}}x(t),\ \ldots,\ {}^{n-1}_{\mathscr{P}}x(t)\right)^{\mathrm{T}}$, $\tilde{f} \doteq \left(0,\ \ldots,\ 0,\ \dfrac{f}{p_{nn}}\right)^{\mathrm{T}}$,

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{-p_{10}}{P_{11}} & \dfrac{1}{P_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{-p_{20}}{P_{22}} & \dfrac{-p_{21}}{P_{22}} & \dfrac{1}{P_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{-p_{n-1,0}}{P_{n-1,n-1}} & \dfrac{-p_{n-1,1}}{P_{n-1,n-1}} & \dfrac{-p_{n-1,2}}{P_{n-1,n-1}} & \cdots & \dfrac{1}{P_{n-1,n-1}} \\ \dfrac{-p_{n0}}{P_{nn}} & \dfrac{-p_{n1}}{P_{nn}} & \dfrac{-p_{n2}}{P_{nn}} & \cdots & \dfrac{-p_{n,n-1}}{P_{nn}} \end{pmatrix}$$

$\gamma \doteq \left(\gamma_0,\ \ldots,\ \gamma_{n-1}\right)^{\mathrm{T}}$, т — знак транспонирования.

Последняя задача однозначно разрешима, а с нею и исходная задача Коши для уравнения (2) имеет единственное решение, компоненты которого, квазипроизводные ${}^{k}_{\mathscr{P}}x(\cdot)$ $(k \in 0 : n-1)$, локально абсолютно непрерывны в I (см. [24], [25]). Приведем один пример (см. [24], [25]). Пусть $n = 2$, $f(t) \equiv 0$, и в матрице $\mathscr{P}$ положим

$$p_{00}(t) = p_{11}(t) = p_{22}(t) \doteq \sqrt[3]{t}, \quad p_{10}(t) \doteq t^{-3/5}, \quad p_{21}(t) = p_{20}(t) \doteq 0, \quad I = (-c,\ c),$$

где $0 < c < +\infty$. Тогда решением уравнения $\left({}^{2}_{\mathscr{P}}x\right)(t) = 0$, $t \in I$, удовлетворяющим начальным условиям $\left({}^{0}_{\mathscr{P}}x\right)(0) = 1$, $\left({}^{1}_{\mathscr{P}}x\right)(0) = 0$, является функция

$$x(t) = t^{-1/3} \exp\left(-15\sqrt[15]{t}\right).$$

Найдем нулевую и первую квазипроизводные этой функции

$${}^{0}_{\mathscr{P}}x(t) = \exp\left(-15\sqrt[15]{t}\right), \quad {}^{1}_{\mathscr{P}}x(t) = t^{1/3}\left(\exp\left(-15\sqrt[15]{t}\right)\right)' + t^{-3/5}\exp\left(-15\sqrt[15]{t}\right).$$

Каждое из слагаемых в ${}^{1}_{\mathscr{P}}x(t)$ при $t = 0$ разрывно, а их сумма ${}^{1}_{\mathscr{P}}x(t) \equiv 0$, $t \in I$, является абсолютно непрерывной функцией.

Для квазидифференциального уравнения справедливы основные утверждения общей теории обыкновенного дифференциального уравнения (см. [24], [25]).

Так уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $\left\{u_\nu(\cdot)\right\}_0^{n-1}$, для которой определитель $W_{\mathscr{P}} \doteq \det\left({}^{\nu}_{\mathscr{P}}u_k\right)_0^{n-1}$ не обращается в нуль ни в одной точке из I. Частное решение уравнения (2), удовлетворяющее нулевым начальным условиям $\left(\alpha_{\mathscr{P}}u_*\right)(a) = 0$, имеет вид

$$u_*(t) = \int_a^t C(t,s)\left(f(s)/p_{nn}(s)\right)ds \quad (t \in I),$$

где

$$C(i,s)=\begin{vmatrix} {}^{0}_{\mathscr{P}}u_0(s) & \cdots & {}^{0}_{\mathscr{P}}u_0(s) \\ \cdots & \cdots\cdots & \\ \left({}^{n-2}_{\mathscr{P}}u_0\right)(s) & \cdots & \left({}^{n-2}_{\mathscr{P}}u_{n-1}\right)(s) \\ u_0(t) & \cdots & u_{n-1}(t) \end{vmatrix} / W_{\mathscr{P}}(s)$$

есть функция Коши уравнения (1), она по аргументу t является его решением и удовлетворяет начальным условиям

$${}^{k}_{\mathscr{P}}C(t,s)\big|_{t=s}=0 \quad (k\in 0:n-2),\quad {}^{n-1}_{\mathscr{P}}C(t,s)\big|_{t=s}=1.$$

Общее решение уравнения (2) дается формулой $u=c_0u_0+\ldots+c_{n-1}u_{n-1}+u_*$, где c_ν — произвольные постоянные.

Определитель $W_{\mathscr{P}}$ локально абсолютно непрерывен, он удовлетворяет уравнению

$$dW_{\mathscr{P}}\big/dt=-\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(p_{\nu+1,\nu}(t)\big/p_{\nu+1,\nu+1}(t)\right)W_{\mathscr{P}}.$$

Имеет место аналог формулы Остроградского—Лиувилля

$$W_{\mathscr{P}}(t)=W_{\mathscr{P}}(a)\exp\int_a^t\left(-\sum_{\nu=0}^{n-1}\left(p_{\nu+1,\nu}(\tau)\big/p_{\nu+1,\nu+1}(\tau)\right)\right)d\tau.$$

Уравнение (2) обладает формально сопряженным в смысле Лагранжа уравнением (см. [24], [25])

$$\left(\ell^{+}y\right)(t)\doteq(-1)^n\left({}^{n}_{\mathscr{R}}y\right)(t)=g(t),\quad t\in I\quad (g:I\to\mathbb{R}),\tag{3}$$

где $\mathscr{R}=\left(r_{\nu k}\right)_0^n$ — нижняя треугольная матрица,

$$r_{\nu k}=(-1)^{\nu+k}\;p_{n-k,n-\nu}\,p_{n-\nu,n-\nu}\big/p_{n-k,n-k}\quad (k\in 0:\nu,\ \nu\in 0:n).$$

Это означает, что имеет место тождество Лагранжа: почти для всех $t\in I$

$$y(t)\left(\ell x\right)(t)-x(t)\left(\ell^{+}y\right)(t)\equiv\frac{d}{dt}\,[x,y](t),$$

где $[x,y](t)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\;\left({}^{k-1}_{\mathscr{P}}x\right)(t)\;\left({}^{n-k}_{\mathscr{R}}y\right)(t)$ (для всех $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, имеющих абсолютно непрерывные квазипроизводные до порядка $n-1$ включительно).

Пусть $C^*(t,s)$ — функция Коши сопряженного однородного уравнения. Имеет место соотношение ${}^{0}_{\mathscr{P}}C(t,s)=(-1)^{n-1}\,{}^{0}_{\mathscr{R}}C^*(s,t)$ (подробнее см. [24], [25]).

Квазидифференциальное уравнение является обобщением обыкновенного дифференциального уравнения. По-видимому, начало систематическому изучению неоднородного уравнения n-го порядка (с комплекснозначными коэффициентами) было положено работами Д. Ю. Шина (см. [26], [27]). Обстоятельства сложились таким образом, что его работы на долгое время были игнорированы и забыты, и только начиная с 1975 г. стали появляться работы A. Zettl, W. N. Everitt и их соавторов, посвященные этой тематике. Они же возродили интерес к работам Д. Ю. Шина.

