

УДК 519.614

К ВОПРОСУ ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СЕМИДИАГОНАЛЬНЫХ ТЁПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ¹⁾

© 2024 г. И. В. Воронин^{1,*}

¹ 141700 Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9, Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет), Россия

*e-mail: Voronin.I@phystech.edu

Поступила в редакцию: 02.09.2024 г.
Переработанный вариант 12.02.2024 г.
Принята к публикации 06.03.2024 г.

Построены асимптотические формулы, допускающие равномерную оценку остаточного члена для тёплицевых матриц размера n при $n \rightarrow \infty$ в случае, когда их символ $a(t)$ имеет вид $a(t) = (t - 2a_0 + t^{-1})^3$. Данный результат является обобщением результата работы Stukopin et al. (2021), в которой получены аналогичные асимптотические формулы для семидиагональной тёплицевой матрицы с символом аналогичного вида, когда $a_0 = 1$. Полученные формулы имеют высокую вычислительную эффективность и обобщают результаты классических работ Партера и Видома по асимптотике экстремальных собственных значений. Библ. 13. Фиг. 3. Табл. 5.

Ключевые слова: матрицы Теплица, собственные векторы, асимптотические разложения.

DOI: 10.31857/S0044466924060029, **EDN:** XZPJFN

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $a(t)$ — интегрируемая по Лебегу функция, определенная на единичной окружности $T = t \in \mathbb{C} : |t| = 1$. Обозначим через $T_n(a)$ матрицу Теплица $T_n(a) := (a_{j-k})_{j,k=1}^{n-1}$, где n — натуральное число, a_l — l -й коэффициент ряда Фурье функции $a(t)$. Заметим, что матрицу Теплица можно рассматривать как оператор из конечномерного векторного пространства. Функция $a(t)$ называется символом матрицы Теплица (оператор Теплица) $T_n(a)$. Отметим, что тёплицевые матрицы, а также тесно связанные с ними тёплицевы операторы, интенсивно изучаются в течение последних ста лет (см. [1]–[6]). Важность этой темы во многом обусловлена многочисленными применениями тёплицевых матриц в численных методах, дифференциальных и интегральных уравнениях, теории вероятностей, статистической физике (см., например, [7]–[10]). Настоящая статья посвящена нахождению асимптотических формул для собственных значений семидиагональных тёплицевых матриц с символом $\tilde{a}(t) = (a_1 t - 2\tilde{a}_0 + a_1 t^{-1})^3$, $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$, т.е. симметричный линейный многочлен Лорана, возведенный в третью степень, а размер матрицы достаточно велик. Поскольку $\tilde{a}(t) = a_1^3 (t - 2(\tilde{a}_0/a_1) + t^{-1})^3$, то спектр тёплицевой матрицы с символом \tilde{a} может быть легко получен из спектра тёплицевой матрицы с символом $a(t) = (t - 2a_0 + t^{-1})^3$, где $a_0 = \tilde{a}_0/a_1$. Случай, если $a_0 \notin [-1, 1]$ подпадает под случай, рассмотренный в статье [11]. В настоящей работе будет рассмотрен случай, когда $a_0 \in [-1, 1]$. Сформулируем основные результаты. В данном случае тёплицева матрица оказывается самосопряженной и, как следствие, по слабой теореме Сегё (см. [12]) спектр данной матрицы лежит на образе единичной окружности $t = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \dots, 2\pi]$ под действием данного символа, т.е. любое собственное значение можно представить в виде $\lambda = a(e^{i\varphi}) = g(\varphi)$. В силу симметрии символа достаточно рассматривать $\varphi \in [0, \dots, \pi]$. Решать данную задачу будем относительно параметра φ , при этом собственное значение может быть найдено простой подстановкой $\lambda = g(\varphi)$.

