ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ РИКЬЕ–НЕЙМАНА ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

© 2024 г. В. В. Карачик^{1,*}

¹454080 Челябинск, пр-т Ленина, 76, ЮУрГУ (НИУ), Россия
*e-mail: karachik@susu.ru

Поступила в редакцию 10.01.2023 г.
Переработанный вариант 10.01.2023 г.
Принята к публикации 06.02.2024 г.

Строится функция Грина задачи Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре и приводится интегральное представление решений задачи Рикье–Неймана. Приведены два примера. Библ. 26.

Ключевые слова: полигармоническое уравнение, задача Рикье–Неймана, функция Грина.

DOI: 10.31857/S0044466924050089, **EDN:** YDFLBA

1. ВВЕДЕНИЕ

Много работ посвящено построению функции Грина в явном виде для различных классических краевых задач. Функции Грина бигармонических задач Дирихле, Неймана, Робина и др. в двумерном диске построены в [1] с помощью гармонических функций Грина задачи Дирихле, а в [2], [3] найдено явное представление гармонической функции Робина. Явная форма функции Грина в секторе для бигармонического и тригармонического уравнений приведена в работах [4], [5]. Статьи [6], [7] посвящены построению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в единичном шаре. В [8] дано явное представление функции Грина задачи Робина для уравнения Пуассона, а в [9] приведен явный вид функции Грина для 3-гармонического уравнения в единичном шаре.

Условия разрешимости некоторых вариантов задач для бигармонического уравнения в шаре были получены также в работах [10], [11]. В [12] исследована фредгольмовость и индекс обобщенной задачи Неймана, содержащей степени нормальных производных в граничных условиях. В [13] приводятся функции Грина задач Навье [14] и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре, а в [15] исследована разрешимость четырех нелокальных задач для бигармонического уравнения с инволюцией.

Хорошо известно, что функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ при $n \geq 2$ имеет вид

$$G_2(x, \xi) = E(x, \xi) - E\left(\frac{x}{|x|}, |x|\xi\right), \quad (1)$$

где $E(x, \xi)$ – элементарное решение уравнения Лапласа (см. [16]). В работах [9], [17], [18] были определены элементарные решения бигармонического и тригармонического уравнений $E_4(x, \xi)$, $E_6(x, \xi)$ и найдены функции Грина соответствующих задач Дирихле в S . В [19] была построена функция Грина задачи Неймана для уравнения Пуассона в S

$$\mathcal{N}_2(x, \xi) = E_2(x, \xi) - E_0(x, \xi), \quad (2)$$

где гармоническая по $x, \xi \in S$ функция $E_0(x, \xi)$ записывается в форме

$$E_0(x, \xi) = \int_0^1 \left(\hat{E}_2\left(\frac{x}{|x|}, t|x|\xi\right) + 1 \right) \frac{dt}{t}$$

и $\hat{E}_2(x, \xi) = \Lambda_x E_2(x, \xi)$, где обозначено $\Lambda u = \sum_{i=1}^n x_i u_{x_i}$, а индекс x указывает, что оператор Λ применяется по переменным x . Нетрудно заметить, что $\Lambda u = \partial u / \partial \nu$ на ∂S . Поскольку $\hat{E}_2(x, \xi) = -(|x|^2 - x \cdot \xi) / |x - \xi|^n$, то функция

$$\hat{E}_2\left(\frac{x}{|x|}, t|x|\xi\right) = -\frac{1 - (x \cdot \xi)t}{(1 - 2t(x \cdot \xi) + |x|^2|\xi|^2t^2)^{n/2}}$$

симметрична, и значит, функция $E_0(x, \xi)$, а следовательно, и функция $\mathcal{N}_2(x, \xi)$ тоже симметричны. Функция $\mathcal{N}_2(x, \xi)$ обладает свойствами (см. [8, теорема 3.1] и [13, теорема 3])

$$\Lambda_x \mathcal{N}_2(x, \xi) = \Lambda_x E_2(x, \xi) - (\Lambda_x E_2) \left(\frac{x}{|x|}, |x| \xi \right) - 1, \quad x, \xi \in S, x \neq \xi, \quad (3)$$

$$\Lambda_x \mathcal{N}_2(x, \xi) \Big|_{\xi \in \partial S} = - \frac{\partial G_2(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} - 1, \quad x \in S,$$

а поэтому верны равенства

$$\begin{aligned} \int_S \frac{\partial \mathcal{N}_2(x, \xi)}{\partial \nu_x} f(\xi) d\xi \Big|_{x \in \partial S} &= - \int_S f(\xi) d\xi, \\ \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\partial \mathcal{N}_2(x, \xi)}{\partial \nu_x} \Psi(\xi) ds_\xi \Big|_{x \in \partial S} &= \Psi(x) \Big|_{\partial S} - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \Psi(\xi) ds_\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

В [13, теорема 3] показано, что решение задачи Неймана для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x) = f(x), \quad x \in S; \quad \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \Psi(x), \quad x \in \partial S,$$

при выполнении известного условия $\int_{\partial S} \Psi(\xi) ds_\xi = \int_S f(\xi) d\xi$ записывается в виде

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_2(x, \xi) \Psi(\xi) ds_\xi - \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, \xi) f(\xi) d\xi + C.$$

Задача Неймана для полигармонического уравнения исследована в работах [20], [21], а в [22] приведено решение этой задачи.

В настоящей работе определяется элементарное решение полигармонического уравнения и в леммах 1 и 2 приводятся его свойства. В теореме 1 дается интегральное представление функций класса $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$ в ограниченной области с гладкой границей. Далее исследуется задача Рикье–Неймана (см. [23]). В теореме 2 из разд. 3 определяется функция Грина задачи Рикье–Неймана, а в теореме 3 из разд. 4 находится интегральное представление решения этой задачи. В теореме 4 доказывается, что функция, найденная в теореме 3, действительно представляет собой решение задачи Рикье–Неймана. В теореме 5 из разд. 5 рассматривается частный случай задачи Рикье–Неймана для однородного уравнения и дается пример решения задачи при простых граничных данных.

2. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РЕШЕНИЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда множество $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ можно разбить на два непересекающихся множества $\mathbb{N}_m = \{n \in \mathbb{N} : n > 2m > 1\} \cup (2\mathbb{N} + 1)$ и дополнение к нему $\mathbb{N}_m^c = \{2, 4, \dots, 2m\}$. Поскольку множество $\mathbb{N}_m^c$ – конечное, то $\mathbb{N}_m$ – бесконечное. Ясно, что $\mathbb{N}_{m-1}^c \subset \mathbb{N}_m^c$, а поэтому $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_{m-1}$. Определим элементарное решение m -гармонического уравнения $\Delta^m u = 0$ в виде

$$E_{2m}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m (2, 2)_{m-1}}, & n \in \mathbb{N}_m, \\ \frac{(-1)^m |x - \xi|^{2m-n}}{(2-n, 2)_m^* (2, 2)_{m-1}} \left(\ln |x - \xi| - \sum_{k=1}^{m-n/2} \frac{1}{2k} - \sum_{k=n/2}^{m-1} \frac{1}{2k} \right), & n \in \mathbb{N}_m^c, \end{cases} \quad (5)$$

где $(a, b)_k = a(a+b) \cdots (a+kb-b)$ – обобщенный символ Похгаммера с соглашением $(a, b)_0 = 1$, а символ $(a, b)_k^*$ означает, что если среди сомножителей $a, (a+b), \dots, (a+kb-b)$, входящих в $(a, b)_k$, есть 0, то его следует заменить на 1, например, $(-2, 2)_3^* = (-2) \cdot 1 \cdot 2 = -4$. Кроме того, если в суммах, входящих в (5), верхний индекс становится меньше нижнего, то сумма считается равной нулю. Заметим, что $(2-n, 2)_m = (2-n)(4-n) \cdots (2m-n) \neq 0$ при $n \in \mathbb{N}_m$, и значит, первая часть формулы (5) определена корректно.

Справедливы следующие простые утверждения.

Лемма 1. Функция $E_{2m}(x, \xi)$ совпадает с элементарными функциями $E(x, \xi)$, $E_4(x, \xi)$ и $E_6(x, \xi)$ при $m = 1$, $m = 2$ и $m = 3$ соответственно.

Лемма 2. Симметричная функция $E_{2m}(x, \xi)$, определенная при $x \neq \xi$, удовлетворяет равенствам

$$\Delta_\xi E_{2m}(x, \xi) = -E_{2(m-1)}(x, \xi), \quad \Delta_x E_{2m}(x, \xi) = 0.$$

Приведем интегральное представление функции класса $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей ∂D с помощью $E_{2m}(x, \xi)$.

Теорема 1. Для функции $u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D})$ имеет место следующее интегральное представление:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left(E_{2k+2}(x, \xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} - \frac{\partial E_{2k+2}(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^k u \right) ds_\xi + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_D E_{2m}(x, \xi) \Delta^m u(\xi) d\xi, \quad (6)$$

где $\omega_n = |\partial S|$ – площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, ν – внешняя единичная нормаль к ∂D .

Доказательства этих утверждений опустим. Пусть $n \geq 3$. В рассуждениях, приводимых ниже, необходима также следующая функция, задаваемая рекуррентно:

$$E_{2k}^r(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S E_{2k-2}^r(x, y) E_2(y, \xi) dy, \quad k \geq 2, \quad (7)$$

где $E_2^r(x, \xi) = E_2(x, \xi)$. Например,

$$E_4^r(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S E_2(x, y) E_2(y, \xi) dy, \quad E_6^r(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n^2} \int_S E_2(x, \eta) \int_S E_2(\eta, y) E_2(y, \xi) dy d\eta.$$

Лемма 3. Функция $E_{2m}^r(x, \xi)$ ($m > 1$) определена при $\xi, x \in S, \xi \neq x$, и имеет, быть может, особенность при $\xi = x$ такую, что $E_{2m}^r(x, \xi) \leq C|x - \xi|^{3-n}$, где C – некоторая положительная константа. При $\xi \neq x$ справедливо равенство $\Delta E_{2m}^r(x, \xi) = -E_{2m-2}^r(x, \xi)$.

По теореме о стирании особенностей (см. [24]) функция $h_{2k}(x, \xi) = E_{2k}(x, \xi) - E_{2k}^r(x, \xi)$ является k -гармонической в S по ξ .

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ РИКЬЕ–НЕЙМАНА

Задача Рикье–Неймана (см. [23]) (в [1] она называется также задачей Неймана-2) заключается в нахождении функции $u \in C^{2m}(S) \cap C^{2m-1}(\bar{S})$, являющейся решением следующей граничной задачи для неоднородного полигармонического уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta^m u(x) &= f(x), \quad x \in S, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} &= \varphi_0(\xi), \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi_1(\xi), \dots, \quad \frac{\partial \Delta^{m-1} u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi_{m-1}(\xi), \quad \xi \in \partial S. \end{aligned} \quad (8)$$

Определение 1. Функцию вида

$$\mathcal{N}_{2m}(x, \xi) = E_{2m}(x, \xi) + g_{2m}^n(x, \xi), \quad m \geq 1, \quad (9)$$

где $g_{2m}^n(x, \xi)$ – есть m -гармоническая функция по переменным $x, \xi \in S$ такая, что

$$\frac{\partial \mathcal{N}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{\xi \in \partial S} = \dots = \frac{\partial \Delta_\xi^{m-2} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{\xi \in \partial S} = 0, \quad \frac{\partial \Delta_\xi^{m-1} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{\xi \in \partial S} = (-1)^m, \quad (10)$$

где $x \in S$ назовем функцией Грина задачи Рикье–Неймана (8).

Теорема 2. Функция $\mathcal{N}_{2m}(x, \xi)$ при $\xi, x \in S$ и $m > 1$, определяемая рекуррентно равенством

$$\mathcal{N}_{2m}(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \left(\int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) \mathcal{N}_2(y, \xi) dy - \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) dy \cdot \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy \right), \quad (11)$$

где $\tau_n = |S|$, а $\mathcal{N}_2(x, y)$ – функция Грина задачи Неймана из (2), является функцией Грина задачи Рикье–Неймана (8). Функция $\mathcal{N}_{2m}(x, \xi)$ обладает свойством

$$\Lambda_x \mathcal{N}_{2k}(x, \xi) \Big|_{x \in \partial S} = 0, \quad k > 1, \quad \Lambda_x \mathcal{N}_2(x, \xi) \Big|_{x \in \partial S} = -1, \quad \xi \in S, \quad (12)$$

а $g_{2m}^n(x, \xi)$ из представления (9) имеет непрерывные производные по ξ в $\bar{S}$ при $x \in S$.