В настоящее время имеется достаточно большое количество работ A. Zettl, W. N. Everitt и их учеников и соавторов по этой тематике, опубликованных в различных математических журналах, а также — опубликованных относительно недавно (см., например, работы [28]—[35], в этих работах рассматриваются и изучаются квазидифференциальные уравнения и различные краевые задачи для них).

Неоднородное квазидифференциальное уравнение позволяет с единой точки зрения рассматривать различные уравнения, которые принято называть “обобщенными”, уравнениями с особенностями в коэффициентах и т.п. Обыкновенное дифференциальное уравнение с локально суммируемыми коэффициентами и его формально сопряженное в смысле Лагранжа уравнение также представляют собой частные случаи квазидифференциального уравнения.

В монографии [36] рассматривается самосопряженное квазидифференциальное уравнение четного порядка

$$(-1)^m\left(p_0(t)x^{(m)}(t)\right)^{(m)} + (-1)^{m-1}\left(p_1(t)x^{(m-1)}(t)\right)^{(m-1)} + \ldots + p_m(t)x(t) = f(t).$$

Оно получается из уравнения (2) при

$$p_{kk} = 1\ (k \in 0 : m-1), \quad p_{kk} = -1\ (k \in m+1 : n), \quad p_{i,n-i} = p_{i-m}\ (i \in m : n),$$

$$p_{ik} = 0\ (i \in 1 : n,\ k < i;\ k \neq n-i).$$

Уравнение (2), таким образом, общее и не является, вообще говоря, самосопряженным. Поэтому общепринятые простые и лаконичные обозначения квазипроизводных (см. [36]) заменены в нашем случае на более сложные, так как при переходе к сопряженному уравнению, матрица, с помощью которой строятся квазипроизводные, меняется. Но также, как и в [36], здесь рассматривается только случай вещественнозначных коэффициентов. Случай комплекснозначных коэффициентов, в отличии от работ [26] и [27] не рассматривается. Заметим, что квазидифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах в случае, если коэффициенты $p_{\nu k} = 0$ $(k \in 0 : \nu - 2,\ \nu \in 2 : n)$ $\big($см. [24], [25]$\big)$.

2. О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА $(n-1, 1)$

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения

$$\left(\overset{n}{\mathscr{P}} x\right)(t) = -\lambda\, p_{nn}(t)g(t)\left(\overset{0}{\mathscr{P}} x\right)(t) \quad (t \in \boldsymbol{J} \doteq [a,b] \subset \boldsymbol{I}), \tag{4}$$

$$\ell_\nu x = 0 \quad (\nu \in 1 : n) \tag{5}$$

с функцией $g : \boldsymbol{J} \to \mathbb{R}$ и функционалами

$$\ell_\nu x \doteq \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{\nu k}\, \overset{k}{\mathscr{P}} x(a) \quad (\nu \in 1 : n-1), \quad \ell_n x \doteq \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{nk}\, \overset{k}{\mathscr{P}} x(b) \tag{6}$$

в предположении, что существует функционал $\widetilde{\ell}$, сосредоточенный в точке a, такой, что краевые условия

$$\ell_\nu x = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n-1), \quad \widetilde{\ell}\, x = 1$$

превращаются в условия Коши в точке a.

Например, если $\det\left(\beta_{\nu,k-1}\right)_1^{n-1} \neq 0$, то можно положить

$$\widetilde{\ell}\, x \doteq \overset{n-1}{\mathscr{P}} x(a).$$

При $n = 2$ и таких $\ell_\nu x$ задача (4), (5) есть классическая задача Штурма—Лиувилля, при этом функционал $\widetilde{\ell}\, x$ можно выбрать следующим образом:

$$\widetilde{\ell}\, x \doteq \overset{1}{\mathscr{P}} x(a), \text{ если } \beta_{10} \neq 0, \quad \widetilde{\ell}\, x \doteq \overset{0}{\mathscr{P}} x(a), \text{ если } \beta_{10} = 0.$$

При произвольном n и функционалах вида (6) при

$$\beta_{\nu+1,k} = \delta_{\nu k}\ (\nu, k \in 0 : n-2), \quad \beta_{nk} = \delta_{0k}\ (k \in 0 : n-1)$$

задача (4), (5) — двухточечная задача Валле Пуссена типа $(n-1, 1)$, при этом

$$\widetilde{\ell}\, x \doteq {}^{n-1}_{\mathscr{P}} x(a).$$

За начальное приближение принимаем решение задачи Коши (7), (8) для однородного уравнения (7). Далее рекуррентно находим решения задач Коши (9), (10) для неоднородных уравнений (9), в которых правая часть уравнений является известной функцией — решением предыдущей задачи Коши. Рассмотрим все это более подробно.

Следующим образом построим последовательность решений $\{x_k\}_0^\infty$: функция $x_0(\cdot)$ есть решение задачи Коши

$$\left({}^{n}_{\mathscr{P}}x\right)(t) = 0 \quad (t \in J), \tag{7}$$

$$\ell_\nu x = 0 \ (\nu \in 1 : n-1), \quad \widetilde{\ell}\, x = 1; \tag{8}$$

функции $x_k(\cdot)$ находятся рекуррентно как решения задач

$$\left({}^{n}_{\mathscr{P}}x_k\right)(t) = p_{nn}(t) g(t) \left({}^{0}_{\mathscr{P}}x_{k-1}\right)(t) \quad (t \in J), \tag{9}$$

$$\ell_\nu x_k = 0 \ (\nu \in 1 : n-1), \quad \widetilde{\ell}\, x_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Теорема 1. *Пусть функции*

$$g(t),\ 1\big/p_{\nu\nu}(t)\ (\nu \in 1 : n-1),\ p_{\nu k}(t)\big/p_{\nu\nu}(t)\,(\nu \in 1 : n,\ k \in 0 : \nu - 1)$$

ограничены в существенном на J. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \ell_n x_k \tag{11}$$

сходится абсолютно и равномерно относительно λ *на отрезке* $[-\lambda, \lambda]$, *при любом* $\lambda > 0$;

2) *собственные значения задачи* (4), (5) *представляют собой корни уравнения* $\Phi(\lambda) = 0$, *где* $\Phi(\cdot)$ — *сумма ряда* (11);

3) *функция* $u(t, \lambda_*)(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(-\lambda_*\right)^k x_k(t)$ $(t \in J)$ *есть собственная функция задачи* (4), (5), *отвечающая собственному значению* λ_*.

Доказательство. При фиксированном λ рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k\, {}^{0}_{\mathscr{P}} x_k(t),\ t \in J. \tag{12}$$

Из (9), (10) получаем следующее представление (с учетом того, что $x_0(t)$ есть решение задачи (7), (8)) ${}^{0}_{\mathscr{P}} x_k(t) = \int\limits_a^t {}^{0}_{\mathscr{P}} C(t,s)\, g(s) {}^{0}_{\mathscr{P}} x_{k-1}(s)\, ds \quad (k = 1, 2, \ldots)$, где, напомним, $C(t,s)$ — функция Коши уравнения (1).