¹⁾ Работа поддержана грантом РНФ 21-11-00283.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Введем некоторые функции, все функции будем определять на интервале $(0, \pi)$:

$$\beta(\varphi) := \arccos(a_0 - (a_0 - \cos \varphi)e^{2\pi i/3}), \quad \gamma(\varphi) = \overline{\beta(\varphi)}, \tag{1}$$

$$C_1(\varphi) := \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\varphi)}e^{\pi i/3}, \quad C_2(\varphi) := \frac{\sin(\beta)}{\sin(\varphi)}e^{2\pi i/3}. \tag{2}$$

Функция Arccos многозначная, $\beta(\varphi)$ — одна из ее ветвей. Для решения этой задачи необходимо решить уравнение $\det T_n(a - g(\varphi)) = 0$, $\varphi \in (0, \pi)$. Для нахождения определителя воспользуемся результатами статьи [13]. Получим

$$\det(T_{2p}(a - g(\varphi))) = \frac{1}{2^6} \times \frac{\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right) & \cos\left(\frac{n+1}{2}\beta\right) & \cos\left(\frac{n+1}{2}\gamma\right) \\ \cos\left(\frac{n+3}{2}\varphi\right) & \cos\left(\frac{n+3}{2}\beta\right) & \cos\left(\frac{n+3}{2}\gamma\right) \\ \cos\left(\frac{n+5}{2}\varphi\right) & \cos\left(\frac{n+5}{2}\beta\right) & \cos\left(\frac{n+5}{2}\gamma\right) \end{vmatrix}}{(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \varphi)(\cos \beta - \cos \varphi)} \times \tag{3}$$

$$\times \frac{\begin{vmatrix} \sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right) & \sin\left(\frac{n+1}{2}\beta\right) & \sin\left(\frac{n+1}{2}\gamma\right) \\ \sin\left(\frac{n+3}{2}\varphi\right) & \sin\left(\frac{n+3}{2}\beta\right) & \sin\left(\frac{n+3}{2}\gamma\right) \\ \sin\left(\frac{n+5}{2}\varphi\right) & \sin\left(\frac{n+5}{2}\beta\right) & \sin\left(\frac{n+5}{2}\gamma\right) \end{vmatrix}}{(\cos \gamma - \cos \beta)(\cos \gamma - \cos \varphi)(\cos \beta - \cos \varphi)}.$$

Пусть $\varphi \neq \arccos(a_0) := \varphi_0$. Тогда при $\varphi \in (0, \varphi_0) \cup (\varphi_0, \pi)$ уравнение $\det T_n(a - g(\varphi)) = 0$ эквивалентно следующим двум уравнениям:

$$\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right) & \cos\left(\frac{n+1}{2}\beta\right) & \cos\left(\frac{n+1}{2}\gamma\right) \\ \cos\left(\frac{n+3}{2}\varphi\right) & \cos\left(\frac{n+3}{2}\beta\right) & \cos\left(\frac{n+3}{2}\gamma\right) \\ \cos\left(\frac{n+5}{2}\varphi\right) & \cos\left(\frac{n+5}{2}\beta\right) & \cos\left(\frac{n+5}{2}\gamma\right) \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

$$\begin{vmatrix} \sin\left(\frac{n+1}{2}\varphi\right) & \sin\left(\frac{n+1}{2}\beta\right) & \sin\left(\frac{n+1}{2}\gamma\right) \\ \sin\left(\frac{n+3}{2}\varphi\right) & \sin\left(\frac{n+3}{2}\beta\right) & \sin\left(\frac{n+3}{2}\gamma\right) \\ \sin\left(\frac{n+5}{2}\varphi\right) & \sin\left(\frac{n+5}{2}\beta\right) & \sin\left(\frac{n+5}{2}\gamma\right) \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Уравнение (4) эквивалентно уравнению

$$\tan\left(\frac{n+3}{2}\right) = f(\varphi, n), \tag{6}$$

где

$$f(\varphi, n) = C_1(\varphi)\text{tg}\left(\frac{n+3}{2}\gamma\right) - C_2(\varphi)\text{tg}\left(\frac{n+3}{2}\beta\right),$$

а уравнение (5) эквивалентно

$$\text{ctg}\left(\frac{n+3}{2}\right) = -h(\varphi, n), \tag{7}$$

где

$$h(\varphi, n) = -C_1(\varphi)\frac{1}{\text{tg}\left(\frac{n+3}{2}\gamma\right)} + C_2(\varphi)\frac{1}{\text{tg}\left(\frac{n+3}{2}\beta\right)}.$$