Доказательство. Проведем доказательство теоремы методом математической индукции по m . При $m = 2$ утверждение теоремы доказано в [13, Теорема 4]. В этом случае из представления

$$\mathcal{N}_4(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \left(\int_S \mathcal{N}_2(x, y) \mathcal{N}_2(y, \xi) dy - \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) dy \cdot \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy \right),$$

используя (2), нетрудно получить равенство

$$\mathcal{N}_4(x, \xi) = E_4^r(x, \xi) + \hat{g}_4^n(x, \xi),$$

где бигармоническая функция $\hat{g}_4^n(x, \xi)$ определяется как

$$\begin{aligned} \hat{g}_4^n(x, \xi) = & -\frac{1}{\omega_n} \left(\int_S E_2(x, y) E_0(y, \xi) dy + \int_S E_0(x, y) E_2(y, \xi) dy - \right. \\ & \left. - \int_S E_0(x, y) E_0(y, \xi) dy + \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) dy \cdot \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy \right). \end{aligned}$$

Действительно, первый и третий интегралы в полученной формуле – гармонические функции по ξ , поскольку особенность в первом интеграле интегрируемая, а дифференцирование эту особенность не увеличивает. Второй и четвертый интегралы, по свойству объемного потенциала, – бигармонические функции по ξ , поскольку гармоническая функция $E_0(x, \xi)$ имеет ограниченные производные по ξ в $\bar{S}$ при $x \in S$. Кроме того, $\hat{g}_4^n(x, \xi)$ в силу особенностей порядка $|\xi - y|^{2-n}$ под интегралами имеет непрерывные производные по ξ в $\bar{S}$ при $x \in S$ (см. [24]). Если вспомнить, что $E_4(x, \xi) = E_4^r(x, \xi) + h_4(x, \xi)$, то будем иметь

$$\mathcal{N}_4(x, \xi) = E_4(x, \xi) + \hat{g}_4^n(x, \xi) - h_4(x, \xi) \equiv E_4(x, \xi) + g_4^n(x, \xi),$$

где $g_4^n(x, \xi)$ в силу свойств $\hat{g}_4^n$ и h_4 имеет ограниченные производные по ξ в $\bar{S}$ при $x \in S$.

Пусть утверждение теоремы верно для некоторого $m \geq 2$. Тогда согласно определению для функции Грина $\mathcal{N}_{2m-2}(x, \xi)$ имеет место представление (9):

$$\mathcal{N}_{2m-2}(x, \xi) = E_{2m-2}(x, \xi) + g_{2m-2}^n(x, \xi),$$

где $g_{2m-2}^n(x, \xi)$ – некоторая $(m - 1)$ -гармоническая функция в S по ξ при $x \in S$, имеющая ограниченные производные по ξ в $\bar{S}$. Если вспомнить функцию $E_{2k}^r(x, \xi)$ из (7) и k -гармоническую функцию $h_{2k}(x, \xi) = E_{2k}(x, \xi) - E_{2k}^r(x, \xi)$, то можем записать

$$\mathcal{N}_{2m-2}(x, \xi) = E_{2m-2}^r(x, \xi) + g_{2m-2}^n(x, \xi) + h_{2m-2}(x, \xi) \equiv E_{2m-2}^r(x, \xi) + \hat{g}_{2m-2}^n(x, \xi). \tag{13}$$

Покажем, что функция

$$\mathcal{N}_{2m}(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \left(\int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) \mathcal{N}_2(y, \xi) dy - \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) dy \cdot \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy \right)$$

при $m \geq 2$ может быть представлена в виде (9). Используя (13) и имея в виду (2), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) = & E_{2m}^r(x, \xi) - \frac{1}{\omega_n} \left(\int_S E_{2m-2}^r(x, y) E_0(y, \xi) dy - \int_S \hat{g}_{2m-2}^n(x, y) E_2(y, \xi) dy + \right. \\ & \left. + \int_S \hat{g}_{2m-2}^n(x, y) E_0(y, \xi) dy + \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) dy \cdot \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy \right), \end{aligned}$$

где функция $E_{2k}^r(x, \xi)$ определена в (7). Оценим интегральные члены в полученном равенстве. Первый и третий интегралы – гармонические функции по ξ (особенность в первом интеграле интегрируемая, а дифференцирование эту особенность не увеличивает). Второй интеграл, по свойству объемного потенциала, является m -гармонической функцией по ξ , поскольку $(m - 1)$ -гармоническая функция $\hat{g}_{2m-2}^n(x, \xi)$ имеет ограниченные производные по ξ в $\bar{S}$ при $x \in S$. Четвертый интеграл, содержащий переменную ξ , является бигармонической функцией в S . Если сумму всех интегральных членов в этом равенстве обозначить через $\hat{g}_{2m}^n(x, \xi)$, то в силу того, что особенности под интегралами имеют порядок не выше $|\xi - y|^{3-n}$ (см. лемму 3), функция $\hat{g}_{2m}^n(x, \xi)$ имеет непрерывные производные по ξ в $\bar{S}$ при $x \in S$. Наконец, если вспомнить, что $h_{2m}(x, \xi) = E_{2m}(x, \xi) - E_{2m}^r(x, \xi)$, то будем иметь (9) при $g_{2m}^n(x, \xi) = \hat{g}_{2m}^n(x, \xi) - h_{2m}(x, \xi)$. Равенство (9) доказано.

Проверим граничные условия для функции $\mathcal{N}_{2m}(x, \xi)$ из определения. В силу симметрии функции $\mathcal{N}_2(x, \xi)$ имеем $\Lambda_\xi \mathcal{N}_2(x, \xi)|_{\xi \in \partial S} = -1$. Поэтому

$$\frac{\partial \mathcal{N}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{\xi \in \partial S} = \Lambda_\xi \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) \Big|_{\xi \in \partial S} = \frac{1}{\omega_n} \left(- \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) dy + \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) dy \cdot \tau_n \right) = 0.$$

При $x \in S$, по свойству объемного потенциала и в силу непрерывной дифференцируемости функции $\mathcal{N}_{2m-2}(x, \xi)$ по $\xi \in S$, но $\xi \neq x$, найдем

$$\Delta_\xi \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) = -\mathcal{N}_{2m-2}(x, \xi) + \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) dy. \tag{14}$$

Поэтому по предположению индукции при $x \in S$ имеем

$$\frac{\partial \Delta_\xi^k \mathcal{N}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{\xi \in \partial S} = - \frac{\partial \Delta_\xi^{k-1} \mathcal{N}_{2m-2}(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{\xi \in \partial S} = 0, \quad k = 1, \dots, m-2,$$

и

$$\frac{\partial \Delta_\xi^{m-1} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{\xi \in \partial S} = - \frac{\partial \Delta_\xi^{m-2} \mathcal{N}_{2m-2}(x, \xi)}{\partial \nu_\xi} \Big|_{\xi \in \partial S} = -(-1)^{m-1} = (-1)^m,$$

что доказывает равенства (10).

Докажем формулу (12) при $k > 1$, поскольку при $k = 1$ она следует из (3). Пусть $k = 2$, тогда в силу слабой особенности функции $\mathcal{N}_2(x, \xi)$, при $x \in \partial S$ и $\xi \in S$ запишем

$$\begin{aligned} \Lambda_x \mathcal{N}_4(x, \xi) &= \frac{1}{\omega_n} \int_S \Lambda_x \mathcal{N}_2(x, y) \mathcal{N}_2(y, \xi) dy - \frac{1}{\tau_n} \int_S \Lambda_x \mathcal{N}_2(x, y) dy \cdot \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy = \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy + \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy = 0. \end{aligned}$$

Поэтому при $k > 2$ и $x \in \partial S$, $\xi \in S$, используя формулу (11), будем иметь

$$\Lambda_x \mathcal{N}_{2k}(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \Lambda_x \mathcal{N}_{2k-2}(x, y) \mathcal{N}_2(y, \xi) dy - \frac{1}{\tau_n} \int_S \Lambda_x \mathcal{N}_{2k-2}(x, y) dy \cdot \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy = 0,$$

откуда и следует (12). Теорема доказана.