Из определений квазипроизводных следует, что

$$\left({}^{0}_{\mathscr{P}} x_0(t)\right)' = \frac{{}^{1}_{\mathscr{P}} x_0(t)}{p_{11}(t)} - \frac{p_{10}(t)}{p_{11}(t)}\, {}^{0}_{\mathscr{P}} x_0(t) = \frac{1}{p_{11}(t)} \int\limits_a^t {}^{1}_{\mathscr{P}} C(t,s)\, g(s) {}^{0}_{\mathscr{P}} x_{k-1}(s) ds -$$

$$- \frac{p_{10}(t)}{p_{11}(t)} \int\limits_a^t {}^{0}_{\mathscr{P}} C(t,s)\, g(s) {}^{0}_{\mathscr{P}} x_{k-1}(s) ds \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Обозначим

$$M \doteq \operatorname*{vraisup}_{[a,b]\times[a,b]} \left| {}^{0}_{\mathscr{P}} C(t,s)\, g(s) \right|;$$

$$C \doteq \max_{[a,b]} \left| {}^{0}_{\mathscr{P}} x_0(t) \right|, \qquad C_1 \doteq \max_{j\in 0:n-1} \max_{[a,b]} \left| {}^{j}_{\mathscr{P}} x_0(t) \right|;$$

$$L \doteq \max \left\{ \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \frac{1}{p_{\nu\nu}(t)} (\nu \in 1 : n-1), \qquad \operatorname*{vraisup}_{t\in[a,b]} \frac{|p_{\nu k}(t)|}{p_{\nu\nu}(t)} (\nu \in 1 : n,\ k \in 0 : \nu - 1) \right\};$$

$$M_1 \doteq \max_{j\in 0:n-1} \operatorname*{vraisup}_{[a,b]\times[a,b]} \left| {}^{j}_{\mathscr{P}} C(t,s)\, g(s) \right|, \qquad H \doteq n\, L\, M_1.$$

Покажем, что на J справедливы оценки

$$\left| {}^{0}_{\mathscr{P}} x_k(t) \right| \leqslant C\,(M\,(t-a))^k\,(k\,!)^{-1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \tag{13}$$

$$\left| \left({}^{0}_{\mathscr{P}} x_0(t) \right)' \right| \leqslant n\, L\, C_1, \tag{14}$$

$$\left| \left({}^{0}_{\mathscr{P}} x_k(t) \right)' \right| \leqslant \left(H/M \right) (M\,(t-a))^k\,(k\,!)^{-1} \tag{15}$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

Для $k = 0$ они очевидны. Из справедливости (13) для некоторого $k > 0$ следует, что имеют место следующие оценки

$$\left| {}^{0}_{\mathscr{P}} x_{k+1}(t) \right| \leqslant \int\limits_a^t \left| {}^{0}_{\mathscr{P}} C(t,s)\, g(s) \right| \left| {}^{0}_{\mathscr{P}} x_k(s) \right| ds \leqslant C\,(M\,(t-a))^{k+1}\,((k+1)\,!)^{-1},$$

то есть справедливость оценки (13) для $k + 1$. По индукции неравенство (13) справедливо для $k \in \mathbb{N}$. Оценка (14) очевидна.

Справедливость оценки (15) получается из следующей цепочки неравенств

$$\left| \left({}^{0}_{\mathscr{P}} x_k(t) \right)' \right| \leqslant \frac{1}{p_{11}(t)} \int\limits_a^t \left| {}^{1}_{\mathscr{P}} C(t,s)\, g(s) \right| \left| {}^{0}_{\mathscr{P}} x_{k-1}(s) \right| ds \; +$$

$$+ \; \frac{p_{10}(t)}{p_{11}(t)} \int\limits_a^t \left| {}^{0}_{\mathscr{P}} C(t,s)\, g(s) \right| \left| {}^{0}_{\mathscr{P}} x_{k-1}(s) \right| ds \; \leqslant$$

$$\leqslant \left(H/M \right) (M\,(t-a))^k\,(k\,!)^{-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Из оценок (13)–(15) и признака Вейерштрасса следует, что ряд, полученный почленным дифференцированием ряда (12), сходится равномерно на J. Следовательно, ряд (12) допускает почленное дифференцирование и имеет место равенство

$${}^{1}_{\mathscr{P}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k\, x_k(t) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \; {}^{1}_{\mathscr{P}} x_k(t). \tag{16}$$

Точно так же, как мы только что доказали равенство (16), с использованием индукции по j, доказывается, что

$${}^{j}_{\mathscr{P}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k\, x_k(t) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k \; {}^{j}_{\mathscr{P}} x_k(t) \tag{17}$$

$$(j = 2, \dots, n).$$

Из оценки (13) при $\lambda \in [-\lambda, \lambda]$ получаем следующую оценку

$$\left|(-1)^k \lambda^k \ell_n x_k\right| \leqslant n \left(\max_{k \in 0:n-1} \left|\beta_{nk}\right| \right) M_1 L^k \left(C/M\right) \frac{(M(b-a))^k}{k\,!},$$

что позволяет применить к ряду (11) признак Вейерштрасса и получить первое утверждение теоремы. Учитывая равенство (17) и определение последовательности $\left\{x_k\right\}_0^\infty$, получим, что функция $u(t, \lambda)$, определяемая равенством

$$u(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-\lambda)^k x_k(t), \tag{18}$$

удовлетворяет уравнению (4) и краевым условиям (5), за исключением, быть может, последнего. Очевидно, что $\ell_n u(t, \lambda) = 0$ в том и только том случае, если λ — корень уравнения $\Phi(\lambda) = 0$. Теорема доказана.

Если уравнение $\Phi(\lambda) = 0$ имеет лишь простые корни, то все собственные функции имеют представление (18).

Рассмотрим простой пример.

Пример 1:

$$x'' = -\lambda\, x, \quad x(a) = x(b) = 0$$

($n = 2$, $\mathscr{P}$ — единичная 3×3 матрица, $g(t) \equiv 1$, $\ell_1\, x \doteq x(a)$, $\ell_2\, x \doteq x(b)$).

Здесь

$$\Phi(\lambda) = (b-a) - \lambda \frac{(b-a)^3}{3\,!} + \lambda^2 \frac{(b-a)^5}{5\,!} - \ \ldots = \frac{\sin\sqrt{\lambda(b-a)}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Отсюда получаем собственные значения λ_k исходной задачи есть

$$\lambda_k = \frac{(\pi\, k)^2}{(b-a)^2},\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Укажем здесь на одно из возможных применений теоремы 1.

Данная теорема и формулы (7), (8), а также — (9), (10), позволяют предложить новый метод для вычисления собственных значений квазидифференциальной краевой задач (4), (5) и построить алгоритм ее численного решения на компьютере. Решалась задача

$$\begin{gathered} \left(p\,(t)\,x'\right)' = -\lambda g\,(t)\,x\,(t)\,, \\ x\,(0) = x\,(1) = 0\ . \end{gathered} \tag{19}$$

Для нахождения $x_0(t)$, а также для решения задач Коши (9), (10) применялся метод Рунге—Кутта четвертого порядка. Приближения к собственным значениям найдены методом Греффе—Лобачевского как корни многочлена — нечетной частичной суммы ряда (11).

Ниже приведены результаты счета.

λ^k_μ — собственное значение, вычисленное одним из следующих методов (где нижний индекс μ у λ^k_μ означает номер собственного значения):

- $k = 1$ — рассматриваемым методом;
- $k = 2$ — методом Галеркина—Ритца (в котором взяты в качестве координатных функций: $t^2 - t$ и $t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$);
- $k = 3$ — методом последовательных приближений $\left(x_0\,(t) = 1\right)$;
- $k = 4$ — точное значение (когда оно известно).