Теорема 1. Пусть $\lambda = g(\varphi)$ и $\varphi \in (0, \varphi_0) \cup (\varphi_0, \pi)$. Тогда уравнение $\det T_n(a - g(\varphi)) = 0$ эквивалентно следующему набору уравнений:

$$\varphi = \frac{2}{n+3} \left[\pi j + \operatorname{arctg} f(\varphi, n) \right], \quad j \in \left\{ 1, 2, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right] \right\}, \quad (8)$$

$$\varphi = \frac{2}{n+3} \left[\pi j + \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} h(\varphi, n) \right], \quad j \in \left\{ 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2} \right] \right\}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} f(\varphi, n) &= C_1(\varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{n+3}{2} \gamma \right) - C_2(\varphi) \operatorname{tg} \left(\frac{n+3}{2} \beta \right), \\ h(\varphi, n) &= -C_1(\varphi) \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{n+3}{2} \gamma \right)} + C_2(\varphi) \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{n+3}{2} \beta \right)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Замечание 1. Заметим, что функции $f(\varphi, n)$ и $h(\varphi, n)$ являются вещественнозначными.

Введем обозначения $d_m := \pi m / (n+3)$.

Теорема 2.

- На каждом из интервалов $\Delta_{2j} = (d_{2j-1}, d_{2j+1})$, для которых $\varphi_0 \notin \Delta_{2j}$, уравнение (8) имеет хотя бы один корень.

- На каждом из интервалов $\Delta_{2j+1} = (d_{2j}, d_{2j+2})$, для которых $\varphi_0 \notin \Delta_{2j}$, уравнение (9) имеет хотя бы один корень.

Теорема 3. Пусть $\varphi_0 \in \Delta_{2j}$, тогда

- если $\varphi_0 > d_{2j}$, уравнение (8) имеет корень на интервале (d_{2j-1}, d_{2j}) ;
- если $\varphi_0 < d_{2j}$, уравнение (8) имеет корень на интервале (d_{2j}, d_{2j+1}) ;
- если $\varphi_0 = d_{2j} > \pi/2$, уравнение (8) имеет корень на интервале (d_{2j}, d_{2j+1}) ;
- если $\varphi_0 = d_{2j} < \pi/2$, уравнение (8) имеет корень на интервале (d_{2j-1}, d_{2j}) .

Пусть $\varphi_0 \in \Delta_{2j+1}$, тогда

- если $\varphi_0 > d_{2j+1}$, уравнение (9) имеет корень на интервале (d_{2j}, d_{2j+1}) ;
- если $\varphi_0 < d_{2j+1}$, уравнение (9) имеет корень на интервале (d_{2j+1}, d_{2j+2}) ;
- если $\varphi_0 = d_{2j+1} > \pi/2$, уравнение (9) имеет корень на интервале (d_{2j+1}, d_{2j+2}) ;
- если $\varphi_0 = d_{2j+1} < \pi/2$, уравнение (9) имеет корень на интервале (d_{2j}, d_{2j+1}) .

Если $\varphi_0 = d_m = \pi/2$, то $\lambda_m = 0$ — собственное значение.

Замечание 2. В теореме 3 были локализованы не менее n собственных значений (точнее их образов), но поскольку матрица порядка n , то это — все собственные значения.

Теорема 4. Пусть $a(t) = (t - 2a_0 + 1/t)^3$. Пусть для заданного n

$$m \notin \left(\frac{\varphi_0(n+3)}{\pi} - \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} + 1 \right), \frac{\varphi_0(n+3)}{\pi} + \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} - 1 \right) \right),$$

тогда

$$1) \quad \varphi_m = \varphi_{2j-1} = d_{2j} + \frac{2u_{1,j}^*}{n+3} + \frac{4u_{2,j}^*}{(n+3)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (11)$$

где

$$u_{1,j}^* = \operatorname{sign}(d_{2j} - \varphi_0) \operatorname{arctg} \left(-i (C_1(d_{2j}) + C_2(d_{2j})) \right)$$

и

$$u_{2,j}^* = -i \operatorname{sign}(d_{2j} - \varphi_0) \frac{C_1'(d_{2j}) + C_2'(d_{2j})}{1 + (-iC_1(d_{2j}) - iC_2(d_{2j}))^2};$$

$$2) \quad \varphi_m = \varphi_{2j} = d_{2j+1} + \frac{2w_{1,j}^*}{n+3} + \frac{4w_{2,j}^*}{(n+3)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (12)$$

где

$$w_{1,j}^* = \text{sign}(d_{2j+1} - \varphi_0) \arctg(-i(C_1(d_{2j}) + C_2(d_{2j})))$$