Пример 1. Для нахождения решения задачи Рикье–Неймана с многочленами в граничных условиях или в правой части уравнения необходима следующая формула:

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, \xi) |\xi|^{2l} d\xi = -\frac{|x|^{2l+2}}{(2l+2)(2l+n)} + \frac{1}{(2l+2)(n-2)}, \tag{15}$$

где $l \in \mathbb{N}_0$. Докажем ее. В работе [19, замечание 2] была получена аналогичная формула

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, \xi) |\xi|^{2l} H_k(\xi) d\xi = -\frac{|x|^{2l+2} - (2l+2+k)/k}{(2l+2)(2l+2k+n)} H_k(x), \tag{16}$$

где $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени k , которая не работает в рассматриваемом случае, так как правая часть в ней не определена при $k = 0$.

Пусть $\{H_k^{(i)}(x) : i = 1, \dots, h_k, k \in \mathbb{N}_0\}$ – полная система однородных степени $k \in \mathbb{N}_0$ ортогональных на ∂S сферических гармоник такая, что $\int_{\partial S} (H_k^{(i)}(\xi))^2 ds_\xi = \omega_n$ (см. [25]) и $h_k = \frac{2k+n-2}{n-2} \binom{k+n-3}{n-3}$ при $n > 2$ ($h_k = 2$ при $n = 2$) – размерность базиса однородных гармонических полиномов степени k . В [8, теорема 1] установлено, что имеет место равенство

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E_2(x, \xi) |\xi|^{2l} H_k(\xi) d\xi = -\frac{|x|^{2l+2} H_k(x)}{(2l+2)(2l+2k+n)} + \frac{H_k(x)}{(2l+2)(2k+n-2)},$$

где $k \in \mathbb{N}_0$ и $l \in \mathbb{N}_0$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S E_2(x, \xi) |\xi|^{2l} d\xi = -\frac{|x|^{2l+2}}{(2l+2)(2l+n)} + \frac{1}{(2l+2)(n-2)}.$$

В [19, теорема 1] доказано, что при $x \in S$ и $\xi \in \bar{S}$

$$E_0(x, \xi) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+n-2}{k(2k+n-2)} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi),$$

причем приведенный ряд сходится равномерно по ξ . Поэтому имеем

$$\int_S E_0(x, \xi) |\xi|^{2l} d\xi = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+n-2}{k(2k+n-2)} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) \int_S H_k^{(i)}(\xi) |\xi|^{2l} d\xi = 0,$$

и, значит, учитывая (2), получаем доказываемую формулу.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РИКЬЕ-НЕЙМАНА

Найдем интегральное представление решения задачи Рикье–Неймана.

Теорема 3. Пусть функция $u \in C^{2m}(S) \cap C^{2m-1}(\bar{S})$ является решением задачи Рикье–Неймана (8), тогда она может быть представлена в виде

$$u(x) = \frac{(-1)^{m-1}}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\Delta_{\xi}^{m-k-1} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) \right) \varphi_k(\xi) ds_{\xi} + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) f(\xi) d\xi + C. \quad (17)$$

Доказательство. Пусть $u \in C^{2m}(S) \cap C^{2m-1}(\bar{S})$ – решение задачи Рикье–Неймана (8). Воспользуемся формулой

$$\int_D (v \Delta^m u - u \Delta^m v) d\xi = \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\Delta^k v \frac{\partial \Delta^{m-k-1} u}{\partial \nu} - \frac{\partial \Delta^k v}{\partial \nu} \Delta^{m-k-1} u \right) ds_{\xi}$$

при $D = \{ \xi : |\xi| < 1 - \varepsilon \}$, где $\varepsilon > 0$ – достаточно мало ($x \in D$) и $v(\xi) = E_{2m}(x, \xi)$. Аналогично доказательству (6) найдем

$$\int_D E_{2m}(x, \xi) f(\xi) d\xi = \int_{\partial D} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\Delta_{\xi}^k E_{2m}(x, \xi) \frac{\partial \Delta^{m-k-1} u}{\partial \nu} - \frac{\partial \Delta_{\xi}^k E_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^{m-k-1} u \right) ds_{\xi} + (-1)^m \omega_n u(x).$$

Если теперь опять воспользоваться предыдущей формулой для такой же области D , но при $v(\xi) = g_{2m}^n(x, \xi)$ (m -гармоническая в S функция из (9)), то получим аналогичное равенство с $g_{2m}^n(x, \xi)$ вместо $E_{2m}(x, \xi)$ и без последнего члена справа. Складывая эти равенства, группируя интегральные члены и меняя $k \rightarrow m - k - 1$, будем иметь

$$u(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_{|\xi|=1-\varepsilon} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{\partial \Delta_{\xi}^{m-k-1} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi)}{\partial \nu} \Delta^k u - \Delta_{\xi}^{m-k-1} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \right) ds_{\xi} + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_{|\xi|<1-\varepsilon} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (18)$$

Перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow +0$. При этом учтем, что функции $g_{2k}^n(x, \xi)$, а значит, и $\mathcal{N}_{2m}(x, \xi)$ и ее производные по ξ , непрерывны по ξ в $\{ \xi : 1 - \varepsilon < |\xi| \leq 1 \}$ при фиксированном $x \in S$. Поэтому в силу свойств функции Грина (10) поверхностные интегралы по $\partial S = \{ \xi : |\xi| = 1 \}$, содержащие функции $\frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} (\Delta^{m-k-1} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi))$ при $k = 1, \dots, m-1$ обратятся в 0, а функция $\frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} (\Delta^{m-1} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi))$ обратится в $(-1)^m$. Кроме того, в силу граничных условий задачи Рикье–Неймана будем также иметь $\frac{\partial}{\partial \nu} \Delta^k u(\xi) \rightarrow \varphi_k(\xi)$, $\varepsilon \rightarrow +0$ при $k = 0, \dots, m-1$. Таким образом, из (18) в пределе при $\varepsilon \rightarrow +0$ получим представление (17) при $C = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} u(\xi) ds_{\xi}$.