Таблица 1. Результаты вычислений первого и второго собственных значений задачи вида (19)*

$p(t)$	$g(t)$	λ_1^1 λ_2^1	λ_1^2 λ_2^2	λ_1^3	λ_1^4 λ_2^4
1	1	9.8667 33	10.0000 42	9.8697	9.8696 39.4784
$\sin\left(t+\frac{1}{2}\right)$	1	7.483 26	7.495 33	7.485	
1	1	18.967 68	19.19 102	18.970	18.956
$\ln^2(t+1)+0.1$	1	2.403 10	2.43 13	2.403	
$\exp(t)$	1	16.23 54	16.32 75	16.24	
t^2+3t+1	1	24.28 84	24.36 126	24.29	
$t^2\ln(t+1)+0.1$	1	2.329 9	2.39 15	2.329	

3. ТЕОРЕМЫ ОБ ОЦЕНКАХ И ПРИМЕРЫ К ТЕОРЕМАМ

Пусть $n = 2$. Уравнение (1) примет вид

$$\left(\mathop{x}\limits_{\mathscr{P}}^{2}\right)(t) = 0, \quad t \in J. \tag{20}$$

Уравнение (20) называется неосцилляционным на промежутке $J \subset I$ (напомним, что здесь $J = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$), если нулевая квазипроизводная любого его нетривиального решения имеет на J не более одного нуля (см. [24], [25]), заметим, что в этих работах дается определение неосцилляции для уравнения произвольного порядка). При условии неосцилляции имеет место неравенство $\mathop{C}\limits_{\mathscr{P}}^{0}(t,s) \geqslant 0$ при $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$ (см. [24], [25]).

Сопряженное однородное уравнение второго порядка имеет вид

$$\left(\mathop{x}\limits_{\mathscr{R}}^{2}\right)(t) = 0, \quad t \in J, \tag{21}$$

где $\mathscr{R} = \left(r_{\nu k}\right)_0^2$ — нижняя треугольная матрица,

$$r_{\nu k} = (-1)^{\nu+k}\, p_{n-k,n-\nu}\, p_{n-\nu,n-\nu}\big/p_{n-k,n-k} \quad (k \in 0 : \nu,\ \nu \in 0 : 2).$$

Пусть $g(t) \doteq 1\big/p_{22}(t)$ $(t \in J)$. Рассмотрим краевую задачу на собственные значения вида (4), (5), а, именно, следующую задачу

$$(\mathop{x}\limits_{\mathscr{P}}^{2})(t) = -\lambda \left(\mathop{x}\limits_{\mathscr{P}}^{0}\right)(t) \quad (t \in J), \tag{22}$$

$$\mathop{x}\limits_{\mathscr{P}}^{0}(a) = \mathop{x}\limits_{\mathscr{P}}^{0}(b) = 0. \tag{23}$$

Решение $u(t, \lambda)$ уравнения (22), удовлетворяющее первому условию из условий (23), представимо в виде ряда (18), который в данном случае выглядит так

$$u(t,\lambda) = x_0(t) - \lambda x_1(t) + \lambda^2 x_2(t) - \lambda^3 x_3(t) + \ \ldots \ . \tag{24}$$

* При вычислении второго собственного числа все методы дают значительную погрешность, поэтому результаты вычислений приведены с точностью до целых.

Нулевая квазипроизводная этого решения по аргументу t представима в виде ряда

$$\overset{0}{\mathscr{P}} u(t,\lambda) = \overset{0}{\mathscr{P}} x_0(t) - \lambda \overset{0}{\mathscr{P}} x_1(t) + \lambda^2 \overset{0}{\mathscr{P}} x_2(t) - \lambda^3 \overset{0}{\mathscr{P}} x_3(t) + \ \dots \ . \tag{25}$$

Последовательность решений в (24) $\big($см. также (25)$\big)$, $\{x_k(\cdot)\}_0^\infty$, строится следующим образом: $x_0(\cdot)$ — решение задачи Коши

$$\left(\overset{2}{\mathscr{P}} x\right)(t) = 0 \ \ (t \in J), \tag{26}$$

$$\overset{0}{\mathscr{P}} x(a) = 0, \ \overset{1}{\mathscr{P}} x(a) = 1, \tag{27}$$

то есть определения (7), (8) для задачи (22), (23) принимают вид (26), (27).

Функции $x_k(\cdot)$ находятся рекуррентно как решения задач

$$\left(\overset{2}{\mathscr{P}} x_k\right)(t) = \left(\overset{0}{\mathscr{P}} x_{k-1}\right)(t) \ \ (t \in J), \tag{28}$$

$$\overset{0}{\mathscr{P}} x_k(a) = 0, \ \ \overset{1}{\mathscr{P}} x_k(a) = 0 \ \ (k = 1, 2, \dots), \tag{29}$$

то есть определения (9), (10) для задачи (22), (23) принимают вид (28), (29).

Собственные значения задачи (22), (23) представляют собой корни уравнения $\Phi(\lambda) = 0$, где $\Phi(\cdot)$ — сумма ряда (24) при $t = b$. Функция

$$u(t,\lambda_*) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda_*)^k x_k(t) \ (t \in J)$$

есть собственная функция краевой задачи (22), (23), отвечающая собственному значению λ_*.

Предполагаем функции $p_{\nu\nu}(t)$ $(\nu \in 0 : 2)$ положительными на отрезке J.

Теорема 2. *Пусть уравнение* (20) *неосциляционно на* J *и* $C(t,s)$ — *функция Коши уравнения* (20)*, вещественные константы* M_1*,* M_2 *и функция* $\varphi(\cdot)$ *таковы, что выполняются следующие неравенства*

$$\frac{\overset{0}{\mathscr{P}} C(t,s)}{p_{22}(s)} \leqslant M_1 \frac{\varphi(t-a)}{\varphi(s-a)} (t-s)$$

при всех значениях s *и* t *таких, что* $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$,

$$\overset{0}{\mathscr{P}} C(t,a) \leqslant M_2 \, \varphi(t-a)(t-a)$$

при всех значениях t*, таких что* $a \leqslant t \leqslant b$*. Пусть, далее,* $M \doteq \max\{M_1, M_2\}$*. Тогда в представлении* (25) *имеют место точные (см. пример* 2 *ниже) оценки для коэффициентов при степенях* λ, a*, именно,*

$$0 \leqslant \overset{0}{\mathscr{P}} x_k(t) \ \leqslant \ \frac{M^{k+1} \, (t-a)^{2k+1} \varphi(t-a)}{(2k+1)!} \ \ \big(t \in J, \ k = 0, 1, \dots\big). \tag{30}$$

Доказательство. Докажем эту теорему методом математической индукции. При $k = 0$ оценка (30) верна. Действительно, $\overset{0}{\mathscr{P}} x_0(t) = \overset{0}{\mathscr{P}} C(t,a)$, следовательно,

$$\overset{0}{\mathscr{P}} x_0(t) = \overset{0}{\mathscr{P}} C(t,a) \leqslant M_2 \, (t-a)\varphi(t-a) \leqslant M(t-a)\varphi(t-a).$$