и

$$w_{2,j}^* = -i \text{sign}(d_{2j+1} - \varphi_0) \frac{C_1'(d_{2j}) + C_2'(d_{2j})}{1 + (-iC_1(d_{2j}) - iC_2(d_{2j}))^2}.$$

Введем новые функции $X_1^{(1)} = X_1^{(1)}(u_1, j, n)$, $X_2^{(1)} = X_2^{(1)}(w_1, j, n)$, $X_3^{(1)} = X_3^{(1)}(w_1, j, n)$, $R^{(1)}(u_1) = R^{(1)}(u_1, j, n)$:

$$X_1^{(1)} = C_1(d_{2j}) \text{tg} \left(\frac{n+3}{2} \gamma(d_{2j}) + \gamma'(d_{2j}) u_1 \right) - C_2(d_{2j}) \text{tg} \left(\frac{n+3}{2} \beta(d_{2j}) + \beta'(d_{2j}) u_1 \right),$$

$$X_2^{(1)} = \left[\frac{C_1(d_{2j}) \gamma''(d_{2j}) u_1^2}{2 \cos^2(q\gamma(d_{2j}) + \gamma'(d_{2j}) u_1)} + \text{tg}(q\gamma(d_{2j}) + \gamma'(d_{2j}) u_1) C_1'(d_{2j}) u_1 \right] - \left[\frac{C_2(d_{2j}) \beta''(d_{2j}) u_1^2}{2 \cos^2(q\beta(d_{2j}) + \beta'(d_{2j}) u_1)} + \text{tg}(q\beta(d_{2j}) + \beta'(d_{2j}) u_1) C_2'(d_{2j}) u_1 \right],$$

$$X_3^{(1)} = \frac{C_1(d_{2j}) \gamma'(d_{2j})}{\cos^2(q\gamma(d_{2j}) + \gamma'(d_{2j}) u_1)} - \frac{C_2(d_{2j}) \beta'(d_{2j})}{\cos^2(q\beta(d_{2j}) + \beta'(d_{2j}) u_1)},$$

$$R^{(1)}(u_1) = \frac{X_2^{(1)}}{1 + (X_1^{(1)})^2 - X_3^{(1)}},$$

а также функции $X_1^{(2)} = X_1^{(2)}(w_1, j, n)$, $X_2^{(2)} = X_2^{(2)}(w_1, j, n)$, $X_3^{(2)} = X_3^{(2)}(w_1, j, n)$, $R^{(2)}(w_1) = R^{(2)}(w_1, j, n)$:

$$X_1^{(2)} = -\frac{C_1(d_{2j})}{\text{tg} \left(\frac{n+3}{2} \gamma(d_{2j}) + \gamma'(d_{2j}) w_1 \right)} + \frac{C_2(d_{2j})}{\text{tg} \left(\frac{n+3}{2} \beta(d_{2j}) + \beta'(d_{2j}) w_1 \right)},$$

$$X_2^{(2)} = \left[\frac{C_1(d_{2j}) \gamma''(d_{2j}) w_1^2}{2 \sin^2(q\gamma(d_{2j}) + \gamma'(d_{2j}) w_1)} - \frac{C_1'(d_{2j}) w_1}{\text{tg}(q\gamma(d_{2j}) + \gamma'(d_{2j}) w_1)} \right] + \left[-\frac{C_2(d_{2j}) \beta''(d_{2j}) w_1^2}{2 \sin^2(q\beta(d_{2j}) + \beta'(d_{2j}) w_1)} + \frac{C_2'(d_{2j}) w_1}{\text{tg}(q\beta(d_{2j}) + \beta'(d_{2j}) w_1)} \right],$$

$$X_3^{(2)} = \frac{C_1(d_{2j}) \gamma'(d_{2j})}{\sin^2(q\gamma(d_{2j}) + \gamma'(d_{2j}) w_1)} - \frac{C_2(d_{2j}) \beta'(d_{2j})}{\sin^2(q\beta(d_{2j}) + \beta'(d_{2j}) w_1)},$$

$$R^{(2)}(w_1) = \frac{X_2^{(2)}}{1 + (X_1^{(2)})^2 - X_3^{(2)}}.$$

Теорема 5. Пусть $a(t) = (t - 2 + 1/t)^3$. Пусть для заданного n

$$m \in \left(\frac{\varphi_0(n+3)}{\pi} - \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} + 1 \right), \frac{\varphi_0(n+3)}{\pi} + \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} - 1 \right) \right)$$