Лемма 4. 1. Пусть $f \in C^1(\bar{S})$, тогда функция

$$u_f(x) = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) f(\xi) ds_{\xi} \quad (19)$$

является решением следующей задачи Рикье–Неймана:

$$\Delta^m u(x) = f(x), \quad x \in S,$$

$$\frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = 0, \quad k = 0, \dots, m-2, \quad \frac{\partial \Delta^{m-1} u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \frac{1}{\omega_n} \int_S f(\xi) d\xi.$$

2. Пусть $\psi \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ ($\varepsilon > 0$), тогда функция

$$v_\psi(x) = \frac{(-1)^{m-1}}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) \psi(\xi) ds_\xi \tag{20}$$

является решением следующей задачи Рикье–Неймана:

$$\Delta^m v(x) = 0, \quad x \in S,$$

$$\frac{\partial \Delta^k v}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = 0, \quad k = 0, \dots, m-2, \quad \frac{\partial \Delta^{m-1} v}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \psi(x) - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \psi(\xi) ds_\xi.$$

Доказательство. 1. Исследуем функцию $u_f(x)$ без конкретизации гладкости функции $f(x)$. Для этого введем функции

$$\hat{\mathcal{N}}_2(x, \xi) = \mathcal{N}_2(x, \xi) - \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy, \quad \hat{\mathcal{N}}_{2k}(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_{2k-2}(x, y) \hat{\mathcal{N}}_2(y, \xi) dy, \quad k > 1.$$

Функция $\hat{\mathcal{N}}_2(x, \xi)$ обладает свойством

$$\int_S \hat{\mathcal{N}}_2(x, \xi) dx = \int_S \mathcal{N}_2(x, \xi) dx - \frac{\tau_n}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_2(y, \xi) dy = 0.$$

Нетрудно видеть, что верно равенство

$$\mathcal{N}_{2m}(x, \xi) = \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) \left(\mathcal{N}_2(y, \xi) - \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_2(y_1, \xi) dy_1 \right) dy = \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) \hat{\mathcal{N}}_2(y, \xi) dy. \tag{21}$$

Поэтому в силу свойств объемного потенциала, переставляя интегралы, будем иметь

$$\Delta_x \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_4(x, \xi) f(\xi) d\xi = \Delta_x \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) dy \frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_2(y, \xi) f(\xi) d\xi = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_2(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

откуда аналогично следует

$$\Delta_x \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_6(x, \xi) f(\xi) d\xi = \Delta_x \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_4(x, y) dy \frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_2(y, \xi) f(\xi) d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_2(x, y) dy \frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_2(y, \xi) f(\xi) d\xi = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_4(y, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Используя предыдущие формулы, по индукции, меняя порядок интегрирования будем иметь

$$\Delta_x \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) f(\xi) d\xi = \Delta_x \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) dy \frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_2(y, \xi) f(\xi) d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_{2m-4}(x, y) dy \frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_2(y, \xi) f(\xi) d\xi = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_{2m-2}(y, \xi) f(\xi) d\xi. \tag{22}$$

Из последней формулы, используя свойство объемного потенциала, нетрудно получить

$$\Delta_x^m u_f(x) = \Delta_x^m \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) f(\xi) d\xi = -\Delta_x \frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_2(x, \xi) f(\xi) d\xi =$$

$$= -\Delta_x \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, \xi) f(\xi) d\xi = f(x). \tag{23}$$

Далее, в силу слабой особенности функции $\mathcal{N}_{2m}(x, \xi)$ (особенность такая же, как у элементарного решения $E_{2m}(x, \xi)$ (9)) ее можно дифференцировать под знаком интеграла, и поэтому из (12) следует, что при $m > 1$

$$\frac{\partial u_f}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\partial S} = \Lambda_x u_f(x) \Big|_{\partial S} = \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_S \Lambda_x \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) \Big|_{x \in \partial S} f(\xi) d\xi = 0.$$

Кроме того, в силу (22) при $k = 1, \dots, m - 2$ получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta^k u_f}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\partial S} &= \Lambda_x \Delta_x^k u_f(x) \Big|_{\partial S} = \frac{(-1)^{m-k}}{\omega_n} \int_S \Lambda_x \hat{\mathcal{N}}_{2m-2k}(x, \xi) \Big|_{x \in \partial S} f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{(-1)^{m-k}}{\omega_n} \int_S \Lambda_x \mathcal{N}_{2m-2k}(x, \xi) \Big|_{x \in \partial S} f(\xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Аналогично сделанному выше, в соответствии с (22) и (12) найдем

$$\frac{\partial \Delta^{m-1} u_f}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\partial S} = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \Lambda_x \hat{\mathcal{N}}_2(x, \xi) \Big|_{x \in \partial S} f(\xi) d\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_S f(\xi) d\xi.$$

Это значит, что функция $u_f(x)$ из (19) является решением задачи Рикье–Неймана (8) при $\varphi_k = 0$, $k = 0, \dots, m - 2$ и $\varphi_{m-1} = \frac{1}{\omega_n} \int_S f(\xi) d\xi$.

Какую гладкость достаточно наложить на функцию $f(x)$, чтобы рассуждения сделанные относительно $u_f(x)$, были справедливы? Для выполнения последнего равенства из (23) для объемного потенциала достаточно, чтобы $f \in C^1(\bar{S})$ (см. [16]). При этом объемный потенциал с плотностью $f(x)$ будет также из $C^1(\bar{S})$ [24], и значит, вся цепочка равенств из (23) верна.

2. Рассмотрим функцию $v_\psi(x)$ из (20). Подставляя значение $\mathcal{N}_{2m}(x, \xi)$ из (21) и меняя порядок интегрирования, будем иметь

$$v_\psi(x) = \frac{(-1)^{m-1}}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) dy \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \hat{\mathcal{N}}_2(y, \xi) \psi(\xi) ds_\xi.$$

В силу полученных выше свойств функций $u_f(x)$ и $\hat{\mathcal{N}}_2(x, \xi)$ функция $v_\psi(x)$ является решением задачи Рикье–Неймана (8) при $m = m - 1$, $\varphi_k = 0$, $k = 0, \dots, m - 3$,

$$\varphi_{m-2} = \frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \hat{\mathcal{N}}_2(y, \xi) \psi(\xi) ds_\xi dy = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \psi(\xi) ds_\xi \frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_2(y, \xi) dy = 0$$

и

$$f(x) = \Delta^{m-1} v_\psi(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \hat{\mathcal{N}}_2(x, \xi) \psi(\xi) ds_\xi.$$

Поэтому по свойству потенциала простого слоя будем иметь

$$\Delta^m v_\psi(x) = \Delta \Delta^{m-1} v_\psi(x) = \Delta \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \hat{\mathcal{N}}_2(x, \xi) \psi(\xi) ds_\xi = 0,$$

и, кроме того, по свойству (4) функции Грина $\mathcal{N}_2(x, \xi)$ запишем

$$\frac{\partial \Delta^{m-1} v_\psi}{\partial \mathbf{v}} \Big|_{\partial S} = \psi(x) - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \psi(\xi) ds_\xi.$$

Таким образом, функция $v_\psi(x)$ является решением задачи Рикье–Неймана (8) при $f = 0$, $\varphi_k = 0$, $k = 0, \dots, m - 2$ и $\varphi_{m-1}(x) = \psi(x) - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \psi(\xi) ds_\xi$, что и утверждалось.