Пусть оценка (30) имеет место для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Покажем ее справедливость для $k+1$. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\overset{0}{\mathscr{P}} x_{k+1}(t) = \int_a^t \frac{\overset{0}{\mathscr{P}} C(t,s) \overset{0}{\mathscr{P}} x_k(s)}{p_{22}(s)} \, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\int_a^t M_1 \frac{\varphi(t-a)}{\varphi(s-a)}\varphi(s-a)(t-s)(s-a)^{2k+1}\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^{k+2}}{(2k+1)!}\int_a^t \frac{\varphi(t-a)}{\varphi(s-a)}\varphi(s-a)(t-s)(s-a)^{2k+1}\,ds =$$

$$= \frac{M^{k+2}\varphi(t-a)}{(2k+2)!}\int_a^t (t-s)\,d(s-a)^{2k+2} = \frac{M^{k+2}\varphi(t-a)}{(2k+2)!}\int_a^t (s-a)^{2k+2}\,ds =$$

$$= \frac{M^{k+2}\varphi(t-a)}{(2k+3)!}\int_a^t d(s-a)^{2k+3} = \frac{M^{k+2}\varphi(t-a)}{(2k+3)!}(t-a)^{2k+3} =$$

$$= \frac{M^{(k+1)+1}\,(t-a)^{2(k+1)+1}\varphi(t-a)}{(2(k+1)+1)!}.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$0 \leqslant {}_{\mathscr{P}}^{0}x_{k+1}(t) \leqslant \frac{M^{(k+1)+1}\,(t-a)^{2(k+1)+1}\varphi(t-a)}{(2(k+1)+1)!}.$$

Следовательно, по индукции оценки (30) имеет место для всех $k \in \mathbb{N}$. Теорема доказана.

Пример 2. Рассмотрим задачу вида (22), (23)

$$x'' + tx' + \left(t^2/4 + 1/2\right)x = -(\lambda - 1/2)x, \tag{31}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{32}$$

Для задачи (31), (32) обозначения теоремы 2 примут следующий вид:

$$a = 0,\quad b = 1,\quad p_{00}(t) = 1,$$

$$p_{11}(t) = 1,\; p_{10}(t) = 0,\; p_{22}(t) = 1,\; p_{21}(t) = t,\; p_{20}(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{2};$$

$$\frac{{}_{\mathscr{P}}^{0}C(t,s)}{p_{22}(s)} = \frac{e^{-(t^2+s^2)/4}}{e^{-s^2/2}}(t-s) = \frac{e^{-t^2/4}}{e^{-s^2/4}}(t-s) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(s)}(t-s),$$

$$M_1 = M_2 = 1,\quad \varphi(t) = e^{-t^2/4},$$

$${}_{\mathscr{P}}^{0}x_k(t) = x_k(t) = \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-t^2/4}\;\left(k = 0, 1, 2, \ldots\right).$$

Правые части оценок (30) функциями ${}_{\mathscr{P}}^{0}x_k(t)$ достигаются. Представление (24) (или, что то же самое, в силу того, что $p_{00}(t) = 1$, представление (25) для задачи (31), (32)) примет вид

$$u(t,\lambda) = e^{-t^2/4}\sin\left(\sqrt{\lambda - 1/2}\;t\right)\Big/\sqrt{\lambda - 1/2}.$$

Корнями уравнения $\Phi(\lambda) = 0$, где $\Phi(\lambda) = u(1,\lambda)$, и собственными значениями задачи (31), (32) являются $\lambda_k = 1/2 + \left(\pi(k+1)\right)^2$ $\left(k = 0, 1, 2, \ldots\right)$. Функции

$$u(t,\lambda_k) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(\lambda_k - 1/2)^m x_m(t) = e^{-t^2/4}\,\frac{\sin\left(\pi(k+1)\,t\right)}{\pi(k+1)}$$

являются собственными функциями задачи (31), (32), соответствующими собственным значениям λ_k задачи (31), (32).

Теорема 3. *Пусть уравнение* (20) *неосциляционно на* J *и* $C(t,s)$ — *функция Коши уравнения* (20), *вещественные константы* M_1, M_2 *и функция* $\varphi(\cdot)$ *таковы, что выполняются следующие неравенства*

$$1 \leqslant \varphi(t), \quad {}^{0}_{\mathscr{P}}C(t,s) \leqslant M_1 \int_s^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)}\,ds, \quad {}^{0}_{\mathscr{P}}C(t,a) \leqslant M_2 \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)}\,ds$$

при всех значениях s и t таких, что $a \leqslant s \leqslant t \leqslant b$. *Пусть, далее,*

$$M \doteq \max\left\{M_1, M_2\right\}.$$

Тогда в представлении (25) *имеют место точные (см. примеры* 3 *и* 4 *ниже) оценки для коэффициентов при степенях* λ, *а, именно,*

$$0 \leqslant {}^{0}_{\mathscr{P}}x_k(t) \leqslant \frac{M^{k+1}\left(\displaystyle\int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)}\,ds\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \left(t \in J,\ k = 0,1,\dots\right). \tag{33}$$

Доказательство. Докажем эту теорему методом математической индукции. При $k = 0$ оценка (33) верна. Действительно,

$${}^{0}_{\mathscr{P}}x_0(t) = {}^{0}_{\mathscr{P}}C(t,a),$$

следовательно,

$${}^{0}_{\mathscr{P}}x_0(t) = {}^{0}_{\mathscr{P}}C(t,a) \leqslant M_2 \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)}\,ds \leqslant M \int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)}\,ds.$$

Пусть оценка (33) имеет место для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Покажем ее справедливость для $k+1$. Имеет место следующая цепочка неравенств

$$\begin{gathered}
{}^{0}_{\mathscr{P}}x_{k+1}(t) = \int_a^t \frac{{}^{0}_{\mathscr{P}}C(t,s)\,{}^{0}_{\mathscr{P}}x_k(s)}{p_{22}(s)}\,ds \leqslant \\
\leqslant \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\int_a^t \left(\frac{M_1\varphi(s)}{p_{22}(s)}\right)\left(\int_s^t \frac{\varphi(\tau)}{p_{22}(\tau)}\,d\tau\right)\left(\int_a^s \frac{\varphi(\tau_1)}{p_{22}(\tau_1)}\,d\tau_1\right)^{2k+1} ds \leqslant \\
\leqslant \frac{M^{k+2}}{(2k+2)!}\int_a^t \left(\int_s^t \frac{\varphi(\tau)}{p_{22}(\tau)}\,d\tau\right) d\left(\int_a^s \frac{\varphi(\tau_1)}{p_{22}(\tau_1)}\,d\tau_1\right)^{2k+2} = \\
= \frac{M^{k+2}}{(2k+2)!}\int_a^t \left(\frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)}\right)\left(\int_a^s \frac{\varphi(\tau_1)}{p_{22}(\tau_1)}\,d\tau_1\right)^{2k+2} ds = \\
= \frac{M^{k+2}}{(2k+3)!}\left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)}\,ds\right)^{2k+3} = \frac{M^{(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!}\left(\int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)}\,ds\right)^{2(k+1)+1}.
\end{gathered}$$

Таким образом, получаем следующее неравенство

$$0 \leqslant {}^{0}_{\mathscr{P}}x_k(t) \leqslant \frac{M^{(k+1)+1}\left(\displaystyle\int_a^t \frac{\varphi(s)}{p_{22}(s)}\,ds\right)^{2(k+1)+1}}{(2(k+1)+1)!}.$$

По индукции оценки (33) имеет место для всех $k \in \mathbb{N}$. Теорема доказана.