и $\varphi_0 \notin \Delta_m$, тогда, начиная с некоторого n ,

$$1) \quad \varphi_m = \varphi_{2j-1} = d_{2j} + \frac{2u_{1,j}^*}{n+3} + \frac{4u_{2,j}^*}{(n+3)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \tag{13}$$

где $u_{1,j}^*$ – решение уравнения $u_1 = \operatorname{arctg}(X_1^{(1)}(u_1))$ и $u_{2,j}^* = R^{(1)}(u_{1,j}^*)$;

$$2) \quad \varphi_m = \varphi_{2j} = d_{2j+1} + \frac{2w_{1,j}^*}{n+3} + \frac{4w_{2,j}^*}{(n+3)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (14)$$

где $w_{1,j}^*$ – решение уравнения $w_1 = \operatorname{arctg}(X_1^{(2)}(w_1))$ и $w_{2,j}^* = R^{(2)}(w_{1,j}^*)$.

Замечание 3. Заметим, что в случае $\varphi_0 \in \Delta_m$, для нахождения φ_m нельзя использовать теоремы 4 и 5 однако положив $\varphi_m = d_m$, получим что $\lambda_m = g(\varphi_m) + O(1/n^3)$.

Теорема 6. Пусть $a(t) = (t - 2 + 1/t)^3$. Тогда, начиная с некоторого n ,

$$\lambda_{2j-1}^{(n)} = g(d_{1,j}) + g'(d_{1,j}) \frac{2u_{1,j}^*}{n+3} + \frac{4u_{2,j}^* g'(d_{1,j}) + 2(u_{1,j}^*)^2 g''(d_{1,j})}{(n+3)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (15)$$

$$\lambda_{2j}^{(n)} = g(d_{2,j}) + g'(d_{2,j}) \frac{2w_{1,j}^*}{n+3} + \frac{4w_{2,j}^* g'(d_{2,j}) + 2(w_{1,j}^*)^2 g''(d_{2,j})}{(n+3)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad (16)$$

$u_{1,j}^*$, $u_{2,j}^*$, $w_{1,j}^*$ и $w_{2,j}^*$ определяются так же, как в теоремах 4–5, в зависимости от номера собственного значения m .

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Все численные эксперименты проводились в математическом пакете Maple. Во всех расчетах все значения были найдены с точностью в 50 знаков. Под точным собственными значениями будем подразумевать собственные значения, рассчитанные с использованием встроенной функции Maple. В настоящей работе нахождение собственных значений сводилось к решению двух наборов уравнений (в зависимости от четности собственных значений). Каждое из уравнений решалось относительно параметра φ и имело единственный корень φ_m , и каждый такой корень соответствует единственному собственному значению, которое может быть найдено простой подстановкой $\lambda_m = g(\varphi_m)$. Здесь m – номера собственных значений, упорядоченных по убыванию. В работе приведены явные формулы для корней φ_m с точностью $O(1/n^3)$. Обозначим через φ_m^* приближенные корни, посчитанные по формулам (11), (12), (13), (14), $\lambda_m^* = g(\varphi_m^*)$ – соответствующие им, приближенно вычисленные собственные значения через простую подстановку, через $\bar{\lambda}_m$ – собственные значения приближенно вычисленные по формулам (15) и (16), а через φ_m и λ_m их точные значения. Введем следующие обозначения:

$$\Delta\varphi_m = |\varphi_m^* - \varphi_m|, \quad \Delta\lambda_m = |\lambda_m^* - \lambda_m|, \quad \Delta_r\lambda_m = \left| \frac{\lambda_m^* - \lambda_m}{\lambda_m} \right|, \quad \Delta\bar{\lambda}_m = |\bar{\lambda}_m - \lambda_m|, \quad \Delta_r\bar{\lambda}_m = \left| \frac{\bar{\lambda}_m - \lambda_m}{\lambda_m} \right|.$$

Рассмотрим случай, когда $a_0 = 1/2$. На фиг. 1–3 изображены нормированные порядком остатка погрешности, т.е. $\Delta\varphi_m(n+3)^3$, $\Delta\lambda_m(n+3)^3$ и $\Delta\bar{\lambda}_m(n+3)^3$ соответственно, причем на одном изображении графики для различных размеров матрицы. Заметим, что графики наложились друг на друга, что косвенно говорит о том, что остаток действительно имеет порядок $1/(n+3)^3$.