Какая гладкость функции $\psi(x)$ достаточна для правомерности сделанных выше рассуждений? Поскольку функция $v_\psi(x)$ была представлена в виде, аналогичном виду функции $u_f(x)$ с плотностью $\frac{1}{\omega_n} \int_S \hat{\mathcal{N}}_2(y, \xi) \psi(\xi) ds_\xi$, то также, как и в предыдущем случае, достаточно, чтобы эта плотность была из $C^1(\bar{S})$, а это выполнено, если $\psi \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ (см. [26]). Лемма доказана.

Замечание 1. При $m = 1$ для функции ψ достаточно потребовать, чтобы $\psi \in C(\partial S)$.

Теорема 4. Пусть $\varphi_0 \in C(\partial S)$, $\varphi_k \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ при $k = 1, \dots, m - 1$ и $f \in C^1(\bar{S})$. Тогда функция

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \left(\mathcal{N}_{2k+2}(x, \xi) - \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_{2k+2}(x, y) dy \right) \varphi_k(\xi) ds_\xi + \frac{(-1)^m}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) f(\xi) d\xi + C \quad (24)$$

является решением задачи Рикье–Неймана (8) при условии, что

$$\int_{\partial S} \varphi_{m-1}(\xi) ds_{\xi} = \int_S f(\xi) d\xi. \tag{25}$$

Доказательство. Докажем, что функция $u(x)$, определяемая по формуле (17), является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta^m u(x) &= f(x), \quad x \in S, \\ \frac{\partial \Delta^k u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} &= \varphi_k, \quad k = 0, \dots, m-2, \\ \frac{\partial \Delta^{m-1} u}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} &= \varphi_{m-1}(x) - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_{m-1}(\xi) ds_{\xi} + \frac{1}{\omega_n} \int_S f(\xi) d\xi. \end{aligned} \tag{26}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае при выполнении условия (25) следует утверждение теоремы. Доказательство этого утверждения проведем индукцией по m . При $m = 2$ в [13, теорема 5] доказано, что для функции вида

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \Delta_{\xi} \mathcal{N}_4(x, \xi) \varphi_0(\xi) ds_{\xi} - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_4(x, \xi) \varphi_1(\xi) ds_{\xi} + \\ &\quad + \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_4(x, \xi) f(\xi) d\xi + C \equiv v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) + C \end{aligned}$$

верны равенства

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(x) &= 0 + 0 + f(x) = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{x \in \partial S} &= \varphi_0(x) + 0 + 0 = \varphi_0(x), \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial \nu} \Big|_{x \in \partial S} &= 0 + \left(\varphi_1(x) - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_1(\xi) d\xi \right) + \frac{1}{\omega_n} \int_S f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Здесь, в формулах справа, указан результат применения соответствующих операторов к функциям v_1, v_2 и v_3 . Это соответствует доказываемому утверждению при $m = 2$. Предположим верность утверждения (26) при $m = m - 1$. Представим $u(x)$ из (17) в виде

$$u(x) = u_m(x) + u_f^{(m)}(x) + C, \tag{27}$$

где функция $u_f^{(m)}(x)$ определена в (19) (здесь дополнительно введен верхний индекс m , чтобы избежать путаницы) и

$$u_m(x) = \frac{(-1)^{m-1}}{\omega_n} \int_{\partial S} \sum_{k=0}^{m-1} \left(\Delta_{\xi}^{m-k-1} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) \right) \varphi_k(\xi) ds_{\xi}.$$

Заметим, что функция $u_f(x)$ при $f \in C^1(\bar{S})$ по лемме 4 является решением задачи (26) при $\varphi_k = 0, k = 0, \dots, m - 1$. Поэтому достаточно доказать, что функция $u_m(x) = u(x) - u_f^{(m)}(x) + C$ является решением задачи (26) при $f = 0$. Преобразуем функцию $u_m(x)$. Из равенства (14) при $k > 1$ нетрудно получить

$$\Delta_{\xi}^k \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) = -\Delta_{\xi}^{k-1} \mathcal{N}_{2m-2}(x, \xi),$$

а поэтому

$$\begin{aligned} u_m(x) &= \frac{(-1)^{m-1}}{\omega_n} \left(\int_{\partial S} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) \varphi_{m-1}(\xi) ds_{\xi} + \int_{\partial S} \Delta_{\xi} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) \varphi_{m-2}(\xi) ds_{\xi} \right) + \\ &\quad + \frac{(-1)^{m-2}}{\omega_n} \left(\int_{\partial S} \sum_{k=0}^{m-2} \left(\Delta_{\xi}^{m-k-2} \mathcal{N}_{2m-2}(x, \xi) \right) \varphi_k(\xi) ds_{\xi} - \int_{\partial S} \mathcal{N}_{2m-2}(x, \xi) \varphi_{m-2}(\xi) ds_{\xi} \right) = \\ &= u_{m-1}(x) + \frac{(-1)^{m-1}}{\omega_n} \left(\int_{\partial S} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) \varphi_{m-1}(\xi) ds_{\xi} + \int_{\partial S} \Delta_{\xi} \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) \varphi_{m-2}(\xi) ds_{\xi} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\partial S} \mathcal{N}_{2m-2}(x, \xi) \varphi_{m-2}(\xi) ds_{\xi} \right). \end{aligned}$$

Используя равенство (14) и обозначения из (19) и (20), можем записать

$$\begin{aligned} u_m(x) &= u_{m-1}(x) + v_{\varphi_{m-1}}(x) + \frac{(-1)^{m-1}}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2m-2}(x, y) dy \cdot \frac{1}{\tau_n} \int_{\partial S} \varphi_{m-2}(\xi) ds_\xi = \\ &= u_{m-1}(x) + v_{\varphi_{m-1}}(x) + u_1^{(m-1)}(x) \cdot \frac{1}{\tau_n} \int_{\partial S} \varphi_{m-2}(\xi) ds_\xi. \end{aligned} \quad (28)$$

Для законности использования функции $v_{\varphi_{m-1}}(x)$ по лемме 4 достаточно потребовать $\varphi_0 \in C(\partial S)$, $\varphi_k \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ при $k = 1, \dots, m-1$. Поскольку по предположению индукции функция $u_{m-1}(x)$ является $(m-1)$ -гармонической, то согласно лемме 4 можно записать

$$\Delta^m u_m(x) = 0 + 0 + \Delta 1 \cdot \frac{1}{\tau_n} \int_{\partial S} \varphi_{m-2}(\xi) ds_\xi = 0.$$

Кроме того, из (28) также следует, что на ∂S в силу леммы 4 и предположения индукции верны равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta^k u_m}{\partial \nu} &= \frac{\partial \Delta^k u_{m-1}}{\partial \nu} + 0 + 0 = \varphi_k(x), \quad k = 0, \dots, m-3, \\ \frac{\partial \Delta^{m-2} u_m}{\partial \nu} &= \frac{\partial \Delta^{m-2} u_{m-1}}{\partial \nu} + 0 + \frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{1}{\tau_n} \int_{\partial S} \varphi_{m-2}(\xi) ds_\xi dy = \\ &= \varphi_{m-2}(x) - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_{m-2}(\xi) ds_\xi + \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_{m-2}(\xi) ds_\xi = \varphi_{m-2}(x), \\ \frac{\partial \Delta^{m-1} u_m}{\partial \nu} &= 0 + \left(\varphi_{m-1}(x) - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_{m-1}(\xi) ds_\xi \right) + 0 = \varphi_{m-1}(x) - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_{m-1}(\xi) ds_\xi, \end{aligned}$$

а значит, функция $u_m(x)$ является решением задачи (26) при $f = 0$. Шаг индукции доказан, и, значит, функция из (17) является решением задачи (8).