Пример 3. Рассмотрим задачу вида (22), (23)

$$\frac{1}{\cos^2 t} x'' + \frac{\sin t}{\cos^3 t}\, x' = -\lambda x \tag{34}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{35}$$

Для задачи (34), (35) обозначения теоремы 3 примут следующий вид:

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1,$$

$$p_{11}(t) = 1, \; p_{10}(t) = 0, \quad p_{22}(t) = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad p_{21}(t) = \frac{\sin t}{\cos^3 t}, \quad p_{20}(t) = 0;$$

$$\overset{0}{\mathscr{P}} C(t,s) = C(t,s) = \int_s^t \frac{1}{\frac{1}{\cos\tau}}\, d\tau = \int_s^t \cos\tau\, d\tau = \sin t - \sin s,$$

$$M_1 = M_2 = 1, \quad \varphi(t) \equiv 1,$$

$$\overset{0}{\mathscr{P}} x_k(t) = x_k(t) = \frac{\big(\sin t\big)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \big(k = 0, 1, 2, \ldots\big).$$

Правые части оценок (33) функциями $\overset{0}{\mathscr{P}} x_k(t)$ достигаются.

Представление (24) $\big($или, что то же самое, в силу того, что $p_{00}(t) = 1$, представление (25) для задачи (34), (35)$\big)$ примет вид $u(t,\lambda) = \dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\sin t\right)}{\sqrt{\lambda}}$. Корнями уравнения

$$\Phi(\lambda) = 0, \text{ где } \Phi(\lambda) = u(1,\lambda),$$

и собственными значениями задачи (34), (35) являются $\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{\sin 1}\right)^2$.

Функции

$$u(t,\lambda_k) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \lambda_k^m x_m(t) = \frac{\sin 1 \sin\left(\dfrac{\pi k \sin t}{\sin 1}\right)}{\pi k}$$

являются собственными функциями задачи (34), (35), соответствующими собственным значениям λ_k задачи (34), (35).

Пример 4. Рассмотрим задачу вида (22), (23)

$$p(t)\Big(p(t)\, x'\Big)' = -\lambda x \quad (t \in [0,1]) \tag{36}$$

$\big($функция $p(t)$ измерима, почти всюду конечна, неотрицательна и суммируема на отрезке $[0,1]\big)$,

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{37}$$

Для задачи (36), (37) обозначения теоремы 3 примут следующий вид:

$$a = 0, \quad b = 1, \quad p_{00}(t) = 1,$$

$$p_{11}(t) = p(t), \; p_{10}(t) = p_{21}(t) = 0, \; p_{22}(t) = p(t), \; p_{20}(t) = 0;$$

$$\overset{0}{\mathscr{P}} C(t,s) = C(t,s) = \int_s^t \frac{d\tau}{p(\tau)}, \quad M_1 = M_2 = 1, \quad \varphi(t) \equiv 1,$$

$$\underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}x_k(t) = x_k(t) = \frac{\left(\int_0^t \frac{d\tau}{p(\tau)}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \big(k = 0, 1, 2, \dots\big).$$

Правые части оценок (33) функциями $\underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}x_k(t)$ достигаются.

Представление (24) $\big($или, что то же самое, в силу того, что $p_{00}(t) = 1$, представление (25) для задачи (36), (37)$\big)$ примет вид

$$u(t, \lambda) = \frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\left(\int_0^t \frac{d\tau}{p(\tau)}\right)\right)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Корнями уравнения $\Phi(\lambda) = 0,$ где $\Phi(\lambda) = u(1, \lambda)$, и собственными значениями задачи (36), (37) являются

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{\int_0^1 \frac{d\tau}{p(\tau)}}\right)^2.$$

Функции

$$u(t, \lambda_k) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \lambda_k^m x_m(t) = \frac{\left(\int_0^1 \frac{d\tau}{p(\tau)}\right)\sin\left(\frac{\pi k \int_0^t \frac{d\tau}{p(\tau)}}{\int_0^1 \frac{d\tau}{p(\tau)}}\right)}{\pi k}$$

являются собственными функциями задачи (36), (37), соответствующими собственным значениям λ_k задачи (36), (37).

Пусть, по-прежнему, уравнение (20) неосциляционно на J. Пусть $C^*(t, s)$ есть функция Коши уравнения (21). Напомним, что функции $p_{ii}(t)\,(i \in 0 : 2)$ предполагаются положительными на J. Пусть, далее,

$$M_1 \doteq \max_{t\in[a,b]} \underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}C(t, a), \quad M_2 \doteq \max_{(s,t)\in[a,b]\times[a,b]} \left|\underset{\mathscr{R}}{\overset{1}{}}C^*(s, t)\right|$$

и $M \doteq \max\{M_1, M_2\}$, функция $\xi(t) \doteq \min\{p_{11}(t),\ p_{22}(t)\}$ при каждом значении аргумента t из J. Будем предполагать, что функция $\frac{1}{\xi(t)}$ суммируема на J. Определим функцию

$$\psi(t) \doteq \int_a^t \frac{1}{\xi(s)}\, ds\ (t \in J).$$

Считаем далее также, что функция $p_{21}(t) \geqslant 0$ $(t \in J)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Справедливы оценки*

$$0 \leqslant \underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}x_k(t) \leqslant \frac{M^{k+1}\psi^{2k}(t)}{(2k)!} \quad (t \in J,\ k = 0, 1, \dots). \tag{38}$$

Доказательство. Докажем эту теорему методом математической индукции. При $k = 0$ оценка (38) верна. Действительно, $\underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}x_0(t) = \underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}C(t, a)$, следовательно, $\underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}x_0(t) \leqslant M_1 \leqslant M$. Пусть оценка (38) имеет место для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Покажем ее справедливость для $k + 1$. Выполняется следующая цепочка неравенств

$$\underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}x_{k+1}(t) = \int_a^t \frac{\underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}C(t, s)\underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}x_k(s)}{p_{22}(s)}\, ds \leqslant \frac{M^{k+1}}{(2k)!}\int_a^t \frac{\underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}C(t, s)\psi^{2k}(s)}{p_{22}(s)}\, ds \leqslant \frac{M^{k+1}}{(2k)!}\int_a^t \frac{\underset{\mathscr{P}}{\overset{0}{}}C(t, s)\psi^{2k}(s)}{\xi(s)}\, ds =$$

$$= \Big(\text{заметим, что } {}^{\,0}_{\mathscr{P}}C(t,s) = -{}^{\,0}_{\mathscr{R}}C^*(s,t) \ (\text{см. [24], [25]})\Big) =$$

$$= -\frac{M^{k+1}}{(2k)!}\int_a^t {}^{\,0}_{\mathscr{R}}C^*(s,t)\psi^{2k}(s)\,d\psi(s) = -\frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\int_a^t {}^{\,0}_{\mathscr{R}}C^*(s,t)\,d\psi^{2k+1}(s) =$$

$$= \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\int_a^t \psi^{2k+1}(s)\left({}^{\,0}_{\mathscr{R}}C^*(s,t)\right)'_s ds =$$

$$= \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\int_a^t \frac{p_{11}(s)\left({}^{\,0}_{\mathscr{R}}C^*(s,t)\right)'_s}{p_{11}(s)}\psi^{2k+1}(s)\,ds = \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\times$$