В табл. 1 приведены максимальные отклонения корней $\Delta\varphi = \max_m \Delta\varphi_m$, а также максимальные абсолютные и относительные отклонения собственных значений $\Delta\lambda = \max_m \Delta\lambda_m$, $\Delta_r\lambda = \max_m \Delta_r\lambda_m$ при условии

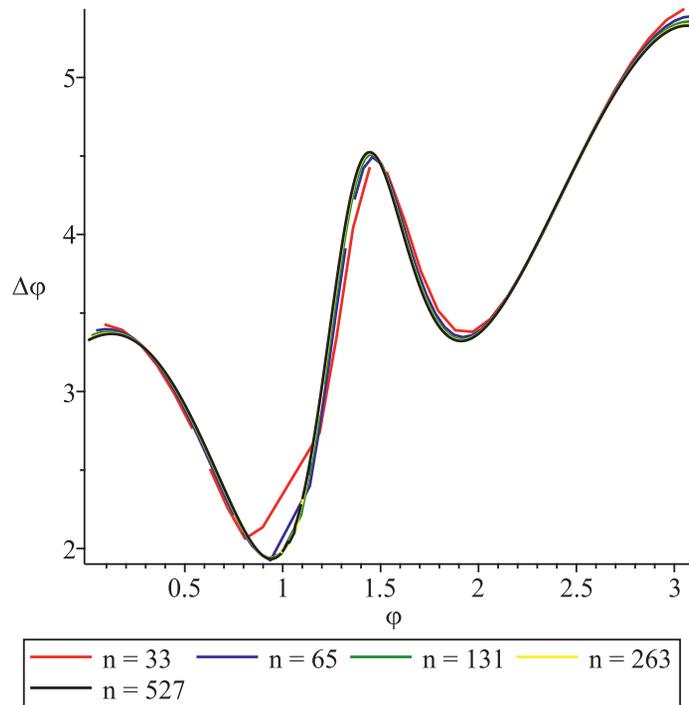
$$m \notin \left(\frac{\varphi_0(n+3)}{\pi} - \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} + 1 \right), \frac{\varphi_0(n+3)}{\pi} + \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} - 1 \right) \right).$$

В табл. 2 приведены аналогичные результаты только при условии $\varphi_0 \notin \Delta_m$ и

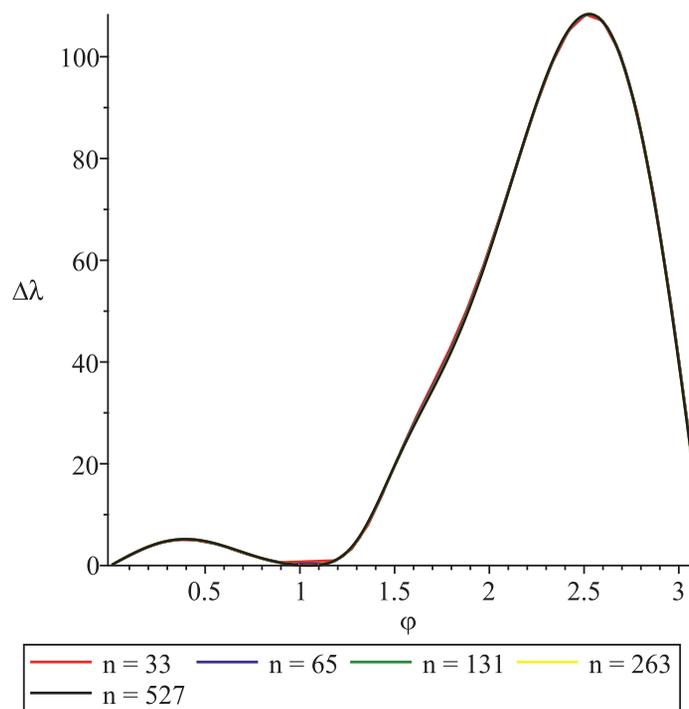
$$m \in \left(\frac{\varphi_0(n+3)}{\pi} - \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} + 1 \right), \frac{\varphi_0(n+3)}{\pi} + \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} - 1 \right) \right).$$