Из формулы (14) нетрудно получить равенство

$$\Delta_\xi^k \mathcal{N}_{2m}(x, \xi) = (-1)^k \left(\mathcal{N}_{2m-2k}(x, \xi) - \frac{1}{\tau_n} \int_S \mathcal{N}_{2m-2k}(x, y) dy \right),$$

с помощью которого формула (17) преобразуется к виду (24). Теорема доказана.

Замечание 2. Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи Рикье–Неймана (25) для полигармонического уравнения ранее было получено в [23]. Из доказательства теоремы 4 следует, что если условие (25) не выполнено, то функция $u(x)$ из (24) является решением задачи Рикье–Неймана (26).

5. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим один частный случай граничных условий задачи Рикье–Неймана.

Теорема 5. Пусть $\varphi_0 \in C(\partial S)$, $\varphi_k \in C^{1+\varepsilon}(\partial S)$ и $\int_{\partial S} \varphi_k(\xi) ds_\xi = 0$ при $k = 1, \dots, m-1$, а $f = 0$. Тогда решение задачи Рикье–Неймана (8) существует и его можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} u_k[\varphi_k](x) + C, \quad (29)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} u_k[\varphi](x) &= \frac{(-1)^k}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_{2k+2}^0(x, \xi) \varphi(\xi) ds_\xi, \\ \mathcal{N}_{2k+2}^0(x, \xi) &= \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) \mathcal{N}_{2k}^0(y, \xi) dy, \quad k > 0; \quad \mathcal{N}_2^0(x, \xi) = \mathcal{N}_2(x, \xi). \end{aligned}$$

Для $(k+1)$ -гармонических функций $u_k[\varphi_k](x)$ выполнены условия

$$\Delta u_k[\varphi](x) = u_{k-1}[\varphi](x), \quad \frac{\partial u_k[\varphi]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = 0, \quad k \in \mathbb{N}; \quad \Delta u_0[\varphi](x) = 0, \quad \frac{\partial u_0[\varphi]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \varphi(x). \quad (30)$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что при требуемых в теореме условиях все условия теоремы 4 тоже выполнены, а значит, решение задачи Рикье–Неймана существует. Докажем, что формула (29) задает это решение. Для этого достаточно убедиться в справедливости равенств (30). Согласно определению функции $\mathcal{N}_{2k}^0(x, \xi)$ и по свойству о бъемного потенциала при $k > 0$ запишем

$$\Delta u_k[\varphi](x) = \Delta_x \frac{(-1)^k}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_{2k+2}^0(x, \xi) \varphi(\xi) ds_\xi = \frac{(-1)^{k-1}}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_{2k}^0(x, \xi) \varphi(\xi) ds_\xi = u_{k-1}[\varphi](x),$$

а также найдем $\Delta u_0[\varphi](x) = 0$. Кроме того, при $k > 0$, используя (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k[\varphi]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} &= \frac{(-1)^k}{\omega_n} \int_S \Lambda_x \mathcal{N}_2(x, y) \Big|_{x \in \partial S} \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_{2k}^0(y, \xi) \varphi(\xi) ds_\xi dy = \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{\omega_n} \int_{\partial S} \left(\int_S \mathcal{N}_{2k}^0(y, \xi) dy \right) \varphi(\xi) ds_\xi \equiv \int_{\partial S} F(\xi) \varphi(\xi) ds_\xi. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой

$$\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2k}^0(y_1, \xi) dy_1 = \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(y_1, y_2) dy_1 \cdots \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(y_k, \xi) dy_k,$$

симметричностью функция $\mathcal{N}_2(x, \xi)$ и формулой (15) убеждаемся, что функция

$$F(\xi) = \frac{(-1)^{k-1}}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_{2k}^0(y, \xi) dy$$

является многочленом степени k по $|\xi|^2$, и, значит, $F(\xi)|_{\partial S} = C$, а поэтому по условию теоремы

$$\frac{\partial u_k[\varphi_k]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \int_{\partial S} F(\xi) \varphi_k(\xi) ds_\xi = C \int_{\partial S} \varphi_k(\xi) ds_\xi = 0.$$

Если $k = 0$, то согласно (4)

$$\frac{\partial u_0[\varphi_0]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \frac{\partial \mathcal{N}_2(x, \xi)}{\partial \nu_x} \Big|_{\partial S} \varphi_0(\xi) ds_\xi = \varphi_0(x) \Big|_{\partial S} - \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \varphi_0(\xi) ds_\xi = \varphi_0(x).$$

Теорема доказана.

Пример 2. Вычислим функции $u_p[H_k](x)$ из формулы (29) при $p \in \mathbb{N}_0$, где $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени $k \in \mathbb{N}$. В этом случае условия теоремы 5 выполнены, поскольку справедливо равенство $\int_{\partial S} H_k(\xi) ds_\xi = 0$.

В работе [19] было установлено, что при $x \in S$ и $\xi \in \partial S$ верны равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_2(x, \xi) &= E(x, \xi) - E_0(x, \xi) = \frac{1}{n-2} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k+n-2} + \frac{k+n-2}{k(2k+n-2)} \right) \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi) = \frac{1}{n-2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{h_k} H_k^{(i)}(x) H_k^{(i)}(\xi), \end{aligned}$$

где гармонические полиномы $H_k^{(i)}(x)$ определены в примере 1. Поэтому в силу ортонормируемости полиномов $H_k^{(i)}(x)$ на ∂S и равномерной сходимости ряда по $\xi \in \partial S$ имеем

$$\begin{aligned} u_0[H_k](x) &= \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_2(x, \xi) H_k(\xi) ds_\xi = \frac{1}{(n-2)\omega_n} \int_{\partial S} H_k(\xi) ds_\xi + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{h_m} H_m^{(i)}(x) \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} H_m^{(i)}(\xi) H_k(\xi) ds_\xi = \frac{1}{k} H_k(x). \end{aligned}$$