$$\times\int_a^t \frac{p_{11}(s)\left({}^{\,0}_{\mathscr{R}}C^*(s,t)\right)'_s - \dfrac{p_{21}(s)p_{11}(s)}{p_{22}(s)}\,{}^{\,0}_{\mathscr{R}}C^*(s,t) + \dfrac{p_{21}(s)p_{11}(s)}{p_{22}(s)}\,{}^{\,0}_{\mathscr{R}}C^*(s,t)}{p_{11}(s)}\times$$

$$\times\psi^{2k+1}(s)\,ds = \Big(\text{так как имеет место следующее равенство:}$$

$${}^{\,1}_{\mathscr{R}}C^*(s,t) = p_{11}(s)\left({}^{\,0}_{\mathscr{R}}C^*(s,t)\right)'_s - \frac{p_{21}(s)p_{11}(s)}{p_{22}(s)}\,{}^{\,0}_{\mathscr{R}}C^*(s,t),$$

$$\text{то последнее выражение примет вид}\Big) =$$

$$= \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\int_a^t \frac{{}^{\,1}_{\mathscr{R}}C^*(s,t) - \dfrac{p_{21}(s)p_{11}(s)}{p_{22}(s)}\,{}^{\,0}_{\mathscr{P}}C(t,s)}{p_{11}(s)}\psi^{2k+1}(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(\text{учтем, что } \frac{p_{21}(s)p_{11}(s)}{p_{22}(s)}\,{}^{\,0}_{\mathscr{P}}C(t,s) \geqslant 0\right) \leqslant \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\int_a^t \frac{{}^{\,1}_{\mathscr{R}}C^*(s,t)}{p_{11}(s)}\psi^{2k+1}(s)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^{k+1}}{(2k+1)!}\int_a^t \frac{\left|{}^{\,1}_{\mathscr{R}}C^*(s,t)\right|}{\xi(s)}\psi^{2k+1}(s)\,ds \leqslant \frac{M^{k+1}M_1}{(2k+1)!}\int_a^t \psi^{2k+1}(s)\,d\psi(s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^{k+2}}{(2k+2)!}\psi^{2k+2}(t) = \frac{M^{(k+1)+1}\psi^{2(k+1)}(t)}{(2(k+1))!}.$$

Таким образом, ${}^{\,0}_{\mathscr{P}}x_{k+1}(t) \leqslant \dfrac{M^{(k+1)+1}\psi^{2(k+1)}(t)}{(2(k+1))!}$. По индукции оценки (38) имеют место для всех $k \in \mathbb{N}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 4 следует, что если $p_{11}(t) = p_{22}(t) \equiv 1$ на J, или $1 \leqslant p_{11}(t)$ при всех t из отрезка J и $p_{22}(t) \equiv 1$ на J (либо $1 \leqslant p_{22}(t)$ при всех t из J и $p_{11}(t) \equiv 1$ на J), то тогда оценки (38) выглядят так

$$0 \leqslant {}^{\,0}_{\mathscr{P}}x_k(t) \leqslant \frac{M^{k+1}(t-a)^{2k}}{(2k)!} \ (t \in J,\ \ k = 0, 1, \dots). \tag{39}$$

Оценки (38) и (39), в отличие от оценок (30) и (33), не являются точными.

Ведем в рассмотрение функции $\varphi_k(t) : J \to \mathbb{R}$ с помощью следующих равенств:

$$\varphi_k(t)\frac{M^{k+1}\psi^{2k}(t)}{(2k)!} = {}^{\,0}_{\mathscr{P}}x_k(t),$$

где $k = 0, 1, \dots$ (заметим, что $0 \leqslant \varphi_k(t) \leqslant 1$).

Определим функцию

$$v(t,\lambda) \doteq \varphi_0(b)M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k \varphi_k(b) M^{k+1} \psi^{2k}(t)}{(2k)!} \quad (t \in J). \tag{40}$$

Функция $v(t,\lambda)$ является как бы "сечением" функции ${}^{\,0}_{\mathscr{P}}u(t,\lambda)$ при $t = b$.

Теорема 5. *Функция $v(t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению*

$$\lambda\big(v(t,\lambda)\big)''_{\sqrt{\lambda}} = \psi^2(t)\left(\xi(t)\left(\xi(t)\big(v(t,\lambda)\big)'_t\right)'_t\right) \tag{41}$$

и условиям

$$\begin{gathered} v(b,\lambda) = {}^{\,0}_{\mathscr{P}}u(b,\lambda), \quad \left(\xi(t)\big(v(t,\lambda)\big)'_t\right)\Big|_{t=a} = 0, \\ v(t,\lambda)\big|_{\lambda=0} = {}^{\,0}_{\mathscr{P}}C(b,a), \quad \left(\left(\sqrt{\lambda}\, v(t,\lambda)\right)'_{\sqrt{\lambda}}\right)\Big|_{\lambda=0} = {}^{\,0}_{\mathscr{P}}C(b,a). \end{gathered} \tag{42}$$

Доказательство. В том, что функция $v(t,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (41), убедимся непосредственной подстановкой правой части формулы (40) в левую и правую части уравнения (41)

$$\lambda\big(v(t,\lambda)\big)''_{\sqrt{\lambda}} =$$

$$= -\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^2(t) + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^4(t)}{2!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^6(t)}{4!} + \ldots,$$

$$\psi^2(t)\left(\xi(t)\left(\xi(t)\big(v(t,\lambda)\big)'_t\right)'_t\right) =$$

$$= -\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^2 + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^4}{2!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^6}{4!} + \ldots$$

Получили одно и то же выражение.

Подставляем правую часть формулы (40) в левые части каждого условия из четырех условий (42)

$$v(b,\lambda) = \varphi_0(b)M - \frac{\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^2(b)}{2!} + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^4(b)}{4!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^6(b)}{6!} + \ldots =$$

$$= p_{00}(b)\Big(x_0(b) - \lambda x_1(b) + \lambda^2 x_2(b) - \lambda^3 x_3(b) + \ldots\Big) = {}^{\,0}_{\mathscr{P}}u(b,\lambda),$$

$$\left(\xi(t)\big(v(t,\lambda)\big)'_t\right)\Big|_{t=a} = \left(-\frac{\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^1(t)}{1!} + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^3(t)}{3!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^5(t)}{5!} + \ldots\right)\Big|_{t=a} =$$

$$= -\frac{\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^1(a)}{1!} + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^3(a)}{3!} - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^5(a)}{5!} + \ldots = (\psi(a) = 0) = 0,$$

$$v(t,\lambda)\Big|_{\lambda=0} = \left(\varphi_0(b)M - \frac{\lambda\varphi_1(b)M^2\psi^2(t)}{2!} + \frac{\lambda^2\varphi_2(b)M^3\psi^4(t)}{4!} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda^3\varphi_3(b)M^4\psi^6(t)}{6!} + \ldots\right)\Big|_{\lambda=0} = {}^{\,0}_{\mathscr{P}}C(b,a),$$

$$\left(\left(\sqrt{\lambda}\, v(t,\lambda) \right)'_{\sqrt{\lambda}} \right) \Big|_{\lambda=0} = \left(\varphi_0(b) M \sqrt{\lambda} - \frac{(\sqrt{\lambda})^3 \varphi_1(b) M^2 \psi^2(t)}{2!} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\sqrt{\lambda})^5 \varphi_2(b) M^3 \psi^4(t)}{4!} - \ldots \right)'_{\sqrt{\lambda}} \Big|_{\lambda=0} = \varphi_0(b) M + 0 = {}^{0}_{\mathscr{P}} C(b,a).$$

Убеждаемся в том, что функция $v(t,\lambda)$ удовлетворяет условиям (42). Теорема доказана.