В табл. 3 приведены максимальные абсолютные и относительные отклонения собственных значений, посчитанных по формулам (15) и (16) $\Delta\bar{\lambda} = \max_m \Delta\bar{\lambda}_m$, $\Delta_r\bar{\lambda} = \max_m \Delta_r\bar{\lambda}_m$, при условии

$$m \notin \left(\frac{\varphi_0(n+3)}{\pi} - \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} + 1 \right), \frac{\varphi_0(n+3)}{\pi} + \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} - 1 \right) \right).$$



Фиг. 1. Абсолютная нормированная погрешность корней $\phi_m(n+3)^3$.

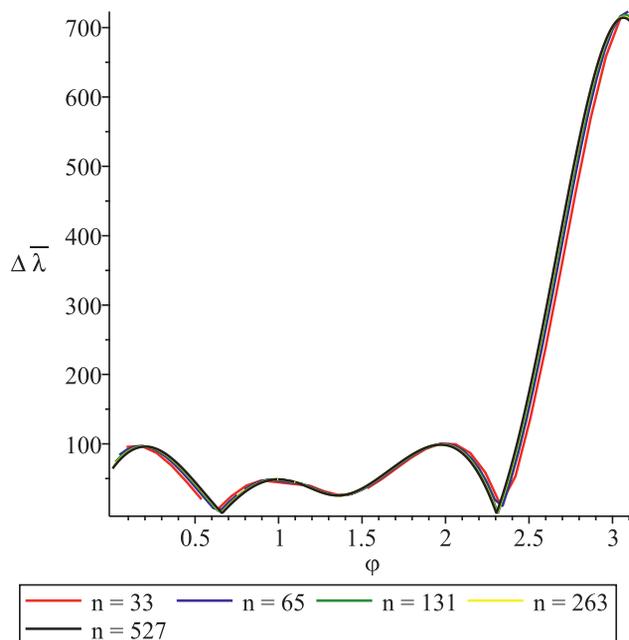


Фиг. 2. Абсолютная нормированная погрешность собственных значений $\lambda_m(n+3)^3$.

В табл. 4 приведены аналогичные результаты только при условии $\phi_0 \notin \Delta_m$ и

$$m \in \left(\frac{\phi_0(n+3)}{\pi} - \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} + 1 \right), \frac{\phi_0(n+3)}{\pi} + \left(\frac{4 \ln(n+3)}{\pi} - 1 \right) \right).$$

В табл. 5 приведены максимальные погрешности, когда $\phi_0 \in d_m$, в этом случае полагалось $\phi_m^* = d_m$, таких m не более двух.



Фиг. 3. Абсолютная нормированная погрешность собственных значений $\lambda_m(n+3)^3$.

Таблица 1. Максимальные отклонения при использовании формул (11) и (12)

n	33	65	131	263	527
$\Delta\varphi$	1.2×10^{-4}	1.7×10^{-5}	2.2×10^{-6}	2.8×10^{-7}	3.5×10^{-8}
$\Delta\lambda$	2.3×10^{-3}	3.4×10^{-4}	4.5×10^{-5}	5.8×10^{-6}	7.3×10^{-7}
$\Delta_r\lambda$	6.1×10^{-4}	1.3×10^{-4}	2.4×10^{-5}	4.4×10^{-6}	8.9×10^{-7}

Таблица 2. Максимальные отклонения при использовании формул (13) и (14)

n	33	65	131	263	527
$\Delta\varphi$	9×10^{-5}	1.2×10^{-5}	1.2×10^{-6}	1.3×10^{-7}	1.5×10^{-8}
$\Delta\lambda$	4.8×10^{-4}	1.8×10^{-5}	4.1×10^{-7}	1.5×10^{-8}	5.6×10^{-10}
$\Delta_r\lambda$	1.3×10^{-3}	3.2×10^{-4}	8×10^{-5}	2.2×10^{-5}	5.6×10^{-6}

Таблица 3. Максимальные отклонения при использовании формул (15) и (16)

n	33	65	131	263	527
$\Delta\lambda$	1.5×10^{-2}	2.3×10^{-3}	3×10^{-4}	3.8×10^{-5}	4.8×10^{-6}
$\Delta_r\lambda$	2.1×10^{-3}	8.4×10^{-4}	7.8×10^{-4}	5.6×10^{-4}	3.9×10^{-4}