Вычислим $u_1[H_k](x)$. С помощью (16) при $l = 0$ и предыдущих вычислений найдем

$$\begin{aligned} u_1[H_k](x) &= -\frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_4^0(x, \xi) H_k(\xi) ds_\xi = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_2(y, \xi) H_k(\xi) ds_\xi dy = \\ &= -\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) u_0[H_k](y) dy = -\frac{1}{k} \frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) H_k(y) dy = \frac{1}{k} \frac{|x|^2 - 1 - 2/k}{2(2k+n)} H_k(x). \end{aligned}$$

Аналогично в общем случае для $u_p[H_k](x)$ при $p \in \mathbb{N}$ имеем

$$u_p[H_k](x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial S} \mathcal{N}_{2p+2}^0(x, \xi) H_k(\xi) ds_\xi = -\frac{1}{\omega_n} \int_S \mathcal{N}_2(x, y) u_{p-1}[H_k](y) dy. \quad (31)$$

Отсюда, используя найденную выше функцию $u_1[H_k](x)$ и формулу (16), получим

$$u_2[H_k](x) = \left(\frac{|x|^4 - 1 - 4/k}{8k(2k+n)(2k+2+n)} - (k+2) \frac{|x|^2 - 1 - 2/k}{4k^2(2k+n)^2} \right) H_k(x).$$

Нетрудно убедиться, что 3-гармоническая функция $u_2[H_k](x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial u_2[H_k]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \left(\frac{(k+4)|x|^4 - k - 4}{8k(2k+n)(2k+2+n)} - (k+2) \frac{(k+2)|x|^2 - k - 2}{4k^2(2k+n)^2} \right) H_k(x) \Big|_{\partial S} = 0,$$

и поскольку

$$\Delta u_2[H_k] = \left(\frac{|x|^2}{2k(2k+n)} - \frac{(k+2)}{2k^2(2k+n)} \right) H_k(x) = u_1[H_k],$$

то

$$\frac{\partial \Delta u_2[H_k]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = \frac{(k+2)|x|^2 - k - 2}{2k(2k+n)} H_k(x) \Big|_{\partial S} = 0.$$

Кроме того, верны равенства

$$\Delta^2 u_2[H_k] = \frac{1}{k} H_k(x) = u_0[H_k], \quad \frac{\partial \Delta^2 u_2[H_k]}{\partial \nu} \Big|_{\partial S} = H_k(x).$$

Используя (31) и (16), можно последовательно найти любую функцию $u_p[H_k](x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Begehr H.* Biharmonic Green functions // *Le Matematiche*. 2006. V. LXI. P. 395–405.
2. *Begehr H., Vaitekhovich T.* Modified harmonic Robin function // *Complex Var. and Ellipt. Equat.* 2013. V. 58. № 4. P. 483–496.
3. *Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh.* On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // *Adv. Pure Appl. Math.* 2015. V. 6. № 3. P. 163–172.
4. *Ying Wang, Liuqing Ye.* Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector // *Complex Var. Ellipt. Equat.* 2013. V. 58. № 1. P. 7–22.
5. *Ying Wang* Tri-harmonic boundary value problems in a sector // *Complex Var. Ellipt. Equat.* 2014. V. 59. № 5. P. 732–749.
6. *Boggio T.* Sulle funzioni di Green d'ordine m // *Palermo Rend.* 1905. V. 20. P. 97–135.
7. *Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y.* Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // *Complex Var. Ellipt. Equat.* 2008. V. 53. P. 177–183.
8. *Karachik V.V., Turmetov B.Kh.* On Green's function of the Robin problem for the Poisson equation // *Adv. in Pure and Appl. Math.* 2019. V. 10. № 3. С. 203–214.
9. *Карачик В.В.* Функция Грина задачи Дирихле для 3-гармонического уравнения в шаре // *Матем. заметки*. 2020. V. 107. № 1. С. 87–105.
10. *Карачик В.В., Торбек Б.Т.* О задаче Дирихле—Рикье для бигармонического уравнения // *Матем. заметки*. 2017. Т. 102. № 1. С. 39–51.
11. *Карачик В.В.* Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // *Матем. тр.* 2016. Т. 19. № 2. С. 86–108.
12. *Солдатов А.П.* О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана // *Дифференц. ур-ния*. 2020. Т. 56. № 2. С. 217–225.

13. *Karachik V.V.* Функции Грина задач Навье и Рикье–Неймана для бигармонического уравнения в шаре // Дифференц. ур-ния. 2021. Т. 57. № 5. Р. 673–686.
14. *Sweers G.* A survey on boundary conditions for the biharmonic // *Complex Var. and Ellipt. Equat.* 2009. V. 54. P. 79–93.
15. *Karachik V., Turmetov B., Yuan H.* Four Boundary Value Problems for a Nonlocal Biharmonic Equation in the Unit Ball // *Mathematics.* 2022. V. 10. № 7. P. 1–21.
16. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.
17. *Karachik V.V.* Greens function of Dirichlet problem for biharmonic equation in the ball // *Complex Var. and Ellipt. Equat.* 2019. V. 64. № 9. P. 1500–1521.
18. *Karachik V.V.* О функции Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 1. С. 71–86.
19. *Karachik V.V., Турметов Б.Х.* О функции Грина третьей краевой задачи для уравнения Пуассона // *Матем. тр.* 2018. Т. 21. № 1. С. 17–34.
20. *Бицадзе А.В.* К задаче Неймана для гармонических функций // *Докл. АН СССР.* 1990. Т. 311. № 1. С. 11–13.
21. *Karachik V.V.* Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана // *Матем. заметки.* 2014. Т. 96. № 2. С. 228–238.
22. *Karachik V.V.* Dirichlet and Neumann boundary value problems for the polyharmonic equation in the unit ball // *Mathematics.* 2021. V. 9. № 16. 1907.
23. *Karachik V.V.* Задача Рикье–Неймана для полигармонического уравнения в шаре // *Дифференц. ур-ния.* 2018. Т. 54. № 5. С. 653–662.
24. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики М.: Наука, 1981
25. *Karachik V.V.* On one set of orthogonal harmonic polynomials // *Proc. of the Am. Math Soc.* 1998. V. 126. № 12. P. 3513–3519.
26. *Алимов Ш.А.* Об одной задаче с наклонной производной // *Дифференц. ур-ния* 1981. Т. 17. № 10. С. 1738–1751.

GREEN'S FUNCTION FOR THE RIEMANN–NEUMANN PROBLEM FOR A POLYHARMONIC EQUATION IN THE UNIT SPHERE

V. V. Karachik*

South Ural State University (NIU), Lenina Ave. 76, Chelyabinsk, 454080, Russia

**e-mail: karachik@susu.ru*

Received 10 January, 2023

Revised 10 January, 2023

Accepted 06 February, 2024

Abstract. The Green's function for the Riemann–Neumann problem for a polyharmonic equation in the unit sphere is constructed, and an integral representation of the solutions to the Riemann–Neumann problem is provided. Two examples are presented.

Keywords: polyharmonic equation, Riemann–Neumann problem, Green's function.