Уравнение (41) назовем “квазидифференциальным уравнением в частных производных”.

То, что решение задачи (41), (42), функция $v(t,\lambda)$ удовлетворяет первому условию из условий (42), означает, что собственные значения задачи (22), (23) могут быть найдены как корни уравнения

$$v(b,\lambda) = 0. \tag{43}$$

Поэтому определенный интерес представляет вопрос об аппроксимации корней уравнения (43) в тех случаях, когда его корни не могут быть найдены точно. На этом закончим рассмотрение теорем об оценках и последний раздел настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Некоторые вопросы теории Штурма–Лиувилля // УМН. 1960. Т. 15. № 1(91). С. 3–98.
2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
3. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. К.: Наук. думка, 1977.
4. *Костюченко А. Г., Саргсян И. С.* Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). М.: Наука, 1979.
5. *Садовничий В. А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1986.
6. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
7. *Мирзоев К. А.* Операторы Штурма–Лиувилля // Тр. ММО. 2014. Т. 75. № 2. С. 335–359.
8. *Конечная Н. Н., Мирзоев К. А.* Главный член асимптотики решений линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями первого порядка // Матем. заметки. 2019. Т. 106. № 1. С. 74–83.
9. *Конечная Н. Н., Мирзоев К. А.* Об асимптотике решений линейных дифференциальных уравнений нечетного порядка // Вестн. Моск. ун-та. 2020. Сер. 1. Матем., мех. № 1. С. 23–28.
10. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Изв. РАН, Сер. мат. 2000. Т. 64. № 4. С. 47–108.
11. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 897–912.
12. *Савчук А. М.* О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 2. С. 277–285.
13. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями // Тр. Моск. матем. общ-ва. 2003. Т. 64. С. 159–212.
14. *Конечная Н. Н., Сафонова Т. А., Тагирова Р. Н.* Асимптотика собственных значений и регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом // Вестн. Сев. (Арктич.) федер. ун-та. Сер.: Естеств. науки. 2016. Вып. 1. С. 104–113.
15. *Сафонова Т. А., Рябченко С. В.* О собственных значениях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом // Вестн. Сев. (Арктич.) федер. ун-та. Сер.: Естеств. науки. 2016. Вып. 2. С. 115–125.
16. *Покорный Ю. В., Прядиев В. Л.* Некоторые вопросы качественной теории Штурма–Лиувилля на пространственной сети // УМН. 2004. Т. 59. №3 (357). С. 116–150.

17. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Ищенко А. С., Шабров С. А.* О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 2007. Т. 82. № 4. С. 578–582.
18. *Покорный Ю. В., Зверева М. Б., Шабров С. А.* Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач // УМН. 2008. Т. 63. №1 (379). С. 111–154.
19. *Митрохин С. И.* Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты. М.: ИНТУИТ, 2009.
20. *Митрохин С. И.* О спектральных свойствах многоточечной краевой задачи для дифференциального оператора нечетного порядка с суммируемым потенциалом // Arctic Environmental Research. 2017. Т. 17. № 4. С. 376–392.
21. *Митрохин С. И.* Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией // Изв. вузов. Матем. 2018. № 6. С. 31–47.
22. *Митрохин С. И.* Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка со знакопеременной весовой функцией // Вестник МГУ. Сер.: “Математика, механика”. 2018. № 6. С. 46–58.
23. *Митрохин С. И.* Асимптотика спектра дифференциального оператора четного порядка с разрывной весовой функцией // Журнал СВМО. 2020. Т. 22. № 1. С. 48–70.
24. *Дерр В. Я.* Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Известия Института математики и информатики УдГУ. 1999. № 1(16). С. 3–105.
25. *Дерр В. Я.* Об адекватном описании сопряженного оператора // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. № 3. С. 43–63.
26. *Шин Д. Ю.* О решениях линейного квазидифференциального уравнения *n*-го порядка // Матем. сборник. 1940. Т. 7(49). № 3. С. 479–532.
27. *Шин Д. Ю.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве // Матем. сборник. 1943. Т. 13(55). № 1. С. 39–70.
28. *Everitt W. N., Marcus L.* Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators // Amer. Math. Soc. 1999. V. 61.
29. *Eckhardt J., Gestezy F., Nichols R., Teschl G.* Weyl–Titchmarsh theory for Sturm–Liuville operators with distributional potentials // Opuscula Mathematica. 2013. V. 33(3). P. 467–563.
30. *Everitt W. N., Race D.* The regular representation of singular second order differential expressions using quasi-derivatives // Proc. London Math. Soc. (3) 1992. V. 65(2). P. 383–404.
31. *Xiao xia Lv, Ji-jun Ao, Zettl A.* Dependence of eigenvalues of fourth-order differential equations with discontinuous boundary conditions on the problem // J. Math. Anal. Appl. 2017. V. 456(1). P. 671–685.
32. *Qinglan Bao, Jiong Sun, Xiaoling Hao, Zettl A.* Characterization of self-adjoint domains for regular even order C-symmetric differential operators // Electronic J. of Qualitative Theory of Diff. Equat. 2019. V. 62. P. 1–17.
33. *Zettl A.* Sturm-Liouville Theory. Amer. Math. Soc., 2005.
34. *Zett A.* Recent Developments in Sturm-Liouville Theory. Berlin, Boston: De Gruyter, 2021.
35. *Jianfang Qin, Kun Li, Zhaowen Zheng, Jinming Cai.* Dependence of eigenvalues of discontinuous fourth-order differential operators with eigenparameter dependent boundary conditions // J. of Nonlinear Math. Phys. 2022. V. 29(4). P. 776–793.
36. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

ON THE APPROXIMATION OF THE FIRST EIGENVALUE OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS

M. Yu. Vatolkin*

Kalashnikov Izhevsk State Technical University, Studencheskaya st., 7, Izhevsk, 426069 Russia

**e-mail: vmyu6886@gmail.com*

Received 18 December, 2023
Revised 28 February, 2024
Accepted 05 March, 2024

Abstract. The paper studies the representation of eigenfunctions as scalar series for a two-point boundary value problem of the type $(n-1,1)$ under the assumption that there exists a functional concentrated at one point such that the first $n-1$ of the original boundary conditions and $\widetilde{\ell}\,x = 1$ become the Cauchy conditions at this point. The eigenfunction of the boundary value problem under consideration, corresponding to the eigenvalue λ_*, is represented as a series in powers of λ_*. The equation $\Phi(\lambda) = 0$, where $\Phi(\lambda)$ is the sum of the series in powers of λ, is considered for finding the eigenvalues of the original problem. Examples of calculating the first eigenvalue of some boundary value problems are given. Various estimates are obtained for the coefficients of such power series. A certain function of two variables t and λ is defined, a partial differential equation is obtained for it, and conditions are obtained that it satisfies. The zeros of the “section” of this function coincide with the eigenvalues of the original boundary value problem, which can be used for their approximate calculation.

Keywords: boundary value problems for eigenvalues, eigenfunctions, eigenvalues, Cauchy function, representation of eigenfunctions as sums of power series, roots of the equation, estimates for the coefficients of power series.