Таблица 4. Максимальные отклонения при использовании формул (15) и (16)

n	33	65	131	263	527
$\Delta\lambda$	1×10^{-3}	1.5×10^{-4}	2×10^{-5}	2.6×10^{-6}	3.3×10^{-7}
$\Delta_r\lambda$	6.8×10^{-2}	2.5×10^{-2}	2.5×10^{-2}	2.4×10^{-2}	2.4×10^{-2}

Таблица 5. Максимальные отклонения при использовании формул (15) и (16)

n	33	65	131	263	527
$\Delta\lambda$	1.5×10^{-4}	1.1×10^{-3}	1.4×10^{-4}	1.8×10^{-5}	2.3×10^{-6}

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stukopin V., Grudsky S., Voronin I., Barrera M.* Asymptotics of the eigenvalues of seven-diagonal Toeplitz matrices of a special form // arXive. 2021. Nov. 2111.07196.
2. *Savage L. J., Grenander U., Szego G.* Toeplitz forms and their Applications // J. Am. Statistic. Associat. 1958. V. 53. N 283. P. 763.
3. *Schmidt P., Spitzer F.* The Toeplitz matrices of an arbitrary Laurent polynomial // Math. Scandinavica. 1960. V. 8. P. 15.
4. *Widom H.* Eigenvalue distribution of nonselfadjoint Toeplitz matrices and the asymptotics of Toeplitz determinants in the case of nonvanishing index // Oper. Theory Adv. Appl. 1990. V. 48.
5. *Bottcher A., Grudsky S. M.* Spectral properties of banded Toeplitz matrices // Soc. Industrial and Appl. Math. 2005.
6. *Bottcher A., Silbermann B.* Introduction to large truncated Toeplitz matrices. Springer New York, 1999.
7. *Deift P., It's A., Krasovsky I.* Toeplitz Matrices and Toeplitz determinants under the impetus of the ising model: some history and some recent results // Comm. on Pure and Appl. Math. 2013. V. 66, N 9. P. 1360–1438.
8. *Deift P., It's A., Krasovsky I.* Eigenvalues of Toeplitz matrices in the bulk of the spectrum // Bull. Inst. Math. Acad. Sin. 2012. V. 7. P. 437–461.
9. *Kadano L. P.* Spin-spin correlations in the two-dimensional ising model // Il Nuovo Cimento B Ser. 10. 1966. V. 44. N 2. P. 276–305.
10. *McCoy B., Wu T.* The Two-Dimensional Ising Model, 1973.
11. *Batalshchikov A. A., Grudsky S. M., Stukopin V. A.* Asymptotics of eigenvalues of symmetric Toeplitz band matrices // Linear Algebra and its Applications. 2015. V. 469. P. 464–486. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379514007691>
12. *Szego G.* Ein Grenzwertsatz uber die Toeplitzschen Determinanten einer reellen positiven Funktion // Math. Annalen. 1915. V. 76. N 4. P. 490–503.
13. *Eloua M.* On a relationship between Chebyshev polynomials and Toeplitz determinants // Appl. Math. Comput. 2014. V. 229. P. 27–33.

ON THE ASYMPTOTICS OF EIGENVALUES OF SEMIDIAGONAL
TOEPLITZ MATRICES

I. V. Voronin*

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Institutsky Lane., 9, Dolgoprudnyi, Moscow oblast, 141700 Russia

*e-mail: Voronin.I@phystech.edu

Received 02 September, 2023

Revised 12 February, 2024

Accepted 06 March, 2024

Abstract. Asymptotic formulas are constructed that allow a uniform estimate of the remainder term for Toeplitz matrices of size n for $n \rightarrow \infty$ in the case when their symbol $a(t)$ has the form $a(t) = (t - 2a_0 + t^{-1})^3$. This result is a generalization of the result of Stukopin et al. (2021), in which similar asymptotic formulas were obtained for a diagonal Toeplitz matrix with a symbol of a similar form when $a_0 = 1$. The obtained formulas have high computational efficiency and generalize the results of the classical works of Parterre and Widom on the asymptotics of extreme eigenvalues.

Keywords: Toeplitz matrices, eigenvectors, asymptotic expansions.